A1. Теория случайных процессов и полей.

В.И.Афанасьев

Принцип инвариантности для критического процесаа Гальтона-Ватсона, достигающего высокого уровня

В.А.Барвинок, В.И.Богданович, А.Н.Плотников

О спектральной структуре серий в последовательной выборке стационарного процесса

В.Г.Бурмистрова, М.Г.Москвичева

Оптимальное значение целевой функции в одной задаче о "разладке"

А.С.Калитвин, В.А.Калитвин

О математическом моделировании уравнениями Романовского некоторых задач марковских цепей

В.В.Лаврентьев

О структуре банаховозначных семимартингалов

О.В.Назарько

О некоторых фактах теории деформированных мартингалов

И.В.Павлов, О.В.Назарько

Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора для деформированных мартингалов

И.Ю.Седых

Предельное поведение решения системы нелинейных стохастических уравнений

A2. Математическая статистика. Стохастическая оптимизация.

А.В.Бернштейн

Восстановление по данным инвариантных функций

М.В.Болдин

Об устойчивости знаковых тестов в AR(p)

А.В.Жарков

Статистические свойства функции Гомпертца

В.Н.Зубов

Исследование скорости слабой сходимости степенных статистик согласия к хи-квадрат распределению

А.В.Колногоров

Нахождение минимаксных стратегий и риска в задаче о двуруком бандите с нормально распределенными доходами

А.В.Колодзей

Критерии согласия для случайных комбинаторных объектов

С.Ю.Мельников

О возможности использования вероятностной функции конечного автомата Мура в задаче определения функции выходов

И.С.Орлова, С.Я.Шатских

Уравнения Пфаффа для условных квантилей

Е.С.Паламарчук
Вероятностные свойства оптимального управления для линейного регулятора с дисконтированием
С.Г.Халиуллин
Один критерий стационарности для условно-гауссовских моделей
И.Г.Эрлих
Тесты минимального расстояния для проверки линейных гипотез в ARMA модели

А3. Стохастические аспекты задач передачи, обработки и защиты информации.

А.К.Вишневский, О.А.Финько
Реализация систем подстановок числовыми полиномами
В.М.Деундяк, М.А.Жданова
О некотором обобщении марковской математической модели источника ошибок
А.Н.Чупрунов, И.Фазекаш
О вероятности отсутствия ошибки в сообщении при помехоустойчивом кодировании

А4. Вероятностные методы в алгебре, анализе, геометрии, дискретной математике и математической физике.

А.В.Захаров
Пример построения кубатурной формулы для вероятностного представления решений уравнений математической физики
А.М.Ионова, М.С.Матвейчук
Мера на U-проекторах
В.А.Копытцев, В.Г.Михайлов
Исследование числа решений случайных нелинейных систем включений путем сведения их к линейным системам включений
В.А.Копытцев, В.Г.Михайлов
Предельная теорема для числа ненулевых решений случайного включения
Н.М.Меженная, В.Г.Михайлов
Один подход к различению гипотез в задаче о плотном вложении
Ю.А.Самохин
Об асимптотическом интегрировании одного дифференциального уравнения с колебательно убывающими коэффициентами и случайной частотой возмущения

А5. Вероятностные аспекты теории функций и функционального анализа.

А6. Фундаментальные исследования в экономике, страховании и финансах.

А.В.Баран
Оценка рыночной стоимости страховой компании в условиях неопределенности
В.К.Доманский, В.Л.Крепс
Решение игр торга двумя рисковыми активами. Общий случай
В.Л.Крепс
Решения игр торга двумя рисковыми активами. Случай двух и трех состояний

Г.В.Мироненко
Алгоритм метода ветвей и границ для рюкзака с группами

Б1. Безопасность компьютерных систем.

Ю.А.Горбунов, И.А.Жуйков, Е.Л.Кротова
Выявление злоумышленника статистическими методами в компьютерных системах

Д.В.Кириллов
Управление распространением полномочий на основе рисков в событийно-обусловленном делегировании и отзыве полномочий

Ю.В.Косолапов, Е.С.Чекунов
Применение F-метрики в симметричных кодовых криптосистемах

В.В.Подколзин
Построение инъективного рюкзачного вектора для заданного множества значений на основе вариации

Д.В.Сергеев
Источники данных для обнаружения бот-сетей

С.Ж.Симаворян
Применение методов Data Mining для обнаружения инсайдеров

С.А.Чурилов
Методика оценки реальной защищенности информации в информационно-вычислительной сети

Б2. Геометрическая нелинейная оптика.

М.Е.Галахова
Модель динамики развития предприятия с учетом природоохранных затрат

А.Н.Кириллов
Моделирование динамики процесса управления группой варочных котлов

А.А.Чубатов, В.Н.Кармазин
Одновременная экспресс-идентификация интенсивностей нескольких источников загрязнения атмосферы

Б3. Инженерно-технологическая математика.

В.В.Богданов, А.Ю.Богданов, Е.С.Лядов
Механизмы высвобождения смазочного материала при разрушении частиц диатомита в процессе контактного взаимодействия заготовки и абразивного инструмента

В.В.Богданов, А.Ю.Богданов
Моделирование влияния микрокапсул на основе частиц диатомита, обладающих смазочно-демпфирующими свойствами, на качество шлифованных поверхностей

С.Г.Буланов
Элементы компьютерного анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой

В.Л.Воронцова
О зависимости эволюции предельных циклов от эксцентриситета орбиты
Э.Р.Гиззатова, С.И.Спивак
Численное моделирование решения прямой кинетической задачи для процесса полимеризации диенов на неодимсодержащих катализаторах
Д.Е.Ефимов
Оценка нормы разности между частичными произведениями некоторых последовательностей вполне непрерывных операторов
А.С.Захарченко
Модель роста пленки карбидов в трубах при движении внутри них тел с оплавляющимся пластмассовым уплотнителем
Н.Б.Тушканов, В.А.Назаров
Синергетический подход к синтезу системы управления мультизвенным манипулятором

Б4. Информационные технологии и задачи связи.

Я.М.Агаларов, С.Я.Шоргин
Об одном численном методе расчета телекоммуникационной сети с учетом повторных передач
О.Албхаиси, И.И.Цитович
Некоторые задачи оценки пропускной способности корпоративных сетей связи
А.В.Алтухов
Критерии полноты и непротиворечивости баз "если-то" правил. Разрешение конфликтов
Г.А.Андрианов
Учет влияния повторных вызовов при интерпретации результатов измерения качества обслуживания
М.А.Буранова
Оценивание производительности мультисервисной сети при введении приоритетного управления трафиком
А.Н.Гуда, А.В.Евдокимов
Вычислительно-эффективные алгоритмы оптимизации медицинских информационных систем
Н.В.Дмитриев
Имитационная модель группового взаимодействия автоматизированных телескопов
Д.Р.Дорошин, Д.А.Леднов, А.В.Хацкевич
Акустическая и фонотактическая системы текстонезависимой идентификации дикторов
И.А.Жарков
Автоматическая система решения стереометрических задач

В.П.Зязин, Д.А.Леднов, М.В.Федюкин
Преподавание речевых технологий для специальности "Компьютерная безопасность"
А.В.Иванов
Идентификация параметров в моделях процессов функционирования информационного портала
Н.И.Козырева
Численный анализ характеристик сетевого узла типа G/G/1
Б.Я.Лихтциндер, Н.М.Татаринова
Применение алгоритма "leaky bucket" для оценки перегрузки операторов ЦОВ
Т.С.Лугуев
Реализация алгоритмов проектирования и анализа беспроводных сенсорных сетей
Р.Р.Мавлютов
Особенности концептуальной модели автоматического анализа текста
Е.Е.Маликова, И.И.Цитович
Стратегия группового поллинга в широкополосных беспроводных сетях мониторинга
М.А.Ноздрачев
Об оценивании параметра Херста трафика мультисервисной сети
А.В.Печинкин, С.Я.Шоргин
Исследование систем обслуживания с ограничением на суммарный объем находящихся в них заявок
С.Н.Помазанов
Модель проверки олимпиадных задач по программированию с использованием автоматической системы
Р.Н.Селин, С.Ю.Беседина
Алгоритмы индексации больших массивов документов
А.И.Стефанович
Информационные технологии оптимизации функционирования web-портала
И.И.Цитович, А.В.Чернушевич
О влиянии гистерезиса управления трафиком на эффективность функционирования мультисервисной сети
Ф.И.Цитович
Субоптимальная последовательная проверка непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами
Р.Б.Чавтараев
Применение средств WPF для реализации инструментария подготовки электронных коллекций
В.Б.Чадов
О нечетких укладах с резервированием

В.Н.Шаповалов
Оптимизирующие преобразования программ на основе SSA-формы для массивов
Т.А.Шорникова, О.В.Пилипенко, Ю.Е.Шишкинв
Обобщенная термодинамическая формулировка понятия системы

Б5. Квантовые вычисления.

Б6. Математические методы биологических и экологических систем.

Д.В.Журкин, А.Л.Рабинович
Алгоритм представления цепной молекулы и имитации методом Монте-Карло
И.А.Ильичева, Л.А.Панченко, Д.Ю.Нечипуренко, М.В.Головкин, Р.В.Полозов, Ю.Д.Нечипуренко, С.Л.Гроховский
Ультразвуковое расщепление ДНК как дополнительный источник информации для анализа геномных последовательностей
Н.А.Колодий, Т.И.Колодий
Вероятностная модель канцерогенеза для системы из L органов
Н.А.Коптева, С.А.Коробской, Н.М.Удинцова, И.П.Невольских, Г.А.Уфимцева
Априорное определение удельного сопротивления плуга с учетом влажности и типа почвы
О.В.Кузьмин, М.В.Серёгина
Восходящие сечения обобщенной пирамиды Паскаля и модели развития популяций
С.Е.Курушина
Уравнение Гинзбурга-Ландау и дисперсионное соотношение для системы фитопланктонов-зоо- планктон-рыба с флуктуирующими параметрами
С.Е.Курушина, Л.И.Громова, В.В.Максимов
Численный анализ влияния флуктуаций параметров на образование пространственно-временных структур в системе фитопланктон-зоопланктон-рыба
А.Л.Рабинович, А.П.Любарцев
Изучение фосфолипидных мембран методом молекулярной динамики
Л.А.Хворова
Идентификация параметров модели фенологического развития зерновых культур в условиях Алтайского края

Б7. Математические модели в жидких кристаллов.

Б8. Математические методы в педагогических исследованиях.

Е.Ф.Баранов, Т.В.Стебеняева
Концептуальная модель корпоративной системы обучения персонала
Г.А.Жаркова
Компетентностный подход в обучении информатике и математике
С.Н.Ларин, В.В.Юдинова
Метод оценки профессиональных компетенций специалистов

И.Н.Маслякова
Рекуррентное оценивание сложности тестовых заданий, оцениваемых непрерывным показателем качества

Б9. Математические модели в теории оболочек.

Д.А.Жуков
О жесткости овалоида относительно бесконечно малых MG-деформаций

Е.В.Колпакова
Существование и единственность обобщенных решений для модели Маргерра-Власова колебаний пологих оболочек в неограниченной области

Н.Н.Столяров, Н.И.Дедов, В.Н.Исуткина
Простые и сложные нагружения гибких упругопластических оболочек

Б10. Математическое моделирование процессов рассеяния примесей в турбулентной атмосфере.

Б11. Математическое моделирование свойств материалов и конструкций.

В.И.Алтухов, О.А.Митюгова, А.В.Санкин
Модель аномальной зависимости проводимости от состава твердых растворов на основе карбида кремния

В.Е.Винокуров, Л.Н.Кротов, В.К.Покровский
Математическое моделирование контроля сечения стального троса в процессе эксплуатации

И.А.Гарькина, А.М.Данилов, Е.В.Королев
Аналитические методы при синтезе материалов: опыт применения

А.И.Задорожный, А.Т.Болокова, Н.С.Задорожная
Метод регуляризации сингулярных возмущений, точки поворота и проблема концентрационного пика газовой примеси в металле

А.С.Иванов, В.И.Ковалев, О.И.Челяпина
Тестовые примеры при моделировании температурных напряжений в элементах конструкций с переменными характеристиками

А.С.Иванова, Л.И.Миронова
Математическое обоснование эксперимента для определения функции напряжений в плоской задаче термоупругости

О.А.Изотова
Исследование основных краевых задач в классе случайных бианалитических функций

О.А.Изотова
Новый класс функций Гельдера в среднем квадратическом, обобщающий класс функций Гельдера на случай стохастических процессов

Л.Н.Кротов, Е.Л.Кротова, А.А.Поддубнова
Определение эффективного радиуса дефекта методами математического моделирования при магнитном контроле

Л.Н.Кротов, А.А.Поддубнова, И.Ю.Разепина
Определение координат центра цилиндрического дефекта методами математического моделирования при магнитном контроле

О.Д.Пряхина, М.В.Самойлов, А.В.Смирнова
К моделированию волновых процессов в составных пьезоэлектрических средах
А.В.Томилин, К.В.Халкечев
Математическое моделирование деформирования горных пород с сильно коррелированными ориентациями структурных и текстурных составляющих в пространстве

Б12. Математическое образование.

С.Б.Бочко, О.В.Кузьмин
Использование специализированных компьютерных пакетов при обучении математике студентов инженерных специальностей
А.В.Карабанов, А.В.Калинкин
К вопросу о бесконечности и природе числа
Т.Н.Кожеманова, Р.Г.Спевакова
Диагностика банкротства ОАО "ТФК "КАМАЗ"" по отечественным и зарубежным скоринговым моделям
А.С.Лугуева
Математическая компетентность специалистов-гуманитариев как составляющая их профессиональная компетентности
Н.Г.Ляпичева, О.М.Никонова
Информационная безопасность в системе профессионального образования
Р.Г.Спевакова, Р.В.Спеваков
Изучение предельного анализа студентами экономических специальностей на примере функции риска чистого дисконтированного дохода инвестиционного проекта
Ф.Г.Фарушкина, З.Ш.Аглямова, З.Х.Галимова
Обучение математике в ВУЗе с использованием компьютерных технологий
Н.В.Ширяева
Организационно-методическое сопровождение преподавания математики в лицее для одаренных детей СевКавГТУ

Б13. Медицина.

Б14. Метод конечных элементов.

В.Л.Леонтьев
Треугольные конечные элементы, связанные с использованием кусочно-билинейных финитных базисных функций, ортогональных на сетке треугольников
Е.И.Николаев
Моделирование левитации постоянного магнита в ограниченном объеме магнитной жидкости с использованием метода конечных элементов

Б15. Механика жидкости и газа.

А.Н.Бестужева
Задача Штурма-Лиувилля для пространственной задачи о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины с учетом проницаемости дна

П.А.Вельмисов, Н.А.Дегтярева, Е.П.Семенова
Об одном классе нелинейных задач аэрогидроупругости

П.А.Вельмисов, Ю.А.Казакова, А.В.Крупенников
О некоторых классах решений уравнений газовой динамики

П.А.Вельмисов, Ю.В.Покладова, Е.С.Серебрянникова
Математическое моделирование системы "трубопровод-датчик давления"

О.Г.Завьялов
Взаимодействие опоры в виде иглы и деформируемой поверхности с учетом несжимаемой смазки

С.М.Зеньковская, В.А.Новосядлый
Параметрическое возбуждение поверхностных и внутренних волн с учетом термокапиллярного эффекта

В.Н.Колодежнов
Течение в плоском канале дилатантной жидкости с эффектом "отвердевания"

В.Н.Колодежнов, С.С.Капранчиков
Методика определения реологических констант одной модели вязкости жидкости смешенного типа

И.Л.Панкратьева, В.А.Полянский
Пристеночная ионизация возбужденных молекул продуктов горения в сильном электрическом поле

Е.Ф.Тимофеева, Т.И.Денисенко
Математическое моделирование движения поверхностных волн для водоема с нелинейной функцией функцией рельефа дна

Б16. Механика природных процессов.

И.Б.Гладской, А.В.Павлова, С.Е.Рубцов
Исследование дифференциальных уравнений в блочных структурах и построение приближенных решений для ГИС

М.В.Зарецкая
О моделировании процессов, протекающих в средах, обладающих различными физико-механическими свойствами

Б17. Механика разрушения.

В.Л.Дильман, А.И.Носачева
Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния менее прочного поперечного слоя пластической полосы при гипотезах поперечных сечений

М.Н.Осипов
Определение полей перемещений на основе спекл-интерферометрии с применением кольцевых апертур

Б18. Модели горения и взрыва.

Р.З.Камалян, С.Р.Камалян
К проблеме бесконечности энергии в модели идеальной несжимаемой жидкости

Л.В.Сайфуллина, И.М.Губайдуллин, А.В.Балаев, М.Р.Еникеев
Моделирование процесса окислительной регенерации на зерне катализатора

З.А.Шакирова, И.В.Ахметов, И.М.Губайдуллин, А.В.Балаев
Двухфазная диффузионная модель экзотермического нестационарного процесса в слое катализатора

Э.Г.Янукян
Анализ неустойчивости стационарного режима горения нефти в пористой среде

Б19. Нанотехнологии: математические модели.

И.Ш.Абдуллин, В.С.Желтухин, Г.Р.Рахматуллина
Моделирование электрического пробоя нанопор в высокомолекулярном материале при высокочастотной плазменной обработке

И.Ш.Абдуллин, В.С.Желтухин, И.Г.Шайхиев
Моделирование методом Монте-Карло механизма ВЧ плазменной обработки целлюлозных материалов

Д.Л.Винокурский
Самосогласованное решение уравнений Кона-Шэма методом конечных элементов

С.В.Карпенко
Об одной модели фазовых превращений в наноразмерных ионных диэлектриках

П.С.Серебренников
ИК чувствительность квантовых точек

С.Л.Царевский, М.В.Авдеев, И.Ш.Немлий, Ю.Н.Прошин
Диаграммы фазовых состояний в трехслойной нанопленке ферромагнетик/сверхпроводник/ферромагнетик (F/S/F) в продольном магнитном поле

Б20. Науки о Земле, геология, геофизика.

Р.Р.Яматов, В.Н.Кризский
О вычислении электрических полей в квазифрактальных кусочноанизотропных средах

Б21. Неклассические задачи для уравнений математической физики.

И.А.Гуримская
Об эффективном решении первой краевой задачи в полуплоскости с функциональной проницаемостью

А.А.Замышляева
Начально-конечная задача для одного уравнения соболевского типа на графе

Е.А.Золотарева
Математическое моделирование динамики наноструктурных сред

Н.В.Игнатьева
О решении первой краевой задачи в криволинейных областях с завесой в виде отрезка

О.П.Матвеева, Т.Г.Сукачева
Задача Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка

О.В.Новикова, Т.В.Редькина
Решение с полюсными особенностями для уравнения с комплекснозначными функциями

Т.Х.Саиег
Разностные схемы второго порядка точности для нагруженных уравнений параболического типа

А.Д.Юмагужин, И.В.Ахметов, И.М.Губайдуллин
Исследование жесткости реакции получения метилового эфира 5-ацетил-2-пирролкарбоновой кислоты

Б22. Некорректные, обратные и условно корректные задачи.

Ф.Т.Бадртдинова, Л.А.Бигаева, С.И.Спивак
Решение обратной задачи процесса поликонденсации аспарагиновой кислоты при термогравиметрическом режиме

А.В.Балаев, Н.М.Сафуанова
Оптимизация процесса получения этилбензола в шестислойном реакторе с неподвижным слоем катализатора

Ю.С.Лаврентьева, И.М.Губайдуллин, Р.Н.Кадикова, И.Р.Рамазанов
Построение кинетической модели реакции циклоалюминирования олефинов

С.Ю.Лукащук
Восстановление коэффициентов уравнения конвекции-диффузии дробного порядка методом временнных интегральных характеристик

Ю.В.Мартыненко
Функция устойчивости метода вариационных сплайнов

А.Д.Саитгалина, А.А.Юнусов, И.М.Губайдуллин, М.Р.Файзуллин
Разностные схемы второго порядка точности для нагруженных уравнений параболического типа

А.И.Седов
О существовании решения обратной задачи спектрального анализа для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве

Д.Л.Саядян
О решении одной обратной задачи магнитостатистики на основе вычислительного эксперимента

Т.В.Суворова, Е.В.Усошина
О нестанционарной задаче для пористоупругого слоя с покрытием конечной ширины

А.А.Черепанов, Л.Н.Кротов, Е.Л.Кротова
Применение вейвлет-преобразования для восстановления формы и размеров неоднородности ферромагнетика в случае нестационарного сигнала

А.А.Юнусов, А.З.Ахмадеева, И.М.Губайдуллин
Регрессионный анализ в исследование влияния концентрации катализатора и температуры на выход продукта гидроалюминирования октена-1

Б23. Нелинейное моделирование и управление.

А.С.Андреев, О.Г.Дмитриева
О синтезе управления нелинейной механической системой

О.А.Антонова
Решение задачи оптимизации в условиях неопределенности кинетических данных для равновесного случая

Е.И.Беликова, Р.Б.Зайнетдинов
Об управлении движением механической системой с циклическими координатами

Ю.Н.Горелов, Л.В.Курганская, А.В.Щербак
Решения игр торга двумя рисковыми активами. Случай двух и трех состояний

П.А.Иванников
Математическое моделирование управляемой дискретной механической системы с изменяющимися и неизвестным запаздыванием в структуре обратной связи

З.М.Искакова
Моделирующие автоматизированные системы управления в нефтехимии

Р.А.Камаева, О.А.Перегудова
Управление движением мобильного робота с роликонесущими колесами с учетом запаздывающей обратной связи

А.А.Касаткин
Применение метода инвариантных подпространств к уравнениям с дробными производными

А.И.Кононова, В.М.Трояновский
Алгоритмический метод анализа поведения нелинейной динамической системы вблизи вырожденных особых точек

В.О.Лукащук
Приближенное решение нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром

Д.Ю.Моторина
Задача слежения для мобильного робота с тремя роликонесущими колесами с учетом эффекта проскальзования колес

О.А.Перегудова, Е.В.Филаткина
Синтез релейного управления механическими системами с неизвестными параметрами

И.А.Перцева, Ю.В.Петровичева
Об управлении движением твердого тела

Е.В.Степашина, А.И.Байтимерова, С.А.Мустафина
Математическая модедь процесса в РИС на двудольном графе

Р.Ф.Хуснутдинова
Стабилизация программного движения голономной механической системы
Р.Р.Шангареев, Р.С.Давлетшин, С.А.Мустафина
Математическая модель процессов с изменяющейся активностью катализатора с несколькими управляющими параметрами

Б24. Обработка данных, анализ и обработка изображений.

И.А.Гарькина, А.М.Данилов, В.А.Смирнов
Переносимая реализация языка обработки изображений
Д.А.Дель Торо Фонсека, А.А.Юнусов, И.М.Губайдуллин
Информационный портал лаборатории математической химии ИНК РАН
И.В.Жимаев
Start-Imager: программный комплекс для анализа и обработки астрономических изображений в малых обсерваториях
А.Б.Корякин, Я.Е.Ромм
Распознавание реверберации и объектов при помощи сортировки
А.А.Красса
Алгоритм подсчета пассажиров в общественном транспорте на основе "опорной линии"
М.П.Кривенко
Адаптивная комбинированная оценка плотности многомерного распределения
В.А.Кудряшов
Анализ физического подобия при проведении и использовании результатов экспериментов по распространению лазерного излучения
И.Н.Топчиев, Г.В.Шагрова
Алгоритм распознавания намагниченных ячеек на изображении визуализированной сигналограммы
И.Н.Топчиев, Г.В.Шагрова
Разработка технологии и модели слияния медицинских изображений для обнаружения и распознавания артефактов
С.В.Усатиков, О.В.Руденко, К.А.Горонков
Топология нейронной сети высокоточного распознавания сортов зерновых культур
А.Ю.Хлесткин
Разработка технологии и модели слияния медицинских изображений для обнаружения и распознавания артефактов
Ю.П.Шумилов
Методика реализации оптимального алгоритма обнаружения космических объектов

Б25. Прикладная вероятность и статистика.

В.А.Ивницкий
Определение корреляционных функций количества "нетерпеливых" требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания

А.Ю.Кулай
Условная вероятность двух реализаций однородной цепи Маркова с неизвестными параметрами распределения
Г.В.Мартынов
Таблицы распределения взвешенной статистики Крамера-Мизеса
С.С.Мартынов
О возможности наблюдения за перемешиванием последовательности независимых случайных величин
Г.Б.Машалко
Вопросы совместного использования нескольких критериев
Д.Р.Матвеева
Расчет риска инвестиционного проекта "Производство стеклопластиковых труб" по экономико-статистической модели Г.Марковица
И.С.Симакин
Организация быстрого поиска ближайшего к заданной точке кластера на графе нестрогой иерархической кластеризации
А.Р.Симонян, Е.И.Улитина
Об одном предельном законе для условных виртуальных времен ожидания в модели Прабху при критической загрузке
М.М.Соловьев
Задача эффективного поиска в сети
И.Е.Тананко, Н.П.Фокина
О методе анализа открытой сети массового обслуживания с ненадежной системой обслуживания
А.Н.Тырсин, И.С.Соколова
Задача максимизации энтропии многомерной случайной величины
А.Л.Штраус
Многомерное обобщение задачи оптимизации наблюдений временно ненаблюдаемых систем

Б26. Прикладная геометрия. Обработка и распознавание образов.

Б27. Прикладная дискретная математика. Обработка и защита информации.

Н.А.Бурякова, А.В.Чернов
Методология обнаружения зацикливания фрагментов программ на основе верификации моделей
В.М.Деундяк, В.В.Мкртичян
О границах применения специальной схемы защиты информации, основанной на ОРС-кодах
О.А.Козлитин
О выходной последовательности двоичного 2-линейного регистра сдвига
С.А.Корниенко
Проблемы оценки технико-экономической эффективности построения систем радиоконтроля

Д.А.Колчин
Об одном методе построения каскадов "прыгающих" регистров сдвига
Е.В.Кутырёва
О максимизации одной пороговой функции от двух переменных
А.В.Маликов, А.С.Целиковский
Математическая модель автоматической сортировки дисциплин в порядке изучения на основе анализа полнотекстовых материалов и программ изучения
Д.В.Матюхин, В.А.Шишкин
О криптографической стойкости функции хэширования ГОСТ Р 34.11-94
А.П.Росенко
О критерии нормирования уровня безопасности конфиденциальной информации
К.К.Рыбников, О.К.Чернобровина
О сведении некоторых задач выбора узлов электронных схем и нейросистем к анализу структуры выпуклых многогранников
Д.В.Самойленко, О.А.Финько
Оценка помехоустойчивости криптосистемы, основанной на Китайской теореме об остатках, для N каналов с шумом и имитирующим злоумышленником
М.И.Толовиков
Распределение последовательности 1-зависимых случайных индикаторов с рациональной производящей функцией
Д.И.Трифонов
Фракталы и динамический хаос в технологиях информационной безопасности
В.П.Цветов
О представлении абстрактных полиномов над конечными алгебрами
А.Б.Шишков, А.В.Зязин
Об индексе многочлена, представляющего бент-функцию над простым полем нечетной характеристики

Б28. Системы поддержки принятия решений для регионального управления.

И.А.Лакман
Использование логит-моделей множественного выбора в оценке приоритетности развития объектов социальной инфраструктуры предприятий
А.А.Золотарев
Векторная оптимизация распределительных процессов в региональных моделях переработки сырьевых ресурсов
И.В.Рыкова, Ю.П.Шумилов
Анализ динамики информационных ресурсов в процессе организации франчайзинга
Н.Б.Тушканов, О.Н.Тушканова, Д.А.Любвин
Построение интеллектуальных систем реального времени на основе парадигмы коллективного распознавания

Б29. Социология. Психология.

Н.Ю.Губанова
Доверительное оценивание взаимосвязи психологических переменных при помощи метода бутстреп
И.Н.Лаврентьева
Особенности сенсомоторных реакций у летчиков с функциональными расстройствами нервной системы

Б30. Специальные функции и ортогональные многочлены.
А.В.Кочулимов, В.Л.Леонтьев
О повышении точности аппроксимации ортогональными финитными функциями второй степени на треугольных сетках

Б31. Супер-, нейро-, биокомпьютеры. Эволюционные и мембранные вычисления.

Б32. Теория управления и системные исследования. Процессы принятия решений.
Н.А.Баранов, И.В.Васильев
Модель динамики рисков, связанных с функционированием сложных технических систем
Н.А.Баранов, А.Н.Корочков
Влияние достоверности информации о характере угроз на распределение ресурсов, выделяемых для их предотвращения
И.В.Васильев
Оптимизация затрат на безопасность функционирования технической системы
С.Г.Геворкян
Анализ динамической модели для числа эффективных доз за фиксированный промежуток времени
С.Г.Геворкян, М.В.Рыжов
Создание баз данных медико-генетической информации онкологических больных и построение генеалогического древа пациента на основе получения данных
Е.Г.Гольштейн
Конечные бескоалиционные игры, обладающие выпуклой структурой
И.В.Зайцева, Л.Л.Гусева
Проблема устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
А.Б.Зинченко
Классификация, генерирование и приложения сбалансированных множеств
В.К.Иванов
К задаче моделирования и аналитического проектирования производственного участка
В.К.Иванов
Язык описания структурных схем систем управления станков и роботов с ЧПУ
Е.А.Касаткина, Ю.Н.Бурханова
Сетевое планирование и управление в бизнес-проекте "Создание цеха по изготовлению колбасных изделий" на ООО "УОП "Нефтехим""

В.В.Киселев
Подход к решению некоторых классов задач оптимального управления
С.А.Корниенко
Алгоритм оценки весовых коэффициентов для обобщенного количественного анализа эффективности сложных систем радиоконтроля
С.А.Корниенко, Е.С.Корниенко
Анализ групп комплексных показателей при решении задач векторной оптимизации
В.Е.Самонов
О некоторых особенностях задач нечеткого управления
Н.А.Соколов
Критерий окончания счета в обобщенном методе уровней для решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями
М.М.Соловьев, А.А.Корепин
Модель процесса поиска в сети
В.Ф.Шаров
Управленческий инструментарий и долгосрочные тренды российской экономики

Б33. Тепло- и массоперенос.

Н.М.Власов
Водородная проницаемость полого цилиндра с учетом термодиффузии и термонапряжений
И.А.Гуримская
Об эффективном решении первой краевой задачи в полуплоскости с функциональной проницаемостью
Е.Н.Даценко, Н.Н.Авакимян, Н.И.Васильев
Математическая модель инициирования роста докритических зородышей в окрестности первичного пузыря
Н.В.Жимаева
Влияние физических констант пара и жидкости на параметры динамики роста пузырька пара и генерируемого им звукового импульса
А.И.Филиппов, А.С.Хисматуллин, М.Р.Минлибаев, Р.Ф.Карагулов, А.Р.Курбангулов
Интерпретационная модель в установке для определения коэффициента трансцилляторного теплопереноса

Б34. Физика океана и атмосферы.

М.А.Волочай
Образование ячеистых структур в атмосфере

Б35. Фракталы и масштабный эффект.

А.Н.Белаш
О построении приближенного алгоритма решения задачи об изоморфизме предфрактальных неориентированных графов с использованием аппарата теории чисел

Н.В.Кононова
Параллельный алгоритм вершинной раскраски предфрактального графа
И.К.Коханенко, И.Л.Пищук
Стабильность структуры бета системы активов

Б36. Экономика, страховая и финансовая математика.

А.Л.Арутюнов
Методика долгосрочного прогноза индикаторов экономической деятельности АПК России
Л.М.Ачмиз
Методика сочетания технических индикаторов
Г.И.Белявский, Н.В.Данилова
Вычисление справедливой цены финансового обязательства для дискретного и непрерывного случая в модели (B,S)-рынка со случайным изменением тренда
Н.С.Богомолова
Применение статистических прикладных программных средств для анализа экономических данных
М.С.Гаспариан, Ю.Е.Хрусталев
Особенности и перспективы инновационного развития высокотехнологичных производств
В.Б.Гисин
Ценообразование на фрактальном рынке с трансакционными издержками
С.Н.Гончаренко, Е.В.Дементьева
Разработка модели оценки уровня риска возникновения аварийных ситуаций на промышленных объектах
Н.В.Гринева
Риски при трансфере технологий
Н.С.Демин, У.В.Андреева
Экзотический опцион продажи с гарантированным доходом владельца опциона на диффузионном (B,S)-финансовом рынке
Н.С.Демин, В.В.Толстобоков
Экзотические опционы купли с гарантированным доходом и с ограничением выплат на диффузионном рынке облигаций
О.В.Демченко, Е.А.Семенчин
Оценка кредитоспособности заемщика методами нечеткой логики
Е.Л.Золотарева
Оценка риска мошенничества с применением байесовского подхода
А.Ф.Зубков, В.М.Салюкова, И.А.Семенов
Влияние фиксированных цен на чистые потери общества
Э.О.Иремадзе
Анализ экономических показателей ОАО "Газпром" на основе математической модели

А.В.Келлер
О динамике замкнутой системы уравнений леонтьевского типа
С.М.Кравченко, Н.И.Кравченко, М.Е.Васильева
Анализ эффективности слияния банков как средства разрешения банковской паники
Е.В.Красильникова
Несколько результатов регрессионного анализа влияния структуры собственности на деятельность компаний
С.Н.Ларин, С.М.Островский
Выбор направлений инновационного развития хозяйствующих субъектов региона в условиях мирового экономического и финансового кризиса
Н.И.Лучникова
Применение многофакторных моделей для оценки угрозы банкротства и оптимизации распределения ресурсов для его предотвращения
В.В.Мажара
Построение классификации домохозяйств по потреблению
С.И.Макаров
Моделирование и анализ эффективности уровней управления предприятием
О.Н.Минаева, М.С.Тихов
Построение модели измерения экономики знаний с использованием метода главных компонент
Н.Д.Никоненко
Хеджирование для пуассоновской модели (B,S)-рынка
А.А.Никонова
Способы выбора частных стратегий предприятия
А.А.Никонова
Стратегия финансово-экономической устойчивости предприятия
А.Н.Омельченко, О.Е.Хрусталев
Развитие инструментов рефинансирования Центрального Банка
А.В.Петрусевич
Оптимальный объем производства в условиях неопределенности спроса
В.Ю.Руденко, С.В.Сейфуллина
О самоорганизации торговых сетей
В.Г.Саркисов
Моделирование психологического комфорта инвестора при системном управлении портфелем ценных бумаг
В.Б.Смирнов
Особенности и перспективы отечественного оружейного экспорта
Н.А.Соколов, Т.В.Стебеняева
Пути повышения эффективности результатов научных исследований

С.И.Спивак, К.А.Чернятьев, М.Р.Чернятьева
Задача максимизации энтропии многомерной случайной величины
А.Б.Тлисов, Н.В.Морозова, М.У.Эркенова
Исследование динамики цены на бензин методами фрактального анализа
А.В.Трегуб
Построение эконометрической модели работы лесопромышленного комплекса России
И.В.Трегуб
Роль государства в процессе регулирования деятельности предприятий телекоммуникационного сектора
Е.П.Фадеева, Д.Р.Матвеева
Резервы увеличения чистой прибыли ЗАО "Челныводоканал" за счет эффекта финансового рычага
О.Е.Хрусталев
Методы увеличения собственного капитала банковской системы
М.В.Шаповаленко, М.Е.Васильева, Н.В.Кравченко
Компромиссно-равновесные цены в электроэнергетике
А.Г.Шапошникова
Использование различных мер риска при решении задачи оптимизации портфеля ценных бумаг
Г.Р.Шарифуллина
Эконометрическое моделирование и анализ взаимосвязи инвестиций в образование и ВВП страны как способ оценки человеческого капитала
В.А.Шестаков
Основные способы совершенствования внутреннего аудита в российских коммерческих банках
Л.О.Шкляев
Моделирование кредитного риска эминента корпоративных облигаций
Е.В.Юмина
Проверка адекватности метода расчета VaR в кризисный период

Б37. Энергетика и передача энергии.

И.С.Белан, А.Б.Ершов, А.В.Зиновьев
Экспериментальные исследования автоэлектронной эмиссии тонких диэлектрических пленок
В.Я.Хорольский, С.Г.Ковалевский
Теоретические и экспериментальные исследования динамических режимов работы элементов систем бесперебойного электроснабжения информационно-вычислительных центров

Б38. Юриспруденция. Криминалистика.

Д.А.Илюшин, А.И.Моисеев, М.Н.Осипов, В.П.Цветов
Об инструментальных средствах для обеспечения функций оперативно-разыскных мероприятий при расследовании компьютерных преступлений

B1. Математические модели для решения современных проблем нефтегазовой гидромеханики.

В.И.Астафьев, П.В.Ротерс
О продуктивности двоякопериодических систем добывающих скважин

Г.Р.Идрисова
Математическая модель процесса фильтрации воды с осадкообразующим реагентом в пористой среде

Э.Н.Мифтахов, И.Ш.Насыров, С.А.Мустафин
Математическая модель процесса эмульсионной сополимеризации

B2. Математическое моделирование в промышленной экологии и в задачах охраны окружающей среды.

И.Ю.Гареева, И.А.Лакман
Оценка риска возникновения дефектов трубопроводов компрессорных станций

Р.А.Радионов, Н.В.Листова
Адаптивно-игровой метод защиты информации от пренамеренного искажения в каналах диспетчерского управления

И.В.Федоренко, А.М.Виноградненко
Моделирование многоканальной измерительной системы с учетом требований к помехоустойчивости и оперативности передачи информации

В.В.Федоренко, А.В.Семененко, В.И.Стрекозов
Математическая постановка задачи временного распределения оборудования при обеспечении безотказной работы системы с учетом предстоящих условий ее эксплуатации

Л.А.Фомин, П.А.Будко, А.В.Мухин
Об изоморфизме пространств функций голоморфных в декартовом произведении конечносвязных плоских областей

B3. Прикладной функциональный анализ и теория функций.

Г.М.Бездудный, Е.В.Солоневич
Об изоморфизме пространств функций голоморфных в декартовом произведении конечносвязных плоских областей

B4. Прикладные аспекты математической физики.

И.А.Куницин, А.С.Адамчук
Обобщение фильтрационной теоремы об окружности

B5. Физико-математическое образование.

Г. А. Андрианов (Москва, ИППИ РАН)**. Учет влияния повторных вызовов при интерпретации результатов измерения качества обслуживания.**

Для решения задач по управлению трафиком необходимо учитывать показатели качества обслуживания, в частности, ASR (Answer Seizure Ratio) и NER (Network Effectiveness Ratio) [1, 2]. Эти показатели искажены наличием повторных вызовов, поэтому полезно рассмотреть «чистые» показатели QoS, например, «чистый» ASR. Назовем его CASR — Clean Answer Seizure Ratio:

$$CASR = ASR(k + 1), \tag{1}$$

где k — среднее число повторных вызовов на один первичный для данного направления.

Пусть p — потери на данном направлении, которые приводят к повторным попыткам вызова. Тогда среднее число повторных вызовов на один первичный равно [3]

$$k = \frac{Hp}{1 - Hp}, \tag{2}$$

где H — настойчивость абонента.

На сети мы можем измерить потери $q = 1 - NER/100\%$, которые можно разделить на две составляющие: потери p, приводящие к повторным наборам, и потери p_c, не приводящие к повторам,

$$q = 1 - (1 - p_c)(1 - p), \tag{3}$$

откуда, выразив p через q и подставив в (2), имеем:

$$k(q) = \frac{(q - p_c)H}{1 - p_c - (q - p_c)H}, \tag{4}$$

В формуле (4) выражена зависимость коэффициента, отражающего среднее число повторных вызовов на один первичный, от измеряемых потерь для данных потерь p_c, не влияющих на повторы, и данной настойчивости H.

На сети транзитного оператора проводились измерения коэффициента повторных вызовов от потерь. Косвенно определяли настойчивость и составляющую потерь p_c. При проведении измерений агрегат имел объем 1000 вызовов (первичных). Повторным вызовом признавался вызов, который произошел не позднее 10 минут после неуспешного вызова с того же самого А-номера на тот же самый В-номер.

Результаты измерений хорошо согласуются с выражением (4). Настойчивость в зависимости от направления варьируется от $H = 0,64$ до $H = 0,8$, а составляющая измеренных потерь, не влияющая на повторные вызовы — от $p_c = 0,1$ до $p_c = 0,5$.

Наличие нелинейной зависимости $k(q)$ приводит к тому, что измеряемые на сети показатели качества обслуживания искажаются повторными попытками вызова, причем тем больше, чем выше потери. Знание явного вида такой зависимости позволило построить для системы управления трафиком транзитного оператора алгоритм, который позволяет работать с показателями качества обслуживания, «очищенными» от повторных вызовов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hardy William C.* QoS Measurement and Evaluation of Telecommunications Quality of Service. N. Y.: J. Wiley, 2001, 230 p.
2. ITU-T Rec. E.425 (11/98) Internal Automatic Observations.
3. *Корнышев Ю. Н., Фань Г. Л.* Теория распределения информации. М.: Радио и связь, 1985, 184 с.

В. И. А ф а н а с ь е в (Москва, МИАН). **Принцип инвариантности для критического процесса Гальтона–Ватсона, достигающего высокого уровня.**

Пусть $Z_0 = 1, Z_1, Z, \ldots$ — критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{D}\, Z_1 \equiv 2b \in (0, +\infty), \tag{1}$$

и T_x — момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом $\{Z_n\}$, т. е. $T_x = \inf\{n\colon Z_n > x\}$. В работе, представленной данным сообщением, устанавливается принцип инвариантности для процесса $\{Z_n\}$, рассматриваемого при условии, что $T_x < +\infty$, $x \to +\infty$.

При этом существенную роль играет *принцип инвариантности Феллера–Линдвалла*: если выполнено условие (1) и $y > 0$, то при $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{Z_{[nt]}}{bn}, t \geqslant 0 \,\middle|\, Z_0 = [bny] \right\} \xrightarrow{D} \{Y(t),\, t \geqslant 0 \,|\, Y(0) = y\}, \tag{2}$$

где $Y = \{Y(t)\}$ — так называемый *феллеровский непрерывный ветвящийся процесс*, символ $\xrightarrow{D}$ означает сходимость по распределению в пространстве $D[0, +\infty)$ с топологией Скорохода. Процесс Y является однородным диффузионным процессом, принимающим неотрицательные значения, причем состояние 0 является поглощающим.

Оказывается, предельный процесс $Y^{\uparrow}$ в принципе инвариантности для процесса $\{Z_n\}$, достигающего высокого уровня, является *условным* феллеровским непрерывным ветвящимся процессом. Более точно, справедлив следующий результат. Пусть $T_x^{(Y)}$ — момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом Y, т. е. $T_x^{(Y)} = \inf\{t\colon Y(t) = x\}$.

Теорема 1. *Пусть $Y(0) = \varepsilon$, тогда процесс Y, рассматриваемый при условии, что $T_1^{(Y)} < +\infty$, сходится при $\varepsilon \to 0$ по распределению в пространстве $C[0, +\infty)$ к некоторому случайному процессу $Y^{\uparrow}$ с непрерывными траекториями.*

Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (1), *тогда при $x \to +\infty$*

$$\left\{ \frac{Z_{[xt/b]}}{x}, t \geqslant 0 \,\middle|\, T_x < +\infty \right\} \xrightarrow{D} Y^{\uparrow}.$$

Полученные результаты означают, что принцип инвариантности Феллера–Линдвалла играет такую же роль в теории ветвящихся процессов, какую в теории случайных блужданий играет принцип инвариантности Прохорова–Донскера. В условных принципах инвариантности для случайных блужданий предельными процессами являются различные *условные броуновские движения* (например, броуновская извилина, броуновская экскурсия). Точно так же в условных принципах инвариантности для критического процесса Гальтона–Ватсона предельными процессами являются *условные феллеровские непрерывные ветвящиеся процессы*.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078, и программы «Математическая теория управления» Президиума РАН.

И. А. Гарькина, **А. М. Данилов**, **Е. В. Королев** (Пенза, ПГУАС)**. Аналитические методы при синтезе материалов: опыт применения.**

На основе опыта разработки и управления качеством материалов специального назначения определяются подход и методологические принципы создания материалов с использованием методов системного анализа и на основе моделирования кинетических процессов.

Сначала материал рассматривается как слабоструктурированная многоцелевая система. В результате междисциплинарных исследований (используется и неполная, нечеткая и даже противоречивая информация) формализуется взаимодействие существующих в системе основных связей, определяющих ее функционирование. С использованием когнитивной карты (в том числе коллективной) строятся иерархические структуры критериев качества и собственно системы, что позволяет рассматривать систему уже как структурированную.

При качественной оценке свойств материалов и определении связей между ними широко использовались методы ранговой корреляции (в частности, исследовались деформативные свойства (учитывались 14 показателей) и связи между ними для 10 видов эпоксидных композитов). Было показано отсутствие необходимости определения некоторых свойств (например, предела прочности при сжатии или твердости) в связи с наличием существенных связей между ними. По статистической значимости выборочного значения коэффициента конкордации показано отсутствие согласованности между всей совокупностью показателей при наличии парной согласованности между отдельными из них. Рассматривая предел прочности при сжатии в качестве результирующей переменной, решалась задача регрессии на порядковых переменных.

Кинетические процессы (в частности, остаточная прочность по годам эксплуатации) рассматривались как временные ряды и строились авторегрессионные модели со скользящим средним:

$$x_t = a_t x_{t-1} + \ldots + a_p x_{t-p} + b_0 e_t + b_1 e_{t-1} + \ldots + b_q e_{t-q}.$$

Рассматривались марковские процессы, Юла, Юла–Уолкера. Для определения коэффициентов модели использовался алгоритм Левинсона–Дурбина.

Формализация процессов формирования физико-механических характеристик материала осуществлялась как решение общей задачи идентификации в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (для радиационно-защитных композитов — не выше четвертого порядка); производилась параметрическая идентификация кинетических процессов.

Для оптимизации рецептурно-технологических параметров и управления качеством материала решалась задача многокритериальной оптимизации с предварительной минимизацией размерности критериального пространства. Использовались принцип, диаграмма и множества Парето (предварительно методами планирования эксперимента определялись аналитические зависимости свойств от точек факторного пространства; использовались методы нелинейного программирования).

Многоцелевая оптимизация при противоречивых критериях осуществлялась с использованием метода последовательных уступок; рассматривались методы скаляризации критериев на основе результатов решения однокритериальных задач (как контрольных показателей).

Эффективность и перспективность использования предлагаемых методов подтверждены результатами многокритериального синтеза радиационно-защитных материалов (не имеют мировых аналогов и конкурентоспособны на мировом рынке).

Работа, представленная данным докладом, выполнена по заказу Минобрнауки РФ (№ гос. рег. 01200850940).

С. Г. Геворкян (Обнинск, ИАТЭ НИЯУ МИФИ). **Анализ динамической модели для числа эффективных доз за фиксированный промежуток времени.**

В связи с неопределенностью исходной информации предполагаются различные модели зависимости доза-эффект [1], которые дают различный прогноз выхода стохастических эффектов. Выход стохастических эффектов в области малой дозы оценивается с помощью модели индивидуального риска, коллективного риска и различными статистическими методами. Однако с помощью моделей индивидуального и коллективного риска нельзя оценить момент выхода стохастических эффектов. Момент выхода стохастических эффектов можно оценить с помощью выбора оптимальных алгоритмов функционирования системы, системного анализа и динамической модели. Однако для этого необходима динамическая модель для числа эффективных доз за фиксированный промежуток времени.

В работе, представленной данным сообщением, мы рассмотрим динамическую модель для числа эффективных доз за фиксированный промежуток времени. В модели фиксируется взаимодействие числа эффективных доз, поступивших за различные непересекающиеся промежутки времени, игнорируется взаимодействие индивидуальных облученных. Поэтому она применена и для описания процесса поступления эффективных доз от отдельно облученного, если облученный за время своего существования может произвести несколько эффективных доз.

Обозначим $\nu(t)$ число эффективных доз, поступивших за время $(0,t)$. Через эту переменную можно выразить и более сложную величину $\nu(t_1,t_2)$, равную числу эффективных доз, поступивших за промежуток (t_1,t_2).

Допустим, что процесс поступления эффективных доз является стационарным, т. е. распределение случайной величины $\nu(t_1,t_2)$ зависит от длины t_2-t_1 рассматриваемого промежутка (t_1,t_2) и не зависит от его положения на оси времени. Иными словами, распределение числа поступивших эффективных доз за любой промежуток $(r,r+t)$ зависит только от t; обозначим $P(t)=\mathbf{P}\{\nu(r,r+t)=n\}$. Процесс является ординарным в том смысле, что поступление двух или более эффективных доз за малый промежуток времени Δt практически невозможно. Математически это можно выразить равенством $\mathbf{P}\{\nu(r,r+\Delta t)\geqslant 2\}=O(\Delta t)$. Процесс поступления эффективных доз не обладает последствием, т. е. величины $\nu(t_1,t_2),\nu(t_2,t_3),\ldots,\nu(t_{n-1},t_n)$, $t_1<t_2<\cdots<t_n$, выражающие число эффективных доз, поступивших за непересекающиеся промежутки времени, независимы. Введенные предположения довольно естественны как при описании поступления эффективных доз от всей популяции облученных, так и при описании поступления эффективных доз от индивидуального облученного в случае, когда облученный за время своего существования может произвести несколько эффективных доз.

Как мы сейчас покажем, описанная выше динамическая модель процесса поступления эффективных доз с необходимостью влечет, что для некоторого

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

т. е. распределение числа эффективных доз, поступивших за фиксированный промежуток времени, обязательно является пуассоновским. Прежде всего, отметим следующее свойство пуассоновского процесса:

$$P_n(u+v)=P_n(u)P_0(v)+P_{n-1}(u)P_1(v)+\cdots+P_0(u)P_n(v). \tag{2}$$

Итак, используя свойства пуассоновского распределений, мы доказали справедливость желаемого результата (1) для $n=0$. Чтобы доказать справедливость (1) при

всех n, мы получили дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет распределение числа эффективных доз. С этой целью в равенстве (2) положим $u = t$, $v = \Delta t$:

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) + \cdots + P_0(t)P_n(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

Поскольку уже известно, из (3) можно последовательно определить все вероятности $P_n(t)$; при $n \geqslant 1$ начальное условие, очевидно, имеет вид $P_n(0) = 0$. Технически это удобно сделать с помощью производящей функции числа эффективных доз $\pi(z, t) = Ez^{\nu(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(t)$. Умножая обе части (3) на z^n и суммируя по $n = 0, 1, 2, \ldots$, мы превратим систему из бесконечного числа дифференциальных уравнений с бесконечным числом неизвестных функций в одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией $\pi(z, t)$: $\pi_z'(z, t) = \lambda(z - 1)\pi(z, t)$. Отсюда $\pi(z, t) = \pi(z, 0)e^{\lambda(z-1)t}$. Поскольку $\pi(z, 0) = P_0(0) + zP_1(0) + z^2P_2(0) + \cdots = 1 + z \cdot 0 + z^2 \cdot 0 + \cdots = 1$, мы окончательно получим $\pi(z, t) = e^{\lambda(z-1)t}$. Справа стоит производящая функция распределения Пуассона с параметром λt, что завершает доказательство формулы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Василенко И.Я.* Радиобиологические проблемы малых доз радиации. — Военно-мед. журн., 1993, № 4, с. 28–30.

В. Б. Г и с и н (Москва, Финакадемия)**. Ценообразование на фрактальном рынке с трансакционными издержками.**

Некоторые характерные особенности поведения финансовых временных рядов не согласуются с постулатами гипотезы эффективного рынка. Как одна из возможных альтернатив получила распространение теория фрактального рынка, на котором динамика цен описывается посредством *фрактального броуновского движения* (ФБД).

Использование ФБД для моделирования ценообразования сталкивается с принципиальной трудностью: фрактальный рынок допускает арбитраж. Исключить арбитраж можно модификацией стохастического интегрирования (см. [2], [5], [6]). Однако до настоящего времени для подобных модификаций не удалось найти убедительной экономической интерпретации (см. [1]). Отсутствие арбитража может быть обеспечено более полным учетом особенностей торговли на реальном рынке. Например, фрактальный рынок с пропорциональными трансакционными издержками является безарбитражным [4].

В настоящем сообщении предлагается подход к определению цен производных инструментов на фрактальном рынке с пропорциональными трансакционными издержками, основанный на дискретизации ФБД [7] и стохастическом доминировании (см. [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bender C.*, *Sottinen T.*, *Valkeila E.* Arbitrage with fractional Brownian motion? — Theory Stochastic Process., 2007, v. 13 (29), № 1–2, p. 23–34.
2. *Biagini F.*, *Hu Y.*, **O***ksendal B.*, *Zhang T.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. Heidelberg etc.: Springer, 2008, 329 p.
3. *Constantinides G.M.*, *Perrakis S.* Stochastic dominance bounds on derivatives prices in a multiperiod economy with proportional transaction costs. — J. Econom. Dynamics Control, 2002, v. 26, p. 1323–1352.
4. *Guasoni P.* No arbitrage under transaction costs, with fractional Brownian motion and beyond. — Math. Finance, 2006, v. 16, № 3, p. 569–582.
5. *Mishura Y.* Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes. Heidelberg etc.: Springer 2008, 393 S. (Ser. Ject. Notes Math. B. 1929.)
6. *Rostek S.* Option Pricing in Fractional Brownian Markets. Heidelberg etc.: Springer, 2009, 137 S. (Ser. Ject. Notes Econom. Math. Systems. B. 622.)
7. *Sottinen T.* Fractional Brownian motion, random walks, and binary market models. Finance Stoch., 2001, v. 5, p. 343–355.

Н. В. Г р и н е в а (Москва, Финакадемия)**. Риски при трансфере технологий.**

Трансфер (передача) технологий — инструмент реализации инноваций. Он означает приложение знаний для выполнения конкретной технической задачи. Растущая актуальность проблемы трансфера результатов НИОКР определяется тем, что в настоящее время государственные лаборатории, отраслевые научно-исследовательские институты и университеты всего мира стали все больше беспокоиться о прикладном технологическом использовании результатов своих исследований. Сама по себе потребность в передаче технологий остается достаточно новым и широко обсуждаемым явлением, прежде всего, в бюджетных организациях.

В работе, представленной в данном докладе, рассматривается задача, которая является частным случаем общей задачи принятия решений в условиях неопределенного будущего (риска). Анализируется проблема создания материальных (научных) запасов при неопределенном спросе с учетом того обстоятельства, что наличие как избыточных, так и недостаточных запасов приводит к убыткам. Решается вопрос об определении такой политики заказов на каждом шаге, которая минимизировала бы некоторую среднюю функцию общей величины издержек на создание запасов. Предполагается, что заказы делаются в каждый из конечного числа равных промежутков времени и немедленно выполняются. Величина спроса становится известной после осуществления заказа и получения заказанной партии; этот спрос по возможности удовлетворяется за счет созданных запасов, причем неудовлетворенный спрос приводит к убыткам.

Предполагается, что известны следующие функции: $\varphi(s)$ — плотность распределения вероятности величины спроса; $c(z)$ — стоимость первоначального заказа партии размером z единиц для пополнения уровня запасов; $p(z)$ — стоимость заказа партии размером z единиц для покрытия неудовлетворенного спроса, или дополнительные расходы.

Пусть x — уровень запасов в начале процесса, который состоит из n шагов. На первом шаге заказывается y_1 разработок, на втором — y_2 разработок и т. д. Будем называть *поведением* (*управлением*) набор функций $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_k = y_k(x)$, определяющий для каждого k то количество, которое нужно заказать на k-м шаге при имеющемся уровне запасов x. Каждому управлению будет соответствовать определенное математическое ожидание суммарных издержек для этого n-шагового процесса, включающих в себя стоимость первоначального заказа и дополнительные расходы.

Таким образом, мы определим задачу нахождения управления, минимизирующего ожидаемые суммарные издержки. Поведение, дающее минимум ожидаемых издержек, называется *оптимальным*.

На любом шаге k задача полностью характеризуется двумя параметрами состояния: величиной запасов x и числом остающихся шагов $n-k$. Поэтому определяется $f_k(x)$ — математическое ожидание общих издержек для k-шагового процесса при начальном запасе x и оптимальном поведении в области заказов.

Далее, необходимо вывести функциональные уравнения для пошаговых управлений $f_k(x)$. Если заказано количество $y - x \geqslant 0$, имеем: $f_1(x) = c(y-x) + \int_y^\infty p(s-y)\varphi(s)\,ds$. Для $n \geqslant 2$, учитывая различные случаи, соответствующие возможности превышения спроса над предложением, а также возможности удовлетворения спроса, получаем:

$$f_k(x) = \min_{y \geqslant x} \left[c(y-x) + \int_y^\infty p(s-y)\varphi(s)\,ds + f_{k-1}(0) \int_y^\infty \varphi(s)\,ds \right.$$
$$\left. + \int_0^x f_{k-1}(y-s)\varphi(s)\,ds \right], \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Г. И. Белявский, **Н. В. Данилова** (Ростов-на-Дону, ЮФУ).
Вычисление справедливой цены финансового обязательства для дискретного и непрерывного случая в модели (B,S)-рынка со случайным изменением тренда.

Рассмотрим модель, являющуюся обобщением модели Блэка–Шоулса [1]: $dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$, $dB_t = rB_t\,dt$, а именно, модель со случайным изменением тренда, как только цена акции достигает границ некоторого «коридора» $[M_0, M_1]$. При достижении границ «коридора» коэффициент тренда $r-\sigma^2/2$ изменяет знак так, чтобы цена акции оставалась в пределах данного «коридора». Изменение знака тренда может происходить за счет изменения r с r_1 на r_2, например, следующим образом. Если начальная цена акции S_0 принадлежит отрезку $[M_0, (M_0+M_1)/2]$, то $r_1 - \sigma^2/2 > 0$, а $r_2 - \sigma^2/2 < 0$. Если $S_0 \in ((M_0+M_1)/2, M_1]$, то $r_1 - \sigma^2/2 < 0$, а $r_2 - \sigma^2/2 > 0$. Число переключений конечно и равно N.

В докладе доказываются две теоремы, которые обосновывают расчеты на данном (B,S)-рынке.

Теорема 1. *Рассматриваемый (B,S)-рынок является безарбитражным и полным.*

Теорема 2. *Справедливая цена для европейского опциона Call имеет вид*:

$$C = S_0\mathbf{E}^*\left(N\left(\frac{-d(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_N)+T\sigma}{\sqrt{T}}\right)\right) - K\mathbf{E}^*\left(\frac{1}{B_T}N\left(\frac{-d(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_N)}{\sqrt{T}}\right)\right),$$

$$\textit{где}\quad d(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_N) = \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{K}{S_0} - \sum_{k=1}^{N}\delta_{k-1}(\tau_k-\tau_{k-1}) - \delta_N(T-\tau_N)\right),$$

$$\delta_i = \left(r_1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)I_{\{S_{\tau_i}=M_0\}} + \left(r_2-\frac{\sigma^2}{2}\right)I_{\{S_{\tau_i}=M_1\}},\quad i=1,\dots,N,\quad \delta_0 = r_1 - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Распределение $\mathbf{p} = p(x_1,x_2,\dots,x_N)$ вектора $(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_N)$ выглядит следующим образом (в предположении, что $r_1-\sigma^2/2>0$ и N нечетно):

$$\mathbf{p} = \begin{cases} I_0(x_1,x_2,\dots,x_N), & 0\leqslant x_1\leqslant T,\ x_1\leqslant x_2\leqslant T,\ \dots,\ x_{N-1}\leqslant x_N\leqslant T,\\ I_1(x_1,x_2,\dots,x_{N-1}), & 0\leqslant x_1\leqslant T,\ x_1\leqslant x_2\leqslant T,\ \dots,\ x_N = T,\\ I_2(x_1,x_2,\dots,x_{N-2}), & 0\leqslant x_1\leqslant T,\ x_1\leqslant x_2\leqslant T,\ \dots,\ x_{N-1}=x_N=T,\\ \dots\dots\dots & \\ I_{N-1}(x_1), & 0\leqslant x_1\leqslant T,\ x_2=\dots=x_N=T,\\ I_N, & x_1=x_2=\dots=x_N=T. \end{cases}$$

$$I_0(x_1,x_2,\dots,x_N) = g(a_1,b_1,x_1)g(a_2,b_2,x_2-x_1)\cdots g(a_1,b_2,x_N-x_{N-1}),$$

$$I_1(x_1,x_2,\dots,x_{N-1}) = g(a_1,b_1,x_1)g(a_2,b_2,x_2-x_1)\cdots\int_T^\infty g(a_1,b_2,x_N-x_{N-1})\,dx_N,$$

$$\dots,\ I_{N-1}(x_1) = g(a_1,b_1,x_1)\int_T^\infty g(a_2,b_2,x_2-x_1)\,dx_2,\quad I_N = \int_T^\infty g(a_1,b_1,x_1)\,dx_1,$$

$$\sqrt{a_1} = \frac{1}{\sigma}\left(r_1-\frac{\sigma^2}{2}\right),\quad \sqrt{b_1} = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{M_1}{S_0},\quad \sqrt{a_2} = -\frac{1}{\sigma}\left(r_2-\frac{\sigma^2}{2}\right),\quad \sqrt{b_2} = -\frac{1}{\sigma}\ln\frac{M_0}{M_1},$$

где $g(a,b,x) = \sqrt{b/(2\pi)}e^{\sqrt{ab}}x^{-3/2}\exp\{-(ax+b/x)/2\}$, а τ_i — марковские моменты остановки, моменты достижений границ «коридора».

При доказательстве теоремы используются результаты работы [2]. В докладе, кроме аналитического, приведены два альтернативных способа вычисления справедливой цены европейского опциона: метод Монте-Карло и метод аппроксимации непрерывного рынка полным рынком с дискретным временем [3]. Отметим, что для расчетов аналитический метод оказался самым неэффективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998, 544 с.
2. *Barndorff-Nielsen O. E.* Exponential-decreasing distributions for the logarithm of particle size. — Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1977, v. 353, p. 401–419.
3. *Белявский Г. И.*, *Данилова Н. В.*, *Кондратьева Т. Н.* Расчеты для общей бинарной модели (B, S)-рынка. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 982–993.

В. Л. Дильман, **А. И. Носачева** (Челябинск, ЮУрГУ). **Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния менее прочного поперечного слоя пластической полосы при гипотезах поперечных сечений.**

Менее прочные (МП) слои являются неизбежным следствием многих существующих технологий производства сварных соединений. Исследование возникающего в МП слоях контактного упрочнения позволяет точнее оценить прочность неоднородных соединений, содержащих такие слои, в том числе сварных соединений. Характерной особенностью таких задач является их недоопределенность. При математическом моделировании *напряженно-деформированного состояния* (НДС) МП слоя недостаток краевых условий обычно компенсируется ограничениями на классы решений на основе «частичного предугадывания внутреннего состояния материала». Естественным ограничением такого сорта является *гипотеза плоских поперечных сечений* (ГППС) $v_y = W(y)$, где v_y — скорость перемещения поперек слоя. На основе ГППС в [1], [2] проведено исследование НДС поперечного МП слоя полосы при растягивающей нагрузке в случае плоской деформации. Естественное уточнение ГППС — *гипотеза синусоидальных сечений* (ГСС): $v_y = W(y)\cos(\delta x)$, где δ — малый параметр, который, в принципе, можно найти из эксперимента. В этом случае при обычных [1] допущениях можно «разделить переменные» в выражении $\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$, что позволяет для касательных напряжений τ_{xy} получить зависимость

$$\tau_{xy} = \frac{Y(y)\mathrm{tg}\,(\delta x)}{\delta\sqrt{4 + Y^2(y)\mathrm{tg}^2(\delta x)/\delta^2}}, \tag{1}$$

где функция $Y(y)$ связана с $W(y)$ уравнением

$$Y(y) = W''(y)/W'(y) + \delta^2 W(y)/W'(y), \tag{2}$$

а, с другой стороны, удовлетворяет некоторой граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Y'' - 2YY' + 0,75Y^3 = 0. \tag{3}$$

Можно найти приближенное решение этой задачи в аналитической форме. Уравнение (1) вместе с уравнениями равновесия и граничными условиями позволяет вычислить нормальные напряжения как функции координат точки МП слоя и, в конечном счете, внешнюю нагрузку в рассматриваемый критический момент нагружения. Уравнение (2) с использованием решения уравнения (3) удается проинтегрировать разложением по параметру δ, что дает возможность найти скорости смещения точек слоя. Сравнение получаемых в этом направлении результатов с частным случаем ГППС $\delta = 0$ показывает незначительное расхождение. Это позволяет считать модель НДС на основе ГППС вполне адекватно описывающей реальную ситуацию.

Интересно отметить, что гипотеза параболических сечений, эффективная в осесимметричном случае [3], в данной ситуации не позволяет «разделить переменные» в выражении $\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$ и провести соответствующий анализ НДС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дильман В. Л.* Математические модели напряженного состояния неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочек. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007, 202 с.
2. *Дильман В. Л.*, *Остсемин А. А.* О напряженно-деформированном состоянии при растяжении пластического слоя с двумя осями симметрии. — Изв. РАН. Сер. мех. тв. тела, 2001, № 6, с. 115–124.
3. *Дильман В. Л.*, *Ерошкина Т. В.* Об одной модели, описывающей напряженное состояние мягкой прослойки в круглом стержне. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 4, с. 793–794.

В. К. Доманский, **В. Л. Крепс** (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Решения игр торга двумя рисковыми активами. Общий случай.**

Получены решения повторяющихся игр $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ с неполной информацией у игрока 2, к которым сводятся описанные в [1] торги неограниченной продолжительности двумя рисковыми активами (акциями) между двумя биржевыми игроками, в общей постановке.

Случайные ликвидные цены двух торгуемых рисковых активов равны $a(s)$ и $b(s)$, где s — состояние, выбираемое случайным ходом на весь период торгов согласно вероятностному распределению $\mathbf{p}$ на двумерной целочисленной решетке $\mathbf{Z}^2$, известному обоим игрокам. Игрок 1 (инсайдер) знает значения случайных цен обеих акций. Игрок 2 знает, что игрок 1 является инсайдером. Игроки делают целочисленные векторные ставки.

Решение игры строится на базе приведенных в [1] решений частных случаев таких игр с распределениями, имеющими не более, чем трехточечные носители, в выпуклую комбинацию которых раскладывается исходное распределение $\mathbf{p}$ (см. [2]).

Мы описываем алгоритм построения оптимальных стратегий информированного игрока 1 в играх $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ с начальным распределением $\mathbf{p}$ общего вида. Алгоритм основан на полученном разложении распределений $\mathbf{p}$ и определяет последовательность действий игрока 1 в зависимости от выбранного случаем состояния $s \in \mathbf{Z}^2$.

Нами получен следующий результат.

Теорема. *Если дисперсии случайных цен акций a и b конечны, $\mathbf{D}_{\mathbf{p}^1}[a] < \infty$, $\mathbf{D}_{\mathbf{p}^2}[b] < \infty$, то игры $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ имеют значения $V_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$, определяемые соотношениями $V_\infty^{a,b}(\mathbf{p}) = V_\infty^a(\mathbf{p}^1) + V_\infty^b(\mathbf{p}^2)$. Если математические ожидания $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^1}[a]$, $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^2}[b]$ цен акций обоих типов — целые числа, то $V_\infty^{a,b}(\mathbf{p}) = (1/2)(\mathbf{D}_{\mathbf{p}^1}[a] + \mathbf{D}_{\mathbf{p}^2}[b])$. Оба игрока имеют оптимальные стратегии.*

На первом шаге $t = 1$ своей оптимальной стратегии игрок 2 делает ставку (k_1, k_2), где k_1 — целая часть математического ожидания $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^l}[a]$ и k_2 — целая часть математического ожидания $\mathbf{E}_{\mathbf{p}^l}[b]$. На последующих шагах l-я компонента, $l = 1, 2$, ставки игрока 2 зависит только от последней наблюдаемой пары l-х компонент ставки игрока 1 i_{t-1}^l и его собственной ставки j_{t-1}^l, $t = 2, 3, \ldots$:

$$j_t^l = \begin{cases} j_{t-1}^l - 1 & \text{при} \quad i_{t-1}^l < j_{t-1}^l, \\ j_{t-1}^l & \text{при} \quad i_{t-1}^l = j_{t-1}^l, \\ j_{t-1}^l + 1 & \text{при} \quad i_{t-1}^l > j_{t-1}^l. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока 1 в игре $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$ является выпуклой комбинацией его оптимальных стратегий в таких играх с распределениями, имеющими не более, чем трехточечные носители, в выпуклую комбинацию которых раскладывается исходное распределение $\mathbf{p}$.

Полученные решения повторяющихся игр с неполной информацией, описывающих модели многошаговых торгов между двумя биржевыми игроками, на которых торгуется два типа акций, демонстрируют справедливость гипотезы [3] о возможном эндогенном происхождении случайных флуктуаций цен на финансовых рынках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крепс В.Л.* Решения игр торга двумя рисковыми активами. Случаи двух и трех состояний. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2, с. 000–000.
2. *Доманский В. К.* Разложение распределений на решетке $\mathbf{Z}^2$ и модели биржевых торгов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 644–646.
3. *De Meyer B., Moussa Saley H.* On the strategic origin of Brownian motion in finance. — Internat. J. Game Theory, 2003, v. 31, p. 285–319.

А. А. Замышляева (Челябинск, ЮУрГУ)**. Начально-конечная задача для одного уравнения соболевского типа на графе.**

Пусть $G = G(\mathcal{V}; \mathcal{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и толщину $d_j > 0$. На графе G рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxtt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j) \quad \text{для всех } x \in (0, l_j), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Для уравнений (1) в каждой вершине V_i зададим краевые условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \tag{2}$$

$$u_s(0,t) = u_j(0,t) = u_k(l_k,t) = u_m(l_m,t), \tag{3}$$

для всех $E_s, E_j \in E^\alpha(V_i)$, $E_k, E_m \in E^\omega(V_i)$. Здесь $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ — множество дуг с началом (концом) в вершине V_i.

Задачу (2)–(3) для уравнений (1) удается редуцировать к линейному уравнению соболевского типа второго порядка [1]

$$Au'' = B_1 u' + B_0 u, \tag{4}$$

причем пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и ∞ является устранимой особой точкой A-резольвенты пучка $\vec{B}$ [2].

Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора D, определенного формулой

$$\langle Du, v\rangle = \sum_{E_j \in \mathcal{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}(x) v_{jx}(x) + a u_j(x) v_j(x))\, dx,$$

занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а $\{\varphi_k\}$ — соответствующие им ортонормированные в смысле $L_2(G)$ функции.

Для постановки начально-конечной задачи [3] необходимы проекторы P и P_0. Построим проектор $P = \mathrm{I} - \sum_{\lambda_k = \lambda - a} \langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k$.

Для построения проектора P_0 выберем такую область $\Gamma_0 \subset \mathrm{C}$, содержащую конечное множество точек A-спектра $\sigma_0^A(\vec{B})$, что $\partial\Gamma_0 \cap \sigma_0^A(\vec{B}) = \varnothing$. Как нетрудно видеть, область Γ_0 можно выбрать такой, что $\partial\Gamma_0 = \gamma_0$ — контур. Построим проектор $P_0 = \sum_{\lambda_k^i} \langle \cdot, \varphi_k^i\rangle \varphi_k^i$. Здесь $\{\lambda_k^i\} = \{\lambda_k \in \sigma(D)\colon \mu_k^{1,2} \in \sigma_0^A(\vec{B}),\ \lambda_k \neq \lambda - a\}$.

Рассмотрим начально-конечную задачу

$$\begin{aligned} P_0(\dot{u}(0) - u_1^0) = 0, \quad P_0(u(0) - u_0^0) = 0, \\ P_1(\dot{u}(T) - u_1^T) = 0, \quad P_1(u(T) - u_0^T) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $P_1 = P - P_0$.

Теорема. *При любых $\alpha, \beta \in \mathrm{B}\backslash\{0\}$ и таком $\lambda \in \mathrm{R}$, что выполнено условие*: *либо* (i) $0 \notin \sigma(A)$, *либо* (ii) $0 \in \sigma(A)$ *и* $\lambda = \lambda'$, *но* $\lambda \neq \lambda''$, *и любых* $T \in \mathbf{R}_+$, $v_k^0, v_k^T \in \mathfrak{V}$, $k = 0, 1$, *существует единственное решение задачи* (5) *для уравнения* (1) *с условиями* (2)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht-Boston-Tokyo-Keln: VSP, 2003.
2. *Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка. — Вычислит. технологии, 2003, т. 8, № 4, с. 45–54.
3. *Загребина С. А.* О задаче Шоуолтера–Сидорова. — Изв. вузов. Математика, 2007, № 3, с. 22–28.

А. В. З а х а р о в (Уфа, ИМ с ВЦ УНЦ РАН)**. Пример построения кубатурной формулы для вероятностного представления решений уравнений математической физики.**

Пусть $\xi(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) — случайная величина, принимающая значения из множества T и имеющая плотность распределения $p_\xi(x)$, $x \in T$. Предположим, что плотность $p_\xi(x)$ известна в конечном наборе точек $\{x_i\}_{i=1}^n$ множества T, и требуется оценить математическое ожидание $\mathbf{E}\,\xi$. Подобные задачи возникают как в прикладных науках [1], так и в теоретической математике. Например, иногда вероятностное представление решения параболических дифференциальных уравнений является простым математическим ожиданием от функционала винеровского процесса, имеющего известное распределение [2]. В этом случае метод кубатурных формул может иметь порядок сходимости вплоть до $1/n^2$ (метод Монте-Карло — $1/\sqrt{n}$).

Поскольку математическое ожидание представляет собой интеграл, его можно оценить при помощи кубатурной формулы

$$\mathbf{E}\,\xi = \int_T x p_\xi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n x_i p_\xi(x_i)|\Delta_i|, \tag{1}$$

где $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — разбиение T на подмножества, $|\Delta_i|$ — мера множества Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для заданной плотности распределения $p_\xi(x)$, $x \in [a, b]$, ошибку кубатурной формулы (1) определим следующим образом:

$$\varepsilon_n = \left| \int_T x p_\xi(x)\,dx - \sum_{i=1}^n x_i p_\xi(x_i)|\Delta_i| \right|. \tag{2}$$

Последовательность кубатурных формул вида (1) $\{\overline{x}_i^n,\ \overline{\Delta}_i^n\}_{i=1}^n$ с ошибкой $\overline{\varepsilon}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, назовем *асимптотически оптимальной*, если для любой другой последовательности кубатурных формул вида (1) $\{x_i^n, \Delta_i^n\}_{i=1}^n$ с ошибкой ε_n, $n = 1, 2, \ldots$, верно неравенство $\lim_{n\to\infty} \overline{\varepsilon}_n/\varepsilon_n \leqslant 1$.

В работе предложены методы построения кубатурных формул (последовательности кубатурных формул), оптимальных в асимптотическом смысле применительно к указанным задачам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wackernagel H.* Multivariate Geostatistics. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
2. *Скороход А. В.* Марковские процессы и вероятностные приложения в анализе. — Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1989, т. 43, с. 147–188.

О. А. К о з л и т и н (Москва, ТВП)**. О выходной последовательности двоичного 2-линейного регистра сдвига.**

В литературе неоднократно высказывалась мысль о возможности использования самоуправляемых полилинейных регистров сдвига в качестве генераторов псевдослучайных последовательностей (см., например, [2] и [3]). В работе, представленной данным сообщением, впервые проведен расчет ряда специальных параметров двоичного самоуправляемого 2-линейного регистра сдвига (2-ЛРС).

Пусть $R = \mathbf{Z}_2$, $F(x) \in R[x]$ — многочлен максимального периода степени $m \geqslant 2$, ψ: $R_{m,m} \to R$. Опишем функционирование неавтономного 2-ЛРС $\mathfrak{A}$ с начальным заполнением $w(0) \in R_{m,m}$.

Рассмотрим такое отображение μ: $\mathbf{N}_0^2 \to R$, что $\mu[\overline{0, m-1} \times \overline{0, m-1}] = \omega(0)$, и в таблице каждая строка и каждый столбец суть линейные рекуррентные последовательности (ЛРП) с характеристическим многочленом $F(x)$. Такая таблица называется 2-*линейной рекуррентной последовательностью* [1]. По таблице под действием двоичной управляющей последовательности δ движется прямоугольное окно размерами $m \times m$: если очередной знак δ равен 0, то окно сдвигается на один шаг вниз, а если 1, то на один шаг вправо (в начальный момент времени окно располагается в левом верхнем углу таблицы). Текущее заполнение окна $w(i)$ считается текущим заполнением регистра $\mathfrak{A}$, а значение $\psi(w(i))$ — очередным знаком выходной последовательности γ.

$\mu(0,0)$	$\mu(0,1)$	$\mu(0,2)$	$\dots$	$\mu(0,j)$	$\dots$
$\mu(1,0)$	$\mu(1,1)$	$\mu(1,2)$	$\dots$	$\mu(1,j)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mu(i,0)$	$\mu(i,1)$	$\mu(i,2)$	$\dots$	$\mu(i,j)$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Если задать функцию обратной связи β: $R_{m,m} \to R$, то неавтономный 2-ЛРС $\mathfrak{A}$ можно превратить в автономный (самоуправляемый) 2-ЛРС $\mathfrak{A}^\beta$: $\delta(i) = \beta(w(i))$ для любых $i \geqslant 0$.

Мы будем рассматривать самоуправляемый 2-ЛРС $\mathfrak{A}^\beta$, функция выхода ψ которого возвращает элемент, стоящий в левом верхнем углу текущего заполнения. Опишем функцию обратной связи β.

Пусть φ_0 и φ_1 — частичные функции перехода 2-ЛРС $\mathfrak{A}$, а θ — корень многочлена $F(x)$ в его поле разложения.

Утверждение. *Характеристический многочлен линейного оператора* $\sigma = \varphi_0\,\varphi_1^{-1}$ *представляется в виде*

$$\chi_\sigma(x) = G_0(x)G_1(1)\cdots G_{m-1}(x), \tag{1}$$

где $G_0(x) = (x \oplus 1)^m$, *и* $G_j(x) \in R[x]$ — *минимальный многочлен элемента* θ^{2^j-1}, $j = 1, 2, \dots, m-1$. *Все сомножители в разложении* (1) *попарно различны и имеют степень* m.

Если для любых $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$\widetilde{G}_j(x) = G_0(x)\cdots G_{j-1}(x)G_{j+1}(x)\cdots G_{m-1}(x),$$

то существуют такие многочлены $U_0(x), U_1(x), \dots, U_{m-1}(x) \in R[x]$, что

$$\widetilde{G}_0(x)U_0(x) + \widetilde{G}_1(x)U_1(x) + \cdots + \widetilde{G}_{m-1}(x)U_{m-1}(x) = 1.$$

Зададим функцию обратной связи β следующим образом: $\beta(a) = \psi[\widetilde{G}_0(\sigma)U_0(\sigma)(a)]$ для любых $a \in R_{m,m}$. Легко видеть, что функция β линейна.

Равенство (1) индуцирует следующее разложение пространства $R_{m,m}$ в прямую сумму собственных подпространств:

$$R_{m,m} = \operatorname{Ker} G_0(\sigma) \dot{+} \operatorname{Ker} G_1(\sigma) \dot{+} \cdots \dot{+} \operatorname{Ker} G_{m-1}(\sigma).$$

Это означает, что начальное заполнение $w(0)$ самоуправляемого 2-ЛРС $\mathfrak{A}^\beta$ однозначно представляется в виде

$$w(0) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{m-1}, \tag{2}$$

где $a_j \in \operatorname{Ker} G_j(\sigma)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Всюду далее будем рассматривать начальные заполнения $w(0)$, в разложении (2) которых $a_0 \neq 0$.

Пусть вектор $\operatorname{typ} w(0) = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m-1}) \in R^{m-1}$ таков, что δ_j есть индикатор неравенства $a_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Положим $\tau = 2^m - 1$, $\tau_j = \tau/(2^{(m,j)} - 1)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Теорема 1. *Во введенных обозначениях период $T(\gamma)$ выходной последовательности γ удовлетворяет равенству $T(\gamma) = [\tau_1^{\delta_1}, \tau_2^{\delta_2}, \ldots, \tau_{m-1}^{\delta_{m-1}}]\,\tau$. При этом равенство $T(\gamma) = \tau^2$ выполняется тогда и только тогда, когда $(\delta_1, 2\delta_2, 3\delta_3, \ldots, (m-1)\delta_{m-1}, m) = 1$. Ранг $\operatorname{rang}\gamma$ выходной последовательности γ удовлетворяет двойному неравенству*

$$m\biggl(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \delta_j \tau\biggr) \geqslant \operatorname{rang}\gamma \geqslant m\biggl(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \delta_j \tau_j\biggr).$$

Если δ_j есть индикатор равенства $(m, j) = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, то $\operatorname{rang}\gamma = m + m\varphi(m)(2^m - 1)$, где φ — функция Эйлера.

Для всякого $z \in \{0, 1\}$ обозначим p_z относительную частоту появления знака z на цикле последовательности γ.

Теорема 2. *Если $\operatorname{typ} w(0) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на j-м месте, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, то для любых $z \in \{0, 1\}$*

$$\left| p_z - \frac{\tau^2 + (-1)^z}{2\tau^2} \right| \leqslant \frac{1}{2}\biggl(\frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{\tau}\biggr) 2^{m/2}.$$

В частности, если $(m, j) = 1$, то на цикле γ имеется $(\tau^2 + 1)/2$ нулей и $(\tau^2 - 1)/2$ единиц.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. А. Нечаеву за постановку задачи и постоянное внимание к этой работе.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ МК-24.2009.10 и НШ-4.2008.10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмин А. С., Куракин В. Л., Нечаев А. А.* Псевдослучайные и полилинейные последовательности. — Труды по дискретной математике, 1997, т. 1, с. 139–202.
2. *Михайлов Д. А.* Унитарные полилинейные регистры сдвига и их периоды. — Дискретная математика, 2002, т. 14, в. 1, с. 30–59.
3. *Нечаев А. А.* Многомерные регистры сдвига и сложность мультипоследовательностей. — Труды по дискретной математике, 2003, т. 6, с. 150–165.

Е. В. К о л п а к о в а (Новороссийск, НПИ КубГТУ)**. Существование и единственность обобщенных решений для модели Маргерра–Власова колебаний пологих оболочек в неограниченной области.**

Пусть оболочка проектируется на плоскую область Ω с границей $\Gamma \in C^1$, являющуюся дополнением в $\mathbf{R}^2$ конечного объединения ограниченных односвязных областей. Поперечные и продольные перемещения w, u, v точек срединной поверхности оболочки удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&w_{tt} + D\Delta^2 w + \delta\Delta^2 w_t = Z + (N_1 w_{x_1})_{x_1} + (N_{12} w_{x_1})_{x_2} + (N_2 w_{x_2})_{x_2} \\
&\qquad + (N_{12} w_{x_2})_{x_1} - N_1 k_1 - N_2 k_2, \\
&\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_1} = -\Big(\frac{2}{1+\mu}[(k_1 w)_{x_1} + w_{x_1 w_1} w_{x_1} + \mu(k_2 w)_{x_1} + \mu w_{x_1 x_2} w_{x_2}] \\
&\qquad + w_{x_1 x_2} w_{x_2} + w_{x_1} w_{x_2 x_2} + X \Big), \\
&\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_2} = -\Big(\frac{2}{1-\mu}[(k_2 w)_{x_2} + w_{x_2 x_2} w_{x_2} + \mu(k_1 w)_{x_2} + \mu w_{x_1 x_2} w_{x_1}] \\
&\qquad + w_{x_1 x_2} w_{x_1} + w_{x_2} w_{x_1 x_1} + Y \Big), \\
&u|_\Gamma = v|_\Gamma = w|_\Gamma = \left(\frac{d^2 w}{dn^2} - \mu\chi \frac{dw}{dn} \right)\Big|_\Gamma = 0, \quad w|_{|x|\to\infty} = 0, \\
&w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \qquad x \in \Omega.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Исследование этой модели проведено по схеме, предложенной в [1]. Введено функциональное пространство $\widetilde{H}_2^2(\Omega, \mu)$. Сформулированы определения обобщенных решений задачи (1). С помощью оригинальной техники использования операторов сглаживания [2] доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть граница $\Gamma \in C^3$ области Ω имеет ограниченные четвертые производные. Пусть $w_0 \in \widetilde{H}_2^2(\Omega)$, $w_1 \in L_2(\Omega)$, $X = X_{1x_1} + X_{2x_2}$, $Y = Y_{1x_1} + Y_{2x_2}$, $Z = Z_0 + Z_{1x_1} + Z_{2x_2} + \Delta^2 Z_3$, где $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in L_{2,\infty}(\Omega \times [0,t_f])$, $Z_0 \in L_1(\Omega \times [0,t_f])$, $Z_1, Z_2 \in L_{p,1}(\Omega \times [0,t_f])$, $p > 1$, $Z_3 \in L_2([0,t_f], \widetilde{H}_2^2(\Omega))$. Тогда существуют единственные обобщенные решения w, u, v данной начально-краевой задачи* (1)*, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$
w \in L_{2,\infty}^{2,0}(\Omega \times [0,t_f]) \cap L_{2,2}^{2,1}(\Omega \times [0,t_f]) \cap L_{2,\infty}^{1,1}(\Omega \times [0,t_f]), \quad u, v \in L_\infty([0,t_f], \overset{\circ}{H}{}^1_2(\Omega)).
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И.* Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 6, с. 747–784.
2. *Sedenko V.I.* On the unigueness theorem for generalized solutions of initial-boundary problems for the Marguerre–Vlasov vibrations of shallow shells with clamped boundary conditions. — Applied Mathematics and Optimization, 1999, v. 39.

И. К. Коханенко, **И. Л. Пищик** (Ростов-на-Дону, РВИ РВ, ИУБИП)**. Стабильность структуры бета системы активов.**

Теория оценки активов на рынке капитала является важной составляющей теории эффективного портфеля. Линейная зависимость между доходностью портфеля, включающего безрисковый и рисковый активы, и рыночной премией за риск определяется коэффициентом β. Для уменьшения риска портфель диверсифицируют, что требует оценивать коэффициенты β всех активов. Считается, что эти коэффициенты стабильны, как правило, в течение пяти лет. Но инвестору необходимо знать, что будет с бета системы в следующий период. Ответ на этот вопрос находится, если воспользоваться элементами теории фрактальной топологии и динамики экономических систем [1], где путем выделения акцентированных элементов и их кластеров получено соотношение $\ln n = \gamma \ln L - \gamma \ln r$. Здесь $\gamma = 1/a$, $a = d-1$, d — фрактальная размерность, n — число кластеров, r — ранг кластера, L — число акцентированных элементов при $n = 1$. Отсюда на основе парной регрессии оценивается γ, а, следовательно, фрактальная размерность системы кластеров. Полагая, что величина n, как и ее ранг r принимают не только целочисленные значения, выделяются в диапазоне изменения β^{-1} с определенной дискретностью интервалы значений $\beta^{-1} = n$; тогда кластер — это совокупность компаний, чья величина β^{-1} находится в некотором интервале значений, акцентированный элемент — конкретное значение β^{-1}, а ранг r есть ранг кластера. Тогда оценивается d, характер поведения (персистентный или нет) и время цикла структуры бета системы активов. Такой подход применен к десятилетним помесячным рядам прибылей [2] семнадцати ведущих компаний из восьми отраслей США относительно взвешенной рыночной прибыли на основе сделок Нью-Йоркской и Американской фондовых бирж (www.unity-dana.ru) и аналогичным данным за 1996–2001 гг. пяти известных компаний России относительно индекса РТС. Фрактальная размерность пространства «бета-ранг» для компаний США получилась равной $d = 2,15$, и по критериям [1] структура бета системы американских активов персистентна [1]. Российские же статистики выходят за рамки фрактального изучения ($d > 3$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коханенко И. К.* Фрактальная топология и динамика экономических систем. — Экономика и математические методы, 2007, т. 43, № 1.

В. Л. К р е п с (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Решения игр торга двумя рисковыми активами. Случаи двух и трех состояний.**

Исследуются модели многошаговых торгов между двумя биржевыми игроками, на которых торгуется два типа акций. Случайные ликвидные цены акций могут принимать произвольные неотрицательные целочисленные значения. Эти цены акций обоих типов a и b зависят от «состояния природы» s, которое выбирается случайным ходом на весь период торгов перед их началом из множества $S = \mathbf{Z}^2$ точек двумерной целочисленной решетки.

Оба игрока знают распределение $\mathbf{p} \in \Delta(S)$ вероятностей состояний. Кроме того, игрок 1 является инсайдером. Он знает «состояние природы» s и, тем самым, ликвидные цены $a(s)$ и $b(s)$ обоих типов акций. Игрок 2 не имеет этой информации, он знает, что игрок 1 является инсайдером.

Затем игроки ведут между собой многошаговые торги. На каждом шаге торгов игроки независимо и одновременно делают векторные ставки — называют свои цены акций обоих типов. Назвавший более высокую цену акции данного типа покупает за эту цену одну акцию этого типа у противника. Если игроки назвали одинаковые цены акции того или иного типа, то передачи акции этого типа не происходит.

После каждого шага пара названных векторных ставок объявляется обоим игрокам. Допустимы любые целочисленные векторные ставки. Игроки стремятся максимизировать цену своего итогового портфеля — деньги плюс стоимость приобретенных рисковых активов, рассчитанная по их ликвидным ценам.

Такая n-шаговая модель описывается антагонистической повторяющейся игрой $G_n^{a,b}(\mathbf{p})$ с неполной информацией у второго игрока [1]. Ограниченность значений $V_n^{a,b}(\mathbf{p})$ этих игр при $n \to \infty$ (см. [2]) позволяет рассматривать торги не ограниченной заранее продолжительности, которые сводятся к бесконечным играм $G_\infty^{a,b}(\mathbf{p})$.

В работе, представленной данным сообщением, приводятся решения для частных случаев таких игр, а именно, для игр с двумя состояниями и для игр с тремя состояниями (распределение $\mathbf{p}$ имеет двух- и, соответственно, трехточечный носитель).

Пусть носитель распределения $\mathbf{p} = (p_{ij})$ содержит две точки. Не ограничивая общности, можем считать, что одна из этих точек $(0,0)$. Таким образом, в игре возможны два состояния $(0,0)$ и (m_1, m_2), где $m_1 \neq m_2$ — целые числа, причем $m_1 > 0$. Распределение $\mathbf{p}$ описывается скалярным параметром p — вероятностью состояния (m_1, m_2). Рассмотрим решетку $D(m_1, m_2) \subset [0,1]$,

$$D(m_1, m_2) = \{k/m_1,\ k = 0, \ldots, m_1\} \bigcup \{l/|m_2|,\ l = 0, \ldots, m_2\}.$$

Теорема 1. *Значение $V_\infty^{m_1 m_2}(p)$ игры $G_\infty^{m_1 m_2}(p)$ равно сумме $V_\infty^{m_1 m_2}(p) = V_\infty^{m_1}(p) + V_\infty^{|m_2|}(p)$ значений игр с одним рисковым активом $G_\infty^{m_1}(p)$ и $G_\infty^{|m_2|}(p)$. Оба игрока имеют оптимальные стратегии. Оптимальная стратегия игрока* 2 *представляет собой сочетание его оптимальных стратегий для игр с активами одного типа $G_\infty^{m_1}(p)$ и $G_\infty^{|m_2|}(p)$. Мартингал апостериорных вероятностей состояния (m_1, m_2), порождаемый оптимальной стратегией игрока* 1, *представляет собой асимметричное случайное блуждание по смежным точкам решетки $D(m_1, m_2) \subset [0,1]$ с поглощением в крайних точках.*

Пусть теперь носитель распределения $\mathbf{p} = (p_{ij})$ содержит три точки: $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{z}_2 = (x_2, y_2)$, $\mathbf{z}_3 = (x_3, y_3)$, $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in \mathbf{Z}^2$. Положим $\mathbf{z}_3 = (0,0)$. Пусть также для определенности $x_1 > y_1 > 0$, $y_2 > x_2 > 0$.

Для точки $\mathbf{w} = (u, v) \in \mathbf{R}^2$ обозначим $\mathbf{p}(\cdot|\mathbf{w})$ вектор ее барицентрических координат с базой $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{0}$.

Теорема 2. *Значение $V_\infty^{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\mathbf{p})$ игры $G_\infty^{\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2}(\mathbf{p})$ с тремя состояниями $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ и $\mathbf{0}$ равно сумме значений двух игр с одним рисковым активом. Для точки $\mathbf{w} =$*

$(u,v)\in\mathbf{Z}^2$, *находящейся внутри треугольника* $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3)$,

$$V_\infty^{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\mathbf{p}(\cdot|\mathbf{w}))=\frac{1}{2}\Big((x_1^2+y_1^2)p(\mathbf{z}_1|\mathbf{w})+(x_2^2+y_2^2)p(\mathbf{z}_2|\mathbf{w})-(u^2+v^2)\Big).$$

На границе треугольника $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{0})$ *функция* $V_\infty^{\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2}(\mathbf{p})$ *определяется по теореме* 1. *В остальных точках* $\mathbf{w}=(u,v)\in\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{0})$ *эта функция является наименьшей непрерывной вогнутой мажорантой ее значений в точках* $\mathbf{w}=(u,v)\in\mathbf{Z}^2$ *и точках границы треугольника* $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,0)$. *Оба игрока имеют оптимальные стратегии. Оптимальная стратегия игрока* 2 *представляет собой сочетание его оптимальных стратегий для игр с активами одного типа. Мартингал апостериорных математических ожиданий, порождаемый оптимальной стратегией игрока* 1, *представляет собой симметричное случайное блуждание по точкам решетки* $\mathbf{Z}^2$, *находящимся внутри треугольника* $\triangle(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3)$. *Симметрия этого блуждания нарушается при попадании на границу треугольника. С момента первого попадания на границу игра переходит в одну из игр с распределениями* $\mathbf{p}$ *с двухточечными носителями* $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2$, *или* $\mathbf{z}_2,\mathbf{0}$, *или* $\mathbf{0},\mathbf{z}_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aumann R. J.*, *Maschler M.* Repeated Games with Incomplete Information. Cambridge, MA–London: MIT Press, 1995.
2. *Доманский В. К.*, *Крепс В. Л.* Многошаговые торги с несколькими рисковыми активами. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, с. 324–325.

М. П. К р и в е н к о (Москва, ИПИ РАН)**. Адаптивная комбинированная оценка плотности многомерного распределения.**

Оценивание плотности распределения сопровождается рядом общих для многомерного анализа и специфических для некоторых предметных областей (обработка текстов, распознавание изображений) проблем: необходимость задания множества параметров при построении оценки; существенное снижение качества оценки при увеличении размерности данных; появление вырожденности распределений при «малых» объемах обучающей выборки.

Проблемы «проклятия размерности» при использовании непараметрической оценки плотности предлагается решать с помощью перехода к главным компонентам и путем приведения данных к меньшей размерности так, чтобы сохранить специфику самих данных и по возможности улучшить выборочные свойства оценок. При переходе к главным компонентам (n-мерной переменной $\mathbf{V}$) значение плотности остается без изменений. Оценку плотности распределения $f^*(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} = (v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})^T \in \mathbf{R}^n$, для $\mathbf{V}$ сформируем из базовой части — ядерной оценки $f_m^*(v^{(1)}, \ldots, v^{(m)})$ плотности распределения первых главных компонент, и дополнительной части — параметрических оценок плотности нормального распределения $f_1^*(v^{(j)})$ остальных главных компонент: $f^*(\mathbf{v}) = f_m^*(v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}) \prod_{j=m+1}^{n} f_1^*(v^{(j)})$, $0 \leqslant m \leqslant n$. В работе, представленной данным сообщением,

$$f_m^*(v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}) = f_m^*(\widetilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{Nh^m} \sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{\widetilde{\mathbf{v}} - \widetilde{\mathbf{v}}_i}{h}\right),$$

где в качестве ядра K принята плотность нормального распределения, h — параметр сглаживания, $\widetilde{\mathbf{v}}_i = (\widetilde{v}_i^{(1)}, \ldots, \widetilde{v}_i^{(m)})$ суть выборочные значения, N — объем выборки.

В случае, когда $N < n$, часть диагональных элементов выборочной ковариационной матрицы $\mathbf{D}^*$ для $\mathbf{V}$ будут нулевыми. В связи с этим введем еще один параметр комбинированной оценки — критическое значение $d_0 > 0$, меньше которого не может быть значение выборочной дисперсии главных компонент.

Для подбора значения h строится вариант метода перепроверки в интерпретации [1], но применительно к многомерному случаю и в форме алгоритма, который можно использовать на практике. В этом случае значение параметра сглаживания h ищется с помощью метода перепроверки как решение задачи

$$\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{h^m} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \exp\left\{-\frac{r_{ij}}{2h^2}\right\}\right) \to \max_{h>0}, \quad \text{где} \quad r_{ij} = (\widetilde{\mathbf{v}}_i - \widetilde{\mathbf{v}}_j)^T (\widetilde{\mathbf{v}}_i - \widetilde{\mathbf{v}}_j). \qquad (1)$$

Решение (1) предлагается искать итерационным путем, для эффективной реализации чего доказывается утверждение об области возможных значений точки искомого максимума. Кроме этого, аналитическим путем и с помощью метода моделирования исследуется степень влияния роста m на качество $f_m^*(\widetilde{\mathbf{v}})$.

Для исследования реальных характеристик оценок $f^*(\mathbf{v})$ рассматривается задача распознавания текста [2]. Предложенная в данном сообщении комбинированная оценка, ее экспериментальный анализ показали высокую эффективность байесовского подхода при классификации объектов, имеющих различную размерность, а также работоспособность предложенных методов оценивания элементов байесовского эмпирического классификатора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Duin R. P. W.* On the choice of smoothing parameters for parzen estimators of probability density functions. — IEEE Transactions on Computers, 1976, v. C-25, p. 1175–1179.

2. *Кривенко М. П.* Распознавание элементов изображения, имеющих различные размеры. — В сб.: Системы и средства информатики. В. 17. М.: ИПИ РАН, 2007, с. 30–51.

И. А. Куницин, **А. С. Адамчук** (Ставрополь, СевКавГТУ). **Обобщение фильтрационной теоремы об окружности.**

При решении изотропных плоскопараллельных задач гидродинамики широко используется теория функций комплексного переменного. Если область фильтрации несжимаемой вязкой жидкости имеет проницаемость k_0 и содержит включения конечного размера с проницаемостью k_i, то на их границе должны выполняться условия неразрывности.

Для случая одного круглого включения решение задачи дает фильтрационная теорема об окружности [1]. Более интересным и неисследованным является случай нескольких не имеющих общих точек включений круглой формы с произвольной проницаемостью.

Пусть невозмущенный плоскопараллельный фильтрационный поток в грунте с проницаемостью k_0 определяется функцией $f(z)$, особые точки которой лежат вне окружностей $|z-z_i|=R_i$, $i=1,\dots,m$. Если k_i — проницаемость i-го включения, то возмущенное течение вне окружностей определится комплексным потенциалом $w_0(z)$, а внутри i-й окружности комплексным потенциалом $w_i(z)$, которые будем искать в виде

$$w_0(z)=f(z)+\sum_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n^j}{(z-z_j)^n},\quad w_i(z)=\frac{2k_i}{k_0+k_i}f(z)+\sum_{j\not\equiv i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^j}{(z-z_j)^n},\qquad(1)$$

где B_n^j и C_n^j — коэффициенты рядов Лорана, которые следует определить.

Для того чтобы задача была разрешима, ее необходимо дополнить условиями неразрывности течения на границе каждой окружности:

$$\frac{\operatorname{Re}w_0(z)}{k_0}\bigg|_{|z-z_i|=R_i}=\frac{\operatorname{Re}w_i(z)}{k_i}\bigg|_{|z-z_i|=R_i},\quad \operatorname{Im}w_0(z)|_{|z-z_i|=R_i}=\operatorname{Im}w_i(z)|_{|z-z_i|=R_i}.\qquad(2)$$

Разлагая функции $f(z)$, $\sum_{n=0}^{\infty}B_n^j/(z-z_j)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}C_n^j/(z-z_j)^n$ в ряд Лорана в окрестности точки z_i и выделяя действительную и мнимую части функций (1), а затем, воспользовавшись условиями (2), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов B_n^j и C_n^j. Задавая количество членов в рядах, можно получить решение задачи фильтрации несжимаемой вязкой жидкости в области, содержащей круглые включения различной проницаемости, с некоторой точностью, которую можно оценить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубева О. В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972, 368 с.

Е. В. К у т ы р е в а (Москва, ТВП). **О максимизации одной пороговой функции от двух переменных.**

Данная задача входит в круг задач упорядочения объектов разнообразной природы, которые возникают в процессе решения различных математических проблем (см., например, [2]). В частности, в некоторых задачах статистики при построении статистических критериев и доверительных интервалов требуется упорядочить значения вероятностей, которые выражаются линейными псевдобулевыми формами. Один из подходов к решению такой задачи для одной линейной формы от булевых переменных предложен в работе [1].

Пусть $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{N} \cup 0\}$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $C \in \mathbf{R}$ — некоторая константа. Рассмотрим функцию f_d: $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \to \mathbf{R}$, определенную следующим образом:

$$f_d(k_1, k_2) = \begin{cases} k_1 + dk_2, & k_1 + dk_2 \leqslant C, \\ 0, & k_1 + dk_2 > C, \end{cases} \qquad d \in \mathbf{R}.$$

Обозначим (k_1^*, k_2^*) пару, для которой выполняется $\max_{(k_1,k_2)\in \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0} f_d(k_1, k_2) = f_d(k_1^*, k_2^*)$. Тогда для пары (k_1^*, k_2^*) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Неизвестное k_1^* может принимать значения из множества* $\{[C - [C/d]d], \ldots, [C]\}$.

Обозначим g_{rem} остаток от деления некоторого числа $g \in \mathbf{R}$ на d, $Q_{rem} = (C - |C|)_{rem}$.

Утверждение 2. *Равенство $(k_1^*, k_2^*) = ([C] - j, [(C - [C] + j)/d])$, где j может принимать значения из множества $\{0, \ldots, [C] - [C - [C/d]d]\}$, верно в том и только в том случае, если для любого $i = 0, 1, \ldots, [C] - [C - [C/d]d]$, $i \neq j$, выполнено одно из трех условий*:

$$1) \begin{cases} Q_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ Q_{rem} + i_{rem} \geqslant 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} Q_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ Q_{rem} + i_{rem} < 1, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} Q_{rem} + j_{rem} < 1, \\ Q_{rem} + i_{rem} < 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}. \end{cases}$$

Если неизвестное k_1^* принимает максимально возможное значение, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Равенство $(k_1^*, k_2^*) = ([C], [(C - [C])/d])$ верно в том и только в том случае, если для всех $i = 1, 2, \ldots, [C] - [C - [C/d]d]$ выполняется условие $Q_{rem} + i_{rem} < 1$.*

Если неизвестное k_1^* принимает минимально возможное значение, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Равенство $(k_1^*, k_2^*) = ([C - [C/d]d], [(C - [C - [C/d]d])/d])$ верно в том и только в том случае, если выполнены два условия*:

1) $Q_{rem} + ([C] - [C - [C/d]d])_{rem} \geqslant 1$;

2) *для всех* $i = 1, 2, \ldots, [C] - [C - [C/d]d] - 1$

либо $Q_{rem} + i_{rem} \geqslant 1$, *либо* $Q_{rem} + i_{rem} < 1$ *и* $[C] - [C - [C/d]d])_{rem} + i_{rem} \leqslant 1/2$.

Введем теперь множество чисел $\mathbf{M} = \{0, 1, 2, \ldots, r\}$, $|\mathbf{M}| = r + 1$, $r \in \mathbf{N}$, и рассмотрим функцию $f_d^{(1)}$: $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{R}$, определенную следующим образом:

$$f_d^{(1)}(k_1, k_2) = \begin{cases} k_1 + dk_2, & k_1 + dk_2 \leqslant C, \\ 0, & k_1 + dk_2 > C. \end{cases}, \qquad d \in \mathbf{R}.$$

Пусть $\max_{(k_1,k_2)\in \mathbf{M}\times\mathbf{M}} f_d^{(1)}(k_1, k_2) = f_d^{(1)}(k_1^*, k_2^*)$. Обозначим $k_2^{\max} = \min\{r, [C/d]\}$, $k_1^{\max} = \min\{r, [C]\}$, $k_1^{\min} = \min\{r, [C - k_2^{\max} d]\}$, $P_{rem} = (C - k_1^{\max})_{rem}$. Тогда для пары (k_1^*, k_2^*) справедливо утверждение, аналогичное утверждению 2.

Пусть $i^{(r)} \in \mathbf{N}_0$ — минимальное число, удовлетворяющее условию $[(C - k_1^{\max} + i^{(r)})/d] > r$. Обозначим $q = r - [(C - k_1^{\max})/d]$.

Утверждение 3. *Равенство* $(k_1^*, k_2^*) = (k_1^{\max} - j, [(C - k_1^{\max} + j)/d])$, *где* j *может принимать значения из множества* $\{0, \ldots, k_1^{\max} - k_1^{\min}\}$, *верно в том и только в том случае, если* $[(C - k_1^{\max} + j)/d] \leqslant r$ *и для любого* $i = 0, 1, \ldots, \min\{i^{(r)} - 1, k_1^{\max} - k_1^{\min}\}$, $i \neq j$, *выполнено одно из трех условий*:

$$1) \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ P_{rem} + i_{rem} \geqslant 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ PQ_{rem} + i_{rem} < 1, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} < 1, \\ P_{rem} + i_{rem} < 1, \\ i_{rem} \geqslant j_{rem}, \end{cases}$$

и при $i^{(r)} \leqslant k_1^{\max} - k_1^{\min}$ *выполнено одно из двух условий*

$$1) \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} < 1, \\ i^{(r)} \geqslant d(q + j_{rem}), \end{cases} \quad 2) \begin{cases} P_{rem} + j_{rem} \geqslant 1, \\ i^{(r)} \geqslant d(q + j_{rem} - 1). \end{cases}$$

Утверждение 4. *Пусть* $[(C - k_1^{\max} + j)/d] > r$. *Равенство* $(k_1^*, k_2^*) = (k_1^{\max} - j, r)$, *где* j *может принимать значения из множества* $\{0, \ldots, k_1^{\max} - k_1^{min}\}$, *верно в том и только в том случае, если для любого* $i = 0, 1, \ldots, \min\{i^{(r)} - 1, k_1^{\max} - k_1^{\min}\}$, $i \neq j$, *выполнено одно из двух условий*

$$1) \begin{cases} P_{rem} + i_{rem} < 1, \\ j \leqslant (i_{rem} + q)d, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} P_{rem} + i_{rem} \geqslant 1, \\ j \leqslant (i_{rem} + q - 1)d, \end{cases}$$

и при $i^{(r)} \leqslant k_1^{\max} - k_1^{\min}$ *выполнено условие* $i^{(r)} \geqslant j$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубков А. М., Соколов Д. В.* Алгоритмы частичной сортировки множеств сумм. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 1, с. 318–319.
2. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. Т. 2. М.–СПб.–Киев: Вильямс, 2003, 832 с.

И. А. Л а к м а н (Уфа, ГОУ ВПО УГАТУ). **Использование логит-моделей множественного выбора в оценке приоритетности развития объектов социальной инфраструктуры предприятий.**

Разработка принципиально новой системы управления стратегическим развитием предприятия предполагает, в том числе формирование стратегии развития его социальной инфраструктуры (СИ). Одной из задач формирования такой стратегии является определение приоритетности развития объектов конкретного социального назначения в зависимости от типа предприятия. Подобная задача может быть решена с использованием моделей множественного выбора развития объектов СИ с неупорядоченными альтернативами, где в качестве значений зависимой дискретной переменной рассматриваются социальные назначения объектов согласно предложенной классификации. В качестве оценочной функции модели множественного выбора рассматривается функция полезности, позволяющая определить вероятность наибольшей пользы для предприятия в зависимости от выбора развития того или иного объекта СИ. В качестве независимых факторов функции полезности рассматривались: число занятых, относительный показатель прибыли предприятия, гендерный фактор, форма собственности предприятия и др. Подобные модели позволяют учесть как индивидуальные атрибуты самих объектов назначения, так и индивидуальные характеристики предприятий.

Информационной базой для построения модели являлись данные, собранные в ходе прямого анкетирования 20 предприятий Республики Башкортостан в динамике за 11 лет. То есть модель оценивалась по данным ротационной панели с 11-ю периодами и 20 кросс-секциями. В ходе проведения селекции между логит и пробит моделями с помощью информационных критериев подтвердилась гипотеза о значимости логит-модели для оценки приоритетности развития объектов СИ. Оценка модели проводилась панельной модификацией метода максимального правдоподобия. Дополнительными преимуществами использования панельных данных является возможность учета динамических особенностей процесса развития СИ и определения эффекта от принимаемых мер.

Благодаря найденным моделям была произведена коррекция стратегических направлений развития объектов социального назначения с учетом оценки их приоритетности в развитии СИ предприятий.

Исследование проведено в рамках проекта «Разработка стратегических направлений развития социальной инфраструктуры промышленных предприятий Республики Башкортостан» при совместной поддержке АНРБ и РГНФ (номер проекта № 09-02-84-201 а/у).

Г. В. Мартынов (Москва, ИППИ РАН)**. Таблицы распределения взвешенной статистики Крамера–Мизеса.**

Рассматривается статистика Крамера–Мизеса $\omega_n^2 = n\int_0^1 \psi^2(t)(F_n(t)-t)^2\,dt$, где $\psi^2(t)$ — весовая функция и $F_n(t)$ — эмпирическая функция распределения. Введение весовой функции позволяет сделать неодинаковыми вклады в статистику ω_n^2 различий между реальной и гипотетической функциями распределения в различных областях значений наблюдаемой случайной величины. Наиболее известной весовой функцией является функция $\psi_2(t) = 1/t(1-t)$, предложенная Андерсоном и Дарлингом [1]. Здесь рассматривается следующая весовая функция: $\psi(t) = t^\beta$, $\beta > -1$. Предельное распределение статистики ω_n^2 с такой весовой функцией задается распределением функционала $\omega^2(B) = n\int_0^1 t^{2\beta}(t)B^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k x_k^2$ от процесса броуновского моста $B(t)$, x_k — независимые нормально распределенные случайные величины, $\lambda_k = (2\nu/z_k)$, z_k — нули функции Бесселя первого рода $J_\nu(\cdot)$, $\nu = 1/(2(1+\beta))$. Рассмотрен также функционал $\omega^2(W) = n\int_0^1 t^{2\beta}(t)W^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^\infty \mu_k x_k^2$ от винеровского процесса $W(t)$, где $\mu_k = 2\nu/z_{k-1}$. Разложения для $\omega^2(B)$ и $\omega^2(W)$ получены в работе [2]. В отличие от таблиц в [4], которые даны для предельных распределений нормированных статистик, здесь приводятся аналогичные таблицы для стандартных статистик. Приводимые ниже распределения рассчитывались по формуле Смирнова [4] (см. также [3]).

	Квантили распределения $w^2(B)$				Квантили распределения $w^2(W)$			
$\beta \setminus q$	0,9	0,95	0,99	0,995	0,9	0,95	0,99	0,995
-0,75	0,3120	0,3968	0,6064	0,7003	0,9975	1,3030	2,0597	2,3980
-0,5	0,3325	0,4343	0,6866	0,7993	1,1033	1,4944	2,4591	2,8892
-0,25	0,3419	0,4515	0,7228	0,8439	1,1601	1,5941	2,6627	3,1390
0,0	0,3473	0,4614	0,7435	0,8694	1,19582	1,6557	2,7874	3,2917
1,0	0,3566	0,4782	0,7785	0,9125	1,2625	1,7692	3,0157	3,5711
2,0	0,3601	0,4845	0,7915	0.9284	1,2893	1,8146	3,1063	3,6818
3,0	0.3619	0,4877	0,7983	0,9367	1,3039	1,8390	3,1550	3,7414
5,0	0,3638	0,4911	0,8052	0,9452	1,3192	1,8647	3,2063	3,8040

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00740а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson T. W., Darling D. A.* Asymptotic theory of certain «goodness of fit» criteria based on stochastic processes. — Ann. Math. Statist., 1952, v. 23, p. 193–212.
2. *Deheuvels P., Martynov G.* Karhunen–Loeve expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions. — Progress in Probability, 2003, v. 55, p. 57–93.
3. *Мартынов Г. В.* Критерий омега-квадрат. М.: Наука, 1979, 80 с.
4. *Smirnov N. V.* Sur la distribution de ω^2. Paris: C. R. Acad. Sci., 1936, v. 202, p. 449–452.

О. Н. Минаева, М. С. Тихов (Нижний Новгород, НФ ГУ-ВШЭ, ННГУ)**. Построение модели измерения экономики знаний с использованием метода главных компонент.**

В последнее время признается необходимость движения к инновационной экономике (экономике знаний). Измерение степени продвижения к экономике знаний (ЭЗ) становится неотъемлемой частью экономических исследований. Управление развитием ЭЗ как экономической формы устойчивого развития требует проведения регулярного мониторинга. Следовательно, разработка системы индикаторов и методологического аппарата, позволяющего проводить количественные оценки как текущего состояния развития экономики знаний на данной территории в определенное время, так и динамику ее пространственного развития, является актуальной проблемой.

В целом, задача измерения экономики знаний трудна. Это связано с не полностью изученной природой знания, трудностями оценки и измерения как самого знания, так и эффекта его применения. На сегодняшний момент универсальной методологической базы изучения ЭЗ не существует. Ведущие международные организации (ОЭСР, Всемирный Банк, Еврокомиссия, АТЭС и др.) проводят интенсивные исследования в области ЭЗ. Разработанные этими организациями индикаторы экономики знаний имеют существенные различия [1], [2], и вопрос о том, какая из моделей сконструированных индикаторов может быть использована для оценки экономического развития страны, остается открытым [3], [4].

В нашей стране построение инновационной экономики является приоритетной национальной задачей. Включение России в международные сопоставления по уровню развития экономики знаний достаточно условно и не отражает полностью всей картины из-за существенных различий в статистической методологии сбора данных и вида конкретных показателей. Для понимания того, каким образом идет становление и развитие экономики знаний в России, необходим набор независимых показателей («вход»), характеризующих производство знаний, включающих финансовые, материальные, трудовые и информационные затраты. Со стороны же «выхода» набор показателей, характеризующих применение знаний, должен быть связан с показателями выпуска инновационной продукции. В работе, представленной данным сообщением, для решения задачи построения начальной модели измерения экономики знаний мы воспользовались методом главных компонент. Информационной базой исследования послужили статистические данные, предоставляемые Росстатом на федеральном уровне в разрезе субъектов РФ по состоянию на 2007 год. На основе этих данных были сформированы следующие показатели: x_1 — численность персонала, занимающегося исследованиями и разработками; x_2 — внутренние затраты на исследования и разработки, тыс. руб.; x_3 — затраты на ИКТ, млн. руб.; x_4 — удельный вес объема отгруженной инновационной продукции (услуг) в общем объеме отгруженной промышленной продукции, %; x_5 — удельный вес экспортной инновационной продукции (услуг) организаций, осуществлявших технологические инновации в общем объеме экспорта, %; x_6 — удельный вес организаций, использующих Интернет в общем числе организаций, %.

Перечисленные показатели были рассчитаны для всех субъектов РФ ($n = 80$), за исключением тех, которые являются составной частью более крупного субъекта федерации.

Целесообразность применения метода главных компонент была подтверждена с помощью статистического критерия Уилкса. При принятии решения о *числе* главных компонент, подлежащих выделению, использовались два критерия: критерий Кайзера и критерий каменистой осыпи. Согласно критерию Кайзера [5, с. 136], следует выделять только главные компоненты с собственными значениями, большими единицы. По этому критерию необходимо взять две главные компоненты. Используя же критерий каменистой осыпи Кэттелла, оставим три главные компоненты.

Таблица 1. Суммарная дисперсия главных компонент

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	3,102	51,704	51,704	3,102	51,704	51,704	2,909	48,480	48,480
2	1,734	28,893	80,598	1,734	28,893	80,598	1,733	28,883	77,363
3	0,817	13,616	94,214	0,817	13,616	94,214	1,011	16,850	94,214
4	0,267	4,447	98,661						
5	0,077	1,291	99,953						
6	0,003	0,047	100,0						

В результате проведенного анализа были выделены три главные компоненты. Первая главная компонента U_1 образована показателями x_1, x_2, x_3, вторая U_2 — показателями x_4, x_5, а третья U_3 — показателем x_6. Главные компоненты U_1, U_2, U_3 объясняют примерно 94,214% всей вариации (см. табл. 1). Факторные нагрузки после вращения с помощью метода варимакс указаны в табл. 2.

Таблица 2. Матрица факторных нагрузок

Component	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	**0,982**	**0,987**	**0,959**	-0,016	0,034	0,222
2	0,025	-0,001	0,004	**0,931**	**0,930**	0,038
3	0,132	0,124	0,166	0,013	0,034	**0,974**

Таким образом, мы имеем структуру факторных нагрузок, близкую к простой структуре. Первую главную компоненту U_1 можно интерпретировать как производство знаний, вторую U_2 — как применение знаний, а третью U_3 — как распространение знаний.

В заключение отметим, что построение вышеперечисленных трех главных компонент, обеспечивающих изучение характеристик производства, применения и распространения знаний в экономике, является первым шагом на пути статистического мониторинга и, соответственно, количественного управления развитием экономики знаний на региональном уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. http://www.proinno-europe.eu/node/19165.
2. http://www.worldbank.org/.
3. *Макаров В. Л.* Экономика знаний: уроки для России. — Вестник РАН, 2003, т. 73, № 5, с. 450–462.
4. *Арапов М. В.* Индикаторы индустрии знаний: Европа, Соединенные штаты, Россия. — Энергия: экономика, техника, экология, 2004, № 5, с. 20–27.
5. *Иберла К.* Факторный анализ. М.: Статистика, 1980, 397 с.

О. В. Назарько (Ростов-на-Дону, РГСУ)**. О некоторых фактах теории деформированных мартингалов.**

Пусть дана фильтрация $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$. Семейство $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_{(n)})_{n=0}^{\infty}$ вероятностных мер $Q^{(n)}$ на $\mathcal{F}_n$ будем называть *деформацией* 1*-го рода* — D1 (соответственно, 2*-го рода* — D2), если для любых $n \in \mathcal{N} = \{0, 1, \ldots\}$ выполняется соотношение $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \ll Q^{(n)}$ (соответственно, $Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} \gg Q^{(n)}$). Если $\mathbf{Q}$ есть одновременно D1 и D2, то такую деформацию будем называть *слабой* — WD. Введем процесс плотностей $(h_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ (соответственно, $(h^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty})$): $dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n} = h_n\, dQ^{(n)}$ (соотвеьственно, $dQ^{(n)} = h^{(n)}\, dQ^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n}$).

Обозначим $E^n f = E^{Q^{(n)}} f$ и $E_{n-1}^n f = E^{Q^{(n)}}[f|\mathcal{F}_{n-1}]$. Пусть процесс $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ входит в $L_1(\Omega, \mathbf{Q})$, т. е. $E^n(|Z_n|) < \infty$ для любых $n \in \mathcal{N}$. Если $\mathbf{Q}$ есть D1 (соответственно, D2), то процесс $\mathbf{Z}$ будем называть *деформированным мартингалом* 1*-го рода* — DM1 (соответственно, 2*-го рода* — DM2) при выполнении для любых $n \in \mathcal{N}$ равенств $E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n\ Q^{(n+1)}|_{\mathcal{F}_n}$-п. н. (соответственно, $E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n\ Q^{(n)}$-п. н.). Аналогично определяются суб- и супермартингалы 1-го и 2-го рода — DSubM1, DSupM1, DSubM2, DSupM2.

Предложение 1. *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D2 *с ограниченными плотностями* (BD2) *и* $\mathbf{Z}$ — DM2, *то для любых* $k, n \in \mathcal{N}$ $(k < n)$ *выполняется равенство* $E_k^n Z_n := E_k^{k+1} E_{k+1}^{k+2} \cdots E_{n-1}^n Z_n = Z_k\ Q^{(k)}$*-п. н. Аналогичные соотношения выполняются для* DSubM2 *и* DSupM2.

Предложение 2. *Пусть* $(Z_n^{(\alpha)}, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — *некоторое семейство* DSupM1 (*соответственно*, DSupM2). *Предположим, что* $Z_n := \operatorname{ess\,inf}_{\alpha} Z_n^{(\alpha)} \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})$ *для любых* $n \in \mathcal{N}$. *Тогда процесс* $(Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)}$ — DSupM1 (*соответственно*, DSupM2).

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{Z}$ — DM1 *или* DM2 (*соответственно*, DSubM1 *или* DSubM2) *и* φ — *такая выпуклая вниз* (*соответственно*, *выпуклая вниз возрастающая*) *функция на* $\mathbf{R}^1$, *что* $\varphi \circ Z_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})$ *для любых* $n \in \mathcal{N}$. *Тогда процесс* $(\varphi \circ Z_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — *деформировнный субмартингал того же рода, что и* $\mathbf{Z}$.

Процесс $\mathbf{A} = (A_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ будем называть *деформированным возрастающим предсказуемым процессом* (DIPP), если для любых $n \in \mathcal{N}$: $A_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})$, $A_n \leqslant A_{n+1}\ Q^{(n+1)}$-п. н., A_n является $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримой с. в. $(\mathcal{F}_{-1} := \{\Omega, \varnothing\})$ и $A_0 = 0$.

Теорема 1 (разложение Дуба для деформированных субмартингалов)**.** *Предположим, что* $\mathbf{Q}$ *есть* D1 *с ограниченными плотностями* (BD1). *Пусть* $\mathbf{Z}$ — DSubM1. *Тогда существуют такие единственный* DM1 $\mathbf{M} = (M_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *и единственный* DIPP $\mathbf{A} = (A_n, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, *что имеет место равенство* $Z_n = M_n + A_n$ $Q^{(n)}$*-п. н., для любых* $n \in \mathcal{N}$.

Пусть $\mathbf{Q}$ — D1. Для процесса $\mathbf{Z}$ полагаем $\|\mathbf{Z}\|_{var} := E^{Q^{(0)}}(|Z_0|) + \sum_{n=0}^{\infty} E^{Q^{(n+1)}}(|Z_{n+1} - Z_n|)$.

Предложение 4. *Если в условиях теоремы* 1 *величина* $\|\mathbf{Z}\|_{var} < \infty$, *то* $\|\mathbf{M}\|_{var} < \infty$ *и* $\|\mathbf{A}\|_{var} < \infty$.

Пусть $\mathbf{Q}$ — D2. Для процесса $\mathbf{Z}$ полагаем $\|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{L}(\Omega,\mathbf{Q})} := \sup_n E_{-1}^n(|Z_n|)$.

Предложение 5. *Если* $\mathbf{Q}$ *в условиях теоремы* 1 *есть* WD *и* $\|Z\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} < \infty$, *то* $\|\mathbf{M}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} < \infty$ *и* $\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} < \infty$.

Легко видеть, что если $\mathbf{Z}$ является разностью двух неотрицательных DM2, то для него $\|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} < \infty$.

Теорема 2 (разложение Крикеберга для деформированных мартингалов)**.** *Пусть* $\mathbf{Z}$ *есть* DM2. *Этот процесс принадлежит* $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathbf{Q})$ *тогда и только тогда, когда существуют единственные неотрицательные* DM2 $\mathbf{Z}^{(1)} =$

$(Z_n^{(1)}, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ *и* $\mathbf{Z}^{(2)} = (Z_n^{(2)}, \mathcal{F}_n, Q^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, *удовлетворяющие двум условиям*:

$$Z_n = Z_n^{(1)} - Z_n^{(2)} \quad Q^{(n)}\text{-п. н. для любых } n \in \mathcal{M},$$

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} = \|\mathbf{Z}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})} + \|\mathbf{Z}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_1(\Omega,\mathbf{Q})}.$$

З а м е ч а н и е. Все представленные в данном докладе результаты являются обобщениями соответствующих классических результатов (см., например, [1]), если в качестве деформации $\mathbf{Q}$ выбрать вероятностную меру P на $\mathcal{F}_\infty = \vee_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n$, т. е. положить $Q^{(n)} = P|_{\mathcal{F}_n}$.

В докладе будут также представлены различные естественные примеры деформированных мартингалов 1-го и 2-го рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Long R.* Martingale Spaces and Inequalities. Peking: Peking University Press, 1993.

Е. И. Николаев (Ставрополь, СевКавГТУ)**. Моделирование левитации постоянного магнита в ограниченном объеме магнитной жидкости с использованием метода конечных элементов.**

Моделирование левитационных процессов постоянных магнитов и тел из магнитомягких материалов в сосудах с магнитной жидкостью (МЖ) можно проводить с использованием аналитических методов только в случае простых задач. Исследование левитации в трехмерной нелинейной постановке требует применения численных методов [1].

Для расчета пондеромоторной силы разработан программный комплекс на основе реляционной системы управления базами данных [2]. Учитывая узкую направленность исследования, вычислительные алгоритмы, используемые в программе, являются специализированными и требуют больших затрат при модификации. Это не позволило варьировать различные параметры модели и получать значение пондеромоторной силы, достаточно большие, чтобы применять данное явление на практике.

Для изучения влияния различных параметров модели на величину пондеромоторной силы использовался программный продукт COMSOL Multiphysics. Основные цели моделирования левитационных процессов с использованием данного продукта:

1. Определение параметров модели, оказывающих наибольшее влияние на величину пондеромоторной силы.

2. Определение математической модели, позволяющей учитывать максимальное возможное количество различных параметров исходной модели.

Для выполнения расчетов построена геометрическая модель: магнит цилиндрической формы помещен в цилиндрический сосуд с МЖ; на всю систему действует внешнее магнитное поле, создаваемое катушкой с током.

Основные выводы по результатам моделирования:

1. При пассивной левитации форма магнита, его положение в сосуде и намагниченность оказывают незначительное влияние на величину пондеромоторной силы.

2. При активной левитации основным параметром, позволяющим увеличить пондеромоторную силу, является величина тока в катушке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дроздова В. И.*, *Николаев Е. И.*, *Шагрова Г. В.* Моделирование левитации тел произвольной формы с использованием реляционных баз данных. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1, с. 151–152.
2. *Дроздова В.И.*, *Николаев Е.И.* Разработка алгоритмов и программного комплекса для численного решения задач магнитостатики с использованием кластерных технологий. — Материалы III Международной научно-технической конференции «Инфоком». Ставрополь: СевКавГТУ, 2008.

Н. Д. Никоненко (Ростов-на-Дону, ЮФУ)**. Хеджирование для пуассоновской модели (B,S)-рынка.**

В докладе рассматривается модель неполного безарбитражного (B,S)-рынка. Эволюция рискового актива определяется уравнением

$$S_n = S_{n-1}e^{h_n}, \tag{1}$$

где $h_n = \mu_n + \sigma_n\varepsilon_n$. Элементы ε_n — независимые и одинаково распределенные по закону Пуассона случайные величины. Рассматривается естественная фильтрация $F_n = \sigma(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$. Относительно фильтрации параметры модели μ_n, ε_n — предсказуемы. Банковский счет

$$B_n = (1+r)B_{n-1}, \tag{2}$$

где r — константа. Не нарушая общности, будем считать, что $r=0$. Модель (1)–(2) рассматривалась в работе [1]. Для модели найдены преобразования Эшера и Гирсанова, которые совпали. Процесс плотности имеет следующий вид:

$$Z_n = \exp\left\{n\lambda - \sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_k}{1-e^{\sigma_k}} + \sum_{k=1}^{N}\ln\frac{\mu_k}{\lambda(1-e^{\sigma_k})}\varepsilon_k\right\}.$$

Теорема. *Для существования преобразования Гирсанова и Эшера необходимо и достаточно, чтобы для всех n выполнялось неравенство*

$$\mu_n\sigma_n < 0. \tag{3}$$

Исследуется задача хеджирования в среднем. Условие качества воспроизведения финансового обязательства имеет вид $E_P|X_N^\pi - f_N|$. Оценка сверху:

$$E_{\widetilde{P}}\widehat{Z}_N|X_N^\pi - f_N| \leqslant \sqrt{E_{\widetilde{P}}\widehat{Z}_n^2}\sqrt{E_{\widetilde{P}}(X_N^\pi - f_N)^2}, \quad \text{где} \quad \widehat{Z}_n = \frac{1}{Z_N}, \quad Z_N \neq 0.$$

Оценка позволяет рассмотреть следующую оптимизационную задачу:

$$\min_{x,\pi\in\mathrm{SF},\widetilde{P}} \sqrt{E_{\widetilde{P}}\widehat{Z}_n^2}\sqrt{E_{\widetilde{P}}(X_N^\pi - f_N)^2} \text{ при условии, что } \widetilde{P} \text{ — мартингальная мера.} \tag{4}$$

Если зафиксировать мартингальную меру $\widetilde{P}$, то задача (4) переходит в следующую задачу:

$$\min_{x,\pi\in\mathrm{SF}} \sqrt{E_{\widetilde{P}}(X_N^\pi - f_N)^2}. \tag{5}$$

Решение задачи (6) находится из разложения Кунита–Ватанабе (см. [2]). Для нахождения мартингальной меры естественно рассмотреть задачу

$$\min_{\widetilde{P}} E_{\widetilde{P}}\widehat{Z}_n^2 \text{ при условии, что } \widehat{P} \text{ — мартингальная мера.}$$

Если μ_n, σ_n являются константами, то решение имеет вид $x_{k,N} = \sqrt{\eta e^{k\sigma}+\xi}$. Параметры ξ, η находятся из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^\sigma\lambda)^k}{k!\sqrt{\eta e^{k\sigma}+\xi}} = e^{\lambda-\mu}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!\sqrt{\eta e^{k\sigma}+\xi}} = e^\lambda.$$

Далее вычисляется процесс плотности и хедж, на дереве. Число потомков узла дерева определяется из оценки $\mathbf{P}\{\varepsilon \geqslant k\} = e^{-\lambda}\sum_{i=k+1}^{\infty}\lambda^i/i! < \delta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лужецкая П. А.* Преобразование Гирсанова для пуассоновской модели поведения финансовых индексов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 5.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998.

М. А. Н о з д р а ч е в (Москва, МТУСИ). **Об оценивании параметра Херста трафика мультисервисной сети.**

В современных мультисервисных сетях по одним и тем же каналам передается информация от нескольких источников. Обычно источники никак не связаны между собой, и суммарный трафик на звене сети представляет собой смесь нагрузки различного происхождения. Также известно, что нагрузка от конкретного источника в той или иной мере проявляет свойство самоподобия. В работе, представленной данным сообщением, ставится задача обнаружения смеси самоподобной нагрузки на звене мультисервисной сети при помощи стандартной оценки параметра Херста.

Случайная составляющая каждой компоненты сетевого трафика может численно моделироваться фрактальным броуновским движением (ФБД) W_t^H с параметром Херста H, лежащим в пределах $0,5 \leqslant H < 1$. Соответственно, суммарная случайная составляющая трафика будет задаваться линейной комбинацией ФБД с различными значениями параметра Херста. В связи с этим возникает вопрос о возможности оценки параметров наблюдаемой смеси трафика различных источников.

Далее рассматривается простейший случай, когда на звене сети присутствует нагрузка, создаваемая двумя независимыми источниками разной интенсивности. В этом случае случайная составляющая трафика представляется процессом $Y_t = k_1 W_t^{H_1} + k_2 W_t^{H_2}$. Интенсивности каждой компоненты нагрузки выбирались так, чтобы выполнялось условие $k_1^2 + k_2^2 = 1$. В этом случае суммарный процесс Y_t имеет ту же дисперсию, что и его отдельные составляющие $W_t^{H_1}$ и $W_t^{H_2}$. К нему применяется дисперсионно-временная оценка $\widehat{H}$, позволяющая определить параметр Херста. Результаты оценивания приводятся в таблице.

Таблица. Оценки параметра Херста смеси самоподобных процессов

k_1	1	0,949	0,707	0,555	0,243	0,111	0,081	0
с. з. $\widehat{H}$	0,599	0,600	0,608	0,618	0,681	0,748	0,764	0,789
с. к. о. $\widehat{H}$	0,003	0,003	0,005	0,005	0,005	0,008	0,009	0,012

По получающимся результатам нельзя понять, присутствуют ли в звене сети нагрузка от нескольких источников или только от одного. Статистические свойства оценки $\widehat{H}$, полученной для процесса Y_t, принципиально ничем не отличаются от аналогичной для чистого самоподобного процесса с соответствующим значением параметра Херста. При этом значение всегда находится в интервале между параметрами Херста процессов, составляющих смесь.

Таким образом, при помощи оценивания параметра Херста не удается отличить сетевую нагрузку, формируемую одним источником, от трафика, состоящего из нескольких компонент, и, тем более, оценить параметры смеси.

И. В. Павлов, О. В. Назарько (Ростов-на-Дону, РГСУ). **Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора для деформированных мартингалов.**

В работе, представленной данным сообщением, мы используем обозначения и аббревиатуры работы [1]. Все моменты остановки (МО), встречающиеся в тексте данного доклада, считаются конечными и определенными относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть τ — МО. Для всякого $A \in \mathcal{F}_\tau$ определим функцию $Q^{(\tau)}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} Q^{(i)}(A\,\{\tau = i\})$. Ясно, что $Q^{(\tau)}$ — неотрицательная σ-конечная мера на $\mathcal{F}_\tau$. Если МО τ ограничен, то и мера $Q^{(\tau)}$ ограничена.

Предложение. *Пусть τ и ν* — МО, *причем $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$. Если* $\mathbf{Q}$ *есть* D1 (*соответственно*, D2), *то* $Q^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_\tau} \ll Q^{(\tau)}$ (*соответственно*, $Q^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_\tau} \gg Q^{(\tau)}$).

Ясно, что если МО ν ограничен, то условия предложения 1 выполнены. Легко видеть, что если с. в. f измерима относительно $\mathcal{F}_\tau$ и $f \geqslant 0$ $Q^{(\tau)}$-п. в., то $E^{Q^{(\tau)}}[f] = \sum_{i=0}^{\infty} E^{Q^{(i)}}[f\, I_{\{\tau=i\}}]$. Эта формула легко переносится на с. в. $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, Q^{(\tau)})$. Для таких же с. в. f и для МО τ, ν $(0 \leqslant \nu - \tau \leqslant 1)$ $Q^{(\nu)}$-п. в. справедливо равенство:

$$E_\tau^\nu f := E^{Q^{(\nu)}}[f|\mathcal{F}_\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} f\, I_{\{\tau=k\}\{\nu=k\}} + \sum_{k=0}^{\infty} E^{(k+1)}(f\, I_{\{\tau=k\}\{\nu=k+1\}}|\mathcal{F}_k).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\mathbf{Q}$ есть D2 с равномерно ограниченными плотностями (UBD2) и $\tau \leqslant \nu$ — такие два МО, что $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$. Пусть $\{\tau_k\}_{k=0}^{K}$ — последовательность МО, удовлетворяющая условиям

$$\tau = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_K = \nu; \quad 0 \leqslant \tau_{k+1} - \tau_k \leqslant 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, K-1.$$

Для $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$ определим оператор $E_\tau^\nu f = E_{\tau_0}^{\tau_1} E_{\tau_1}^{\tau_2} \cdots E_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} f$.

Теорема 1. *Если* $\mathbf{Q}$ *есть* UDB1 *и* $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$, *то справедлива формула*

$$E_{\tau_0}^{\tau_1} E_{\tau_1}^{\tau_2} \cdots E_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} f = \sum_{i=0}^{K} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{n+1}(f\, I_{\{\tau=n\}\{\nu=n+i\}}).$$

Из теоремы 1 легко вытекает корректность определения 2.

Теорема 2 (обобщение теоремы Дуба на деформированные субмартингалы). *Пусть* $\mathbf{Q}$ *есть* UBD2, *процесс* $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{Q}^{(n)})$ *есть* DSubM, $0 \leqslant \nu - \tau \leqslant N < \infty$ *и* $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$. *Справедливо неравенство* $E_\tau^{(\nu)} Z_\nu \geqslant Z_\tau$ $Q^{(\tau)}$-*п. в.*

Можно показать, что если в теореме 2 МО ν ограничен, то эта теорема верна, когда $\mathbf{Q}$ есть BD2 (включение $Z_\nu \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\nu, Q^{(\nu)})$ выполняется в данном случае автоматически).

З а м е ч а н и е. Если деформация $\mathbf{Q}$ есть вероятностная мера P на $\vee_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$, т. е. $Q^{(n)} = P|_{\mathcal{F}_n}$, то данная теорема превращается в классическую теорему Дуба о преобразовании свободного выбора для мартингалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назарько О. В.* О некоторых фактах теории деформированных мартингалов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2.

Р.А.Камаева, О.А.Перегудова (Ульяновск, УлГУ). **Управление движением мобильного робота с роликонесущими колесами с учетом запаздывающей обратной связи.**

В работе, представленной данным сообщением, рассмотрена задача об управлении движением мобильного робота с четырьмя роликонесущими (омни-)колесами при помощи независимых электродвигателей постоянного тока, установленных на каждом колесе. Динамика такой системы с учетом сил вязкого и сухого трения и параметрической неопределенности описывается уравнениями с разрывной правой частью [1] $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}\,\mathrm{sign}\,(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (v, v_n, \omega)^T$ — вектор линейной и угловой скоростей робота, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^4$ — управляющие напряжения, подаваемые на вход электродвигателей, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{K}$ — неизвестные матрицы, удовлетворяющие интервальным ограничениям вида $\mathbf{A}_0 \leqslant \mathbf{A} \leqslant \mathbf{A}_1$ и т. д. Здесь $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ — известные матрицы. Предполагается также, что в структуре обратной связи присутствует неопределенное запаздывание, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t - h(t))$, $0 < h(t) \leqslant h_0 = \mathrm{const}$.

Известные методы построения нелинейного управления мобильными роботами с омни-колесами с учетом параметрической неопределенности, широко представленные в иностранной научной литературе в последние годы, такие, например, как б-экстеппинг [2], обладают тем недостатком, что являются достаточно громоздкими по структуре и не учитывают влияние запаздывания в структуре обратной связи. В докладе представлено решение задачи об отслеживании траектории $\mathbf{q}_0(t) = (\xi_0(t), \eta_0(t), \theta(t))^T$ робота при помощи непрерывного управления с насыщением вида $\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathrm{sat}(\mathbf{q}(t-h(t)) - \mathbf{q}_0(t-h(t)))$, $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{4\times 3}$, $\mathbf{q} = (\xi, \eta, \theta)^T$. Здесь ξ, η — координаты центра масс платформы в декартовой системе, θ — угол поворота платформы вокруг вертикали, $\mathrm{sat}(\mathbf{z}) = (\mathrm{sat}(z_1), \mathrm{sat}(z_2), \mathrm{sat}(z_3))^T$ — функция с насыщением вида

$$\mathrm{sat}(z_i) = \begin{cases} \mathrm{sign}\,(z_i), & \text{если } |z_i| \geqslant \gamma, \\ z_i/\gamma, & \text{если } |z_i| < \gamma, \end{cases} \qquad \gamma = \mathrm{const} > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

Решение задачи получено при помощи подхода, представленного в работе [3], основанного на построении вектор-функции Ляпунова с компонентами вида кубической векторной нормы и оценки ее производной с использованием матричных норм. Построенное управление является непрерывной аппроксимацией релейного и позволяет уменьшить чаттер [4], возникающий, в частности, при наличии запаздывания.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/6194) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 г.г.» (НК-408П, П/2230).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oliveira H. P.*, *Sousa A. J.*, *Moreira A. P.*, *Costa P. J.* Precise Modeling of a Four Wheeled Omni-directional Robot. — In: Proceedings of Robotica'2008, 2008, p. 57–62.
2. *Huang H. C.*, *Tsai C. C.* Adaptive Trajectory Tracking and Stabilization for Omnidirectional Mobile Robot with Dynamic Effect and Uncertainties. — In: Proceedings of the 17th World Congress «The International Federation of Automatic Control», Seoul, Korea, July 6-11, 2008, p. 5383–5388.
3. *Перегудова О. А.* К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении. — Автоматика и телемеханика, 2009, № 5, с. 95–105.
4. *Халил Х. К.* Нелинейные системы. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009, 832 с.

С. Н. Помазанов (Ставрополь, СевКавГТУ)**. Модель проверки олимпиадных задач по программированию с использованием автоматической системы.**

В олимпиадах по программированию каждому участнику выдаются задачи, которые должны считывать из входного файла данные, производить вычисления и результат записывать в выходной файл.

Существует два основных типа олимпиад по информатике:

1. Международная олимпиада по информатике (IOI).

Участники олимпиады отправляют свои решения на сервер. На сервере идет проверка решения на тестах, указанных в условии. В случае успешного прохождения тестов из условия, решение помечается как принятое, о чем сообщается участнику. По окончанию соревнования последнее принятое решение по каждой задаче проверяется на основных (секретных) тестах. В зависимости от того, какое количество тестов было пройдено успешно, начисляются соответствующие баллы.

2. Международная студенческая олимпиада по программированию (ACM/ICPC).

Участники олимпиады отправляют свои решения на сервер. На сервере идет проверка решения на тестах, указанных в условии, затем на основных тестах. Если хотя бы один из тестов не был успешно пройден, отправка считается непринятой, о чем сообщается участнику. Участник, решивший большее количество задач, занимает в рейтинге более высокое положение.

В олимпиадах ICPC решения чаще всего проверяются последовательным прохождением тестов. При данном способе проверки многие проверяющие машины будут простаивать. В разрабатываемой системе проверка на тестах происходит параллельно на всех свободных проверяющих машинах, и, при неуспешном прохождении одного из тестов, проверка других тестов прерывается. Данный подход существенно сокращает время проверки каждого решения.

Отличительная особенность олимпиад IOI состоит в том, что тесты из условия должны быть проверены сразу после отправки, а оставшиеся тесты после окончания соревнования. Данный подход приводит к расходованию дополнительных временных ресурсов. Для оптимизации работы в разрабатываемой системе будет использован следующий подход.

Обязательные тесты будут проверяться по принципу ICPC. После успешного прохождения тестов из условия система проверяет решение на основных тестах. Учитывая, что участники должны получать результаты проверки тестов из условия как можно быстрее, в разрабатываемой системе используеться следующая система приоритезации задач проверяющих машин:

1. Компиляция программы.
2. Проверка решения на тестах из условия.
3. Проверка решения на секретных тестах.

При таком подходе, участники будут своевременно информированы о прохождении обязательных тестов, и проверка на оставшихся тестах будет занимать значительно меньше времени.

А. П. Р о с е н к о (Ставрополь, СГУ)**. О критерии нормирования уровня безопасности конфиденциальной информации.**

Актуальность проблемы заключается в необходимости разработки возможных подходов к нормированию уровня безопасности конфиденциальной информации (КИ) [1, 2]. В связи с этим нормирование уровня безопасности КИ в случае воздействия на автоматизированную информационную систему (АИС) внутренних и внешних угроз можно представить следующим образом [2].

Пусть $P_{\text{угр}_i}$ — вероятность реализации i-й угрозы, а ΔW_iЦ величина ущерба, нанесенного собственнику КИ в результате реализации злоумышленником i-й угрозы. Можно показать, что

$$Q_{\text{оп}_i} = P_{\text{угр}_i} \Delta W_i, \tag{1}$$

где $Q_{\text{оп}_i}$ — критерий, характеризующий степень опасности последствий от реализации злоумышленником i-й угрозы.

В [2] показано, что критерий вида (1) применяется в качестве критерия нормирования уровня безопасности конфиденциальной информации. Это связано с тем, что все воздействующие на АИС внутренние угрозы имеют различную степень опасности — $Q_{\text{оп}}$. Чем более ценная информация, циркулирует в компьютерной системе, тем более надежные методы и средства выбирает собственник КИ для ее защиты (через параметр ΔW_i). Как правило, это достигается принятой и реализованной политикой безопасности. С другой стороны, злоумышленник применяет методы и средства несанкционированного доступа к КИ в зависимости от ее ценности (через параметр $P_{\text{угр}_i}$).

В [2] показан возможный вариант установления градаций параметров $P_{\text{угр}_i}$ и ΔW_i. При этом градация вероятности реализации угроз может быть различной — от невероятной, что соответствует $P_{\text{угр}} \approx 0$, до практически достоверной, что соответствует $P_{\text{угр}} > 0,5$.

В свою очередь градация значения ущерба ΔW, в результате реализации злоумышленником внутренней или внешней угрозы, может принимать значения от незначительного ущерба собственнику КИ, соответствующего значению величины ущерба $\Delta W \approx 0\%$, до катастрофического ущерба, когда величина ущерба достигает значения $\Delta W > 50\%$.

Рассмотренный подход показывает, что при наличии априорных исходных данных можно уже в настоящее время осуществлять процедуру нормирования уровня безопасности КИ в зависимости от воздействия на АИС различных по природе возникновения внутренних и внешних угроз. Ранжируя степень опасности угроз по возрастанию (убыванию) значения $Q_{\text{оп}}$ представляется возможным определить наиболее опасные угрозы и разработать мероприятия по их парированию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков В. А.* О проблемах нормативного обеспечения в области защиты информации. — Первый региональный научно-практический семинар «Информационная безопасность» — Юг России. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999, с. 67–68.
2. *Росенко А. П.* Теоретические основы анализа и оценки влияния внутренних угроз на безопасность конфиденциальной информации. — Монография. М.: Гелиос АРВ, 2008, 154 с.

В. Ю. Руденко, С. В. Сейфуллина (Чебоксары, ЧКИ РУК).
О самоорганизации торговых сетей.

Рассмотрим сетевые торговые структуры, состоящие из объектов, использующих сходные торговые форматы. Задача описания судьбы каждого торгового объекта представляется безнадежной. Вместо этого можно рассмотреть один из основных показателей, по которому оценивается деятельность предприятий и организаций торговли — товарооборот, от объема которого зависят основные показатели их финансово-хозяйственной деятельности, такие, как валовой доход, прибыль, рентабельность, финансовое положение предприятия и т. п.

Пусть объем товарооборота i-й торговой сетевой структуры равен n_i. Изменение со временем t объема товарооборота n_i можно представить уравнением вида

$$\dot{n}_i = \text{«Прирост»} - \text{«Потери»}. \tag{1}$$

«Прирост» пропорционален объему товарооборота, а также числу покупателей торговой сети N — величине, которая постоянно, но с определенной скоростью обновляется. Таким образом,

$$\text{«Прирост»} = G_i N n_i, \tag{2}$$

здесь G_i — коэффициент, зависящий от потребительских качеств товара, цены, финансовых возможностей покупателя и т. п.

Для члена в формуле (1), описывающего потери, принимаем допущение, что он обусловлен снижением объема товарооборота под воздействием определенных внешних факторов. Следовательно,

$$\text{«Потери»} = \beta_i n_i, \tag{3}$$

где β_i — коэффициент пропорциональности.

Заметим, что уравнение (1) является нелинейным. Это объясняется тем, что число N покупателей торговой сети в общем случае меньше общего количества ее посетителей. Так, например, если N_0 — среднее число посетителей торговой сети, то истинное число посетителей торговой сети, сделавших покупку, равно

$$N = N_0 - \Delta n_i, \tag{4}$$

где уменьшение ΔN пропорционально объему товарооборота:

$$\Delta n_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i. \tag{5}$$

Здесь $\alpha_i n_i$ — часть потенциальных покупателей, ушедшая из магазина i-й торговой сети без приобретения товара, k — количество торговых сетей.

С учетом (2)–(5) уравнение (1) принимает вид

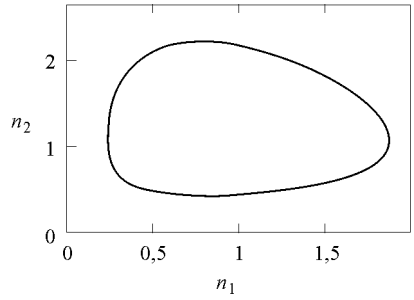
$$\dot{n}_i = (G_i N_0 - \beta_i) n_i - G_i n_i \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i.$$

В частном случае, при $i = 2$, получаем уравнения типа Лотки–Вольтерра:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= (G_1 N_0 - \beta_1) n_1 - G_1 n_1 (\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2), \\ \dot{n}_2 &= (G_2 N_0 - \beta_2) n_2 - G_2 n_2 (\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2). \end{aligned} \tag{6}$$

На рис. 1 приведена фазовая траектория на n_1, n_2-плоскости численного решения системы (6), полученная в пакете Mathcad при следующих значениях параметров:

$N_0 = 50$, $G_1 = 0,4$, $G_2 = 0,2$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 2,6$, $\beta_2 = 3,2$, из которого следует, что изменение n_1, n_2 происходит периодично.



При $i = 3$ система нелинейных дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{n}_1 &= (G_1 N_0 - \beta_1) n_1 - G_1 n_1 (\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3), \\
\dot{n}_2 &= (G_2 N_0 - \beta_2) n_2 - G_2 n_2 (\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3), \\
\dot{n}_3 &= (G_3 N_0 - \beta_3) n_3 - G_3 n_3 (\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \alpha_3 n_3).
\end{aligned} \tag{7}$$

На рис. 2, 3 приведены результаты численного решения системы (7), полученные в среде Mathcad при следующих значениях параметров: $N_0 = 50$, $G_1 = 1,4$, $G_2 = 1,8$, $G_3 = 0,7$, $\alpha_1 = 1,15$, $\alpha_2 = 0,6$, $\alpha_3 = 1,7$, $\beta_1 = 1,15$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 0,5$; $N_0 = 50$, $G_1 = 1,4$, $G_2 = 0,8$, $G_3 = 1$, $\alpha_1 = 1,5$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0,7$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$ соответственно.

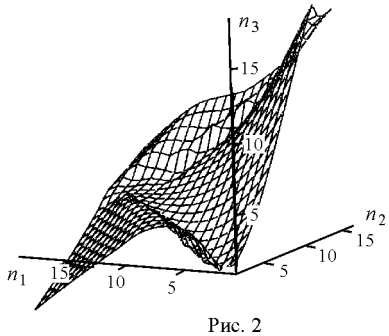


Рис. 2

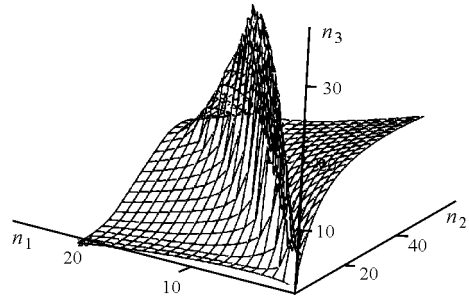


Рис. 3

Рассмотренная математическая модель о самоорганизации торговых структур позволяет смоделировать реальную ситуацию, когда «выживают» не все торговые сети.

С. Г. Геворкян, **М. В. Рыжов** (Обнинск, ИАТЭ НИЯУ МИФИ).
Создание баз данных медико-генетической информации онкологических больных и построение генеалогического древа пациента на основе полученных данных.

Ежегодно в мире регистрируется 8 миллионов новых случаев злокачественных новообразований и более 5,2 миллиона смертей от них. Всего насчитывается более 100 разновидностей рака, около 50 из них могут передаваться от родителей к ребенку через генетический аппарат. Выявление заболевания на ранней стадии позволяет значительно улучшить выживаемость, качество жизни, финансовые затраты на лечение. Учитывая то, что большинство опухолей закладывается в 25–40 лет, а ряде случаев и в детстве, но проявляются только спустя 5–10 лет, профилактику следует начинать как можно раньше. Одним из способов выявления заболевания на ранней стадии, еще до проявления клинических признаков и ведения профилактики является медико-генетическое консультирование. Это сложный процесс, включающий в себя медицинское обследование пациента, исследование его генеалогического древа, выявление возможных причин развития рака [1–3].

Одной из причин эффективности медико-генетического консультирования в России является авария на ЧАЭС, произошедшая более 20 лет назад. Первичные пострадавшие ликвидаторы и жители близлежащих районов получили высокие дозы облучения, и вследствие этого у многих из них развились онкологические заболевания. Однако помимо них люди, проживающие на более удаленных от эпицентра аварии территориях, также были облучены малыми дозами. У многих из них это облучение никак не сказалось, однако повлияв на генетический аппарат, оно увеличило риск развития онкологических заболеваний у детей облученных. Сейчас, когда с момента аварии прошло более 20 лет, подрастает целое поколение, подверженное этому риску. Именно поэтому многие медицинские учреждения начинают активно использовать медико-генетическое консультирование.

Однако при этом возникает проблема хранения и обработки данных, получаемых в ходе консультирования. Для решения этой проблемы и облегчения труда врачей-генетиков была разработана автоматизированная система для обработки и анализа данных получаемых в ходе медико-генетического консультирования. Чтобы пользователь системы мог наиболее быстро понять степень воздействия на пациента аварии ЧАЭС, реализована подсистемы содержащая данные о средних годовых эффективных дозах облучения жителей населенных пунктов РФ, подвергшихся радиоактивному загрязнению.

Графический интерфейс системы реализован с помощью технологий HTML, PHP и JavaScript. Система использует базы данных под управлением СУБД MySQL. Такой набор программного обеспечения выбран для наиболее простой организации совместной работы пользователей с общими данными. Интерфейс приложения достаточно прост, имеет все необходимые инструменты для поиска и обработки информации. Есть возможность работы с графикой: вывод диаграмм загрязнения различных районов, генеалогического древа пациента. Так медицинская информация является конфиденциальной, то в системе предусмотрена разноуровневая защита от несанкционированного доступа: на уровне БД, ПО и ОС.

Разработанная система значительно упростила работу врачей-генетиков, т. к. многие процессы в ней полностью автоматизированы, например, расчет различных доз облучения из дозиметрических характеристик местности. Также система позволила провести анализ данных, собранных в ходе ее использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Геворкян С. Г.* Системный анализ и разработка программных средств управления качественными перестройками сложных систем методами математической теории катастроф. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1, с. 134–137.
2. *Гофман Дж.* Рак, вызываемый облучением о малых дозах: независимый анализ проблемы. Кн. 1. Пер. с англ. М., Соц.-экол. союз, 1994.
3. *Василенко И. Я.* Радиобиологические проблемы малых доз радиации. Военно-мед. ж., 1993, № 4, с. 28–30.

В. Е. Самонов (Ставрополь, СевКавГТУ)**. О некоторых особенностях задач нечеткого управления.**

Задачи нечеткого управления получили большое развитие в технических устройствах и нашли широкое применение в самых различных областях [1]. В основе таких устройств лежат, так называемые, системы нечеткого вывода, использующие базу правил ЕСЛИ-ТО, построенную на основе экспертных оценок. При этом сам объект управления рассматривается в виде «черного ящика».

Несмотря на широкое распространение, такой подход обладает рядом недостатков [2]. Во-первых, используемая оператором стратегия, хоть и обеспечивает успешное управление, может быть далека от оптимальности. И, во-вторых, небольшое изменение системы требует переработки всей базы правил, объем которой может достигать нескольких сотен и тысяч.

По этой причине в [2] предложен, так называемый, предписывающий подход к нечеткому управлению, являющийся нечетким обобщением дискретной задачи оптимального управления. В качестве нечетких параметров здесь могут рассматриваться переменные состояния системы или управления. Этот подход успешно применен к задаче оптимизации для дискретных многошаговых систем, которая рассматривается как обобщение задачи принятия решений в нечеткой среде [3].

Обобщение данного подхода на непрерывные системы приводит к математической модели

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(\vec{x}, \vec{u}, t)dt, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1, \quad \{\vec{u}(t)\} \in U. \quad (1)$$

Здесь $\vec{x}$ — вектор переменных состояния, $\vec{u}$ — вектор управлений, $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t)$ — уравнения эволюции системы.

В отличие от известных работ, все параметры в (1), включая уравнения эволюции, предложено считать нечеткими. Это особенно актуально при моделировании трудноформализуемых объектов, таких как социально-экономические и политические системы (см., например, [4] и [5]).

Реализация предложенного подхода рассмотрена на конкретных примерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леоненков А. В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
2. *Kacprzyk J.* Multistage Fuzzy Control: A Model-Based Approach to Fuzzy Control and Decision Making. John Wiley & Sons, 1997.
3. *Малышев Н. Г., Берштейн Л. С., Боженюк А. В.* Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. М.: Энергоатомиздат, 1991.
4. *Самонов В. Е.* Математическая модель безопасной экономико-социально-политической трансформации. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, с. 515.
5. *Самонов В. Е.* О математическом моделировании антикризисной политики. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, с. 924.

П. С. Серебренников (Мытищи, МГУЛ). **ИК-чувствительность квантовых точек.**

Чувствительность квантовых точек (КТ) к инфракрасному (ИК) излучению определяется, прежде всего, энергетическим спектром КТ. Нанокластер германия в кремнии — квантовая точка — представляет собой трехмерную потенциальную яму для дырок. Глубина этой ямы определяется величиной разрыва верха валентной зоны при переходе от Ge к Si. Трехмерное ограничение движения носителей приводит к тому, что, в отличие от сверхрешеток, здесь нет поляризационных ограничений при приеме излучения. Именно по этой причине КТ считаются наиболее перспективными приемниками ИК излучения среди приемников на основе структур с пониженной размерностью. Энергетический спектр КТ зависит от ее формы и размера. Расчетной моделью КТ является кластер в виде диска (или «таблетки»). Решение уравнения Шредингера в цилиндрических координатах приводит к следующему энергетическому спектру КТ:

M	q	E мэВ	λ мкм
0	1	238,1 (240,3)	4
	2	292,0 (304,4)	4,8
	3	384,37 (419,8)	7,5
1	1	257,7 (263,4)	4,25
	2	332,0 (353,0)	5,7
2	1	283,26 (293,8)	4,66
	2	376,5 (409,3)	7,2

В расчете принято: высота нанокластера $h = 1,5$ нм; радиус 7 нм; разрыв верха валентной зоны при переходе от Ge к Si $\Delta E_v = 0,55$ эВ; $m_1 = 0,3m_0$, $m_2 = 0,5m_0$ — эффективные массы дырок в Ge и Si соответственно, M и q — квантовые числа радиального движения, в последнем столбце дана граничная длина волны фотоионизации соответствующего состояния. В скобках приведена энергия состояния с теми же M и q, вычисленными в пренебрежении затухающими частями волновых функций.

Для определения чувствительности КТ рассмотрены матричные элементы энергии взаимодействия дырки с электромагнитным полем, взятые между начальным состоянием (уровень в КТ с $M = 0$ и $q = 1$) и свободной дыркой с импульсом p. Расчет проведен для двух поляризаций электромагнитного излучения $E \| z$ (E — параллельно оси кластера) и $E \perp z$ (E перпендикулярно оси кластера). Обозначим соответствующие матричные элементы M_z и M_p. Сравнение вероятностей фотоионизации для двух поляризаций для ряда длин волн дает таблица

λ (мкм)	0,5	1,0	2,0	3,0	3,5	3,8
$\lvert M_z\rvert^2/\lvert M_p\rvert^2$	0,15	0,276	0,1	0,047	0,02	$7 \cdot 10^{-3}$

Таким образом, показано, что нормально падающее излучение имеет в случае КТ большую вероятность фотоионизации. Сечение фотоионизации основного состояния КТ ($M = 0$, $q = 1$) излучением, падающим вдоль оси z (нормальное падение) с $\lambda = 3,8$ мкм, равно $9,2 \cdot 10^{-15}$ см^2.

А. В. Трегуб (Москва, МГУЛ). **Построение эконометрической модели работы лесопромышленного комплекса России.**

Лесной сектор России является значимым элементом национальной экономики. В него входят: лесное хозяйство, лесозаготовительная промышленность, лесопильные деревообрабатывающие производства, производство листовых материалов (фанера, ДВП, ДСП и др.), целлюлозно-бумажная промышленность, лесохимическая и другие виды производств. Наличие существенного количества лесосырьевых ресурсов позволяет России использовать их не только для обеспечения своих внутренних потребностей, но и значительно расширять экспорт в условиях прогнозируемого спроса на древесину на мировом рынке.

Для прогнозирования экономических показателей работы лесопромышленного комплекса (ЛПК) России, например, объема производства, объема экспорта, уровня цен на продукцию и т. д. в работе [1] использовалась модель парной регрессии.

В работе, представленной данным сообщением, с помощью модели множественной регрессии изучаются факторы, влияющие на работу ЛПК России, проводится построение наиболее адекватных математических моделей и прогнозируются основные экономические показатели работы ЛПК на ближайшее время. В качестве исходных данных используются данные Федеральной службы государственной статистики по объему выпущенной продукции, численности населения, занятого в отрасли, экспорту основных видов продукции, объему инвестиций в отрасль и ВВП России за последнее десятилетие.

При построении многомерных регрессионных моделей за результативный признак выбирается объем выпуска основных видов продукции, например, деловой древесины, пиломатериалов, целлюлозы товарной и т. д. Остальные перечисленные выше данные используются как значения факторных признаков или регрессоров. Параметры уравнения регрессии оцениваются с помощью метода наименьших квадратов (МНК), реализованного в режиме «Регрессия» в пакете MS Office Excel.

Для анализа общего качества уравнения линейной многофакторной регрессии в работе используются множественный коэффициент детерминации и нормированный. Для проверки адекватности построенного уравнения эмпирическим данным применяется F — критерий Фишера, позволяющий определить значимость коэффициента детерминации и сделать выводы об объясняющей способности регрессоров. Для этой же цели используется также показатель средней ошибки аппроксимации. Наряду с проверкой коэффициента детерминации в работе осуществляется проверка значимости каждого коэффициента регрессии. Значимость коэффициентов регрессии проверяется с помощью t — критерия Стьюдента. Указанная процедура предназначена для того, чтобы исключить из уравнения регрессии те объясняющие переменные, значения коэффициентов при которых не намного больше их стандартной ошибки. На основе процедуры проверки, описанной выше, делается вывод о хорошем качестве спецификации модели и значимости коэффициентов. Следует отметить, что использование обычного МНК при оценивании регрессионной модели позволяет получить состоятельные несмещенные эффективные оценки только при выполнении условий теоремы Гаусса–Маркова. Поэтому после получения оценок коэффициентов модели в работе осуществлена проверка выполнения этих условий, а также согласие распределения случайных остатков модели нормальному закону распределения вероятности. Для проверки предпосылки теоремы Гаусса–Маркова о гомоскедастичности случайных остатков в работе применяется тест Голдфельда–Квандта. Заметим, что при наличии гетероскедастичности случайных остатков коэффициенты модели могут быть оценены при помощи, например, взвешенного метода наименьших квадратов [2]. Для проверки отсутствия автокорреляции соседних случайных остатков модели в работе применяется тест Дарбина–Уотсона, который корректен в случае, когда случайные остатки распределены по нормальному закону и гомоскедастичны. В результате верификации модели можно сделать вывод о хороших прогностических

свойствах модели и возможности ее применения для прогнозирования экономических показателей работы лесопромышленного комплекса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трегуб А. В.* Экономико-математическое моделирование деятельности лесопромышленного комплекса России. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 721–722.
2. *Трегуб И. В.* Прогнозирование экономических показателей на рынке дополнительных услуг сотовой связи. Финакадемия при Правительстве Российской Федерации. М.: 2009, 196 с.

А. И. Кононова, **В. М. Трояновский** (Москва, МИЭТ). **Алгоритмический метод анализа поведения нелинейной динамической системы вблизи вырожденных особых точек.**

Анализ нелинейных систем является сложной задачей, требующей привлечения не только классических, но и численных методов [1]. Поведение нелинейной динамической системы вблизи невырожденных особых точек хорошо изучено и классифицировано [2]. Вместе с этим, классический анализ не дает однозначного ответа в тех случаях, когда особая точка оказывается вырожденной.

В частности, для задачи Колмогорова исходная система уравнений имеет вид

$$\dot{x} = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + \alpha_1x + \beta_1y, \quad \dot{y} = a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \alpha_1x + \beta_2y.$$

На основе анализа матричного оператора преобразований для такого линейного векторного поля, в докладе показано, что подмножество параметров, удовлетворяющих уравнению $\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\beta_2 = 0$, порождает вырожденную особую точку в начале координат.

Для анализа поведения системы в подобном случае разработан алгоритм, основанный на идее поиска разграничительных линий в пространстве состояний [3]. Основными шагами разработанного алгоритма являются следующие: ищем особые точки заданного поля; исходя из матрицы главной линейной части в данной особой точке, определяем, вырожденная она или нет; для невырожденной особой точки по известной классификации [2] определяем ее тип и характеристические направления; для вырожденной действуем по следующему алгоритму: задаем малый радиус контура, по которому будем обходить точку; обходим точку в положительном направлении с некоторым шагом и ищем интервалы направлений радиус-вектора, где меняется знак радиальной или нерадиальной компонент скорости (в дальнейшем возможно итерационное уточнение направления, где меняется знак); по найденному направлению строим полную (прямую и обратную) траектории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонов Г. А.* Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах. — В сб.: Пленарные доклады международной мультиконференции «Теория и системы управления», Москва, 26–30 января 2009. М.: ИПУ РАН, 2009, с. 47–87.
2. *Арнольд В. И.*, *Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ВИНИТИ, 1985, т. 1, 149 с.
3. *Кононова А. И.*, *Трояновский В. М.* Выделение зон и особых точек в пространстве состояний нелинейной динамической системы. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 669.

О. А. Перегудова, Е. В. Филаткина (Ульяновск, УлГУ).
Синтез релейного управления механическими системами с неизвестными параметрами.

Рассматривается задача об управлении движением механической системы общего вида

$$\mathbf{H}(t,\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}, \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ — вектор обобщенных координат, $\mathbf{H}(t,\mathbf{q})$, $\mathbf{F}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ — матрица и вектор размерностей $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $\mathbf{u}$ — вектор управляющих воздействий.

Предполагается, что матрица инерции $\mathbf{H}(t,\mathbf{q})$ положительно определенная и имеет следующее представление: $\mathbf{H}(t,\mathbf{q}) = \widehat{\mathbf{H}}(t,\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{H}(t,\mathbf{q})$, где $\widehat{\mathbf{H}}(t,\mathbf{q})$ — положительно определенная и известная матрица, а матрица $\Delta\mathbf{H}(t,\mathbf{q})$ не известна. Вектор $\mathbf{F}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ имеет представление $\mathbf{F}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \widehat{\mathbf{F}}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{F}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, где вектор $\widehat{\mathbf{F}}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ не содержит элементов матрицы $\Delta\mathbf{H}(t,\mathbf{q})$ и ее производных.

Уравнения (1) описывают, например, движение различных многозвенных роботов-манипуляторов, мобильных роботов с роликонесущими колесами. Актуальным является разработка таких законов управления, которые применимы для широкого класса механических систем (1) и имеют достаточно простую структуру. К таким законам управления относятся релейные. Они позволяют выводить систему на заданное многообразие движений за конечное время и обеспечивают дальнейшее движение системы вдоль заданного многообразия в скользящем режиме [1]. При этом недостатком релейных управлений является возникновение чаттера (биений) при движении системы в скользящем режиме, обусловленное несовершенством устройств управления и наличием запаздывания, что приводит к возникновению высокочастотных колебаний в системе, ухудшающих точность управления [2].

В работе, представленные данным сообщением, выведены новые алгоритмы релейного управления системой (1), позволяющие уменьшить амплитуду чаттера и, тем самым, улучшить качество управления. Использован подход, представленный в [2] и основанный на разделении управления на непрерывную и разрывную составляющие с уменьшением амплитуды последней за счет учета влияния известной части матрицы инерции и известных действующих сил. В частности, решена задача о стабилизации программного движения $\mathbf{q}_0(t)$ системы (1) при помощи управления $\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{F}}(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) + \widehat{\mathbf{H}}(t,\mathbf{x})\ddot{\mathbf{q}}_0(t) - \widehat{\mathbf{H}}(t,\mathbf{x})\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{H}}(t,\mathbf{x})\mathbf{K}\,\mathrm{sign}\,[\mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{x}}]$, где $\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0(t)$ есть отклонение от программного движения, $\mathbf{C}, \mathbf{K}$ — постоянные матрицы, подлежащие определению.

Основной отличительной особенностью полученных алгоритмов управления являются явные оценки норм неизвестных параметров системы и области начальных отклонений.

На этой основе разработаны алгоритмы управления движением колесных мобильных роботов с роликонесущими колесами для решения задач об отслеживании траекторий в условиях неизвестной матрицы инерции с учетом скольжения и запаздывающей обратной связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/6194) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.» (НК-408П, П/2230).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пятницкий Е. С.* Синтез иерархических систем управления механическими объектами на принципе декомпозиции. I, II. — Автоматика и телемеханика, 1989, № 1, с. 87–99; № 2, с. 57–71.
2. *Халил Х. К.* Нелинейные системы. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», ИКИ, 2009, 832 с.

С. Г. Халиуллин (Казань, КГУ)**. Один критерий стационарности для условно-гауссовских моделей.**

Рассмотрим фильтрованное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}, \mathbf{P})$, на котором задана последовательность случайных величин $h = (h_n)_{n=1}^N$.

Всюду далее будем предполагать, что условные распределения вероятностей $\mathbf{P}(h_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1})$ являются гауссовскими: $\mathbf{P}(h_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, где $\mu_n = \mu_n(\omega)$ и $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$ являются $\mathcal{F}_{n-1}$-измеримыми. Будем также предполагать, что для всех n и $\omega \in \Omega$ величины $\sigma_n(\omega) \neq 0$.

При этом можно считать, что рассматриваемые условно-гауссовские (относительно потока $\mathcal{F}_n$ и вероятности $\mathbf{P}$) последовательности $h = (h_n)_{n=1}^N$ имеют нулевое среднее и представимы в виде $h_n = \sigma_n \varepsilon_n$, где $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ — последовательность независимых $\mathcal{F}_n$-измеримых случайных величин, имеющих стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$.

Понятно, что более детальные вероятностные свойства последовательности $h = (h_n)_{n=1}^N$ зависят от конкретизации структуры величин $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(\omega)$. Но нас будет интересовать только тот факт, что последовательность $h = (h_n)_{n=1}^N$ имеет однородные, либо неоднородные дисперсии (волатильности) σ_n^2.

Определим, следуя [1], последовательность моментов

$$\tau^*(\theta) = \min\left\{m \geqslant 1 : \sum_{k=1}^{m} \sigma_k^2 \geqslant \theta\right\}, \tag{1}$$

где θ принимает значения $1, 2, \ldots$ и будет рассматриваться как операционное («новое») время.

Пусть также для $\theta = 1, 2, \ldots$: $h_\theta^* = \sum_{\tau^*(\theta-1)<k\leqslant\tau^*(\theta)} h_k$, при этом $\tau^*(0) = 0$. Хорошо известно (см. [1]), что тогда последовательность (h_θ^*) имеет (почти) однородные дисперсии. Используя моменты остановки $\tau^*(\theta)$, построим критерий для проверки «гипотезы однородности дисперсий» для последовательности $h = (h_n)_{n=1}^N$. В предположении однородности дисперсий $\sigma_n^2 \equiv \sigma^2$ рассмотрим величину

$$\chi^2 = \sum_{\theta=1}^{r} \frac{\sigma^2}{\theta}\left(\tau^*(\theta) - \frac{\theta}{\sigma^2}\right)^2.$$

Здесь $r = r(N)$ — последний момент остановки.

Теорема. *В предположении однородности последовательности (σ_n^2) величина χ^2 имеет распределение хи-квадрат с $(r-1)$ степенями свободы.*

В конкретной статистической практике в выражении (1) в качестве оценки волатильностей σ_k^2 возьмем несмещенную оценку $\widehat{\sigma}_k^2 = h_k^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998.

С. Л. Ц а р е в с к и й, **М. В. А в д е е в**, **И. Ш. Н е м л и й**, **Ю. Н. П р о ш и н** (Казань, КГУ). **Диаграммы фазовых состояний в трехслойной нанопленке ферромагнетик/сверхпроводник/ферромагнетик (F/S/F) в продольном магнитном поле.**

Известно, что диаграммы фазовых состояний структур, состоящих из перемежающихся ферромагнитных и сверхпроводящих пленок толщинами порядка нескольких нанометров, необычайно разнообразны. Это объясняется эффектом близости, когда достаточно тонкая металлическая ферромагнитная пленка начинает приобретать сверхпроводящие свойства при тесном контакте со сверхпроводником [1]. В настоящем сообщении приводятся результаты расчетов диаграмм фазовых состояний для трехслойных тонкопленочных F/S/F структур в продольном магнитном поле в координатах: толщины F- и S- пленок, температура сверхпроводящего перехода, величина магнитного поля. Интерес к трехслойным F/S/F структурам вызван тем обстоятельством, что в них возможны состояния с параллельными и антипараллельними (AP) состояниями намагниченностей ферромагнитных слоев. Качественно понятно, что состояние с AP направлениями энергетически более выгодно по сравнению с состояниями с P направлениями, т. е. температура сверхпроводящего перехода AP состояния (T^{AP}) больше температуры сверхпроводящего перехода P состояния (T^{P}). В данной работе проведены расчеты $\Delta t = T^{AP} - T^{P}$ в зависимости от конкретных значений обменного поля ферромагнитных пленок, прозрачностей F/S и S/F контактов, толщин F слоев, времен свободного пробега электронов проводимости с переворотом и без переворота спина и других параметров, характеризующих пленки. Показано, в частности, что разница Δt существенно увеличивается с увеличением прозрачностей контактов, причем магнитное поле в ряде случаев увеличивает эту разницу. Рассчитан случай, когда направления намагниченностей фиксируется коэрцитивными силами, создаваемыми дополнительными диэлектрическими пленками, напыленными на внешние слои F/S/F контакта. Показано, что если коэрцитивные силы правого и левого берегов контакта различны, то достаточно слабое внешнее магнитное поле может опрокинуть направление намагниченностей и перевести состояние контакта из сверхпроводящего в не сверхпроводящее и наоборот. Это свойство контакт а может быть использовано в логических схемах спинтроники. В работе проведен также расчет токовых состояний контакта в электрическом поле с учетом эффектов близости.

Работа частично выполнена при поддержке программы okv Развитие научного потенциала высшей школы» (грант № 2.1.1/3199) и РФФИ (грант № 09-02-01521).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Царевский С. Л., Авдеев М. В.* Эффект близости в наноструктуре «ферромагнитный металл/сверхпроводник. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 4, с. 759.

А.В.Маликов, **А.С.Целиковский** (Ставрополь, СевКав ГТУ).
Математическая модель автоматической сортировки дисциплин в порядке изучения на основе анализа полнотекстовых материалов и программ изучения.

Имеются полнотекстовые учебные материалы и программы дисциплин. Программы дисциплин содержат дидактические единицы, изучаемые в соответствующих полнотекстовых материалах. Необходимо определить порядок изучения материалов.

Пусть имеется набор программ дисциплин $\{P_k\}$, $k = 1, \ldots, N$. В результате индексирования они примут вид $I(P_i) = \{t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{in_i}\}$, где t_{ij} — дидактические единицы, изучаемые по программе P_i. Обозначим $T = \{t\} = \cup_{i=1}^{N} I(P_i)$ полный индекс, построенный на всех программах. Тогда индексирование полнотекстового материала ($\{L_k\}$, $k = 1, \ldots, N$) происходит на основе элементов полного индекса.

Определим $\langle I'(L_j, T) \subset T; E_j : I'(L_j, T) \to \mathbf{R}\rangle$ — индекс, построенный на материале L_j, E_j — функция описательности (т. е. использования как определения в тексте) дидактической единицы, зависит от форматирования и статистики, $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел. Дидактические единицы (t_{qi}) при индексировании полнотекстовых материалов представляют собой набор запросов для вычисления функции принадлежности их материалу $fcol_D(t_{qi}, L_j)$ [1]. При положительном исходе ($fcol_D(t_{qi}, L_j) \geqslant K$ — эмпирически вычисляемый порог) запрос t_{qi} в материале считается найденным: $t_{qi} \in I'(L_j, T)$. Допустим, что материал L_j соответствует программе P_m ($P_m \iff L_j$) (например, потому что $m = \arg\max_k\{|f[I'(L_j, T), E_j, I(P_k)]|\}$, где f — некая функция близости, либо это априори известно), тогда множество дидактических единиц $I'(L_j, T) \cap I(P_m)$ считается изучаемым в тексте, а $I'(L_j, T) \setminus I(P_m)$ — используемым. Введя операцию сравнения на $\{L\}$, положим, что $L_j > L_i$, если

$$P_{k_j} \iff L_j;\ P_{k_i} \iff L_i :\ (I'(L_i, T) \setminus I(P_{k_i})) \cap (I'(L_j, T) \cap I(P_{k_j})) \neq \varnothing.$$

На основе введенной операции сравнения производится сортировка документов по порядку изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маликов А. В.*, *Целиковский А. С.*, *Пархоменко Д. К.* Разработка математической модели оценки соответствия полнотекстовых документов заданному содержанию. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 1, с. 124–126.

Е. Е. Маликова, **И. И. Цитович** (Москва, МТУСИ, ИППИ РАН). **Стратегия группового поллинга в широкополосных беспроводных сетях мониторинга.**

В настоящее время стремительно развиваются широкополосные беспроводные сети (ШБС) типа Wi-Fi и WiMAX, которые могут применяться для организации общедоступных и корпоративных систем мониторинга. Например, быстрыми темпами развивается мониторинг экологической ситуации. В городах или на территории вокруг аварийно опасных промышленных объектов (атомных станций, химических предприятий и т. д.) устанавливаются радиационные датчики и датчики химически опасных веществ. В большинстве этих систем, имеющих централизованное управление, применятся стратегия опроса, а не случайного доступа [1].

Для выявления активных датчиков ШБС широко применяются системы упорядоченного опроса, получившие название поллинга, в которых приоритеты назначаются по определенному правилу [2]. Бурное развитие ШБС потребовало дальнейшей разработки теоретических основ методов управления этими системами. Для сетей Wi-Fi режим поллинга является опциональным, а для сетей WiMax этот режим является основным. Именно от конкретного механизма поллинга, а также от его параметров в основном зависит эффективность работы ШБС. Стандарты оставляют значительную свободу для разработчиков в реализации списка опроса, политики формирования очередей, а также по соотношению централизованного и распределенного управления. При этом широко применяются стохастические модели систем поллинга.

В системах мониторинга и телеметрии, основанных на ШБС с централизованным управлением, опрос датчиков осуществляется в соответствии с таблицей поллинга, задающей порядок этого опроса. При этом часто реализуется адаптивный динамический поллинг, основанный на стохастических алгоритмах. Общее количество датчиков в ШБС систем мониторинга и телеметрии t может быть значительным (порядка нескольких тысяч). Вместе с тем, количество датчиков, которые в данный момент должны начать передавать информацию об аварии или другом событии s мало. Это позволяет использовать групповой поллинг, базируясь на результатх по поиску значимых переменных булевой функции [3].

Система опросов использует априорную информацию о максимальном количестве активных датчиков s^* и предполагает возможность изменения системы опросов при изменении значения s^*. В данной работе предлагается стратегия группового поллинга, обеспечивающая поиск активных датчиков за $O(s^* \log t)$ опросов, в отличие от стандартных методов, требующих $O(t)$ опросов, что существенно сокращает время обнаружения активного датчика. В отличие от [3] в предлагаемой системе используется статическая процедура поиска значимых переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шварц М.* Сети связи: протоколы, моделирование и анализ: В 2-х ч. Ч. II. Пер. с англ. М.: Наука, 1992.
2. *Вишневский В. М.*, *Семенова О. В.* Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. М.: Техносфера, 2007.
3. *Малютов М. Б.* Нижние границы для средней длины последовательного планирования экспериментов. — Известия вузов. Математика, 1983, т. 27, № 11, с. 19–41.

О. Албхаиси, **И. И. Цитович** (Москва, МТУСИ, ИППИ РАН).
Некоторые задачи оценки пропускной способности корпоративных сетей связи.

Одной из особенностей развития отрасли связи Российской Федерации является широкое использование новейших информационных технологий в корпоративных сетях связи. В перечень услуг пользователя корпоративной сети, помимо услуг телефонной связи, включаются услуги мобильной связи, услуги справочных служб информационных контактцентров, различные виды переадресации, доступ к телефонной сети общего пользования и различным базам данных. Основой для развития корпоративных сетей связи становятся виртуальные частные сети (VPN), которые должны обеспечивать организацию доступа удаленных филиалов и пользователей к основной сети предприятия.

Новые технические решения изменяют традиционные подходы к организации корпоративных информационно-справочных систем, основу которых составляют современные контактцентры. Методы расчета пропускной способности контактцентров сетей связи должны учитывать изменение структуры трафика и потребности изменения первоначально образуемой сетевой структуры, основанные на учете различной степени самоподобия поступающего трафика.

Систематизированы подходы к построению корпоративных сетей связи, определены особенности организации виртуальных частных сетей. Проведен анализ направлений развития справочно-информационных служб и совершенствования их технических средств. Показано, что эффективным средствами обеспечения практически безотказного обслуживания клиентов являются среда автоматического распределения входящих вызовов по операторам и система интерактивного голосового меню, позволяющая вести диалог с абонентами и устанавливать часть вызовов на ожидание.

Проанализированы тенденции изменения характера трафика и определены условия, при которых допустимо использование методов теории телетрафика. Проведена оценка влияния фрактальных свойств трафика на среднее время пребывания требований в системе, в результате которой проведена оценка возможности использования различных математических моделей с учетом величины показателя Херста.

Анализ тенденций развития корпоративных информационно-справочных структур показал перспективность перехода от локальных структур к территориально распределенным контактцентрам. Систематизация аналитических моделей обслуживания вызовов позволила определить совокупность наиболее перспективных математических моделей для корпоративных информационно-справочных систем.

Ф. И. Ц и т о в и ч (Москва, ИППИ РАН)**. Субоптимальная последовательная проверка непараметрических гипотез о распределениях с экспоненциально убывающими хвостами.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается задача построения субоптимальной последовательной процедуры проверки гипотез, когда множество возможных распределений является непараметрическим. Предполагается, что хвосты распределений на бесконечности имеют экспоненциальную скорость убывания, однако значение скорости точно не известно. Допустимыми считаются процедуры, обеспечивающие заданную верхнюю границу для максимальной вероятности ошибки. Функцией риска процедуры является максимальное среднее значение продолжительности наблюдений для всех распределений из правильной гипотезы.

Гипотезы имеют вид

$$\mathcal{H}_1: \quad f \in \mathcal{G}_1, \qquad \mathcal{H}_2: \quad f \in \mathcal{G}_2, \tag{1}$$

где $f(x)$ — плотность меры $\mathbf{P}$ относительно некоторой общей для всех возможных распределений меры μ, окрестности $\mathcal{G}_i$ состоят из плотностей $g_{i,h_i}(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$g_i(x)(1-\varepsilon) \leqslant g_{i,h_i}(x) \leqslant g_i(x)(1+\varepsilon), \qquad a_i^- \leqslant x \leqslant a_i^+, \tag{2}$$

$$g_i(a_i^-)(1-\varepsilon)\exp\{k_{li}^+(x-a_i^-)\} \leqslant g_{i,h}(x) \leqslant g_i(a_i^-)(1+\varepsilon)\exp\{k_{li}^-(x-a_i^-)\}, \quad x<a_i^-, \tag{3}$$

$$g_i(a_i^+)(1-\varepsilon)\exp\{-k_{ri}^+(x-a_i^+)\} \leqslant g_{i,h}(x) \leqslant g_i(a_i^+)(1+\varepsilon)\exp\{-k_{ri}^-(x-a_i^+)\}, \quad x>a_i^+, \tag{4}$$

где $g_i(x)$ — плотности, задающие соответствующие простые гипотезы $\mathcal{H}_1^0$: $f = g_1$, $\mathcal{H}_2^0$: $f = g_2$.

Условие (2) соответствует аналогичному условию в [1], но на ограниченном подмножестве множества возможных значений наблюдений $\mathbf{X}$, а (3) и (4) задают скорости убывания хвостов распределений на $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Интервалы $A_i := [a_i^-, a_i^+]$ задают области, в которых сосредоточена бóльшая часть значений наблюдений:

$$\sup_{f\in\mathcal{G}_i} \mathbf{P}_f\{x < a_i^-\} \leqslant p_i^-, \quad \sup_{f\in\mathcal{G}_i} \mathbf{P}_f\{x > a_i^+\} \leqslant p_i^+, \tag{5}$$

где p_i^- и p_i^+ — некоторые малые числа.

Назовем допустимую процедуру $d^* \in \mathcal{D}(\alpha)$ решения задачи проверки гипотез (1) *субоптимальной*, если

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\, p_i^-\to 0,\, p_i^+\to 0} J_{\mathcal{H}_i}(d^*) = \lim_{\varepsilon\to 0,\, p_i^-\to 0,\, p_i^+\to 0} \inf_{d\in\mathcal{D}(\alpha)} J_{\mathcal{H}_i}(d),$$

где $J_{\mathcal{H}_i}(d) = \lim_{\alpha\to 0}[R_{\mathcal{H}_i}(d)/|\ln\alpha|]$ есть главный член функции риска при $\alpha \to 0$. Смысл определения состоит в том, что при сжимании окрестностей заданных распределений g_1 и g_2 до нуля получаем асимптотически оптимальную процедуру при $\alpha \to 0$. В наших обозначениях сжимание окрестностей означает, что $\varepsilon \to 0$ и вероятности p_i^+, p_i^-, определяемые формулами (5), также стремятся к нулю.

Будет предложена процедура d_0, для которой получена неасимптотическая верхняя граница, обеспечивающая субоптимальность этой процедуры.

Принципиальным отличием полученных результатов от результатов [1] является то, что получающаяся граница для функции риска субоптимальной процедуры в пределе отличается от соответствующей границы для простых гипотез. Это объясняется тем, что нижняя оценка скорости убывания хвоста распределения может существенно отличаться от ее истинного значения, что будет приводить к потерям скорости роста отношения правдоподобия для тех наблюдениях, которые попадают в

интервал A_1, но не попадают в A_2 при справедливости гипотезы $\mathcal{H}_1$. Поэтому может оказаться, что переход к более простой модели распределений может быть оправдан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цитович Ф.И.* Некоторые субоптимальные последовательные правила проверки гипотез. — В сб. трудов 30-й конференции молодых ученых и специалистов ИППИ РАН: Информационные технологии и системы ИТиС'07. М.: ИППИ, 2007, с. 110–115.

И. И. Цитович, **А. В. Чернушевич** (Москва, ИППИ РАН, МТУСИ)**. О влиянии гистерезиса управления трафиком на эффективность функционирования мультисервисной сети.**

Анализ существующих методов повышения пропускной способности телекоммуникационных сетей показал, что для беспроводных широкополосных сетей наиболее применим метод дифференцированного обслуживания пользователей [1].

Для оптимизации задержки пакетов в сети используется протокол RTCP [2] — протокол управления, который осуществляет изменение предоставляемых соединению ресурсов в зависимости от состояния сети. Для обеспечения гарантированного качества обслуживания комитет IETF разработал модель дифференцированного обслуживания разнотипного трафика — Diff-Serv. В соответствии с этой моделью байт ToS (Type of Service) отведен под код Diff-Serv. Каждому значению этого кода соответствует свой класс обслуживания в каждом из сетевых узлов. Пакеты каждого класса должны обрабатываться в соответствии с определенными для этого класса требованиями к качеству обслуживания.

По результатам исследования поведения сети при несовпадении ЧНН различных категорий пользователей показано, что резерв пропускной способности сети целесообразно использовать для обслуживания требований с негарантированным качеством обслуживания, но и с низкими тарифами. Это позволяет при необходимом уровне качества обслуживания высокоприоритетных требований получить дополнительный доход за счет обслуживания дополнительной нагрузки.

Анализ полученных данных позволяет сделать вывод о том, что ширина гистерезиса может быть достаточно большой при сохранении величины дохода или прибыли в границах, сопоставимых с точностью используемого метода их расчета. Это позволяет подбирать границы и таким образом, чтобы обеспечить выполнение других важных свойств звена сети.

Результаты проведенных численных расчетов показывают, что гистерезис можно использовать как эффективный метод управления сетью, если границы отключения и включения управляющего воздействия выбраны правильно. При этом оказывается возможным косвенное управление поведением пользователей сети при возникновении в ней перегрузок за счет редкого изменения дисциплины обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов С. Н.* Основы телетрафика мультисервисных сетей. М.: Экотрендз, 2010.
2. *Гольдштейн Б. С.*, *Пинчук А. В.*, *Суховицкий А. Л.* IP-телефония. М.: Радио и связь, 2003.

Е. В. Ю м и н а (Москва, Финансовая академия при Правительстве РФ).
Проверка адекватности метода расчета VaR в кризисный период.

Вопреки распространенному представлению, что во время кризиса классические модели Value-at-Risk (VaR) не эффективны [1, с. 247], проведенное тестирование GARCH-моделей VaR для акций российских компаний показало их хорошую адекватность.

Тестирование производилось на основе дневных котировок по закрытию ряда наиболее ликвидных ценных бумаг российских компаний за период с 2003 по 2009 гг. Данный период был выбран в соответствии с недавно опубликованным базельским документом [2, p. 40], в котором рекомендуется строить модель на исторических данных длиной как минимум 3 года, включая кризисный период длиной 1 год. Для исследования были отобраны: 10 акций, торгуемых на ММВБ, и 12 депозитарных расписок, торгуемых на Нью-Йоркской, Лондонской и Франкфуртской биржах. Все эти бумаги в каждом календарном году имели не менее 240 торговых дней.

Расчет VaR осуществлялся путем вычисления 95% квантили оцененного по выборке условного распределения регрессионных остатков. Для прогноза волатильности применялась GARCH(1,1)-модель с остатками, распределенными как по нормальному закону, так и по закону Стьюдента. GARCH-модель строилась на основе скользящего окна длиной 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500 дней.

В соответствии с инструкцией Базельского комитета [3] в результате проверки точности оценок показателя VaR в прошлом путем проведения процедуры «обратного тестирования» (backtesting) доли дней, в которые реальные потери превысили («пробили») 1-дневный VaR и 10-дневный VaR оказались равны примерно 5%. Полученный результат подтверждает корректность применения основанной на GARCH (1,1)-модели методики расчета показателя VaR в кризисный период.

Были также замечены следующие эффекты:

1) с увеличением длительности скользящего окна абсолютное отклонение от 5% доли «пробитий» для нормального распределения имеет тенденцию к увеличению, тогда как для распределения Стьюдента такая тенденция отсутствует;

2) в случае распределения Стьюдента стандартное отклонение долей «пробития» примерно в 3 раза больше для 10-дневного VaR, чем для 1-дневного VaR (для 1-дневного VaR 0,5%, для 10-дневного VaR 1,5%);

3) для 200-дневного скользящего окна во всех четырех комбинациях длительности VaR и вида распределения остатков среднеквадратичное отклонение доли «пробитий» является наименьшим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барбаумов В. Е.*, *Рогов М. А.*, *Щукин Д. Ф.*, *Ситникова Н. Ю.*, *Бурков П. В.*, *Тихомиров С. Н.*, *Лобанов А. А.*, *Замковой С. В.*, *Шпрингель В. К.*, *Голембиовский Д. Ю.* Энциклопедия финансового риск-менеджмента. М.: Альпина Паблишер, 2003, 786 с.
2. Basel Committee on Banking Supervision. Strengthening the resilience of the banking sector. Consultative document, December 2009, p. 80.
3. Basel Committee on Banking Supervision. Supervisory framework for the use of "backtesting" in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements, January 1996, p. 15.

А. Л. А р у т ю н о в (Москва, ИПУ РАН)**. Методика долгосрочного прогноза индикаторов экономической деятельности АПК России.**

Для предсказания фазовых переходов в системе экономических циклов от подъема к спаду (и наоборот) необходимо построение «системы раннего обнаружения» , системы опережающих индикаторов. Т. е. подобрать такие показатели, от которых зависит не только эффективная деятельность всей отрасли, но и поворотные точки которых наступают раньше, чем у экономики в целом. Тогда достижение пика или впадины опережающим индикатором (leading indicator) позволило бы говорить о вероятном приближении пика или впадины в макроэкономической динамике. Впервые эта идея была предложена представителями кейнсианской школы и реализована в 1930-е годы в США во времена «великой депрессии».

В России подобные расчеты проводились в экспериментальном порядке и только для подсчета индекса промышленного производства. Отдельно по отраслям народного хозяйства данных расчетов не проводилось. Что касается АПК России, то индикаторами, от которых зависит эффективная экономическая деятельность данной отрасли, являются: динамика потребления энергоресурсов (электроэнергии и различных видов топлив), от которых напрямую зависит производство продукции сельского хозяйства России (в стоимостном выражении).

В нашем случае представляет интерес сама методика оценки сводного опережающего индекса. К примеру, для всех подобранных опережающих индикаторов X^i (i — номер ряда) вычисляются симметричные ежемесячные (ежегодные) приросты (t — текущий момент времени): $x_t^i = 100(X_t^i - X_{t-1}^i)/(X_t^i + X_{t-1}^i)$. Симметричные приросты (в отличие от «обычных») обладают тем свойством, что равные по величине, но разнонаправленные изменения, наблюдаемые в два последовательных момента времени, в итоге приводят к исходному уровню показателя X^i. Затем оцениваются средние значения x_{av}^i и стандартные отклонения s^i полученных приростных рядов (n — число месяцев или годов в базисном периоде): $x_{av}^i = n^{-1}\sum x_t^i$, $(s^i)^2 = (n-1)^{-1}\sum (x_t^i - x_{av}^i)^2$. Для каждого t рассчитываются «усредненный прирост» g_t, а также среднее и стандартное отклонение ряда g (m — число исходных индикаторов): $g_t = m^{-1}\sum x_t^i/s^i$, $g_{av} = n^{-1}\sum g_t$ и $(s^g)^2 = (n-1)^{-1}\sum (g_t - g_{av})^2$ (стандартное отклонение приростного ряда). Далее показатель g корректируется так, чтобы его волатильность была равна волатильности приростов: $G_t = g_t\, s^y/s^g$.

В таблице приведены прогнозные значения темпов прироста и основных индикаторов АПК РФ до 2030 года.

Годы	Темпы роста, %	Продукция сельского хозяйства, млрд. руб.	Потребление дизельного топлива, млн. тонн	Потребление автобензина, млн. тонн	Потребление электроэнергии, млрд. кВт.ч.
2010	3,3	1292,2	9,3	4,7	19,9
2015	3,9	1564,6	11,4	6,1	24,1
2020	3,8	1885,3	13,8	7,8	29,0
2025	3,8	2271,8	16,8	9,8	34,9
2030	3,8	2737,5	20,5	12,3	42,1

Н. М. В л а с о в (Подольск, РОНЦ МГОУ). **Водородная проницаемость полого цилиндра с учетом термодиффузии и термонапряжений.**

Диффузионный поток атомов водорода в полом цилиндре с учетом градиентов концентрации, температуры и термонапряжений в рамках термодинамики необратимых процессов имеет вид

$$j = -D\left(\nabla C + \frac{C\nabla V}{kT} + \frac{CQ\nabla T}{kT^2}\right),$$

где D — коэффициент диффузии атомов водорода, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, V — потенциал взаимодействия (энергия связи) атома водорода с полем температурных напряжений, Q — теплота переноса. Потенциал взаимодействия V определяется из выражения [1]: $V = -(\sigma_{ll}/3)\delta v$, где σ_{ll} — первый инвариант тензора температурных напряжений, δv — изменение объема металла при размещении атома водорода. Численное значение и знак Q находятся из эксперимента. Для циркония и его сплавов (например, циркалой-2) теплота переноса положительна и колеблется в пределах (0,056÷0,5) eV для температурного интервала (500÷1000) K [2]. Положительный знак Q физически означает, что диффузионный поток атомов водорода также направлен против градиента температурного поля. Таким образом, температурное поле и возникающие при этом термонапряжения переносят атомы водорода в одном направлении.

В качестве иллюстративного примера рассмотрена водородная проницаемость полого цилиндра. Из условия непрерывности диффузионного потока получено уравнение для определения поля концентрации атомов водорода при соответствующих начальном и граничных условиях

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{\nabla(C\nabla V)}{kT} + \frac{Q\nabla(C\nabla T)}{kT^2}, \qquad r_0 < r < R, \\ &C = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad C = C_0 \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad C = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \end{aligned} \tag{1}$$

где t — время, r_0 и R — внутренний и внешний радиусы полого цилиндра, C_0 — средняя концентрация атомов водорода на внутренней поверхности полого цилиндра. Остальные обозначения идентичны принятым ранее. В общем случае решение задачи (1) представляет значительные математические трудности. Однако из физических соображений и с позиции математического формализма введены упрощения. Рассмотрено стационарное температурное поле и соответствующие термонапряжения. Они имеют логарифмическую зависимость от радиальной координаты [3]. Такая зависимость упрощает задачу (1), так как $\Delta V = 0$ и $\nabla V \sim 1/r$. Принято также, что температурный перепад по толщине полого цилиндра существенно меньше абсолютного значения средней температуры T_0, т. е. $(T_1 - T_2)/T_0 \ll 1$, где $(T_1 - T_2)$ есть температурный перепад. Это приводит к следующей математической формулировке задачи (1):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{D}\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1 - \beta_1 - \beta_2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}, \qquad r_0 < r < R, \\ &C = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad C = C_0 \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad C = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \end{aligned} \tag{2}$$

где безразмерные параметры β_1 и β_2 имеют вид

$$\beta_1 = \frac{4\alpha(T_1 - T_2)\mu(1+\nu)\delta v}{3kT_0(1-\nu)\ln(R/r_0)}, \quad \beta_2 = \frac{Q(T_1 - T_2)}{kT_0^2\ln(R/r_0)}.$$

Здесь α — коэффициент линейного расширения, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Остальные обозначения встречались ранее. Из решения задачи (2)

получены поле концентрации атомов водорода и соответствующий диффузионный поток через внешнюю поверхность полого цилиндра.

Проведен сравнительный анализ влияния термодиффузии и термонапряжений на водородную проницаемость полого цилиндра. Показано, что для известных экспериментальных данных по величине теплоты переноса термодиффузия является определяющей по сравнению с термонапряжениями. При этом термодиффузия и термонапряжения переносят атомы водорода в одном направлении. В зависимости от направления температурного градиента атомы водорода могут увлекаться или задерживаться полем температуры и соответствующими термонапряжениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985, 351 с.
2. *Власов Н. М.*, *Зазноба В. А.* Термодиффузия водорода в цирконии с учетом термонапряжений. — ЖТФ, 2009, т. 79, в. 5, с. 49–53.
3. *Тимошенко С. П.*, *Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979, 560 с.

Е. Л. З о л о т а р е в а (Москва, Финансовая академия при Правительстве РФ)**. Оценка риска мошенничества с применением байесовского подхода.**

Рынок розничного кредитования в России и странах СНГ в 2005–2008 гг. пережил период бурного роста. Желание отечественных банков нарастить портфель любой ценой и ослабление процедур контроля привело к увеличению числа злоупотреблений со стороны сотрудников кредитных организаций.

Для оценки потенциальных потерь в результате внутреннего мошенничества при кредитовании физических лиц в работе представлена модель, основанная на актуарном подходе. Его сущность заключается в разделении моделирования частоты риска (F, $frequency$) и наносимого им ущерба (S, $severity$). Совокупные потери T за период представляют собой сумму из F, неизвестного заранее количества, случайных величин S, т. е. их F-мерную свертку.

Вычисления проводились для некоторой абстрактной организации, однако при построении модели использовались реальные данные о потерях банков в 2005–2008 г-г., фактические сведения о российском рынке кредитования и материалы Базельского комитета по банковскому надзору. При проведении расчетов методом Монте–Карло на значения случайных величин S и T накладывались ограничения в соответствии с экономическим смыслом задачи.

При моделировании экстремальных потерь S (редких событий, ущерб от которых превышает некоторое достаточно высокое пороговое значение) использовалось обобщенное распределение Парето (GPD). Для решения проблемы дефицита данных и комбинирования информации из различных источников (статистики отечественных банков, статистики иностранных банков, экспертных оценок и т. п.) предлагается использовать байесовский подход. В работе проведен анализ для нескольких априорных распределений параметров GPD, отражающих различные уровни доверия к источникам данных. При построении апостериорного распределения использовался имитационный алгоритм «rejection sampling» («метод исключения»), основанный на отборе значений искомой случайной функции из некоторого вспомогательного распределения.

В результате вычислений было получено распределение совокупных потерь и найдены его числовые характеристики: ожидаемые потери, 95,5% *Value-at-Risk* и *Expected Shortfall*. Полученные результаты свидетельствуют о том, что, несмотря на относительно низкую частоту событий внутреннего мошенничества, потенциальный ущерб от них опасно недооценивать.

В конце 2009 г. российские банки начали постепенно возобновлять программы розничного кредитования. Разработанная модель призвана помочь организациям более взвешенно подходить к принятию решений, чтобы не повторить ошибок прошлых лет.

А. С. Иванов, **Л. И. Миронова** (Подольск, РОНЦ МГОУ). **Математическое обоснование эксперимента для определения функции напряжений в плоской задаче термоупругости.**

Прочностная надежность технических систем зависит от уровня и характера распределения внутренних напряжений. Среди последних определяющая роль принадлежит температурным напряжениям. Их появление обусловлено неоднородной температурной деформацией в объеме материала. Решение бигармонического уравнения для определения функции напряжений в общем случае представляет значительные математические трудности. Поэтому используют математические аналогии в механике деформируемого твердого тела, когда различные задачи описываются одинаковыми функциональными зависимостями с точностью до постоянных [1]. При этом одна из задач допускает простую экспериментальную реализацию. Целью данного сообщения является математическое обоснование эксперимента для определения функции напряжений и соответствующих компонент тензора термонапряжений. Не нарушая общности, рассмотрим задачу определения температурных напряжений в тепловыделяющем элементе эллиптического поперечного сечения (состояние плоской деформации). Выбор такой системы обусловлен тем, что за счет изменения полуосей эллипса удается получить весьма широкий спектр сечений. Соответствующая задача определения термонапряженного состояния математически формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered}\Delta\Delta F = \frac{\alpha E q_\nu(x,y)}{(1-\nu)\lambda}, \quad F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy},\end{gathered} \tag{1}$$

где F — функция напряжений, α — коэффициент линейного расширения, E — модуль Юнга, $q_\nu(x,y)$ — мощность объемного тепловыделения, a и b — полуоси эллипса, ν — коэффициент Пуассона, λ — коэффициент теплопроводимости, σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}, σ_{zz} — компоненты тензора термонапряжений. Формула для σ_{zz} справедлива для свободных торцевых поверхностей эллиптического цилиндра. Условия на границе эллиптического сечения односвязной области соответствуют свободным от нагрузок боковым поверхностям. Задача (1) при постоянном значении q_ν имеет точное аналитическое решение [2].

Математическая формулировка задачи (1) с точностью до обозначений совпадает с задачей изгиба жестко защемленной по внешнему контуру пластины идентичной конфигурации

$$\Delta\Delta\omega = \frac{P(x,y)}{D}, \quad \omega = \frac{\partial\omega}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где ω — функция прогиба пластины, D — жесткость пластины, $P(x,y)$ — закон нагружения пластины. Задачи (1) и (2) математически идентичны при условии $[F] = [\chi\omega]$, где χ — коэффициент для сохранения размерности. Закон нагружения пластины определяется из равенства правых частей бигармонических уравнений (1) и (2):

$$P(x,y) = \frac{\alpha E D q_\nu(x,y)}{(1-\nu)\lambda\chi}. \tag{3}$$

Все обозначения соответствуют принятым ранее. Из решения задачи (2) получают компоненты тензора термонапряжений задачи (1):

$$\sigma_{xx} = \chi\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \quad \sigma_{yy} = \chi\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\chi\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}. \tag{4}$$

Если задачи (1) и (2) не имеют аналитического решения, то для известного закона нагружения модельной пластины экспериментально определяют функцию прогиба. Полученные значения прогиба пластины аппроксимируют соответствующими функциональными зависимостями (например, в виде полиномов) и далее определяют компоненты тензора термонапряжений согласно соотношениям (4). Силовое нагружение пластины осуществляют по закону (3). Достоинством предложенного подхода является то, что экспериментальное определение функции прогиба осуществляется на модельных пластинах при комнатной температуре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. С.* Математические аналогии в термомеханике. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 848–849.
2. *Власов Н. М.*, *Федик И. И.* Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. М.: ЦНИИатоминформ, 2001, 205 с.

В. П. Зязин, **Д. А. Леднов**, **М. В. Федюкин** (Москва, МИРЭА; ООО «Стэл КС»). **Преподавание речевых технологий для специальности «Компьютерная безопасность».**

На кафедре информационной безопасности МИРЭА с 2007 года для студентов 4 и 5 курсов читается двухсеместровый спецкурс «Современные речевые технологии».

Потребность в подготовке студентов по этой дисциплине была обусловлена потребностью обработки аудиоинформации, циркулирующей в телекоммуникационных системах.

В задачи курса входило знакомство студентов с главными понятиями речевых технологий; основными задачами, решаемыми в этой научной области; подходами к их решению, применяемыми методами и алгоритмами.

В лекциях и на практических занятиях рассматриваются следующие вопросы.

Задачи обработки речи: определение языка речевого сообщения, идентификация говорящего, выделение смысла или тематики произнесенного, определение разборчивости, а также автоматический синтез речи.

Студенты изучали общую структуру систем идентификации дикторов, идентификации языка и систем распознавания речи.

Рассмотрены система речеобразования, классификация звуков речи, понятие основного тона, основные типы спектров звуков речи и их динамика, а также устройство системы восприятия звуков.

В курсе подробно рассматриваются вопросы предварительной обработки речевых сигналов, рассматривается их общая структура. Дано понятие о функции равной громкости и мел-шкале. Студентам рассказывается о способах предварительной обработки, основанных на свойствах слуха: MFCC, PLP, выделения формантных частот, а также способ на основе аппарата вейвлет-анализа. Рассматриваются методы линейного предсказания и метод наименьших квадратов [1, 2].

Подробно изучаются скрытые Марковские модели, а также используемые базовые алгоритмы: алгоритм прямого и обратного хода, алгоритм Баума–Уолша и алгоритм Витерби [3].

В заключение курса дается краткий обзор существующих в мире продуктов для решения речевых задач.

Опыт проведения занятий по речевым технологиям в МИРЭА показал, что для успешного усвоения курса студентам на младших курсах необходимы более твердые знания по теории вероятностей и математической статистике. Также целесообразно увеличить в курсе долю занятий, посвященных получению студентами практических навыков работы с речевыми файлами с помощью существующих программных пакетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быков С. Ф.*, *Журавлев В. И.*, *Шалимов И. А.* Цифровая телефония. М.: Радио и связь, 2003.
2. *Рабинер Л.*, *Шафер Р.* Цифровая обработка речевых сигналов. М.: Радио и связь, 1981.
3. *Петровский А. А.*, *Петровский Ал. А.*, *Лихачев Д. С.* Речевой интерфейс ЭВС. Учебно-методическое пособие. Минск: БГУИР, 2005.

И. А. Гарькина, **А. М. Данилов**, **В. А. Смирнов** (Пенза, ПГУАС)**. Переносимая реализация языка обработки изображений.**

Средства и методы цифровой обработки изображений в настоящее время находят применение в различных областях. Любой из этих методов включает несколько стадий, причем обязательны дискретизация непрерывного цветояркостного поля и преобразование полученного образа.

Дискретизация выполняется аппаратно средствами приемного устройства. Полученный двумерный массив хроматических координат является входными данными, он же является и результатом выполнения большинства операций.

Известны программные среды, позволяющие выполнять матричные вычисления. Многие из них управляются языками высокого уровня (фактически являясь *интерпретаторами* с этих языков). Стандартом является пакет MATLAB, функциональность которого доступна через наборы инструментальных средств, среди которых имеется предназначенный для обработки изображений. Средства набора позволяют, в частности, выполнять двумерное преобразование Фурье и вычислять свертку. Однако функции для работы с изображениями в различных цветовых пространствах не реализованы.

Средства обработки изображений содержатся и в программных пакетах для работы с растровой графикой. Так, GIMP содержит развитые средства перехода между цветовыми пространствами, статистического анализа, вычисления свертки в пространственной области и допускает работу в пакетном режиме (входной язык — надмножество LISP). Однако в большинстве пакетов используются однобайтовые целочисленные значения для внутреннего представления данных, что приводит к потере информации.

Для описания задач обработки изображений нами предложен специализированный язык обработки изображений — *язык IPL*. При реализации IPL-интерпретатора в числе прочих учтены такие требования, как: *поддержка пакетного режима*, использование для внутреннего представления *значений с плавающей запятой*, поддержка средств выполнения *свертки в области обратных длин*. Акцент сделан на *открытости*, понимаемой как возможность сопровождения и расширения функциональности, а также *переносимости* между разнородными вычислительными платформами (WinAPI и POSIX).

Фундаментальными типами языка являются вектор, матрица и *двоичная декомпозиция*. В структуре интерпретатора выделены два уровня, а именно, прикладной и сервисный (реализованы на ANSIC). Первый инкапсулирует синтаксический разбор и основные алгоритмы обработки. Второй содержит в себе реализацию абстрактных типов данных и объектов, изолирующих системные вызовы целевой платформы.

Функциональность предложенного языка и работа интерпретатора апробированы при решении ряда прикладных задач: оценке (вычислении скалярных критериев) качества защитно-декоративных покрытий, распознавании признаков в пространственной области и области обратных длин, сравнении средств цифровой фильтрации.

Работа, представленная данным докладом, выполнена по заказу Минобрнауки РФ (№ гос. рег. 01200850940).

В. Г. Бурмистрова, **М. Г. Москвичева** (Ульяновск, УлГУ).
Оптимальное значение целевой функции в одной задаче о «разладке».

В работе, представленной данным сообщением, рассмотрена модель, составленная двумя стохастическими процессами $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geqslant 0}$ и $\mathbf{G} = (G_t)_{t\geqslant 0}$. Процесс $\mathbf{G} = (G_t)_{t\geqslant 0}$ представлен в виде

$$dG_t = \alpha\, I\{t \leqslant T\}\, dt + \beta\, I\{t > T\}\, dt, \tag{1}$$

где $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, T $(0 < T < \infty)$ — момент разладки $G_0 = 0$.

Процесс $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geqslant 0}$ в модели задается стохастическим дифференциалом

$$dX_t = X_t\left(\left(G_t + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dW_t\right), \qquad X_0 > 0. \tag{2}$$

Решением (2) является $X_t = X_0\, \exp\{\sigma W_t + \int_0^t G_s\, ds\}$. Момент остановки в модели определяется как $\tau = \inf\{t\colon\ t > 0,\ X_t \geqslant \overline{X}\}$, где $\overline{X} > X_0$.

Интересным в модели представляется определить максимум целевой функции

$$\Phi(\beta, T) = \mathbf{E}\int_0^\tau G_s\, ds \to \max_{\beta,T}. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть заданы процессы* (1), (2), *тогда решением задачи оптимизации с целевой функцией* (3) *является значение*

$$\Phi^*(\beta, T) = \ln(\overline{X}/X_0).$$

При выполнении условий теоремы получаем:

$$\ln\frac{\overline{X}}{X_0} = \frac{\beta T^2}{2} F_\tau(T) - T\,(\alpha+\beta)\int_0^T F_\tau(s)\, ds + \alpha T^2 + \beta - \beta\int_0^T \frac{s^2}{2}\, dF_\tau(s),$$

где $F_\tau(T)$ известна.

Автор выражает благодарность А. А. Бутову.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-01-97009, ФЦП «научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 № 02.740.11.0610.

Н. С. Дёмин, У. В. Андреева (Томск, ТГУ)**. Экзотические опционы продажи с гарантированным доходом владельца опциона на диффузионном (B,S)-финансовом рынке.**

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathcal{P})$ [1]. На финансовом рынке обращаются рисковые (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t \in [0,T]$ определяются уравнениями $dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t)$, $dB_t = rB_t\,dt$, где W_t — стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0$, $r > 0$, $S_0 > 0$, $B_0 > 0$, решения которых имеют вид $S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$, $B_t = B_0 \exp\{rt\}$. Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$, где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ — пара $\mathcal{F}_t$-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. За обладание акцией происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta\gamma_t S_t$, пропорциональной рисковой части капитала с таким коэффициентом δ, что $0 \leqslant \delta < r$. Цель управления портфелем — достижение равенства $X_T = f_T(S)$, где f_T — платежная функция.

Рассматриваются опционы продажи Европейского типа с платежными функциями вида [2]

$$f_{\max 1} = \max\{K_1 - S_T, K_2\}, \quad f_{\max 2} = \max\{K_1 - S_T, K_2\} I\{S_T < K_1\}, \qquad (1)$$

где $I\{A\}$ — индикатор события A.

Пусть

$$z_0(t) = \frac{\ln(K_1/S_t) - (r - \delta - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$z_1(t) = \frac{\ln((K_1 - K_2)/S_t) - (r - \delta - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$z_2(t) = \frac{\ln(K_1/S_t) - (r - \delta + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$z_3(t) = \frac{\ln((K_1 - K_2)/S_t) - (r - \delta + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\{-x^2/2\}\,dx.$$

Теорема. *В случае опционов продажи с платежными функциями* (1) *стоимости опционов, портфели (хеджирующие стратегии) и соответствующие им капиталы определяются соответственно формулами*

$$P_{\max 1} = K_1 e^{-rT}\Phi(z_1) + K_2 e^{-rT}\Phi(-z_1) - S_0 e^{-\delta T}\Phi(z_3),$$

$$P_{\max 2} = K_1 e^{-rT}\Phi(z_1) + K_2 e^{-rT}[\Phi(z_0) - \Phi(z_1)] - S_0 e^{-\delta T}\Phi(z_3),$$

$$\gamma_t^{\max 1} = -e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_3(t)),$$

$$\gamma_t^{\max 2} = -e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_3(t)) - \frac{K_2 e^{-r(T-t)}}{S_t\sigma\sqrt{(T-t)}}\Phi(z_0(t)),$$

$$\beta_t^{\max 1} = \frac{e^{-r(T-t)}}{B_t}[K_1\Phi(z_1(t)) + K_2\Phi(-z_1(t))],$$

$$\beta_t^{\max 2} = \frac{e^{-r(T-t)}}{B_t}\left\{K_1\Phi(z_1(t)) + K_2[\Phi(z_0(t)) - \Phi(z_1(t))] + \frac{K_2\Phi(z_0(t))}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\},$$

$$X_t^{\max 1} = K_1 e^{-r(T-t)}\Phi(z_1(t)) + K_2 e^{-r(T-t)}\Phi(-z_1(t)) - S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_3(t)),$$

$$X_t^{\max 2} = K_1 e^{-r(T-t)}\Phi(z_1(t)) + K_2 e^{-r(T-t)}[\Phi(z_0(t)) - \Phi(z_1(t))] - S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(z_3(t)).$$

Исследованы свойства решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
2. *Кожин К.* Все об экзотических опционах. — Рынок ценных бумаг, 2002, I, № 15, с. 53–57; II, № 16, с. 61–64; III, № 17, с. 68–73.

С. Г. Буланов (Таганрог, ГОУВПО «ТГПИ»). **Элементы компьютерного анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой.**

Анализ устойчивости по Ляпунову решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), моделирующих системы управления, целесообразно выполнять в режиме реального времени. Для этой цели требуется разрабатывать специальные компьютерные методы. Попытка такой разработки представлена ниже для систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой. Рассматривается задача Коши для системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t,Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{1}$$

Предполагается, что для (1) выполнены все условия существования и единственности решения в области R: $\{t_0 \leqslant t < \infty;\ \widetilde{Y}(t), Y(t):\ \|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \delta,\ \delta > 0\}$, все коэффициенты матрицы $A(t)$ и элементы вектор-функции $F(t,Y)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0,t]$ при любых $t \in [t_0,\infty)$; устойчива соответствующая (1) линейная система.

Разностное решение системы (1) по методу Эйлера имеет вид $Y_{i+1} = (E + hA(t_i))Y_i + hF(t_i,Y_i)$, где h — шаг равномерной сетки, узлы которой при любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0,\infty)$, всегда предполагаются связанными соотношениями $t = t_{i+1}$, $h = (t_{i+1} - t_0)/(i+1)$, $i = 0,1,\ldots$. Величина возмущения в разностном приближении определяется равенством $\widetilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\widetilde{Y}_i - Y_i) + h(F(t_i,\widetilde{Y}_i) - F(t_i,Y_i))$. По рекуррентности, $\widetilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{l=0}^{i}(E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0) + D_{Ei} + S_{Ei}$, где $D_{Ei} = \sum_{r=1}^{i}\prod_{l=0}^{i-r}(E + hA(t_{i-l}))h(F(t_{r-1},\widetilde{Y}_{r-1}) - F(t_{r-1},Y_{r-1})) + h(F(t_i,\widetilde{Y}_i) - F(t_i,Y_i))$, $S_{Ei} = \sum_{r=1}^{i}\prod_{l=0}^{i-r}(E + hA(t_{i-1}))\overline{\Theta}_{Er-1} + \overline{\Theta}_{Ei}$, $\overline{\Theta}_{Ei}$ — погрешность метода Эйлера на шаге. В рассматриваемых условиях $\lim_{h\to 0} S_{Ei} = \vec{0}$ [1], и величина возмущения определяется равенством $\widetilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i\to\infty}\prod_{l=0}^{i}(E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{i\to\infty} D_{Ei}$. На данной основе доказывается следующее утверждение.

Теорема. *В рассматриваемых условиях для устойчивости решения задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы для произвольного* $\widetilde{\varepsilon} > 0$ *нашлось такое* $\delta > 0$, *что* $\|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \delta$ *влечет*

$$\|\lim_{i\to\infty} D_{Ei}\| = \left\|\widetilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i\to\infty}\prod_{l=0}^{i}(E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0)\right\| \leqslant \widetilde{\varepsilon}, \quad \forall t \in [t_0,\infty). \tag{2}$$

Условие (2) ориентировано на программную реализацию. Выражение под знаком нормы программируется, путем проверки неравенства (2) можно выполнять анализ устойчивости на компьютере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ромм Я. Е., Буланов С. Г.* Метод компьютерного анализа устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. Таганрог: ТГПИ, 2009, 119 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 30.04.09, № 268–В2009.

И. В. Федоренко, **А. М. Виноградненко** (Ставрополь, СевКавГТУ). **Моделирование многоканальной измерительной системы с учетом требований к помехоустойчивости и оперативности передачи информации.**

При решении задач промышленной экологии важное место отводится вопросам мониторинга безопасности промышленных объектов с помощью многоканальных измерительных систем, содержащих подсистемы сбора и обработки измерительной информации, линии связи и пункты диспетчерского управления. Моделируемая многоканальная измерительная система рассматривается как система массового обслуживания (СМО) с ограниченной очередью. Заявками на обслуживание являются пакеты информационных символов, сформированные на выходе измерительных датчиков в случае выхода значения контролируемого технологического параметра за пределы установленных допусков. Интенсивность таких заявок определяется количеством датчиков, временными характеристиками контролируемых случайных процессов и числом установленных допусковых уровней для каждого процесса.

Времени обслуживания каждой заявки соответствует длительность передачи информационного пакета, которая рассчитывается с учетом допустимой вероятности ошибки приема пакета на выходе линии связи по формулам, применяемым в теории помехоустойчивости систем связи. В этом случае интенсивность обслуживания заявки в исследуемой СМО тем больше, чем ниже требования к достоверности передачи, больше мощность полезного сигнала и меньше спектральная плотность шума в линии связи. При расчете многоканальной измерительной системы следует учитывать также требование к оперативности передачи измерительной информации, которое выражается в ограничении на время пребывания заявки в очереди.

Таким образом, вероятность обслуживания заявок как основной выходной показатель СМО вступает в противоречие с требованиями к максимизации показателей помехоустойчивости системы (за счет увеличения времени передачи измерительной информации по линии связи) и достоверности контроля объектов (за счет увеличения числа измерительных датчиков и пороговых уровней их срабатывания, т. е. роста интенсивности заявок).

Разработанная математическая модель многоканальной измерительной системы как СМО с ограниченной очередью позволяет определить оптимальное число линий связи между подсистемой сбора измерительной информации, расположенной возле технологического объекта, и диспетчерским пунктом с учетом противоречивых требований к контролепригодности, помехоустойчивости и оперативности передачи измерительной информации.

Результаты получены при выполнении НИР № НК-430П-8 в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

М. А. Волочай, **М. Н. Грицаева**, **Р. Г. Закинян**, **И. Н. Ларченко**, **С. А. Сухов**, **А. А. Крупкин** (Ставрополь, СГУ).
Образование ячеистых структур в атмосфере.

Свободная конвекция является, по существу, первопричиной почти всех движений в атмосфере. Примером вертикальной классической рэлеевской конвекции в атмосфере является конвекция, приводящая к образованию над большими пространствами небольших облаков, расположенных в порядке ячеек [1], [2]. Будем предполагать, что плотность слабо зависит от давления по сравнению с зависимостью от температуры (приближение Буссинеска). Будем также считать, что подъем воздушной частицы происходит адиабатически. Введем функцию перегрева $\Delta T(z) = \Delta_0 T - \Delta\gamma\, z$, тогда выражение для плотности воздушной частицы ρ_i запишется в виде

$$\rho_i = \rho_c(1 - \beta\Delta T). \tag{1}$$

С учетом уравнения статики атмосферы и выражения (1) уравнение движения идеальной жидкости в форме Эйлера в инерциальной системе отсчета в проекциях на ось Z в стационарном случае запишется в виде

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \beta g \Delta T. \tag{2}$$

Однако наличие восходящих потоков должно вызвать появление компенсационных нисходящих движений, что математически определяется уравнением неразрывности $\partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0$.

Введем функцию тока ψ:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получаем

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = \beta d \Delta\gamma (z_T - z). \tag{4}$$

Представляя решение уравнения (4) в виде произведения двух независимых функций координат $\psi(x, z) = X(x)\, Z(z)$, получим решение в виде

$$\psi(x, z) = \frac{N_{BV}}{k}\sqrt{z(2z_T - z)\cos\, kx}.$$

Волновое число k можно оценить выражением

$$k = \sqrt{\frac{\beta g}{2R_d(\gamma_A - \gamma_a)\Delta_0 T}}\,\Delta\gamma.$$

Отсюда из определений (3) для проекций скорости получим выражения

$$u = \frac{N_{BV}}{k}\frac{z_1 - z}{\sqrt{z(2z_1 - z)}}\cos\, kx, \quad w = N_{BV}\sqrt{z(2z_1 - z)}\,\sin\, kx.$$

Оценим значения полученных постоянных при следующих значениях параметров: $\beta = 3,7 \cdot 10^{-3}\,\text{К}^{-1}$, $g = 9,8\,\text{м/с}^2$, $\gamma_a = 0,0098\,\text{К/м}$, $\gamma = 0,006\,\text{К/м}$, $R_d = 287\,\text{м}^2/(\text{с}^2\text{К})$, $\Delta_0 T = 4\,\text{К}$, $\gamma_A = 0,0342\,\text{К/м}$. Следовательно, $N_{BV} = 1,2 \cdot 10^{-2}\,\text{с}^{-1}$, $k = 0,1\,\text{км}^{-1}$, $z_T = 1\,\text{км}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В. В.*, *Гусев А. М.* Свободная конвекция в геофизических процессах. — Успехи физических наук, 1983, т. 141, в. 2, с. 311–342.
2. *Матвеев Л. Т.* Физика атмосферы. СПб.: Гидрометеоиздат, 2000, 779 с.

В. Л. В о р о н ц о в а (Казань, КГФИ)**. О зависимости эволюции предельных циклов от эксцентрицитета орбиты.**

Рассматривается движение орбитальной «связки тел» под действием гравитационных и аэродинамических сил. Уравнения относительного движения связки с учетом гравитационного воздействия, аэродинамического давления, аэродградиентного и диссипативного факторов подробно описаны в [1]. Параметры n, a, k, b описывают следующие физические воздействия: n — гравитационные, a — аэродинамическое давление, k — аэроградиентный эффект за счет градиента плотности атмосферы вдоль гантели, b — аэродинамическое трение.

Для случая круговой орбиты было выявлено, что сочетание аэроградиентной раскрутки связки с ее торможением аэродинамическим трением в пределе приводит либо к относительным равновесиям, либо к так называемым «предельным циклам» — замкнутым фазовым траекториям, охватывающим фазовый цилиндр (угловая скорость связки вдоль цикла постоянна). Исследуется проблема орбитально-устойчивого предельного цикла для рассматриваемого уравнения в случае эллиптической орбиты.

Сначала были построены фазовые портреты для орбиты с очень малой эллиптичностью $e = 0,001$. При малом значении аэродинамического параметра «a» предельных циклов нет. Предельный цикл возникает при $a = 4$ в окрестности $\alpha' \approx 29,6$. Составлена таблица расположения предельного цикла в зависимости от параметра «a». Значения параметров k и b одинаковы ($k = 0,1$; $b = 0,001$), параметр «a» меняется.

Таблица 1.

«a»	4	5	6	7	8	9	10	30	35	40
α'	29,6	28,47	27,3	26,13	25,132	24,167	23,289	15,693	15,05	14,5

Из таблицы 1 видно, что при возрастании параметра «a» предельный цикл снижается.

Далее строились фазовые портреты с ростом эксцентриситета ($e = 0,01$). Расположение предельного цикла в зависимости от параметра «a» для $e = 0,01$ приведено в таблице 2.

Таблица 2.

«a»	4	5	6	7	8	9	10	30	35	40
α'	29,65	28,6	27,55	26,51	25,55	24,665	23,867	16,5	15,85	15,4

При возрастании эксцентриситета орбиты на порядок при одинаковых значениях параметра «a» расположение предельного цикла становится незначительно выше. Кроме того, построены фазовые портреты для орбиты с эллиптичностью $e = 0,1$. Предельный цикл возникает при $a = 11$ в окрестности $\alpha' = 20$, а исчезает при $a > 46$.

Таблица 3.

«a»	11	15	20	30	40	46
α'	20	17,8	16,8	15,2	14,2	14,15

При возрастании эксцентриситета до $e = 0,1$ расположение предельного цикла становится значительно ниже.

Исследовано влияние эллиптичности орбиты на возможную хаотизацию движения. Прослеживается эволюция предельного цикла в зависимости от роста эксцентриситета и аэродинамического параметра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В. В.*, *Пивоваров М. Л.* О влиянии атмосферы на относительное движение гантелеобразного спутника. — Прикл. матем. и мех., 2000, № 4.

И. А. Гуримская (Нерюнгри, ЮЯИЖТ)**. Об эффективном решении первой краевой задачи в полуплоскости с функциональной проницаемостью.**

Рассмотрим в двухслойной полуплоскости $D(y<l)=D_1(y<0)\cup D_2(0<y<l)$, $x\in\mathbf{R}$, задачу для потенциалов φ_i в D_i вида

$$\Delta\varphi_1=0,\quad p(y)\partial_x^2\varphi_2+\partial_y[p(y)\partial_y\varphi_2]=0,\quad \varphi_{2|y=l}=h(x), \tag{1}$$

$$y=0:\quad \varphi_1=\varphi_2,\quad \partial_y\varphi_1=\partial_y\varphi_2, \tag{2}$$

где $p(y)=k(by+1)^2$, $k,b>0$ — постоянные, $\partial_x^n=\partial^n/\partial x^n$. Данная задача описывает установившиеся процессы тепломассопереноса в неоднородной полуплоскости D с непрерывной функцией проницаемости, убывающей с глубиной в полосе D_2 и равной постоянной k в D_1. Представляя решение задачи (1)–(2) в виде $\varphi_1(x,y)=u_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)=u_2(x,y)(by+1)^{-1}$, для функций u_i в D_i получим задачу

$$\Delta u_i=0,\quad u_{2|y=l}=f(x), \tag{3}$$

$$y=0:\quad u_1=u_2,\quad \partial_y u_1=\partial_y u_2-bu_2, \tag{4}$$

где $f(x)=(bl+1)h(x)$. Методом работы [1] выразим решение задачи (3)–(4) через известное решение $F(x,y)$ классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости D вида $\Delta F=0$, $F_{|y=l}=f(x)$. Полагая, что функция $F(x,0)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i, представим функцию $F(x,y)$ при $y<0$ в виде $F(x,y)=\int_0^\infty e^{\lambda y}g(x,\lambda)\,d\lambda$, где $g=f_1\sin\lambda x+f_2\cos\lambda x$. Отсюда следует формула [1]

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t}t^nF(x,y-t)\,dt=\int_0^\infty\frac{e^{\lambda y}g}{(\lambda+\gamma)^{n+1}}\,d\lambda. \tag{5}$$

Представляя решение задачи (3) в виде $u_1=\int_0^\infty a_1e^{\lambda y}g\,d\lambda$, $u_2=F(x,y)+\int_0^\infty a_2g\operatorname{sh}\lambda(y-l)\,d\lambda$, из условий сопряжения (4) находим $a_1=\lambda e^{\lambda l}d$, $a_2=bd$, где $d=e^{-\lambda l}[(\lambda+\gamma)(1-q)]^{-1}$, $q=e^{-2\lambda l}\gamma(\lambda+\gamma)^{-1}$, $\gamma=b/2$, причем $|q|<1$ при $0<\lambda<\infty$. Полученные функции u_i содержат двукратные квадратуры (внешние и внутренние в коэффициентах Фурье f_j) от сильно осциллирующих тригонометрических функций. Разлагая $(1-q)^{-1}$ в геометрическую прогрессию, с учетом формулы (5) окончательно решение задачи (1)–(2) приведем к виду однократных квадратур без осцилляций:

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^\infty\frac{\gamma^n}{n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t}t^n\partial_yF(x,y-2nl-t)\,dt,$$

$$\varphi_2=\frac{F(x,y)}{by+1}+\sum_{n=0}^\infty\frac{\gamma^{n+1}}{(by+1)n!}\int_0^\infty e^{-\gamma t}t^n[F(x,y-2l(n+1)-t)-F(x,-y-2nl-t)]\,dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах. — Дифференц. уравнения, 2009, т. 45, № 6, с. 855–859.

Е. Н. Даценко, **Н. Н. Авакимян**, **Н. И. Васильев** (Краснодар, КубГТУ)**. Математическая модель инициирования роста докритических зародышей в окрестности первичного пузыря.**

Установлено, что при росте пузыря пара (первичного) в перегретой жидкости вблизи его поверхности возникают и также растут пузырьки пара меньшего размера (инициированные). Механизм их возникновения может состоять в достижении критического размера докритическими зародышами при их деформации в поле скоростей жидкости, окружающей первичный пузырь. При деформации первоначальная сферическая форма докритического зародыша переходит в сплюснутый эллипсоид. Движение границ эллипсоида раскладывалось на деформационное и собственное. Скорость деформационного движения вдоль большой полуоси, учитывая линейный рост радиуса первичного пузыря:

$$\dot{a}_{\text{д}}(t) = \frac{k}{R_{\text{кр}} + k(t+t_0)} a_{\text{д}}(t), \tag{1}$$

где $k = \rho(\rho+\rho'')^{-1}\sqrt{2\Delta P/(3\rho)}$, $R_{\text{кр}}$ — критический радиус, t_0 — момент возникновения первичного пузыря.

Собственное движение находим, используя уравнение Релея для малой и большой полуоси эллипсоида, учитывающее вязкость и поверхностное натяжение:

$$\text{вдоль полуоси } b: \quad a\ddot{b} + \frac{3}{2}\dot{b}^2 + \frac{4\eta}{\rho}\frac{\dot{b}}{a} + \frac{2\sigma}{\rho}\frac{1}{a} = \frac{1}{\rho}\Delta P, \tag{2}$$

$$\text{вдоль полуоси } a: \quad b\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 + \frac{4\eta}{\rho}\frac{\dot{a}}{b} + \frac{2\sigma}{\rho}\frac{1}{b} = \frac{1}{\rho}\Delta P, \tag{3}$$

где η, ρ, σ — вязкость, плотность и поверхностное натяжение жидкости, ΔP — разность давления, $a(t), b(t)$ — большая и малая полуось эллипсоида, соответственно.

Представим $a(t) = R_{\text{э}}(t) + \varepsilon_1(t)$ и $b(t) = R_{\text{э}}(t) + \varepsilon_2(t)$, где $R_{\text{э}}(t)$ — эффективный радиус докритического зародыша, $R_{\text{э}} = \sqrt[3]{a^2 b}$, удовлетворяющий невозмущенному уравнению Релея, $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ — малые возмущения.

Учитывая $|\varepsilon_1(t)| \ll R_{\text{э}}(t)$, $|\varepsilon_2(t)| \ll R_{\text{э}}(t)$, упрощая и линеаризируя, а также при замене $\gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\delta = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, получим, что система (2), (3) распадается на два независимых уравнения:

$$\ddot{\delta} + \beta\dot{\delta} + \omega\delta = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{\gamma} + \beta\dot{\gamma} - \omega\gamma = 0, \tag{5}$$

где $\beta = 4\eta\rho^{-1}R_{\text{н}}^{-2}$, $\omega = 2\sigma\rho^{-1}R_{\text{н}}^{-3}$, $R_{\text{н}}$ — наибольший радиус докритического зародыша.

Начальные условия для (4), (5): $\delta(0) = \gamma(0) = \varepsilon_{\text{н}}$, $\dot{\delta}(0) = \dot{\gamma}(0) = 0$, где $\varepsilon_{\text{н}} = kR_{\text{н}}^2(R_{\text{кр}} + kt_0)^{-1}w^{-1}$, w — скорость теплового движения молекул пара внутри докритического пузырька. Окончательно,

$$R_{\text{э}}(t) = \frac{R_{\text{н}}(R_{\text{кр}} + k(t+t_0))}{R_{\text{кр}} + kt_0} - \frac{\varepsilon_{\text{н}}}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}(\lambda_2 \exp\lambda_1 t - \lambda_1 \exp\lambda_2 t), \tag{5}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (5).

Представленный механизм возникновения инициированных пузырей, схема их роста, параметры и выводы из модели (1)–(6) не противоречат известным экспериментальным данным.

С. Н. Гончаренко, **Е. В. Дементьева** (Москва, МГГУ).
Разработка модели оценки уровня риска возникновения аварийных ситуаций на промышленных объектах.

В работе, представленной данным сообщением, произведено моделирование риска возникновения аварийных ситуаций на карьерных экскаваторах. Получены вероятностные оценки риска возникновения аварийных ситуаций. Произведена сравнительная оценка величины ущерба от аварийной ситуации и затрат на плановый ремонт и техническое обслуживание оборудования.

Модель оценки риска возникновения аварийных ситуаций содержит следующие составляющие: 1) годовой ущерб от возникновения аварийной ситуации $R_1 = p_1(a,i)\,n((O_1(a,i)+(1-K_P(a,i))T_1(a,i)(N_1(a,i)+B(a,i)S)$; 2) затраты на капитальный ремонт и ущерб в межремонтные сроки $R_2 = p_2(a,i)K_P(a,i)((O_2(a,i)+(1-K_P(a,i))T_2(a,i)(N_{12}(a,i)+B(a,i)S)$, где c — количество лет, проработанных экскаватором между капитальными ремонтами, (для ЭКГ-5А $c \approx 5$ лет); $p(a,i)$ — вероятность возникновения аварийной ситуации a по причине i от. ед.; $O(a,i)$ — стоимость оборудования, необходимого для ликвидации аварийной ситуации a по причине i, руб.; $N(a,i)$ — материальные затраты от возникновения аварийной ситуации a по причине i, руб./час; S — себестоимость выработки, руб./т; $T(a,i)$ — время простоя, обусловленное аварийной ситуации a по причине i, час; $B(a,i)$ — часовая выработка экскаватора, т/час; $K_P(a,i)$ — коэффициент резерва, учитывающий сокращение времени простоев, от. ед.

В этом случае модель оценки риска возникновения аварийных ситуаций будет выглядеть следующим образом :

$$R = \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} p_{1lmn}(a,i)n((O_{1lmn}(a,i)+(1-K_P(a,i)))T_{1lmn}(a,i) \times (N_{1lmn}(a,i)+B(a,i)S)) + \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} p_{2lmn}(a,i)((O_{2lmn}(a,i) + (1-K_P(a,i)))T_{2lmn}(a,i)(N_{2lmn}(a,i)+B(a,i)S)) \to \min,$$

где l — количество аварийных ситуаций на главных приводах; m — количество аварийных ситуаций в системе управления; n — количество аварийных ситуаций на механическом оборудовании.

При заданных ограничениях: по вероятности возникновения аварийной ситуации $0 < p_{1,2}(a,i) < 1$; по стоимости оборудования, необходимого для устранения аварийной ситуации $O_{1\,\min} \leqslant O_{1,2}(a,i) \leqslant O_{1\,\max}$; по материальным затратам, которые карьер несет от возникновения аварийной ситуации $N_{1\,\min} \leqslant N_{1,2}(a,i) \leqslant N_{2\,\max}$; по коэффициенту резерва $0 < K_p(a,i) < 1$; по времени простоев, обусловленному аварийной ситуацией $T_{1\,\min} \leqslant T_{1,2}(a,i) \leqslant T_{2\,\max}$; по часовой выработке экскаватора $B_{1\,\min} \leqslant B(a,i) \leqslant B_{2\,\max}$.

В результате моделирования получено следующее: 1) результаты по моделированию мероприятия риска возникновения аварийных ситуаций позволят снизить ущерб от аварийных ситуаций на 4,17%; 2) периодичность капитальных ремонтов увеличилась на 12,9% (вместо 5лет 6,45года); 3) снижение риска ΔR, руб. при моделировании по отношению к снижению ущерба ΔY, руб. от возникновения аварийных ситуаций около 10%; 4) ожидаемый экономический эффект от моделирования риска возникновения аварийных ситуаций напрямую зависит от сроков внедрения $T_{\text{вн}}$ и количества объектов n шт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безотказность, ремонтопригодность и риск. Практические методы для инженеров, включая вопросы оптимизации. Д. Дж., Группа ИДТ, 2007, 432 с.
2. *Романов В. С.*, *Бутуханов А. В.* Риски предприятия как составная часть рисков. Моделирование и анализ безопасности, риска и качества в сложных системах. — Труды международной научной школы МА БРК, 2001. СПб.: НПО «Омега», 2001, с. 223.
3. Методически указания по проведению анализа риска опасных промышленных объектов. РД 08-120-96.

А. И. Задорожный, **А. Т. Болокова**, **Н. С. Задорожная** (Ростов-на-Дону, ЮФУ, РВИ РВ; Майкоп, АдГУ). **Метод регуляризации сингулярных возмущений, точки поворота и проблема концентрационного пика газовой примеси в металле.**

Задача об одномерной стационарной «восходящей» диффузии газа в металле с учетом эффекта концентрационного расширения и при условии массоизолированности концов образца сводится в безразмерных переменных к нелинейному уравнению для функции концентрации $c(x)$ [1], [2]

$$\varepsilon^2 \frac{dc}{dx} + \frac{m(x)}{1+\beta(x)c} c = 0, \quad c(0) = 1, \qquad x \in]0,1[. \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon^2 = (k_B T_c E)/(3(1-2\nu)P\Sigma)$, $D_{eff} = \varepsilon^2(1+\beta(x)c)$ есть эффективный коэффициент диффузии, T_c — характерная температура, $\beta(x) = (4P(1-2\nu)\alpha_c)/(3k_B(1-\nu)T(x))$, α_c — коэффициент линейного концентрационного расширения, k_B — постоянная Больцмана, P — компонент шарового упруго-дипольного тензора, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, Σ — характерная величина структурных (внешних) напряжений. Далее $m(x) = T^{-1}(x)(\alpha_t T'(x) - \sigma'(x))$ есть функция «мобильности», где α_t — безразмерный коэффициент линейного термического расширения, $\sigma(x)$ — первый инвариант тензора структурных упругих напряжений. По данным наблюдений $|\beta c| \leqslant 0,12$, что исключает возможность вырождения. Предположение $\varepsilon \prec 1$ физически отвечает доминированию дрейфового переноса I_{drift} над самодиффузионным потоком I_{diff}, а в математическом аспекте делает задачу сингулярно возмущенной [3].

Вопрос о внутреннем максимуме концентрации, положение которого оказывает существенное влияние на физико-механические свойства материала, рассматривался, как правило, в экспериментальном аспекте [4], [5]. Изложим математический вариант его трактовки. Положим, что сушествует такая $x_{tp} \in]0,1[$, что $m(x_{tp}) = 0$, $m'(x) > 0$, кроме того, $m(x) < 0$, $x \in]0, x_{tp}[$ и $m(x) > 0$, $x \in]x_{tp}, 1[$. Сохраняя терминологию, принятую в линейном случае [6], назовем x_{tp} *простой точкой поворота* (turning point) дифференциального оператора в (1).

Применение с некоторой модификацией методики из [3] позволяет выписать главный член асимптотического разложения:

$$c_p(x) = \alpha_p \exp\{-\rho^2(x)/2\} - \beta(x)\alpha_p^2 \exp\{-\rho^2(x)\} + O(\varepsilon), \tag{2}$$

где $\alpha_p = 0,5\beta^{-1}(0)\exp\{\rho^2(0)/2\}[1-\sqrt{1-4\beta(0)}]$,

$$\rho(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1}\sqrt{2}\left[\displaystyle\int_{x_{tp}}^{x} m(s)\,ds\right]^{q/2}, & \text{если } x \geqslant x_{tp}, \\ -\varepsilon^{-1}\sqrt{2}\left[-\displaystyle\int_{x}^{x_{tp}} m(s)\,ds\right]^{1/2}, & \text{если } x \leqslant x_{tp}, \end{cases}$$

$\rho(x)$ — регуляризирующая переменная.

Формула (2) с очевидностью показывает, что точка концентрационного максимума определяется как $x_{\max} = x_{tp} + O(\varepsilon)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алефельд Г., Барановский Б. и др.* Водород в металлах. Т.2. М.: Мир, 1981, 430 с.
2. *Любов Б. Я.* Кинетическая теория фазовых превращений. М.: Металлургия, 1969, 264 с.

3. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981, 400 с.
4. *Бэррер Р.* Диффузия в твердых телах. М.: ИЛ, 1948, 504 с.
5. *Шпеньков Г. П.* Физикохимия трения. Минск: Университетское, 1991, 397 с.
6. *Wasov W.* Linear Turning Point Theory. New York–Berlin–Heidelberg–Tokio: Springer-Verlag, 1985, 246 p.

М. В. З а р е ц к а я (Краснодар, ГОУ ВПО КубГУ)**. О моделировании процессов, протекающих в средах, обладающих различными физико-механическими свойствами.**

При решении задач оценки последствий сейсмического удара необходимо учитывать не только процессы, протекающие в литосферной плите, ее строение, наличие разломов или включений, но и различные факторы, оказывающие существенное воздействие на интенсивность сейсмического воздействия: рельеф, наличие застройки, атмосферные процессы, строение подстилающего основания. Математически это означает, что возникает необходимость исследования процессов, описываемых во взаимодействующих областях разными краевыми задачами.

Для решения таких задач разработана теория блочных структур, позволяющая строить общие представления решений в средах блочного строения [1], где каждый блок обладает своими физико-механическими свойствами.

Блочная структура — это совокупность блоков сплошной среды, одной или разных размерностей, занимающих отдельные области, контактирующие между собой. Процессы, протекающие в каждом блоке, можно описать линейной или нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных произвольного порядка.

Для исследования поставленных краевых задач для систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы в средах блочного строения, развиты два метода факторизации, позволяющие получать аналитические представления решений краевых задач внутри области [2]. Дифференциальный метод факторизации применяется для исследования краевых задач в средах блочной структуры одной размерности. Интегральный метод факторизации обобщил подходы к исследованию интегральных уравнений с разностным ядром. Он также позволяет получать представления решений при наличии неоднородностей типа трещин и включений в средах.

Наличие представления общих решений позволяет анализировать в аналитическом виде качественное поведение различных характеристик в блоках или управлять блочной структурой, как интегральными свойствами, так и адресным воздействием на отдельный блок с ее границы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-08-00669, гранта Президента РФ НШ-3765.2010.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.*, *Зарецкая М. В.*, *Павлова А. В.*, *Мухин А. С.*, *Лозовой В. В.*, *Федоренко А. Г.* О приложениях теории блочных структур в науках о Земле, сейсмологии, строительстве, материаловедении. — Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2008, № 4, с. 27–34.
2. *Бабешко В. А.*, *Бабешко О. М.*, *Евдокимова О. В.*, *Зарецкая М. В.*, *Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры. — ДАН, 2009, т. 424, № 1, с. 36–39.

А. В. Иванов (Москва, ИПИ РАН). **Идентификация параметров в моделях процессов функционирования информационного портала.**

Информационный web-портал — это программная система, построенная на основе протоколов и технологий Интернет. Ее основная задача — организация доступа пользователей к информационным источникам и службам, объединенным на принципах федерации, и создание общей информационной среды, обеспечивающей эффективную работу пользователей с предоставленными ресурсами.

Как и у любой сложной системы, многие процессы функционирования информационного портала нуждаются в оптимизации [1]. Это, в свою очередь, требует использования математических моделей, адекватных динамике изучаемых процессов.

Основная функциональность по обработке пользовательских запросов и взаимодействию с информационными источниками и службами портала обеспечивается портальной подсистемой интеграции и поиска. Для оптимизации функционирования соответствующей программной службы ключевое значение имеют показатели эффективности источников и пользовательской активности.

Для моделирования процессов, определяющих указанные показатели, предлагается использовать стохастические модели с порогами, поскольку рассматриваемые показатели имеют такие характерные для нелинейных систем особенности, как зависимость возмущений от текущих значений показателя, цикличность процессов, скачкообразные изменения характеристик. Для учета таких явлений, с одной стороны, и для возможности использования в решениях полезных свойств линейных систем идентификации, с другой, предлагается подход на основе классификации состояний изучаемого показателя. Пространство значений показателя разбивается на области, и предполагается, что для значений показателя внутри области его динамика описывается простейшими линейными уравнениями, а при выходе показателя за границы области модель изменяется. Такой подход, по-видимому, впервые предложен в [2], где рассматривается модель авторегрессии с порогом (TAR, threshold autoregression).

Отличием предлагаемых моделей от классических моделей TAR, а также моделей более общего вида TARMA, является то, что значения моделируемого показателя оказываются доступными только косвенно, поэтому вместо моделей временных рядов используются модели динамических систем наблюдения.

Для формирования моделей предложены два подхода. В задаче моделирования эффективности источников используются два процесса с порогами — первый для формирования классифицирующей функции, определяющей текущий режим работы источника, и второй — для непосредственного моделирования наблюдений за источником.

В задаче моделирования активности пользователей используется один процесс с порогами, значения которого непосредственно моделируют соответствующий показатель. Обнаружено, что данные активности пользователей содержат явно выраженную периодическую составляющую, поэтому необходимо исключить ее влияние, чтобы при использовании модели первого порядка получить адекватные результаты моделирования. С этой целью реальные данные специально подготавливались: выделялся период колебаний, определялся усредненный уровень активности для этого периода (тренд), после чего он вычитался из наблюдаемых данных. Полученное отклонение от линии тренда затем использовалось в качестве исходных данных для идентификации параметров модели.

Предложены модели идентификации параметров в задачах оценки эффективности источника и активности пользователей на основе экспертной оценки.

Установлена возможность обоснованного выбора параметров рассматриваемых моделей за счет простейшего статистического анализа среды функционирования портала.

Полученные результаты могут быть использованы для решения задач оптимизации использования ресурсов подсистемы интеграции и поиска web-портала.

В докладе приводятся и сравниваются результаты многочисленных экспериментов, выполненных на основе реальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Босов А. В.* Моделирование и оптимизация процессов функционирования Информационного web-портала. — Программирование, 2009, № 6, с. 53–66.
2. *Tong H., Lim K. S.* Threshold autoregression, limit cycles, and cyclical data (with discussion). — J. Royal Statistical Society, Series B, 1980, v. 42, p. 245–292.

Г. Р. Идрисова (Уфа, БашГУ)**. Математическая модель процесса фильтрации воды с осадкообразующим реагентом в пористой среде.**

Одна из основных проблем преждевременного обводнения нефтяных месторождений с неоднородными по проницаемости коллекторами связана с поддержанием пластового давления путем закачки воды. Эффективными методами предотвращения прорыва воды по высокопроницаемым пропласткам являются так называемые *потокоотклоняющие технологии*, предусматривающие добавку в нагнетаемую воду специальных реагентов, образующих в процессе фильтрации твердый осадок, постепенно закупоривающий поровые каналы по мере движения воды. Для прогнозирования эффективности такого процесса используются математические модели двухфазной фильтрации с осадкообразованием. В работе, представленной данным сообщением, предложена математическая модель вытеснения нефти водой с добавлением осадкообразующего реагента с учетом известных экспериментальных данных. Рассматривается пористая среда, насыщенная нефтью и водой, в которую осуществляется нагнетание воды с заданным содержанием осадкообразующего вещества. При этом предполагается, что осадкообразующий реагент полностью растворен в закачиваемой воде. По мере фильтрации осадок выпадает в пористой среде и переходит в неподвижное состояние, заполняя некоторую часть порового пространства. Математическая модель процесса включает уравнения сохранения массы нефти, воды и осадкообразующего реагента, дополненные соответствующими граничными условиями, и уравнения движения фаз в виде обобщенного закона Дарси. Кроме того, для замыкания системы используется соотношение, выражающее связь между текущей пористостью и абсолютной проницаемостью среды [1].

Отличительной особенностью предложенной в данном сообщении модели является использование в постановке экспериментальных данных зависимости объемной доли выпадающего осадка от концентрации осадкообразующего реагента в нагнетаемой воде [2].

В результате численных исследований выявлено, что при относительно более высоких значениях начальной водонасыщенности пористой среды наблюдается более равномерное распределение осадка вдоль пласта. Показано, что увеличение концентрации осадкообразующего реагента в нагнетаемой воде приводит к более равномерному осадкообразованию, однако увеличение концентрации осадка в нагнетаемой воде приводит к значительным изменениям лишь при малых ее значениях и практически не ведет к смене картины осадкообразования при больших его значениях. Таким образом, обнаружено, что существует некая предельная концентрация реагента, выше которой влияние его на процесс осадкообразования несущественно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08–01–97032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Николаевский В. Н.*, *Басниев К. С.*, *Горбунов А. Т.*, *Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970, 339 с.
2. *Лозин Е. В.*, *Хлебникова В. Н.* Применение коллоидных реагентов для повышения нефтеотдачи. Уфа: Изд-во БашНИПИнефть, 2003, 236 с.

З. М. И с к а к о в а (Уфа, ГОУ ВПО УГНТУ)**. Моделирующие автоматизированные системы управления в нефтехимии.**

Решение современных научно-технических задач, возникающих при управлении технологическими процессами в нефтехимии невозможно без использования моделирующих автоматизированных систем управления. Развитие методологии компьютерного моделирования ХТС (химико-технологических систем) позволило модернизировать основы производственного управления и повысить его эффективность.

В настоящее время значительно увеличились возможности по моделированию и анализу ХТС, расчетно-технологическому проектированию высокоэффективных энерго- и ресурсосберегающих технологий. Пакеты моделирующих программ (ПМП), такие как, HYSYS, PRO-II, ChemCad учитывают топологические особенности технологических систем, конструкционные особенности отдельных аппаратов, их размеры и типы, а также физико-химические способы проведения отдельных процессов, обладают большими библиотеками технологических модулей и удобным для пользователя интерфейсом. Их широко используют при проектировании новых ХТС и при реконструкции действующих.

В то же время, на определенном этапе совершенствования моделирующих автоматизированных систем управления было установлено, что наиболее перспективным направлением является реализация с помощью компьютера новых функций, прежде всего — функции оптимизации ХТС, т. е. достижения наилучших показателей (например, прибыли или приведенных затрат) при выполнении всех требуемых ограничений. Последние могут быть технологическими, экономическими, экологическими и регламентными. Например, ограничения по производительности ХТС, по качеству продукта, по выбросам в атмосферу и др.

Статическая оптимизация ХТС находит все более широкое применение и служит основой повышения конкурентоспособности производства в целом. Но динамическая оптимизация затруднена вплоть до настоящего времени. Основной причиной является наличие частичной неопределенности исходной информации — например, изменяющиеся параметры сырья и температура окружающей среды, некоторые коэффициенты в кинетических уравнениях или уравнениях тепло- и массопереноса, значения которых известны лишь с точностью до некоторого интервала. Вследствие этого требуются как новые математические постановки задач, так и новые методы их решения. Именно учет неопределенностей позволяет получить модель «гибкой» ХТС, оперативно реагирующей на текущие возмущающие воздействия.

В рамках гранта ГОУ ВПО УГНТУ «Современные образовательные технологии для формирования компетенций выпускника вуза» проведены исследования по оптимизации ХТС в условиях неопределенности исходной информации с учетом устойчивости стационарного режима, оптимизации ХТС с одновременным (оптимальным) выбором системы управления, на основе которых разрабатываются алгоритмы для программной реализации.

Р. Р. Мавлютов (Уфа, ГОУ ВПО УГНТУ)**. Особенности концептуальной модели автоматического анализа текста.**

В данной работе предлагается новая технология, обеспечивающая более эффективную обработку массивов технических текстов на основе достижения технической, программной, информационной и методологической совместимости. Данная технология предусматривает обработку данных в модели клиент/сервер, хранение данных, формирование базы знаний, выполнение приложений, т. е. выборка и обработка данных для нужд прикладной задачи, а также представление данных и результатов обработки конечному пользователю.

Автоматический анализ текста начинается с его первичной обработки. В задачи этого этапа входит фрагментация и графематический анализ потока символов, которым изначально является текст.

Первичный анализ текста содержит много подводных камней и, как всякий лингвистический алгоритм, представляет собой довольно сложный и громоздкий механизм. Для решения подобных задач традиционные методы алгоритмизации и программирования оказываются малоэффективными. Результаты работы программы сильно зависят от особенностей текста. При попытке усложнения поставленных задач число условий (различных возможных ситуаций) начинает возрастать в геометрической прогрессии, алгоритм становится перегруженным, сложным для восприятия и отладки. Растет число ошибок. В такой ситуации целесообразно применение методов экспертных систем.

Имеющиеся знания об особенностях организации текста представляются в виде набора продукционных правил, а процесс первичной обработки осуществляется методом построения дерева решений. Число продукционных правил можно изменять в широких масштабах в зависимости от поставленной задачи и особенностей текста.

Применяется объектная модель, где объект имеет свое название, описание и набор характерных черт, по которым его можно идентифицировать в тексте. Последовательности символов, подошедшие под описание объекта, помечаются его именем. Фрагменты текста, не подошедшие по описанию ни к одному объекту, не включаются в результаты анализа. Таким образом, объектная модель представляет собой совокупность понятий, объединенных иерархическими связями. Понятие или объект представляет собой ярлык, которым могут быть помечены отдельные участки текста. Эти ярлыки характеризуют ту информацию, которая была получена в результате анализа. Объектная модель является чем-то вроде спецификации, в которой описывается, какие элементы будут присутствовать в результатах анализа, что они должны означать для пользователя, и как они будут структурированы.

Данная методика не была бы достаточно эффективной, если бы не две ее особенности: допущение многозначности и иерархические обобщения. Это обусловлено следующими причинами. Одной из главных проблем при анализе технических текстов является неоднозначность. Определенная последовательность символов может подходить под разные шаблоны, которые в итоге определяют разные единицы текста вышележащих уровней.

На каждом уровне анализа единицы текста классифицированы по их смысловой нагрузке и роли в тексте. Классификация представляет собой иерархическую систему каталогов (групп), по которым распределены единицы текста. Корневой группой является понятие единица текста. Она разбита на подгруппы, элементы которых объединены по общим характерным признакам. Единица текста, находящаяся в определенном месте иерархии обладает признаками всех каталогов, в которые она вложена. Анализатор представляет собой программу, которая, двигаясь по последовательности единиц текста определенного уровня, формирует следующий уровень. Принятие решения осуществляется исходя из имеющейся совокупности шаблонов данного уровня в рабочей объектной модели. На каждом этапе своего движения анализатор рассматривает некоторую область уровня на соответствие имеющимся шаблонам. Область

исследования постоянно меняет свое расположение и размеры. После того как анализатор сформировал все уровни текстовых единиц, в работу вступает парсер. Эта программа, которая, двигаясь по верхнему уровню, составляет результирующий отчет согласно требованиям, установленным в объектной модели результатов анализа.

Разработанная экспертная система позволяет извлекать максимум информации из массивов технических текстов. Архитектурные особенности системы позволяют быстро изменять глубину обработки текста и тип извлекаемой информации путем смены набора продукционных правил.

Р. З. Камалян, С. Р. Камалян (Краснодар, ИМСИТ, КубГУ). **К проблеме бесконечности энергии в модели идеальной несжимаемой жидкости.**

Светлой памяти
Владимира Михайловича Кузнецова
посвящается

Для идеальной несжимаемой жидкости в условиях цилиндрической симметрии и отсутствия движения вдоль оси симметрии поле скоростей вследствие уравнения неразрывности $\partial v/\partial r - v/r = 0$ имеет вид

$$v = f(t)/r, \tag{1}$$

где r — расстояние от оси, $f(t)$ — функция времени.

Если попытаться рассмотреть радиальное расширение газового пузыря в жидкости, занимающей всю плоскость, то оказывается, что кинетическая энергия

$$E_k = \rho \int_a^\infty v^2 \pi r \, dr \tag{2}$$

(a — радиус пузыря, ρ — плотность жидкости) равна бесконечности. Это обстоятельство является причиной многочисленных затруднений, связанных с применением модели идеальной несжимаемой жидкости в различных прикладных задачах и, в частности, в задачах, связанных с исследованием взрыва бесконечно длинных (шнуровых) зарядов ВВ [1].

Известно, что теоретические решения для случая сферической симметрии дают хорошее совпадение с экспериментами [1]. Поэтому невозможность распространения результатов на случай цилиндрической симметрии многим экспериментаторам представляется парадоксальной.

Парадокс связан с особенностью модели идеальной несжимаемой жидкости, которая не учитывает реальные процессы, связанные с деформацией среды и диссипацией энергии заряда.

Пусть заряд цилиндрической симметрии длиной $2l_0$ имеет радиус r_0. Очевидно, что каждый элемент такого заряда можно рассматривать как точечный источник, потенциал которого при $r = r_0$ равен [1]:

$$\varphi = P/\rho, \tag{3}$$

где $P = \lim_{p\to\infty,\,\tau\to 0} \int_0^\tau p \, dt$ есть импульсное давление.

Пусть течение происходит в кольце $r_0 \leqslant r \leqslant R_0$, тогда (3) можно записать так:

$$\varphi = -\frac{P}{\rho} \frac{\ln(r/R_0)}{\ln(r_0/R_0)}. \tag{4}$$

Действительно, $\varphi = -P/\rho$ при $r = r_0$, а $\varphi = 0$ при $r = R_0$. Из (4) для скорости течения получаем

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{P}{\rho} \frac{1}{\ln(r_0/R_0)} \frac{1}{r}. \tag{5}$$

С учетом (5) найдем кинетическую энергию по формуле (2), заменив в ней ∞ на R_0:

$$E = \pi\rho \int_{r_0}^{R_0} \frac{P^2}{\rho^2} \frac{1}{\ln^2(r_0/R_0)} \frac{1}{r^2} r \, dr = \frac{\pi P^2}{\rho} [\ln(R_0/r_0)]^{-1}. \tag{6}$$

Из (6) видно, что конечность энергии связана с отношением R_0/r_0. Если длина заряда $2l_0$ будет равна радиусу кольца R_0, то энергия станет конечной при условии конечности l_0/r_0. На практике длина заряда всегда конечна и даже при очень

больших значениях $2l_0$ ограничение на длину заряда накладывается конечностью скорости детонации D.

Таким образом, парадокс бесконечности энергии с физической точки зрения разрешен. Можно пользоваться представлениями о потенциале плоского источника в смысле определения поля скоростей и других величин, не обращая внимания на формальную расходимость интеграла (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов В. М.* Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, 1972, 262 с.

А. В. Карабанов, **А. В. Калинкин** (Москва, МГТУ). **К вопросу о бесконечности и природе числа.**

Натуральный ряд чисел, порождающий сколь угодно много направлений (равно как одно или два направления, влево, вправо от нуля), каждому направлению либо не может поставить предел, либо может поставить предел [1]. Для того чтобы разобраться в этой коллизии, необходимо выяснить природу числа, для этого необходимо выйти из поля действия логики вытекающей из оснований математики и пользоваться логикой вытекающей из оснований системной проекции отображения [2].

С точки зрения системной проекции отображения, числа — это математические символы означающие собой безвекторную метрику, находящуюся в основаниях математики, не имеющие действительного своего бытия [3]. Безвекторная метрика как конструктивный элемент математики возник в результате отделения метрики от действительного метрического вектора с целью означения ею пропорции которую порождает действительный метрический вектор. Если этого не было бы сделано при возникновении цивилизаций, то не были бы получены элементы означения пропорции которую порождает действительный вектор, это значит, что не возникла бы математика не имея их в своих основаниях, потому что невозможно никакими иными элементами означения адекватно означить метрический вектор, не означая порожденную им пропорцию (метрику). Такое обстоятельство обусловило возникновение математики. Бесконечность же является конструктивным элементом иной дисциплины, а именно системной проекции отображения, являясь ее элементом означения входящим в ее основания, которым означен действительный вектор, порождающий пропорцию, который не разделен на антиномы безвекторную метрику и неметрический вектор. Но математика, с помощью логики вытекающей из ее оснований, принципиально не может разобраться в этих коллизиях, разобраться в которых становиться возможным с помощью логики, вытекающей из оснований системной проекции отображения.

Предположим, что натуральный ряд чисел, представляющий собой безвекторную метрику порождает направления, но это нонсенс, это противоречит ее определению безвекторной; возникающий парадокс запрещает такое действие, с точки зрения системной проекции отображения это бессмысленное действие. Отсюда вывод — безвекторная метрика — натуральный ряд чисел порождать направления не может, поэтому ставить вопрос имеет натуральный ряд чисел свой предел или не имеет бессмысленно. Но если выйти из поля действия логики системной проекции отображения и вернуться в поле действия логики математической проекции отображения и представить числа метрикой, порождающей направления, тогда любое сколь угодно большое конечное число не может поставить предел натуральному ряду чисел (потому что к любому сколь угодно большому конечному числу можно прибавить единицу), и если, бесконечность с точки зрения логики математической проекции отображения представляет собой число порождающее бесконечность своего направления, то это нонсенс, бесконечность не может быть порожденной, одна самостоятельная субстанция не может породить другую, отсюда следует, что бесконечность не может быть числом (безвекторной метрикой), а значит не может быть категорией математики, математической проекцией отображения и входить в ее основания.

Возвращаясь в поле действия системной проекции отображения, вытекающего из ее оснований, представляем, что бесконечность — это действительный метрический вектор порождающий пропорцию (которая сама по себе без вектора не имеет своего действительного самостоятельного субстанционального бытия) действием которой связаны два его направления — конечное и бесконечное, из-за чего вектор имеет свое действительное бытие. Отделенная от действительного вектора метрика и ее антином неметрический вектор лежащие в основаниях математики не имеют своего действительного бытия.

Число, являясь безвекторной метрикой, не может быть творцом своего действительного бытия; не понимая его природы, путаясь в возникающих парадоксах, начи-

ная от Пифагора и его последователей и до настоящего времени в сознании некоторых исследователей возникает коллапс с утратой здравого смысла, когда происходит обожествление числа, наделение его самостоятельной субстанцией и действительным бытием — порождение космических и божественных математик с мистериями мировых разумов не имеющих отношения к действительности. Так безвекторная метрика, равно так же, как и неметрический вектор порождают математические иллюзии своего действительного бытия, если их используют не как элемент означения не имеющий субстанциональной самостоятельности, а как сущностную ипостась, имеющую субстанциональную самостоятельность (иллюзии, приводящие к утрате здравого смысла). Если не пользоваться логикой системной проекции отображения, или отсутствия таковой, математика, математическая проекция отображения сползает в схоластику и порождает иллюзии при объяснении действительного мира.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Китчер Ф.*, *Перминов В. Я.*, *Федоров Б. И. и др.* Методологический анализ оснований математики. М.: Наука, 1988, 175 с.
2. Проблемно-ориентированный подход к науке: Философия математики как концептуальный прагматизм./ Под ред. В. В. Целищева. Новосибирск: Наука, 2001, 109 с.
3. *Карабанов А. В.* Природа математического и системного отображения. М.: 2008, 46 с. (рукопись)

В.Я.Хорольский, **С.Г.Ковалевский** (Ставрополь, СВИС РВ).
Теоретические и экспериментальные исследования динамических режимов работы элементов систем бесперебойного электроснабжения информационно-вычислительных центров.

Эффективность функционирования информационно-вычислительных центров (ИВЦ) существенно зависит от бесперебойности электроснабжения.

Всесторонний анализ организации электроснабжения ИВЦ показал, что государственные сети не в состоянии обеспечить непрерывное электроснабжение аппаратуры, и она нуждается в использовании систем бесперебойного электроснабжения (СБЭ).

Проверка выходных параметров систем электроснабжения ИВЦ обычно проводится путем наброса 100% нагрузки в процессе проведения автономных и комплексных испытаний таких объектов при принятии их в эксплуатацию. Это приводит к возникновению динамических режимов и появлению провалов напряжения.

Представляет значительный интерес задача по оценке выходных характеристик СБЭ при ее проектировании. Такая задача может быть решена с использованием моделирования, при наличии математического описания динамических характеристик отдельных элементов СБЭ.

К сожалению, в технической литературе отсутствует в достаточном объеме материал по данной проблематике. К этому необходимо добавить появление в СБЭ новых источников питания литиевых источников и герметичных кислотных аккумуляторных батарей, недостаточно изученных в указанных режимах работы.

Так как большинство элементов СБЭ являются регулируемыми, при исследовании динамических характеристик необходимо использовать подход, базирующийся на использовании теории автоматического регулирования.

Теоретические и экспериментальные исследования динамических характеристик элементов СБЭ сопоставлялись по внешнему виду с кривыми для типовых звеньев систем автоматического регулирования. Установлено следующее.

1) Дизель-генераторные установки описываются реальным дифференцирующим типовым звеном автоматического регулирования.

2) Химические источники тока и импульсные стабилизаторы напряжения описываются интегро-дифференцирующим типовым звеном автоматического регулирования.

3) Выпрямительные устройства описываются колебательным типовым звеном автоматического регулирования.

4) Инверторы описываются апериодическим типовым звеном автоматического регулирования.

Полученные математические описания отдельных элементов СБЭ типовыми звеньями автоматического регулирования позволяют перейти к составлению различных вариантов построения СБЭ в целом и моделированию их динамических режимов.

А. В. Колногоров (Великий Новгород, НовГУ)**. Нахождение минимаксных стратегии и риска в задаче о двуруком бандите с нормально распределенными доходами.**

Рассматривается задача о двуруком бандите на конечном отрезке времени длины N. Предполагается, что текущие доходы ξ_n, $n = 1, \ldots, N$, имеют нормальные распределения с плотностями $f(x|m_\ell) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-(x - m_\ell)^2/2\}$, где m_ℓ соответствует текущему выбранному варианту ($\ell = 1, 2$). Такой двурукий бандит характеризуется неизвестным векторным параметром $\theta = (m_1, m_2)$, для которого, однако, известно множество допустимых значений $\Theta = \{\theta\colon\ |m_1 - m_2| \leqslant c_1,\ |m_1 + m_2| \leqslant c_2\}$, где $0 < c_1 < \infty$, $0 < c_2 < \infty$, причем c_2 предполагается достаточно большим. Для управления применяется стратегия σ, которая может использовать всю известную предысторию (X_1, n_1, X_2, n_2) к текущему моменту времени $n = n_1 + n_2$, где n_1, n_2 характеризуют суммарные применения обоих вариантов, а X_1, X_2 — соответствующие полные доходы. Функция потерь, обусловленная неполнотой информации о процессе, имеет вид $L_N(\sigma, \theta) = E_{\sigma,\theta} \sum_{n=1}^{N} ((m_1 \vee m_2) - \xi_n)$. Байесовский и минимаксный риски определяется как

$$R_N^B(\lambda) = \min_{\{\sigma\}} \int_\Theta L_N(\sigma, \theta)\lambda(\theta)\, d\theta, \quad R_N^M(\lambda) = \min_{\{\sigma\}} \max_\Theta L_N(\sigma, \theta),$$

им соответствуют байесовская и минимаксная стратегии. Из основной теоремы теории игр следует, что минимаксные стратегия и риск совпадают с байесовскими на наихудшем априорном распределении, соответствующем максимуму байесовского риска.

Как показано в [1], асимптотически наихудшая априорная плотность распределения обладает свойствами симметричности и асимптотической однородности. В переменных $u = (m_1 + m_2)/2$, $v = (m_1 - m_2)/2$, она может быть выбрана в виде $\lambda_a(u, v) = \kappa_a(u)\rho(v)$, где $\kappa_a(u)$ — постоянная плотность на отрезке $|u| \leqslant a$, $\rho(v)$ — симметрическая плотность (т. е. $\rho(-v) = \rho(v)$) на отрезке $|v| \leqslant c_1$ и a достаточно велико. Байесовская стратегия на первых двух шагах применяет варианты по очереди. Далее она определяется рекуррентно «с конца», т. е. надо вычислять риски $R_{n_1,n_2}(Z) = \min\{R^{(1)}_{n_1,n_2}(Z), R^{(2)}_{n_1,n_2}(Z)\}$, где $Z = X_1 n_2 - X_2 n_1$. Текущим оптимальным является ℓ-й вариант, если $R^{(\ell)}_{n_1,n_2}(Z)$ имеет меньшее значение. Здесь $R^{(1)}_{n_1,n_2}(Z) = R^{(2)}_{n_1,n_2}(Z) = 0$ при $n_1 + n_2 = N$ и далее

$$R^{(1)}_{n_1,n_2}(Z) = \int_0^\infty 2v g_{n_1,n_2}(Z, v)\rho(v)\, dv + \frac{1}{n_2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n_1+1,n_2}(Z + z) h_{n_1}\left(\frac{Z - n_1 z}{n_2}\right) dz,$$

$$R^{(2)}_{n_1,n_2}(Z) = \int_0^\infty 2v g_{n_1,n_2}(Z, -v)\rho(v)\, dv + \frac{1}{n_1} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n_1,n_2+1}(Z + z) h_{n_2}\left(\frac{Z - n_2 z}{n_1}\right) dz,$$

при $n_1 + n_2 < N$, $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$. Функции $g_{n_1,n_2}(Z, v)$, $h_n(z)$ равны

$$g_{n_1,n_2}(Z, v) = \exp\left\{ - \frac{(Z + 2vn_1n_2)^2}{2n_1n_2(n_1 + n_2)} \right\} (2\pi n_1 n_2 (n_1 + n_2))^{-1/2},$$

$$h_n(z) = \left(\frac{n + 1}{2\pi n}\right)^{1/2} \exp\left\{ - \frac{z^2}{2n(n + 1)} \right\}.$$

Тогда

$$\lim_{a\to\infty} R_N^B(\lambda_a(u, v)) = 4 \int_0^\infty v\rho(v)\, dv + \int_{-\infty}^{\infty} R_{1,1}(z)\, dz.$$

По этим формулам численная оптимизация проводилась в предположении, что плотность $\rho(v)$ сосредоточена в двух точках $v = \pm dN^{-1/2}$ с вероятностями 0,5.

Тогда наихудшее априорное распределение соответствует максимуму приведенного байесовского риска $r_N(d) = N^{-1/2} R_N^B(\cdot)$. При $N = 30, 50$ максимумы $r_N(d)$ по $d = 0,9,\ 1,1,\ \ldots,\ 5,5$ оказались приблизительно равными 0,66, 0,65 соответственно при $d = 1,7$. Для найденных стратегий затем вычислялись приведенные потери $l_N(d) = N^{-1/2} L_N(\cdot)$, которые также имели указанные максимумы при $d = 1,7$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колногоров А. В.* Свойства симметричности и асимптотической однородности «наихудшего» априорного распределения в задаче о двуруком бандите. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, с. 263–264.

Н. А. Колодий, **Т. И. Колодий** (Волгоград, ВолГУ, НИИГТП).
Вероятностная модель канцерогенеза для системмы из L органов.

Развитие теории канцерогеннеза является актуальной проблемой. Во многих из недавних работ на эту тему (см., например, [1], [2]) выделяют три основные стадии канцерогенеза: инициация клетки, промоция и прогрессия. Приведем одну из возможных стохастических моделей трехстадийного канцерогенеза, придерживаясь мнения, высказанного рядом исследователей, что с некоторыми ненулевыми вероятностями нормальные клетки могут непосредственно превращаться в инициированные и опухолевые клетки, инициированные могут превращаться в опухолевые и злокачественные, а опухолевые могут превращаться в злокачественные.

Предположим, что имеется система из L органов, содержащая нормальные клетки I_0, клетки первой и второй стадии развития канцерогенеза I_1 и I_2, и злокачественные клетки I_3. Для $j = 0, 1, 2, 3$ случайный процесс $(I_{j,i})_{t\geqslant 0}$ описывает количество I_j-клеток в i-органе.

Опираясь на описание процесса трехстадийного канцерогенеза работы [1] и применяя предельные теоремы теории случайных процессов, получаем, что существует вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ и такие $(cF_t)_{t\geqslant 0}$-согласованные непрерывные случайные процессы $(I_{j,i})_{t\geqslant 0}$ и независимые стандартные $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$-винеровские процессы $w_{1,k}, w_{2,k}, \ldots, w_{9,k}$, что $(I_{j,i})_{t\geqslant 0}$ удовлетворяют системе стохастических дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
dD_k(t) &= A_k(t,C)dt - \sum_{j=1}^{L} \lambda_{k,j}(t,C)D_k(t)\,dt + \sum_{j=1,\, j\neq k} \lambda_{k,j}(t,C)D_j(t)\,dt \\
&\quad + \sigma(t,C)D_k(t)\,dw_k(t), \\
dI_{0,k}(t) &= \Lambda_0(t,D_k)I_{0,k}(t)\,dt + \sqrt{I_{0,k}(t)}\Big(\sqrt{(\beta_0^{(k)} + \delta_0^{(k)})(t,D_k)}\,dw_{1,k}(t) \\
&\quad + \sqrt{\alpha_{0,1}^{(k)}(t,D_k)}\,dw_{2,k}(t) + \sqrt{\alpha_{0,2}^{(k)}(t,D_k)}\,dw_{3,k}(t)\Big), \\
dI_{1,k}(t) &= \alpha_{0,1}^{(k)}(t,D_k)I_{0,k}(t)\,dt + \Lambda_1(t,D_k)I_{1,k}(t)\,dt - \sqrt{\alpha_{0,1}^{(k)}(t,D_k)}\sqrt{I_{0,k}(t)}dw_{2,k}(t) \\
&\quad + \sqrt{I_{1,k}(t)}\Big(\sqrt{(\beta_1^{(k)} + \delta_1^{(k)})(t,D_k)}\,dw_{4,k}(t) + \sqrt{\alpha_{1,2}^{(k)}(t,D_k)}\,dw_{5,k}(t) \\
&\quad + \sqrt{\alpha_{1,3}^{(k)}(t,D_k)}dw_{6,k}(t)\Big), \\
dI_{2,k}(t) &= \alpha_{0,2}^{(k)}(t,D_k)I_{0,k}(t)\,dt + \alpha_{1,2}^{(k)}(t,D_k)I_{1,k}(t)\,dt + \Lambda_2(t,D_k)I_{2,k}(t)\,dt \\
&\quad - \sqrt{\alpha_{0,2}^{(k)}(t,D_k)}\sqrt{I_{0,k}(t)}dw_{3,k}(t) + \sqrt{\alpha_{1,2}^{(k)}(t,D_k)}\sqrt{I_{1,k}(t)}\,dw_{5,k}(t) \\
&\quad + \sqrt{I_{2,k}(t)}\Big(\sqrt{(\beta_2^{(k)} + \delta_2^{(k)})(t,D_k)}\,dw_{7,k}(t) + \sqrt{\alpha_{2,3}^{(k)}(t,D_k)}\,dw_{8,k}(t)\Big), \\
dI_{3,k}(t) &= \alpha_{1,3}^{(k)}(t,D_k)I_{1,k}(t)\,dt + \alpha_{2,3}^{(k)}(t,D_k)I_{2,k}(t)\,dt + \Lambda_3(t,D_k)I_{3,k}(t)\,dt \\
&\quad - \sqrt{\alpha_{1,3}^{(k)}(t,D_k)}\sqrt{I_{1,k}(t)}\,dw_{6,k}(t) - \sqrt{\alpha_{2,3}^{(k)}(t,D_k)}\sqrt{I_{2,k}(t)}\,dw_{8,k}(t) \\
&\quad + \sqrt{I_{3,k}(t)}\sqrt{(\beta_3^{(k)} + \delta_3^{(k)})(t,D_k)}\,dw_{9,k}(t).
\end{aligned}
$$

В докладе излагаются методы точечного оценивания и байесовского оценивания параметров модели при полных и частичных наблюдениях в дискретные моменты времени.

Работа выполнена при поддержке Международного научно-технического центра, проект № 3476.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chao C.* A unified modelling approach: from source of exposure to disease endpoints. — In: Quantitative Methods in Cancer and Human Health Risk Assessement, Ch. 9. Toronto: Wiley & Sons, LTD, 2005, p. 137–160.
2. *Sarcar R. R.*, *Benerjee S.* Cancer self remission and tumor stability — a stochastic approach. — Math. Biosci., 2005, v. 196, p. 65–81.

С. А. К о р н и е н к о (Ставрополь, СевКавГТУ). **Проблемы оценки технико-экономической эффективности построения систем радиоконтроля.**

Создание эффективной системы радиоконтроля (СРК) является актуальной задачей [1]. Разделяют две основные и взаимосвязанные составляющие эффективности — техническую (Т) и экономическую (Э) (технико-экономическую (ТЭ)). Всегда имеется в виду степень соответствия выполняемых системой функций и показателей расходуемых ресурсов — Т и Э. ТЭ критерий для оценки эффективности построения СРК должен учитывать затраты ресурсов на достижение требуемых или реализуемых показателей качества, либо указывать правило оптимизации этих показателей при заданных затратах. При выборе ставится минимаксная задача. На практике Т требования к СРК в большинстве случаев подчинены требованиям к ее Э эффективности. Существуют разные подходы к построению критерия эффективности. Э составляющую эффективности необходимо трансформировать в приведенные годовые затраты, состоящие из текущих, эксплуатационных затрат $C_э$ и стоимости создания системы, отнесенной к одному году с учетом временных нормативов окупаемости $T_{ок}$: Э$= C_э + C_\Sigma(1/T_{ок})$. Функцию ТЭ эффективности запишем выражением [2]:

$$\Phi(Q_э, C_\Sigma) = F(Q_э)/C_\Sigma, \tag{1}$$

где $F(Q_э)$ — обобщенный показатель Т эффективности, не зависящий от стоимости при анализе системы, до принятия проектных решений. Главным условием обеспечения ТЭ эффективности СРК является максимальное использование Т характеристик по компонентам системы. Сочетание Т решений, заложенных в СРК и ее Э показатели, определяют конкурентоспособность системы. Поэтому ТЭ эффективность является общей характеристикой и определяется как Т параметрами, так и задачами, стоящими перед СРК. Э эффективность связана с затратами на проектирование, производство, доставку, монтаж, обслуживание и эксплуатацию СРК и тем «невидимым» доходом, который дает ее использование. Из (1) следует что, в целом, реализуемая и потенциальная эффективность (качество СРК) определяются: 1) затратами ресурсов, используемых для ее создания; 2) полезностью результатов применения. При этом многое зависит от Т и технологических решений во взаимосвязи с общесистемными и аппаратурными параметрами. Поскольку возможности использования большинства любых ресурсов связаны с Э затратами, главным количественным критерием чаще всего является сочетание Т и Э показателей эффективности. Основным выражением этого критерия применительно к СРК считается полученный полезный эффект от работы СРК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корниенко С.А.* Применение системного анализа при оценке структурной сложности служб радиоконтроля. Воронеж: Информационные технологии моделирования и управления, 2007, 160 с.
2. *Антушев Г.С.* Методы параметрического синтеза сложных технических систем. М.: Наука, 1989, 88 с.

С. А. Корниенко (Ставрополь, СевКавГТУ). **Алгоритм оценки весовых коэффициентов для обобщенного количественного анализа эффективности сложных систем радиоконтроля.**

Сравнение СРК на основе обобщенных количественных оценок зависит от выбора весовых коэффициентов параметров. При выборе весовых коэффициентов неизбежна доля субъективности, связанная с неоднозначным определением полезности и важности параметров. Показатель эффективности СРК — R зависит от групп параметров. Можно выделить несколько групп: технические, эксплуатационные, информационные, экономические, временные, социальные — $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и параметров воздействия внешней среды — $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Эффективность СРК запишем:

$$R = R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \ldots, \beta_m). \tag{1}$$

В [1], определены коэффициенты характеризующие показатели качества систем, представлен вектор отдельных показателей, показано, что в качестве лучшего значения вектора принимают максимум взвешенной суммы. Существуют методы объективной оценки субъективными средствами: 1) экспертный опрос; 2) количественная оценка параметров; 3) по степени важности; 4) метод последовательных сравнений; 5) метод парных сравнений. При сравнении СРК одинаковые по величине параметры не несут информацию о предпочтительности той или иной системы. Параметры влияют на результат сравнения, когда между ними наибольшие отличия. Для определения важности групп параметров проведем экспертный опрос, и расчеты, в следующей последовательности: а) проведем нормирование оценок, б) найдем средние значения весовых коэффициентов по каждой группе, в) определим среднеквадратические отклонения весовых коэффициентов, г) вычислим коэффициенты вариации и сделаем выводы о согласованности мнений экспертов по параметрам $\overline{\beta}_i; \sigma_i; \upsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ для оценки согласованности показателей перейдем от таблицы оценок в баллах к матрице рангов, е) вычислим суммы совпадающих рангов, установленных каждым экспертом, ж) найдем общую сумму совпадающих рангов, з) определим суммы рангов, назначенных экспертами, и) определим среднее значение сумм рангов по группам, к) вычислим квадратичные отклонения сумм рангов от их среднего значения, л) вычислим сумму квадратичных отклонений, м) определим коэффициент конкорнации, н) определим величину χ^2, о) определим число степеней свободы. По указанной методике, можно провести оценку анализируемых групп параметров или отдельных параметров СРК, при этом рассчитывая функции потерь можно установить предельные возможности объективного сравнения предлагаемых СРК, а при экспертном опросе учесть лишь специфические требования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Окунев Ю. Б., Плотников В. Г.* Принципы системного подхода к проектированию в технике связи. М.: Связь, 1976.
2. *Корниенко С. А.* Задача выбора не худшей системы радиоконтроля с использованием основных методов векторной оптимизации. — НТЖ «Информационные технологии моделирования и управления». Выпуск 5,48, Воронеж, 2008.

А. В. Кочулимов, В. Л. Леонтьев (Ульяновск, УлГУ). **О повышении точности аппроксимации ортогональными финитными функциями второй степени на треугольных сетках.**

Рассматриваются ортогональные финитные функции (ОФФ) второй степени, связанные с треугольными сетками и построенные по методике, описанной в [1]. Совокупность наборов таких ОФФ, определенных на последовательности сгущающихся треугольных сеток, образует базисную систему функций в пространстве Соболева. Постоянные величины I_n, J_n $(n = 1, 2, 3, 4)$, являющиеся в [1] коэффициентами дополнительных финитных функций второй степени, модифицирующих классические финитные функции второй степени на треугольных сетках с целью формирования у них свойства взаимной ортогональности на каждой конкретной сетке, здесь имеют другие значения:

$$I_1 = \frac{9}{40} + \frac{4\sqrt{7}}{9} - \frac{\sqrt{105}}{15} - \frac{\sqrt{-21887 + 2256\sqrt{105}}}{360} \approx -0,670,$$
$$I_2 = \frac{127}{120} - \frac{\sqrt{105}}{15} + \frac{\sqrt{-21887 + 2256\sqrt{105}}}{360} \approx -0,668,$$
$$I_3 = I_4 = \frac{127}{120} - \frac{2\sqrt{7}}{9} + \frac{\sqrt{15}}{6} - \frac{\sqrt{105}}{15} - \frac{\sqrt{-21887 + 2256\sqrt{105}}}{360} \approx 0,335,$$
$$J_1 = -\frac{9}{40} - \frac{4\sqrt{7}}{9} - \frac{\sqrt{15}}{6} + \frac{\sqrt{105}}{15} + \frac{\sqrt{-21887 + 2256\sqrt{105}}}{360} \approx -1,911, \quad J_2 = -I_2,$$
$$J_3 = J_4 = \frac{127}{120} + \frac{2\sqrt{7}}{9} + \frac{\sqrt{15}}{6} + \frac{\sqrt{105}}{15} + \frac{\sqrt{-21887 + 2256\sqrt{105}}}{360} \approx 0,956,$$

которые определяются вещественным решением системы уравнений (3)–(4), описанной в [1] и дополненной здесь условиями $I_3 = I_4$, $J_3 = J_4$, выбор которых обусловлен симметричностью классических финитных функций, построенных в узлах P_3 и P_5, P_2 и P_6 треугольной части конечного носителя ОФФ [1]. Для ОФФ с такими коэффициентами доказана теорема об аппроксимирующих свойствах, формулировка и доказательство которой аналогичны формулировке и доказательству теоремы [2], но при этом величина $A = 7,2$, входящая в правую часть оценки точности аппроксимации в теореме [2], в последней теореме за счет выбора указанных здесь значений I_n, J_n равна

$$A = \frac{8451 - 800\sqrt{21} - 264\sqrt{105} + 5\sqrt{-21887 + 2256\sqrt{105}}}{1080} \approx 3,52.$$

Уменьшение величины A более, чем в 2 раза означает существенное увеличение точности аппроксимации, которое подтвердилось в численных расчетах.

Работа выполнена при поддержке АВЦП МОиН РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (НИР 1.3.08), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» ГК № П1122.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев В. Л., Кочулимов А. В.* Действительные ортогональные финитные функции второй степени на треугольных сетках. — В сб.: Труды международной конференции по логике, информатике, науковедению КЛИН-2007 (Ульяновск, 17–18.05.2007), т. 4. Ульяновск: УлГТУ, 2007, с. 163–168.
2. *Кочулимов А. В., Леонтьев В. Л.* Ортогональные финитные функции второй степени на треугольных сетках и их применение в геометрических моделях. — Труды Средневолжского математического общества, 2008, т. 10, № 2, с. 126–129.

А. А. К р а с с а (Ставрополь, СевКавГТУ)**. Алгоритм подсчета пассажиров в общественном транспорте на основе «опорной линии».**

В данной работе предложен алгоритм для подсчета пассажиров в общественном транспорте с помощью обработки последовательности видеоизображений. Рассматриваемый алгоритм является развитием идей, предложенных в работе [1]. Охарактеризуем последовательность действий, выполняемых алгоритмом.

1. Захват изображения с видеокамеры, настроенной на входную внешнюю ступеньку входа в транспортное средство.

2. Предобработка изображения. Корректировка яркости и контрастности для повышения динамического диапазона изображения.

3. Построение опорной линии. Данный этап включает в себя выделение краев изображения (алгоритм Canny), выделение горизонтальных линий в области обработки (вероятностное преобразование Хафа) и построение на основе полученных данных «опорной линии».

4. Проверка наличия объекта. Анализ перекрытия «опорной линии» объектами интереса путем соотношения относительного изменения суммарной длины «опорной линии к средней длине «опорной линии».

5. Определение «оптического потока». Определение направления вектора движения и интенсивности движения с помощью алгоритма Лукаса–Кеннода.

6. Блок принятия решения на основе модели нечеткой логики по Сугене. В модель введено три лингвистические переменных: интенсивность движения, количество кадров, минимальная относительная длина опорной линии.

7. Проверка текущего состояния входной двери. Подсчет ведется только при открытой двери.

8. Сохранения данных подсчета для последующей отправки на сервер.

В результате тестов была достигнута точность подсчета 97% на 100 вошедших или вышедших пассажиров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Messoni A.*, *Bartolini F.*, *Cappelini V.* Image sequence analysis for counting in real time people getting in and out of a bus. Signal Processing, 1994, v. 35, p. 105-116.

В. В. Л а в р е н т ь е в (Москва, МГУ)**. О структуре банаховозначных семимартингалов.**

Пусть $(\mathbf{H}, \mathcal{B}(\mathbf{H}))$ — банахово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств (относительно сильной топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|$). Обозначим $\mathbf{H}^*$ пространство, сопряженное с $\mathbf{H}$, и $(h, h^*) = h^*(h)$, $h \in \mathbf{H}$, $h^* \in \mathbf{H}^*$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство с семейством σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$, удовлетворяющее обычным условиям полноты, неубывания и непрерывности справа. Пусть $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbf{H})$ — семимартингал, принимающий значения в банаховом пространстве $\mathbf{H}$, т. е. $X_t = X_0 + M_t + V_t$, где M — локальный мартингал $(\mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H}))$, V — процесс локально ограниченной вариации $(\mathcal{V}_{loc}(\mathbf{H}))$. Обозначим $\mu = \mu(dt, dx)$ целочисленную случайную меру скачков семимартингала X: $\mu((0,t], \Gamma) = \sum_{0<s\leqslant t} I\{\Delta X_s \in \Gamma\}$, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{H}\backslash\{0\})$.

Теорема. *Для семимартингалов, принимающих значения в сепарабельном банаховом пространстве со свойством Радона–Никодима (в частности, в рефлексивном пространстве), справедливо следующее разложение:*

$$X_t = X_0 + B_t^a + M_t^a + \int_0^t \int_{\|x\|>a} x\mu(ds, dx)$$

с предсказуемым процессом $B^a = (B_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbf{H})$ из класса процессов локально интегрируемой вариации $\mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$ и локально квадратично интегрируемым мартингалом $M^a \in \mathcal{M}_{loc}^2(\mathbf{H})$. В отличие от определения семимартингала, такое представление единственно.

Положим $X_t^a = X_0 + \sum_{s\leqslant t} \Delta X_s I\{\|\Delta X_s\| > a\}$ для некоторого $a > 0$, тогда $X^a = (X_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbf{H}) \in \mathcal{V}_{loc}(\mathbf{H})$, процесс $X - X^a$ также является семимартингалом и имеет ограниченные скачки. Более того, справедливо следующее утверждение, из которого следует существенная часть утверждений теоремы.

Лемма 1. *Пусть сепарабельное банахово пространство $\mathbf{H}$ имеет свойство Радона–Никодима, тогда процесс $X - X^a$ допускает представление $X - X^a = B^a + M^a$ с предсказуемым процессом $B^a = (B_t^a, \mathcal{F}_t; \mathbf{H})$ из класса процессов локально интегрируемой вариации $\mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$ и локально квадратично интегрируемым мартингалом $M^a \in M_{loc}^2(\mathbf{H})$. При этом $\|\Delta B_b^a\| \leqslant a$, $\|\Delta M_s^a\| \leqslant 2a$, $t \geqslant 0$ ($\mathbf{P}$-п. н.).*

Для доказательства последовательно проверяются следующие утверждения: a) $X - X^a = A^a + M^a$, где $A^a \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$, $M^a \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H})$; b) $X - X^a = B^a + M^a$, где B^a — предсказуемый процесс из класса $A_{loc}(\mathbf{H})$, $M^a \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H})$; c) $M^a \in \mathcal{M}_{loc}^2(\mathbf{H})$, $\|\Delta B_s^a\| \leqslant a$, $\|\Delta M_s^a\| \leqslant 2a$ ($\mathbf{P}$-п. н.

Для доказательства утверждения b) используется следующая лемма (см. [1]).

Лемма 2. *Если сепарабельное банахово пространство $\mathbf{H}$ имеет свойство Радона–Никодима, в частности, если $\mathbf{H}$ рефлексивно, то для процесса локально интегрируемой вариации A со значениями в $\mathbf{H}$ (т. е. $A \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$) существует и единственный (с точностью до неразличимости) такой предсказуемый процесс $A' \in \mathcal{A}_{loc}(\mathbf{H})$, называемый* компенсатором, *что $A - A' \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{H})$.*

Для завершения доказательства теоремы используются результаты работы [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pellaumail J.* Sur l'integrale stochastique et la decomposition de Doob–Meyer. — Paris: Soc. Math. France, 1973, 125 p. (Asterisque. 9).
2. *Гальчук Л. И.* Обобщение теоремы Гирсанова о замене меры на случай полумартингалов со скачками. — Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, в. 2, с. 279–294.

Ю. В. Мартыненко (Ульяновск, УлГУ). **Функция устойчивости метода вариационных сплайнов.**

Метод вариационных сплайнов (ВС) разработан для решения задачи Коши для дифференциально-алгебраических уравнений [1], [2]:

$$F(\dot{x}, x, t) = 0, \quad x(t_0) = x^0.$$

Важной характеристикой численных методов решения задачи Коши является их устойчивость, т. е. ограниченность погрешности приближенного решения $\{x_k\}$ при $k \to \infty$. Свойство устойчивости изучается на основе тестового уравнения Далквиста

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = 1, \qquad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Исследуемый метод применяется к решению (1) и записывается в виде $x_k = R(\lambda h)x_{k-1}$, где $R(\lambda h)$ называется *функцией устойчивости метода* и определяет его свойства [3].

Данная методика может быть применена к методу вариационных сплайнов. В работе [2] получена функция устойчивости метода в случае непрерывного сплайна 1-й степени. Доказано, что в этом случае метод вариационных сплайнов является A-устойчивым и не является L-устойчивым.

Рассмотрим возможность исследования устойчивости метода ВС для непрерывного сплайна произвольной степени s. Применяя метод к задаче (1) на равномерной сетке, получаем

$$x_{k+1} = v_0^k + (t_{k+1} - t_k)v_1^k + \cdots + (t_{k+1} - t_k)^s v_s^k = v_0^k + hv_1^k + \cdots + h^s v_s^k.$$

Значения $\{v_j^k\}_{j=1,\ldots,s}$ могут быть получены решением соответствующей системы линейных уравнений [2] по формулам Крамера: $v_j^k = h^{-j} v_0^k Pj(\lambda h)/Q(\lambda h)$, где $Pj(\lambda h)$ и $Q(\lambda h)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степени $2s - j$ и $2s$ соответственно.

Тогда

$$x_{k+1} = v_0^k + h\, h^{-1}\, v_0^k \frac{P_1(\lambda h)}{Q(\lambda h)} + \cdots + h^s\, h^{-s}\, v_0^k \frac{Ps(\lambda h)}{Q(\lambda h)}.$$

В силу непрерывности сплайна $v_0^k \equiv x_k$, поэтому окончательно получаем

$$x_{k+1} = \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{Pj(\lambda h)}{Q(\lambda h)} + 1 \right) x_k = R(\lambda h)x_k.$$

Таким образом, для непрерывного сплайна произвольной степени s функция устойчивости является рациональной функцией с вещественными коэффициентами над полем комплексных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбунов В. К.*, *Мартыненко Ю. В.* Метод вариационных сплайнов для сингулярных дифференциальных уравнений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 461–462.
2. *Мартыненко Ю. В.* Метод вариационных сплайнов для дифференциальных уравнений в нормальной форме. — Труды Средневолжского математического общества. Саранск: СВМО, 2007, т. 9, в. 2, с. 110–120.
3. *Хайрер Э.*, *Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

О. П. Матвеева, Т. Г. Сукачева (Великий Новгород, НовГУ).
Задача Тейлора для модели несжимаемой вязкоупругой жидкости ненулевого порядка.

Для модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта порядка $k > 0$ [1] рассматривается задача Тейлора

$$\begin{cases} (1 - \varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\,\nabla)\widetilde{v} - (\widetilde{v}\,\nabla)v - (v\,\nabla)v + \sum_{l=1}^{k} \beta_l \nabla^2 w_l - \nabla p, \\ 0 = \nabla\, v, \quad \dfrac{\partial w_l}{\partial t} = v + \alpha_l w_l, \qquad \alpha_l \in \mathbf{R}_-, \quad l = 1, \ldots, k, \end{cases} \tag{1}$$

с начально-краевыми условиями

$$\begin{cases} v(x,0) = v_0(x), \quad w_l(x,0) = w_l(x) \quad \forall\, x \in \Omega, \\ v(x,t) = 0, \quad w_l(x,t) = 0 \quad \forall\, (x,t) \in \partial_2\Omega, \\ v(x,t),\ w_l(x,t) \text{ удовлетворяют условию периодичности на } \partial_1\Omega \times \mathbf{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3, 4)$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\widetilde{v} = \widetilde{v}(x)$, $\widetilde{w}_l = \widetilde{w}_l(x)$ — некоторое стационарное решение исходной системы [1], удовлетворяющее на $\partial_1\Omega$ условию периодичности, а на $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$ неоднородным условиям Дирихле (например, течение Куэтта). Исследуется динамика отклонения $v = v(x,t)$, $w_l = w_l(x,t)$ от этого стационарного решения, вызванного начальным условием. Разрешимость задачи (1)–(2) изучается в рамках теории полулинейных уравнений соболевского типа [2]. Ранее задача Тейлора для модели нулевого порядка изучалась в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта. — Труды МИ АН СССР, 1988, № 179, с. 126–164.
2. *Сукачева Т. Г.* Исследование математических моделей несжимаемых вязкоупругих жидкостей. Дис. на соискание уч. ст. доктора физ.-матем. наук. Великий Новгород: НовГУ, 2004, 249 с.
3. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Задача Коши дляя одного класса полулинейных уравнений типа Соболева. — Сиб. матем. журнал, 1990, т. 31, № 5, с. 109–119.

В. В. Подколзин (Краснодар, КубГУ)**. Построение инъективного рюкзачного вектора для заданного множества значений на основе вариации.**

Одним из способов криптоанализа рюкзачных систем защиты информации является поиск рюкзачного вектора на основе известных шифровых значений. Очевидно, что при поиске рюкзачного вектора путем решения системы линейных уравнений количество возможных решений определяется, прежде всего, количеством различных шифротекстов и информацией о свойствах рюкзачного вектора. Статистические методы требуют большой объем элементов шифротекстов для накопления статистики и при использовании РСЗИ ДГВ^n [2] мало применимы. В работе, представленной данным сообщением, сделана попытка определить метод поиска рюкзачного вектора с использованием свойств значений, в нем выражаемых.

Вариацией вектора $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в Z_p назовем вектор $\Delta A = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, где $\delta_1 = a_1$, $\delta_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1}(p-1)a_j$, $i = 2, \ldots, n$.

Последовательность $W_{\mu_p(A)} = (w_0, w_1, \ldots, w_k)$, где $w_k = Ax_i^T$, $x_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p^{j-1}$, $i = 0, \ldots, k$, $k = p^n - 1$, будем называть *последовательностью значений вектора* A в Z_p. Последовательность $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$, где $\omega_i = w_i - w_{i-1}$, $i = 1, \ldots, p^n - 1$, обозначим как $\delta W_{\mu_p(A)}$. Последовательность $\delta W_{\mu_p(A)}$ является симметричной относительно середины и может быть определена рекурсивно относительно размерности рюкзачного вектора A. Пусть дана возрастающая последовательность значений $W' = (w'_1, w'_2, \ldots, w'_m)$. Необходимо построить такой инъективный рюкзачный вектор $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, что $W' \subseteq W_{\mu_p(A)}$. Для любой последовательности W' существует хотя бы один такой вектор, в частности, сверхрастущий вектор $(1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^r)$, где $r = [\log_2 w'_m] + 1$. В работе, представленной данным сообщением, определяется метод построения таких векторов.

Каждой подпоследовательности $\delta W_{\mu_p(A)}$ можно сопоставить сумму элементов, ее составляющих, а каждой сумме — количество вхождений в $\delta W_{\mu_p(A)}$ подпоследовательностей, ее образующих. Например, для $A = (a_1, a_2, a_3)$ последовательность $\delta W_{\mu_p(A)}$ имеет вид $(\delta_1, \delta_2, \delta_1, \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_1)$. Здесь сумме $\delta_1+\delta_2+\delta_1+\delta_3$ соответствуют подпоследовательности $(\delta_1, \delta_2, \delta_1, \delta_3)$, $(\delta_2, \delta_1, \delta_3, \delta_1)$ $(\delta_1, \delta_3, \delta_1, \delta_2)$, $(\delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_1)$. Таким образом, для каждого рюкзачного вектора можно определить последовательность $S = \{(k_i, s_i)\}$, где s_i — сумма элементов подпоследовательности $\delta W_{\mu_p(A)}$, k_i — количество вхождений последовательностей элементов, образующих s_i в $\delta W_{\mu_p(A)}$, $k_i \leqslant k_j$, $i < j$.

Для заданной возрастающей последовательности значений W' построим множество $\delta W' = \{\omega'_i \,|\, \omega'_i = w'_i - w'_{i-1}\}$, где $w'_0 = 0$. На основе $\delta W'$ определим последовательность пар $S' = \{(k'_i, s'_i)\}$ аналогично S. Последовательно сопоставляя элементы S элементам S' и, решая $|S'|$ уравнений с n неизвестными, находим, если возможно, ΔA, а, следовательно, и A.

Например, необходимо найти рюкзачный вектор $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ минимальной размерности n, для которого выполняется $W' = (5, 6, 8, 10, 12, 15, 21, 23) \subseteq W_{\mu_p(A)}$. Так как $|W'| = 8$, то $n \geqslant 4$. Построим последовательность пар $S' = \{(5,2), (4,5), (3,3), (3,6), (3,7), (3,8), (3,10), (3,13), (3,15), (2,1), (2,4), (2,9), (2,11), (1,8), (1,12), (1,16), (1,17), (1,18), (1,21), (1,23)\}$. Начальные элементы S_4 имеют вид: $(8, \delta_1), (8, \delta_1 + \delta_2), (8, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3), (8, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_4), (4, \delta_2), (4, \delta_1 + \delta_3), (4, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1), (4, \delta_1 + \delta_2 + \delta_3), (4, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3 + \delta_1), (4, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3 + \delta_1 + \delta_2), (4, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_4), \ldots$. Последовательно приравнивания вторые компоненты каждой пары S' к соответствующим значениям S_4, получим следующее.

1. Для $(5, 2) \in S'$ возможно соответствие первых четырех элементов S_4. Полагаем соответствие $\delta_1 = 2$ (если данное предположение окажется ложным, то будем последовательно приравнивать δ_1 значениям вторых компонент пар S').

2. Из $\delta_1 + \delta_2 = 2$ следует $\delta_2 = 0$, что противоречит возрастанию строимого

вектора, приравниваем $\delta_1 + \delta_2 = 5$. Получим $\delta_2 = 3$.

3. $\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3 = 3 \;\Rightarrow\; \delta_3 = -4$, что невозможно. Проверяем следующий элемент S': $\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3 = 6$. Тогда $\delta_3 = -1$.

4. Для элемента $(8, \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_4) \in S_4$, последовательно проверяя элементы S' и выбирая удовлетворяющие условию инъективности и возрастания рюкзачного вектора, получим $\delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_3 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 + \delta_4 = 10 \;\Rightarrow\; \delta_4 = -3$.

Проверкой убеждаемся, что вектор $A = (2, 5, 6, 10)$ является искомым.

Следует отметить, что количество вариантов, которые необходимо перебрать при поиске решений, зависит от мощности множества W', и существенным здесь является только количество различных значений, а не их частотные характеристики. Более того, предложенный метод также применим для поиска рюкзачного вектора заданной размерности.

На основе анализа предложенного метода можно сделать вывод о том, что чем больше известно значений из подпоследовательности W, принадлежащих отрезку $[a_n, \sum_{j=1}^{n}(p-1)a_j]$, тем проще будет процесс нахождения решения, так как в данном отрезке находятся значения, использующие в своем выражении все элементы рюкзачного вектора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саломаа А.* Криптография с открытым ключом. М.: Мир, 1995.
2. *Подколзин В. В.* Модель системы защиты информации с открытым ключом на основе динамической генерации рюкзачного вектора. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 913.

Ю. А. Самохин (Нижний Новгород, НГТУ)**. Об асимптотическом интегрировании одного дифференциального уравнения с колебательно убывающими коэффициентами и случайной частотой возмущения.**

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\Omega^2 + \varepsilon\,\cos\,\omega t + \frac{\varepsilon}{t}\cos(\nu(t)t)\right]y = 0, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, частота $\omega = \text{const}$, а частота $\nu(t)$ — случайная функция, которая на каждом промежутке $[t_0 + kT, t_0 + (K+1)T]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $T > 0$, независимо принимает одно из конечного набора значений ν_i с вероятностью $p_s \geqslant 0$ $(s = 1, 2, \ldots, N$, $\sum_{s=1}^{N} p_s = 1)$ соответственно. Случай, когда $\nu(t)$ — неслучайная функция, изучен в [1].

Опираясь на исследования [2], [3], получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть*

1) $\omega \neq 2\Omega$, *а среди чисел* ν_k, $k = \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$, *нет чисел с индексом* k, *при котором* $\nu_k = 2\Omega$ *или* $\nu_k = 4\Omega$. *Тогда уравнение* (1) *имеет лишь ограниченные решения.*

2) $\omega \neq 2\Omega$, *а среди чисел* ν_k, $k = \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$, *есть такие числа с индексами* k, s, *что*

$$\nu_k = 2\Omega, \quad \nu_{-k} = -\nu_k, \quad \nu_s = 4\Omega, \quad \nu_{-s} = -\nu_s. \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) *имеет неограниченно растущие решения с показателем роста* $\varepsilon p_k (2\Omega)^{-1}$.

3) $\omega = 2\Omega$, *а среди чисел* ν_k, $k = \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$, *нет чисел с индексом* k, *при котором* $\nu_k = 2\Omega$ *или* $\nu_k = 4\Omega$. *Тогда уравнение* (1) *обладает решениями, асимптотическое поведение которых в среднем квадратическом описывается при* $t \to \infty$ *величиной* $\exp\{\varepsilon(2\Omega)^{-1}t\}$.

4) $\omega = 2\Omega$, *и среди чисел* ν_k, $k = \pm1, \pm2, \ldots, \pm N$, *есть такик числа с индексами* k, s, *что выполнены равенства* (2). *Тогда уравнение* (1) *имеет решение вида* $y = c\exp\{\pm\alpha(t + p_k \ln t)\}$, *где* $\alpha = \varepsilon(2\Omega)^{-1}$, c — *некоторая постоянная.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин Ю. А.* Об асимптотическом интегрировании одной системы дифференциальных уравнений с полиномиально-периодическими коэффициентами. — Межвузовский сб.: Проблемы современной теории периодических движений. Ижевск, 1990, с. 14–20.
2. *Фомин В. Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1972.
3. *Макаров А. П.*, *Самохин Ю. А.*, *Фомин В. Н.* Исследование устойчивости параметрически возмущенных линейных стохастических систем с убывающими коэффициентами. — Межвузовский сб.: Проблемы современной теории периодических движений. Ижевск, 1984, с. 17–22.

И. Ю. С е д ы х (Москва, ВГНА Минфина России)**. Предельное поведение решения системы нелинейных стохастических уравнений.**

Пусть размерность пространства равна 2 и существует решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d_\zeta(t) = \overline{a}(\zeta(t))\,dt + \overline{b}(\zeta(t))\,dw(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t))$, а коэффициенты $\overline{a}(x) = (\overline{a}_1(x), \overline{a}_2(x))$, $\overline{b}(x) = (\overline{b}_1(x), \overline{b}_2(x))$ — действительные измеримые функции, $x \in \mathbf{R}^2$, $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Пусть $\zeta(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ — неслучайная точка, коэффициенты $\overline{a}(x)$ и $\overline{b}(x)$ допускают разложения $\overline{a}(x) = Ax + \widetilde{a}(x)$, $\overline{b}(x) = Bx + \widetilde{b}(x)$, где $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $(i, j = 1, 2)$ — постоянные матрицы, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbf{R}$.

Возьмем систему линейных стохастических дифференциальных уравнений с постоянными матрицами A и B, соответствующую данной нелинейной системе (1):

$$d\xi(t) = A\xi(t)\,dt + B\xi(t)\,dw(t), \tag{2}$$

где $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$. Пусть D — некоторая область в $\mathbf{R}^2$ и τ_D — момент первого выхода процесса $\xi(t)$ из области D.

О п р е д е л е н и е 1. Непустое множество $\Gamma \in D$ называется *инвариантным множеством системы* (2) *до момента первого выхода* τ_D, если $\mathbf{P}\{\xi(t) \in \Gamma\ \forall t \leqslant \tau_D \,|\, \xi(0) \in \Gamma\} = 1$.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\{G(x) = C\}$ называется *стационарным для системы уравнений* (1), если оно является инвариантным множеством соответствующей линеаризированной системы (2), и $\widetilde{a}(x)|_{G(x)=C} = 0$, $\widetilde{b}(x)|_{G(x)=C} = 0$.

Пусть матрицы A и B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -\mu^2/2 & m\mu \\ -m\mu & -\mu^2/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\mu = \text{const} > 0$, m — произвольная постоянная.

Тогда уравнения инвариантных множеств системы (2) имеют вид $x_1^2 + x_2^2 = C$, где C — произвольная неотрицательная постоянная [1]. Перейдем в полярную систему координат $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Разобьем процесс $\zeta(t)$ на две составляющие: радиальную $r(t)$ и угловую $\varphi(t)$. Обозначим

$$\lambda = (\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \overline{\lambda} = (-\sin\varphi, \cos\varphi), \quad x = (x_1, x_2), \quad \overline{x} = (-x_2, x_1),$$
$$b(r,\varphi) = \widetilde{b}(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad a(r,\varphi) = \widetilde{a}(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad \sigma(r,\varphi) = r^{-1}(b(r,\varphi), \overline{\lambda}).$$

Теорема. *Пусть матрицы A и B системы линейных стохастических дифференциальных уравнений* (2) *имеют вид* (3)*, и множества $\{X\colon x_1^2 + x_2^2 = C_i,\ i = 1, 2\}$ являются стационарными для системы* (1)*.*

1. *Если $b(r,\varphi), \overline{\lambda}) = 0$, $(a(r,\varphi), \overline{\lambda}) + \mu(b(r,\varphi), \overline{\lambda}) = 0$, то при $m \neq 0$ с вероятностью единица $\varphi(t)/t \to -m\mu$ при $t \to \infty$, при $m = 0$*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\mu|}\int_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{u^2}{2\mu^2}\right\} du.$$

2. *Если $m\mu \neq 0$, $0 < -\mu + r^{-1}(b(r,\varphi), \overline{\lambda}) \leqslant c$, $(a(r,\varphi), \overline{\lambda}) + \mu(b(r,\varphi), \overline{\lambda}) - r^{-1}(b(r,\varphi), \overline{\lambda})(b(r,\varphi), \lambda) = 0$, то $\mathbf{P}\{\lim_{t\to\infty} \varphi(t)/t = -m\mu\} = 1$.*

3. *Если* $m\mu + r^{-1}((a(r,\varphi),\overline{\lambda}) + \mu(b(r,\varphi),\lambda) - r^{-1}(b(r,\varphi),\overline{\lambda})(b(r,\varphi,\lambda)) = \widehat{a}(\varphi)$, $0 < -\mu + \sigma(r,\varphi) = \widehat{\sigma}(\varphi)$, $|\int_0^u \widehat{a}(v)\widehat{\sigma}^{-2}(v)\,dv| < c_1$ *и при* $|\varphi| \to \infty$ *выполняются неравенства* $\varphi^{-1}\int_0^\varphi \exp\{\pm 2\int_0^u \widehat{a}(v)\widehat{\sigma}^{-2}(v)\,dv\}\,du \to k_{1,2}$, *где* $0 < k_i < \infty$, $i = 1, 2$, *то*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} < y\right\} \to \sqrt{\frac{k_1k_2}{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left\{-\frac{u^2k_1k_2}{2}\right\}du.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабчук В. Г.* Инвариантные множества системы линейных стохастических диффузионных уравнений с постоянными коэффициентами. Киев: ИК АН УССР, 1980, 43 с. (препринт).
2. *Седых И. Ю.* Поведение радиальной компоненты решения системы диффузионных уравнений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в, 3, с. 541–542.

С. Ж. Симаворян (Сочи, СГУТиКД)**. Применение методов Data Mining для обнаружения инсайдеров.**

Инсайдеры — это компьютерные «несуны», ворующие информацию в своей фирме и продающие ее конкурентам. Инсайдерская атака — это утечка персональной и конфиденциальной информации. Среди прочих киберпреступлений инсайдерские атаки имеют самый высокий уровень латентности (сокрытия) и самый низкий показатель раскрываемости.

В настоящее время, для анализа посещений баз данных (БД) фирмы, широко применяются статистические показатели оценки посещаемости сайтов, показывающие количество обращений к БД. Недостатками применения статистических показателей являются то, что они не во всех случаях адекватно отражают степень информированности сотрудника фирмы о БД в целом, т. к. не учитывают структуры связей между страницами БД, и тем более не показывают какие данные БД пользуются наибольшей популярностью. Более качественную информацию об осведомленности сотрудников фирмы о БД и ее содержании дает применение методов Data Mining, в частности применение алгоритма поиска регулярных эпизодов. Целями анализа поведения сотрудников предприятия по использованию БД являются: оптимизация структуры БД; оптимизация разрешений на выполнение операций READ, WRITE, определение статистики посещений каждой страницы БД, которая показывает тематическую направленность интересов сотрудников предприятия; а также выявление попыток несанкционированного доступа к элементам БД, если такое есть на предприятии. Обычно информация о посещениях БД извлекается из лог-файла СУБД, т. е. из того сервера где расположена сама БД, но для решения названных целей она не достаточна.

Для реализации указанной целей предлагается: 1) сформировать информационный кадастр БД [1] на основе данных хранящихся в БД; 2) реализовать подход, основанный на применении методов Data Mining (поиска регулярных эпизодов) для анализа данных информационного кадастра. При этом под информационным кадастром понимается полная и хорошо структурированная совокупность данных, отражающая структуру БД на различных уровнях (тематическом, структурном, файловом, разрешительном и т.д.) [2]. Информационный кадастр удобно представить в виде упорядоченной совокупности так называемых объектно-характеристических таблиц (ОХТ), каждая из которых представляет собой таблицу, в строках которой находятся наименования тех реалий сайта (предметов, событий, явлений или обобщенно — объектов), а по столбцам — наименования тех характеристик учитываемых объектов, значения которых необходимы для информационного анализа (обеспечения) функционирования сайта; сами значения характеристик располагаются в соответствующих клетках ОХТ.

Для заполнения информацией таблиц ОХТ предлагается использовать специально разработанные программы, выполняющие последовательное сканирование всех страниц БД. При сопоставлении информации из указанных таблиц посредством стандартных SQL запросов в сочетании с применением методов Data Mining (поиском регулярных эпизодов), становится возможным более детальный и глубокий анализ поведения сотрудников и других пользователей, который позволяет своевременно выявлять и пресекать инсайдерство на предприятии. Для эффективной защиты от инсайдеров в первую очередь необходимо обеспечить контроль над всеми коммуникационными каналами — от обычного офисного принтера до обычной флэшки и фотокамеры мобильника.

Методы защиты от инсайдеров: 1) аппаратная аутентификация сотрудников (например, с помощью USB-ключа или смарт-карты); 2) аудит всех действий всех пользователей (включая администраторов) в сети; 3) использование мощных программно-аппаратных средств защиты конфиденциальной информации от инсайдеров; 4) обучение сотрудников, отвечающих за информационную безопасность; 6) повышение

личной ответственности сотрудников; 7) постоянная работа с персоналом имеющим доступ к конфиденциальной информации — инструктаж, обучение, проверка знаний правил и обязанностей по соблюдению информационной безопасности и т. д.; 9) соответствие уровня зарплаты уровню конфиденциальности информации; 10) шифрование конфиденциальных данных.

Но самое главное, конечно, человеческий фактор: хотя человек — самое слабое звено в системе безопасности, но и самое важное. Борьба с инсайдерами не должна превращаться в тотальную слежку всех за всеми. В компании должен быть здоровый моральный климат, с соблюдением морально-этическим норм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чубукова И. А.* Data mining. ИНТУИТ.ру, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008, 384с.
2. *Герасименко В. А.* Основы информационной грамоты. Энергоатомиздат, 1996, 320 с.

А. И. Стефанович (Москва, ИПИ РАН). **Информационные технологии оптимизации функционирования web-портала.**

Web-портал — совокупность программных инструментов для создания информационной среды, обеспечивающей выполнение ряда функций на основе протоколов и технологий Интернет. Его основной задачей является интеграция данных и услуг в распределенной среде.

Как любая сложная система, web-портал нуждается в оптимизации функционирования [1]. Это, в свою очередь, требует построения математической модели, которая: выделяла бы ряд показателей функционирования портала; с требуемым уровнем адекватности описывала бы изменение во времени этих показателей.

Представлена модель показателя работоспособности информационного источника, интегрированного в портал. Она основана на делении множества источников на классы по временным затратам при взаимодействии с порталом [2]. Задача состоит в классификации отдельных источников по косвенным наблюдениям показателей затрат в присутствии случайных шумов и априорной неопределенности. Ее решение сводится к оптимальному оцениванию состояния и параметров динамической стохастической системы с использованием байесовского подхода [1], [2].

Численное решение поставленных задач оценивания связано с нехваткой вычислительных ресурсов. Естественный способ решения этой проблемы — использование технологий параллельного программирования.

Представление решений задач фильтрации/идентификации в виде уравнений Закаи для ненормированной условной плотности вероятности позволяет производить вычисления независимо относительно различных значений сетки вдоль всей траектории. Нормировка и оценка неизвестных параметров при этом выполняются лишь в заданные моменты времени, что позволяет снизить затраты, связанные с синхронизацией вычислительных процессов, а также повысить надежность соответствующего программного обеспечения.

При решении уравнений фильтрации/идентификации возникают следующие сложности.

1) Естественным способом для вычисления многомерных интегралов является метод Монте-Карло. Однако его совместное использование с методами распараллеливания обуславливает необходимость использования параллельных датчиков случайных чисел. В проведенных экспериментах с этой целью использовался проект Parallel Lagged Fibonacci Generator (PLFG), достаточно простой в реализации и обладающий как хорошими статистическими, так и временными характеристиками.

2) Численное решение уравнений Закаи для ненормированной условной плотности вероятности связано с необходимостью проводить операции над числами, для представления которых не хватает точности стандартных типов данных с плавающей точкой. Для преодоления этой проблемы была использована библиотека для работы с числами произвольной точности GNU Multiple Precision Arithmetic Library (GMP).

Было разработано программное обеспечение, реализующее информационную технологию оптимизации функционирования web-портала с использованием современных технологий параллельных вычислений.

Для проведения модельных экспериментов был использован вычислительный кластер, состоящий их трех серверов на платформе Intel, каждый из которых имеет по четыре двухядерных процессора Intel Xeon 3,6 ГГц и 16 Гб оперативной памяти. Вычисления проводились под управлением ОС Microsoft Windows Compute Cluster Server 2003 R2. В качестве технологии параллельного программирования был использован стандарт MPI (стандарт программирования в модели обмена сообщениями).

В докладе приводятся и сравниваются результаты многочисленных экспериментов, выполненными, в том числе, с реальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Босов А. В.* Моделирование и оптимизация процессов функционирования Информационного web-портала. — Программирование, 2009, № 6, с. 53–66.
2. *Борисов А. В.*, *Босов А. В.*, *Стефанович А. И.* Оптимальное оценивание показателей функционирования Информационного Web-портала. — Автоматика и телемеханика, 2010, № 2, с. 16–33.

В. В. Федоренко, А. В. Семененко, В. И. Стрекозов
(Ставрополь, СВИС РВ)**. Математическая постановка задачи временного распределения оборудования при обеспечении безотказной работы системы с учетом предстоящих условий ее эксплуатации.**

Экологическая безопасность промышленных и технических систем во многом определяется их безотказной работой в различных условиях эксплуатации, а также степенью израсходованного ресурса составным оборудованием (элементами систем).

Задача моделирования безопасной работы системы с учетом надежности оборудования и условий его применения имеет следующую формулировку. Предполагаются известными условия и длительности предыдущей эксплуатации каждой единицы оборудования, а также продолжительности каждого этапа предстоящей эксплуатации объекта в определенных условиях. Требуется составить такой план поочередного использования оборудования на каждом этапе, при котором обеспечивается максимальная вероятность безотказной работы (ВБР) к окончанию последнего этапа эксплуатации.

Так как условия предыдущей эксплуатации различного оборудования предполагаются независимыми, искомая ВБР всей системы на заданный период равна произведению вероятностей безотказной работы каждого i-го оборудования на j-м временном интервале, характеризуемом определенным значением интенсивности отказов. Для учета условий предыдущей эксплуатации оборудования на основе физического принципа надежности [1] определяется его эквивалентная временная наработка (применительно к определенному условию предстоящей эксплуатации). В этом случае каждый элемент исходной матрицы — это значение ВБР оборудования, зависящее от интенсивности отказов на j-м этапе предстоящей эксплуатации, а также от суммы времени продолжительности данного этапа и времени эквивалентной выработки ресурса i-м оборудованием в прошлом. Применяя операцию логарифмирования по отношению к частному значению ВБР в исходной матрице, получим аддитивную целевую функцию в задаче максимизации ВБР системы на общем периоде ее предстоящей эксплуатации. Полученную задачу можно рассматривать как частный случай задачи линейного программирования, в которой каждое оборудование эксплуатируется лишь на одном этапе, и для ее решения целесообразно использовать венгерский метод о назначениях [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седякин Н. М.* Об одном физическом принципе теории надежности. — Известия АН СССР, 1966, № 3, с. 80–87.
2. *Волков И. К., Загоруйко Е. А.* Исследование операций. М.: Изд-во МГТУ, 2002.

Н. С. Демин, В. В. Толстобоков (Томск, ТГУ). **Экзотические опционы купли с гарантированным доходом и с ограничением выплат на диффузионном рынке облигаций.**

Рассмотрение задачи ведется на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathcal{P})$ [1]. Пусть $B(t)$ и $P_t(T^1)$ — стоимости в момент t единицы банковского счета и облигации со сроком погашения $T^1 \geqslant T$ (T — дата предъявления опциона к исполнению), которые в случае прямого подхода определяются в виде [1]

$$B(t) = \exp\left\{\int_0^t r(s)\,ds\right\}, \quad P_t(T^1) = \exp\left\{-\int_t^{T^1} f_t(s)\right\}, \qquad 0 < P_t(T^1) \leqslant 1,$$

где $r(t) = f_t(t)$ является краткосрочной процентной ставкой, а форвардная процентная ставка $f_t(T^1)$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$df_t(T^1) = \alpha_t(T^1)\,dt + \sigma_t(T^1)\,dw_t,$$

w_t — винеровский процесс. Считаем, что текущее значение капитала определяется в виде $X_t = \beta_t B(t) + \gamma_t P_t(T^1)$, $t \in [0, T]$, где (β_t, γ_t) — пара $\mathcal{F}_t$-измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Цель управления портфелем — достижение равенства $X_T = f_T$, где f_T — платежная функция. Рассматриваются опционы купли Европейского типа, платежные функции которых имеют вид

$$f_T^{\max 1} = \max\{P_T(T^1) - K_1 B(T), K_2 B(T)\}, \tag{1}$$

$$f_T^{\max 2} = \max\{P_T(T^1) - K_1 B(T), K_2 B(T)\}\, I\{P_T(T^1) > K_1 B(T)\}, \tag{2}$$

$$f_T^{\min} = \min\{(P_T(T^1) - K_1 B(T))^+, K_2 B(T)\}, \tag{3}$$

где $a^+ = max\{0, a\}$, $I\{S\}$ — индикатор события S. Аналогичные задачи для опциона продажи рассмотрены в [2].

Пусть $a_s(T^1) = -\int_s^{T^1} \sigma_s(u)\,du$, $A = \int_0^T a_s^2(T^1)\,ds$,

$$d_1 = \left[\ln\left[\frac{K_1}{P_0(T^1)}\right] + \frac{1}{2}A\right]A^{-1/2}, \quad d_2 = \left[\ln\left[\frac{K_1 - K_2}{P_0(T^1)}\right] + \frac{1}{2}A\right]A^{-1/2},$$

$$y_1 = \left[\ln\left[\frac{K_1}{P_0(T^1)}\right] - \frac{1}{2}A\right]A^{-1/2}, \quad y_2 = \left[\ln\left[\frac{K_1 - K_2}{P_0(T^1)}\right] - \frac{1}{2}A\right]A^{-1/2}.$$

Теорема. *В случае опционов купли с платежными функциями* (1)–(3) *стоимости опционов определяются соответственно формулами*

$$C_T^{\max 1} = P_0(T^1)\Phi(-y_2) - K_1\Phi(-d_2) + K_2\Phi(d_2),$$

$$C_T^{\max 2} = P_0(T^1)\Phi(-y_2) - K_1\Phi(-d_2) + K_2\Phi(d_2) - K_2\Phi(d_1),$$

$$C_T^{\min} = P_0(T^1)[\Phi(y_2) - \Phi(y_1)] - K_1[\Phi(d_2) - \Phi(d_1)] + K_2\Phi(-d_2).$$

Кроме того, получены выражения для капиталов и портфелей (хеджирующих стратегий), а также исследованы свойства решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М: Фазис, 1998.
2. *Демин Н. С., Толстобоков В. В.* Экзотические опционы продажи на диффузионном рынке облигаций. — Известия РАН. Теория и системы управления, 2010, № 1, с. 163–172.

Е. П. Фадеева, **Д. Р. Матвеева** (Набережные Челны, ИЭУиП).
Резервы увеличения чистой прибыли ЗАО «Челныводоканал» за счет эффекта финансового рычага.

В настоящем сообщении рассматривается финансовый рычаг (леверидж) как важнейший инструмент финансового менеджмента, примененный для увеличения чистой прибыли и доходности собственного капитала одного из крупнейших предприятий-монополистов г. Набережные Челны ЗАО «Челныводоканал». Это предприятие имеет стратегическое значение с точки зрения удовлетворения жизненноважных потребностей в питьевой и технической воде населения города и промышленности Закамского региона.

Для финансового менеджера предприятия, принимающего решение о структуре капитала, важно численно оценить выгоды и риски, связанные с финансовым рычагом, выявляющим, насколько чистая прибыль чувствительна к изменению операционной прибыли и, как следствие этого, каковы резервы увеличения чистой прибыли предприятия.

В следующей таблице содержатся данные для расчета эффекта финансового рычага ЗАО «Челныводоканал». Как известно, абсолютное значение годовой платы за заемный капитал (если бы ЗАО «Челныводоканал» не платило налога на прибыль) находится по формуле $J = K_d\, D$, где J — абсолютное значение годовой платы за заемный капитал, K_d — его стоимость, D — заемный капитал.

Из данных таблицы видим, что J(при 0%)=0, J(при 20%)= $0,1 \times 206377 = 20637,7$ тыс. руб., J(при 60%)= $0,15 \times 619130 = 92869,5$ тыс. руб.

Показатели, тыс. руб.	При финансовом рычаге в размере		
	0%	20%	60%
Собственный капитал, S	1031884	825507	412754
Заемный капитал, D	0	206377	619130
Стоимость заемного капитала, K_d, %	0	10	15

Значения операционной $EBIT$ и чистой П прибылей при отсутствии налога на прибыль составят: $EBIT = B - C = 1330397 - 1159428 = 170969$ тыс. руб., где B — выручка, C — себестоимость, $П = EBIT - J$, следовательно, П(при 0% фин. рычаге)= 170969−0 = 170969 тыс. руб., П(при 20% фин. рычаге)= 170969−20637,7 = 150331,3 тыс. руб., П(при 60% фин. рычаге)= $170969 - 92869,5 = 78099,5$ тыс. руб.

В таком случае доходность собственного капитала $DS = П/S$ при различных воздействиях финансового рычага составит: DS(при 0% фин. рычаге)= $170969/1031884 = 16,57\%$, DS(при 20% фин. рычаге)= $150331,3/825507 = 18,21\%$, DS(при 60% фин. рычаге)= $78099,5/412754 = 18,92\%$.

Таким образом, при нижеследующих значениях финансового рычага увеличение операционной прибыли на 10% приведет к изменению чистой прибыли: при ФР=20% на $(150331,3 - 133234,4)/150331,3 = 0,11$ или на 11%, при ФР=60% на $(78099,5 - 61002,6)/78099,5 = 0,219$ или на 21,9%.

Далее в настоящем сообщении будут приведены результаты исследования влияния налогообложения на доходность собственного капитала ЗАО «Челныводоканал» при существующей ставке налога на прибыль 24%.

Как известно, доходность собственного капитала DS при налоге на прибыль со ставкой t исчисляется по формуле: $DS = [EBIT - (EBIT - J)t - J]/S$, где в квадратных скобках обозначена чистая прибыль при ставке налога на прибыль t.

Используя данные таблицы и вышепроизведенные расчеты, получим DS(при ФР=0%)= $[170969(1 - 0,24)]/1031884 = 0,126$ или 12,6%, DS(при ФР=20%)= $[170969 - (170969 - 20637,7)0,24 - 20637,7]/825507 = 0,1384$ или 13,84%, DS(при ФР=60%)=59354/412754=0,1438 или 14,38%.

Таким образом, налогообложение прибыли приводит к снижению доходности собственного капитала по сравнению с экономической рентабельностью, равной для исследуемого ЗАО $R_{\text{эк}} = EBIT/D + S = 16,57\%$. Однако снижение доходности собственного капитала может быть компенсировано увеличением финансового рычага, воздействие которого позволяет поднять доходность собственного капитала, т. е. хотя налогообложение и снижает результативность воздействия финансового рычага на доходность собственного капитала, но у финансового менеджера имеется возможность влияния на доходность через поиск источников заемного финансирования с более низкой процентной ставкой и увеличения доли заемного финансирования. Однако при этом следует иметь в виду, что возможности повышения доходности ограничены: процентная ставка по заемному капиталу и значение финансового рычага взаимозависимы (значительное увеличение финансового рычага обычно сопровождается ростом издержек по обслуживанию займа).

Л. А. Хворова (Барнаул, АлтГУ). **Идентификация параметров модели фенологического развития зерновых культур в условиях Алтайского края.**

Прогноз темпов развития растений в сельскохозяйственных посевах имеет в практическом смысле зачастую большую ценность для конкретного пользователя-агронома, чем прогноз продуктивности. Поэтому моделирование фенологического развития является центральной частью любой модели продукционного процесса. Рассмотрим вопросы моделирования и идентификации параметров блока развития растений имитационно-моделирующего комплекса Agrotool, разработанного в Агрофизическом институте г. Санкт-Петербурга [1].

Основными факторами, влияющими на фенотипическое проявление генетически детерминированной скорости развития многих растений, являются длина светового дня (фотопериодизм), температура воздуха и влагообеспеченность растений. Так как процедура идентификации осуществляется по районированным сортам, выращиваемым в условиях Алтайского края, то фотопериодическая реакция осуществляется автоматически.

В модели Agrotool физиологическое время измеряется в градусо-днях, а приращение физиологического времени в день k вычисляется по формуле

$$\Delta\tau_0 = \begin{cases} T_{av}(k) - T_0 & \text{при} \quad T_{av}(k) \geqslant T_0, \\ 0 & \text{при} \quad T_{av}(k) < T_0, \end{cases}$$

где $T_{av}(k)$ — среднесуточная температура воздуха в день k, T_0 — биологический нуль, (°C). С учетом влияния на развитие высоких температур, замедляющих скорость развития, и влажности почвы формула (1) принимает вид

$$\Delta\tau(k) = \Delta\tau_0(1 - \Delta\tau_0/c)Str(\Psi_s), \tag{2}$$

где c — коэффициент, учитывающий перегрев растений, (°C), Ψ_s — потенциал воды в почве, функция

$$Str(\Psi_s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Psi_s \geqslant \Psi_{opt}, \\ 1 + (S_0 - 1)\dfrac{\Psi_s - \Psi_{opt}}{\Psi_w - \Psi_{opt}}, & \text{если} \quad \Psi_s \leqslant \Psi_{opt}, \end{cases}$$

отражает влияние водного дефицита, Ψ_w — потенциал воды в почве, соответствующий влажности завядания, Ψ_{opt} — граница комфортной зоны по водному потенциалу почвы (см), в пределах которой влияние стресса отсутствует, S_0 — предельная величина стресса (б/р). Величина прироста биологического времени (2) суммируется по дням, и накопленная к текущим суткам k величина рассчитывается по формуле

$$\tau(k) = \sum_{j=k_0}^{k} \Delta\tau(j), \tag{3}$$

k_0 — номер дня сева. Очередная фаза наступает при достижении величиной некоторого порогового значения (градусо-дни), зависящего от порядкового номера фазы IPh. Таким образом, идентификации в модели подлежит следующий набор параметров, управляющих темпами развития полевых культур: T_0, c, Ψ_{opt}, S_0, T_{Ph}.

Процедура идентификации осуществлялась путем спланированного численного эксперимента. Для реализации алгоритма идентификации были отобраны годы вегетации, по которым имеются экспериментальные данные по срокам наступления фенофаз. В результате прогона модели для каждой фазы формируется файл невязок между фактическими и расчетными датами наступления фенофаз и вычисляется их

среднеквадратичное значение. Из всей совокупности значений параметров выбираются те, которые минимизируют сумму квадратов невязки. Первоначально должны быть определены параметры, управляющие длительностью периода посев-всходы. Затем подобранные значения параметров подставляются в модель, и исследуется следующий межфазный период. Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будут найдены параметры последней фазы.

Результаты идентификации параметров модели фенологического развития для яровой пшеницы с 2002 по 2009 гг. говорят о хорошем совпадении результатов моделирования с данными фактических наблюдений. О достаточно высокой точности расчета сроков наступления фенофаз по модели (1)–(3) говорит ошибка расчета, которая в большинстве случаев составляет 1–2 дня, что лежит в пределах точности измерений. Найденные оптимальные значения параметров модели фенологического развития яровой пшеницы в условиях Алтайского края могут в дальнейшем использоваться для прогноза урожайности данной культуры. Решение данной задачи становится актуальным и практически значимым в связи с сокращением числа метеорологических станций и отсутствием достаточных для агрометеорологических прогнозов фенологических наблюдений: периодичности осмотра растений, правильного понимания наблюдателем признаков наступления фаз развития и соблюдения методики проведения наблюдений.

Работа выполнена при поддержке ведомственно-аналитической программы «Развитие научного потенциала Высшей школы 2009-2010» № 2.2.2.4/4278.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полуэктов Р. А.*, *Смоляр Э. И. и др.* Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. СПб.: Изд-во СПбУ, 2006.

А. Ю. Хлесткин (Самара, ПГУТИ)**. Разработка технологии и модели слияния медицинских изображений для обнаружения и распознавания артефактов.**

Многие задачи идентификации объектов на изображении сводятся к взаимному сопоставлению между собой отображений, сформированных с помощью датчиков различных физических полей. Изображения, полученные разными способами, несут в себе различную информацию об объекте исследования. Объектом приведенного исследования являются рентгенографические и сцинтиграфические изображения.

Рентгенография — это метод анатомической визуализации. Сцинтиграфия — метод функциональной визуализации. В исследованиях предложена технология слияния анатомической и функциональной информации, вследствие чего повышается точность обнаружения артефактов на медицинских изображениях.

Технология слияния снимков основана на точной взаимной геометрической коррекции, что требует установления соответствия между элементами исходных изображений. Задача сводится к методу выделения «реперных» точек на рентгеновских и сцинтиграфических изображениях, по которым осуществляется координатная привязка снимков и их взаимная геометрическая коррекция. Геометрические преобразования снимков осуществляются методами проективных преобразований. Поскольку процесс формирования изображений сопровождается различного рода сдвигами, что вызывает нелинейные искажения, то для разработки модели сплава снимков используется полиномиальная аппроксимирующая функция и «реперные» точки. Сцинтиграфические изображения имеют меньшее пространственное разрешение, чем рентгенограммы, поэтому возникает необходимость увеличения разрешения. Эта проблема решается методом полиномиальной интерполяции. При сплаве черно-белых снимков затруднительно находить различия между изображениями, поэтому применяется метод преобразования яркости в цвет. Результатом цветового преобразования сцинтиграфического изображения является четко различимая область очага заболевания. Для улучшения визуализации изображения сплава используется преобразование Фурье в полосе ограниченных частот с целью исключения низкочастотных и высокочастотных помех. Слияние (сплав) изображений проводится с использованием полупрозрачной маски и совмещением изображений по реперным точкам.

Предложенные технология и модель продемонстрировали свою действенность в распознавании артефактов в области позвоночного ствола. На основе приведенной модели разработан программный продукт.

Р. Б. Чавтараев (Москва, ИПИ РАН)**. Применение средств WPF для реализации инструментария подготовки электронных коллекций.**

Представлена информационная технология, предназначенная для публикации и распространения электронных материалов по научно-исторической, правовой тематике, а также учебных пособий, подготовленных силами творческих коллективов РАН. Конечной целью обработки этих материалов является создание электронных коллекций, опубликованных на портале РАН (www.ras.ru) и в виде CD/DVD дисков.

Существующие общедоступные средства создания электронных коллекций требуют высокой квалификации для создания качественных медийных материалов, а более простые программные продукты ограничены функционально, поэтому актуальна задача создания адаптированной технологии и реализация ее в форме пакета программ, функционально достаточного для создания электронных коллекций.

Для организации эффективной работы с электронными коллекциями силами творческих коллективов авторов материалов, представленным пакетом обеспечиваются возможности: разделить процессы проектирования представлений и наполнения контентом; реализовать повторное использование проектов; обеспечить совместное проектирование и реализация коллекций; автоматизировать подготовку web-публикации.

В качестве технологической основы пакета применена платформа представления WPF (Windows Presentation Foundation) [1]. Применение WPF позволило в короткие сроки создать качественную, функционально наполненную базу для представления текстовых, иллюстративных и мультимедийных материалов различного рода. В основе формата WPF лежит XML-подобный язык разметки XAML. WPF предназначен для создания 2D и 3D пользовательских интерфейсов для платформы Windows (начиная с версии Vista встроен в ядро). XAML позволяет декларативно описывать объекты-представления различных данных. Сам контент может содержаться как внутри XAML, так и за пределами — во внешнем источнике. Эти возможности платформы WPF легли в основу архитектуры программного пакета.

Благодаря перечисленным свойствам, XAML позволяет структурировать контент на уровне представления, т. е. позволяет создавать шаблоны представления, из которых, как из блоков, можно строить электронную коллекцию, наполнять ее содержимым на следующем этапе. В частности, шаблоном представления является шаблон страницы электронной коллекции — описание экранной формы, включающее внешний вид и размещение отдельных элементов (цифровых фотографий, текстов, аудио- и видеороликов).

Соответственно, разработка электронной коллекции включает несколько этапов: создание шаблонов представления и связанной с ним схемы данных; создание электронной коллекции на основе шаблонов представления (проекта); компиляция проекта — создание коллекции в формате CD/DVD; публикация электронной коллекции на WEB-портале (создание WEB-книги).

Для описания шаблона использован XAML. Для описания проекта используется XML, который содержит набор XAML-шаблонов и секцию данных, которые содержат сам контент и ссылки на мультимедийные ресурсы.

При компиляции проекта в электронную коллекцию производится оптимизация ресурсоемких компонентов представления (например, изображений) и интеграция их в конечный файл в формате WPF-package.

На данный момент при помощи пакета программ реализовано пять электронных коллекций: «Президенты Академии наук», «Атомная эра: вклад Академии наук», «Награды Академии наук», «Акварели Марии Сибиллы Мериан», «Коллекция фотопортретов М. С. Наппельбаума» при участии Архива РАН, Санкт-Петербургского филиала Архива РАН, Института русской литературы РАН (Пушкинский Дом), Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН, Санкт-Петербургского филиала Института истории естествознания и техники РАН, Научно-

организационного управления РАН, Института проблем информатики РАН. Коллекции опубликованы в открытом доступе на портале РАН (www.ras.ru).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. MSDN Library: Windows Presentation Foundation. URL: http://msdn.microsoft.com /en-us/library/ms754130.aspx.

А. С. Иванов, **В. И. Ковалев**, **О. И. Челяпина** (Подольск, РОНЦ МГОУ). **Тестовые примеры при моделировании температурных напряжений в элементах конструкций с переменными характеристиками.**

Переменные характеристики элементов конструкций (свойства материала, параметры эксплуатации, геометрическая форма) позволяют управлять уровнем и характером распределения температурных напряжений. Аналитическое решение задач термоупругости для произвольного изменения перечисленных характеристик встречает значительные математические трудности. Поэтому используют математические аналогии в механике сплошной среды, когда задачи с разным физическим содержанием описываются одинаковыми функциональными зависимостями. При этом одна из задач позволяет осуществить достаточно простой эксперимент для своего решения. Корректность проведения эксперимента при анализе термонапряженного состояния изделий обеспечивается тестовыми примерами, которые имеют аналитическое решение. Приведены аналитические зависимости при моделировании температурных напряжений в тепловыделяющем цилиндре с переменной мощностью объемного тепловыделения. Задача термоупругости (состояние плоской деформации) математически формулируется следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} &\Delta\Delta F = \frac{\alpha E q_\nu^0}{(1-\nu)\lambda}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right), \quad F = \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \\ &\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где F — функция напряжений, α — коэффициент линейного расширения, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, λ — коэффициент теплопроводности, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} — компоненты тензора термонапряжений, $q_\nu^0(1+r^2/R^2)$ есть радиальная зависимость мощности объемного тепловыделения, R — радиус цилиндра. Осевая компонента тензора термонапряжений соответствует свободным от нагрузок торцевым поверхностям. Граничные условия для функции напряжений при $r = R$ означают жесткое закрепление сечения цилиндра по внешнему контуру. Задача (1) имеет точное аналитическое решение для функции напряжений и соответствующих компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} &F = \frac{\alpha E q_n u^0 R^4}{64(1-\nu)\lambda}\left[\frac{11}{9} - \frac{7}{3}\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} + \frac{1}{9}\frac{r^6}{R^6}\right], \quad A = \frac{\alpha E q_\nu^9 R^2}{96(1-\nu)\lambda}, \\ &\sigma_{rr} = A\left[\frac{r^4}{R^4} + 6\frac{r^2}{R^2} - 7\right], \quad \sigma_{\theta\theta} = A\left[5\frac{r^4}{R^4} + 18\frac{r^2}{R^2} - 7\right], \quad \sigma_{zz} = A\left[6\frac{r^4}{R^4} + 24\frac{r^2}{R^2} - 14\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Все обозначения соответствуют принятым ранее. Точное аналитическое решение задачи термоупругости для принятого закона объемного тепловыделения может служить тестовым примером при моделировании внутренних напряжений численными или экспериментальными методами. Функции F термоупругой задачи соответствует функция прогиба ω модельной пластины согласно соотношению $[F] = [\chi\omega]$, где χ — коэффициент для сохранения размерности. Функция прогиба ω является решением бигармонического уравнения для жестко защемленной пластины идентичной конфигурации

$$\Delta\Delta\omega = \frac{P(r)}{D}, \quad \omega = \frac{\partial\omega}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \tag{3}$$

где D — жесткость пластины. Закон нагружения модельной пластины определяют из равенства правых частей бигармонических уравнений (1) и (3):

$$P(r) = \frac{\alpha E q_\nu^0}{(1-\nu)\lambda\chi}\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right). \tag{4}$$

При нагружении жестко защемленной модельной пластины по закону (4) получают значения функции прогиба в отдельных точках модели. Если экспериментально измеренные значения прогиба пластины в пределах приемлемой точности совпадают с аналитической зависимостью, то это свидетельствует о правомочности используемой модельной системы. Точные аналитические зависимости для других переменных характеристик (коэффициент линейного расширения, геометрическая форма) получают аналогичным образом. Основу тестовых примеров составляют математические аналогии в механике деформируемого твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. С.*, *Ковалев В. И.*, *Цаповская О. А.* Температурные напряжения в сплошном длинном цилиндре с переменным объемным тепловыделением. — Проблемы машиностроения и автоматизации, 2008, № 1, с. 111–114.

Н. В. Ш и р я е в а (Ставрополь, СевКавГТУ)**. Организационно-методическое сопровождение преподавания математики в лицее для одаренных детей СевКавГТУ.**

На фоне математизации и формализации многих областей знаний, объединения их в интегрированные системы, математические методы исследования все настойчивее проникают в такие науки, как химия, биология, лингвистика, психология. Многие факультеты включают математику в список вступительных экзаменов. Обязательным форматом выпускного экзамена по математике в средней школе является единый государственный экзамен. Актуальным вопросом в связи с этим стала проблема развития математического мышления старшеклассников, как неотъемлемая часть математического образования выпускников лицея.

Анализ научных источников позволил нам рассматривать математическое мышление как динамическую систему, в которой как в целостности представлены интеллектуальные, деятельностные, эмоционально-личностные и творческие составляющие, в каждой из которых в свою очередь нами были выделены структурные компоненты.

Для комплексного развития компонент математического мышления старшеклассников нами была разработана программа развития математического мышления, основой которой является разработанный нами электронный курс по математике и методические пособия к нему.

Важная роль в разработанных дидактических средствах отводится индивидуальным практикумам. Для развития интуиции, пространственного воображения, закрепления в памяти многочисленных методов, используемых в решении математических задач, мы подобрали и сгруппировали задачи по математике согласно выделенным в теоретическом исследовании структурным составляющим математического мышления. Зная уровень математического мышления своих учеников, а также их индивидуальные особенности, мы предлагаем каждому из них индивидуальные домашние задания. Индивидуальные задания по той или иной теме отмечены символами, символизирующими их направленность на развитие определенных компонент математического мышления.

Приобщение старшеклассников к самостоятельной деятельности, достигается нами благодаря подбору определенного вида задач. В электронный курс и учебные пособия по математике, например, включена практика «найди ошибку в решении». Развитие самоконтроля лицеистов, а также объективное оценивание знаний и умений учащихся осуществляется благодаря возможности проведения как тестов для самоконтроля, так и контрольных тестов, включенных в электронный курс по математике.

Т. А. Ш о р н и к о в а, О. В. П и л и п е н к о, Ю. Е. Ш и ш и к и н а (Пенза, ПГТА)**. Обобщенная термодинамическая формулировка понятия системы.**

Рассмотрим процесс образования системы. Примем, что под действием сил сродства определенное число (неделимых) «первичных» элементов образовало некоторое единство или систему.

Согласно основному определению ОТС, основными атрибутами образовавшейся системы являются «первичные» элементы $\{m\}$, отношения между ними $\{r\}$ и законы композиции $\{z\}$, ограничивающие эти отношения. Основной вещественно-энергетической составляющей всякой материальной системы являются «первичные» элементы, которые в терминах термодинамики могут быть охарактеризованы через их собственный вещественно-энергетический потенциал E_0, включающий все виды энергии, содержащиеся в «первичном» элементе и недоступные для преобразования на данном уровне рассмотрения. Отношения между «первичными» элементами реализуются в материальных системах через связи, термодинамической характеристикой которых является энергия связи E_a. Законы композиции не могут быть выражены в вещественно-энергетических величинах, поэтому в термодинамическом приближении материальная система описывается двухкомпонентным уравнением

$$E = \sum E_0 + \sum E_a = U + A, \tag{1}$$

где U — суммарная энергия «первичных» элементов, A — суммарная энергия всех связей.

По смыслу выражение (1) является *обобщенной термодинамической формулировкой понятия системы* и описывает как «изначальные» свойства в виде члена U, так и появившиеся только благодаря ее образованию в виде члена A.

Согласно (1), любые преобразования системы, связанные с изменением ее общей энергии E, могут быть произведены тремя способами, а именно: изменением U; изменением A; изменением U и A одновременно. Других способов изменения E, как следует из (1), не существует. Поскольку U и A однозначно связаны с определенными материальными носителями, составляющими систему, любое мыслимое изменение E всегда будет связано только с изменением этих носителей. Тем самым бесконечно малое изменение внутренней энергии, согласно (1), будет складываться из двух дифференциальных величин $dE = dU + dA$, а, следовательно, dE будет являться полным дифференциалом и E — функцией состояния. Это еще одно из эквивалентных определений первого начала термодинамики.

Первый закон вводится в классической термодинамике как аксиоматическое эмпирическое обобщение. Тот факт, что он достаточно просто может быть получен из выражения (1), является весомым свидетельством фундаментальности последнего для термодинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
2. *Свирижев Ю. М.* Устойчивость и сложность в математической экологии. Устойчивость геосистем. М.: Наука, 1983.
3. *Урманцев Ю. А.* Общая теория систем: состояние, приложения и перспективы развития. Система, симметрия, гармония. М.: Мысль, 1988.

Э. Г. Я н у к я н (Пятигорск, ПФ СевКавГТУ)**. Анализ неустойчивости стационарного режима горения нефти в пористой среде.**

Рассматриваем «сухое» горение нефти, осуществляемое нагнетанием в поровое пространство только воздуха. Запишем в континуальном приближении в системе координат, движущейся справа налево со скоростью движения волны горения $U(t)$, систему уравнений фильтрационного горения нефти в пористой среде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\sigma s\rho_r) + U(t)\frac{\partial}{\partial x}(\sigma s\rho_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_r v_r) = \rho_0 w(s,a,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\sigma sa\rho_r) + U(t)\frac{\partial}{\partial x}(\sigma sa\rho_r) + \frac{\partial}{\partial x}(a\rho_r v_r) = -\mu\rho_0 w(s,a,T),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\sigma(1-s)\rho_0) + U(t)\frac{\partial}{\partial x}(\sigma(1-s)\rho_0) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v_0) = -\rho_0 w(s,a,T),\\
&C\frac{\partial T}{\partial t} + CU(t)\frac{\partial T}{\partial x} + (\rho_r c_r v_r + \rho_0 c_0 v_0)\frac{\partial T}{\partial x} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q\rho_0 w(s,a,T),\\
&p = R\rho_r T\sigma^{-1}, \quad v_r = -\frac{kk_r(s)}{\mu_r'(T)}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_0 = -\frac{kk_0(s)}{\mu_0'(T)}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&C = (1-\sigma)\rho_r c_r + \sigma(1-s)\rho_o c_0 + ms\rho_r c_r.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ограничиваясь случаем вынужденной спутной фильтрации, когда задан поток газа вслед фронту горения и концентрация окисления a_*, запишем первые интегралы системы (1):

$$\rho_r v_r + \rho_0(U(t)\sigma(1-s) + v_0) = -G_*, \quad a\rho_r v_r + \mu(\rho_r v_r + G_*) = -a_* G_*. \tag{2}$$

Используя первое соотношение в (2) и неравенство $\rho_r \ll \rho_0$, преобразуем уравнение теплового баланса в системе (1):

$$[(1-\sigma)\rho_r c_r + \sigma(1-s)\rho_0 c_0]\frac{\partial T}{\partial t} + [(1-\sigma)\rho_r c_r U(t) - c_0 G_*]\frac{\partial T}{\partial x} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q\rho_0 w. \tag{3}$$

Найдем выражение для нестационарной скорости движения фронта горения $U(t)$ как функции температуры:

$$U(t) = U^0 + \frac{A(T_\Phi)}{\sigma(1-s_1^0(0))}\left[\exp\left\{\frac{E}{2RT_\Phi^2}(T-T_\Phi)\right\} - 1\right]. \tag{4}$$

После подстановки (4) в уравнение (3) и введения безразмерных переменных, изучение нестационарного фильтрационного горения нефти в пористой среде сводится к анализу системы

$$\begin{aligned}
&(1+\delta)\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} + \beta\frac{\partial\theta_1}{\partial z} + [e^{\alpha(\theta_1(0,\tau)-1)} - 1]\frac{\partial\theta_1}{\partial z} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2}, \qquad -\infty < z < 0,\\
&\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau} + \beta\frac{\partial\theta_2}{\partial z} + [e^{\alpha(\theta_1(0,\tau)-1)} - 1]\frac{\partial\theta_2}{\partial z} = \frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}, \qquad 0 < z < \infty,\\
&\frac{\partial\theta_1}{\partial z}(0,\tau) - \frac{\partial\theta_2}{\partial z}(0,\tau) = \beta e^{\alpha(\theta_0(0,\tau))-1},\\
&\theta_1(0,\tau) = \theta_2(0,\tau), \quad \theta_1(-\infty,\tau) = 0, \quad \theta_2(\infty,\tau) < \infty.
\end{aligned} \tag{5}$$

Анализ уравнений (5) методом возмущений [1] позволил определить частоту и амплитуду автоколебаний поля температур и скорости движения фронта горения в кинетическом режиме.

Полученные результаты позволили сделать следующие выводы: среднее значение нестационарной скорости движения фронта горения меньше стационарной; имеет место «мягкое» самовозбуждение автоколебаний; эффекты нелинейности увеличивают частоту автоколебаний; увеличение спутного потока газа приводит к уменьшению амплитуды колебаний и нелинейной поправки к частоте; отличие теплоемкостей смеси по обе стороны фронта горения сильно влияют на амплитуду слабонелинейных автоколебаний и слабо — на частотный сдвиг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Янукян Э. Г.* Моделирование нестационарных процессов массовой кристаллизации из растворов и расплавов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 4, с. 964–968.

А. Н. Б е с т у ж е в а (Санкт-Петербург, ПГУПС)**. Задача Штурма–Лиувилля для пространственной задачи о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины с учетом проницаемости дна.**

Собственные функции пространственной задачи о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины при значениях угла наклона дна специального вида были получены в [1] в предположении, что поверхность дна была абсолютно непроницаемой. Спектр собственных функций содержит как непрерывную часть, так и дискретную. Собственным функциям дискретного спектра отвечают волны, обеспечивающие береговой эффект. В случае абсолютно проницаемого дна спектр собственных функций содержит только непрерывную часть, т. е. собственные функции дискретного спектра исчезают [2]. Первой задаче соответствует граничное условие на поверхности дна второго рода, во второй — первого рода. Если рассматривать граничное условие третьего рода, это соответствует учету проницаемости дна. Чтобы получить собственные функции последней задачи, следует решить задачу Штурма–Лиувилля с граничным условием третьего рода на поверхности дна. В этом случае краевая задача с однородными граничными условиями после применения интегрального преобразования Конторовича–Лебедева по аналогии с методом, предложенным в [3], сводится к двум функциональным уравнениям относительно двух функций, через которые выражается потенциал скорости задачи. Предлагается метод решения такой системы функциональных уравнений. Выход на предельные случаи не является тривиальным из-за принципиального построения общего решения системы функциональных уравнений. Выявляются возможности разделения спектра собственных функций на непрерывную и дискретную части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дорфман А. А.* Пространственная задача о неустановившихся волновых движениях жидкости в области переменной глубины. — Мех. жидк. и газа, 1986, № 2, с. 104–112.
2. *Бестужева А. Н.* Решение одного класса задач о волновых движениях жидкости в области переменной глубины. Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. Ленинград: 1990, 18 с.
3. *Лебедев Н. Н.*, *Скальская И. П.* Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на клине конечной проводимости. — Ж. техн. физ., 1962, т. 32, в. 10, с. 1174–1183.

Д. Л. В и н о к у р с к и й (Ставрополь, СевКавГТУ)**. Решение уравнений Кона–Шэма для молекул методом конечных элементов.**

В представленном докладе рассматривается решение самосогласованных уравнений функционала электронной плотности с использованием метода конечных элементов. Этот подход стал популярен в последнее время, потому что может быть легко реализован при параллельных вычислениях.

Гамильтониан молекулярной системы записывается в виде

$$\widehat{H}_{KS} = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V + V_{xc}.$$

Здесь V — электростатический потенциал Хартри, V_{xc} — обменно-корреляционный потенциал, который описывает многочастичные квантовые эффекты. Уравнения Кона–Шэма могут быть записаны в виде

$$\widehat{H}_{KS}\varphi_i(x) = \varepsilon_i\varphi_i(x), \quad n(x) = \sum |\varphi_i(x)|^2, \tag{1}$$

где $n(x)$ — электронная плотность. Уравнения (1) решаются самосогласованно.

Для численного решения задачи выбирались многочлены третьей степени

$$b_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(2 + \dfrac{x-x_k}{h}\right)^3, & -2 < \dfrac{x-x_k}{h} \leqslant -1, \\ 1 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^3, & -1 < \dfrac{x-x_k}{h} \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x-x_k}{h}\right)^3, & 0 < \dfrac{x-x_k}{h} \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{4}\left(2 - \dfrac{x-x_k}{h}\right)^3, & 1 < \dfrac{x-x_k}{h} \leqslant 2. \end{cases}$$

Волновые функции задачи $\varphi_i(x)$ представлялись в виде суммы по данным многочленам $\varphi_i(x) = \sum_k a_k b_k(x)$. Матричные элементы гамильтониана были представлены в виде $H_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} b_n(x)\widehat{H}_{KS}b_m(x)\,dx$.

Базис из сплайнов не ортогонален, поэтому следует решать следующую задачу на отыскание собственных значений: $\sum_m H_{nm}a_m = \varepsilon_i \sum_m S_{nm}a_m$. Здесь $S_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} b_n(x)b_m(x)\,dx$ есть матрица перекрывания. Задача решалась самосогласованно с относительной ошибкой $\Delta \leqslant 10^{-6}$.

И. А. Ильичева, Л. А. Панченко, Д. Ю. Нечипуренко, М. В. Головкин, Р. В. Полозов, Ю. Д. Нечипуренко, С. Л. Гроховский (Москва, ИМБ РАН, МГУ, Пущино, ИТЭБ РАН)**. Ультразвуковое расщепление ДНК как дополнительный источник информации для анализа геномных последовательностей.**

Ранее нами было показано, что ультразвуковое облучение длинных (150÷500 н.п.) рестриктных фрагментов ДНК приводит к их расщеплению на более короткие фрагменты, причем интенсивность расщепления каждой фосфодиэфирной связи зависит от локальной нуклеотидной последовательности [1]–[4].

Анализ влияния условий проведения эксперимента на получаемые картины ультразвукового расщепления свидетельствует о механохимической природе разрывов в облучаемых фрагментах. Существенную роль в этом процессе, по всей видимости, играют высокоградиентные течения жидкости вблизи кавитационных пузырьков.

Для анализа зависимости между относительной частотой разрыва центральной фосфодиэфирной связи во всех возможных ди- и тетрануклеотидах и их нуклеотидным составом применялся однофакторный дисперсионный анализ и непараметрические критерии, а также методы множественного сравнения. Значения выборочных характеристик и 95% доверительные интервалы для средних относительных частот ультразвукового расщепления для каждого из 16 динуклеотидов, а также для центральной позиции в каждом из 256 тетрануклеотидов получены на выборке, содержащей около 20600 нуклеотидов.

Обнаруженное повышение уровня расщепления фосфодиэфирной связи, следующей за дезоксицитидином [1], [2], указывает на уникальность локальных конформационно-динамических свойств системы связей между кольцом фуранозы дезоксицитидина и фосфатной группой. Этот вывод подтверждается большим количеством экспериментальных и расчетных данных, свидетельствующих о повышенном уровне интерконверсии фуранозного цикла дезоксицитидина в B-форме ДНК. Это дает основание полагать, что полученные нами статистические показатели интенсивностей ультразвукового расщепления фосфодиэфирных связей, отвечающие ди- и тетрануклеотидам, отражают зависящую от последовательности интенсивность интерконверсии фуранозного цикла на 5'-конце соответствующего динуклеотида.

Зависящая от последовательности конформационная динамика ДНК может нести биологическую информацию, дополнительную триплетному генетическому коду. Действительно, подвижность локальной структуры ДНК играет важную роль в образовании комплексов белков с регуляторными участками ДНК. Поэтому, в частности, эта информация может быть использована в процессах регуляции транскрипции.

Предварительный анализ кластера промоторных последовательностей ДНК генома человека при помощи полученных нами величин относительной интенсивности ультразвукового расщепления показал, что усредненные кривые ультразвукового расщепления имеют характерные особенности, проявляющиеся в определенных областях промоторов, в том числе, в районе точки старта транскрипции.

Работа поддержана РФФИ, проект № 08–04–01739а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гроховский С. Л.*, *Ильичева И. А*, *Нечипуренко Д. Ю.*, *Панченко Л. А.*, *Полозов Р. В.*, *Нечипуренко Ю. Д.* Локальные неоднородности структуры и динамики двуспиральной ДНК: исследование при помощи ультразвука. — Биофизика, 2008, т. 53, в. 3, с. 417–425.
2. *Ильичева И. А.*, *Панченко Л. А.*, *Нечипуренко Д. Ю.*, *Головкин М. В.*, *Нечипуренко Ю. Д.*, *Полозов Р. В.*, *Гроховский С. Л.* Позиционные эффекты и эффекты последовательности при ультразвуковом расщеплении ДНК. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 660–661.

3. *Головкин М. В.*, *Нечипуренко Д. Ю.*, *Ильичева И. А.*, *Панченко Л. А.*, *Полозов Р.В.*, *Гроховский С.Л.*, *Нечипуренко Ю.Д.* Математические методы анализа электрофоретических картин расщепления ДНК. — Компьютерные исследования и моделирование, 2009, т. 1, № 3, с. 287–295.
4. *Нечипуренко Ю.Д.*, *Головкин М.В.*, *Нечипуренко Д.Ю.*, *Ильичева И.А.*, *Панченко Л.А.*, *Полозов Р.В.*, *Гроховский С.Л.* Характерные особенности расщепления ДНК ультразвуком. — Журнал структурной химии, 2009, т. 50, с. 1040–1047.

И. Л. Панкратьева, **В. А. Полянский** (Москва, Институт механики МГУ)**. Пристеночная ионизация возбужденных молекул продуктов горения в сильном электрическом поле.**

Устройства, регистрирующие протекание электрического тока между электродами, помещенными в углеводородные газовые смеси, широко используются для различных видов диагностики таких смесей. При этом наблюдается систематическое расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями электрического тока между электродами. Теоретическое моделирование работы устройств применяется для интерпретации результатов измерений. Расчетный электрический ток оказывается примерно на порядок меньше экспериментального и приходится вводить эмпирические поправочные коэффициенты. Для выяснения причин такого расхождения предпринимались попытки усложнить теоретические модели. В частности, для высокотемпературных смесей продуктов горения предлагались весьма сложные цепочки химических процессов с учетом образования при горении высоковозбужденных молекул, что приводило к увеличению эффективной скорости хемоионизации во всей смеси в целом. В данной работе дано новое объяснение указанному явлению, позволившее устранить расхождение теоретических и экспериментальных данных. Предполагается, что на процесс ионизации возбужденных молекул смеси оказывает влияние сильное электрическое поле, которое создается диагностическим устройством в узких приэлектродных областях. В рамках предлагаемой теории проведена обработка экспериментальных данных по измерению электрического тока на отрицательно заряженный цилиндрический зонд, помещенный в высокотемпературную метано-кислородную газовую смесь. Полученное хорошее согласие теории и эксперимента может служить доказательством факта влияния сильного электрического поля на процесс ионизации высоко электронновозбужденных молекул в достаточно плотных смесях молекулярных газов.

Работа поддержана РФФИ (проект № 10-01-00015).

А. Н. Чупрунов, **И. Фазекаш** (Казань, ИЭУП, Дебрецен, Дебреценский университет)**. О вероятности отсутствия ошибки в сообщении при помехоустойчивом кодировании.**

Мы будем рассматривать код, который позволяет исправить не больее r ошибок типа замещения. Доклад посвящен изучению ассимптотического поведения случайной величины S_{nN} — числа блоков, не содержащих ошибки в сообщении, состоящем из N блоков, причем каждый блок кодируется нашим помехоустойчивым кодированием, а число ошибок в сообщении принадлежит некоторому подмножеству M_n, $n \in \mathbf{N}$, множества неотрицательных целых чисел чисел $\mathbf{M}$. Мы будем предполагать, что все рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Рассмотрим сообщение, состоящее из N блоков. Пусть случайная величина ξ_{Nj} — количество ошибок в j-м блоке. Мы будем предполагать, что ξ_{Nj} $(1 \leqslant j \leqslant N)$ — независимые пуассоновские случайные величины с параметром λ. Тогда число блоков, не имеющих ошибки в сообщении, — случайная величина $S_{nN} = \sum_{i=1}^{N} I_{nNi}$, где I_{nNi} — индикатор события $A_{nNi} = \{\xi_{Ni} \leqslant r | \xi_{N1} + \xi_{N2} + \cdots + \xi_{NN} \in M_n\}$, состоящего в том, что i-й блок сообщения имеет не более r ошибок. Если множество $M_n = \{n\}$ состоит из одного элемента, то события A_{nNi} являются событиями теории размещения различимых частиц по различным ячейкам и не зависят от λ, (см. о теории размещения монографию [1]). В [2] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $M_n = \{n\}$, $n, N \to \infty$ так, что $\alpha_{nN} \to \alpha$, где $0 < \alpha < \infty$. Тогда*

$$\lim_{n,N\to\infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{r} \frac{\alpha^k}{k!} \quad \textit{почти наверное.}$$

Если множества $M_n = \mathbf{M}$, то индикаторы $I_{nNi} = I_{\{\xi_{Ni} \leqslant r\}}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, независимы. Поэтому справедливо утверждение.

Теорема 2. *Пусть $M_n = \mathbf{M}$. Тогда*

$$\lim_{n,N\to\infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{r} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \textit{почти наверное.}$$

Теорема 3. . *Пусть $M_n = \{0, 1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbf{N}$, $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \alpha$, где $0 < \alpha < \infty$.*

1. *Пусть $\alpha < \lambda$. Тогда*

$$\lim_{n,N\to\infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{r} \frac{\alpha^k}{k!} \quad \textit{по вероятности.}$$

2). *Пусть $\alpha > \lambda$. Тогда*

$$\lim_{n,N\to\infty} \frac{1}{N} S_{nN} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{r} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \textit{почти наверное.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Случайные размещения. М.: Физматгиз, 1976.
2. *Chuprunov A. N., Fazekas I.* Inequality and strong law of large numbers for random allocations. — Acta Math. Hungar., 2005, v. 109 (1–2), p. 163–182.

С. С. Мартынов (Москва, ТВП). **О возможности наблюдения за перемешиванием последовательности независимых случайных величин.**

Пусть $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i\}_{i=1,\dots,n}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.), принимающих значения из некоторого множества Θ, $\eta(t)$ — с. в., распределение которой зависит от параметра t ($t \in \Theta$).

Последовательность $\boldsymbol{\theta}$ перемешивается с использованием случайной подстановки S степени n, имеющей равновероятное распределение на симметрической группе подстановок степени n. Ранее в работе [1] рассмотрена задача построения процедуры получения информации о подстановке S, основанной на проведении анализа реализаций последовательностей независимых в совокупности с. в. $\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \{(\eta_i^{(1)}(\theta_i)\}$, $\boldsymbol{\eta}^{(2)} = \{(\eta_i^{(2)}(\theta_{S(i)})\}$ (здесь распределение с. в. $\eta_i^{(k)}(t)$ совпадает с распределением с. в. $\eta(t)$ ($i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$).

Пусть проводится n независимых испытаний в биномиальной схеме с вероятностью успеха $p = 1/2$. Обозначим ν с. в., равную числу успехов, $Y = \{i_1, \dots, i_\nu\}$ — множество номеров испытаний, в которых получен успех, $\boldsymbol{\eta}^{(3)} = \{\eta_j^{(3)}\}_{j=1,\dots,\nu}$ — последовательность с. в., имеющих вид $\eta_j^{(3)} = \eta_{i_j}^{(2)}(\theta_{S(i_j)})$, где $i_j \in Y$ (заметим, что последовательность $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ является подпоследовательностью последовательности $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$). Рассмотрим S_Y — ограничение подстановки S на множество Y (S_Y может быть задано набором таких переходов (i, j) подстановки S, что $i \in Y$).

В докладе рассматривается задача получения информации о подстановке S с использованием реализаций последовательностей $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$, $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$. Предполагается, что свойства распределения с. в. $\eta(t)$ таковы, что существует некоторый статистический критерий $\mathbf{C}$, позволяющий попарно осуществлять сравнение реализаций элементов последовательностей $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$, $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$, причем для любой пары реализаций с. в. $\eta_i^{(1)}(\theta_i)$, $\eta_j^{(3)}(\theta_{S(i_j)})$ ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, \nu$) критерий $\mathbf{C}$ позволяет проводить проверку гипотезы H_0: «$\theta_i = \theta_{S(i_j)}$» против альтернативы H_1: «$\theta_i, \theta_{S(i_j)}$ — независимые с. в.»; при этом вероятность ошибочного принятия критерием $\mathbf{C}$ гипотезы H_0 при справедливости гипотезы H_1 равна α, вероятность ошибочного принятия гипотезы H_1 при справедливости гипотезы H_0 равна β (см. также [1]).

Используя матрицу $\mathbf{G} = (g_{ij})_{(i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,\nu)}$, в которой $g_{ij} = 1$, если для пары реализаций с. в. $\eta_i^{(1)}(\theta_i), \theta_{S(i_j)}$ принимается гипотеза H_0, или, соответственно, $g_{ij} = 0$ — если принимается гипотеза H_1, строятся варианты ограничения S_Y подстановки S на множество Y. Число вариантов ограничения S_Y подстановки S на множество Y, получаемых в рамках рассматриваемой модели, есть некоторая с. в. ξ, для которой справедливо следующее утверждение.

Утверждение.

$$\mathbf{E}\,\xi \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{2}\right)^n \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)^n L_{n-q}^{(0)}\left(-\frac{1}{\beta}\right) - \frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta+1)(1-\alpha)^{n-1},$$

где

$$L_s^{(0)}(x) = s! \sum_{j=0}^{s} \frac{(-1)^j}{j!} \binom{s}{s-j} x^j$$

есть многочлен Лагерра степени s и порядка 0 (*см.*, *например*, [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартынов С. С.* Об одной процедуре наблюдения за перемешиванием последовательности независимых случайных величин. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 4, с. 711–712.
2. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике. М., 1973.

Ю. А. Горбунов, **И. А. Жуйков**, **Е. Л. Кротова** (Пермь, ПГТУ)**. Выявление злоумышленника статистическими методами в компьютерных системах.**

Задача аутентификации — подтверждения подлинности идентификатора объекта — последние 5 лет является одной из самых обсуждаемых практически на всех конференциях по информационной безопасности международного и национального уровня [1]. Предложенный в работе способ заключается в построении модели поведения злоумышленника в системе с помощью существующих статистических методов.

Построение адекватной модели злоумышленника сведено к моделированию двумерного случайного вектора, компоненты которого независимы и принадлежат классу строго устойчивых распределений. Для определения параметров случайного вектора используем подход, предложенный в [2]. Моделируем необходимое число стандартных нормальных величин на основе псевдослучайных последовательностей, переходим к инвариантам распределения, исключая мешающий масштабный параметр, который будет оценен с помощью метода квантилей. Выделяем из наблюдений строго устойчивую компоненту, исключая нормальную составляющую смеси распределений, и проверяем простую гипотезу о параметре устойчивости с помощью метода Колмогорова–Смирнова. Вычисляя значения локального наклона по Бахадуру, проверяем, достаточен ли объем обучающей выборки. Проведенная процедура позволяет построить профиль легального пользователя. При нарушении критического числа эвристических правил проверяем гипотезу о принадлежности текущего профиля пользователя построенной статистической модели легального пользователя. Если мы отвергаем проверяемую гипотезу, то формируем соответствующую запись в журнале, выдаем сообщение об ошибке и высылаем отчет о нарушителе на станцию администратора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабанов А. Г.* Актуальные задачи аутентификации, 2009. http://www.razvedka.ru/catalog/582/607/11034.htm.
2. *Бородулина Е. Л.*, *Кротова Е. Л.* Метод расщепления строго устойчивых смесей нормального закона для случая показателя устойчивости $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$. Математическое моделирование. М.: Институт математического моделирования РАН, 2008, т. 20, № 7, с. 3–12.
3. *Столингс В.* Основы защиты сетей. Приложения и стандарты. М.: Издательский дом «Вильямс», 2002.

Н. В. Дмитриев (Ставрополь, СГУ)**. Имитационная модель группового взаимодействия автоматизированных телескопов.**

На основании проведенного анализа информации об основных тенденциях развития, стратегиях управления и стандартах взаимодействия астрономических сетей, ориентированных на автоматизированный мониторинг небесных объектов, сформулированы основные и наиболее перспективные принципы их организации, которыми нужно руководствоваться при разработке новых сетей.

Разработка средств и методов проведения и контроля сетевого эксперимента (наблюдательного цикла) необходимо включает в себя моделирование процессов группового взаимодействия телескопов. Важное значение имеет развитие алгоритмического и программного обеспечения для автоматизированных устройств мониторинга небесных объектов.

Современные телескопы весьма дорогостоящие сооружения. Их эксплуатация, сбор, хранение, доступ к полученным данным требует значительных затрат, а следовательно, эффективного использования временного ресурса — наблюдательного времени, для чего необходима правильная организация всего наблюдательного процесса.

Альтернативой проведению дорогостоящих натурных экспериментов, с целью выявления наиболее эффективной структуры сети и оценки характеристик качества обслуживания (временных потерь, связанных с простоем обслуживающих узлов, ввиду недостаточной загруженности и потерь заявок, в результате превышения величиной поступающей нагрузки числа узлов сети) являются вычислительные эксперименты с разработанной автором имитационной моделью, учитывающей особенности обслуживания в распределенной мониторинговой сети.

Имитационная модель разработана на основе алгоритма с дисциплиной обслуживания, предусматривающей ведение отдельной очереди для каждого узла. Учитывается разница во времени наступления восхода/захода Солнца для телескопов сети.

Входными данными являются характеристики потока длительностей обслуживания (полученные при анализе процессов в реальных сетях телескопов), потока входящей нагрузки, время восхода/захода Солнца для каждого узла, число узлов, число итераций.

Анализируя выходные данные графически, можно оценить характеристики качества обслуживания, в зависимости от нагрузки и от географического расположения узлов. Информация, полученная с помощью вычислительных экспериментов с моделью, может использоваться при проектировании географически распределенной сети автоматизированных телескопов.

А. В. П е т р у с е в и ч (Санкт-Петербург, СПбГУ)**. Оптимальный объем производства в условиях неопределенности спроса.**

Решение задач производственного планирования является неотъемлемой частью практики любого промышленного предприятия. В работе, представленной данным докладом, развивается и изучается экономико-математическая модель определения оптимального ежепериодного объема производства в условиях неопределенности спроса.

Главной особенностью рассмотренной модели является способ описания неопределенности спроса. Следуя базовой для данного исследования работе [1], спрос D фиксирован и принадлежит известному интервалу, при этом точная его величина неизвестна и ни одни значения внутри этого интервала фирма не может предпочесть другим. Таким образом, предполагается, что спрос является реализацией равномерно распределенной на отрезке случайной величины.

Не имея точной информации о спросе, фирма делает «попытку», выбирая объем производства из текущего интервала спроса. В результате возникает одна из двух возможных ситуаций: недопроизводство, либо перепроизводство. Ситуация недопроизводства уточняет имеющуюся о спросе информацию, корректируя нижнюю границу интервала спроса, и в следующем периоде фирма принимает аналогичное решение по объему на основе нового интервала. Перепроизводство исключает неопределенность спроса в будущем, определяя его точную величину до конца горизонта планирования.

В результате отклонения объема производимой и поставляемой на рынок продукции от величины спроса фирма терпит издержки: с одной стороны — альтернативные издержки от недопроизводства, с другой — фактические издержки от перепроизводства продукции. Таким образом, имеет место оптимизационная задача определения объемов производства, целью которой является минимизация ожидаемых издержек.

В литературе существует несколько модификаций модели Алперна и Сноуэра [1], например, [2] и [3]. Нами же сделано расширение базовой модели в двух направлениях.

1. Рассмотрена модель в предположении изменения величины спроса от периода к периоду с постоянным и известным темпом $\gamma > 0$ так, что в периоде с номером спрос равен $\gamma^{k-1} D$, при этом он может как расти, так и падать. Получены рекуррентные соотношения для оптимального решения.

2. В отличие от базовой работы [1], где изучен случай только бесконечного горизонта планирования $T = \infty$, нами получено оптимальное решение для более соответствующего реальности конечного случая $T < \infty$.

В дальнейшем в данную модель возможно включение вопроса о производственной мощности, что переведет, таким образом, задачу в область долгосрочного планирования. Также интересной остается аналогичная задача с другими вероятностными распределениями величины спроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alpern S.*, *Snower D.* Inventories as an information-gathering device. — Discussion paper 87/151. London: London School of Economics: ICERD, 1987, v. 3, 1.
2. *Reyniers D.* Interactive high-low search: The case of lost sales. — J. Oper. Res. Soc., 1989, v. 40, 8, p. 769–780.
3. *Reyniers D.* A high-low search algorithm for a newsboy problem with delayed information feedback. — Oper. Res., 1990, v. 38, 5, p. 838–846.

В. И. А с т а ф ь е в, П. В. Р о т е р с (Самара, СамГУ)**. О продуктивности двоякопериодических систем добывающих скважин.**

Система скважин моделируется плоской бесконечной двоякопериодической решеткой точечных стоков одинаковой мощности. В работе рассматривается зависимость продуктивности такой системы от формы решетки.

В настоящее время для оценки продуктивности системы скважин используются так называемый shape factor (коэффициент формы). Он позволяет определить среднее давление в области питания скважины в зависимости от формы его контура питания. В работе [1] величина коэффициента формы была вычислена для ряда решеток (прямоугольная, равнобедренно-треугольная, ромбическая) и сравнена с коэффициентом формы для идеального кругового контура.

В данной работе найдена аналитическая зависимость коэффициента формы от типа решетки, что позволяет рассчитать shape factor для любой формы контура питания. Аналогично работам из области вихревой динамики [2, 3] для двоякопериодических систем скважин была построена математическая модель с привлечением эллиптических функций Вейерштрасса. Данная модель задает комплексный потенциал, являющийся двоякопериодической функцией, в виде:

$$\varphi(z,\overline{z}) = \ln\sigma(z) + \frac{\alpha z^2}{2} - \frac{\pi}{\Delta} z\overline{z}, \tag{1}$$

где $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса, $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\eta_1$, $\eta_1 = \zeta(\omega_1/2)$ — квазипериод дзета-функции Вейерштрасса, Δ — площадь ячейки для выбранного типа решетки.

Вещественная часть данного потенциала определяет поле давления, а его производная — поле скоростей. Данная математическая модель позволила вычислить распределения поля давления и поля скоростей в решетках произвольных конфигураций и определить контуры питания скважин, расположенных в узлах решетки.

В итоге для коэффициента продуктивности скважины $PI = 1/\mathrm{Re}\,\varphi(z,\overline{z})$ было найдено явное выражение:

$$PI = 2/\ln\left[\frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2}\right], \tag{2}$$

где $\gamma = 1,781$, r_w — радиус скважины, C_A — коэффициент формы решетки.

Для коэффициента формы в решетках произвольной конфигурации было найдено следующее выражение:

$$C_A = \frac{16KK_1(2kk_1)^{2/3}}{\gamma}. \tag{3}$$

Здесь K — полный эллиптический интеграл первого рода, а k — его модуль, $k_1 = \sqrt{1-k^2}$, $K_1 = K(k)$. Для комплексных значений k, величины k, k_1, K и K_1 удобно вычислять с помощью тэта-функций Якоби [4], для вещественных — эти зависимости протабулированны.

Значения коэффициента C_A полностью совпали со значениями, вычисленными Дитцом и другими авторами путем численного суммирования бесконечных условносходящихся рядов для некоторых типов решеток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dietz D. N.* Determination of Average Recervoir Pressure From Build-Up Surveys. Rejswijk, The Nitherlands: SPE, 1965. p. 955–959.
2. *О'Нейл К. А.* О гамильтовой динамике вихревых решеток. — Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 336–353.
3. *Ткаченко В. К.* О вихревых решетках. — ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 1875–1883.
4. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Часть 2. М.: Физматлит, 1963, 516 с.; т. 49, с. 1875–1883.

И. Н. Топчиев, **Г. В. Шагрова** (Ставрополь, СевКавГТУ). **Алгоритм распознавания намагниченных ячеек на изображении визуализированной сигналограммы.**

Разработанный алгоритм распознавания намагниченных ячеек на изображении визуализированной сигналограммы используется при определении полей рассеяния намагниченных объектов и основан на разработанных процедурах распознавания объектов, преобразования изображений в массив яркостных характеристик, а также импорта значений яркости в двумерный массив.

Для определения полей рассеяния намагниченных объектов по их визуализированным изображениям в программном комплексе [1] используется следующий алгоритм

1. Импортирование обрабатываемых изображений, полученных экспериментальным путем, в программный модуль.

2. Нахождение объектов на изображениях и выделение опорных пикселей.

3. Занесение в таблицы значений яркостных характеристик пикселей анализируемых изображений.

4. Выборка с помощью SQL-запросов в отдельный двумерный массив значений координат опорных пикселей распознанных объектов.

5. Вычисление количества пикселей, содержащихся между опорными точками, на основе полученных значений координат.

6. Расчет калибровочного коэффициента и масштаба для измерения реальных геометрических параметров распознанных объектов: 6.1) получение изображения объект-микрометра при увеличении, которое используется для получения изображений, предназначенных для анализа; 6.2) определение количества пикселей, содержащихся в фрагменте изображени яобъект-микрометра (P); 6.3) расчет масштаба анализируемого изображения по формуле $M = L_r/L$, где L_r — известное расстояние на калибровочном изображении, L — расстояние на калибровочном изображении при масштабе измерительных инструментов $1 : 1$; 6.4) расчет калибровочного коэффициента по формуле $K = L/P$, где P — измеренное расстояние в пикселях на калибровочном изображении при масштабе измерительных инструментов $1 : 1$.

7. Расчет расстояния в зависимости от количества пикселей и масштаба по формуле $L = P\,K\,M$.

Реализованные алгоритмы программного модуля используются для вычисления смещения ячеек в горизонтальном и вертикальном поле в пикселях, которые затем преобразуются в реальные единицы измерения (микроны), исходя из ранее рассчитанного калибровочного коэффициента и масштаба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Топчиев И. Н.*, *Шагрова Г. В.* Программный комплекс для определения полей рассеяния намагниченных объектов. — В сб. научных трудов СевКавГТУ. Серия естественнонаучная, № 6.

И. Н. Топчиев, Г. В. Шагрова (Ставрополь, СевКавГТУ)**. Моделирование работы датчика магнитного поля в виде намагниченных ячеек.**

Разработана математическая модель работы датчика магнитного поля, представляющего собой сигналограмму на магнитной ленте в виде двухмерной периодической системы намагниченных ячеек. При визуализации датчика с помощью магниточувствительной жидкости вне поля образуется периодическая система полос осадка, показанная на рис. 1. Наложение внешнего магнитного поля напряженностью H на визуализированный датчик изменяет его геометрические параметры (рис. 2). Полосы осадка формируются в области потокопереходов, изменения остаточной намагниченности вдоль дорожки схематически показаны на рис. 1.

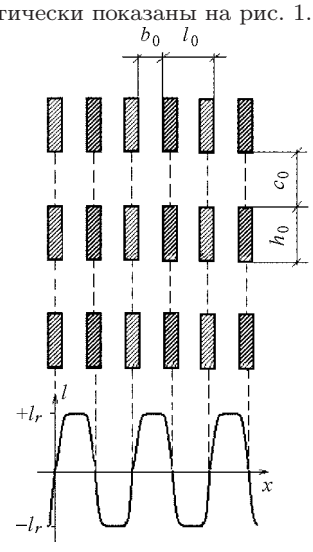


Рис. 1. Расположение и параметры намагниченных ячеек датчика магнитного поля

Значения b_0 и l_0 представляют собой расстояния между внутренними и наружными границами соседних визуализированных полос, измеренные вдоль дорожки записи, а h_0 — ширина дорожки и c_0 — расстояние между дорожками. Изменение геометрических параметров визуализированного датчика зависит от величины и направления внешнего магнитного поля. В магнитном поле, направленном вдоль дорожки, полосы также смещаются вдоль дорожки, расстояния между внутренними b и наружными l границами соседних визуализированных полос, а также параметры $p = b - b_0$ и $q = l - l_0$ изменяются в зависимости от величины поля. Если внешнее магнитное поле перпендикулярно дорожке, то расстояние между полосами осадка не изменяется, а наблюдается смещение полос в направлении, перпендикулярном дорожке (рис. 2).

По полученным экспериментально калибровочным данным найдены аппроксимационные зависимости внешнего поля от параметров p, q, h.

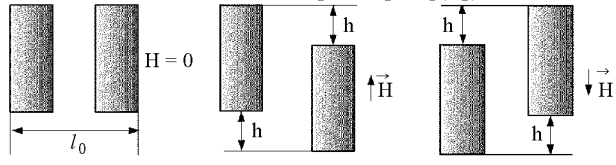


Рис. 2. Смещение визуализированных полос в поле, перпендикулярном дорожке записи

Таким образом, разработанная математическая модель работы датчика магнит-

ного поля в виде намагниченных ячеек представлена следующими выражениями:

$$H(p) = 0,098e^{0,198p} + 0,382, \quad H(q) = 0,051e^{0,233q} + 0,689, \quad H(h) = 0,36h - 0,56.$$

Разработанная математическая модель позволяет по известным значениям смещения полос осадка определить напряженность поля рассеяния исследуемого намагниченного объекта в области расположения соответствующей намагниченной ячейки датчика поля относительно объекта.

А. А. Чубатов, **В. Н. Кармазин** (Армавир, АГПУ; Краснодар, КубГУ)**. Одновременная экспресс-идентификация интенсивностей нескольких источников загрязнения атмосферы.**

Рассматривается подход, позволяющий организовать оперативный контроль за несколькими источниками загрязнения атмосферы. Работа продолжает исследования, представленные в [1–3].

Рассмотрим линейное полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии с однородными краевыми условиями [4]. Функцию источника представим в виде $F(x,y,z,t) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(x,y,z) \cdot g_k(t)$, где функции $f_k(x,y,z)$ и $g_k(t)$ определяют пространственное распределение и интенсивность действия k-го источника.

Пусть, в точках (x_j, y_j, z_j), $(j = 1, \ldots, J,\ J \geqslant p)$ в моменты времени $t_i = i \cdot \Delta t$ известны замеры концентрации примеси $c_{ji} = q(x_j, y_j, z_j, t_i) + \delta \cdot \gamma$, где δ — среднеквадратичная ошибка измерений, γ — нормальная случайная величина с единичной дисперсией и нулевым математическим ожиданием.

Задача идентификации состоит в последовательном оценивании на каждом временно́м промежутке $[t_{i-1}; t_i]$ интенсивностей источников $g_{ki}, k = 1, \ldots, p$ по данным замеров концентрации c_{ji} и известным коэффициентам чувствительности $\phi_{kji} = \mathcal{Q}_k(x_j, y_j, z_j, t_i)$ [1,5] ($\mathcal{Q}_k(x,y,z,t)$ — решение прямой задачи при $g_k(t) = 1$).

Для аппроксимации прямой задачи использовался численный аналог теоремы Дюамеля. Обратная задача решалась методами саморегуляризации (шаговой регуляризации), последовательной функциональной аппроксимации [5] и последовательной (локальной) регуляризации по А. Н. Тихонову. Решения, полученные с помощью данных методов, представлены в форме цифрового фильтра в смысле Хэмминга.

Выбор регуляризирующего параметра r(числа последующих шагов по времени) для метода последовательной функциональной аппроксимации осуществляется двумя способами: на основе теоретической (априорной) оценки погрешности восстановления интенсивностей и с помощью принципа невязки. В методе локальной регуляризации значение параметра регуляризации α выбирается согласно принципа невязки.

На ряде методических задач проведены численные эксперименты. Построены устойчивые численные приближения к искомым интенсивностям при наличии погрешностей измерений ($\delta \leqslant 0{,}03 \cdot c_{nom}$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (проект № 09-01-96506, «Разработка экспрессных методов мониторинга источников загрязнения атмосферы»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чубатов А. А., Кармазин В. Н.* Идентификация интенсивности источника загрязнения атмосферы на основе метода последовательной функциональной аппроксимации. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 6, с. 1143–1144.
2. *Чубатов А. А., Кармазин В. Н.* Устойчивая оценка интенсивности источника загрязнения атмосферы. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 1142–1143.
3. *Чубатов А. А., Кармазин В. Н.* Идентификация интенсивностей нескольких источников загрязнения атмосферы. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 1, с. 188.
4. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982.
5. *Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл.* Некорректные обратные задачи теплопроводности: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.

А. Б. Ш и ш к о в, **А. В. З я з и н** (Москва, МИРЭА(ТУ)). **Об индексе многочлена, представляющего бент-функцию над простым полем нечетной характеристики.**

Интерес к булевым функциям, находящимся на наибольшем расстоянии, с точки зрения метрики Хэмминга, от класса аффинных функций, появился у специалистов по теории кодирования и криптографии в 70ые годы прошлого века. Для таких функций О. С. Ротхауз [1] ввел термин «бент-функция». Впоследствии обобщение этого понятия было произведено для функций над кольцами вычетов [2], непростыми полями [3] и произвольными конечными абелевыми группами [4, 5].

Несмотря на то, что в последнее время появилось достаточно большое количество работ, посвященных характеризации бент-функций, описанию некоторых классов бент-функций и их обобщений, задача полного описания этого класса функций даже в булевом случае остается нерешенной. Этим объясняется повышенное внимание к описанию всевозможных свойств бент-функций над различными алгебраическими структурами.

В этой работе мы введем понятие бент-функции над простым полем нечетной характеристики и опишем свойства некоторых представлений таких отображений. Введем необходимые обозначения. Пусть $P = Z_p$ — простое поле характеристики p. Пусть $F : P^n \to P$ — функция от n переменных над полем P. Коэффициенты Уолша–Адамара для функции F определим следующим образом:

$$C_\alpha^F = 1/p^n \sum_{x \in P^n} (\xi)^{F(x) - <x,\alpha>}$$

Здесь $< x, \alpha >= x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n \bmod p$, $x = (x_1, \mathrm{E}, x_n)$, $\alpha = (a_1, \mathrm{E}, a_n) \in P^n$, ξ — примитивный корень из единицы степени p. Справедливы соотношения:

$$\xi^{F(x)} = \sum_{\alpha \in P^n} C_\alpha^F \xi^{<x,\alpha>}, \ \sum_{\alpha \in P^n} |C_\alpha^F|^2 = 1.$$

F — бент-функция, если для всех $\alpha \in P^n$

$$|C_\alpha^F| = p^{-n/2}.$$

При выборе фиксированного базиса поля $Q = GF(p^n)$ над полем P, функция F однозначно задается многочленом $\Phi(x)$ из кольца $Q[x]$ степени не выше $p^n - 1$.

Индекс нелинейности $\operatorname{ind}\Phi(x)$ *многочлена* $\Phi(x)$ — *максимальный индекс нелинейности его мономов*;

Индекс нелинейности монома ax^t — *целочисленная сумма разрядов p-ичного разложения числа* t:

$$t = t_0 + t_1p + \cdots + t_{n-1}p^{n-1} \Rightarrow \operatorname{ind} ax^t = t_0 + t_1 + \ldots + t_{n-1}.$$

Основным результатом работы является:

Теорема. *Если* $\Phi(x)$ — *многочлен, представляющий бент-функцию от n переменных над полем P, то* $\operatorname{ind}\Phi(x) \leqslant (p-1)(]n/2[+1) - 1$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ 4.2008.10

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rothaus O. S.* On bent functions. — J. Comb. Theory, 1976, v. 20, p. 300–305.
2. *Kumar P. V.*, *Scholtz R. A.*, *Welch L. R.* Generalized Bent Functions and Their Properties. — J. Comb. Theory, 1985, Ser. A 40(1), p. 90–107.
3. *Амбросимов А. С.* Свойства бент-функций q-значной логики над конечными полями. — Дискретн. матем., 1994, т. 6, в. 3, с. 50–60

4. *Солодовников В. И.* Бент-функции из конечной абелевой группы в конечную абелеву группу. — Дискретн. матем., 2002, т. 14, в. 1, с. 99–113
5. *Логачев О. А.*, *Сальников А. А.*, *Ященко В. В.* Бент-функции на конечной абелевой группе. — Дискретн. матем., 1997, т. 9, в. 4, с. 3–20

А. В. Бернштейн (Москва, ИСА РАН)**. Восстановление по данным инвариантных функций.**

Задача восставновления неизвестной функции по данным как элемент построения по данным метамодели сформулирована в [1]. Пусть M — некоторая исходная модель (метод), позволяющая для заданных входных данных $X \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^p$ строить функцию отклика $Y = F_M(X) \in \mathbf{R}^q$. Пусть $D_N = \{(X_i, Y_i = F_M(X_i)),\ i = 1, 2, \ldots, N\}$ — результаты экспериментов с моделью M для множества входных данных $\mathbf{X}_N = \{X_i,\ i = 1, 2, \ldots, N\}$, по которым строится аппроксиматор $Y = F_{SM}(X) = F_{SM}(X|D_N)$ для исходной зависимости $F_M(X)$. Если новая модель SM, определяемая построенной зависимостью $F_{SM}(X)$, обладает «обобщающей способностью», т. е. обеспечивает приближенное равенство $F_{SM}(X) \approx F_M(X)$ для всех $X \in \mathbf{X}$ (не только на обучающем множестве $\mathbf{X}_N$), то модель SM может рассматриваться как заменитель исходной модели M и называется *метамоделью* или *суррогатной моделью*[1].

Во многих прикладных проблемах наряду с данными D_N может также иметься априорная информация о модели M (функции F_M), учет которой может повысить качество создаваемой метамодели [2].

Рассмотрим задачу построения метамодели SM для модели M, в которой функция F_M инвариантна относительно конечной группы $G = \{g\}$ преобразований: $F_M(X) = F_M(gX)$, $X \in \mathbf{X}$, $g \in G$. Для этой задачи можно использовать расширенную выборку $D_{N,G} = \{D_N(g),\ g \in G\}$, где $D_N(g) = \{(gX_i,\ Y_i = F(X_i)),\ i = 1, 2, \ldots, N\}$. Аппроксиматор $F_{SM}(X|D_{N,G})$, построенный по расширенной выборке, имеет ошибку

$$\varepsilon(F_{SM}(X|D_{N,G})) = \left((N|G|)^{-1} \sum_i \sum_{g \in G} \|Y_i - F_{SM}(gX_i)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим симметризованный аппроксиматор $F_{SM-G}(X) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} F_{SM}(gX)$, имеющий ошибку $\varepsilon(F_{SM-G}(X|D_{N,G}))$.

Теорема. *Имеет место соотношение*

$$\varepsilon^2(F_{SM}|D_{N,G}) = \varepsilon^2(F_{SM-G}|D_{N,G}) + N^{-1} \sum_i V_G(X_i),$$

где $V_G(X) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (F_{SM}(gX) - F_{SM-G}(X))^2$.

Следовательно, исходный аппроксиматор F_{SM} строго мажорируется его инвариантной версией F_{SM-G}, если только аппроксиматор F_{SM} не инвариантен относительно группы G (по крайней мере, на множестве $\mathbf{X}_N$), в этом случае $F_S(X)$ и $F_{SG}(X)$ совпадают.

Приведем результаты вычислительных экспериментов для некоторой прикладной задачи, связанной с оценкой напряженности электромагнитного поля от нескольких источников излучения, имеющей очевидную инвариантную структуру. По одним и тем же данным были построены исходный (F_{SM}) и инвариантный (F_{SM-G}) аппроксиматоры, для которых были вычислены средние ошибки на 4 выбранных случайно тестовых множествах $\mathbf{X}(k) \subset \mathbf{X}$, $k = 1, 2, 3, 4$, большого объема, точки из которых не использовались при построении аппроксиматоров. Нормированные (по отношению к размахам тестовых выборок) значения ошибок $E(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, приведены в таблице:

k	$E(k)$ для F_{SM}	$E(k)$ для F_{SM-G}	k	$E(k)$ для F_{SM}	$E(k)$ для F_{SM-G}
1	0,0263	0,0099	3	0,0446	0,0209
2	0,0421	0,0171	4	0,0510	0,0294

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн А. В.*, *Кулешов А. П.* Математические методы построения метамоделей. — Труды Третьей международной конференция «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2009, 14–18 сентября 2009 г., Звенигород, Россия). 2009, с. 756–768.
2. *Кулешов А. П.*, *Бернштейн А. В.* Когнитивные технологии интеграции данных и знаний в метамоделировании. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 1088–1089.

Е. Ф. Т и м о ф е е в а, **Т. И. Д е н и с е н к о** (Ставрополь, СевКавГТУ).
Математическое моделирование движения поверхностных волн для водоема с нелинейной функцией рельефа дна.

В настоящем докладе рассматривается декартова прямоугольная система координат, начало которой совмещено с урезом воды. Ось OX совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена в сторону моря.

При построении непрерывной математической модели, описывающей движение волны на свободной поверхности жидкости переменной глубины, решается задача Коши для пространственно-одномерного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\zeta(x,0) = \varphi_0(x), \quad \zeta'(x,0) = \varphi_1(x), \tag{2}$$

где $\zeta(x,t)$ — отклонение свободной поверхности жидкости от равновесного состояния, x — горизонтальная координата, t — время, g — ускорение силы тяжести, $h(x)$ — глубина жидкости.

С учетом уравнения для глубины жидкости $h(x)$ в развернутой форме $h(x) = h_0x^{1/3}/x_0$, $x < x_0$, где h_0 — максимальная глубина жидкости рассматриваемой области, x_0 — граница области, уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} - \frac{x^{1/3}}{x_0}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{1}{3x_0x^{2/3}}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \qquad a^2 = gh_0. \tag{3}$$

Решение полученной задачи находится с помощью метода Римана. Для этого вводится замена переменных в уравнении (3):

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{x_0}}t + \frac{6}{5}x^{5/6}, \quad \eta = \frac{a}{\sqrt{x_0}}t - \frac{6}{5}x^{5/6},$$

в результате уравнение (3) в канонической форме имеет вид

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{10(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} - \frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right) = 0. \tag{4}$$

Прямая $t = 0$ переходит в наклонную прямую $\eta = -\xi$. Начальные условия в новых переменных запишутся следующим образом:

$$\zeta|_{\eta=-\xi} = \varphi_0\left(\left(\frac{5}{6}\xi\right)^{6/5}\right), \quad \left.\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right|_{\eta=-\xi} = 0.$$

Функция $\zeta = \zeta(\xi,\eta)$ заменяется на $u = \zeta(\xi-\eta)^{1/10}$, тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{9u}{100(\xi-\eta)^2} = 0$$

или

$$Lu = u_{\xi\eta} + au_\xi + bu_\eta + cu = 0, \tag{5}$$

где $a = b = 0$, $c = 9/(100(\xi-\eta)^2)$. Тогда решение уравнения (5) выражается формулой Римана:

$$u(M) = \frac{u(P)v(P) + u(Q)v(Q)}{2} - \frac{1}{2}\int_{PQ}(uv_\xi - vu_\xi - 2bvu)\,d\xi + (uv_\eta - vu_\eta + 2\alpha vu)\,d\eta,$$

где P, Q, M — вершины характеристического треугольника, $u(\xi,\eta)$ — решение уравнения (5), $v(\xi,\eta)$ — функция Римана, решение задачи Гурса.

Принимая во внимание, что $\zeta(x_0,t_0)=u(\xi_0,\eta_0)(12/5)^{-1/10}x^{-1/12}$, условия на характеристиках, а также определенные значения $u(P)$, $u(Q)$, $v(P)$, $v(Q)$ и возвращаясь к старым переменным, решение задачи (1)–(2) получаем в следующей форме:

$$\begin{aligned}\zeta(x,t)=&\frac{\alpha_1^{1/10}\varphi_0(\alpha_1^{6/5})+\alpha_2^{1/10}\varphi_0(\alpha_2^{6/5})}{2x^{1/12}}\\&+\frac{\sqrt{x_0}}{2ax^{1/12}}(5/6)^{1/10}\int_{\beta_1}^{\beta_2}F\Big(\frac{9}{10},\frac{1}{10},1,\theta_1\Big)\xi^{1/10}\varphi_1(\theta_2)\,d\xi\\&+\frac{9at}{400\sqrt{x_0}x^{1/12}}(5/6)^{1/10}\int_{\beta_1}^{\beta_2}F\Big(\frac{19}{10},\frac{11}{10},2,\theta_1\Big)\xi^{1/10}\varphi_0(\theta_2)\xi^{-1/2}\,d\xi,\end{aligned}$$

где $\alpha_1=x^{5/6}+5at/\sqrt{x_0}$, $\alpha_2=x^{5/6}-5at/\sqrt{x_0}$, $\beta_1=(6/5)x^{5/6}-at/\sqrt{x_0}$, $\beta_2=(6/5)x^{5/6}+at/\sqrt{x_0}$,

$$\theta_1=\left(\frac{a^2t^2}{x_0}-\left(\frac{6}{5}x^{5/6}-\xi\right)^2\right)\Big/\left(\frac{24}{5}\xi x^{5/6}\right),\quad \theta_2=\left(\frac{5}{6}\xi\right)^{6/5}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев И. О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001.
2. *Овсянников Л. В.* Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1973.
3. *Кошляков Н. С.*, *Глинер Э. Б.*, *Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. Москва, 1962.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным равнениям. Москва, 1965.

Д. А. К о л ч и н (Москва, ТВП)**. Об одном методе построения каскадов «прыгающих» регистров сдвига.**

В качестве генераторов псевдослучайных последовательностей (ГПСП) широко используются регистры сдвига, закон функционирования которых зависит от знаков управляющей последовательности. Например, в [1] предложено использовать «прыгающие» линейные регистры сдвига длины n над полем GF(2) с индексом «прыжка» J, где под индексом «прыжка» J линейного регистра сдвига понимается такая степень A^J его сопровождающей матрицы A, что $A^J = A + E$, $J < 2^n - 1$, где E — единичная матрица, в каждый такт работы регистр сдвига осуществляет либо сдвиг на один такт вперед, либо совершает «прыжок» на J шагов по цикловой структуре. Реализация «прыжка» представляет собой умножение на матрицу $A + E$. В [1] показано, что характеристический многочлен полноциклового регистра сдвига с заданным индексом прыжка $J = 2^{n/2} - \delta$, где δ — небольшое фиксированное натуральное число, делит многочлен $(x^{\delta+1} + x^\delta)^{\delta+1} + (x^{\delta+1} + x^\delta)^\delta + x$. Впоследствии данная идея была развита в работах [2]–[4].

С целью увеличения количества вырабатываемых знаков в каждый такт работы ГПСП, автором предлагается использовать каскад из 2^k «прыгающих» полноцикловых регистров сдвига длины n с одинаковыми характеристическими многочленами. Каждый регистр сдвига в каждый такт работы осуществляет либо сдвиг на один такт вперед, либо совершает прыжок на $2^{(n-k)/2} - \delta$ шагов (малый «прыжок» по цикловой структуре), $A + E = A^{2^{(n-k)/2}-\delta}$. При этом характеристический многочлен полноциклового регистра сдвига с заданным индексом «прыжка» делит полином $(x^{\delta+1} + x^\delta)^{2^k(\delta+1)} + (x^{\delta+1} + x^\delta)^{2^k\delta} + x$.

Предлагается способ задания начального заполнения каскада «прыгающих» регистров с гарантированным отсутствием повторов их внутренних состояний в течение $2^{(n-k)/2} - \delta$ тактов. Для этого начальное заполнение первого регистра должно быть ненулевым, начальное состояние $i + 1$ регистра вырабатывается из начального состояния i регистра с использованием большого «прыжка» по цикловой структуре на $2^{n-k} - \delta^2$ шагов, $i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$.

Способ реализации «большого прыжка» может быть выведен из соотношения $A^{2^{n-k}-\delta^2} = (A^\delta + E)^{\delta+1}A^\delta + (A + E)^\delta$. В качестве иллюстрации рассмотрим два простых примера.

Если $\delta = 2^i$, то формула «большого прыжка» принимает вид $A^{2^{n-k}-\delta^2} = E + A^{\delta+1} + A^{2\delta} + A^{2\delta+1}$. При этом для получения состояния регистра сдвига через $2^{n-k} - \delta^2$ тактов требуется проработка регистра в течение $2\delta+1$ тактов с подсуммированием состояний в заданный массив памяти в такты $0, \delta + 1, 2\delta, 2\delta + 1$.

Если $\delta = 9$, то полученная выше формула «большого прыжка» имеет вид $A^{2^{n-k}-81} = A^{19} + A^{17} + A^{11} + A^8 + A + E$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jansen C. J. A.* Modern stream cipher design: A new view on multiple clocking and irreducible polynomials. — In: Gonzalez S., Martinez C., eds.: Actas de la VII Reunion Espanola sobre Criptologia y Seguridad de la Informacion. Volume Tomo I. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo, 2002, p. 11–29.
2. *Jansen C. J. A.* Partitions of polynomials: Stream ciphers based on jumping shift registers. — In: Cardinal J., Cerf N., Delgrange O., Markowitch O., eds.: 26th Symposium on Information Theory in the Benelux, Enschede, Werkgemeenschap voor Informatieen Communicatietheorie, 2005, p. 277–284.
3. *Babbage S., Dodd M.* Finding characteristic polynomials with jump indices, 2006.
4. *Jansen C. J. A.* Stream cipher design based on jumping finite state machines, 2005.

И. В. З а й ц е в а, **Л. Л. Г у с е в а** (Ставрополь, СГУ). **Проблема устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.**

Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами проверяется по корням характеристического уравнения. Более общим методом исследования устойчивости, пригодным как для линейных, так и для нелинейных систем является второй метод Ляпунова, основанный на построении функции Ляпунова [1]. Если доказано существование функции Ляпунова, то вопрос об устойчивости решен. Только для линейных систем доказано, что если характеристический полином системы гурвицев, то функция Ляпунова обязательно существует в виде квадратичной формы переменных. Поскольку как статистические ошибки, так и вариации параметров обсуждаемых систем, их малый дрейф неизбежны, то систему устойчивую, но теряющую устойчивость при малых вариациях параметров, по-настоящему устойчивой считать нельзя. Таким образом, существование функции Ляпунова не гарантирует сохранения устойчивости модели рынка труда при малых вариациях его параметров.

Затронутая проблема имеет место и в технических системах, где анализируется работа каких-либо регуляторов (например, в электроэнергетике [2]), а также в экономике, где примером может служить динамическая межотраслевая модель [2], [3]. Когда речь идет о их «острой» настройке, то это означает потерю устойчивости даже при значительном ее запасе при вариации параметров управляемий системы или коэффициентов усиления регуляторов.

Таким образом устанавливается, что ни «хорошие» корни характеристического полинома, ни существование функции Ляпунова не гарантируют от потери устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров. Никакое исследование матрицы коэффициентов системы не может дать надежного ответа на вопрос о сохранении устойчивости. Например, в работе [4] отмечается, что «существуют системы с одним и тем же характеристическим полиномом, одной и той же матрицей коэффициентов при записи в форме Коши, с одной и той же функцией Ляпунова, но различающиеся по свойству сохранения устойчивости при вариациях параметров» . Сказанное не противоречит теории и теоремам Ляпунова, однако ограничивает практическое применение первого и второго методов Ляпунова.

Очевидно для того, чтобы теория устойчивости давала правильные ответы на практически важные вопросы о ее сохранении, необходимы некоторые дополнительные исследования и расчеты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект 08-02-00245а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. сочинений АН СССР, 2, 1956.
2. *Торопцев Е.Л.* Моделирование процессов экономической динамики макросистем. СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2001.
3. *Торопцев Е. Л.*, *Гурнович Т. Г.* Численный анализ балансовых моделей и управление устойчивостью макроэкономических систем. М.: Финансы и статистика, 2002.
4. *Петров Ю.П.* Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

М. Н. О с и п о в (Самара, СамГУ)**. Определение полей перемещений на основе спекл-интерферометрии с применением кольцевых апертур.**

Экспериментальные методы остаются основным критерием истинности существующих математических моделей, несмотря на большие достижения в сфере развития вычислительной техники и математических методов численного моделирования, которые позволяют решать различные задачи механики. Особое внимание в последнее время уделяется развитию оптических экспериментальных методов для решения как фундаментальных, так и прикладных задач механики деформируемого твердого тела с использованием методов когерентной оптики. Одним из методов, используемых для определения полей перемещений в механике деформируемого твердого тела, является метод спекл-интерферометрии.

Предлагается применить кольцевые апертуры при записи спекл-интерферограмм. Как показали теоретические и экспериментальные исследования, такая запись позволяет увеличить чувствительность и расширить диапазон измеряемых величин перемещений по сравнению со стандартным метод спекл-интерферометрии [1]. Кроме того, кольцевые апертуры позволяют при восстановлении методом Юнга улучшить структуру интерференционных полос Юнга по сравнению с традиционным методом спекл-интерферометрии без кольцевых апертур. Улучшенная структура полос Юнга повышает точность и скорость их анализа при автоматизации процесса обработки интерференционных полос.

При записи и расшифровки спекл-интерферограмм предлагается применить метод «сэндвич». Сущность метода заключается в следующем. Регистрация спекл интерферограмм осуществляется одновременно на две совмещенные эмульсионной стороной фотопластинки, образующие так называемый «сэндвич». Каждая пара «сэндвич» спекл-интерферограмм регистрируется при различных условиях (нагрузках, деформациях) воздействия на исследуемый объект методом двух экспозиций. Комбинация «сэндвичей» при восстановлении спекл-интерферограмм из различных партий позволяет отследить динамику напряженно-деформируемого состояния объекта. Расшифровка смещенных фотопластинок относительно друг друга в их плоскости из «сэндвича» методом Юнга приводит к образованию муаровых полос. Теоретические расчеты и эксперимент показали, что по муаровым полосам определяется величина деформаций в исследуемых точках. Кроме того такой метод расшифровки позволяет исключить перемещение исследуемого объекта как целого, что позволяет также повысить точность измерений.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-08-00971 и 08-01-99023

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов М. Н.*, *Шапошников М. Ю.* Применение кольцевой апертурной диафрагмы в спекл-интерферометрии. — Компьютерная оптика. Самара–Москва, 2002, в. 24, с. 110–113.

П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, А. В. Крупенников (Ульяновск, УлГТУ)**. О некоторых классах решений уравнений газовой динамики.**

Параметрический метод. Рассматривается система дифференциальных уравнений, в которой искомые функции u_k зависят от координат x, y и времени t:

$$F_k(x,y,t,u_1,\dots,u_n,u_{1x},\dots,u_{nx},u_{1y},\dots,u_{ny},u_{1t}\dots,u_{nt})=0, \qquad k=1,\dots,n. \quad (1)$$

Решение системы представляется в параметрической форме:

$$u_k=U_k(\xi,\eta,t), \qquad k=1,\dots,n, \quad x=x(\xi,\eta,t), \quad y=y(\xi,\eta,t).$$

Формулы перехода к новым переменным имеют вид

$$u_{kx}=\frac{U_{k\xi}y_\eta-U_{k\eta}y_\xi}{\Delta}, \quad u_{ky}=\frac{U_{k\eta}x_\xi-U_{k\xi}x_\eta}{\Delta},$$
$$u_{kt}=U_{kt}+U_{k\xi}\frac{y_tx_\eta-y_\eta x_t}{\Delta}+U_{k\eta}\frac{y_\xi x_t-x_\xi y_t}{\Delta},$$

где $\Delta=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi$ $(\Delta\neq 0)$. Система уравнений (1) преобразуется к виду

$$F_k(x,y,t,x_\xi,x_\eta,x_t,y_\xi,y_\eta,y_t,U_1,\dots,U_n,$$
$$U_{1\xi},\dots,U_{n\xi},U_{1\eta},\dots,U_{n\eta},U_{1t},\dots,U_{nt})=0. \quad (2)$$

В системе (2) величины x,y,u_k $(k=1,\dots,n)$ являются функциями переменных ξ,η,t. Решение системы (2) представляется в виде многочленов по степеням η:

$$U_k=\sum_{i=0}^{\alpha_k}u_{ki}(\xi,t)\eta^i, \quad x=\sum_{k=0}^{\gamma}x_k(\xi,t)\eta^k, \quad y=\sum_{k=0}^{\omega}y_k(\xi,t)\eta^k,$$

где $\alpha_k,\gamma,\omega\in\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел). Для квазилинейных уравнений первого порядка, коэффициенты в которых являются многочленами относительно зависимых u_k и независимых x, y переменных, предложен способ определения параметров $\alpha_k,\gamma,\omega\in\mathbf{N}$, для которых система дифференциальных уравнений для $x_k(\xi,t)$, $y_k(\xi,t)$, $u_{ki}(\xi,t)$ является определенной или недоопределенной.

На основе предлагаемого параметрического метода построены решения, проведена их классификация и указаны приложения для некоторых систем уравнений газовой динамики, в том числе

$$\begin{cases} u_t+uu_x+vu_y=-p_x/\rho, \\ v_t+uv_x+vv_y=-p_y/\rho, \\ u_x+v_y=0, \quad \rho=\text{const}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_t+uu_x-v_y=0, \\ u_y-v_x=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(u_t+uu_x+vu_y)=-p_x, \quad \rho(v_t+uv_x+vv_y)=-p_y, \\ \rho_t+\rho_x u+\rho_y v+\rho(u_x+v_y)=0, \\ \rho(p_t+up_x+vp_y)-\gamma p(\rho_t+u\rho_x+v\rho_y)=0, \quad \gamma=\text{const}. \end{cases}$$

Здесь $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ — проекции вектора скорости, $p(t,x,y)$ — давление, $\rho(t,x,y)$ — плотность.

В частности, получены решения простых и двойных волн. Построены также решения, описывающие течения газа с местными сверхзвуковыми зонами и с ударными волнами в соплах Лаваля.

При решении задач используется граничное условие (непротекания) на линии $g(x,y,t)=0$: $ug_x+vg_y=-g_t$. В стационарном случае решение систем отыскивается в виде

$$u=\sum_{i=0}^{\alpha}u_i(\xi)\eta^i,\quad v=\sum_{i=0}^{\beta}v_i(\xi)\eta^i,\quad x=\sum_{k=0}^{\gamma}x_k(\xi)\eta^k,\quad y=\sum_{k=0}^{\omega}y_k(\xi)\eta^k.$$

Аналогично задаются p, ρ. Параметрические уравнения обтекаемой линии $x=x_*(\xi)$, $y=y_*(\xi)$ определяются после решения обыкновенного дифференциального уравнения $uy_\xi-vx_\xi+(uy_\eta-vx_\eta)d\eta_*/d\xi=0$ при $\eta=\eta_*(\xi)$. Решение задачи, в том числе уравнение обтекаемой линии, определяется в результате решения задачи Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $u_k(\xi)$, $v_k(\xi)$, $x_k(\xi)$, $y_k(\xi)$, $\eta_*(\xi)$.

Методы разделения переменных и Галеркина. Безвихревые изэнтропические течения идеального газа описываются уравнением

$$\begin{aligned}&\varphi_{tt}+2\varphi_r\varphi_{rt}+\frac{2}{r^2}\varphi_\theta\varphi_{\theta t}+\varphi_r^2\varphi_{rr}+\frac{1}{r^4}\varphi_\theta^2\varphi_{\theta\theta}\\&\quad+\frac{2}{r^2}\varphi_r\varphi_\theta\varphi_{r\theta}-\frac{1}{r^3}\varphi_r\varphi_\theta^2=a^2\biggl(\varphi_{rr}+\frac{1}{r}\varphi_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}\biggr),\end{aligned}\tag{3}$$

$$a^2=\rho^{\gamma-1}=P^{(\gamma-1)/\gamma}=\frac{\gamma+1}{2}-(\gamma-1)\biggl(\varphi_t+\frac{1}{2}\varphi_r^2+\frac{1}{2r^2}\varphi_\theta^2\biggr).$$

Здесь $\varphi(r,\theta,t)$, a, P, ρ — соответственно безразмерные потенциал скорости, скорость звука, давление, плотность, r, θ — полярные координаты, t — время, $\gamma=\mathrm{const}$ — показатель адиабаты.

Уравнение (3) имеет решение вида $\varphi=(\gamma+1)t/[2(\gamma-1)]+r^2f(\theta,t)$. Функция $f(\theta,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}&f_{tt}+8ff_t+2f_\theta f_{\theta t}+8f^3+f_\theta^2f_{\theta\theta}+6ff_\theta^2\\&\quad+(\gamma-1)\biggl(f_t+2f^2+\frac{1}{2}f_\theta^2\biggr)(f_{\theta\theta}+4f)=0.\end{aligned}\tag{4}$$

Для уравнения (4) построены некоторые точные и приближенные решения, в том числе автомодельные. Уравнение (4) используется для описания течений газа между вращающимися по законам $\theta=\theta_1(t)$, $\theta=\theta_2(t)$ плоскостями, в том числе для описания течений с ударными волнами, уравнения которых $\theta=\theta_*(t)$. Для точек плоскостей ($\theta=\theta_k(t)$) имеют место условия непротекания

$$f_\theta[\theta_k(t),t]=\theta_k'(t),\qquad k=1,2.\tag{5}$$

Предложен способ решения краевой задачи (4)–(5), основанный на методе Галеркина и приводящий решение задачи к исследованию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013 г.г.), ГК № П1122.

П. А. Вельмисов, Н. А. Дегтярева, Е. П. Семенова
(Ульяновск, УлГТУ)**. Об одном классе нелинейных задач аэрогидроупругости.**

При проектировании конструкций, систем, приборов, устройств, деформируемые элементы которых находятся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости этих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации. С одной стороны, воздействие потока может приводить к увеличению амплитуд или частот колебаний элементов до критических значений, при которых нарушаются их необходимые функциональные свойства, в том числе может происходить разрушение. С другой стороны, для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий и подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки.

В работе, представленной данным сообщением, рассматриваются три типа задач, связанных с исследованием указанной проблемы: а) задачи о динамической устойчивости упругих элементов смесительных устройств (каналов с протекающим в них дозвуковым потоком); б) задачи о динамике упругих элементов датчиков давления; в) задачи о динамической устойчивости упругих элементов летательных аппаратов: элерона, руля высоты и руля направления с учетом обтекания соответствующих составных частей конструкции (крыла, стабилизатора, киля) дозвуковым потоком идеальной жидкости (газа).

Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Для отыскания аэрогидродинамической нагрузки используются линейные асимптотические уравнения и методы теории функций комплексного переменного. В результате решения аэрогидродинамической части задачи силовое воздействие газа или жидкости на элементы определяется через функции деформаций этих элементов. Поведение упругого тела описывается нелинейной моделью. Исследование устойчивости основано на построении функционалов, соответствующих полученным в работе системам нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций деформаций элементов. Получены условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость набегающего потока, изгибные жесткости элементов и другие параметры механической системы. Исследование динамики упругих элементов основано на применении метода Галеркина.

Приведем в качестве примера постановку плоской задачи аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при бесциркуляционном обтекании тонкостенной конструкции — крыла с упругим закрылком (элероном). Исследование задач обтекания стабилизатора с рулем высоты и киля с рулем направления проводится аналогично.

Пусть на плоскости xOy, в которой происходят совместные колебания упругого закрылка, крылу соответствует на оси Ox отрезок $[a, b]$, а закрылку — отрезок $[b, c]$. В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox. Предполагается, что прогиб упругого закрылка и возмущение однородного потока малы.

Введем обозначения: $w(x, t)$ и $u(x, t)$ — упругие перемещения закрылка в направлении осей Oy и Ox соответственно; $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока газа.

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями: потенциал скорости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, $(x, y) \in G = \mathbf{R}^2 \setminus [a, c]$, линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y^{\pm}(x, 0, t) = \lim_{y \to \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = V f'_{\pm}(x), \qquad x \in (a, b),$$

$$\varphi_y^{\pm}(x, 0, t) = w_t(x, t) + V w_x(x, t), \qquad x \in (b, c),$$

условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$|\nabla\varphi|^2_{\infty} = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_{\infty} = 0.$$

Уравнения малых колебаний упругого закрылка имеют вид

$$-EF\left(u_x(x, t) + \frac{1}{2} w_x^2(x, t)\right)_x + M u_{tt}(x, t) = 0,$$

$$\begin{aligned} &- EF\left[w_x(x, t)(u_x(x, t) + \frac{1}{2} w_x^2(x, t))\right]_x + EJ w_{xxxx}(x, t) + M w_{tt}(x, t) \\ &\quad + N(t) w_{xx}(x, t) + \beta_0 w(x, t - \tau) + \beta_1 w_t(x, t) + \beta_2 w_{xxxxt}(x, t) \\ &\quad = \rho(\varphi_t^+(x, 0, t) - \varphi_t^-(x, 0, t)) + \rho V(\varphi_t^+(x, 0, t) - \varphi_t^-(x, 0, t)), \qquad x \in (b, c). \end{aligned}$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по соответствующим переменным, ρ — плотность газа, E, F, EJ, M — модуль упругости, площадь поперечного сечения, изгибная жесткость и погонная масса закрылка, β_2, β_1 — коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, β_0 — коэффициент жесткости основания, $N(t)$ — продольное усилие, τ — время запаздывания реакции, $f_{\pm}(x)$ – функции, определяющие форму верхней ($^+$) и нижней ($^-$) недеформируемых частей профиля.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013 г.г.), ГК № П1122, № П1183.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анкилов А. В.*, *Вельмисов П. А.*, *Горбокоченко В. Д.*, *Покладова Ю. В.* Математическое моделирование механической системы «трубопровод–датчик давления». Ульяновск: УлГТУ, 2008, 188 с.
2. *Анкилов А. В.*, *Вельмисов П. А.* Математическое моелирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла. — Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009, № 1 (37), с. 7–16.
3. *Анкилов А. В.*, *Вельмисов П. А.*, *Семенова Е. П.* Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала. — Вестник Саратовского государственного технического университета, 2009, № 2 (38), в. 1, с. 7–17.

Ф. Г. Фарукшина, **З. Ш. Аглямова**, **З. Х. Галимова** (Набережные Челны, Казань, ИЭУиП)**. Обучение математике в ВУЗе с использованием компьютерных технологий.**

Социально-экономические преобразования в России предъявляют новые требования к системе образования. Сегодня развиваются идеи о необходимости поиска альтернативных форм образовательных систем; разработки многовариантных образовательных технологий, инновационной стратегии образовательного процесса; рассмотрения самого образования в контексте культуры и творчества.

Характерным признаком труда работника современного производства является его интеллектуализация, главным содержанием труда является его умственный компонент, основанный не на эмпирически накопленных навыках, а на соответствующем объеме теоретических и специальных знаний и навыков, дающих возможность творческого осмысления своего труда, умеющего пользовать уже имеющийся образовательный потенциал. Отбор учебного материала в соответствии с меняющейся моделью специалиста, увеличение в процессе обучения удельного веса самостоятельной работы студентов, внедрение активных методов и новых технологий обучения для подготовки будущих профессионалов требует от студентов аналитического мышления со способностью критической оценки объектов и проблем путем моделирования, имитации, оптимизации на базе глубоких знаний в области фундаментальных естественных и гуманитарных наук; способность пополнять свои знания в течение всей трудовой деятельности и адаптировать их к изменениям технической и технологической среды, требованиям мирового рынка. Таким образом, требуется такое образовательное развитие личности, которое дает ей возможность опережать существующую востребованность знаний путем собственной познавательной активности.

Повышение качества подготовки специалистов высшей школой в значительной степени определяется достижениями информатики, внедряемыми в образовательный процесс. В программе информатизации образования особое место занимает подпрограмма разработки и внедрения информационных технологий в обучение. Нами были разработаны и используются на занятиях по математике электронные учебные комплексы по разделам «Линейная алгебра», «Теория функций комплексного переменного», «Теория вероятностей и математическая статистика» и др. Проведенный анализ использования таких комплексов показал их эффективность при проведении практических занятий, а также организации самостоятельной работы студентов.

О. А. Антонова (Стерлитамак, СФ БГУ)**. Решение задачи оптимизации в условиях неопределенности кинетических данных для равновесного случая.**

Для двухстадийной параллельной обратимой реакции в равновесном случае рассматривается задача нахождения оптимальной температуры, доставляющая максимум выхода целевого продукта. По технологическим условиям на температуру накладывается ограничение вида $T \in [T_*, T^*]$. При решении задачи может возникнуть ситуация, что оптимальная температура T находится внутри заданного ограничения (качество 1) либо оптимальная температура находится только на его границах (качество 2). Если при этом в условиях неопределенности кинетических данных (констант реакции, энергии активации) качество не меняется, то температура называется *качественно неизменной*. Местоположение оптимальной температуры определяет разные аппаратные условия ведения процесса: изотермические или неизотермические.

Введение качества эквивалентно введению следующих отношений эквивалентности:

$$V_i \sim V_j \Longleftrightarrow \max_{V_i} \lambda(T) = \max_{V_j} \lambda(T), \tag{1}$$

$$V_i \sim V_j \Longleftrightarrow \min_{V_i} \lambda(T) + \max_{V_i} \lambda(T) = \min_{V_j} \lambda(T) + \max_{V_j} \lambda(T). \tag{2}$$

Здесь $U = \{T \in [T_*, T^*] \,|\, T = \arg\max_{[T_*, T^*]} X_s\}$, X_s — продукт реакции, $\lambda(T)$ — характеристическая функция множества $[T_*, T^*]$:

$$\lambda(T) = \begin{cases} 1, & \text{если } T = T_* \text{ или } T = T^*, \\ 0, & \text{если } T \in [T_*, T^*]. \end{cases}$$

Будем учитывать, что параметры равновесного процесса (кинетические константы скорости k_i^0 и энергии активации E_i) определены в интервалах, т. е. находятся в условиях неопределенности: $(k_i^0)^{cp} - \Delta(k_i^0) \leqslant k_i^0 \leqslant (k_i^0)^{cp} + \Delta(k_i^0)$, $E_i^{cp} - \Delta E_i \leqslant E_i \leqslant E_i^{cp} + \Delta E_i$.

Функция теоретической оптимизации для двухстадийной параллельной обратимой реакции f: $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^2 \longrightarrow U$, $(E_i, k_i^0) \longrightarrow V \in U = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, порождает следующие множества возможных решений: $V_1 = \{T_{\min}\}$, $V_2 = \{T_{\max}\}$, $V_3 = \{T_c\}$, $V_4 = \{T_{\min}, T_{\max}\}$.

Тогда значения характеристической функции $\lambda(T)$ имеют вид

$$\max \lambda(T) = \min \lambda(T) = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, 3, \\ 0, & i = 4. \end{cases}$$

Теорема. *Для того чтобы отношения эквивалентности* (1), (2) *образовали два класса эквивалентности фиксированного качества*

$$A_1 = \cup V_4^{\alpha}, \quad \alpha = (E_i, k_i^0) \in E_i^I \times (k_i^0)^I \quad \textit{и} \quad A_2 = V_1 \cup V_2,$$

достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия

$$|E_1^{cp} - E_2^{cp}| \geqslant \Delta E_1 + \Delta E_2, \quad |E_3^{cp} - E_4^{cp}| \geqslant \Delta E_3 + \Delta E_4.$$

Л. М. А ч м и з (Краснодар, КубГУ)**. Методика сочетания технических индикаторов.**

Технические индикаторы являются достаточно эффективным инструментальным средством для получения сигналов на покупку или продажу ценных бумаг. С их помощью инвестор имеет возможность строить эффективную стратегию своего поведения на фондовом рынке, так как они позволяют получать сигналы на покупку и (или) продажу ценных бумаг в заданный момент времени.

Как было отмечено в предыдущих работах [3], сочетание технических индикаторов позволяет повысить эффективность их использования: в этом случае получаем более достоверные сигналы.

Анализ статистических данных позволяет утверждать, что за фиксированный период времени число сигналов, получаемых от одного индикатора, намного превышает число сигналов, полученных от другого. Очевидно, является нецелесообразным сочетать такие индикаторы.

Как показывают численные эксперименты, для сочетания двух и более индикаторов необходимо, чтобы число сигналов, полученных от одного индикатора, совпадало (с точностью не менее 0,75) с числом сигналов, полученных от других индикаторов.

В данном докладе приведем общую методику проверки выполнения указанного выше необходимого условия.

Введем следующие обозначения: 0 — рассматриваемый индикатор не дал сигнала на покупку или продажу, в результате чего инвестор не производит операций с ценными бумагами, 1 — значение сигнала на покупку ценной бумаги, 2 — значение сигнала на продажу ценной бумаги.

1. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — совокупности сигналов, которые дают в моменты $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < t$ — соответственно, индикатор A и индикатор B. Согласно введенным обозначениям, x_i, y_j, $i, j = 1, \ldots, n$, принимают значения 0,1,2.

2. Из этих совокупностей X, Y извлекаются две выборки $(x_1, \ldots, x_k)$, $(y_1, \ldots, y_k)$, $x_i \in X$, $y_j \in Y$, $i, j = l, \ldots, k$, $k \leqslant n$, одинакового объема.

3. Введем гипотезу H_0 — индикаторы дают равное число сигналов при конкурирующей гипотезе H_1 — индикаторы дают разное число сигналов.

4. С помощью критериев статистической проверки гипотез (например, критерия о сравнении двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей [1], [2]) проверяем гипотезу H_0.

5. Если H_0 не отвергается, то сигналы z_i, $i = l, \ldots, k$, на покупку или продажу ценных бумаг (от двух рассматриваемых индикаторов) сочетаем (смешиваем) по следующему правилу [3]: $z_i = x_i$, если $x_i \neq 0$, $y_i = 0$; $z_i = y_i$, если $x_i = 0$, $y_i \neq 0$; $z_i = y_i$, если $x_i = y_i$, $x_i \neq 0$; $z_i = 0$, если $x_i \neq y_i$, $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2002, 479 с.
2. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2004, 404 с.
3. *Семенчин Е. А.*, *Ачмиз Л. М.* Методика получения сигналов на покупку и продажу ценных бумаг на фондовом рынке. — Труды Кубанского аграрного университета, № 6 (21), с. 27–30.

Е. Ф. Баранов, **Т. В. Стебеняева** (Москва, АНО ВПО Академия международного учета)**. Концептуальная модель корпоративной системы обучения персонала.**

Подход к созданию и поддержанию корпоративной системы генерации и передачи новых знаний как составной части общего управления знаниями основан на представлении об организации как эволюционной структуре, при котором основные составляющими предлагаемых решений являются системность, комплексность, активные связи элементов, универсальность, взаимодействие, развитие. Особенности создания корпоративной системы генерации знаний способствуют формированию некоторых «знаний/умений», необходимых для превращения организации в самообучающуюся структуру, т. е. структуру, умеющую создавать, приобретать и передавать знания, а также способную изменять поведение как реакцию на новые знания и интуицию.

Большинство информации, используемой при построении и управлении корпоративной системой генерации знаний, носит качественный характер, и для анализа происходящих процессов необходимо произвести квалиметрические измерения. В итоге формируется числовая модель измеряемого объекта (совокупность латентных переменных, индикаторов и связей между ними). Поскольку получить точный аналог (изоморфную модель) практически не удается, разрабатывается приблизительный аналог (гомоморфная модель), в числовом выражении отражающий некоторые свойства объекта. Для того чтобы измерения отражали существующую реальность, следует основываться на положениях теории измерений, определяющей типы полученных числовых характеристик (шкал) и допустимые операции с ними.

Чтобы поддерживать и стимулировать этот процесс, необходимо помимо обучения, постоянно вовлекать сотрудников в процессы анализа информации и выработки управленческих решений, что, в частности, требует разработки экспертных технологий анализа и принятия решений по адаптации, изменению и развитию организации. Для формализованного представления этого процесса воспользуемся основными положениями методологии системного подхода, в соответствии с которыми качественно-интегральное и многомерное измерение процесса генерации и вовлечения необходимых новых знаний посредством обучения в производственную и управленческую среду организации можно выразить в виде $S = (W, M_1, M_2, M_3, P, \alpha, Str, E, G, B, I, C)$, где S — процесс формирования корпоративной системы обучения персонала и развития человеческих ресурсов организации. При этом наиболее существенным свойством конструируемой дескриптивной модели корпоративной системы генерации знаний является ее «целостность» (W), которая может рассматриваться как набор интегральных свойств, не сводимых к сумме свойств отдельных элементов.

В процессе анализа выделены критические области создания такой системы: определение потребностей в новых знаниях и умениях (M_1); организация обучения (M_2); оценка эффективности (M_3); формирование условий трансформации в самообучающуюся организацию, что помогает понять их свойства, особенности (P), раскрыть определенные аспекты системы.

Установление связей (α) между элементами определяет некоторую структуру (Str). Кроме этого, в соответствии с методологическими требованиями системного подхода, необходимо учесть влияние внешней среды (E), определить цели системы и ее подсистем (G), поведение системы (B) и ее возможное развитие, дано определение информационного аспекта системы (I), основанного на циркулирующей информации управления системой (C).

Описанный подход к формализации процесса формирования корпоративной системы обучения персонала и развития человеческих ресурсов организации позволяет учесть все многообразие факторов, оказывающих существенное влияние на генерацию знаний и их использование в качестве важнейшего фактора инновационного развития организации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, проект № 08–06–00047а.

Н. А. Баранов, **А. Н. Корочков** (Москва, ВЦ РАН, ВУНЦ ВВС ВВА). **Влияние достоверности информации о характере угроз на распределение ресурсов, выделяемых для их предотвращения.**

Рассматривается задача управления наблюдением за некой системой, на вход которой поступает M угроз, связанная с выбором одного из вариантов: осуществлять планирование предотвращения входных угроз на основе той информации, которой рассматриваемая система располагает в данный момент времени с учетом степени ее полноты и достоверности; выделять материальные и временные ресурсы для повышения степени информированности системы о состоянии и характеристиках угроз в интересах повышения эффективности функционирования системы в целом и сокращении ресурсов, необходимых для подавления входящих угроз.

Предполагается, что в результате предварительного распознавания обнаружено и распознано m угроз, т. е. степень вскрытия нежелательных для системы сигналов равна $\alpha = m/M$. Поставленная задача состоит в том, чтобы обеспечить долю предотвращения входящих угроз не менее β с вероятностью P_g.

Очевидно, что если $\alpha < \beta$, то обеспечить решение поставленной задачи невозможно и необходимо проведение неких дополнительных мероприятий по распознаванию поступающих на вход системы угроз.

При $\alpha \geqslant \beta$ система может принять решение о выделении ресурсов на предотвращение только распознанных угроз, однако при этом необходимо обеспечить предотвращение с заданной гарантированной вероятностью P_g не менее $\gamma = \beta/\alpha$ угроз из числа обнаруженных, чтобы обеспечить решение поставленной задачи.

Предполагается, что распределение числа воздействий системы по обнаруженным угрозам является равномерным.

В результате анализа установлено следующее.

1. При обнаружении более 70% угроз повышение степени их обнаружения не дает существенного преимущества с точки зрения минимизации расходуемых ресурсов системы на их уничтожение. При вероятности предотвращения угрозы $p \leqslant 0,3$ повышение степени обнаружения угроз с 70% до 100% дает сокращение затрат ресурсов системы на их предотвращение на 6–7%.

2. При высокой вероятности предотвращения угрозы $p \geqslant 0,5$ наблюдается увеличение затрат ресурсов системы при высокой степени обнаружения угроз, что обусловлено допущением, что для предотвращения каждой угрозы затрачивается некая часть ресурсов системы.

3. При определенном соотношении количества предотвращенных угроз и вероятности предотвращения угроз может сложиться ситуация, когда достигнутый уровень информационности не обеспечивает решение поставленной задачи.

4. С увеличением требуемой степени ущерба ресурсы, необходимые для решения поставленной задачи, становятся более чувствительными к степени обнаружения количества угроз.

Работа выполняется при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-07-00381) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3.

Г. М. Бездудный, Е. В. Солоневич (Ростов-на-Дону, ЮФУ).
Об изоморфизме пространств функций голоморфных в декартовом произведении конечносвязных плоских областей.

Пусть сначала D_j — плоские односвязные области на сфере Римана, отличные от сферы Римана ($j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 2$), $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$, $A(D)$ — пространство функций, голоморфных в области D с топологией равномерной сходимости на любом компакте в D. Если граница D_j содержит более одной точки, то D_j отображается конформно на единичный круг. Если граница D_j состоит из одной точки, то D_j конформно отображается на плоскость. Таким образом, D биголоморфно отображается на $E(n)$ — единичный поликруг в n-мерном пространстве, либо на C^n — n-мерное комплексное пространство, либо на $E(k) \times C^{n-k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, где $E(k)$ — единичный поликруг в k-мерном комплексном пространстве. При этом $A(D)$ изоморфно либо $A(E(n))$, либо $A(C^n)$, либо $A(E(k) \times C^{n-k})$. В работе [1] получен следующий результат.

Лемма 1. *Пространство $A(E(k) \times C^{n-k})$ функций, голоморфных в декартовом произведении $E(k) \times C^{n-k}$, изоморфно пространству $A(E(1) \times C^{n-1})$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, и пространства $A(E(n))$, $A(C^n)$, $A(E(1) \times C^{n-1})$ попарно неизоморфны.*

По этой лемме наши пространства $A(D)$ разбиваются на три класса попарно неизоморфных пространств.

Пусть теперь D_j — k_j-связная плоская область на сфере Римана, $k_j < \infty$ и хотя бы при одном j: $k_j > 1$ ($j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqslant 2$), $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$, $A(D)$ — пространство функций, голоморфных в D с топологией равномерной сходимости на любом компакте в D. Границы области D_j обозначим $\gamma_j(i)$, $i = 1, 2, \ldots, k_j$. Ориентация на кривой $\gamma_j(i)$ такова, чтобы при обходе по ней область D_j оставалась слева. Обозначим $D_j(\gamma_j(i))$ ту односвязную область на сфере Римана, которая остается слева при обходе кривой $\gamma_j(i)$ по заданной выше ориентации. Если $\gamma_j(i)$ состоит из одной точки, то ориентации нет и $D_j(\gamma_j(i))$ — это вся сфера Римана с выколотой точкой $\gamma_j(i)$. Обозначим $D_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = D_1(\gamma_1(i_1)) \times D_2(\gamma_2(i_2)) \times \cdots \times D_n(\gamma_n(i_n))$ — декартовое произведение плоских односвязных областей. Обозначим $A(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n})$ пространство функций, голоморфных в области $D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ с топологией равномерной сходимости на любом компакте, содержащемся в этой области. Очевидно, $D = \cap D_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ по всем $1 \leqslant i_j \leqslant k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Показывается, что $A(D) = \sum A(D_{i_1,i_2,\ldots,i_n})$ по всем $1 \leqslant i_j \leqslant k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть G — полная n-круговая область с центром в начале координат в пространстве C^n, $A(G)$ — пространство функций, голоморфных в G с топологией равномерной сходимости на любом компакте, содержащемся в G.

Лемма 2. *Топологическая сумма $A(G) + A(G)$ изоморфна $A(G)$.*

Пользуясь леммой 2 и представлением $A(D)$ как топологической суммой конечного числа пространств, получаем, что $A(D)$ изоморфно одному из семи следующих пространств: 1) $A(E(n))$; 2) $A(C^n)$; 3) $A(E(1) \times C^{n-1})$; 4) топологическая сумма $A(E(n)) + A(C^n)$; 5) $A(E(n)) + A(E(1) \times C^{n-1})$; 6) $A(C^n) + A(E(1) \times C^{n-1})$; 7) $A(E(n)) + A(C^n) + A(E(1) \times C^{n-1})$. Оказывается, что все эти семь классов попарно неизоморфны при $n \geqslant 2$. Попарный неизоморфизм первых трех пространств следует из работы [1]. Докажем, например, что (4) неизоморфно (1). Предполагаем противное, пусть (4) изоморфно ($\simeq$) (1). Тогда по лемме 2, $A(E(n)) + A(C^n) \simeq A(E(n)) + A(E(n))$. Беря факторпространства, получим, что $A(C^n)$ изоморфно факторпространству $A(E(n)) + A(C^n)$ по $A(E(n)) \simeq A(E(n)) + A(E(n))$ по $A(E(n)) \simeq A(E(n))$. Получим $A(C^n) \simeq A(E(n))$, т. е. (1) $\simeq$ (2). Полученное противоречие доказывает неизоморфизм пространства (4) и пространства (1). Аналогичными рассуждениями доказывается попарный неизоморфизм всех семи указанных типов пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zahariuta V. P.* Linear topologic invariants and their applications to isomorphic classification of generalized power spaces. — Turkish J. Math., 1996, v. 20, № 2, p. 237–289.

Н. С. Богомолова (Санкт-Петербург, СПбГУ)**. Применение статистических прикладных программных средств для анализа экономических данных.**

В условиях активно развивающейся экономики и высоко конкурентного рынка все более значимыми для российских компаний становятся качественный анализ экономической информации и возможность надежного прогнозирования тенденций развития самой организации и внешних факторов ее деятельности в ситуации высокой неопределенности, что и стало основной причиной бурного роста рынка статистических программ. Сегодня на нем насчитывается около полутора тысяч прикладных статистических пакетов, и число применяемых в России программ неуклонно возрастает.

Указанные выше программные средства можно условно разделить на три группы — универсальные (такие, как SAS, PASW), специализированные (ForecastPro, STADIA) и обучающие (E-Views) пакеты.

Хотя большое количество российских предприятий, особенно относящихся к малому бизнесу, продолжают использовать MS Excel для анализа бизнес-информации, крупные отечественные и западные компании все чаще выбирают профессиональные статистические пакеты.

Статистический прикладной пакет должен удовлетворять ряду таких требований, как полнота включенных статистических методов, широкий набор графических средств, простота в использовании, модульность, совместимость с другим программным обеспечением и наличие подробной документации.

Выбор статистического программного средства зависит от характера решаемых задач, объема и специфики данных, квалификации пользователей, имеющегося оборудования и финансовых возможностей предприятия.

Самыми дорогими являются такие западные профессиональные пакеты, как SAS. Меньшей стоимостью обладают пакеты для массового пользователя. Существенно дешевле стоят отечественные программы [2].

Наиболее популярен в России PASW (в прошлом SPSS), широко применимы STATISTICA, SAS и S-Plus [1]. Среди отечественных статистических пакетов можно выделить STADIA, ЭВРИСТА, МИЗОЗАВР, ОЛИМП, КЛАСС-МАСТЕР.

В докладе рассмотрены характеристики самых распространенных в России статистических пакетов и их применение для анализа экономической информации.

Внедрение профессиональных средств статистического анализа на российских предприятий сталкивается с рядом сложностей: 1) недостаток профессионалов в области статистического анализа экономической информации; 2) значительные финансовые затраты на внедрение и поддержку; 3) недооценка важности формализованного автоматизированного бизнес-анализа многими руководителями российских предприятий.

Тем не менее, можно отметить положительные тенденции как в подготовке специалистов в данной области, так и в изменении отношения менеджмента компаний к важности проведения качественного анализа экономической информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аббакумов В. Л.*, *Лезина Т. А.* Бизнес-анализ информации. Статистические методы. М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2009, с. 8.
2. *Тюрин Ю.*, *Макаров А.* Анализ данных на компьютере. М.: Инфра-М, 2003, с. 471–474.

Н. А. Баранов, **И. В. Васильев** (Москва, ВЦ РАН, ВУНЦ ВВС ВВА)**. Модель динамики рисков, связанных с функционированием сложных технических систем.**

Рассматривается подход, позволяющий учесть динамику изменения риска в процессе жизненного цикла и оптимизировать затраты на обеспечение безопасности, исходя из предельного суммарного риска, реализуемого за время эксплуатации системы. Предполагается, что техническая система является системой многоразового применения и выполняет возлагаемую на нее целевую задачу с интенсивностью $\mu(t)$. Выполнение задачи характеризуется показателем эффективности w, который соответствует прибыли, получаемой в результате выполнения системой своего функционального назначения. Предполагается, что множество состояний системы параметризовано параметром $s \in [0,\, 1]$.

С вероятностью $\pi_j(\alpha_j Q, s)$ в процессе решения задачи может произойти неблагоприятное событие z_j, где Q — суммарные затраты на создание системы безопасности, а α_j – доля затрат, направленных на предотвращение именно события z_j.

В результате неблагоприятного события z_j система наносит некоторый ущерб l_j. Кроме того, происходит изменение состояния системы: из состояния s она переходит в состояние σ с вероятностью $p_j(s,\sigma)$. Предполагается, что в процессе эксплуатации в силу процессов старения и износа происходят изменения состояния системы с интенсивностью $\lambda(s,\sigma)$.

Тогда изменение вероятности того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии s, будет описываться уравнением вида

$$\frac{\partial p(s,t)}{\partial t} = \int_0^s \left[\lambda(\sigma,s) + \mu(t)\sum_{j=1}^n \pi(\alpha_j Q,\sigma)p_j(\sigma,s)\right]p(s,t)\,d\sigma$$
$$- p(s,t)\int_s^1 \left[\lambda(s,\sigma) + \mu(t)\sum_{j=1}^n \pi(\alpha_j Q,s)p_j(s,\sigma)\right]d\sigma.$$

Изменение текущего ожидаемого суммарного ущерба $R(\boldsymbol{\alpha},Q,t)$, который связан с функционированием системы, с течением времени описывается уравнением вида $dR(\boldsymbol{\alpha},Q,t)/dt = \mu(t)\int_0^{s_{\lim}}\sum_{j=1}^n l_j\pi(\alpha_j Q,s)p(s,t)\,ds$, где $s_{\lim}$ — предельное состояние системы, $R(\boldsymbol{\alpha},Q,t)$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, фактически является текущим (т. е. для текущего времени эксплуатации системы) риском, связанным с эксплуатацией системы по ее функциональному назначению. Суммарный риск, связанный с эксплуатацией системы, за все время эксплуатации системы будет определяться соотношением $R(\boldsymbol{\alpha},Q) = \lim_{t\to\infty} R(\boldsymbol{\alpha},Q,t)$.

В процессе эксплуатации будет изменяться текущая суммарная прибыль: $dW(\boldsymbol{\alpha},Q,t)/dt = w\mu(t)\int_0^{s_{\lim}} p(s,t)(1-\sum_{j=1}^n \pi(\alpha_j Q,s))\,ds$.

Оптимальный уровень затрат Q^* на обеспечение безопасности и оптимальное распределение $\boldsymbol{\alpha}^*$ этих затрат для решения задач по предотвращению потенциально возможных неблагоприятных событий могут быть найдены в результате решения следующей оптимизационной задачи:

$$(\boldsymbol{\alpha}^*, Q^*) = \arg\max_{\boldsymbol{\alpha},Q}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{W(\boldsymbol{\alpha},Q,t)}{Q + R(\boldsymbol{\alpha},Q,t)}\right\}.$$

Работа выполняется при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-07-00381) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3.

И. В. В а с и л ь е в (Москва, ВУНЦ ВВС ВВА)**. Оптимизация затрат на безопасность функционирования технической системы.**

Рассмотрим систему, которая имеет два состояния: работоспособное и неработоспособное. В процессе ее функционирования возможны два неблагоприятных события, причем в результате события z_1 состояние системы не изменяется, а в результате события z_2 система переходит в неработоспособное состояние и прекращает свое функционирование. В этом случае система уравнений, описывающая изменение состояний системы, текущей прибыли от ее функционирования и текущего риска, примет вид

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -(\lambda + \mu\pi_2(\alpha_2 Q))p(0,t), \quad \frac{dP(1,t)}{dt} = (\lambda + \mu\pi_2(\alpha_2 Q))p(0,t),$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \mu(l_1\pi_1(\alpha_1 Q) + l_2\pi_2(\alpha_2 Q))p(0,t), \quad \frac{dW(t)}{dt} = w\mu p(0,t)(1 - \pi_2(\alpha_2 Q)),$$

где μ — интенсивность выполнения целевого задания системой, λ — интенсивность износа системы, l_j — ущерб в результате неблагоприятного события z_j, которое происходит с вероятностью $\pi_j(\alpha_j Q)$ при функционировании системы в соответствии со своим целевым назначением, Q — суммарные затраты на систему безопасности, а α_j — доля затрат, направленных на предотвращение именно события z_j, $j = 1, 2$.

Предполагая, что в начальный момент времени система находится в работоспособном состоянии, можно получить выражения для суммарных риска и прибыли вида

$$R(\alpha_1, \alpha_2, Q) = \frac{l_1\pi_1(\alpha_1 Q) + l_2\pi_2(\alpha_2 Q)}{\lambda/\mu + \pi_2(\alpha_2 Q)}, \quad W(\alpha_1, \alpha_2, Q) = w\frac{1 - \pi_2(\alpha_2 Q)}{\lambda/\mu + \pi_2(\alpha_2 Q)},$$

а эффективность системы безопасности будет определяться показателем вида

$$\beta(\alpha_1, Q) = w\frac{1 - \pi_2((1-\alpha_1)Q)}{Q\lambda/\mu + l_1\pi_1(\alpha_1 Q) + (Q + l_2)\pi_2((1-\alpha_1)Q)}.$$

В предположении, что затраты на обеспечение безопасности возрастают обратно пропорционально вероятности неблагоприятного события, причем при нулевых затратах на обеспечение безопасности вероятность соответствующего неблагоприятного события равна 1, $\pi_1 = \gamma_1/(\gamma_1 + \alpha_1)$, $\pi_2 = \gamma_2/(\gamma_2 + \alpha_2)$, получаем квадратное уравнение вида $(\lambda/\mu)\gamma_2(\gamma_1 + \alpha_1)^2 + l_1\gamma_1\gamma_2(\gamma_1 + \alpha_1) = -(1 + l_2)\gamma_2(\gamma_1 + \alpha_1)^2 + l_1\gamma_1(1 - \alpha_1)(\gamma_2 + 1 - \alpha_1)$ для определения оптимального соотношения распределения затрат на обеспечение безопасности в зависимости от типа неблагоприятного события.

И. Ю. Гареева, **И. А. Лакман** (Уфа, ГОУ ВПО УГНТУ, ГОУ ВПО УГАТУ). **Оценка риска возникновения дефектов трубопроводов компрессорных станций.**

Основной целью системы промышленной безопасности производственных объектов является обеспечение безопасности путем экспертизы технических устройств, сооружений, технологий, проектно-технической документации. Уровень такой безопасности напрямую зависит от степени риска возникновения аварийных ситуаций на объектах. Широко применяемая в настоящее время традиционная система эксплуатации технологических объектов с регламентным ремонтно-техническим обслуживанием во многом не отвечает современным требованиям инновационной экономики. Альтернативой существующему подходу может являться методика организации эксплуатации по техническому состоянию, т.е. к обслуживанию в зависимости от степени риска возникновения технического «сбоя» объекта. Подобный подход позволяет не только повысить оперативность принятия решений о возможности инициирования ремонтных работ, но и существенно сократить связанные с этим финансовые затраты.

Одной из задач, позволяющей оптимизировать время ремонтных работ на компрессорных станциях, является задача прогнозирования типа и количества дефектов труб и элементов трубопроводов на конкретных участках компрессорных станций и шлейфов. Возможность решения подобной задачи заключается в построении логит-модели множественного выбора с неупорядоченными альтернативами, позволяющей определять вероятности появления того или иного дефекта. Зависимой переменной в подобной модели является переменная, определяющая тип дефекта:

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если дефект — растрескивание,} \\ 1, & \text{если дефект — коррозия,} \\ 2, & \text{если дефект — технологический.} \end{cases}$$

Функция полезности выбора между j альтернативами имеет вид

$$u_{ij} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 + \varepsilon.$$

Здесь в качестве независимых факторов рассматриваются: x_1 — внутреннее давление на стенки трубы (Па); x_2 — кислотность почвы (PH); x_3 — предел прочности материалов (Па); x_4 — максимальный перепад температуры воздуха (° C); x_6 — относительная влажность (%); x_5 — фиктивная переменная, отвечающая за тип изоляции:

$$x_5 = \begin{cases} 0, & \text{если тип изоляции — полипропиленовый,} \\ 1, & \text{если тип изоляции — компаунд.} \end{cases}$$

Логит-модель выбора дефекта имеет вид $\mathbf{P}\{y_i = j\} = \Lambda(u_{ij})$, где $\Lambda(y) = e^y/(1 + e^y)$ есть логистичекое распределение, а остаточная компонента ε распределена по закону Вейбула.

Оценку параметров модели осуществляли методом максимального правдоподобия с логарифмической функцией правдоподобия, имеющей вид $\ln L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2} d_{ij} \ln \mathbf{P}\{y_i = j\}$, где n — общее число наблюдений в выборке, j — вариант типа дефекта ($j = 0, 1, 2$), d_{ij} — величина, принимающая значение, равное 1, для каждого i-го шлейфа трубопровода, имеющего j-й дефект, и равная 0 в противном случае.

Предложенная модель позволяет повысить эффективность принятия решений о ремонте того или иного участка компрессорной станции и как следствие снизить затраты, связанные с предварительной диагностикой.

Н. Ю. Губанова (Сочи, СГУТиКД)**. Доверительное оценивание взаимосвязи психологических переменных при помощи метода бутстреп.**

Построение доверительных оценок для значений коэффициентов корреляции редко производится в психологических исследованиях в силу своей проблематичности. Построение доверительных интервалов классическими методами в психологии не всегда возможно: оно требует двумерной нормальности исходных переменных, что является редкостью для психологических данных. К тому же, в психологических исследованиях часто используются непараметрические методы оценивания корреляционной связи, например, коэффициент Спирмена.

В связи с этим предлагается при проведении психологических исследований проводить доверительное оценивание коэффициентов взаимосвязи при помощи бутстреп-методов, суть которых заключается в «размножении» исходной выборки и формировании из нее большого количества подвыборок, имеющих объем исходной выборки. Этот метод пригоден для интервального оценивания любых статистических параметров и является свободным от распределения.

В работе, представленной данным сообщением, применялся наиболее простой вариант бутстрепа, называемый *методом процентилей*: в качестве границ 95% интервала доверия выбирались 2,5 и 97,5 процентили, в качестве точечной оценки коэффициента корреляции — медиана (50 процентиль). Использовались результаты опроса 51 испытуемого по шкалам рациональность и готовность к риску (тест ЛФР-25 Т. В. Корниловой).

Результаты расчетов показали следующее: для выборочного коэффициента корреляции Пирсона, равного -0,2961, для 200 бутстреп-повторений медиана равна -0,2974, доверительный интервал равен $(-0,4869, -0,1069)$. Для 400 повторений медиана равна -0,3023, доверительный интервал равен $(-0,5027, -0,0835)$. Для 1000 бутстреп-повторений медиана равна -0,2928, доверительный интервал есть $(-0,4985, -0,0716)$.

Для коэффициента Спирмена: выборочное значение коэффициента корреляции равно -0,3219, для 200 бутстреп-повторений медиана равна -0,3344, доверительный интервал равен $(-0,5493, -0,0967)$. Для 400 повторений медиана равна -0,3382, доверительный интервал есть $(-0,5488, -0,0914)$. Для 1000 повторений медиана равна -0,3241, доверительный интервал равен $(-0,5427, -0,0641)$.

Проведенные расчеты показали устойчивость получаемых при помощи метода бутстреп статистических оценок для коэффициентов корреляции. По сравнению с классическими оценками при помощи z-преобразования для коэффициента Пирсона, согласно которым 95% доверительный интервал равен $(-0,5756, -0,0072)$, бутстреп-оценки дали более узкие границы. Представляется, что бутстреп-оценивание коэффициентов корреляции, необходимое для соотнесения результатов различных экспериментальных исследований между собой, должно найти применение в психологических исследованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эфрон Б.* Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М.: Финансы и статистика, 1988, 263 с.
2. *Орлов А. И.* Прикладная статистика. М: Экзамен, 2006, 671 с.

Э. Р. Гиззатова, С. И. Спивак (Стерлитамак, БашГУ)**. Численное моделирование решения прямой кинетической задачи для процесса полимеризации диенов на неодимсодержащих катализаторах.**

В работах последних лет, посвященных исследованию механизмов полимеризации на ионно-координационных катализаторах, было показано [1], что присущее им свойство полицентровости влияет на кинетическую активность системы и ведет к изменению ряда экспериментально получаемых значений, в том числе средних молекулярных масс и кривой молекулярно-массового распределения. Задача прогнозирования поведения этих параметров может быть решена путем численного моделирования решения прямой кинетической задачи. Целью работы является создание программы, реализующей алгоритм решения прямой кинетической задачи для процесса полимеризации диенов на неодимсодержащей каталитической системе: $P_i^j + M \xrightarrow{k_p^j} P_{i+1}^j$ — рост цепи; $P_i^j + M \xrightarrow{k_m^j} Q_i + P_1^j$ — передача цепи на мономер; $P_i^j + A \xrightarrow{k_{Al}^j} Q_i + P_1^j$ — передача цепи на алюминийорганическое соединение (АОС); здесь j — номер типа активного центра (АЦ), ведущего полимеризацию, P_i^j — концентрация активных полимерных цепей с i звеньями на j-м типе АЦ, Q_i — концентрация неактивных полимерных цепей с i звеньями, M и A — концентрации мономера и АОС.

Математическая модель представляет собой систему из бесконечного числа дифференциальных уравнений, каждое из которых характеризует скорость изменения концентрации отдельно взятого реагента во времени. Прямая кинетическая задача заключается в ее решении, т. е. в нахождении функций распределения концентраций реакционных компонентов.

Ранее было получено численное решение прямой кинетической задачи с использованием метода Рунге–Кутта 4-го порядка [2]. Однако наряду с простотой и доступностью этого метода его недостатком является большой объем вычислений и, следовательно, увеличение затрат машинного времени. В связи с этим возникла необходимость модернизации имеющегося алгоритма. В него были добавлены два блока: 1) условие на автоматическое изменение шага; 2) количество одновременно решаемых дифференциальных уравнений в системе кратно текущему времени полимеризации. Это позволяет значительно увеличить скорость расчета и сократить время, затрачиваемое на расчет реагентов с заведомо «нулевыми» концентрациями.

Таким образом, в докладе предложен алгоритм численного решения прямой кинетической задачи и на его основе составлено программное обеспечение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Монаков Ю. Б.*, *Сабиров З. М.*, *Марина Н. Г.* — Высокомолек. соед., сер. А, 1996, т. 38, № 3, с. 407–417.
2. *Максютова Э. Р.* Дисс. на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Уфа, 2003, 113 с.

В. М. Деундяк, **М. А. Жданова** (Ростов-на-Дону, ФГНУ НИИ «Спецвузавтоматика», ЮФУ)**. О некотором обобщении марковской математической модели источника ошибок.**

При построении и тестировании помехоустойчивых кодеков удобно использовать имитационные модели цифровых каналов, одним из важных элементов которых является блок имитации внешних воздействий, реализуемый моделью источника ошибок. Как правило, моделирование источника ошибок производят на основе цепей Маркова, на основе процессов восстановления или на основе процессов накопления (см. [1], [2]). В [3] построена математическая QPn-модель источника ошибок q-ичного канала передачи данных (квазипериодическая модель), реализующая несколько иной подход. В работе, представленной данным сообщением, предлагается обобщенная марковская модель источника ошибок в канале n физических состояний над q-ичным алфавитом, сочетающая в себе преимущества как марковского подхода, так и QPn-модели.

Рассмотрим цифровой канал передачи данных n физических состояний, по которому передается информация в виде последовательностей символов q-ичного алфавита, отождествляемого с полем Галуа $\mathbf{F}_q$. На вход модели подается марковская матрица вероятностей перехода из состояния в состояние, и для каждого состояния задаются адаптированные к каналу параметры QP-модели: средняя вероятность ошибочной передачи символа, заданная на эталонном отрезке плотность, бинарный эталонный вектор случайных величин, распределение длин квазипериодов и определенная на вероятностном пространстве ненулевых значений ошибок случайная величина, отвечающая за значение ошибки (точные определения приведены в [3]).

Моделирование источника ошибок разбивается на три этапа. На первом этапе, исходя из матрицы переходных вероятностей, выбирается состояние, в котором находится канал. На втором этапе в соответствии с механизмом, описанным в [3], определяется, имеет ли место ошибка на данной позиции, т. е. моделируется бинарный поток локаций ошибок. В случае наличия ошибки необходимо моделировать ее значение (элемент мультипликативной группы $\mathbf{F}_q^*$ поля Галуа $\mathbf{F}_q$), что и делается на третьем этапе. Таким образом, на выходе модели получается q-ичный поток ошибок, нулевые элементы которого свидетельствуют об отсутствии ошибки в информационном потоке, а ненулевые элементы указывают на значение ошибки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блох Э. Л.*, *Турин В. Я.*, *Попов О. В.* Модели источника ошибок в каналах передачи цифровой информации. М.: Связь, 1971, 312 с.
2. *Деундяк В. М.*, *Могилевская Н. С.* Математическое моделирование источников ошибок цифровых каналов передачи данных. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2006, 69 с.
3. *Деундяк В. М.*, *Могилевская Н. С.* Математическое моделирование источника ошибок q-ичного канала передачи данных. — Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, 2008, № 1, с. 3–7.

Д. Р. Дорошин, **Д. А. Леднов**, **А. В. Хацкевич** (Компания «Стел–КС»). **Акустическая и фонотактическая системы текстонезависимой идентификации дикторов.**

Система текстонезависимой речевой идентификации диктора представляет собой средство определения принадлежности речевых сообщений определенному диктору. Рассматриваемая система представляет собой комбинацию двух методов идентификации — акустического и фонотактического.

В качестве предварительной обработки аудиоданных используются известные алгоритмы PLP (Perceptual linear prediction) и MFCC (Mel-frequency cepstral coefficients), которые преобразуют последовательность амплитуд сигнала в последовательность векторов признаков [1].

Алгоритм акустической идентификации основан на вероятностной модели речи диктора в виде гауссовой смеси (GMM) [1]. Параметры модели оцениваются при помощи EM-алгоритма (Expectation-Maximization), максимизирующего функцию правдоподобия [1].

Первый шаг алгоритма акустической идентификации — сегментация аудиоданных на участки речи и пауз. Данный этап производится автоматически на основе моделей речи и паузы. Далее для выделенных речевых участков вычисляются вероятности принадлежности каждого из речевых участков интересующим нас дикторам. Диктор, которому соответствует максимальная вероятность по речевым фрагментам, считается идентифицированным.

В качестве второго алгоритма текстонезависимой идентификации используется фонотактический алгоритм. Основная идея алгоритма заключается в использовании различий в произношении русских фонем для различных дикторов.

На первом шаге строятся математические модели фонем. Для их моделирования используется подход, основанный на скрытых марковских моделей (СММ) [2]. На этом этапе обучения фонетической модели диктора, аудиозаписи диктора сегментируются на фонемы. Сегментирование выполняется при помощи фонемной модели русского языка. Модель фонемы — это СММ с тремя состояниями, которые описываются плотностями распределений в виде гауссовских смесей. Сегментирование записей производится автоматически, с помощью алгоритма Витерби [3].

Сегментированные на фонемы аудиоданные с помощью алгоритма Баума–Уелча [4] используются для обучения фонемной модели данного диктора.

При выполнении процедуры идентификации для каждого диктора, который участвовал в обучении, на основе данных из записи вычисляется правдоподобие. Диктор, которому соответствует максимальное правдоподобие, считается идентифицированным.

Акустический и фонотактический алгоритмы выполняются последовательно. Фонотактический алгоритм используется в том случае, если на основе акустического алгоритма нельзя принять достоверного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аграновский А. В.*, *Леднов Д. А.* Теоретические аспекты алгоритмов обработки и классификации речевых сигналов. М.: Радио и связь, 2004.
2. *Young S. J.* The HTK hidden markov model tolkit: design and philosiophy. Cambridge university engineering dept. Technical report. 1993.
3. *Vaseghi S. V.* Advanced digital signal processing and noise reduction. John Wiley & Sons Ltd, 2006.
4. *Baum L. E.* An inequality and associated maximization technique in statistical estimation for probabilistic functions of a Markov process. Inequalities, 1972.

Д. В. Журкин, **А. Л. Рабинович** (Петрозаводск, ПетрГУ, ИБ КарНЦ РАН)**. Алгоритм представления цепной молекулы и имитации методом Монте-Карло.**

Предложен общий подход для описания структуры цепной молекулы, имитация конформационного поведения которой в последующем осуществляется методом Монте-Карло (МК). Все параметры молекулы, которые описывают ее строение (типы атомов, равновесные длины валентных связей, валентных углов, парциальные заряды на атомах), задаются в виде совокупностей матриц. Для однозначного задания информации о каждом атоме последнему присваивается свой код или номер. В предлагаемом методе признаком, по которому данному атому присваивается определенный числовой код (и все атомы с этим кодом образуют одну группу), является количество связей (или атомов), которые располагаются между начальным атомом и данным атомом. Благодаря матричному представлению подпрограммы, используемые для обработки параметров произвольных конфигураций атомов молекулы, являются более компактными. Точность результатов, получаемых с помощью метода МК, определяется сходимостью средних значений искомых величин к математическому ожиданию соответствующей случайной величины. Для правильной оценки методом МК многомерного интеграла, имеющего N переменных интегрирования, необходимо использовать такой генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ), который бы давал возможно более равномерное распределение ПСЧ генерируемой последовательности в пространстве размерностью N. В настоящей работе рассмотрено пять наиболее известных ГПСЧ, проанализировано восемь наиболее распространенных тестов для ГПСЧ.

Разработанная программа компьютерной имитации была использована для исследования свойств нескольких тестовых углеводородных цепных молекул, содержащих и не содержащих двойные связи в основной цепи. Были рассчитаны также поверхности потенциальной энергии небольших фрагментов молекул, содержащих пары взаимозависимых углов внутреннего вращения, а также совокупности эквиэнергетических линий (конформационные карты) этих молекулярных фрагментов. В итоге показано, что с увеличением количества двойных связей цис в молекулярном фрагменте области минимумов потенциальной энергии становятся менее симметричными, отвечают более широким диапазонам изменения углов внутреннего вращения. Показано, что разработанный алгоритм представления молекулы и имитации ее конформационного поведения является достаточно общим, позволяет исследовать свойства молекул широкого класса. Рассчитанные средние характеристики нескольких цепей показали, в частности, что из двух линейных углеводородных цепных молекул, одна из которых содержит двойную связь цис, более жесткой является насыщенная цепь. Наличие двойной связи придает ненасыщенной цепи большую степень подвижности и способности к изгибу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-03-00201а, гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-3731.2010.4 и Visby programme 00961/2008.

О. Г. З а в ь я л о в (Челябинск, УрСЭИ)**. Взаимодействие опоры в виде иглы и деформируемой поверхности с учетом несжимаемой смазки.**

Рассматривается вопрос о воздействии опоры в виде иглы на другую деформируемую поверхность, а также о роли смазки. Игла имеет на окончании шарик малого радиуса. В процессе соприкосновения иглы с поверхностью смазочное вещество должно попадать между двумя телами, в результате соприкосновение будет происходить не непосредственно по поверхности опоры, а по масляной прослойке [1].

Как известно, в современных подшипниках скольжения для напряжений в зоне контакта допускаются очень большие значения. Возникновение таких напряжений объясняется тем, что площадь соприкосновения между шариком и поверхностью очень мала, что приводит к большим концентрациям сил. Например, в обычных подшипниках допускаются напряжения до 600 Н/мм^2. Такие напряжения могут лежать за пределами упругих деформаций и, казалось бы, должны неизбежно приводить к быстрому разрушению поверхности [2].

Взаимодействие двух тел можно представить в виде трех задач.

1. Обычные контактные задачи, когда отсутствует смазочный слой. Взаимодействие тел происходит при наличии сухого трения. Такие задачи решаются методами теории упругости.

2. Контактно-гидродинамическая задача. В этом случае учитывается наличие смазочного слоя жидкости между двумя телами и отсутствуют деформации поверхностей. К числу подобных задач относится задача П. Л. Капицы.

3. Контактно-гидродинамическая задача с учетом смазочного слоя жидкости между двумя телами.

Рассматривается последний случай. Получены следующие результаты.

1) Чем больше будет предельная толщина масляного слоя, тем на большую площадь распространяется нагрузка. В результате уменьшатся напряжения в поверхности металла. Для этого можно подбирать смазочные вещества с большим значением пьезо-коэффициента. Таким образом, в действительности при воздействии клина на поверхность величины напряжений на поверхности меньше рассчитанного статически. 2) Для образования масляной пленки необходим зазор шариком в окончании клина и поверхностью. Если такого зазора нет, то масляная прослойка все равно образуется, так как деформируется поверхность металла вследствие напряжений на поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Темис М. Ю.* Расчет статических и динамических коэффициентов подшипника скольжения с учетом деформативности его рабочих поверхностей. — Вестник Гомельского государственного технического университета, 2004, № 4. с. 25–32.
2. *Завьялов Г. А.*, *Завьялов О. Г.*, *Завьялов Г. О.* Взаимодействие тонкого слоя с веществом. В кн.: Избранные труды Российской школы по проблемам науки и технологий. М.: РАН, 2007, 97 с.

А. С. Захарченко (Москва, ВУНЦ ВВС ВВА)**. Модель роста пленки карбидов в трубах при движении внутри них тел с оплавляющимся пластмассовым уплотнителем.**

Рассматривается процесс нарастания пленки карбидов внутри цилиндрической трубы с нарезной частью при периодическом прохождении внутри нее тел с пластмассовым уплотнителем (ПУ) под действием силы давления нагретого газа.

В результате нагрева происходит оплавление пластмассового уплотнителя и осаждение пленки карбидов на стенках трубы. Для расчета толщины пленки $h_{\text{крб}}(x,t)$ предложена следующая модель.

На основе моделей внутренней баллистики [1] и модели трения с оплавлением [2] определяется мгновенное количество материала ПУ $m_{\text{п}}$, которое будет участвовать в химической реакции: $m_{\text{п}} = l\rho_{\text{п}} n(t) b(t)$, где l — длина скользящего элемента ведущего пояска ПУ, $\rho_{\text{п}}$ — плотность расплавленного материала пояска, $b(t)$ — ширина дна нареза, переменная во времени, $n(t)$ — мгновенная толщина расплавленного слоя ведущего пояска [1], определяемая по формуле $n(t) = \dot{S}l/V_{\text{сн отн}}$, $V_{\text{сн отн}}$ — скорость движения тела относительно трубы, $\dot{S}$ — скорость оплавления материала ПУ [1], которая принимается равной

$$\dot{S} = \frac{q(t) - 0,273 c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} (T_{\text{пл. вп}} - T_0)\sqrt{\alpha_{\text{п}}/f_{\text{т}}}}{0,727 c_{\text{п}} \rho_{\text{п}} (T_{\text{пл. вп}} - T_0) + r_{\text{п}} \rho_{\text{п}}}.$$

Здесь $q = q_{\text{тр}} + q_{\text{ств}}$ есть суммарный тепловой поток, поступающий в выступ пояска, $q_{\text{тр}} = \alpha_{\text{тп}} f P_{\text{бг}} V_{\text{сн отн}}$ есть тепловой поток от нагрева при трении, $\alpha_{\text{тп}}$ — коэффициент распределения теплового потока при трении, f — коэффициент трения пояска при скольжении по нарезам, $P_{\text{бг}}$ — давление от рабочей грани нареза на ведущий выступ, $c_{\text{п}}$ — теплоемкость расплавленного материала пояска, $\rho_{\text{п}}$ — плотность расплавленного материала пояска, $r_{\text{п}}$ — удельная теплота плавления материала пояска, $T_{\text{пл. вп}}$ — температура плавления ПУ, T_0 — начальная температура ПУ, $q_{\text{ств}} = \alpha_{\text{ст}}(T_{\text{ст}} - T_{\text{вп}})$ есть тепловой поток от нагретой трубы в ведущий поясок, $T_{\text{ст}}$ — температура поверхности трубы.

Далее, основываясь на результатах экспериментов, предполагается, что в единицу времени из всей массы расплавленного материала пояска на образование карбидов идет масса углерода, пропорциональная коксовому числу данного материала [3]. Толщина образовавшейся карбидной пленки определяется из следующего выражения: $h_{\text{крб}} = k_{\text{кокс}} m_{\text{п}}/(\rho_{\text{п}} l(t_{\text{н}}(t) + b(t))$, где $t_{\text{н}}(t)$ — глубина нареза, переменная во времени. Коксовое число $k_{\text{кокс}}$ определяется по результатам эксперимента.

Предложенная модель роста пленки карбидов, как показали результаты численных расчетов, хорошо согласуется с данными экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балакин В. А.* Трение и износ при высоких скоростях скольжения. Москва, 1960.
2. *Серебряков М. Е.* Внутренняя баллистика ствольных систем и пороховых ракет. Москва, 1962.
3. *Самсонов Г. В.*, *Упадхая Г. Ш.*, *Нешпор В. С.* Физическое материаловедение карбидов. Киев, 1974.

В. А. И в н и ц к и й (Москва, МГУПС)**. Определение корреляционных функций количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания.**

В работе, представленной данным сообщением, для нахождения взаимно корреляционных функций количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания (ЗСеМО) применяется метод стохастических разностных уравнений [1]–[2].

Пусть в ЗСеМО имеется m узлов и циркулирует N требований. Длительность обслуживания в i-м узле ξ_i имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_i. Все N требований являются «нетерпеливыми» требованиями. Время их пребывания в i-м узле ограничено случайной величиной γ_i, имеющей экспоненциальное распределение с параметром α_i. Если у требования, которое обслуживается в i-м узле, $\xi_i < \gamma_i$, то требование завершает свое обслуживание. После завершения обслуживания в i-м узле это требование с вероятностью P_{ij} поступает на обслуживание в j-й узел, $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, и сразу начинает обслуживаться. Если у требования, которое обслуживается в i-м узле, $\xi_i > \gamma_i$, то требование в момент γ_i после начала обслуживания покидает i-й узел и с вероятностью $\overline{P}_{ij}$ поступает на обслуживание в j-й узел, $\sum_{j=1}^{m} \overline{P}_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, и сразу начинает обслуживаться. Матрицы $(P_{ij})_{m\times m}$ и $(\overline{P}_{ij})_{m\times n}$ неразложимы. Обозначим $\nu_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, число требований в i-м узле в момент t. Процесс $\zeta(t) = \{\nu_1(t), \ldots, \nu_m(t)\}$ является марковским. Требуется определить корреляционные функции процессов $\nu_i(t)$ по узлам и их взаимно корреляционные функции по парам узлов.

Так как уравнения для $n_i(t) = \mathbf{M}\,\nu_i(t)$ уже получены в [2], то остается найти уравнения для смешанных моментов $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_i(t')$ и $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')$.

Введем обозначения: $\widetilde{n}_{ik}(s,u) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')e^{-st-ut'}\,dt\,dt'$, $\widetilde{n}_{1ik} = \int_0^\infty \mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(0)e^{-st}\,dt$, $\widetilde{n}_{2ik}(0,u) = \int_0^\infty e^{-ut}\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(t)\,dt$, $i,k = 1,\ldots,m-1$. Пусть также $q_i = \mu_i + \alpha_i$, $i = 1,\ldots,m-1$, $Q_{ik} = \mu_i P_{ik} + \alpha_i\overline{P}_{ik}$, $i,k = 1,\ldots,m-1$.

Теорема. *Для двойных преобразований Лапласа нестационарных смешанных моментов справедлива следующая система линейных алгебраических уравнений*:

$$
\begin{aligned}
[su - (Q_{mk}+q_k)(Q_{mi}+q_i)]\,\widetilde{n}_{ik}(s,u) = &-\sum_{d=1,\,d\neq k}^{m-1}(Q_{mi}+q_i)(Q_{dk}-Q_{mk})\widetilde{n}_{id}(s,u)\\
&-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}(Q_{mk}+q_k)(Q_{ji}-Q_{mi})\widetilde{n}_{jk}(s,u)\\
&+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}\sum_{d=1,\,d\neq k}(Q_{ji}-Q_{mi})(Q_{dk}-Q_{mk})\widetilde{n}_{jd}(s,u)\\
&-Nu^{-1}q_iQ_{mk}\widetilde{n}_i(s) - \widetilde{n}_k(u)Nq_kQ_{mi}s^{-1}\\
&+Ns^{-1}\sum_{d=1,\,d\neq k}^{m-1}Q_{mi}Q_{dk}\widetilde{n}_d(u) + Nu^{-1}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}Q_{ji}Q_{mk}\widetilde{n}_j(s)\\
&+NQ_{mi}Q_{mk}\Bigl(Nu^{-1}s^{-1} - u^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_l(s) - s^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_l(u)\Bigr)\\
&+s\widetilde{n}_{1ik}(s,0) + u\widetilde{n}_{2ik}(0,u) - \mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0), \qquad 1\leqslant i\neq k\leqslant m-1, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
[su - (Q_{mk}+q_k)^2]\,\widetilde{n}_{ii}(s,u) = -\sum_{j=1,\,d\neq i}^{m-1}(Q_{mi}+q_i)(Q_{ji}-Q_{mi})[\widetilde{n}_{ij}(s,u)+\widetilde{n}_{ji}(s,u)]
$$

$$+\sum_{j=1,\,j\neq i}^{m-1}\sum_{d=1,\,d\neq i}(Q_{ji}-Q_{mi})(Q_{di}-Q_{mi})\widetilde{n}_{jd}(s,u)$$
$$-Nq_iQ_{mi}[u^{-1}\widetilde{n}_i(s)+s^{-1}\widetilde{n}_i(u)]$$
$$+N\sum_{d=1,\,d\neq i}^{m-1}Q_{mi}Q_{di}[s^{-1}\widetilde{n}_d(u)+u^{-1}\widetilde{n}_d(s)]$$
$$+NQ_{mi}^2\Big[Nu^{-1}s^{-1}-u^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_i(s)-s^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\widetilde{n}_l(u)\Big]$$
$$+s\widetilde{n}_{1ii}(s,0)+u\widetilde{n}_{2ii}(0,u)-\mathbf{M}\,\nu_i(0)^2,\qquad i=1,\dots,m-1, \tag{2}$$

где $\widetilde{n}_{1ik}(s,0)$ *определяются следующей системой линейных уравнений:*

$$(s+q_i+Q_{mi})\widetilde{n}_{1ki}(s,0)=\sum_{j=1,\,j\neq 1}^{m-1}\widetilde{n}_{1kj}(s,0)(Q_{ji}-Q_{mi})$$
$$+Ns^{-1}Q_{mi}+\mathbf{M}\,\nu_i(0)\nu_k(0),\qquad i,k=1,\dots,m-1, \tag{3}$$

и $\widetilde{n}_{2ik}$ *определяются аналогичной системой линейных уравнений.*

Вычитая из $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\nu_k(t')$ произведение $\mathbf{M}\,\nu_i(t)\mathbf{M}\,\nu_k(t')$, определяем искомые корреляционные функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивницкий В. А.*, *Ивницкий О. В.* Нахождение нестационарных математических ожиданий количества «нетерпеливых» требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 304–305.
2. *Ивницкий В. А.* Определение корреляционных функций количества требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания с возможностью обхода узлов требованиями. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 3, с. 304–305.

Н. В. Игнатьева (Чита, ЧитГУ)**. О решении первой краевой задачи в криволинейных областях с завесой в виде отрезка.**

Рассмотрим в полосе $D = D_1(\xi < 0,\ 0 < \eta < l) \cup D_2(\xi > 0,\ 0 < \eta < l)$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ для потенциалов $u_j(\xi, \eta)$ в D_j краевую задачу

$$\partial_\xi^2 u_j + \partial_\eta^2 u_j = 0, \quad u_1|_{\eta=l} = 0, \quad u_2|_{\eta=l} = f(\xi), \tag{1}$$

$$u_2(\xi, 0) = u_1(-\xi, 0), \quad k_2\partial_\eta u_2(\xi, 0) + k_1\partial_\eta u_1(-\xi, 0) = 0, \tag{2}$$

$$\xi = 0: \quad u_2 - u_1 = Bk_1\partial_\xi u_1, \quad k_2\partial_\xi u_2 = k_1\partial_\xi u_1, \tag{3}$$

где k_j — проницаемость зоны D_j. Область D функциями $z = \cos(i\zeta)$ и $z = \zeta^2$ конформно отображается на области G основной плоскости $z = x + iy$, ограниченные соответственно гиперболой ($x_0 = 1$) и параболой ($x_0 = 0$) и содержащие завесу с параметром B в виде отрезка $a < x < x_0$, $y = 0$, $(a, 0) \in \partial G$. Представляя решение задачи (1)-(3) в виде (см. [1])

$$u_1 = \frac{2}{Bk_1}\int_0^\infty e^{-\gamma t}\varphi(\xi - t, \eta)\, dt,$$

$$u_2 = \varphi(\xi, \eta) + \varphi(-\xi, \eta) - \frac{2}{Bk_2}\int_0^\infty e^{-\gamma t}\varphi(-\xi - t, \eta)dt, \quad \gamma = \frac{k_1 + k_2}{Bk_1k_2},$$

для функции $\varphi(\xi, \eta)$ получим задачу, решение которой имеет вид $\varphi(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \int_0^\infty a_j\sigma_j \mathrm{sh}\lambda(\eta - l)d\lambda$, где по повторяющимся индексам $j = 1, 2$ суммируем, $\sigma_1 = \sin\lambda\xi$, $\sigma_2 = \cos\lambda\xi$, $F(\xi, \eta)$ — решение задачи Дирихле в полуплоскости $\eta < 0$: $\Delta F = 0$, $F|_{\eta=0} = 0$ при $\xi < 0$ и $F|_{\eta=0} = f(\xi)$ при $\xi > 0$. Представляя функцию F в виде $F(\xi, \eta) = \int_0^\infty e^{\lambda\eta} f_j\sigma_j\, d\lambda$, где f_j — коэффициенты Фурье функции $F(\xi, 0)$, из условий (2) находим $a_1 = f_1c_2^{-1} + f_2\lambda\gamma^{-1}(c_2^{-1} + c_1^{-1})$, $a_2 = -f_2c_1^{-1}$, где $c_1 = \mathrm{ch}\lambda l$, $c_2 = \mathrm{sh}\lambda l$. Отсюда с учетом $c_j^{-1} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{jn}e^{-\lambda l(2n+1)}$ методом работы [1] приведем функцию φ к виду (без квадратур):

$$\varphi(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \sum_{n=0}^\infty \{(-1)^{n+1}[F((-1)^{n+1}\xi, \eta_1) - F((-1)^{n+1}\xi, \eta_2)] - \delta_n\gamma^{-1}[p(\xi, \eta_1) - p(\xi, \eta_2)]\},$$

где $\delta_n = 1 + (-1)^n$, $p(\xi, \eta) = \partial_\xi[F(\xi, \eta) + F(-\xi, \eta)]/2$, $\eta_1 = \eta - 2l(n + 1)$, $\eta_2 = \eta - 2nl$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье в решении краевых задач с пересекающимися линиями сопряжения. — Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2007, т. 47, № 9, с. 1550–1556.

О. А. И з о т о в а (Рославль, филиал ГОУ МГИУ)**. Исследование основных краевых задач в классе случайных бианалитических функций.**

В работах Н. И. Мусхелишвили было показано, что решение основных задач теории упругости можно свести к краевым задачам для бианалитических функций, т. е. функций вида $\varphi_0(z) + \overline{z}\,\varphi_1(z)$, где $\varphi_0(z)$ и $\varphi_1(z)$ — аналитические функции. Так, математическая модель первой основной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0'(t) + \overline{t}\,\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) &= -\overline{[\varphi_0'(t) + \overline{t}\,\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)]} + g_1(t), \\ \varphi_0'(t) + \overline{t}\,\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) &= \overline{[\varphi_0'(t) + \overline{t}\,\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)]} + g_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

$t \in L$, $g_k(t)$ $(k = 1, 2)$ — известные функции.

Однако краевые задачи для бианалитических функций моделируют напряженное состояние упругого тела только для достаточно узкого спектра нагрузок и деформаций, подчиняющихся закону Гука. Они не могут описать процесс перехода упругого состояния в текучее, что бывает важно при решении задач теории упругости для плоскостей, ослабленных отверстиями. Это связано с тем, что математическая модель, основанная на краевых задачах для бианалитических функций, не учитывает вероятностного характера процесса деформации тела.

Введем понятие случайной бианалитической функции.

О п р е д е л е н и е 1. *Случайной бианалитической функцией в области* D^+ назовем функцию

$$F^+(z) = \Phi_0^+(z) + \overline{z}\,\Phi_1^+(z), \tag{2}$$

где $\Phi_k^+(z)$ $(k = 0, 1)$ — случайные аналитические функции, $\overline{z} = x - i\,y$.

О п р е д е л е н и е 2. *Случайной бианалитической функцией в области* D^- называется функция

$$F^-(z) = \Phi_0^-(z) + \overline{z}\,\Phi_1^-(z), \tag{3}$$

где $\Phi_k^-(z) = z^{-k}\psi_k^-(z)$, $\psi_k^-(z)$ — случайные аналитические в бесконечной области D^- функции.

Функция $F_k^+(z)$ используется для решения задач теории упругости для упругих тел конечных размеров. Функция $F_k^-(z)$ используется для решения задач теории упругости для плоскостей, ослабленных отверстиями.

Результаты исследований показывают, что при расширении класса функций Гельдера на класс случайных функций свойства краевых задач для бианалитических функций при положительных индексах сохраняются. Проведение общего исследования при отрицательных индексах невозможно.

Теорема. *Задача Римана и задача Гильберта для случайных бианалитических функций устойчива относительно изменений краевых свободных членов* $g_k(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М: Наука, 1977, 640 с.
2. *Пугачев В. С.*, *Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004, 1000 с.
3. *Юденков А. В.* Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: Смядынь, 2002, 268 с.

О. А. И з о т о в а (Рославль, филиал ГОУ МГИУ). **Новый класс функций Гельдера в среднем квадратическом, обобщающий класс функций Гельдера на случай стохастических процессов.**

Известно, что основные задачи теории упругости, а также краевые задачи для аналитических функций и их обобщений рассматриваются на классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера, т. е. функций, для которых на контуре L выполняются условия

$$|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)| \leqslant A|t_2 - t_1|^{\mu}, \qquad t_1, t_2 \in L, \tag{1}$$

где A — определенная константа, $0 < \mu \leqslant 1$.

Однако на практике приходится работать с нагрузками и контурами, заданными случайным образом. Поэтому необходимо расширить класс функций (1) на класс случайных функций, используя понятие *сходимости в среднем квадратическом*. Напомним, что последовательность случайных величин X_r сходится в среднем квадратическом к случайной величине X, если существуют моменты $\mathbf{M}\,\|X\|^2$, $\mathbf{M}\,\|X_r\|^2 < \infty$ и $\mathbf{M}\,\|X_r - X\|^2 \to 0$ при $r \to r_0$.

Введем в рассмотрение класс случайных функций, удовлетворяющий классу Гельдера в среднем квадратическом.

О п р е д е л е н и е. Функция $\Phi(t)$ принадлежит классу Гельдера в среднем квадратическом на контуре L с показателем μ, если для любых t_1, t_2, принадлежащих контуру L, выполняется условие

$$\mathbf{M}\,\|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\|^2 \leqslant A|t_2 - t_1|^{2\mu}, \tag{2}$$

где A — определенная константа, $0 < \mu \leqslant 1$.

Справедливы следующие свойства функций, удовлетворяющих условию Гельдера в среднем квадратическом.

С в о й с т в о 1. Если t_1 и t_2 достаточно близки друг к другу и условие Гельдера выполняется для показателя μ, то оно выполняется и для показателя $\mu_2 < \mu_1$.

С в о й с т в о 2. Если функции $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, то их сумма, произведение и частное при условии, что знаменатель не обращается в ноль, принадлежат классу Гельдера.

С в о й с т в о 3. Аналитическая функция от случайной функции Гельдера с показателем μ принадлежит классу Гельдера с тем же показателем.

Кроме того, при расширении пространства функций, на которых рассматриваются основные задачи теории упругости, с гельдерового пространства на пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера в среднем квадратическом, не меняется общий ход решения задач.

Теорема. *Если L — замкнутый контур и $R(t)$ удовлетворяет на L условию Гельдера в среднем квадратическом с показателем μ, то предельные значения интеграла типа Коши $\Phi'(t)$ и $\Phi''(t)$ удовлетворяют этому условию с тем же показателем, если $0 < \mu < 1$, и с показателем, сколь угодно мало отличающимся от μ, если $\mu = 1$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М: Наука, 1977, 640 с.
2. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004, 1000 с.
3. *Юденков А. В.* Краевые задачи со сдвигом для полианалитических функций и их приложения к вопросам статической теории упругости. Смоленск: Смядынь, 2002, 268 с.

Д. А. Илюшин, **А. И. Моисеев**, **М. Н. Осипов**, **В. П. Цветов** (Самара, УСТМ ГУВД по СО, СамГУ). **Об инструментальных средствах для обеспечения функций оперативно-разыскных мероприятий при расследовании компьютерных преступлений.**

Одной из главных проблем на этапе проведения оперативно-разыскных мероприятий, связанных с компьютерными преступлениями, является нехватка мобильных и относительно простых программно-аппаратных средств, предназначенных для сбора и анализа машиночитаемых данных.

Состав и функциональность подобных средств определяются спецификой совершаемых компьютерных преступлений, среди которых наиболее распространены следующие: преступления, связанные с нарушением авторских прав на программные продукты и данные; преступления, связанные с созданием и распространением вредоносных программ; мошенничества с электронными картами; неправомерный доступ к системам хранения, обработки и передачи данных.

В части расследования сетевых инцидентов основные оперативно-разыскные функции реализуются средствами СОРМ-2, которые позволяют вести исчерпывающий протокол сетевых событий, начиная со сбора статистических сведений о соединениях и заканчивая полной информацией о циркулирующих данных. Однако в большинстве случаев полный объем функций, предоставляемый СОРМ-2, является избыточным, вдобавок, они предназначены только для анализа сетевых взаимодействий.

По этой причине становится актуальной задача разработки комплекса инструментальных средств, сочетающего в себе как элементы СОРМ-2, так и дополнительные специализированные компоненты, предназначенные для автоматического сбора и анализа данных по наиболее распространенным видам компьютерных преступлений.

Разрабатываемый авторами комплекс должен реализовывать следующую минимальную функциональность: сканирование параметров операционной системы и программных прошивок; определение лицензионности программного обеспечения; выявление вредоносных программ и средств преодоления систем защиты; быстрый поиск и обработка фрагментов данных; обнаружение скрытых и зашифрованных данных; дешифрование данных; мониторинг, протоколирование, фильтрация и блокирование предопределенных сетевых событий; обеспечение достоверности собранных данных и их защиту от модификации.

Работы по проектированию комплекса находятся на стадии составления технического задания.

А. М. Ионова, **М. С. Матвейчук** (Ульяновск, УлГПУ, Казань, НИИММ). **Мера на U-проекторах.**

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана в комплексном гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и пусть $U \in \mathcal{M}$ — унитарный оператор. Обозначим $R(U)$ ($R(U^2)$ соответственно) слабозамкнутую алгебру, порожденную операторами U, U^{-1} (U^2, U^{-2} соответственно), $R(U)^{pr}$ ($R(U^2)^{pr}$) — множество всех ортопроекторов из $R(U)$ ($R(U^2)$ соответственно). Определим произведение $\langle x,y\rangle_U := (Ux,y)$, $x,\ y \in H$. В общем случае $\langle x,y\rangle_U \neq \overline{\langle y,x\rangle_U}$. Если $U = U^*$ и $U \neq \pm I$, то $(U\cdot,\cdot)$ — *индефинитная метрика*. Для любого $B \in B(H)$ существует единственный $B^{\#} \in B(H)$, для которого $\langle Bx,y\rangle_U = \langle x,B^{\#}y\rangle_U$; $(B^{\#})^{\#} = B \Leftrightarrow BU^2 = U^2B$. Положим $\mathcal{P}_U(\mathcal{M}) := \{p \in \mathcal{M}\colon\ p^2 = p = p^{\#}\}$. Операторы из $\mathcal{P}_U(\mathcal{M})$ назовем *U-проекторами*. U-проекторы образуют логику. Введем $\mathcal{M}^U := \{A \in \mathcal{M}\colon\ AU^2 = U^2A\}$ и множество W всех частичных изометрий $w \in \mathcal{M}$ таких, что $UwU^{-1} = -w$. Отметим следующее. 1) $w \in W \Leftrightarrow w^* \in W$. 2) $W \neq \{0\} \Leftrightarrow R(U)\backslash R(U^2) \neq \varnothing$. 3) Пусть $G := \{p \in R^{pr}(U^2)\colon$ для любых $q \in R^{pr}(U)$, $q \leqslant p \Rightarrow q \in R(U^2)\}$ и $E := \vee\{p\colon p \in G\}$. Тогда E — наибольший проектор из $R(U^2)$, для которого $pE = Ep = p^*E$, $\forall p \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M})$. 4) $wE = 0$ для всех $w \in W$. 5) $E^{\perp} = \vee\{w^*w\colon\ w \in W\}$, $E^{\perp} := I - E$. Пусть $U = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}e_U(d\lambda)$ — спектральное разложение U. Здесь $e_U\colon\ \mathcal{B}_S \to \Pi_U$ есть спектральная мера на σ-алгебре $\mathcal{B}_S$ борелевских подмножеств $S \subset C$. Определим $J_U := 2e - I$, где $e := e_U([0,\pi))$. Положим $\mathcal{P}_U^{or} := \{p \in \mathcal{P}_U\colon\ p \leqslant E\}$, $\mathcal{P}_U^h := \{p \in \mathcal{P}_U\colon\ p \leqslant E^{\perp}\}$. По 3) $\mathcal{P}_U^{or}$ состоит только из ортопроекторов.

Следующая теорема сводит описание мер на U-проекторах к описанию мер на J_U-проекторах в пространстве с индефинитной метрикой.

Теорема 1. *$\mathcal{P}_U(\mathcal{M}) = \mathcal{P}_{J_U}(\mathcal{M}^U)$. $\mathcal{P}_U(\mathcal{M})$ — сумма сферической $\mathcal{P}_U^{or}$ и гиперболической $\mathcal{P}_U^h$ подлогик.*

Любой J_U-проектор p (не единственным образом) представляется в виде суммы $p = p_+ + p_-$, где p_+ (p_-) — J_U-неотрицательный (-неположительный, соответственно) проекторы из $\mathcal{M}^U$. Пусть $p,\ p_i \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M})$, $i \in I$, таковы, что $p = \sum_i p_i$, $p_ip_j = 0$, $i \neq j$. Сумма понимается в сильном смысле. Отображение $\nu\colon\ \mathcal{P}_U(\mathcal{M}) \to R$ называется *мерой*, если $\nu(p) = \sum_i \nu(p_i)$. Мера ν *индефинитна*, если $\nu(p_+) \geqslant 0$, $\nu(p_-) \leqslant 0$, $\forall p \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M})$; *вероятностная*, если $\nu \geqslant 0$ и $\nu(I) = 1$; *ограниченная*, если $\sup\{(1/\|p\|)|\nu(p)|\colon\ p \in \mathcal{P}_U(\mathcal{M}),\ p \neq 0\} < \infty$; *полуслед*, если существует присоединенный к центру алгебры $\mathcal{M}^U$ оператор T, для которого $\nu(p) = \tau(Tp_+)$ $\forall p$ или $\nu = \tau(Tp_-)$ $\forall p$. Здесь τ — точный нормальный полуконечный след на $(\mathcal{M}^U)^+$. Индефинитная мера описана в [1].

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M}^U$ не имеет прямого слагаемого типа $I_{n,m}$, $n,m \leqslant 2$. Тогда*: 1) *если мера ограничена и постоянна на множестве всех максимальных положительных (максимальных отрицательных) проекторов, то ее сужение на $\mathcal{P}_U^h$ есть сумма полуследов*; 2) *если ν — вероятность, то ее сужение на $\mathcal{P}_U^h$ есть сумма полуследов.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matvejchuk M.* Measures on effects and on projections in spaces with indefinite metric. — Fields Instit. Communications, 2000, v. 25, p. 399–414.

В. Н. Колодежнов, С. С. Капранчиков (Воронеж, ВГТА).
Методика определения реологических констант одной модели вязкости жидкости смешенного типа.

Для жидкостей смешенного типа, при течении которых касательные напряжения τ зависят от скорости сдвига $\dot\gamma$ следующим образом:

$$\tau(\dot\gamma)=\mu(\dot\gamma)\,\dot\gamma=\begin{cases}\mu_1\dot\gamma, & 0<-\dot\gamma<\dot\gamma_0,\\ \mu_1(|\dot\gamma|/\dot\gamma_0+\dot\gamma_0/|\dot\gamma|)\dot\gamma/2, & -\dot\gamma>\dot\gamma_0,\end{cases}\qquad \dot\gamma_0>0, \tag{1}$$

существует проблема определения значений ньютоновской динамической вязкости μ_1 и порогового значения скорости сдвига $\dot\gamma_0$ на основе экспериментальных данных.

Рассмотрим подход к определению реологических констант $\dot\gamma_0$, μ_1. Допустим, что экспериментальные данные зависимости касательного напряжения $\tau_{\exp}$ от скорости сдвига $\dot\gamma$ для данной жидкости достаточно хорошо описываются функцией вида

$$\tau_{\exp}=-b_2\dot\gamma^2-b_0,\quad \dot\gamma<0,\quad \tau_{\exp}<0, \tag{2}$$

где b_0, b_2 — эмпирические константы.

Заметим, что функция $\tau(\dot\gamma)$ при $|\dot\gamma|>\dot\gamma_0$ также является параболической:

$$\tau(\dot\gamma)=-\mu_1\dot\gamma^2\dot\gamma_0/2-\mu_1\dot\gamma_0/2. \tag{3}$$

Сравнивая выражения (2) и (3), получаем следующие соотношения для определения искомых реологических констант:

$$\mu_1=2\sqrt{b_0b_2},\quad \dot\gamma_0=\sqrt{b_0/b_2},\quad b_0b_2>0. \tag{4}$$

Определение коэффициентов b_0, b_2 зависимости (2), описывающей набор экспериментальных данных, можно проводить из условия минимума следующей функции невязки:

$$F(b_2,b_0)=\sum_{i=1}^{N_{\max}}[(-b_2\dot\gamma_i^2-b_0)+\tau_i]^2, \tag{5}$$

где $N_{\max}$ — число точек в полном массиве экспериментальных данных, $\dot\gamma_i<0$, $\tau_i<0$ — экспериментальные значения скорости сдвига и соответствующие им значения касательного напряжения, k — номер точки в полном массиве, с которой начинается отсчет экспериментальных данных, задействованных в обработке.

Однако определение $\dot\gamma_0$ и μ_1 по изложенной выше методике имеет следующую особенность, которая заключается в том, что априори неизвестно, какая часть экспериментальных точек соответствует нелинейному участку кривой течения по модели (1) и должна быть принята во внимание при реализации соотношений (2)–(5).

В этой связи предлагается следующий алгоритм нахождения $\dot\gamma_i$ и μ_1. Из имеющегося полного массива $N_{\max}$ экспериментальных данных выбираем $(N\max-k+1)$ пар значений $(\dot\gamma_i,\tau_i)$ для $k\leqslant i\leqslant N_{\max}-2$ и определяем соответствующие им $b_{0,k}$ и $b_{2,k}$. По этим значениям с учетом (4) определяется массив реологических параметров $\dot\gamma_{0,k}$ и $\mu_{1,k}$ модели вязкости. Для каждого $\dot\gamma_{0,k}$ отыскиваем среди всех экспериментальных данных ближайшее снизу к нему значение $\dot\gamma_{m_K}$. Вычисляем массив значений средних относительных погрешностей δ_k отклонения значений напряжений, рассчитанных по (1), от экспериментальных данных

$$\delta_k=\left[\sum_{i=k}^{m_K}\left|1-\frac{\mu_{1,k}\dot\gamma_i}{\tau_i}\right|+\sum_{i=m_K+1}^{N_{\max}}\left|1-\frac{\mu_{1,k}}{2\tau_i}\left(\frac{\dot\gamma_i^2}{\dot\gamma_{0,k}}+\dot\gamma_{0,k}\right)\right|\right]\frac{100\%}{N_{\max}}.$$

Из всего набора δ_k находим минимальное значение δ_j и окончательно принимаем $\dot\gamma_0=\dot\gamma_{0,j}$, $\mu_1=\mu_{1,j}$.

Е. А. Касаткина, **Ю. Н. Бурханова** (Набережные Челны, ИЭУП)**. Сетевое планирование и управление в бизнес-проекте «Создание цеха по изготовлению колбасных изделий» на ООО «УОП «Нефтехим».**

Как известно, сетевое планирование служит не только основой экономико-математических расчетов, графических и аналитических вычислений, но и организационно-управленческих решений, оперативных и стратегических планов, обеспечивающих как изображение, так и моделирование, анализ и оптимизацию проектов выполнения сложных технических объектов и конструкторских разработок. Применение системы сетевого планирования способствует разработке оптимального варианта стратегического плана развития предприятия.

В качестве объекта исследования в настоящем сообщении выступает ООО «УОП «Нефтехим», основным предметом деятельности которого является организация общественного питания для работников ОАО «Нижнекамскнефтехим».

В настоящем исследовании проводится анализ и оптимизация бизнес-проекта создания цеха по изготовлению колбасных изделий на предприятии методами сетевого планирования и управления.

В результате проведенных расчетов выяснилось, что продолжительность единственного критического пути составляет 77 дней, а на реализацию проекта предприятию требуется затратить 316597,01 рублей.

Одной из задач оптимизации сетевого графика по критериям «время–стоимость» является минимизация стоимости проекта при сохранении времени его выполнения t_{kr}, которая достигается увеличением продолжительности выполнения некритических работ на основе использования их свободных резервов времени. При этом увеличение продолжительности работы (i, j) осуществляется на величину Δt_{ij} до тех пор, пока не будет исчерпан весь свободный резерв времени или не будет достигнуто максимально допустимое значение продолжительности работы в (i, j).

В результате оптимизации проекта создания цеха по изготовлению колбасных изделий на ООО «УОП «Нефтехим» был получен план, позволяющий выполнить комплекс работ в срок при минимальной его стоимости. Основным итогом проведенных исследований явилась экономия денежных средств в целом по проекту в размере 2090,48 рублей за счет увеличения продолжительности работ, имеющих свободный резерв времени, в результате чего после оптимизации проекта ООО «УОП «Нефтехим» требуется затратить уже 314506,53 рублей.

Таким образом, применение системы сетевого планирования и управления на ООО «УОП «Нефтехим» способствует более эффективному распределению и рациональному использованию имеющихся на предприятии ограниченных ресурсов.

Д. В. Кириллов (Самара, СамГУ)**. Управление распространением полномочий на основе рисков в событийно-обусловленном делегировании и отзыве полномочий.**

Модель событийно-обусловленного делегирования и отзыва полномочий (СОДОП) [1] позволяет автоматизировать процесс выполнения операций по делегированию и отзыву полномочий в системах, реализующих контроль доступа на основе ролей (КДОР) и контекстно-ориентированную модель КДОР в качестве механизмов разграничения доступа.

При формировании графа распространения прав доступа большую роль играют ограничения, накладываемые на отношения назначения пользователей на роли, назначения полномочий ролям и отношения допустимости делегирования полномочий. Ограничения могут иметь вид как четко формально заданных критериев, связанных с характеристиками элементов и отношений системы, так и нечетко заданных критериальных границ, основанных на некоторых статистических и вероятностных характеристик поведения и свойств системы. Первый вариант ограничений достаточно подробно исследован в работах, связанных с проблемой распределения обязанностей и конфликта интересов в контроле доступа на основе ролей [2], второй вариант, реализуемый на основе метода анализа рисков, исследован относительно полно только в работах, связанных непосредственно с механизмами КДОР [3] и контекстно-ориентированного КДОР. В моделях делегирования полномочий данный метод задания ограничений ранее не был рассмотрен.

Особенность подхода, предложенного автором, заключается в том, что кроме риска, связанного с выполнением операций, вводится также зависимость рисков от атрибутов объектов, субъектов и ролей, участвующих в выполнении операции. В качестве ограничений на выполнение операций делегирования и отзыва полномочий выступают веса дуг, связывающих элементы множеств пользователей, постоянных ролей, делегированных ролей, объектов и их атрибутов. При этом веса дуг динамически корректируются в зависимости от компетенции пользователей, выполняющих как системные операции, так и операции делегирования полномочий, причем в расчете учитываются все ребра цепочки делегирования. В качестве показателей рисков могут выступать как числовые значения, так и качественные показатели решетки ценности информации. Предложенный подход позволяет достигнуть высокого уровня детализации при формировании и реализации политики безопасности в контексте автоматизированной информационной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кириллов Д. В.* Основные принципы событийно-обусловленного делегирования и отзыва полномочий. — Вестник УГАТУ, 2009, т. 1 (30).
2. *Nyanchama M.*, *Osborn S.* The role graph model and conflict of interest. — ACM Transactions on Information and Systems Security, 1999, v. 2, № 1, p. 3–33.
3. *Nissanke N.*, *Khayat E. J.* Risk based security analysis of permissions in rbac. — In: Proceedings of the 2nd international workshop on information systems, 2004.

Т. Н. Кожеманова, Р. Г. Спевакова (Набережные Челны, ИЭУиП)**. Диагностика банкротства ОАО «ТФК «КАМАЗ» по отечественным и зарубежным скоринговым моделям.**

В настоящем сообщении произведена оценка потенциального банкротства крупнейшего предприятия г. Набережные Челны ОАО «Торгово-Финансовая компания «КАМАЗ». Основным видом деятельности организации является продажа автомобилей «КамАЗ» и запасных частей к ним через фирменную сеть продаж и сервисного обслуживания в городах Москва, Казань, Кемерово, Хабаровск и др.

В процессе настоящего исследования выяснилось, что основными причинами неплатежеспособности предприятия ОАО «ТФК «КАМАЗ» являются неплатежи, спровоцированные недостаточной компетентностью финансового руководства предприятия, а также частными интересами управляющих компаний, стремящихся вывести часть капитала предприятия из производственной сферы в сферу торгового оборота и иные непроизводственные сферы.

В работе, представленной данным сообщением, производилась диагностика банкротства неплатежеспособного предприятия ОАО «ТФК «КАМАЗ» по следующим шести скоринговым моделям: четырех- и пятифакторной моделям Э. Альтмана, с помощью рейтингового числа Р. С. Сайфуллина и Г. Г. Кадыкова, модели Лисса, четырехфакторной модели ученых Иркутской государственной экономической академии (ИГЭА) и по самой простой — двухфакторной модели, использующей всего два финансовых показателя: коэффициент покрытия (текущей ликвидности) и коэффициент финансовой зависимости.

Проведенное прогнозирование банкротства предприятия привели к следующим результатам.

1. Оценка вероятности банкротства ОАО «ТФК «КАМАЗ» по пятифакторной модели Э. Альтмана показала высокую вероятность банкротства предприятия в течение 2007–2009 годов. Об этом свидетельствуют высокие значения Z-счета Э. Альтмана в этих годах: Z_5(2007 г.)=1,98, Z_5(2008 г.)=2,07, Z_5(2009 г.)=2,19, значительно превышающие критическое значение 1,81.

2. Четырехфакторная модель Э. Альтмана показывает иной результат. А именно, Z-счет Альтмана в четырехфакторной модели по годам исследования оказался равным Z_4(2007 г.)=11,02, Z_4(2008 г.)=11,35, Z_4(2009 г.)=9,0387, что значительно превышает критическое значение $Z_{\text{крит}} = 1,425$. Известно, что если $Z_{\text{эмпир}} > Z_{\text{крит}} = 1,425$, то с 95-процентной вероятностью можно утверждать, что в ближайший год (т. е. 2010 г.) банкротство не произойдет, а с 79-процентной — что банкротство не произойдет в течение ближайших пяти лет.

3. Рейтинговое число R, предложенное учеными Р. С. Сайфуллиным и Г. Г. Кадыковым для прогнозирования банкротства, оказалось равным R(2007 г.)=0,11, R(2008 г.)=0,29 и R(2009 г.)=0,39, что значительно меньше критического значения $R_{\text{крит}} = 1$ и которое свидетельствует о неудовлетворительном, предбанкротном финансовом состоянии ОАО «ТФК «КАМАЗ».

4. В четырехфакторной модели Лисса факторы–признаки учитывают такие результаты деятельности предприятия, как ликвидность, рентабельность и его финансовую независимость. Поскольку значения Z-счета Лисса по годам составили Z(2007 г.)=0,05, Z(2008 г.)=0,06, Z(2009 г.)=0,05, что превышает критическое значение $Z_{\text{крит}} = 0,037$, то вероятность банкротства предприятия малая.

5. В четырехфакторной модели прогноза риска банкротства ученых ИГЭА критическим значением рейтингового числа R является число $R = 0,42$. Известно, что если $R_{\text{эмпир}} > R_{\text{крит}} = 0,42$, то вероятность банкротства минимальна. Поскольку значения R(2007 г.)=6,96, R(2008 г.)=7,59, R(2009 г.)=7,15 превышают критическое значение 0,42, то согласно модели Лисса в ближайшее время ОАО «ТФК «КАМАЗ» банкротство не грозит.

6. Оценка вероятности банкротства с помощью двухфакторной модели приводит к

заключению, что на протяжении трех лет с 2007 по 2009г.г. вероятность банкротства ОАО «ТФК «КАМАЗ» следует оценить как среднюю.

Хотя проведенная оценка потенциального банкротства ОАО «ТФК «КАМАЗ» и привела к противоречивым заключениям о вероятности банкротства исследуемого предприятия, но, однако, показала, что предприятие испытывает финансовые затруднения, которые, если не принять вовремя соответствующие меры, могут привести его к банкротству.

В. Н. Колодежнов (Воронеж, ВГТА)**. Течение в плоском канале дилатантной жидкости с эффектом «отвердевания».**

Рассмотрим следующую реологическую модель неньютоновской жидкости:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu(I_2)\varepsilon_{ij}, \quad \mu(I_2) = \frac{\tau_{crit}}{2\sqrt{-I_2}}\left\{1 - \left(1 - \sqrt{-\frac{I_2}{I_{2,crit}}}\right)^{1/n}\right\}, \qquad (1)$$

$n > 1$, $-I_2 \leqslant I_{2,crit}$, где τ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций соответственно, P — давление, δ_{ij} — символ Кронекера, $\mu(I_2)$ — функция второго инварианта I_2 тензора скоростей деформаций, τ_{crit}, $I_{2,crit}$, n — эмпирические константы реологической модели.

Как это следует из (1), по мере увеличения модуля второго инварианта функция $\mu(I_2)$ монотонно возрастает. Иначе говоря, жидкость, подчиняющаяся такому реологическому уравнению, демонстрирует дилатантные свойства. При этом в рамках этой реологической модели (1) предполагается, что второй инвариант тензора скоростей деформаций не может по модулю превышать некоторого критического значения $I_{2,crit}$.

На примере, в частности, одномерного течения в плоском канале ширины $2h$ можно продемонстрировать еще одно свойство такой жидкости. Вводя систему координат традиционным образом, получаем

$$\tau_{xy} = -\tau_{crit}\left\{1 - \left(1 + \frac{\dot\gamma}{2\sqrt{I_{2,crit}}}\right)^{1/n}\right\}, \quad \dot\gamma = \frac{du}{dy}, \qquad (2)$$

где $\dot\gamma$ — скорость сдвига, u — скорость жидкости, представляющая собой функцию поперечной координаты y.

Из (2) непосредственно следует, что крутизна кривой течения $|\tau_{xy}| = f(|\dot\gamma|)$ неограниченно возрастает при $\dot\gamma \to -2\sqrt{I_{2,crit}}$. Само же значение касательного напряжения остается при этом конечным и стремится к значению $(-\tau_{crit})$. Такое неограниченное возрастание крутизны кривой течения, характеризующее вязкость жидкости, можно интерпретировать как проявление эффекта «отвердевания».

Было показано, что, если перепад давления ΔP на длине канала L удовлетворяет условию $\Delta P > \Delta P_{crit} = \tau_{crit}L/h$, то на его стенках формируются слои «отвердевшей» жидкости и собственно течение происходит лишь в центральной части канала ширины $2h_s < 2h$. Значение половины ширины свободного для течения жидкости «просвета» в поперечном сечении канала определяется из выражения $h_s = \tau_{crit}L/\Delta P$.

Что же касается распределения скорости в поперечном сечении и объемного расхода Q жидкости через канал, то они определяется из выражений

$$u(y) = \begin{cases} 2\sqrt{I_{2,crit}}\left[(h_s - |y|) - \dfrac{h_s}{n+1}\left(1 - \dfrac{|y|}{h_2}\right)^{n+1}\right], & |y| < h_s, \\ 0, & h_s < |y| < h, \end{cases}$$

$$Q = \frac{2n(n+3)\tau_{crit}^2 L^2\sqrt{I_{2,crit}}}{(n+1)(n+2)\Delta P^2}, \quad \Delta P > \Delta P_{crit}.$$

Из последних равенств, в частности, следует эффект «запирания» канала по мере увеличения давления, обусловленный нарастанием толщины слоев «отвердевшей» жидкости.

С. А. К о р н и е н к о, **Е. С. К о р н и е н к о** (Ставрополь, СевКавГТУ).
Анализ групп комплексных показателей при решении задач векторной оптимизации.

Показатели рассматриваем, как комплексные показатели назначения, представляемые в виде произведения показателей качества СРК K_i: $K_I = K_1 K_2 \cdots K_n$, и частного, в результате деления одних показателей на другие: $K_{II} = K_1 K_2 \cdots K_m/(K_{m+1} K_{m+2} \cdots K_n)$, где K_i — технические, эксплуатационные, информационные, экономические, социальные и временные показатели. При оценке эффективности предлагается применять обобщенные показатели [1]. Комплексные показатели назначения разделим на: 1) выраженные в стоимостном виде; 2) не представленные в стоимостном выражении; 3) часть составляющих имеет стоимостное выражение, другая часть не представляется в стоимостном виде. Распространенными экономическими показателями являются показатели типа отношения эффект–затраты или разности $W-$Э. Рассмотрим Э у потребителя Э$_э$, который характеризуется эффективностью СРК. Экономический Э может определяться за различные интервалы времени: годовой; за весь срок службы. В качестве Э выступает экономия текущих W по сравниваемым вариантам i и j, получаемая за время T окупаемости капитальных вложений W, это капитальные вложения $\Delta K = K_{эj} - K_{эi}$. Для определения эффективного варианта можно использовать следующую формулу:

$$\sum_{t=1}^{T} (C_{эi} - C_{эj})_t = K_{эi} - K_{эj}, \qquad (1)$$

где $C_{эi}$, $C_{эj}$ — текущие W по сравниваемым вариантам в t-м году без учета амортизационных отчислений. Смысл (1) в том, что при более капиталоемком варианте сумма экономии на эксплуатационных расходах за время T должна быть не меньше капитальных вложений. Иначе условие окупаемости капитальных вложений запишется в виде Э$/W = \sum_{t=1}^{T} (G_{эi} - C_{эj})/(K_{эj} - K_{эi}) = 1$. Чтобы выявить лучший вариант технического решения, нужно учитывать фактор времени. *Техническими комплексными показателями назначения* (ТКПН) назовем показатели $K_{IT} = K_{1T} K_{2T} \cdots K_{nT}$, $K_{IIT} = K_{1t} K_{2t} \cdots K_{mt}/(K_{(m+1)t} \cdots K_{nt})$, где K_{it} — i-й частный технический показатель качества. Несмотря на то, что показатели K_{IT} и K_{IIT} обобщают ряд частных показателей, они имеют локальный характер, так как при их формировании не учтены экономические, социальные и временные показатели. Это не означает полной непригодности ТКПН, но при их использовании необходимо учитывать экономическую и социальную значимость частных показателей K_{it}. На практике применение нашли технико-экономические показатели типа Эт$/W$ или $W/$Эт, где Эт — технический эффект, W — экономические затраты того или иного вида. Как указано в [2], сравнивать эффективность СРК для выполнения одних задач можно с помощью соотношения $E_1/E_2 = (G_1/C_1)/(G_2/C_2)$, где G_1, G_2 — результаты использования СРК 1 и 2 варианта; C_1, C_2 — затраты на создание и эксплуатацию СРК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корниенко С. А.* Применение системного анализа для разработки математической модели оценки структурной сложности систем и подсистем радиоконтроля различных уровней радиочастотной службы. — Вестник СОНИИР, Периодический теоретический и научно-практический журнал, 2007, № 4 (18).
2. *Цветков А. Г.* Принципы количественной оценки эффективности радиоэлектронных средств. М.: Советское радио, 1971.

А. Б. Корякин, **Я. Е. Ромм** (Таганрог, ГОУВПО «ТГПИ»). **Распознавание реверберации и объектов при помощи сортировки.**

Обнаружение и классификация гидроакустических сигналов на фоне имитирующих помех (реверберации), частотные свойства которой идентичны свойствам полезного сигнала, сопряжено с тем, что корреляционная обработка в таких условиях не дает преимущества в соотношении сигнал/помеха. В докладе предлагается способ получения информации об объектах локации в условиях сильных реверберационных помех путем анализа отраженного акустического сигнала на основе идентификации экстремальных признаков объектов с применением алгоритмов сортировки. В основу алгоритма локализации экстремумов полагается оператор локализации [1] с предварительной сортировкой.

Алгоритм распознавания реверберации в стробе обработки приводится в [3]. Вычисляется признак изрезанности огибающей сигнала в виде отношения усредненного значения приращений локальных максимумов к среднему значению исходных максимумов,

$$S_j = \frac{\sum_{n=2}^{N2_{\max}} |y2m_n - y2m_{n-1}|}{\sum_{n=1}^{N2_{\max}} y1m_n} \frac{N1_{\max}}{N2_{\max}},$$

где $y1m$ и $y2m$ — последовательности максимумов, локализованных на первом и на втором этапах, $N1_{\max}$ и $N2_{\max}$ — количество максимумов на соответствующем этапе. Вычисляется признак монотонности перехода между экстремальными точками путем подсчета случаев, когда удлинение сторон треугольника, прилежащих к экстремальной точке, образованного одним минимумом (максимумом) и двумя прилежащими максимумами (минимумами), по отношению к геометрической длине этих сторон, является незначительным ($S_L < 0,4$),

$$S_L = \frac{\sqrt{(mo_x - m1_x)^2 + (m0_y - m1_y)^2} + \sqrt{(m1_x - m2_x)^2 + (m1_y - m2_y)^2}}{\sum_{n=1}^{m0_x - m0_y} \sqrt{1 + y2_n - y2_{n-1}} + \sum_{n=1}^{m1_x - m1_y} \sqrt{1 + y2_m - y2_{n-1}}}.$$

Произведение изрезанности огибающей на признак монотонности, ОРП$= S_1\, S_L$, используется как обобщенный реверберационный признак (ОРП) с типовым значением диапазона от 0 до 10. Сигналам реверберации соответствуют верхние значения этого признака [3]. В [3] приведены результаты численного эксперимента для 36 выборок с целью сравнения значений отношения сигнал/помеха, вычисленного с помощью преобразования Фурье, и значения ОРП, вычисленного предложенным способом. Согласно эксперименту, значения ОРП для реверберации и полезного сигнала существенно различаются между собой, в том числе в случае их слабой выраженности при спектральном анализе на основе преобразования Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ромм Я. Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. I. — Кибернетика и системный анализ, 2007, № 1, с. 165–182.
2. *Ромм Я. Е.*, *Корякин А. Б.* Построение признаков распознавания с применением сортировки для обработки гидроакустических сигналов. Таганрог: ТГПИ, 2010, 59 с. Деп. в ВИНИТИ 25.01.2010 № 17-В2010.

Е. В. Красильникова (Москва, МГУ)**. Несколько результатов регрессионного анализа влияния структуры собственности на деятельность компаний.**

Тип собственности и ее структура существенно воздействуют на деятельности корпорации и, в связи с этим, требует специального исследования с целью определения способов улучшения ее состояния и потенциала развития в перспективе. Для анализа сформирована выборка крупнейших по капитализации российских компаний реального сектора по данным рейтинга «Капитализация-200» за 2008 г. с использованием отчетности эмитентов и баз данных [http://www.skrin.ru/; http://www.raexpert.ru/database/; http://www.quote.ru/]. В расчетах регрессионных моделей использован пакет Eviews. В качестве независимых переменных исследован ряд характеристик структуры собственности: доля менеджеров $MANAG$, доля физических лиц $PRIV$, доля государства $STATE$, доля институциональных акционеров $INST$, доля внешних юридических лиц $COMP$, и выполнена оценка их влияния на результативность компании. Исследован ряд моделей, прежде всего, линейная модель

$$P = c + \beta_1\, STATE + \beta_2\, PRIV + \beta_2\, INST + \beta_4\, MANAG + \beta_5\, COMP + \beta_6\, Size + u,$$

где c — постоянная величина, u — случайная величина, связанная с неучетом всех влияющих переменных и с управлением модели, P — финансово-экономические показатели эффективности: производительность ($PROD$), рентабельность акционерного капитала ($PROF$), рентабельность активов (ROA), q-Тобина (q) — характеристика рыночной стоимости корпорации, $Size$ — размер компании (контрольная переменная, связанная как со структурой собственности, так и с показателями эффективности; оценивается как логарифм среднесписочной численности работников).

Получены следующие результаты.

1. *Влияние на рыночную стоимость компании.* Исследование линейной модели не выявило значимой зависимости рыночной стоимости компании от структуры собственности, что связано с наличием нелинейной, U-образной зависимости q от всех типов собственников, выявленной по результатам эмпирического анализа: снижение q с ростом как $MANAG$, так и $STATE$ до достижения ими порога 40%, а затем — повышение q; снижение q при повышении $INST$ до порога 30%, а затем — повышение q.

2. *Влияние на рентабельность активов.* Регрессионный анализ не обнаружил существенной зависимости между ROA и $STATE$. Воздействие $MANAG$ на ROA также неоднозначно: при повышении ее невысокой доли менеджеры во имя репутации и престижа стремятся к лучшему использованию ресурсов, а при высокой доле — распоряжаются компанией на собственное усмотрение (эффект «окапывания»). Экспериментально обоснована U-образная зависимость ROA от $INST$.

3. *Влияние на производительность труда.* Результаты анализа $PROD$ не дали устойчивой однозначной связи ее с $INST$ и $STATE$. Определена положительная, но не существенная линейная зависимость $PROD$ от $MANAG$.

4. *Влияние на рентабельность акционерного капитала.* Полученные оценки параметров регрессионной модели и значимости результатов анализа зависимости $PROF$ от структуры собственности указывают на наличие значимой существенной линейной связи: прямо пропорциональной с $MANAG$ и $COMP$; обратно пропорциональной — с $INST$ и $STATE$ (эмпирический анализ выявил некоторое повышение $PROF$ при повышении $INST$ свыше 50%). Высокая F-статистика с небольшой вероятностью ошибки показывает значимость результатов модели в целом. Статистика Дурбина–Ватсона близка к двум, что свидетельствует об отсутствии автокорреляции. Низкие значения коэффициентов Akaike и Schwarz подтверждают обоснованность

выбора оцениваемой модели.

Variable	Coefficient β	Std. Error	t-Statistic	Prob.
c	-21,34128	8,080930	-2,640944	0,0385
LOG($INST$)	-0,583051	0,255491	-2,282085	0,0626
LOG($PRIV$)	-0,393506	0188378	-2,088918	0,0817
$STATE$	-16,88838	3,991507	-4,231079	0,0055
$MANAG$	11,99557	3,633382	3,301490	0,0164
$COMP$	19,15877	3,347483	5,723337	0,0012
$Size$	4,625177	1,769979	2,613125	0,0400

R-squared	0,900760	Mean dependent var	1,235883
Adjusted R-squared	0,801519	S.D. dependent var	3,750651
S.E. of regression	1,670959	Akaike info criterion	4,168406
Sum squared resid	16,75263	Schwarz criterion	4,472610
Log likelihood	-20,09464	F-statistic	9,076543
Durbin–Watson stat	2,469683	Prob (F-statistic)	0,008377

Полученные результаты комплексного регрессионного анализа с использованием реальных данных современных корпораций математически определили наличие и характер зависимости их результативности от структуры собственности и, вместе с тем, выявили противоречивое влияние, в частности, государственного участия в капитале. Целый ряд частных компаний ($STATE = 0$) является эффективным и успешным. Некоторая неоднозначность отдельных результатов связана как с недостаточностью данных, так и с не раскрытием корпоративной информации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, проект № 08–02–00126а.

Л. Н. Кротов, **А. А. Поддубнова**, **И. Ю. Разепина**
(Пермь, ПГТУ)**. Определение координат центра цилиндрического дефекта методами математического моделирования при магнитном контроле.**

Математическая модель строится на основании аналитического решения прямой задачи магнитостатики при постановке на плоскости в приближении линейности магнитных свойств ферромагнетика. Решение такой задачи для кругового цилиндра рассмотрено в [1].

Декартову систему координат XOY расположим в центре дефекта. Намагничивающее поле $\vec{H}_0$ направлено вдоль оси OX. При таком выборе системы координат, согласно [1], компонента магнитного поля рассеяния от дефекта $H_{yd}(x)$ меняет знак при $x = 0$. Это свойство может быть положено в основу определения координаты центра дефекта x_c в системе отсчета, не связанной с положением дефекта.

Под глубиной расположения центра y_c дефекта будем понимать расстояние от поверхности изделия, где производится регистрация магнитного поля рассеяния, до центра дефекта. В силу линейности рассматриваемой задачи магнитостатики, согласно [1], для компоненты нормированного магнитного поля рассеяния получим $h_{xd}(y_c) = H_{xd}(y_c)/H_0 = Q/y_c^3$. Здесь Q — константа, определяемая геометрией дефекта и магнитной проницаемостью ферромагнетика.

Проводя регистрацию магнитного поля рассеяния еще и с противоположной стороны изделия толщиной $b \geqslant 2y_c$, получим систему из двух алгебраических уравнений. Введя обозначение $\xi = h_{xd}(y_c)/h_{xd}(b - y_c)$, глубину центра дефекта найдем из выражения $y_c = b/(f + \sqrt{\xi})$. Здесь параметр f зависит от формы цилиндрического дефекта. Для кругового цилиндра $f = 1$.

Вычислительный эксперимент показал, что предложенная математическая модель удовлетворительно описывает пространственное распределение магнитного поля рассеяния не только для круговых, но и для цилиндрических дефектов других форм при соответствующем выборе параметра модели f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Щербинин В. Е.*, *Горкунов Э. С.* Магнитный контроль качества металлов. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 1996, 264 с.

Л. Н. К р о т о в, **Е. Л. К р о т о в а**, **А. А. П о д д у б н о в а** (Пермь, ПГТУ)**. Определение эффективного радиуса дефекта методами математического моделирования при магнитном контроле.**

Математическая модель основана на решении задачи магнитостатики на плоскости в предположении линейности магнитных свойств ферромагнетика. Начало декартовой системы координат находится в центре дефекта, радиус которого R, y — расстояние от центра дефекта до поверхности контролируемого изделия. Индукция намагничивающего однородного поля $\vec{B}_0$ направлена вдоль оси OX. Над дефектом имеет место компонента магнитного поля $B_x(y)$. Вследствие неразрывности магнитного потока справедливо соотношение

$$B_0 y_c = \int_0^R B_x(y)\,dy + \int_R^{y_c} B_x(y)\,dy \approx \int_R^{y_c} B_x(y)\,dy. \qquad (1)$$

Первым интегралом можно пренебречь, так как магнитная проницаемость внутри дефекта в 100÷1000 раз меньше, чем в ферромагнетике. Соотношение (1) при известной функции $B_x(y)$ можно рассматривать как уравнение относительно R.

В вычислительном эксперименте функция $B_x(y)$ известна с высокой точностью, поэтому значение R, определенное из соотношения (1), получается вполне удовлетворительным. Здесь следует отметить некорректность решаемой задачи, обусловленную некорректностью обратной геометрической задачи магнитостатики, связанной с определением формы границы ферромагнетика [1] по зарегистрированному пространственному распределению магнитного поля рассеяния. Восстановление функции $B_x(y)$ в условиях реального физического эксперимента затруднено вследствие невозможности провести измерение индукции магнитного поля внутри ферромагнетика, однако приближенная реконструкция функции $B_x(y)$ для дефектов заданной формы по зарегистрированным значениям магнитного поля рассеяния с противоположных сторон изделия позволяет определить два члена разложения этой функции.

Вычислительный эксперимент показал, что для дефектов эллиптической формы погрешность определения эффективного радиуса дефекта составляет менее 5%, что вполне удовлетворительно для технических применений в практике магнитного контроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кротов Л. Н.* Реконструкция границы раздела сред по пространственному распределению магнитного поля рассеяния. II. Постановка и метод решения обратной геометрической задачи магнитостатики. — Дефектоскопия, 2004, № 6, с. 36–44.

А. Ю. К у л а й (Москва, ООО «Стэл КС»). **Условная вероятность двух реализаций однородной цепи Маркова с неизвестными параметрами распределения.**

Пусть X и O — реализации случайной последовательности, некоторые параметры распределения которой неизвестны. В ряде приложений, например, при распознавании образов [1], необходимо вычислять вероятность X при условии наблюдения O.

Как и в байесовском подходе к оцениванию параметров [2], рассмотрим неизвестные параметры $\overline{\theta}$ как случайную величину с некоторой плотностью распределения. При отсутствии иной информации будем считать, что на параметрическом пространстве Θ задано равномерное распределение с плотностью $\mu(\overline{\theta}) = \text{const}$. Тогда

$$P(X|O) = \int_{\overline{\theta}\in\Theta} P(X|\overline{\theta})\, dP(\overline{\theta}|O),$$

$$dP(\overline{\theta}|O) = \frac{P(O|\overline{\theta})\mu(\overline{\theta})\, d\overline{\theta}}{\int_{\overline{\theta}'\in\Theta} P(O|\overline{\theta}')\mu(\overline{\theta}')\, d\overline{\theta}'} = \frac{P(O|\overline{\theta})\, d\overline{\theta}}{\int_{\overline{\theta}'\in\Theta} P(O|\overline{\theta}')\, d\overline{\theta}'},$$

$$P(X|O) = \int_{\overline{\theta}\in\Theta} P(X|\overline{\theta}) \frac{P(O|\overline{\theta})\, d\overline{\theta}}{\int_{\overline{\theta}'\in\Theta} P(O|\overline{\theta}')\, d\overline{\theta}'} = \frac{\int_{\overline{\theta}\in\Theta} P(X|\overline{\theta})P(O|\overline{\theta})\, d\overline{\theta}}{\int_{\overline{\theta}'\in\Theta} P(O|\overline{\theta}')\, d\overline{\theta}'}.$$

В [3] рассматривался случай выборки из неизвестного полиномиального распределения. Для последовательности случайных величин, связанных в цепь Маркова, вычисление интегралов в последнем равенстве приводит к следующему результату.

Теорема. *Если X и O — реализации неизвестной однородной цепи Маркова (с дискретным временем) с n исходами, на параметрическом пространстве Θ задано равномерное распределение, то*

$$P(X|O) = \frac{1 + I\{x_1 = o_1\}}{n+1} \prod_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{n} A_{v_X(i,j)+v_O(i,j)}^{v_X(i,j)}}{A_{v_X(i,*)+v_O(i,*)+n-1}^{v_X(i,*)}},$$

где I_Z — индикатор события Z, y_1 — первый символ последовательности Y, $Y \in \{O, X\}$, A_n^m — количество размещений из n по m, $v_Y(i,j)$ — частота встречаемости в последовательности Y пары символов (i,j), $Y \in \{O, X\}$, $v_Y(i,*)$ — частота встречаемости в последовательности Y пар символов с первым символом i, $Y \in \{O, x\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
2. *Боровков А. А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
3. *Кулай А. Ю.* Условная вероятность двух реализаций случайной последовательности с неизвестными параметрами распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 14, в. 6, с. 1087–1088.

С. Е. К у р у ш и н а (Самара, СГАУ)**. Уравнения Гинзбурга–Ландау и дисперсионное соотношение для системы фитопланктон–зоопланктон–рыба с флуктуирующими параметрами.**

Возникновение и эволюция пространственных и пространственно-временных структур в экологических системах вызывают в настоящее время все возрастающий интерес. В работе, представленной данным сообщением, исследуется влияние внешней флуктуирующей среды на эволюцию пространственных диссипативных структур (ДС) взаимодействующих популяций в модели Шеффера [1], описывающей динамику системы хищник–жертва для популяций фитопланктона и зоопланктона.

Введем безразмерные время $\tau = rt$ и координаты $\vec{x}\,' = \vec{x}\sqrt{r/d_1}$ и представим параметры m/r и a/r, зависящие от коэффициентов естественного прироста фитопланктона r, естественной смертности зоопланктона m и трофического коэффициента a, в виде $m/r = (m_0/r_0)(1 + f_1(\vec{x}\,', t))$, $a/r = (a_0/r_0)(1 + f_2(\vec{x}\,', t))$, где m_0, r_0, a_0 — пространственно-временные средние соответствующих коэффициентов, перепишем уравнения модели [1] следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial \tau} = x_1(1 - x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\vec{x}\,', \tau))\frac{x_1 x_2}{1 + bx_1)} + \nabla'^2 x_1,\\
&\frac{\partial x_2}{\partial \tau} = \frac{a_0}{r_0}(1+f_2(\vec{x}\,', \tau))\frac{x_1 x_2}{(1 + bx_1)} - \frac{m_0}{r_0}(1+f_1(\vec{x}\,', \tau))x_2 - \frac{g^2 x_2^2}{r_0(1+h^2 x_2^2)} f + \frac{d_2}{d_1}\nabla'^2 x_2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь случайные однородные изотропные поля $f_i(\vec{x}\,', \tau)$ определяют пространственно-временные гауссовы флуктуации этих параметров. Параметры r, a, b, m, g, h, f, d_1 и d_2 подробно описаны в [1]–[2].

Пусть поля $f_i(\vec{x}\,', \tau)$ имеют корреляционный тензор $\langle f_i(\vec{x}\,', t')f_j(\vec{x}\,'', \tau)\rangle = \theta_i \exp\{-k_{fi}|\vec{x}\,' - \vec{x}\,''|\}\delta(t' - \tau)\delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ и нулевые средние значения.

Используя метод, приведенный в [2], получены уравнения Гинзбурга–Ландау для амплитуд неустойчивых мод и дисперсионное соотношение для системы (1) в приближении малости интенсивностей флуктуаций θ_j. Подробный вывод уравнений представлен на сайте http:/sites.google.com/site/morfogenez/.

Результаты численных расчетов дисперсионного соотношения показывают, что при наличии флуктуаций в закритической области происходит увеличение области неустойчивости системы (1) и возрастание инкрементов неустойчивых мод, что приводит к уменьшению времени разрушения однородного состояния и образования ДС. Кроме того, в докритической области возникают неустойчивые моды, т. е. шум смещает точку бифуркации Тьюринга системы (1) и индуцирует параметрическую неустойчивость.

Численное моделирование эволюции системы (1) показало, что, как и при жестком возбуждении структур в докритической области, связанном с некоторым начальным возбуждением критической амплитуды, возникающая при параметрической неустойчивости ДС имеет солитоноподобный вид. Но физическая природа его происхождения иная. Таким образом, численное моделирование эволюции системы (1) качественно подтверждает сделанные выше теоретические выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malchow H.* Motional instabilities in prey-predator systems. — J. Theor. Biol., 2000, v. 204, p. 639–647.
2. *Курушина С. Е.* Аналитическое исследование и численное моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных. — Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2009, № 6, с. 125–138.

С. Е. Курушина, **Л. И. Громова**, **В. В. Максимов** (Самара, СГАУ)**. Численный анализ влияния флуктуаций параметров на образование пространственно-временных структур в системе фитопланктон–зоопланктон–рыба.**

В работе, представленной данным сообщением, исследуется влияние внешней флуктуирующей среды на формирование структур Тьюринга и спиральных волн, возникающих в модели Шеффера [1], описывающей динамику системы хищник–жертва для популяций фитопланктона и зоопланктона:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= x_1(1-x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1+f_2(\vec{x},\tau))\frac{x_1x_2}{(1+bx_1)} + \nabla^2 x_1,\\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \frac{a_0}{r_0}(1+f_2(\vec{x},\tau))\frac{x_1x_2}{(1+bx_1)} - \frac{m_0}{r_0}(1+f_1(\vec{x},\tau))x_2 - \frac{g^2x_2^2}{r_0(1+h^2x_2^2)}f + \frac{d_2}{d_1}\nabla^2 x_2.\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь случайные поля $f_i(\vec{x},\tau)$ определяют пространственно-временные флуктуации соответствующих параметров. Параметры $r_0, a_0, b, m_0, g, h, f, d_1$ и d_2 подробно описаны в [1].

Моделирование системы (1) проводилось при помощи метода Кранка–Николсона. Моделирование случайного поля и вычисление средних по поверхности флуктуаций динамических переменных осуществлялось с использованием математического пакета MatLab. Реальная флуктуирующая среда моделируется как однородное изотропное гауссово поле с корреляционным тензором $\langle f_i(\vec{x}\,',\tau')f_j(\vec{x}\,'',\tau''\rangle = \theta_i \exp\{-k_{fi}|\vec{x}\,' - \vec{x}\,''|\}\exp\{-k_{ti}|\tau'-\tau''\}\delta_{ij}$. Времена корреляции случайного поля выбраны значительно меньшими, чем характерные времена системы (1).

Проведено моделирование эволюции пространственных диссипативных структур (ДС) Тьюринга. В результате численного моделирования показано, что при увеличении θ_1 при неизменном θ_2 процесс разрушения однородного состояния и формирования статистически стационарной ДС происходит быстрее, чем в отсутствии шума. Кроме того, наличие внешних флуктуаций разрушает симметрию пространственных структур. Увеличение θ_2 до 0,16 при неизменном θ_1 приводит к аналогичному эффекту, однако теперь этот процесс идет интенсивнее, чем в вышеописанном эксперименте. Анализ влияния на эволюцию рассматриваемой системы дальнейшего увеличения интенсивности θ_2 показал, что поведение системы приобретает хаотический характер, причем переход к хаосу осуществляется через перемежаемость. Аналогичные эффекты, связанные с влиянием шума парметров, были обнаружены в системе Гирера–Майнхардта [2]. Видео-файлы эволюции системы (1) представлены на сайте http://sites.google.com/site/morfogenez/.

Проведено моделирование эволюции спиральных волн в системе (1). Показано, что спиральные волны устойчивы к слабому внешнему флуктуационному фону и, в отличие от тьюринговых структур, их конфигурация и скорость формирования не изменяются. Однако даже при малых внешних флуктуациях наблюдается размывание и искажение контуров спирали. Тип поведения кончика спирали (точки обрыва волнового фронта) не изменяется, но в его дрейфе возникают элементы случайности: флуктуирует как сама траектория, так и ее ориентация в пространстве. Увеличение θ_1 при неизменном θ_2 приводит к аналогичному эффекту, только теперь этот процесс замедляется в сравнении с вышеописанным экспериментом. При больших интенсивностях флуктуаций внешнего случайного поля спиральная волна разрушается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malchow H.* Motional instabilities in prey-predator systems. — J. Theor. Biol., 2000, v. 204, p. 639–647.
2. *Курушина С. Е.*, *Иванов А. А.* Диссипативные структуры в системе реакция–диффузия в поле мультипликативных флуктуаций. — Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2010, № 3.

С. Н. Ларин, С. М. Островский (Москва, ЦЭМИ РАН, РГНФ).
Выбор направлений инновационного развития хозяйствующих субъектов региона в условиях мирового экономического и финансового кризиса.

Негативные факторы воздействия мирового экономического и финансового кризиса (МЭФК) вынуждают хозяйствующие субъекты оптимизировать свою инновационную активность во временно́м, территориальном и экономическом пространстве с целью выбора наиболее благоприятных условий для эффективного ведения хозяйственной деятельности. Основой для этого могут стать концепции капитализации, конкуренции и управления [1]. Концепция капитализации предполагает повышение уровня доходности при внедрении инноваций, что позволяет облегчить влияние негативных последствий МЭФК. Концепция конкуренции предполагает наличие у инноваций конкурентных преимуществ, что позволяет изменять территориальное пространство инновационной деятельности предприятия под влиянием экономической востребованности нововведений для различных отраслей народного хозяйства. Концепция управления позволяет изменять политическое и экономическое пространство с целью наиболее выгодного размещения имеющихся в распоряжении предприятия ресурсов.

Одним из важнейших негативных последствий МЭФК является отток инвестиционных ресурсов, которые определяют финансовую природу кризиса. Поэтому будет оправданным считать центральным звеном системы инновационного развития хозяйствующих субъектов в условиях МЭФК инвестиционные ресурсы, для которых основополагающей является концепция капитализации. Определяемая этой концепцией первая сфера антикризисных мероприятий может быть представлена тремя направлениями: 1) поиск и выявление резервов в хозяйственной деятельности предприятия; 2) поиск свободных финансовых ресурсов и наличие синергетического эффекта при условии, что предприятие является частью единой корпоративной структуры; 3) сохранение полученной на первых двух направлениях капитализации и принятие проектных решений, обеспечивающих рост эффективности хозяйственной деятельности. Указанные направления роста и сохранения капитализации вытекают из процесса самофинансирования хозяйственной деятельности предприятия.

Вторая сфера антикризисных мероприятий определяется концепцией управления, при помощи которой в зависимости от характеристик кризисной ситуации определяются направления развития экономической деятельности и пути выхода из сложившейся ситуации. Используя временной ресурс (T), хозяйствующий субъект может преодолеть последствия финансового кризиса и возобновить свою деятельность в период стабильного экономического развития (направление 1 — ось X). Управление хозяйственной деятельностью в условиях нестабильной политической обстановки предполагает возможность ее перевода в относительно стабильные регионы (P) (направление 2 — ось Y). Для преодоления последствий индустриального или отраслевого кризиса (OK) по результатам отраслевого анализа осуществляется выбор экономически перспективных отраслей хозяйствования (направление 3 — ось Z). Тем самым обеспечивается эффективное функционирование концепции управления в пространстве временных, политических и экономических координат. В общем случае вторая сфера антикризисных мероприятий будет характеризоваться кортежем $\langle T(X), P(Y), OK(Z)\rangle$. В зависимости от доминирования неблагоприятных факторов МЭФК (финансовых, политических или региональных, индустриальных или отраслевых) для выхода из кризисной ситуации выбирается то или иное направление хозяйственной деятельности.

Третья сфера антикризисных мероприятий определяется концепцией конкуренции, которая предполагает внедрение в деятельность хозяйствующих субъектов стратегических инновационных решений, эффективность которых позволит преодолеть негативные последствия МЭФК. В число первоочередных программ входят: 1) поддержка социальной сферы (госбюджет, пенсионное обеспечение, страхование вкла-

дов населения и т. п.); 2) поддержка банковского сектора с целью предотвращения продажи стратегических ресурсов иностранным компаниям; 3) поддержка крупного, среднего и малого бизнеса при помощи различных страховых и налоговых инструментов, которые дают возможность субъектам российской экономики получить некоторые конкурентные преимущества в сравнении с иностранными компаниями. Применительно к региональному уровню управления своевременная поддержка инновационного развития хозяйствующих субъектов региона в рамках рассмотренных выше антикризисных мероприятий позволит обеспечить стабильность социальной сферы региона и устойчивое развитие предприятий экономически значимых для государства отраслей хозяйственной деятельности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09–06–00218а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ленчук Е. Б.* Проблемы перехода России к инновационной модели развития. — Информационное общество, 2006, № 1, с. 57–63.

В. Л. Л е о н т ь е в (Ульяновск, УлГУ)**. Треугольные конечные элементы, связанные с использованием кусочно-билинейных финитных базисных функций, ортогональных на сетке треугольников.**

Проводится построение треугольных конечных элементов с помощью различных кусочно билинейных непрерывных финитных базисных функций (ОФФ) [1–3], взаимно ортогональных на каждой конкретной сетке треугольников.

Функции формы имеют вид $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \psi_i(x,y)$, где $\psi_i(x,y)$ — ОФФ одного из пяти видов, указанных в монографии [3, с. 39–76; рис. I–V приложения], которые образуют лагранжев базис функций, соответствующих трем вершинам ($i = 1, 2, 3$) треугольника сетки. Эти функции имеют более сложную структуру по сравнению с функциями формы, созданными на базе функций-шапочек (функций Куранта). Но они, являясь также непрерывными, обладают дополнительными, полезными для улучшения алгоритмов методов конечных элементов (МКЭ) свойствами, которые порождаются свойством взаимной ортогональности базисных функций.

Конечные элементы предназначены для использования в смешанных методах конечных элементов, основанных на вариационных принципах типа вариационных принципов Рейсснера и Ху–Васидзу или на обобщающих эти вариационные принципы проекционных условиях. Применение предлагаемых конечных элементов в пакетах программ МКЭ позволяет исключить большую часть узловых неизвестных (в случае вариационного принципа Рейсснера — узловые значения силовых факторов) до начала решения глобальной системы сеточных уравнений МКЭ и получить приближенные решения для кинематических и силовых факторов, имеющие одинаковую гладкость и один порядок точности.

Такой смешанный МКЭ становится сравнимым по количеству затрачиваемых на получение решения арифметических операций с МКЭ «в перемещениях», но при этом дает приближенные решения для деформаций и напряжений существенно более высокой гладкости и точности, поскольку при одновременной и независимой аппроксимации кинематических и силовых факторов в смешанной постановке задачи отсутствует операция дифференцирования приближенного решения для перемещений и нет порождаемых этой операцией потерь уровня гладкости, порядка точности и разрывов первого рода.

Работа выполнена при поддержке АВЦП МОиН РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (НИР 1.3.08), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» ГК № П1122.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев В. Л.*, *Лукашанец Н. Ч.* Ортогональные финитные функции на треугольных сетках и смешанный вариационно-сеточный метод, связанный с их применением. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2001, т. 41, № 7, с. 1090–1098.
2. *Леонтьев В. Л.* Об ортогональных финитных функциях и о численных методах, связанных с их применением. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2002, т. 9, в. 3, с. 497–504.
3. *Леонтьев В. Л.* Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: УлГУ, 2003, 178 с.

Т. С. Л у г у е в (Махачкала, ДагГУ)**. Реализация алгоритмов проектирования и анализа беспроводных сенсорных сетей.**

В последнее время получают распространение беспроводные сенсорные сети [1], основным отличием которых от классических беспроводных сетей является использование в качестве сетевых объектов миниатюрных датчиков. Условием работы таких датчиков является способность длительного сохранения энергии. Для уменьшения энергозатрат является актуальным составление расписания передачи данных в сети, в котором общее время обмена информацией между датчиками является минимальным.

Для построения алгоритмов анализа беспроводной сети будем рассматривать сеть в виде двудольного графа $G = (X, Y, E)$, где множество Y соответствует множеству датчиков, а вершины из X соответствуют сообщениям, которые необходимо передать. Дуги (y_i, x_0) и (x_0, y_j), $y_i, y_j \in Y$, $x_0 \in X$ присутствуют в графе G, если имеется сообщение на передачу из i-го датчика в j-й.

При использовании такой модели, задача составления расписания передачи сообщений в сети сводится к задаче реберной раскраски [2] графа G так, чтобы ребра инцидентные одной вершине из Y имели различные цвета, а ребра инцидентные одной вершине из X имели цвета, отличающиеся ровно на 1.

Для моделирования процесса обмена данными в беспроводной сенсорной сети реализована программа, обеспечивающая выполнение следующих функций:

1. Визуальное проектирование структуры сенсорной сети, с возможностью задания объемов информации требуемых на передачу между узлами сети.

2. По заданной структуре сети определение продолжительности кратчайшего расписания передачи сообщений, за которое обмен всеми данными между узлами сети будет завершен.

3. Сохранение спроектированной сети как в графическом формате — в виде изображения, так и в текстовом формате - в виде команд рисования в системе Latex.

4. Выделение участков сети с наибольшим взаимным трафиком.

С применением данной программы исследована эффективность разработанных алгоритмов на сетях различного размера и типа.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 09-01-96504-р_юг_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молчанов Д. А.*, *Кучерявый Е. А.* Приложения беспроводных сенсорных сетей. Электросвязь, 2006, № 6, с. 20–23.
2. *Свами М.*, *Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984, 456 с.

В. О. Л у к а щ у к (Уфа, УГАТУ). **Приближенное решение нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром.**

Теория приближенных групп преобразований [1] является эффективным средством нахождения решения довольно широкого класса дифференциальных уравнений. Знание группы преобразований, допускаемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, позволяет понижать порядок уравнения или интегрировать его.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром

$$y'' = F_{(0)}(x, y, y') + \varepsilon F_{(1)}(x, y, y') + o(\varepsilon) \tag{1}$$

с тремя симметриями вида

$$X_1 = X_{1(0)} + \varepsilon X_{1(1)}, \quad X_2 = X_{2(0)} + \varepsilon X_{2(1)}, \quad X_3 = X_{3(0)} + \varepsilon X_{3(1)}. \tag{2}$$

Пусть операторы (2) являются существенными операторами в некоторой приближенной алгебре Ли L. Следовательно, если $X_{i(0)} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, то L — шестимерная, если $X_{1(0)} = 0$, $X_{2(0)} \neq 0$, $X_{3(0)} \neq 0$, то L — пятимерная, если $X_{1(0)} = 0$, $X_{2(0)} = 0$, $X_{3(0)} \neq 0$, то L — четырехмерная приближенная алгебра Ли. В [2] были построены все такие неизоморфные приближенные алгебры Ли. В частности, получено 36 типов шестимерных, 24 типа пятимерных и 10 типов четырехмерных неизоморфных приближенных алгебр Ли.

В работе, представленной данным сообщением, найдены реализации приближенных алгебр Ли с тремя существенными операторами в пространстве двух переменных. Показано, что существует 62 вида шестимерных, 47 видов пятимерных и 35 видов четырехмерных неподобных приближенных алгебр Ли с тремя существенными операторами. Для каждого типа найденных приближенных алгебр построены инвариантные уравнения (1).

Алгоритм интегрирования произвольных уравнений (1) с тремя симметриями (2) может быть следующим: 1) путем вычисления коммутаторов операторов (2) определяется тип приближенной алгебры Ли; 2) строится замена переменных, после которой операторы исходной алгебры приводятся к операторам соответствующей неподобной алгебры; 3) найденная замена используется в исходном уравнении для приведения к инвариантному уравнению, которое легко может быть проинтегрировано в квадратурах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baikov V. A.*, *Gazizov R. K.*, *Ibragimov N. H.* Approximate transformation groups and deformations of symmetry Lie algebras. — CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 3. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1996, 536 p.
2. *Газизов Р.К.*, *Лукащук В.О.* Классификация обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром с тремя существенными симметриями. — В сб.: Труды международной конференции MOGRAN-13: Симметрии и точные решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Уфа, 2009, с. 13.

С. Ю. Л у к а щ у к (Уфа, УГАТУ)**. Восстановление коэффициентов уравнения конвекции-диффузии дробного порядка методом временных интегральных характеристик.**

Рассматривается коэффициентная обратная задача для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка

$$u_t + au_t^{(\alpha)} = Du_{xx} - vu_x, \qquad 0 < x < \infty, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad a \ll 1, \qquad (1)$$

где $u_t^{(\alpha)}$ — левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля порядка α:

$$u_t^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Искомыми являются коэффициенты a, D, v, а также порядок дробного дифференцирования α. Уравнение (1) описывает процессы аномального переноса в гетерогенных средах (см., например, [1]).

В качестве априорной информации, необходимой для идентификации коэффициентов, выступают известные начальное и граничные условия, а также значения u в нескольких внутренних точках области в каждый момент времени:

$$u(x,0) = 0, \qquad 0 < x < \infty, \quad u(0,t) = u_0(t), \quad \lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \qquad t > 0, \qquad (2)$$

$$u(l_i,t) = u_{li}(t), \qquad t > 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (3)$$

Решение коэффициентной обратной задачи (1)–(3) выполняется методом временных интегральных характеристик (ВИХ) [2]. В результате применения к начально-краевой задаче (1)–(2) преобразования Лапласа L_p по t и разрешения получающегося в результате в пространстве изображений обыкновенного дифференциального уравнения, получаем основное соотношение для идентификации параметров модели:

$$D\Theta^2(x,p) - v\Theta(x,p) = p + ap^\alpha, \quad \Theta(x,p) = l^{-1} \ln \frac{U(x,p)}{U_0(p)}, \quad U(x,p) = L_p u(x,t).$$

Отсюда при значениях параметра $p \gg 1$, в пренебрежении второго слагаемого в правой части, с использованием (3) получены ВИХ-представления для коэффициента диффузии D и скорости v. При значениях $p \ll 1$ в предположении, что коэффициенты D и v уже известны, после логарифмирования получены ВИХ-представления для дробных параметров модели a и α.

По известным значениям оценок погрешности задания функции $u(x,t)$ в граничном условии (2) и в априорной информации (3) получены уравнения для определения оптимальных значений параметров p, доставляющих минимум оценкам погрешности восстановления коэффициентов по построенным их ВИХ-представлениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schumer R.*, *Benson D.A.*, *Meerschaert M.M.*, *Baeumer B.* Fractal mobile/immobile solute transport. — Water Resour. Res, 2003, v. 39 (10), p. 1296–1308.
2. *Шаталов Ю. С.* Интегральные представления постоянных коэффициентов переноса. Уфа: Изд-во УАИ, 1992, 82 с.

В. В. М а ж а р а (Ростов-на-Дону, РГЭУ(РИНХ))**. Построение классификации домохозяйств по потреблению.**

Целью работы являлось построение социально-экономической типологии домохозяйств по их потребительскому поведению на основе данных обследования бюджетов домашних хозяйств Росстата для последнего квартала 2007 года. Использовались характеристики главы домохозяйства; материальных активов домохозяйства; жилищной инфраструктуры); типа домохозяйства; потребительских расходов. Всего 22 переменные, часть из которых количественные, а часть категорированные. Для построения классификации применен двухшаговый метод кластерного анализа с расстоянием между кластерами, вычисляемым по правилу логарифма правдоподобия.

Получено 7 групп домохозяйств. Самым многочисленным оказался кластер 3, далее идут 4, 5 и 6-й кластеры, самый малочисленный — первый кластер. Краткое описание кластеров по убыванию средней величины логарифма расходов на конечное потребление внутри кластера. Первый кластер образуют «элитные» домохозяйства, представляющие собой полные городские молодые семьи без детей или с одним ребенком. Содержит городские домохозяйства, во главе которых стоит мужчина, средний возраст которого 42 года, имеющий высшее образование. на первом месте. Таким образом, первый кластер образуют «элитные» домохозяйства, представляющие собой полные городские молодые семьи без детей или с одним ребенком. Четвертый кластер образуют неполные молодые семьи (женщина с ребенком). Содержит городские домохозяйства, во главе которых стоит женщина, средний возраст которой 46 лет, имеющая среднее профессиональное образование. Пятый — городские домохозяйства одиноких пенсионеров. Третий «элитные» сельские домохозяйства, представляющие собой полные сельские молодые семьи без детей или с одним ребенком. Содержит сельские домохозяйства, во главе которых стоит мужчина, средний возраст которого 44 года, имеющий чаще всего среднее профессиональное образование. Шестой — сельские домохозяйства одиноких пенсионеров. Второй — полные городские семьи пенсионеров с, возможно, живущим вместе с ними одним взрослым ребенком. Седьмой — полные сельские семьи пенсионеров.

Для оценки качества построенной типологии осуществлен дискриминантный анализ этих же домохозяйств по тем же самым переменным и полученной переменной классификатором. Согласно таблице сопряженности, в целом по выборке правильно классифицированы в кластеры около 87% наблюдений.

Полученная классификация домохозяйств на кластеры может быть использована как в целях прогнозирования класса для новых домохозяйств с имеющимся набором характеристик, так и в целях определения типов потребительского поведения домохозяйств, что, несомненно, важно для разработки социальной политики.

С. И. М а к а р о в (Самара, СамГЭУ)**. Моделирование и анализ эффективности уровней управления предприятием.**

В процессе деятельности и развития предприятия возникает объективная необходимость оценки эффективности вложений в каждое подразделение предприятия, как повлияет увеличение или уменьшение потоков расходов, направляемых в элементы организационной структуры предприятия, на себестоимость единицы продукции. То есть необходимо оценить, насколько эффективно используются ресурсы центрами ответственности, и какова их роль в структуре себестоимости производимой продукции. Для принятия управленческого решения необходимо знать, как влияют произведенные общехозяйственные расходы на управление на величину себестоимости продукции.

Предложена методика построения матрицы финансовой эффективности общехозяйственных расходов.

С помощью матрицы финансовой эффективности рассматриваемого уровня управления можно решить следующие задачи экономического анализа:

• по известному вектору расходов на управление данного уровня $\overline{I}$ можно определить ожидаемый вектор себестоимости продукции $\overline{S}$: $\overline{S} = A\overline{I}$ (прогноз);

• если матрица A квадратная и невырожденная, то по заданному вектору себестоимости продукции $\overline{S}$ можно определить предполагаемый вектор общехозяйственных расходов данного уровня $\overline{I}$: $\overline{I} = A^{-1}\overline{S}$.

Матрицу финансовой эффективности расходов можно использовать как средство мониторинга эффективности работы служб и подразделений.

И. Н. Маслякова (Москва, РЭА)**. Рекуррентное оценивание сложности тестовых заданий, оцениваемых непрерывным показателем качества.**

Рассматривается задача определения уровня тестового задания по результатам его выполнения группой обучаемых, уровень подготовленности которых считается известным. Предполагается, что правильность выполнения тестового задания характеризуется непрерывным показателем качества. Предполагается также, что обучаемым с уровнем подготовленности $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, последовательно предъявляется задание, уровень сложности ω которого требуется оценить. Показатель уровня сложности задания является непрерывной величиной, $\omega \in [0,1]$. Сложность задания характеризует уровень знаний обучаемого, который необходим для ответа на представленное задание. Уровень знаний обучаемого характеризуется показателем, который также является непрерывной величиной, $\theta \in [0,1]$. Ответ на задание оценивается непрерывным показателем качества ответа, $w \in [0,1]$.

Пусть получен вектор наблюдений $\mathbf{w}^{(n)} = (w_1, \ldots, w_n)$, на основании которого получена оценка уровня сложности задания $\widetilde{\omega}^{(n)}$. Затем выполнено еще одно наблюдение w_{n+1}, в результате которого сформирован вектор наблюдений $\mathbf{w}^{(n+1)} = (w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$. Необходимо вычислить оценку $\widetilde{\omega}^{(n+1)}$, используя оценку $\widetilde{\omega}^{(n)}$, полученную ранее, и результат последнего наблюдения w_{n+1}.

Для построения процедуры оценивания будем предполагать, что ожидаемое качество ответа w на задание с уровнем сложности ω при уровне знаний обучаемого θ определяется функцией $F(\theta, \omega)$.

Функция ожидаемого качества ответа обладает следующими свойствами: $F(\theta_1, \omega) \leqslant F(\theta_2, \omega)$ при $\theta_1 \leqslant \theta_2$, т. е. чем выше уровень знаний обучаемого, тем выше ожидаемое качество ответа; $F(\theta, \omega_2) \leqslant F(\theta, \omega_1)$ при $\omega_1 \leqslant \omega_2$, т. е. чем выше сложность задания, тем ниже ожидаемое качество ответа.

Оценку $\widetilde{\omega}^{(n+1)}$ параметра ω_0 будем определять из условия минимума средних эмпирических потерь для вектора наблюдений $\mathbf{w}^{(n+1)} = (w_1, \ldots, w_n, w_{n+1})$: $J_{n+1} = (n+1)^{-1} \sum_{j=1}^{n+1} \Phi(w_j - F(\widetilde{\omega}, \theta_j))$.

Получены рекуррентные соотношения для оценки уровня сложности задания для функции потерь Φ произвольного вида:

$$\widetilde{\omega}^{(n+1)} = \left[\sum_{j=1}^{n+1} \Phi''() w_j - F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_j) \frac{\partial F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_j)}{\partial \widetilde{\omega}^{(n)}} \right]^{-1}$$
$$\times \left[\Phi'(w_{n+1} - F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_{n+1})) \frac{\partial F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_{n+1})}{\partial \omega^{(n)}} \right)$$
$$+ \widetilde{\omega}^{(n)} \sum_{j=1}^{n+1} \Phi''(w_j - F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_j)) \frac{\partial F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_j)}{\partial \omega^{(n)}} \Bigg].$$

В частном случае квадратичной функции потерь имеем

$$\widetilde{\omega}^{(n+1)} = \widetilde{\omega}^{(n)} + \left[\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_j)}{\partial \widetilde{\omega}^{(n)}} \right]^{-1} \frac{\partial F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_{n+1})}{\partial \widetilde{\omega}(n)} (w_{n+1} - F(\widetilde{\omega}^{(n)}, \theta_{n+1})).$$

Д. Р. Матвеева (Набережные Челны, ИЭУП)**. Расчет риска инвестиционного проекта «Производство стеклопластиковых труб» по экономико-статистической модели Г. Марковица.**

Как известно, экономико-статистический метод Г. Марковица основывается на исследовании статистики показателей, характеризующих воздействие риска, в том числе, потерь и прибыли, с целью определения вероятности (возможности) получения определенного результата, если отрицательного, то с целью установления величины риска. Модель Г. Марковица ориентирована в основном на формирование портфеля ценных бумаг, оценку рисков инвестиций, а также других видов рисков.

В настоящем сообщении модель Г. Марковица будет применена к расчету инвестиционного риска предприятия ООО «Техноком» г. Набережные Челны, которое 1 января 2010 года приняло к реализации инвестиционный проект по производству стеклопластиковых труб. По данным журнала «Эксперт», 2008, № 1, 2 изношенность основных фондов российской трубопроводной системы составляет 56%, а средний возраст трубопроводов системы приближается к 24 годам, причем около 60% труб используется уже от 10 до 33 лет, а 33,7 тыс. км трубопроводов выработали установленный срок службы. Все вышесказанное может служить доводом в пользу создания нового производства стеклопластиковых труб, которое предприятие ООО «Техноком» планирует осуществлять на базе своих производственных площадей с использованием вновь приобретенной специальной установки «UNIT».

В работе, представленной данным сообщением, рассчитывался риск потери прибыли (в результате снижения рентабельности), причем аналитическими данными для статистических расчетов являлись показатели среднеотраслевой рентабельности за предшествующие пять лет с 2005 по 2009 год: 15%, 15%, 16%, 28% и, соответственно, 19%. Средневзвешенная рентабельность ООО «Техноком» (или математическое ожидание рентабельности) за 2005–2009 годы составит $\mathbf{M} = (1/5)(15\% + 15\% + 16\% + 28\% + 19\%) = 18,6\%$.

Тогда дисперсия σ^2 и среднеквадратическое (стандартное) отклонение σ составят: $\sigma^2 = (1/5)[(15\% - 18,6\%)^2 + (15\% - 18,6\%)^2 + (16\% - 18,6\%)^2 + (28\% - 18,6\%)^2 + (19\% - 18,6\%)^2] = 24,43\%^2$, $\sigma = \sqrt{24,43}\% = 4,922\%$.

Коэффициент вариации CV, характеризующий единицу риска на единицу рентабельности, равен $CV = \sigma/\mathbf{M} = 4,922\%/18,6\% = 0,26455$ или $26,465\%$.

В соответствии с характеристикой риска, по значениям коэффициента вариации [1, с. 105] заключаем, что рассчитанный риск снижения рентабельности исследуемого инвестиционного проекта является средним между «приемлемым» (до 25%) и «допустимым» (от 25% до 50%), но ближе к приемлемому.

Более того, используя известное статистическое правило трех сигм, заключаем, что с вероятностью 99,6% рентабельность проекта будет заключена в интервале $(\mathbf{M} - 3\sigma, \mathbf{M} + 3\sigma)$, т. е. даже при самом пессимистическом стечении обстоятельств с вероятностью 99,6% рентабельность будет положительной (3,834%). Поскольку планируемая по проекту рентабельность составляет 20%, можно сделать общий вывод, что инвестиционный проект умеренно рискован, так как планируемая рентабельность близка к средневзвешенной (математическому ожиданию), а коэффициент вариации свидетельствует о приемлемом риске.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыхтикова Н. А.* Анализ и управление рисками организации. М.: ФОРУМ, 2009, 240 с.

Н. М. Меженная, В. Г. Михайлов (Москва, МИЭМ, МИАН).
Один подход к различению гипотез в задаче о плотном вложении.

Статистическая версия задачи о плотном вложении (см. [1], [2]) состоит в следующем. Пусть $X_n = \{x_i\}_{i=1}^n$ и $Y = \{y_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательности Бернулли с вероятностью успеха $0 < p < 1$. Гипотеза H_1 состоит в том, что X_n и Y связаны соотношениями $x_k = y_{\sum_{j=1}^k Z_j}$, где $Z = \{Z_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательность независимых случайных величин с распределением $\mathbf{P}\{Z_1 = 1\} = 1$, $\mathbf{P}\{Z_j = 1\} = \mathbf{P}\{Z_j = 2\} = 1/2$, $j = 2, 3, \ldots$. Гипотеза H_0 состоит в том, что X_n и Y независимы.

Отрезок $x_1, \ldots, x_k$ из знаков алфавита $A_N = \{0, \ldots, N-1\}$ называется *плотно заполненным знаком* $a \in A_N$, если $a \in \{x_i, x_{i+1}\}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Плотно заполненный (знаком a) отрезок называем *плотной a-серией*, если он не содержится ни в каком плотно заполненном отрезке большей длины. *Длиной* плотной a-серии называется длина минимального отрезка, содержащего все ее знаки a. Число входящих в a-серию знаков a называется *весом* плотной a-серии. Статистические свойства плотных серий заданной длины либо заданного веса в последовательности Бернулли описаны в работах [3] и [4].

Для проверки гипотезы H_1 воспользуемся следующей процедурой. Пусть заданы число $0 < \varepsilon < 1$ и функция двух натуральных аргументов $C(\cdot, \cdot)$ (их выбор зависит от требуемых вероятностей ошибок).

1. Находим в X_n наибольшую завершенную серию из единиц. Обозначим s ее длину, а T — место появления.

2. Пусть $h = \max\{1;\ 1,5T - C(n,T) - 0,5\}$, $H = 1,5T + C(n,T) + 0,5$. Среди тех плотных 1-серий в Y_m, которые начинаются внутри отрезка $y_{[h]}, y_{[h]+1}, \ldots, y_{[H]}$, находим серию максимального веса (если их несколько, выбираем любую из них), ее вес обозначим w.

3. Если $w \geqslant s + (s-1)(p/2)(1-\varepsilon)$, то принимаем гипотезу H_1, в противном случае гипотеза H_1 отклоняется.

Пусть $Q = p(2-p)$, $B_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{[np(1-x)]} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $0 < x < 1$, и $P(H_i|H_j)$ — вероятность принять гипотезу в том случае, когда верна гипотеза H_j (здесь $i, j \in \{0, 1\}$). Можно показать, что

$$\mathbf{P}(H_0|H_1) \leqslant B_{s-1,p/2}(\varepsilon) + 2B_{T-1,1/2}\left(\frac{2C(n,T)}{T-1}\right),$$

$$\mathbf{P}(H_1|H_0) \leqslant 2(C(n,T)+1)p(1-Q)Q^{s+(s-1)p(1-\varepsilon)/2-1}.$$

Асимптотическое свойства критерия описаны в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $C(n,T) = \ln n\sqrt{T}$ *и*

$$\frac{1}{2} + \frac{\ln Q}{\ln(1/p)}\left(1 + \frac{p}{2}\right) < 0. \tag{1}$$

Тогда найдутся такие числа $0 < \varepsilon \leqslant 1 - p$, $0 < \delta \leqslant 1$ *и* $\alpha > 0$, *что при условии* $s \geqslant (1-\delta)\ln n/\ln(1/p)$ *имеет место соотношение* $\mathbf{P}(H_1|H_0) + \mathbf{P}(H_0|H_1) = O(n^{-\alpha})$, $n \to \infty$.

З а м е ч а н и е. Неравенство (1) выполнено для всех p из диапазона $0 < p \leqslant 0,52$. При значениях $p > 0,5$ критерий нужно строить по длинным 0-сериям.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Golic J. Dj.* Constrained embedding probability for two binary strings. — SIAM J. Discrete Math., 1996, v. 9, № 3, p. 360–364.
2. *Михайлов В. Г.*, *Меженная Н. М.* Оценки для вероятности плотного вложения одной дискретной последовательности в другую. — Дискретн. матем., 2005, т. 17, в. 3, с. 19–27.
3. *Меженная Н. М.* Предельные теоремы пуассоновского типа для числа плотных серий в случайной последовательности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 3, с. 565–566.
4. *Меженная Н. М.* Предельные теоремы для числа плотных серий в случайной последовательности. — Дискретн. матем., 2009, т. 21, в. 1, с. 105–116.

С. Ю. Мельников (Москва, ООО «Стэл КС»). **О возможности использования вероятностной функции конечного автомата Мура в задаче определения функции выходов.**

Пусть $A = (X, Y, Q, h, f)$ — конечный детерминированный сильносвязный автомат Мура, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — входной алфавит, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ — выходной алфавит, $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$ — множество состояний, h: $Q \times X \to Q$ — функция переходов, f: $Q \to Y$ — функция выходов. Предположим, что на множестве Q задано некоторое начальное вероятностное распределение, и на вход автомата A поступает последовательность независимых случайных величин $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, с распределением $\mathbf{P}\{x^{(i)} = x_j\} = p_j$, $p_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $p_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_j > 0$.

Пусть γ — слово в алфавите Y. Обозначим $P_\gamma(p_1, p_2, \ldots, p_{m-1})$ предел относительной частоты встречаемости слова γ в растущих начальных отрезках выходной последовательности автомата A. Этот предел называется ([1]) *вероятностной функцией* автомата A для слова γ.

Утверждение 1. *Вероятностная функция автомата A для слова γ представима в виде отношения двух полиномов от $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{m-1})$ с целыми коэффициентами*:

$$P_{\gamma,f}(\overline{p}) = R_{\gamma,f}(\overline{p})/S(\overline{p}),$$

причем знаменатель $S(\overline{p})$ не зависит от γ, степени числителя и знаменателя ограничены числами $r + |\gamma|$ и r соответственно: $0 < \deg S(\overline{p}) \leqslant r$, $0 \leqslant \deg R_{\gamma,f}(\overline{p}) \leqslant r + |\gamma|$, *где $|\gamma|$ — длина слова γ.*

Пусть $D = \{\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}) \mid \sum_{j=1}^{m-1} p_j < 1,\ p_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, m-1\} \subset \mathbf{R}^{m-1}$. Функции выходов f_1 и f_2 назовем *статистически эквивалентными* относительно слова γ, если $P_{\gamma,f_1}(\overline{p}) = P_{\gamma,f_2}(\overline{p})$ для всех $\overline{p} \in D$.

Утверждение 2. *Для всех $\overline{p} \in D$, за исключением некоторого множества $\Omega \in D$, имеющего нулевую меру Лебега (в $\mathbf{R}^{m-1}$), значению $P_{\gamma,f}(\overline{p})$ соответствует единственный класс эквивалентности функции f.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барашко А. С.* О ранге и статистическом отображении сильносвязного автомата. — Кибернетика, 1987, № 4, с. 56–60.

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов (Москва, ТВП, МИАН). **Исследование числа решений случайных нелинейных систем включений путем сведения их к линейным системам включений.**

Включением (над полем K) размерности T относительно n-мерного вектора x мы называем запись $F(x) \in B$, где $F(x)$: $V^n \to V^T$ есть отображение пространства n-мерных векторов V^n в пространство V^T, а $B \subset V^T$. Далее $K = \mathrm{GF}\,(q)$.

Рассмотрим случайное отображение $AG(x)$: $V^n \to V^T$, где $G(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$: $V^n \to V^m$, а A — случайная матрица размера $T \times m$. Пусть $D \subseteq V^n$. Обозначим $\xi(D, AG, B)$ число решений системы включений $x \in D$, $AG(x) \in B$.

В том случае, когда ограничение отображения G на множество D обратимо, число решений системы $x \in D$, $AG(x) \in B$ совпадает с числом решений системы линейных включений $y \in G(D)$, $Ay \in B$. Это обстоятельство позволяет применить для описания свойств распределения случайной величины $\xi(D, AG, B)$ результаты работы [1]. Сформулируем полученный результат.

Обозначим $N(a_1, a_2, a_3, d, B)$ число решений уравнения $a_1u^1 \oplus a_2u^2 \oplus a_3u^3 = d$ относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in B^3$, где $a_1, a_2, a_3 \in K\backslash\{0\}$, $d \in V^T$. Пусть $N(B) = \max_{a_1,a_2,a_3,d} N(a_1, a_2, a_3, d, B)$, $\rho(B) = N(B)/|B|^2$. Очевидно, что $0 \leqslant \rho(B) \leqslant 1$. Для линейных и аффинных подпространств эта величина принимает максимально возможное значение $\rho(B) = 1$.

Пусть элементы случайной матрицы $A = |\,a_{i,j}\,|$ независимы в совокупности и распределены с вероятностями

$$\mathbf{P}\,\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{q}, \qquad k \in K,$$

где $\sum_{k\in K} \Delta_{i,j}(k) = 0$, $i = 1, \ldots, T$, $j = 1, \ldots, m$. Положим $\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1$. Разобьем множество $G(D)\times B$ на классы подобных векторов $(G(D)B)_1, \ldots, (G(D)B)_M$ (векторы z и z' считаются подобными, если $z' = cz$, $c \neq 0$), где M — общее число таких классов. Положим

$$l_r(G(D), B) = |\{k \in \{1, \ldots, M\}\colon\ |G(D)B)_k| = r\}|, \qquad r = 1, \ldots, q-1.$$

Пусть $\pi_1(\lambda_1), \ldots, \pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$ — независимые в совокупности случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q-1}$ соответственно.

Теорема. *Пусть отображение $D \to G(D)$ обратимо, причем $0 \notin G(D)$, выполнены условия $n, T \to \infty$, $T\Delta \to 0$, $|D| \to \infty$ и соотношения*

$$\rho(G(D))\rho(B) \to 0, \quad q^{-T} l_r(G(D), B) \to \lambda_r,$$

$$0 \leqslant \lambda_r < \infty\ (r = 1, \ldots, q-1), \quad \exists r:\ \lambda_r > 0.$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, AG, B)$ сходится к распределению выражения $\pi_1(\lambda_1) + 2\pi_2(\lambda_2) + \cdots + (q-1)\pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $F(x) = A_1x + A_2f(x)$ при случайных матрицах A_1 и A_2 (над полем K) размерности $T \times n$ и $T \times (m-n)$ соответственно с независимыми в совокупности случайными элементами и при заданном отображении $f(x)$: $V^n \to V^{m-n}$. Отображение $G(x) = (x, f(x))$ является обратимым отображением множества V^n на множество V^m. Поэтому условие обратимости теоремы выполнено для любого $D \subseteq V^n$. Кроме того, в данном случае из $\rho(D) \to 0$ следует, что $\rho(G(D)) \to 0$.

З а м е ч а н и е 2. В рассмотренный класс случайных включений входят системы нелинейных уравнений, в которых левые части уравнений независимы и имеют равномерные распределения на множестве функций заданной степени нелинейности.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копытцев В. А.*, *Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. — Дискретная математика, 2010, т. 22, в. 2.

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов (Москва, ТВП, МИАН).
Предельная теорема для числа ненулевых решений случайного включения.

Включением размерности T относительно n-мерного вектора мы называем запись $F(x) \in B$, где $F(x)$: $V^n \to V^T$ есть отображение пространства n-мерных векторов V^n в пространство V^T над полем K, а $B \subset V^T$. Далее $K = \mathrm{GF}(q)$.

Пусть $F(x) = A_1 x + A_2 f(x)$ при случайных матрицах A_1 и A_2 (над полем K) размерности $T \times n$ и $T \times (m-n)$ соответственно с независимыми в совокупности случайными элементами и при таком заданном отображении $f(x) = (f_{n+1}(x), \dots, f_m(x))$: $V^n \to V^{m-n}$, что $f(0^n) = 0^{m-n}$. Нас интересует поведение распределения общего числа ξ ненулевых решений случайного включения $A_1 x + A_2 f(x) \in B$ при $n, T \to \infty$.

Отметим, что при $n, T \to \infty$ речь идет о последовательности матриц $A_1 = A_1(n,T)$ и $A_2 = A_2(n,T)$, последовательности функций $f(x) = f(x,n,T)$ (причем $m = m(n,T)$) и последовательности множеств $B = B(T) \subset V^T$.

Пусть H_f — множество тех ненулевых векторов $y = (y_1, \dots, y_m) \in V^m$, для которых найдется такой вектор $x \in V^n$, что $y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n$, $y_{n+1} = f_{n+1}(x), \dots, y_m = f_m(x)$. Разобьем множество $H_f \times B$ на классы подобных векторов $(H_f B)_1, \dots, (H_f B)_M$ (векторы z и z' являются подобными, если $z' = cz$, $c \neq 0$), где M — общее число таких классов. Пусть $l_r(H_f, B)$ — число классов мощности r, $r = 1, \dots, q-1$.

Пусть $\pi_1(\lambda_1), \dots, \pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$ — независимые в совокупности случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}$ соответственно. Пусть матрица A размера $T \times m$ образована объединением столбцов матриц A_1 и A_2.

Из теоремы, приведенной в [1], вытекает следующее утверждение (определения характеристики $\Delta = \Delta(A)$ матрицы A и характеристики $\rho(B)$ множества B см. в [1] и [2]; упомянем лишь, что свойство $\Delta(A) \to 0$ означает сближение распределения матрицы A с равномерным, а свойство $\rho(B) \to 0$ означает асимптотическую свободу множества B от линейных комбинаций).

Теорема 1. *Пусть $n, T \to \infty$, выполнены условия $T\Delta \to 0$ и*

$$\rho(H_f)\rho(B) \to 0, \tag{1}$$

$$q^{-T} l_r(H_f, B) \to \lambda_r, \quad 0 \leqslant \lambda_r < \infty \ (r = 1, \dots, q-1), \quad \exists r : \ \lambda_r > 0. \tag{2}$$

Тогда распределение случайной величины ξ сходится к распределению выражения $\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}) = \pi_1(\lambda_1) + 2\pi_2(\lambda_2) + \dots + (q-1)\pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$.

Оказалось, что за счет некоторых ограничений на возможный рост множества B можно заметно ослабить требования к скорости сходимости распределения матрицы A к равномерному.

Теорема 2. *Пусть $n, T \to \infty$, выполнены условия $\Delta \to 0$,*

$$|B| \leqslant q^{\delta T} \quad (0 < \delta < 1), \tag{3}$$

а также соотношения (1) *и* (2). *Тогда распределение случайной величины ξ сходится к распределению величины $\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1})$.*

Доказательство теоремы 2 проводится по схеме доказательства теоремы 3 работы [2] и опирается на многомерную версию известной теоремы Б. А. Севастьянова об условиях выполнения предельной теоремы Пуассона для суммы зависимых индикаторов.

Замечание 1. В теореме 1 использовалось существенно более жесткое условие $T\Delta \to 0$, но отсутствовало ограничение $|B| \leqslant q^{\delta T}$.

Замечание 2. Условие (3) выполнено, например, для шаров радиуса r в метрике Хемминга, если $r \geqslant 1$ и $rT^{-1} \leqslant \mu < (q-1)q^{-1}$. Напротив, оно не выполнено для сфер в этой метрике, если их радиус $r \approx T(q-1)q^{-1}$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копытцев В. А.*, *Михайлов В. Г.* Исследование числа решений случайных нелинейных систем включений путем сведения их к линейным системам включений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17.
2. *Копытцев В. А.*, *Михайлов В. Г.* Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. — Дискретн. матем., 2010, т. 22, в. 2.

В. М. Деундяк, **В. В. Мкртичян** (Ростов-на-Дону, ФГНУ НИИ «Спецвузавтоматика»)**. О границах применения специальной схемы защиты информации, основанной на ОРС-кодах.**

При решении ряда актуальных проблем защиты информации от несанкционированного доступа в последние годы интенсивно применяются современные методы теории помехоустойчивого кодирования [1]. В работе [2] рассмотрен перспективный способ защиты легально тиражируемой цифровой продукции от несанкционированного копирования, называемый *схемой специального широковещательного шифрования* (ССШШ). Известно, что злоумышленники, являющиеся легальными пользователями ССШШ, могут объединяться в коалиции мощности c и пытаться атаковать ССШШ. В [2] доказано, что для эффективного поиска всей коалиции мощности $c \geqslant 2$, или, по крайней мере, ее непустого подмножества, можно применять обобщенные коды Рида–Соломона (ОРС-коды) и списочный декодер Гурусвами–Судана с параметрами, зависящими от c. В [3], [4] построена математическая модель эффективной схемы специального широковещательного шифрования, проведено экспериментальное исследование надежности и применение ССШШ.

В работе, представленной данным сообщением, исследованы условия применения ССШШ, основанной на ОРС-кодах и списочном декодере Гурусвами–Судана, в случае превышения мощности коалиции c. С этой целью построена иерархия множеств компрометации легальных пользователей ССШШ, возникающей в ходе проверки контролером. Пусть C — ОРС-код, r_{00} — радиус работы декодера Гурусвами–Судана. Пусть $\Omega_1(C)$ — множество мощностей таких коалиций, при которых для некоторого кодового слова существует коалиция, у которой хотя бы один из потомков расположен на расстоянии не далее r_{00} от данного кодового слова. Пусть $\Omega_2(C)$ — множество мощностей всех коалиций, при которых для некоторого кодового слова существует такая коалиция, у которой хотя бы один из потомков расположен не далее от данного кодового слова, чем от любого элемента коалиции. Пусть $\Omega_3(C)$ — множество мощностей всех коалиций, при которых для некоторого кодового слова существует такая коалиция, у которой хотя бы один из потомков является данным кодовым словом. Доказывается, что $\Omega_3(C) \subseteq \Omega_2(C) \subseteq \Omega_1(C)$. Основным результатом работы являются оценки для мощности коалиции c, позволяющие определить степень компрометации невиновных пользователей в ходе проверки контролером.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Криптографические методы защиты информации. Кн. 4. М.: Радиотехника, 2007, 312 с.
2. *Silverberg A.*, *Staddon J.*, *Walker J.* Application of list decoding to tracing traitors. — In: Advances in Cryptology - ASIACRYPT 2001 (LNCS 2248), 2001, p. 175–192.
3. *Мкртичян В. В.* Об экспериментальном исследовании надежности и применении схемы специального широковещательного шифрования. — Известия ЮФУ. Технические науки, 2008, № 8, с. 203–210.
4. *Деундяк В. М.*, *Мкртичян В. В.* Математическая модель эффективной схемы специального широковещательного шифрования и исследование границ ее применения. — Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, 2009, № 1, с. 5–8.

И. Б. Гладской, **А. В. Павлова**, **С. Е. Рубцов** (Краснодар, КубГУ)**. Исследование дифференциальных уравнений в блочных структурах и построение приближенных решений для ГИС.**

В настоящее время в различных областях техники широкое применение получили искусственные композиционные материалы и покрытия, имеющие слоистую и блочную структуры, т. е. состоящие из монослоев и моноблоков с заданными физико-механическими характеристиками. Слоисто-блочное строение также характерно для горных массивов и литосферных плит в целом. Частным случаем блочных структур являются слоистые системы, свойства которых скачкообразно меняются вдоль одной из координат.

Используемый дифференциальный метод факторизации [1]–[3] имеет широкий круг применения в самых различных областях механики, физики, экологии, науках о Земле. Метод факторизации открывает возможность для представления решений во внутренних областях через значения некоторых дифференциальных форм, задаваемых на границах рассматриваемой области и в заданных сечениях областей.

Реализованы задача построения определяющих функциональных уравнений для исследуемых задач и преобразование полученных аналитических представлений решений до соотношений, которые могут быть использованы в ГИС.

Построенные приближенные решения рассмотренных задач использованы для интерпретации значений параметров напряженно-деформированного состояния литосферных плит на слоях геоинформационной системы, что необходимо при решении проблемы сейсмичности территорий.

В спроектированных координатах выполнена кусочно-линейная аппроксимация структуры разломов тектонических плит Краснодарского края. С использованием ArcView Gis и ArcEditor (ArcGIS 9.2) выполнено построение тематических слоев рассчитанных напряжений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 08-01-99016, № 10-08-00289, и гранта Президента РФ НШ-3765.2010.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.*, *Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах. — ДАН, 2008, т. 418, № 3, с. 321–323.
2. *Бабешко В. А.*, *Бабешко О. М.*, *Евдокимова О. В.*, *Павлова А. В. и др.* О дифференциальном методе факторизации в приложениях. — Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества (ЧЭС), 2008, № 2, с. 24–29.
3. *Бабешко В. А.*, *Евдокимова О. В.*, *Бабешко О. М.*, *Зарецкая М. В.*, *Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры. — ДАН, 2009, т. 424, № 1, с. 36–39.

Е. С. П а л а м а р ч у к (Москва, ЦЭМИ РАН). **Вероятностные свойства оптимального управления для линейного регулятора с дисконтированием.**

Исследуется процесс дефекта оптимального в среднем управления в одномерной задаче стохастического линейного регулятора с дисконтированием на бесконечном интервале времени.

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан одномерный случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$, описываемый уравнением

$$dX_t = aX_t\,dt + bU_t\,dt + \sigma\,dW_t, \qquad X_0 = x, \tag{1}$$

где $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ — одномерный стандартный винеровский процесс, $a, b \neq 0$, $\sigma > 0$ — константы. В качестве множества допустимых управление $\mathcal{U}$ рассмотрим такие процессы $\{U_t\}_{t=0}^{\infty}$, согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s,\ s \leqslant t\}$, что уравнение (1) имеет решение. Определим целевой функционал

$$J_{\infty}^{\gamma}(U) = \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\gamma t}(mX_t^2 + kU_t^2)\,dt \right\}, \tag{2}$$

где $m > 0$, $k > 0$, $\gamma > 0$ — константы (γ — дисконтный множитель). Введем также в рассмотрение функционал

$$J_{T}^{\gamma}(U^T) = \left\{ \int_0^{T} e^{-\gamma t}(mX_t^2 + kU_t^2)\,dt \right\}, \tag{3}$$

где T — конечный момент времени, U^T — сужение управления U на интервале $[0, T]$. Функционалы вида (2) и (3), учитывающие дисконтирование, широко применяются при исследовании различных экономических задач [1]. В данной ситуации естественно рассмотреть задачу минимизации среднего значения функционала качества (2)

$$EJ_{\infty}^{\gamma}(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}} \tag{4}$$

и найти управление $\{U_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, являющееся ее решением, так называемое управление, «оптимальное в среднем». Можно показать, что это управление имеет вид

$$U_t^* = -\frac{b\Pi_{\gamma}}{k} X_t^*, \tag{5}$$

где процесс $\{X_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ задается уравнением

$$dX_t^* = \left(a - \frac{b^2\Pi_{\gamma}}{k}\right) X_t^*\,dt + \sigma\,dW_t, \quad X_0^* = x,$$

при этом константа Π_{γ} является бóльшим корнем уравнения

$$-\gamma\Pi_{\gamma} + 2a\Pi_{\gamma} - \frac{b^2\Pi_{\gamma}^2}{k} + m = 0.$$

Применение управления $\{U_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ позволит получить среднее значение функционала качества, равное $EJ_{\infty}^{\gamma}(U^*) = \Pi_{\gamma}Ex^2 + \Pi_{\gamma}\sigma^2/\gamma$.

Зафиксируем $U \in \mathcal{U}$ — некоторое произвольное допустимое управление, тогда $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ — соответствующий ему процесс, определяемый уравнением (1). Введем понятие процесса дефекта оптимального в среднем управления (5) на управлении $U \in \mathcal{U}$ как разность $\Delta_T^{\gamma}(U) := J_T^{\gamma}(U^*) - J_T^{\gamma}(U)$. Тем самым для различных $U \in \mathcal{U}$

мы будем иметь семейство процессов $\{\Delta_T^\gamma(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$. Целью исследования является получение так называемой *верхней функции*.

О п р е д е л е н и е. Возрастающая функция h_T является *верхней функцией* для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T^\gamma(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, если для любого $U\in\mathcal{U}$ существует почти наверное такой конечный момент времени T_0, что $\Delta_T^\gamma(U)\leqslant h_T$ почти наверное для $T>T_0$. Задача поиска верхней функции для совокупности процессов дефекта управления, оптимального в задаче

$$\lim_{T\to\infty} sup\,\frac{EJ_T^0(U)}{T}\to\inf_{U\in\mathcal{U}}, \tag{6}$$

рассматривалась в [2] и была получена верхняя функция вида $h_T=c\ln T$ (c — некоторая константа). Для задачи с дисконтированием (1)–(4) справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Любая такая функция h_T, что $h_T\to\infty$ при $T\to\infty$, является верхней функцией для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T^\gamma(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$.*

Таким образом, рассмотрение функционала качества с дисконтированием позволяет получить верхнюю функцию для процесса дефекта, растущую медленнее, чем в задаче (6) с функционалом «среднее на единицу времени». Этот результат показывает, что введение дисконтного множителя существенно изменяет вероятностные свойства процесса дефекта оптимального в среднем управления (5).

Работа поддержана РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ljungqvist L., Sargent T.* Recursive macroeconomic theory. MIT Press, 2004, 1116 p.
2. *Белкина Т. А., Кабанов Ю. М., Пресман Э. Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 661–675.

П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова, Е. С. Серебрянникова (Ульяновск, УлГТУ)**. Математическое моделирование системы «трубопровод–датчик давления».**

Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик. Датчик закреплен на торцевой стенке трубопровода и предназначен для измерения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя, расположенного на другом конце трубопровода), закон изменения которого считается заданным.

Рассматриваются плоские модели для бесконечно длинного трубопровода и трубопровода конечной длины и осесимметричная модель для трубопровода конечной длины.

Задачи решаются в линейной постановке, соответствующей малым прогибам упругого элемента (пластины) и малым возмущениям потенциала скорости среды.

В случае бесконечно длинного трубопровода на основе методов теории функций комплексного переменного (с помощью интеграла Кристофеля–Шварца, формулы Келдыша–Седова) получено уравнение, связывающее закон изменения давления $P(t)$ на входе в трубопровод и деформацию $\omega(y,t)$ упругого элемента датчика:

$$L(\omega) = P_0(y,t) - P(t) + \frac{\rho}{\pi}\int_a^b \ddot{\omega}(\tau,t)\ln\left|\cos\frac{\pi\tau}{y_0} - \cos\frac{\pi y}{y_0}\right| d\tau.$$

Здесь $L(\omega) \equiv M\ddot{\omega} + D\omega_{yyyy} + N\omega_{yy} + \alpha\dot{\omega}_{yyyy} + \beta\dot{\omega} + \gamma\omega$, y_0 — поперечный размер трубопровода, ρ — плотность рабочей среды, $P_0(y,t)$ — внешняя нагрузка на пластину, a, b — координаты концов упругого элемента, α, β, γ — параметры, характеризующие упругие и демпфирующие свойства основания.

В случае трубопровода конечной длины решение аэрогидродинамической задачи осуществлялось на основе метода Фурье, при этом потенциал скорости рабочей среды был представлен в виде ряда. В результате также получено уравнение, связывающее закон изменения давления $P(y,t)$ на входе в трубопровод и деформацию $\omega(y,t)$ упругого элемента датчика. Для плоской модели уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} L(\omega) = P_0(y,t) &- \frac{1}{y_0}\int_0^{y_0} P(y,t)\,dy \\ &- \frac{2\rho}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n y)\frac{\operatorname{th}(\lambda_n x_0)}{\lambda_n}\int_a^b \ddot{\omega}(y,t)\cos(\lambda_n y)\,dy \\ &- \frac{2}{y_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\lambda_n y)}{\operatorname{ch}(\lambda_n x_0)}\int_0^{y_0} P(y,t)\cos(\lambda_n y)\,dy - \frac{\rho x_0}{y_0}\int_a^b \ddot{\omega}(y,t)\,dy. \end{aligned}$$

Здесь x_0, y_0 — продольный и поперечный размеры трубопровода, $\lambda_n = \pi n/y_0$.

Для решения указанных уравнений используется метод Галеркина. Функция деформации представляется в виде $\omega(y,t) = \sum_{k=1}^{m}\omega_k(t)g_k(y)$, где $[g_k(y)]_{k=1}^{\infty}$ — полная на отрезке $[a,b]$ система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соотвествующим условиям закрепления пластины. В частности, в случае шарнирного закрепления концов упругого элемента $g_k(y) = \sin\beta_k(y-a)$, $\beta_k = \pi k/(b-a)$.

Согласно методу Галеркина, решение исходных задач сводится к исследованию систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Задача Коши для этих систем решается с помощью системы Mathematica 6.0. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (НК-177П, ГК № П1183).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vel'misov P. A.*, *Pokladova Yu. V.* An investigation of mathematical models of a mechanical system «Pipeline–Pressure Sensor». — Romai J., 2005, v. 2, № 1, p. 51–57.
2. *Vel'misov P. A.*, *Pokladova Yu. V.* Mathematical models of a mechanical system «Pipeline–Pressure Sensor». — Application of Mathematics in Engineering and Economics, 2005, p. 84–89.
3. *Vel'misov P. A.*, *Pokladova Yu. V.* Investigation of dynamics of an elastic element of a pressure sensor. — Application of Mathematics in Engineering and Economics, 2006, p. 51–57.
4. *Анкилов А. В.*, *Вельмисов П. А.*, *Горбокоченко В. Д.*, *Покладова Ю. В.* Математическое моделирование механической системы «трубопровод–датчик давления». Ульяновск: УлГТУ, 2008, 188 с.
5. *Анкилов А. В.*, *Вельмисов П. А.*, *Покладова Ю. В.* Математические модели механческой системы «трубопровод–датчик давления». Саратов: Вестник СГТУ, 2007, № 3 (27), в. 2, с. 7–14.
6. *Вельмисов П. А.*, *Горбокоченко В. Д.*, *Решетников Ю. А.* Математическое моделирование механической системы «трубопровод–датчик давления». — Датчики и системы, 2003, № 6 (49), с. 12–15.
7. *Вельмисов П. А.*, *Покладова Ю. В.* Математическая модель одной гидроупругой системы. — Труды Средневолжского матаматического общества. Саранск, 2007, т. 8, № 2, с. 93–98.

И. Ш. Абдуллин, В. С. Желтухин, Г. Р. Рахматуллина (Казань, КГТлУ, КГУ)**. Моделирование электрического пробоя нанопор в высокомолекулярном материале при высокочастотной плазменной обработке.**

Высокочастотная (ВЧ) плазма пониженного давления (13,3–133 Па) применяется для обработки различных материалов, в том числе натуральной кожи [1]. Этот высокомолекулярный материал характеризуется многоуровневой капиллярно-пористой структурой, включающей нано-, микро- и макропоры. При этом наблюдается эффект объемной обработки материала, механизмом которого может быть электрический пробой нанопор. Целью работы, представленной данным сообщением, является проверка этой гипотезы с помощью математического моделирования.

На поверхность образцов КПМ в ВЧ плазме пониженного давления поступают постоянный поток ионов плазмообразующего газа и импульсно-периодический поток электронов, создающие переменную плотность поверхностного электрического заряда. При этом за счет разности потенциалов противоположных поверхностей внутри капиллярно-пористого материала возникает высокочастотное электрическое поле $\mathbf{E}$ амплитудной напряженностью $\sim 10^4$–10^5 В/м [2].

Разработана трехмерная математическая модель движения заряженных частиц (ионов и электронов) в нанопоре/капилляре под воздействием электрического поля, создаваемого связанными зарядами на внутренней поверхности пор, которые возникают вследствие поляризации материала в поле $\mathbf{E}$. Рассматривались поры диаметром от 10 до 100 нм длиной 50–500 нм.

Результаты численных расчетов показали, что при плотности электрического заряда $\sim 10^{-9}$–10^{-10} Кл/м^2 внутри нанопоры напряженность электрического поля непосредственно у стенок нанопоры достигает значений $\sim 10^{12}$ В/м. Расчеты траекторий заряженных частиц в нанопоре и их энергий показал, что за время $\sim 10^{-14}$–10^{-13} с электроны могут набрать энергию до 20 эВ, ионы — до 8 эВ. В результате передачи поверхностным атомам кинетической энергии заряженных частиц возникает каскад процессов вторичной эмиссии. Ионы и электроны рекомбинируют на внутренней поверхности нанопор с выделением энергии ионизации (15,76 эВ для ионов Ar^+). Передача кинетической и потенциальной энергии заряженных частиц атомам материала на внутренней поверхности нанопор может быть причиной объемной модификации ее свойств.

Таким образом, с помощью численного моделирования показано, что одним из механизмов объемной модификации высокомолекулярных капиллярно-пористых материалов является электрический пробой в нанопорах и нанокапиллярах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00728а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдуллин И. Ш., Абуталипова Л. Н., Желтухин В. С., Красина И. В.* Высокочастотная плазменная обработка в динамическом вакууме капиллярно-пористых материалов. Теория и практика применения. Казань: Изд-во КГУ, 2004, 348 с.
2. *Абдуллин И. Ш., Сунгатуллин А. М., Рахматуллина Г. Р., Желтухин В. С.* Взаимодействие ВЧ плазмы пониженного давления с капиллярно-пористыми материалами. — Кожев.-обув. пром-ть, 2009, № 1, с. 40–45.

К. К. Рыбников, О. К. Чернобровина (Мытищи, МГУЛ).
О сведении некоторых задач выбора узлов электронных схем и нейросистем к анализу структуры выпуклых многогранников.

Авторы предлагают для рассмотрения один из возможных, достаточно общих подходов к выбору математических моделей, позволяющих проанализировать схему функционирования некоторых базовых узлов электронных преобразователей и нейросхем.

1. Рассмотрим систему булевых уравнений

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, t, \tag{1}$$

которая, как известно, является универсальной моделью блока электронной схемы, определенного t узлами-преобразователями с n двоичными входами и t выходами.

В [1], [2] получил свое развитие метод разделяющих плоскостей, позволяющий построить многогранник $M(A, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0\}$, где $A = \{a_{ij}\}$ — матрица размера $m \times n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$, а условие $\mathbf{x} \geqslant 0$ соответствует системе условий $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, …, $x_n \geqslant 0$, множество (0,1) точек которого включает в себя в качестве подмножества множество решений системы булевых уравнений (1) относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В работе [3] показано, что множество решений одного булева уравнения, например,

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i, \tag{2}$$

можно представить в виде множества (0,1)-точек многогранника, заданного полиэдральными условиями вида

$$\begin{aligned} &-k_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + (0,5 - s_i)y_i \leqslant s_i - k_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ &-m + 1,5 \leqslant \sum_{i=1}^{m} y_i + (0,5 - m)a_k \leqslant 0,5, \end{aligned} \tag{3}$$

где x_i, y_i принимают значения 0 или 1, $a_{ij} = 0$ или ± 1, s_i — число ненулевых коэффициентов a_{ij} в i-м неравенстве, k_i — число отрицательных коэффициентов в i-м неравенстве.

В [3] также показано, что по любой системе вида (3) можно построить эквивалентное ей по множеству (0,1)-решений уравнение (2).

2. Задачей настройки формального нейрона, распознающего векторные массивы с адресными частями X и Y соответственно, называется задача определения таких $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ (иногда b задано заранее), что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{(i)} \leqslant b, \qquad i = 1, 2, \ldots, t_1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j y_j^{(k)} > b, \qquad k = 1, 2, \ldots, t_2, \tag{4}$$

где $X = \{(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})\}$, $|X| = t_1$, $Y = \{(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})\}$, $|Y| = t_2$.

Если система (4) совместна, то задача настройки формального нейрона решена. В противном случае может быть построен формальный нейрон, приближенно решающий эту задачу. Подход к определению такого приближенного решения, основанный на определении чебышевской точки системы неравенств (4), изложен в [4].

Заметим, что если необходимо, чтобы коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нейрона были целочисленными, а адреса массивов X и Y могут выбираться произвольно, то достаточно потребовать чтобы X и Y определяли строки абсолютно унимодулярной матрицы (например, такая матрица должна удовлетворять условиям Хеллера–Томпкинса, Бержа или Падберга (см., например, [5])).

Суммируя вышесказанное, следует сделать вывод, что, выбирая систему линейных неравенств таким образом, чтобы соответствующий ей многогранник обладал бы определенными структурными свойствами (например, малым или большим числом вершин [6]), можно построить соответствующий узел преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балакин Г. В.*, *Никонов В. Г.* Методы сведения булевых уравнений к системам пороговых соотношений. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 1994, т. 1, в. 3, с. 389–401.
2. *Никонов В. Г.*, *Рыбников К. К.* Применение полиэдральных методов в прикладных математических задачах, сводящихся к анализу и решению системы линейных неравенств. — Вестник МГУ леса. Лесной вестник, 2003, № (26), с. 81–84.
3. *Рыбников К. К.*, *Ласковая Т. А.* Полиэдральные модели узлов преобразований в нейросетях. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 1, с. 144–145.
4. *Рыбников К. К.* Приближенные методы настройки формального нейрона для решения задачи распознавания двух векторных массивов. — Обозрение прикл. и промыш. матем., 2009, т. 16, в. 2, с. 380–382.
5. *Ковалев М. М.* Дискретная математика. Гл. 3. Минск: Изд-во БГУ, 1977, 192 с.
6. *Bartels H.* A priory informationen zur Linearen Programmierung. Uber Ecken und Hyperflaschen auf Polyhedern. Anton Hain, 1975.

Т. Х. С а и е г (Ставрополь, СевКавГТУ). **Разностные схемы второго порядка точности для нагруженных уравнений параболического тип.**

В области $D \equiv \{(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(x,t)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k U(\xi_k,t) + f(x,t), \tag{1}$$

$$\kappa(0,t)\frac{\partial U}{\partial t} = \beta_1(t)U(0,t) - \mu_1(t), \quad -\kappa(1,t)\frac{\partial U}{\partial t} = \beta_2(t)U(1,t) - \mu_2(t), \tag{2}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad \kappa(x,t) \geqslant C_1 > 0, \quad \beta_1, \beta_2 \geqslant 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \tag{3}$$

α_k — постоянные числа, $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m < 1$ — фиксированные точки интервала $(0,1)$.

Задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную задачу. В краевых условиях схемы участвуют значения искомой сеточной функции не только в граничных точках $x = 0$, $x = 1$, но и ее значения в узловых точках $x_{i,k}$, $x_{i,k+1}$ сеточной области ω_h. Обозначим $Z = Y - U$, подставим $Y = Z + U$. В полученном выражении затем умножим скалярно на $Y = \widehat{Y} + Y$, положив предварительно $\sigma = 1/2$.

Оценим слагаемые, стоящие в правой части, и с учетом $\tau < 1/(4C_\varepsilon)$ находим требуемую оценку

$$\|Y^{i+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Y_{\overline{X}}\|_0^2 \tau \leqslant M \sum_{j'=0}^{j} \left\|\phi^{j'}\right\|_0^2 \tau + \sum_{j'=0}^{j} (\mu_1^2(t_{j'}) + \mu_2^2(t_{j'})\tau + \|U_0(x)\|_0^2).$$

О. Д. Пряхина, **М. В. Самойлов**, **А. В. Смирнова** (Краснодар, КубГУ)**. К моделированию волновых процессов в составных пьезоэлектрических средах.**

Актуальность исследований, посвященных изучению закономерностей проявления пьезоэффекта в деформируемых средах, обусловлена как широким использованием во многих отраслях науки и техники устройств, функционирующих на основе взаимодействия механических и электрических полей, так и развитием новых технологий производства искусственных материалов, обладающих хорошо выраженными пьезоэлектрическими свойствами. К числу важных проблем, возникающих при проектировании пьезоэлектрических преобразователей различного типа, относятся определение волноводных свойства материалов и конструкций, а также обеспечение их механической и электрической прочности. Одним из подходов к решению указанных проблем является сведение уравнений электроупругости со смешанными граничными условиями к системам интегральных уравнений (СИУ). При этом электроды, представляющие собой тонкие металлические накладки, моделируются системой поверхностных и/или внутренних абсолютно жестких включений. В [1], [2] предложен эффективный метод исследования динамических задач теории упругости для многослойных полуограниченных сред, содержащих множественные жесткие включения. На его основе для составных пьезоэлектриков, принадлежащих классу *6mm* гексагональной сингонии, получены рекуррентные формулы построения матриц-символов ядер искомых СИУ, изучены их свойства [3].

Для некоторых частных краевых задач аналитические представления элементов и определителей матриц-символов ядер СИУ построены в виде отношения целых функций, что позволяет эффективно исследовать структуру волновых полей в пьезоэлектрических средах с совокупностью электродов. В частности, если рассматриваются сдвиговые гармонические колебания двухслойного пьезоэлектрика, верхняя грань которого является непроводящей и свободной от механических нагрузок, а нижняя — жестко защемленной, металлизированной и закороченной, то относительно вектора $\Delta\mathbf{t} = \{\Delta\tau, \Delta d\}$, имеющего своими компонентами скачки сдвиговых напряжений и нормальной составляющей вектора электрической индукции на электроде, приходим к СИУ вида

$$\int_{-a}^{a} \mathbf{k}(x-\xi)\Delta\mathbf{t}(\xi)\,d\xi = \mathbf{u}(x), \quad |x| \leqslant a, \quad \mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta} \mathbf{K}(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha.$$

Сдвиговые перемещения $v(x)$ и электрический потенциал $\varphi(x)$, являющиеся компонентами вектора $\mathbf{u}$, считаются заданными в области расположения электрода $\{|x| \leqslant a,\ -\infty < y < +\infty,\ z = -2h_1\}$. Решение СИУ строится методом фиктивного поглощения [4], одним из достоинств которого является возможность аналитического выделения корневой особенности решения на краях электрода. Если на электроде задается только электрический потенциал, то приходим к интегральному уравнению свертки относительно $\Delta d(x)$. Подобно коэффициенту интенсивности контактных напряжений вводится коэффициент интенсивности плотности электрического заряда $K_q^{\pm}(\omega) = \lim_{x\to\pm a\mp 0}[\Delta d(x)\sqrt{x \pm a}]$, являющийся основной характеристикой, отвечающей за электрическое разрушение пьезоэлектрика. Для материалов, широко применяемых в электронике, таких как селенид кадмия, оксид цинка, титанат бария и пьезокерамика ЦТС-19, проведен анализ распределения скачка нормальной составляющей вектора электрической индукции на электроде и зависимости коэффициента интенсивности плотности электрического заряда от параметров задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пряхина О. Д.*, *Смирнова А. В.* К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений. — ДАН, 2006, т. 411, № 3, с. 330–333.
2. *Пряхина О. Д.*, *Смирнова А. В.* К исследованию волноводных свойств пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений. — Изв. РАН. МТТ, 2009, № 3, с. 55–65.
3. *Пряхина О. Д.*, *Смирнова А. В.* Динамические задачи для составных пьезоэлектриков с системой электродов. — Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2009, № 1, с. 59–65.
4. *Ворович И. И.*, *Бабешко В. А.*, *Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999, 246 с.

О. В. Кузьмин, **М. В. Серегина** (Иркутск, ИГУ, Чита, ЗабИЖТ)**. Восходящие сечения обобщенной пирамиды Паскаля и модели развития популяций.**

Обобщенной пирамидой Паскаля (ОПП) называется (см. [1]) трехгранный пирамидальный массив, элементы которого для целых неотрицательных n, k, l удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$V(n,k,l) = \alpha_{n,k-1,l}V(n-1,k-1,l) + \beta_{n,k,l-1}V(n-1,k,l-1) + \gamma_{n,k,l}V(n-1,k,l),$$

с граничными условиями $V(0,0,0) = V_0$, $V(n,k,l) = 0$, если $\min\{n,k,l,n-k-l\} < 0$.

Вершину ОПП совместим с началом прямоугольной декартовой системы координат в пространстве, а его элементы — с точками решетки первого октанта, имеющими неотрицательные координаты. При этом числа n расположим по оси абсцисс, k — по оси ординат, l — по оси аппликат. Тем самым устанавливается соответствие между точками решетки и элементами ОПП, которая будет ограничена плоскостями $k = 0$, $l = 0$ и $n-k-l = 0$.

Рассмотрим произвольное плоское сечение ОПП, представляющее собой некоторый треугольник. Обозначим φ и ψ углы, образованные этим сечением с осями ординат и аппликат соответственно. Тогда уравнение сечения будет иметь вид

$$n + \operatorname{tg}\varphi\, k + \operatorname{tg}\psi\, l = \text{const}. \tag{1}$$

Нумеруем все параллельные между собою сечения ОПП, заданные уравнением (1), начиная от вершины пирамиды, и рассматриваем последовательность $\{S_N(\operatorname{tg}\varphi, \operatorname{tg}\psi)t\}$, $N \in \mathbf{N}_0$, сумм элементов таких сечений.

Пусть $\operatorname{tg}\varphi = p_1$, $\operatorname{tg}\psi = p_2$, $p_1, p_2 \in \mathbf{N}_0$, тогда уравнение (1) примет вид $n + p_1k + p_2l = \text{const}$.

Введем в рассмотрение суммы

$$S_N(p_1,p_2), \qquad p_1,p_2 \in \mathbf{N}_0, \tag{2}$$

элементов N-го плоского восходящего сечения ОПП.

Лемма. *Значение сумм* (2) *задается равенством*

$$S_N(p_1,p_2) = \sum_{m=0}^{[N/(p_2+1)]} \sum_{r=0}^{N/(p_1+1)]} V(N-p_2m-p_1r,r,m). \tag{3}$$

Суммы (2) допускают следующую интерпретацию в терминах развития популяции.

Пусть популяция состоит из одинаковых элементов, обладающих двумя свойствами: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Развитие популяции рассматриваем дискретно по итогам его последовательных этапов, номера которых $N \geqslant 0$, и по двойным номерам элементов (r,m) — степеням обладания элементом свойствами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно ($r, m \geqslant 0$, $r+m \leqslant N$). Пусть элементы $(r+1,m)$-го вида порождаются по прошествии p_1+1 этапов развития популяции, элементы $(r,m+1)$-го вида порождаются по прошествии p_2+1 этапов развития популяции, элементы (r,m)-го вида порождаются на каждом этапе развития популяции ($p_1,p_2 \in \mathbf{N}_0$), т. е. ориентируемся на эволюцию без отступлений.

Теорема 1. *Общий объем популяции S_N в итоге N-го этапа задается равенством* (3).

Числа $V(n,k,l)$ в соотношении (3) имеют следующую интерпретацию: $V(N-p_2m-p_1r,r,m)$ — объем (количество) элементов (r,m)-го вида в итоге N-го этапа.

Пусть X — сумма элементов $x(x_1, x_2, x_3)$. Введем в рассмотрение линейный оператор $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$, который каждому слагаемому $x(x_1, x_2, x_3)$ суммы X ставит в соответствие слагаемое $w_{x_1+w_1,x_2+w_2,x_3+w_3}\, x(x_1, x_2, x_3)$ суммы $\odot w_{w_1,w_2,w_3}(X)$.

Теорема 2. *Общий объем популяции удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$S_N = \odot\alpha_{1,0,0}(S_{N-p_1-1}) + \odot\beta_{1,0,0}(S_{N-p_2-1}) + \odot\gamma_{1,0,0}(S_{N-1}) \tag{4}$$

с начальными условиями $S_0 = V_0$, *а* S_I, $I = 1, \ldots, \min\{p_1, p_2\}$, *задаются соотношением*

$$S_I = V_0 \prod_{i=1}^{I} \gamma_{i,0,0}; \tag{5}$$

S_J, $J = \min\{p_1, p_2\} + 1, \ldots, \max\{p_1, p_2\}$, *задаются соотношениями*

$$S_J = \begin{cases} \odot\alpha_{1,0,0}(S_{J-p_1-1}) + \odot\gamma_{1,0,0}(S_{J-1}), & \text{если } p_2 > p_1, \\ \odot\beta_{1,0,0}(S_{J-p_2-1}) + \odot\gamma_{1,0,0}(S_{J-1}), & \text{если } p_1 > p_2. \end{cases} \tag{6}$$

Операторы $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta_{1,0,0}$, $\odot\gamma_{1,0,0}$ и коэффициенты $\gamma_{i,0,0}$ в соотношениях (4)–(6) имеют следующую интерпретацию: $\odot\alpha_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\alpha_{N-p_2m-p_1r,r,m}$, представляющие собой доли от объема $V(N-1-p_2m-p_1r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r+1, m)$-го вида по прошествии $p_1 + 1$ этапов развития популяции; $\odot\beta_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\beta_{N-p_2m-p_1r,r,m}$, представляющие собой доли от объема $V(N-1-p_2m-p_1r, r, m)$, в котором элементы (r, m)-го вида породили элементы $(r, m+1)$-го вида по прошествии $p_2 + 1$ этапов развития популяции; $\odot\gamma_{1,0,0}$ — оператор, производящий коэффициенты вида $\gamma_{N-p_2m-p_1r,r,m}$, которые представляют собой доли элементов (r, m)-го вида, сохранившиеся от объема $V(N-1-p_2m-p_1r, r, m)$, по прошествии очередного этапа развития популяции; $\gamma_{i,0,0}$ — коэффициент, который равен доле элементов $(0, 0)$-го вида, сохранившихся от объема $V(i-1, 0, 0)$, по прошествии очередного из первых $\min\{p_1, p_2\}$ этапов развития популяции.

Если задано V_0 и известны весовые коэффициенты, производимые операторами $\odot\alpha_{1,0,0}$, $\odot\beta_{1,0,0}$ и $\odot\gamma_{1,0,0}$, то по формулам (3)–(6) можно рассчитать общий объем популяции и присущее ей распределение по видам элементов на каждом из этапов развития.

Если $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\psi = 0$, то имеем интерпретацию, приведенную в [1]. При этих же значениях получаем соответствующие характеристики рассматриваемого процесса развития популяции.

В частном случае, если в соотношении (3)

$$V(n, k, l) = \frac{n!}{k!\, l!\, (n-k-l)!},$$

то получаем приведенную в [2] интерпретацию сумм $S_N(p_1, p_2)$ плоских сечений пирамиды Паскаля в терминах A-покрытий прямоугольников размера $1 \times N$ прямоугольниками размера $1 \times (p_1 + 1)$, $1 \times (p_2 + 1)$ и квадратами размера 1×1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000.
2. *Серегина М. В.* Некоторые восходящие диагональные сечения пирамиды Паскаля и покрытия прямоугольников. — В материалах ежегодной научно-теоретической конференции аспирантов и студентов (Вестник Иркутского ун-та). Иркутск: Изд-во ИрГУ, 2009, с. 164–166.

М. М. Соловьев (Ульяновск, УлГУ)**. Задача эффективного поиска в сети.**

Работа, представленная данным сообщением, посвящена задаче нахождения наиболее благоприятного момента остановки поиска, при котором затраченное на него время и полученный результат наиболее эффективны. Приводятся ее теоретический анализ и сравнение с реальным экспериментом.

Пусть есть некоторая поисковая структура, которая, приняв заявку, начинает просматривать объекты, удовлетворяющие ее условию. Системе требуется время, чтобы обработать поступивший запрос и классифицировать его как подходящий под заданные требования.

Формально задачу можно представить следующим образом. Обозначим M_ε границу, превысив которую, система останавливается, считая результат найденным. Пусть $t \in [1, \dots, T]$ — временной интервал, в котором работает поисковик. Если за время T не было найдено ничего, удовлетворяющего требованиям, то поиск прекращается. Далее $\{X_i\}_{i=1,\dots}$ — значения параметра объекта поиска в момент времени i, причем $\{X_i\}_{i=1,\dots}$ — независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

где γ — положительный коэффициент, и пусть $\tau_i = \inf\{t > 0\colon\ \pi_t = i\}$ — моменты времени, в которые поисковая система получает объект для анализа, при $\tau_0 = 0$.

Решается задача определения τ — момента нахождения первого удовлетворяющего объекта условию $\tau_i = \inf\{t\colon\ Y_t \geqslant M_\varepsilon\}$, где процесс наблюдений $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ имеет вид $Y_t = Y_0 + \int_0^t (X_{\pi_s} - Y_{s-})\, d\pi_s$, т. е. Y_t имеет кусочно-постоянные траектории, которые равны X_{π_s} в моменты скачка π_s. Здесь π_t — пуассоновский процесс с интенсивностью наблюдений $\lambda > 0$: $\pi_t = \lambda t + m_t$, в моменты скачка которого будут появляться объекты в поисковой системе для анализа.

Таким образом, задача сводится к минимизации функционала $\Phi(\varepsilon) = \alpha \mathbf{E}\,\tau + \varepsilon \to \min_\varepsilon$, где правая часть в сумме — это среднее всех моментов остановки, α — левая оптимальная граница. Заметим, что при уменьшении ε величина $\mathbf{E}\,\tau$ возрастает. Оптимальные значения ε и регулируются коэффициентом $\alpha > 0$ при $\mathbf{E}\,\tau$.

Результаты имитационного моделирования и оценивания по реальным данным привели к близким результатам. Задача была рассмотрена на примере нахождения времени наибольшей угрозы сбоя работы сервера. Расчеты для имитационного моделирования были выполнены в среде Borland Delphi 7.

Автор выражает благодарность за внимание к работе профессору А. А. Бутову. Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, Государственный контракт 02.740.11.0610, а также при поддержке РФФИ, проект № 08–01–97009.

М. М. Соловьев, **А. А. Корепин** (Ульяновск, УлГУ). **Модель процесса поиска в сети.**

В настоящем докладе приводится модель алгоритма ранжирования результатов поиска в сети. Цель моделирования — минимизировать количество запросов к поисковику. Абстрактный пользователь посылает запрос в сеть с целью найти необходимую информацию. Поисковик выдает ему ссылки на подходящие объекты. Просмотрев их, пользователь подает новый запрос или заканчивает эксперимент.

Обозначим $K^i > 0$ значимость i-го объекта, и пусть m_j^i — весовой коэффициент j-го параметра p_j^i i-го объекта. Все значения коэффициентов и параметров известны или вычисляются.

Пусть $K^i > 0$ зависит от значений r и ω следующим образом: $K^i(r,\omega) = \Sigma_{j=1}^n m_j^i p_j^i(r;\omega)$, где r — порядковый номер запроса ($r = 1, 2, \ldots, N$), посылаемого пользователем поисковой структуре, а N — номер последнего запроса, при котором пользователь удовлетворен результатом поиска, причем $N = N(\omega) = \min\{r\colon\ r \geqslant 1, K^i(r,\omega) \leqslant A\}$, где ω — элементарный исход, соответствующий всей последовательности запросов в этом конкретном ω-эксперименте, и A — нижняя граница результата $K^i(r,\omega)$, при котором пользователь останавливает эксперимент. Таким образом, цель разработчика поисковой структуры при разработке алгоритма ранжирования можно записать следующей формулой: $\Phi(A) = EN^i(\omega) + EK^i(N^i(\omega);\omega) \to \min_{A>0}$.

По результатам имитационного моделирования установлено, что при увеличении нижней границы количество запросов пользователя снижается в ущерб качественной составляющей K^i i-го объекта запросу, и, таким образом, экстремум существует на интервале допустимых значений $(0, A_{\max})$. По итогам моделирования этот процесс принимает оптимальное значение границы A в промежутке 30% от номинального значения $A_{\max}$. Это соответствует реальным показателям у действующих поисковиков.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, Государственный контракт 02.740.11.0610, а также при поддержке гранта РФФИ № 08–01–97009.

Р. Г. Спевакова, **Р. В. Спеваков** (Набережные Челны, ИЭУиП).
Изучение предельного анализа студентами экономических специальностей на примере функции риска чистого дисконтированного дохода инвестиционного проекта.

В настоящем сообщении приводится пример непрерывного профессионального экономического образования студентов — будущих экономистов, менеджеров и маркетологов, осуществляемого в Набережночелнинском филиале Института экономики, управления и права (г. Казань). Суть такого обучения в том, что уже начиная с первого курса, будущие экономисты и менеджеры изучают такие важнейшие разделы высшей математики, как теория пределов и дифференциальное исчисление не на абстрактных примерах (как это обычно принято во всех высших учебных заведениях), а на примерах исследования функции риска $R(x)$ чистого дисконтированного дохода NPV, распределенного по различным вероятностным законам.

Разумеется, одно занятие при этом (как правило, это лекция) приходится потратить на то, чтобы, несколько забегая вперед учебной программы, дать студентам основополагающие понятия теории вероятностей и финансового (инвестиционного) менеджмента.

Продемонстрируем изучение теории пределов и методов исследования функции с помощью производных на примере исследования функции риска $R(x) = f(x)/[1 - F(x)] = F'(x)/S(x)$, где в роли случайной величины Z выступает чистый дисконтированный доход $Z = NPV$ исследуемого инвестиционного проекта, $F(x) = \mathbf{P}\{NPV = Z < x\}$ есть функция распределения $Z = NPV$, $f(x) = F'(x)$ — плотность вероятности $Z = NPV$, $S(x) = \mathbf{P}\{NPV = Z \geqslant x\}$ есть функция выживания $Z = NPV$.

Предположим, что чистый дисконтированный доход NPV распределен по закону Чампернауна с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi \operatorname{ch}\alpha(x-\mu)} = \frac{2\alpha}{\pi(e^{\alpha(x-\mu)} + e^{-\alpha(x-\mu)})},$$

где μ — параметр положения ($\mu > 0$), α — параметр масштаба ($\alpha > 0$).

Функция риска NPV, распределенного по этому закону, примет вид $R(x) = f(x)[1 - 2\pi^{-1}\operatorname{arctg}e^{\alpha(x-\mu)}]^{-1}$, а основные числовые характеристики NPV задаются формулами: $\sigma(NPV) = 1,5708/\alpha$, $Me(NPV) = Mo(NPV) = \mathbf{M}(NPV) = \mu$, где $\sigma(NPV)$ — стандартное отклонение, $Me(NPV)$ — медиана, $Mo(NPV)$ — мода, $\mathbf{M}(NPV)$ — математическое ожидание случайной величины $Z = NPV$.

Вычислим предел функции риска при $x \to \infty$, т. е. при $Z = NPV \to \infty$:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\alpha}{\pi[e^{\alpha(x-\mu)} + e^{-\alpha(x-\mu)}][1 - (2/\pi)\operatorname{arctg}e^{\alpha(x-\mu)}]} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{e^{\alpha(x-\mu)} + e^{-\alpha(x-\mu)}}\right)' \Big/ \left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}e^{\alpha(x-\mu)}\right)' \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(e^{\alpha(x-\mu)} + e^{-\alpha(x-\mu)})}{e^{\alpha(x-\mu)}(1 + e^{2\alpha(x-\mu)})} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(1 - e^{2\alpha(x-\mu)})}{1 + e^{2\alpha(x-mu)}} \\
&= -\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(1 - e^{2\alpha(x-\mu)})'}{(1 + e^{2\alpha(x-mu)})'} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(-e^{2\alpha(x-\mu)})\,2\alpha}{e^{2\alpha(x-\mu)}\,2\alpha} = \alpha.
\end{aligned}$$

Таким образом, применяя два раза правило Лопиталя, мы показали, что при неограниченном возрастании чистого дисконтированного дохода его функция риска стремится к числу α. Этот факт может оказаться чрезвычайно важным при принятии финансовым менеджером компании инвестиционных решений, поскольку, начиная с некоторого достаточно высокого значения NPV, риск соответствующего инвестиционного проекта остается неизменным, что открывает широкие перспективы при управлении инвестиционными рисками.

Более того, методами дифференциального исчисления можно доказать, что прямая $y = \alpha$ является асимптотой графика функции риска $R(x)$ распределения Чампернауна, причем график функции риска стремится к своей асимптоте замедляющимися темпами (все медленнее), оставаясь все время ниже своей асимптоты, поскольку $R''(x) > 0$.

Н. А. Соколов, Т. В. Стебеняева (Москва, ЦЭМИ РАН, АНО ВПО АМУ)**. Пути повышения эффективности результатов научных исследований.**

В современных условиях инновационная деятельность является важнейшим фактором эффективного развития экономики страны. Переход ведущих отраслей российской экономики в новое качественное состояние в значительной степени зависит от объемов инновационной деятельности и наукоемких производств, что, в конечном счете, является определяющим условием выхода экономики страны из экономического кризиса и обеспечения ее поступательного развития. В общем случае состояние инновационной деятельности можно оценить по следующим показателям: уровень применения результатов науки в производственной деятельности; уровень современного научного и инновационного потенциала страны; число приоритетных направлений развития науки и научного комплекса в стране; способность производства оперативно реагировать на появление на рынке новых научных разработок и возможность скорейшего их внедрения в производство.

Для создания инновационного продукта, обладающего конкурентными преимуществами, необходимы следующие факторы: определить цель управления (Y), которая сводится к необходимости получения инновационного продукта с заданными характеристиками, позволяющими получить максимальную прибыль; финансовые ресурсы (C_1), которые в процессе инновационной деятельности оптимизируются с целью максимальной эффективности их использования (распределяются между различными нововведениями таким образом, чтобы получить максимальную прибыль при минимальных рисках); интеллектуальные ресурсы (C_2), состояние которых определяется наличием у участников инновационного процесса достаточной для эффективной реализации запланированных новаций квалификации; производственные ресурсы (C_3), в состав которых входят основные производственные фонды и оборотные средства, необходимые для внедрения новаций в производство и их реализацию.

Таким образом, для эффективного управления процессом создания инновационного продукта необходимо управлять затратами и производственными ресурсами, ориентируя их на целенаправленное проведение прикладных научных исследований, направленных на получение пользующегося спросом у потребителей инновационного продукта и его внедрение в производственный процесс. При этом необходимо также учитывать рыночный спрос (Z_1), под воздействием которого устанавливаются требуемые характеристики инновационного продукта, риски (Z_2) и случайные возмущения (Z_3), связанные с внедрением в производство и реализацией инновационного продукта на рынке. При этом для снижения рисков инновационной деятельности желательно создать портфель, включающий несколько инновационных продуктов с различными рисками и доходами.

Для оптимизации затрат, связанных с созданием различных инновационных продуктов, предприятию необходимо решить следующую задачу. Пусть у предприятия имеются финансовые ресурсы в объеме C_1 и оно предполагает внедрить в производство n инновационных продуктов ($i = 1, \ldots, n$). Каждый i-й продукт требует для своего производства затраты в объеме c_i и позволяет получить прибыль в объеме v_i при заданном уровне рисков d_i. Рассматривая риски как вероятность недополучения запланированного объема прибыли, их можно оценить экспертным путем как параметры, лежащие в пределах $0 \leqslant d_i \leqslant 1$. Необходимо распределить имеющиеся у предприятия средства между инновационными продуктами таким образом, чтобы оно могло получить максимальную прибыль P, величина которой определяется выражением $P = \sum_{i=1}^{n}(1 - d_i)x_i v_i$, где x_i — количество инновационных продуктов i-го вида в портфеле предприятия.

Учитывая ограничение $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i \leqslant C_1$, требуется определить такое количество планируемых к реализации предприятием инновационных продуктов x_i, при котором величина получаемой им прибыли P будет иметь максимальное значение.

Разработка и принятие решений в части определения планируемых к реализации предприятием инновационных продуктов могут быть формализованы следующим образом: 1) описание проблемной ситуации, которая в рассматриваемом случае будет определяться кортежем параметров $\langle Y, C_1, C_2, C_3, Z_1, Z_2, Z_3\rangle$; 2) определение критериев Y проблемной ситуации, определяемых математической зависимостью $Y = F(C_1, C_2, c_3, Z_1, Z_2, Z_3)$; 3) выявление комплексной эффективности управленческого решения в области инновационных продуктов, которое сводится к распределению значений факторов $C_1, C_2, C_3, Z_1, Z_2, Z_3$ с учетом заданных ограничений таким образом, чтобы значения результирующего показателя P оказались максимальными.

Применение описанного подхода в практической деятельности предприятий, занятых внедрением в производство и реализацией на рынке инновационных продуктов, позволит повысить эффективность результатов научных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09–06–00218а.

И. Е. Тананко, Н. П. Фокина (Саратов, СГУ)**. О методе анализа открытой сети массового обслуживания с ненадежной системой обслуживания.**

Рассматривается открытая экспоненциальная сеть массового обслуживания N [1], содержащая две параллельные системы массового обслуживания S_1 и S_2 типа $M|M|1$ с интенсивностями обслуживания соответственно μ_1 и μ_2.

Предполагается, что прибор системы S_2 в процессе функционирования сети N может переходить из работоспособного состояния в неработоспособное и обратно. Если прибор работоспособен, то требования обслуживаются системой S_2 с интенсивностью μ_2. В момент перехода прибора из работоспособного в неработоспособное состояние все требования, находившиеся в системе S_2, мгновенно переходят в очередь системы S_1 и обслуживаются с интенсивностью μ_1. При этом поток требований из источника в сеть N прекращается до момента восстановления прибора системы S_2. С момента восстановления прибора восстанавливаются обслуживание требований системой S_2 и поток требований в сеть N. Длительности пребывания системы S_2 в работоспособном и неработоспособном состояниях являются фиксированными величинами.

Функционирование сети N рассматривается как последовательность чередующихся процессов ξ_1 и ξ_2. Процесс размножения и гибели ξ_1 отображает процесс поступления и обслуживания требований системами S_1 и S_2. Процесс ξ_2 является процессом чистой гибели и отображает процесс обслуживания требований системой S_1.

Получены основные стационарные характеристики сети массового обслуживания N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишневский В. М.* Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003, 512 с.

А. И. Филиппов, **А. С. Хисматуллин**, **М. Р. Минлибаев**, **Р. Ф. Карагулов**, **А. Р. Курбангулов** (Стерлитамак, СГПА). **Интерпретационная модель в установке для определения коэффициента трансцилляторного теплопереноса.**

В природе и технике большую роль играют процессы переноса, возникающие при колебательном относительном смещении областей сплошных сред. Процессы переноса при этом ускоряются за счет трансцилляторной составляющей, механизм и теория которой описаны в работе, представленной данным сообщением. Методика проведения эксперимента и определения коэффициентов трансцилляторной теплопроводности и температуропроводности основана на точном решении задачи о температурном поле в прямоугольном параллелепипеде $0 < x < d/2$, $0 < y < b/2$, $0 < z < l$, внутри которого задана начальная температура T_0, совпадающая с температурой окружающей среды, на боковых стенках учитывается теплообмен по закону Ньютона, на нижней и верхней поверхностях поддерживается температура окружающей среды и нагревателя $T_{\text{н}}$ соответственно. Для времени $t > 0$ температура в резервуаре с исследуемой средой определяется зависимостью

$$T(x,y,z,t) = T_0 + 16(T_{\text{н}} - T_0)\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(\chi_n d/2)\sin(\mu_m b/2)\cos(\chi_n x)\cos(\mu_m y)}{(\chi_n d + \sin(\chi_n d))(\mu_m b + \sin(\mu_m b))}$$
$$\times\left\{\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\chi_n^2+\mu_m^2}(l-z))}{\operatorname{sh}(l\sqrt{\chi_n^2+\mu_m^2})} - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi k\sin(\pi k z/l)\exp\{-a(\chi_n^2+\mu_m^2+(\pi k/l)^2)t\}}{(\chi_n^2+\mu_m^2)l^2+\pi^2k^2}\right\}\Bigg].$$

Уравнения для определения собственных значений χ_n и μ_m имеют вид

$$\chi_n\sin(\chi_n d/2) + h\cos(\chi_n d/2) = 0, \quad \mu_m\sin(\mu_m b/2) + h\cos(\chi_n d/2) = 0.$$

Здесь λ — эффективный коэффициент теплопроводности среды в емкости, $a = \lambda/(c\rho)$ — коэффициент температуропроводности, α — коэффициент теплоотдачи через среду «вода–оргстекло–воздух», $h = \alpha/\lambda$ — параметр теплообмена. Данное выражение использовано при создании программы Teplo.exe, с помощью которой определяются значения коэффициентов трансцилляторной теплопроводности и температуропроводности. Эта же программа осуществляет построение экспериментальных зависимостей и сопоставление их с теоретическими графиками.

В результате проведенных экспериментов установлены количественные закономерности возрастания коэффициентов переноса при всплывании пузырьков и обнаружено, что при акустическом воздействии на жидкость с пузырьками коэффициент температуропроводности возрастает по сравнению со значениями, полученными в экспериментах без звуковых волн. Максимальный коэффициент температуропроводности наблюдался при частоте внешнего акустического воздействия, равной собственной частоте колебаний пульсирующего пузырька, определяемой по формуле Минаерта. На основе проведенных исследований явлений переноса в жидкости со всплывающими газовыми пузырьками могут быть разработаны промышленные установки с регулируемыми коэффициентами диффузии и теплопроводности, а также определены оптимальные режимы работы этих установок с изменяемыми скоростями протекания химических реакций.

М. С. Гаспариан, Ю. Е. Хрусталев (Москва, МЭСИ)**. Особенности и перспективы инновационного развития высокотехнологичных производств.**

При определении перспектив высокотехнологичного сектора следует исходить из того, что он способен экономически эффективно развиваться только в условиях глобализации хозяйственных связей и все более плотной интеграции России в мировую экономическую систему, поскольку он требует огромных финансовых ресурсов. Эти ресурсы развития ему обеспечивает особая форма перераспределения продукта — так называемая *технологическая рента*, объем которой прямо связан с масштабом рынка. Именно поэтому наблюдается острейшая борьба за высокотехнологичные рынки. Следовательно, одна из главных задач стратегии развития высокотехнологичного сектора должна заключаться в усилении его экспортного потенциала. Завоевание внешнего рынка одновременно будет способствовать вытеснению импорта товаров иностранных производителей.

Несмотря на положительную динамику основных макроэкономических показателей развития страны, внутренне ориентированные отечественные предприятия перерабатывающей промышленности испытывают давление со стороны укрепляющегося курса рубля, возрастающего импорта, а, следовательно, и конкуренции, что снижает их роль на внутреннем рынке. Импорт растет более высокими темпами по сравнению с экспортом, товарная структура экспорта, в которой продукция сырьевого сектора доминирует и занимает более 60%, деградирует.

Экспортно-сырьевой тип развития обусловил своеобразный баланс добавленной стоимости, при которой экспортно-сырьевой сектор передает больше добавленной стоимости, чем внутренне-ориентированный. Экспортные отрасли получают добавленной стоимости в объеме, значительно большем, чем внутренне ориентированный сектор. Столь низкий показатель получения добавленной стоимости во внутренне ориентированном секторе частично влияет на динамику самой добавленной стоимости в структуре валовой добавленной стоимости промышленности, в которой доля валовой добавленной стоимости топливной промышленности существенно превосходит аналогичный показатель по другим отраслям, в том числе и по машиностроительному комплексу.

Перспектива высокотехнологичного сектора требует, чтобы в повестку дня был поставлен вопрос о разработке стратегии развития как собственно наукоемкого сектора, так и смежных с ним отраслей. Постановка этой задачи предполагает на базе институтов РАН и ряда отраслевых государственных научных центров формирование межведомственной системы прогнозирования, которую нужно использовать в системе управления промышленностью.

Основной целью функционирования этой межведомственной системы должна стать разработка и реализация стратегии, которая обеспечила бы трансформацию уже сформировавшейся совокупности наиболее жизнеспособных и эффективных высокотехнологичных предприятий, имеющих долгосрочную перспективу на мировых рынках, в рамках единой национальной инновационной научно-технической и технологической системы, ориентированной на разработку, производство, продажу и послепродажное обслуживание передовой продукции. Это не исключает сохранение отдельных узкоспециализированных военных производств. В рамках этой системы должны быть определены приоритеты господдержки — до 7–10 критических технологий (информационные технологии, биотехнологии, микроэлектроника, космос, авиация, атомное машиностроение и др.), способных стать «локомотивами развития» как для целых отраслевых кластеров, так и для экономики в целом. При этом технологии должны быть системно увязаны между собой и распределены по времени (этапам) с целью последовательной модернизации всего комплекса конечных отраслей, а не только наукоемкого, высокотехнологичного сектора.

Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09–06–00060.

В. П. Ц в е т о в (Самара, СамГУ)**. О представлении абстрактных полиномов над конечными алгебрами.**

Пусть $\langle U, (\odot, \oplus)\rangle$, $|U| = n$ — конечная алгебра типа (2,2), $i \dots j = \{i, i{+}1, \dots, j\}$ — целочисленный интервал, $P(u) = c_m \odot u^m \oplus (c_{m-1} \odot u^{m-1} \oplus (\cdots \oplus (c^1 \odot u^1 \oplus c_0) \cdots))$ — абстрактный полином с коэффициентами $c_s \in U$, в котором операция возведения в степень индуцирована операцией $\odot$. Зададим тотальную биекцию $I\colon\ 1 \dots n \mapsto U$. На множестве $1 \dots n$ определим значения трехместных предикатов $\phi = (\phi_{i_1 i_2 k})$, $\psi = (\phi_{i_1 i_2 k})$, двуместного предиката $p = (p_{i_1 k})$ и одноместных предикатов $\sigma^s = (\sigma^s_{i_1})$, $\delta^{i_2} = (\delta^{i_2}_k)$, $i_1, i_2, k \in 1 \dots n$, $s \in 0 \dots m$, правилами

$$\phi_{i_1 i_2 k} = \begin{cases} 1, & I(i_1) \odot I(i_2) = I(k), \\ 0, & I(i_1) \odot I(i_2) \neq I(k), \end{cases} \quad \psi_{i_1 i_2 k} = \begin{cases} 1, & I(i_1) \oplus I(i_2) = I(k), \\ 0, & I(i_1) \oplus I(i_2) \neq I(k), \end{cases}$$

$$p_{i_1 k} = \begin{cases} 1, & P(I(i_1)) = I(k), \\ 0, & P(I(i_1)) \neq I(k), \end{cases} \quad \sigma^s_{i_1} = \begin{cases} 1, & I(i_1) = c_s, \\ 0, & I(i_1) \neq c_s, \end{cases} \quad \delta^{i_2}_k = \begin{cases} 1, & i_2 = k, \\ 0, & i_2 \neq k. \end{cases}$$

Предикат p называют *матричным представлением полинома* P. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}(p_{ik}) = (q^m_{i\mathbf{i}_m}) \circ (q^{m-1}_{i\mathbf{i}_{m-1}}) \circ \cdots \circ (q^1_{i\mathbf{i}_1}) \circ (\sigma^0_{\mathbf{i}_0}) \circ (\psi_{\mathbf{i}_m i_{m-1} k_{m-1}}) \\ \circ (\psi_{\mathbf{k}_{m-1}\mathbf{i}_{m-2}\mathbf{k}_{m-2}}) \circ (\psi_{\mathbf{k}_{m-2}\mathbf{i}_{m-3}\mathbf{k}_{m-3}}) \circ \cdots \circ (\psi_{\mathbf{k}_1 \mathbf{i}_0 k}),\end{aligned}$$

где

$$q^s = (q^s_{ik}) = (\phi^s_{i\mathbf{k}_1}) \circ (\sigma^s_{\mathbf{i}_1}) \circ (\phi_{\mathbf{i}_1 \mathbf{k}_1 k}),$$

$$\phi^s = (\phi^s_{ik}) = (\phi_{ii\mathbf{k}_1}) \circ (\phi_{i\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}) \circ (\phi_{i\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}) \circ \cdots \circ (\phi_{i\mathbf{k}_{s-2}k}),$$

а операция $\circ$ над предикатами $(\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p \cdots i_{n_1}})$, $(\beta_{j_1 j_2 \cdots j_s \cdots j_{n_2}})$ определена при помощи операций дистрибутивной решетки $\langle 0 \dots 1, (\vee, \wedge)\rangle$

$$\begin{aligned}(\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \mathbf{k} i_{p+1} \cdots i_{n_1}}) \circ (\beta_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} \mathbf{k} j_{s+1} \cdots j_{n_2}}) \\ = \bigvee_{\mathbf{k}=1}^{n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \mathbf{k} i_{p+1} \dots i_{n_1}} \wedge \beta_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} \mathbf{k} j_{s+1} \dots j_{n_2}}, \\ (\alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} \mathbf{k}_1 i_{p+1} \cdots i_{n_1}}) \circ (\beta_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} \mathbf{k}_2 j_{s+1} \dots j_{n_2}}) \\ = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} k_1 i_{p+1} \dots i_{n_1}} \wedge \beta_{j_1 j_2 \dots j_{s-1} k_2 j_{s+1} \dots j_{n_2}},\end{aligned}$$

$$\bigvee_{\mathbf{k}_1=1}^{n} \gamma_{k_1} = \sup\{\gamma_{k_1} | k_1 \in 1 \dots n\}, \quad \gamma_{k_1} \wedge \gamma_{k_2} = \inf\{\gamma_{k_1}, \gamma_{k_2}\}, \quad \gamma_{k_1}, \gamma_{k_2} \in 0 \dots 1.$$

Матричное представление полинома P позволяет легко находить множество $S(v)$ всех решений уравнения $P(u) = v = I(i_2)$, а именно, $S(v) = \{I(i_1) | p^{-1}_{i_1} > 0,\ (p^{-1}_{i_1}) = (p_{i_1 \mathbf{k}}) \circ (\delta^{i_2}_{\mathbf{k}})\}$.

Ю. В. Косолапов, **Е. С. Чекунов** (Ростов-на-Дону, ЮФУ).
Применение $\mathcal{F}$-метрики в симметричных кодовых криптосистемах.

Задача теоретического и экспериментального исследования методов защиты информации, основанных на теории помехоустойчивого кодирования, является актуальной [1]–[3]. Интерес к использованию помехоустойчивых кодов, в частности, обусловлен возможностью построения комплексных методов защиты. Такие методы защиты, например, построены и исследованы в [1], [4], где кодовое зашумление одновременно применяется для защиты информации от *частичной* технической утечки и внешних помех. Для защиты информации от *полной* технической утечки конструктивно подходят симметричные кодовые криптосистемы [4], [5]. Одной из стойких симметричных кодовых криптосистем является криптосистема Стройка–Тилбурга [2], обладающая, однако, практическими ограничениями: большой объем ключа (порядка $(2n-k)|\mathbf{F}|^{n-k}$ элементов поля $\mathbf{F}$) и нет возможности одновременно бороться с помехами в канале. Поэтому актуальной является задача построения симметричных кодовых криптосистем без таких ограничений. В работе, представленной данным сообщением, строится симметричная криптосистема с использованием кодов в $\mathcal{F}$-метриках [3].

Пусть $G_{k\times n}$ — порождающая матрица кода C (над полем $\mathbf{F}$) в $\mathcal{F}$-метрике с $\mathcal{F}$-расстоянием $d_{\mathcal{F}}$; $D_{\mathcal{F}}$ — быстрый алгоритм декодирования кода C в $\mathcal{F}$-метрике, исправляющий до $t=\lfloor (d_{\mathcal{F}}-1)/2\rfloor$ $\mathcal{F}$-ошибок (см., например, [3]); $S_{k\times k}$ — случайная невырожденная матрица; $P_{n\times n}$ — случайная перестановочная матрица. Секретным ключом криптосистемы является четверка $K=(S_{k\times k}, G_{k\times n}, P_{n\times n}, D_{\mathcal{F}})$, объем K равен $k^2+n(k+1)$ элементов поля $\mathbf{F}$. Пусть $\overline{m}$ — информационное сообщение, $\overline{z}$ — вектор $\mathcal{F}$-ошибок, выбранный случайным образом так, чтобы выполнялось условие

$$w_{\mathcal{F}}(\overline{z})=t_1<t, \quad w_{\mathcal{H}}(\overline{z})\geqslant n/2, \tag{1}$$

где $w_{\mathcal{H}}(\overline{z}), w_{\mathcal{F}}(\overline{z})$ — вес Хэмминга и $\mathcal{F}$-вес вектора ошибок $\overline{z}$, соответственно.

Шифрование: $\overline{c}=\overline{m}\,S_{k\times k}\,G_{k\times n}\,P_{n\times n}+\overline{z}$.

Расшифрование: $\overline{y}=D_{\mathcal{F}}(\overline{c}\,P^{-1}_{n\times n})$, $\overline{m}=\overline{y}\,S^{-1}_{k\times k}$.

Стойкость предложенной криптосистемы к статистической атаке на шифрограмму, описанной в [2], основана на том, что к кодовому слову добавляется вектор $\overline{z}$, удовлетворяющий условию (1). Такие вектора ошибок можно генерировать в процессе шифрования и нет необходимости хранить, как это предполагается в оригинальной системе Стройка–Тилбуга. Частным случаем $\mathcal{F}$-метрик, для которых выполняется условие (1), являются ранговая $\mathcal{F}$-метрика и $\mathcal{F}$-метрика Вандермонда. Симметричная криптосистема на ранговых кодах, позволяющая одновременно бороться с полной технической утечкой и с ранговыми помехами, построена в [4]. В работе построена симметричная кодовая криптосистема на основе кодов в $\mathcal{F}$-метрике Вандермонда. Вопрос о применении криптосистемы в $\mathcal{F}$-метрике Вандермонда для одновременной борьбы с технической утечкой и помехами в настоящее время исследуется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яковлев В. А.* Защита информации на основе кодового зашумления. СПб.: ВАС, 1993.
2. *Val Tilburg J.* Security-Analisys of a Class of Cryptosystems Based on Linear Error-Correcting Codes. Eindhoven: PTT Research, 1994, p. 198.
3. *Габидулин Э. М., Обернихин В. А.* Коды в $\mathcal{F}$-метрике Вандермонда и их применение. — Проблемы передачи информации, 2003, т. 39, № 2, с. 3–14.
4. *Косолапов Ю. В.* Способ защиты информации от технической утечки, основанный на применении кодового зашумления и кодовых криптосистем. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2009, 24 с.

5. *Деундяк В. М.*, *Косолапов Ю. В.*, *Чекунов Е. С.* О реализации и применении модификации Стройка–Тилбурга шифросистем типа Мак–Элиса. — В сб.: Материалы международного Российско-Абхазского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 2009, с. 75-77.

С. И. Спивак, **К. А. Чернятьев**, **М. Р. Чернятьева**
(Уфа, БашГУ, УГНТУ)**. Математическая модель оптимизации дивидендных выплат.**

Дивидендная политика является составной частью политики управления прибылью. Целью дивидендной политики является оптимизация пропорций между потребляемой и капитализируемой частями прибыли для максимизации рыночной стоимости предприятия.

Одним из основных этапов выбора оптимальной дивидендной политики является разработка методики дивидендных выплат.

Постановка задачи: определить размер дивидендных выплат с первого по n-й годы для максимизации рыночной стоимости предприятия, при этом размер дивидендов не должен превышать установленной ЛПР доли в прибыли предприятия.

Критерием оптимизации выберем величину $Dv = \sum_{t=1}^{n} \text{ФДВ}_t / \prod_{t=1}^{n-1} \lambda_t \text{РЦ}_1$, где n — период времени, в течение которого рассчитывается оптимальная методика дивидендных выплат; ФДВ_t — фонд дивидендных выплат в t-й период времени; РЦ_1 — рыночная стоимость всех акций при размещении; λ_t — интегрированный показатель состояния предприятия в t-й период времени (состоит из четырех групп коэффициентов системы сбалансированных показателей, отражающих все стороны деятельности предприятия), $\prod_{t=1}^{n-1} \lambda_t \text{РЦ}_1$ — стоимость предприятия в n-й период времени. Показатель DV отражает уровень дивидендных выплат на одну акцию.

Так как величина дивидендов по привилегированным акциям фиксирована, вычтем дивиденды по ним (ДП) из общей суммы ФДВ, а сумму РЦ_1 уменьшим на величину рыночной стоимости привилегированных акций ($\text{РЦ}_{\text{пр.}}$), в результате получим целевую функцию, числитель которой — искомый размер выплат по обыкновенным акциям, а знаменатель — прогнозируемая и «желаемая» стоимость предприятия:

$$DV = \frac{\sum_{t=1}^{n} \text{ФДВ}_t}{\prod_{t=1}^{n-1} \lambda_t \, \text{РЦ}_1} \implies DV^{\text{opt}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} (\text{ФДВ}_t - \text{ДП}_t)}{\prod_{t=1}^{n-1} \lambda_t (\text{РЦ}_1 - \text{РЦ}_{\text{пр.}})} \to \min .$$

Фонд дивидендных выплат по обыкновенным акциям будет зависеть от размера дивидендов в первый год после эмиссии (Д_1 — известная величина) и коэффициента их ежегодного приращения $\Delta\text{Д}_t$ (неизвестное (искомое) изменение дивидендных выплат, которое зависит от множества факторов, к примеру, финансового состояние предприятия), т. е. $\text{ФДВ}{=}f(\text{Д}_1, \Delta\text{Д}, \text{ДП})$.

Система ограничений: $\text{ФДВ}_t / \text{Пр}_T \leqslant A$, где A — критический уровень дивидендных выплат в прибыли; $\forall\ \lambda_t \geqslant 0$, $t = 1, \ldots, n$; $\text{ФДВ}_t = \beta_k \text{РЦ}_t$, β_k — коэффициент корреляции стоимости предприятия от динамики дивидендных выплат (рассчитывается путем анализа статистических данных и построения регрессионной модели).

Экономический смысл модели: математическая модель позволяет определить оптимальный размер дивидендных выплат в течение n-го периода времени для повышения рыночной стоимости предприятия с учетом первоначальных дивидендных выплат и прогноза его развития.

Г. Р. Ш а р и ф у л л и н а (Набережные Челны, ИЭУиП)**. Эконометрическое моделирование и анализ взаимосвязи инвестиций в образование и ВВП страны как способ оценки человеческого капитала.**

В финансово-экономической деятельности часто требуется не только получить прогнозные оценки исследуемого финансового показателя, но и количественно охарактеризовать степень влияния на него других факторов. Для решения этой задачи используется аппарат эконометрического моделирования, базирующегося на методах корреляционно-регрессионного анализа. Как известно, этот анализ является методом статистической обработки наблюдений, в результате которого оказывается возможным составить выборочное уравнение регрессии и получить количественную оценку влияния факторного признака на результативный признак — отклик.

В практике финансово-экономического анализа наибольшее распространение получили простые однофакторные регрессионные модели. Это обусловлено не столько простотой вычислительного процесса, сколько ясностью их экономической интерпретации. В работе, представленной данным сообщением, была проведена попытка изучения человеческого капитала через призму инвестиций в образование. Так как основополагающим направлением усиления воздействия человеческого капитала на развитие инновационной экономики являются инвестиции в образование, то они и были взяты в качестве факторного признака, а результативным признаком стал объем ВВП нашей страны. ВВП — макроэкономический показатель, исчисляемый как совокупная стоимость конечного продукта, созданного в течение года внутри страны.

На основе статистического изучения и моделирования взаимосвязи инвестиций в образование с ВВП России за период с 1995 года по 2008 год дается экономический анализ параметров синтезированной регрессионной модели.

Были синтезированы следующие корреляционно-регрессионные модели: прямоугольная, полулогарифмическая, показательная, степенная, экспоненциальная, гиперболическая и обратная.

По критерию минимальности остаточной дисперсии предпочтение было отдано показательной корреляционно-регрессионной модели: $\widetilde{y}_x = 356,9573 \times 1,0275^x$.

Индекс корреляции $R = 0,7308$. Полученная величина означает, что в соответствии со шкалой Чеддока установленная по уравнению регрессии связь между ВВП России и инвестициями в образование высокая.

Из значения индекса детерминации $R^2 = 0,534$ следует, что 53,4% общей вариации объясняется изменением факторного признака, т. е. 53,4% общей вариации ВВП страны объясняется изменением объема инвестиций в образование, а оставшиеся 46,6% — влиянием других причин, которые в данной работе не рассматриваются. Поэтому синтезированная математическая модель может быть использована для практических целей.

Коэффициент эластичности Э$= 0,0087$ говорит о том, что при увеличении инвестиций в образование на 1% ВВП страны увеличится на 0,0087%, т. е. ВВП страны в среднем растет медленнее, чем инвестиции в образование.

По синтезированной корреляционно-регрессионной модели можно определить, например, необходимый объем инвестиций в образование для того, чтобы достичь определенного размера ВВП страны, и наоборот.

Все расчеты были выполнены в среде Microsoft Excel.

В. А. Ш е с т а к о в (Москва, МГУ)**. Основные способы совершенствования внутреннего аудита в российских коммерческих банках.**

Подразделения внутреннего аудита в последнее время все в большей степени становятся одним из ключевых факторов, обеспечивающих преуспевание банков, предлагая широкий спектр услуг, способствующих улучшению хозяйственной деятельности и достижению стратегических целей компании. После целого ряда скандалов, связанных с финансовой отчетностью американских и европейских банков, многие компании по всему миру начали искать способы усиления внутреннего контроля в целях предотвращения мошенничества (в частности, со стороны менеджмента) и поддержания высокого уровня доверия. Усиление требований к корпоративному управлению привело к переосмыслению функций аудита: внутренний аудит превратился из стандартной проверки соответствия финансовой отчетности в сложный процесс, ориентированный, в том числе, на оценку процессов внутреннего контроля, корпоративного управления и управления рисками. Таким образом, грамотно организованный внутренний аудит решает ключевые задачи: 1) способствует совершенствованию корпоративного управления, минимизирует риски и контролирует денежные потоки; 2) предоставляет акционерам достаточные гарантии эффективности системы внутреннего контроля, достоверности отчетности, защищенности активов; 3) является инициатором изменений, так как правильно построенный внутренний аудит ориентирован на решение проблем путем выявления и устранения их причин. Однако в российском банковском секторе внутренний аудит до сих пор является недооцененным способом контроля и используется далеко не всеми российскими банками. Существенная проблема состоит в том, что в российской практике очень часто функции внутреннего аудита возлагаются на подразделения, которые не в состоянии выполнять их в силу различных причин. В результате задачи, поставленные перед службой внутреннего аудита, не выполняются, ресурсы банка тратятся впустую, а внешние аудиторы не могут полагаться на систему внутреннего контроля банка, что приводит к дополнительным издержкам.

В настоящее время в России вопросы качественной организации внутреннего аудита и повышения его вклада в достижение целей компании постепенно приобретают все большую значимость как руководителей, так и для ее владельцев. Для повышения качества работы внутренних аудиторов банка требуются следующие меры: 1) при создании службы внутреннего аудита следует учитывать специфику конкретного банка (объемы активов и пассивов, специализацию, разнообразие видов деятельности и др.); 2) привлечение опытных специалистов со стороны внешних аудиторских компаний для разработки методических указаний по организации работы службы внутреннего аудита и для усовершенствования его методологической базы с учетом специфики конкретного банка; 3) тщательный подход к подбору кадров службы внутреннего аудита, повышению квалификации и обучению персонала; 4) наделение отдела внутреннего аудита полномочиями, достаточными для проведения проверок; позиционирование его функций с целью усиления контроля над деятельностью банка, соблюдения законодательных требований и принципов корпоративного управления; 5) применение современного экономико-математического аппарата, методов финансовой математики и статистических методов для анализа деятельности банка; 6) организация мониторинга работы подразделения внутреннего аудита с целью оценки его качества, выявления недостатков и оптимизации управления; 7) обеспечение независимости деятельности внутренних аудиторов от руководства банка на всех уровнях управления.

Представляется, эти меры существенно повысят качество управления в коммерческих банках, улучшат взаимодействие между собственниками, менеджментом и органами внешнего контроля и будут способствовать стабильной работе банка. В связи с этим становление внутреннего аудита коммерческого банка можно позиционировать в качестве центрального звена банковского менеджмента, в особенности, с

учетом нестабильности мировой финансовой системы и изменчивости окружающей среды в условиях кризиса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ, проект № 08–02–00126а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сонин А. М.* Внутренний аудит, современный подход. М.: Финансы и статистика, 2007.
2. *Суйц В. П.*, *Дубровина Т. А.* Аудит: общий, банковский, страховой. М.: ИНФРА-М, 2005.
3. Положение об организации внутреннего контроля в кредитных организациях и банковских группах (утв. ЦБ РФ 16.12.2003 № 242-п) (ред. от 30.11.2004).
4. Рекомендации Базельского комитета по банковскому надзору «Принципы управления кредитным риском». Базель, 1998.

Л. О. Шкляев (Москва, Финансовая академия при Правительстве РФ).
Моделирование кредитного риска эмитента корпоративных облигаций.

Все множество моделей, оценивающих кредитный риск эмитента облигационного займа, можно разделить на четыре класса: дискриминантные модели (Z-модель Альтмана), логит-модели (модель Credit Portfolio View), структурные модели (модель Мертона, модель EDF), модели упрощенной формы (модель миграции рейтингов Ярроу–Турнбулла, модели Даффи–Синглетона).

Автором работы, представленной данным сообщением, была проанализирована специфика российского рынка облигаций (были рассмотрены 163 облигации российских эмитентов, из них 82 дефолтных): его ликвидность и эффективность, а также была посчитана доля эмитентов, акции которых котируются на бирже.

Анализ показал, что российский рынок рискованных облигаций (второго и третьего эшелонов) является низколиквидным и неэффективным, а, значит, цены на облигации не являются полной репрезентативной характеристикой финансового состояния эмитента. Поэтому можно считать, что модели, основанные на анализе цен облигаций, не будут иметь хорошей прогностической способности.

На основе проведенного анализа организационно-правовой формы эмитентов облигаций и их поручителей было определено, что акции только 12,5% компаний, потерпевших дефолт, размещены на бирже, значит, только для 12,5% дефолтных компаний могли быть применены структурные модели, что является крайне низким показателем.

С учетом специфики российского рынка облигаций автором работы было принято решение осуществить оценку дискриминантного качества (под дискриминантные качеством модели понимается возможность разделения всего множества эмитентов корпоративных облигаций на группу с высоким кредитным риском и на группу с низким кредитным риском) только двух моделей: Z-модели Альтмана и модели Даффи–Синглетона.

Результаты проведенных тестов показали, что наилучшее прогностическое качество показала Z-модель Альтмана.

Спецификация построенной модели Альтмана имеет вид

$$Z = 1,111K^{3\text{кв.}}_{\text{об. СОК}} + 0,814K^{3\text{кв.}}_{\text{рент. СОК}} - 3,395K^{2\text{кв.}}_{\text{ДО}} + 1,31K^{2\text{кв.}}_{\text{рент. ДО}},$$

$$\Lambda = 0,41, \quad p = 0,005, \quad \widehat{C} = -1,311,$$

где $K^{3\text{кв.}}_{\text{об. СОК}}$ — коэффициент обеспеченности собственным капиталом на конец 3 кв. 2008 г., $K^{3\text{кв.}}_{\text{рент. СОК}}$ — коэффициент рентабельности собственного капитала на конец 3 кв. 2008 г., $K^{2\text{кв.}}_{\text{ДО}}$ — доля долгосрочных обязательств в активах на конец 2 кв. 2008г., $K^{2\text{кв.}}_{\text{рент. ДО}}$ — рентабельность долгосрочных обязательств на конец 2 кв. 2008 г.

При $Z \geqslant -1,311$ анализируемую компанию можно отнести к классу финансово устойчивых компаний в среднесрочной перспективе (1,5 месяца–3 месяца). При $Z < -1,311$ анализируемую компанию необходимо отнести к классу финансово неустойчивых компаний в среднесрочной перспективе (1,5 месяца–3 месяца), для которых высока вероятность дефолта.

Я. М. Агаларов, С. Я. Шоргин (Москва, ИПИ РАН)**. Об одном численном методе расчета телекоммуникационной сети с учетом повторных передач.**

Рассмотрим телекоммуникационную сеть, состоящую из множества многоканальных линий и узлов с ограниченными накопителями. Маршрутизация в сети осуществляется по фиксированным путям. Распределение мест в накопителе каждого узла может происходить по одной из двух схем: полнодоступная схема, в которой каждое место в накопителе доступно любому пакету, и схема полного разделения памяти, каждая исходящая линия имеет свой накопитель, доступный только пакетам, поступающим на эту линию. Прием и передача поступившего пакета в узле происходит следующим образом. Поступивший в узел пакет принимается в накопитель согласно заданной схеме распределения, если в накопителе есть свободное доступное место и если пакет передан из предыдущего узла без ошибок (произошла успешная передача); иначе пакет получает отказ (произошла неуспешная передача). Узел, отправивший пакет, через случайный интервал времени получает от последующего узла подтверждение успешной (неуспешной) передачи. При получении подтверждения успешной передачи пакет сразу же освобождает место в накопителе. В противном случае пакет либо (с вероятностью, зависящей от исходящей линии передачи) делает повторную попытку передачи из этого же узла, либо (с дополнительной вероятностью) сразу же освобождает место в накопителе и делает повторную попытку передачи из источника. Вероятность обнаружения ошибок в пакете — известная величина, зависящая от линии; интервал времени получения подтверждения — произвольная случайная величина, зависящая от линии. Предполагается, что суммарные потоки пакетов, поступающих на линии, — пуассоновские, времена обслуживания пакетов — экспоненциальные, зависящие от линии.

Ставится задача приближенного расчета вероятностей блокировок и интенсивностей потоков первичных и повторных пакетов, поступающих на линии сети. (Аналогичная задача исследовалась в [1], где рассматривались сети с повторами только из источника или только из предыдущего узла. В настоящем докладе рассматривается смешанный случай.)

Решение задачи сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно неизвестных вероятностей блокировок, получаемой путем декомпозиции сети на изолированные мультисервисные СМО и составления уравнений баланса потоков.

Предлагается алгоритм решения, основанный на методе простой итерации. Доказана сходимость алгоритма. В результате выполнения алгоритма либо выявится нереализуемость первичного потока, либо будут получены вероятности блокировок узлов и суммарные интенсивности потоков, поступающих на линии. Выведена формула для оценки трудоемкости алгоритма. Получены численные оценки точности алгоритма с использованием различных аналитических и имитационных моделей. Алгоритм может быть использован для оптимизации и предварительного анализа телекоммуникационной сети.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты № 08-07-00152 и № 09-07-12032.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаларов Я. М.* Алгоритм вычисления загруженности телекоммуникационной сети с повторными передачами. — Информатика и ее примен., 2009, т. 3, в. 4, с. 22–29.

И. С. О р л о в а, **С. Я. Ш а т с к и х** (Самара, СГАУ, СамГУ). **Уравнения Пфаффа для условных квантилей.**

Для семейства случайных величин $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ с положительной на $\mathbf{R}^n$ совместной плотностью и распределениями вероятностей

$$F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1,\ \xi_2 \leqslant x_2,\ \ldots,\ \xi_n \leqslant x_n\},$$
$$F_{1|2\ldots n}(x_1 \,|\, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1 \,|\, \xi_2 = x_2,\ \ldots,\ \xi_n = x_n\},$$
$$F_{i|n}(x_i \,|\, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_i \leqslant x_i \,|\, \xi_n = x_n\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

мы рассматриваем условные квантили (медианы) как поверхности или кривые постоянного уровня, проходящие через отмеченную точку $\mathbf{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in \mathbf{R}^n$:

$$F_{1|2\ldots n}\Big(q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_2, \ldots, x_n\Big) \equiv F_{1|2\ldots n}(x_1^\circ \,|\, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ),$$
$$F_{i|n}\Big(q_{i|n}^{(x_i^\circ, x_n^\circ)}(x_n) \,|\, x_n\Big) \equiv F_{i|n}(x_i^\circ \,|\, x_n^\circ), \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что для многомерного распределения вероятностей $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выполняется свойство *воспроизводимости условных квантилей*, если система тождеств

$$q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}\Big(x_2, q_{3|2}^{(x_2^\circ, x_3^\circ)}(x_2), \ldots, q_{n|2}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_2)\Big) \equiv q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}\Big(q_{2|n}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_n), \ldots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ, x_n^\circ)}(x_n), x_n\Big) \equiv q_{1|n}^{(x_1^\circ, x_n^\circ)}(x_n)$$

имеет место для любой отмеченной точки $\mathbf{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in \mathbf{R}^n$.

Геометрически свойство воспроизводимости условных квантилей (1) означает, что кривые, параметризованные «малыми» условными квантилями

$$\gamma_2^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2) = \Big\{q_{1|2}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}(x_2), x_2, q_{3|2}^{(x_2^\circ, x_3^\circ)}(x_2), \ldots, q_{n|2}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_2)\Big\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_n^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_n) = \Big\{q_{1|n}^{(x_1^\circ, x_n^\circ)}(x_n), q_{2|n}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}(x_n), \ldots, q_{n-1|n}^{(x_{n-1}^\circ, x_n^\circ)}(x_n), x_n\Big\},$$

лежат на графике «большой» условной квантили

$$\Gamma^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n) = \{q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n\}.$$

Примеры распределений, обладающих воспроизводимостью условных квантилей, а также описание их вероятностных свойств можно найти в [1–3].

Введем обозначение $A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для алгебраического дополнения элемента $\mathbf{e}_i$ матрицы, построенной на основе производных «малых» условных квантилей

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \ldots & \mathbf{e}_{n-1} & \mathbf{e}_n \\ d_{1|2} & 1 & d_{3|2} & \ldots & d_{n-1|2} & d_{n|2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{1|n} & d_{2|n} & d_{3|n} & \ldots & d_{n-1|n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad d_{i|j} := \left.\frac{dq_{i|j}^{(x_i^\circ, x_j^\circ)}(x_j)}{dx_j}\right|_{x_i^\circ = x_i,\, x_j^\circ = x_j}.$$

Теорема 1. *Если для распределения вероятностей $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (с положительной на $\mathbf{R}^n$ совместной плотностью) выполняется свойство воспроизводимости условных квантилей, то дифференциальное уравнение Пфаффа*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i = 0 \tag{2}$$

вполне интегрируемо (*одним соотношением*). *Решением уравнения* (2), *проходящим через отмеченную точку* $\mathbf{x}^\circ$, *является «большая» условная квантиль* $x_1 = q_{1|2\ldots n}^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_2, \ldots, x_n)$.

Для произвольных многомерных распределений, которые могут не обладать свойством воспроизводимости условных квантилей, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для распределения вероятностей* $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (*с положительной на* $\mathbf{R}^n$ *совместной плотностью*) *кривые*, *параметризованные «малыми» условными квантилями* $\gamma_2^{(\mathbf{x}^\circ)}(t), \ldots, \gamma_n^{(\mathbf{x}^\circ)}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, *являются интегральными кривыми дифференциального уравнения Пфаффа* (2), *проходящими через отмеченную точку* $\mathbf{x}^\circ$.

В силу известной теоремы Фробениуса [4], [5], критерием полной интегрируемости уравнения Пфаффа (2) является выполнение равенства

$$d\omega \wedge \omega = 0. \tag{3}$$

В том случае, когда соотношение (3) не выполняется, для нахождения максимальной размерности интегральных многообразий уравнения (2), следуя известной теореме Дарбу [5], необходимо найти параметр r дифференциальной 1-формы ω:

$$(d\omega)^r \wedge \omega \neq 0, \quad \text{но} \quad (d\omega)^r \wedge \omega = 0.$$

Зная величину r, можно утверждать, что уравнение Пфаффа (2) не имеет интегральных многообразий размерности большей, чем $n - r - 1$.

Заметим, что для вполне интегрируемых уравнений Пфаффа (2) параметр r равен 0, поэтому для таких уравнений максимальная размерность интегральных многообразий равна $n-1$, что фактически и утверждается в теореме 1. Если параметр r дифференциальной 1-формы ω равен $n-1$, то максимальная размерность интегральных многообразий уравнения Пфаффа (2) равна 1. Примеры таких многообразий даны в теореме 2.

Наряду с введенным параметром r, в дифференциальной геометрии используют параметр $d = 2r + 1$ (класс Дарбу). Используя эту характеристику, можно провести классификацию многомерных распределений вероятностей $F_{12\ldots n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по классам Дарбу соответствующих дифференциальных 1-форм ω.

В докладе даны примеры многомерных распределений вероятностей, относящихся к различным классам Дарбу. Для распределений вероятностей, имеющих класс Дарбу, равный 1 (многомерное логистическое распределение, многомерное распределение Парето, многомерное распределение, задаваемое копулой Клейтона), в докладе приведены решения соответствующих вполне интегрируемых уравнений Пфаффа, которые являются «большими» условными квантилями этих распределений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шатских С. Я.* Об одном варианте преобразования независимости. — В сб.: Мера и интеграл. Самара: Самарский ун-т, 1995, с. 99–112.
2. *Шатских С. Я.* Преобразование независимости семейства случайных величин, обладающих воспроизводимостью условных квантилей. — Вестник СамГУ, естественнонаучная серия, 2002, № 2 (24), с. 107–119.
3. *Кнутова Е. М.* Сохранение свойства воспроизводимости при покоординатном преобразовании и дифференциальные уравнения для условных квантилей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2001, т. 8, в. 2, с. 770–772.
4. *Шатских С. Я.* Необходимое условие воспроизводимости условных квантилей многомерных вероятностных распределений. — Изв. РАЕН, сер. МММИУ, 2000, т. 4, № 4, с. 67–72.
5. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.

Д. Е. Ефимов (Москва, ВЦ РАН)**. Оценка нормы разности между частичными произведениями некоторых последовательностей вполне непрерывных операторов.**

Обозначим $L(H)$ множество ограниченных линейных операторов, определенных всюду в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\widetilde{A} = A_1, A_2, \dots$ — последовательность операторов из $L(H)$. Будем называть $F_n(\widetilde{A}) = \prod_{k=1}^{n} A_k$ *частичным произведением последовательности ограниченных линейных операторов.*

Сингулярными числами оператора K называются неотрицательные квадратные корни собственных чисел оператора K^*K, где K^* — оператор, сопряженный к K. (Сингулярные числа всегда будем располагать в порядке невозрастания, с учетом кратности, см. [1]). Сингулярное число оператора K с номером i будем обозначать $\sigma_i(K)$.

Определенный всюду в H линейный оператор A называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество точек во множество, компактное в смысле сильной сходимости (см. [2, с. 94]). Множество определенных всюду в H вполне непрерывных операторов будем обозначать H_∞.

Теорема 1. *Пусть* $\widetilde{A} = A_1, A_2, \dots$ *и* $\widetilde{A}' = A'_1, A'_2, \dots$ *— последовательности операторов из* $L(H)$ *и члены последовательностей обладают следующими свойствами*:

а) $A_i A'_{i+1} = A'_i A_{i+1} = A'_i A'_{i+1}$ *при любом* $i \in \mathbf{N}$;

б) $A_j - A'_j \in H_\infty$ *для любого* $j \in \mathbf{N}$ *и* $\sigma_i(A_j - A'_j) \leqslant \alpha_i$ *для любых* $i, j \in \mathbf{N}$;

в) *для некоторого* $u > 0$ *ряд* $\sum_i \alpha_i^u$ *сходится.*

Обозначим $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ *сингулярные числа оператора* $F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')$.

Тогда оператор $(F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')) \in H_\infty$, *ряд* $\sum_i \gamma_i^u$ *сходится и* $\sum_i \gamma_i^u \leqslant \sum_i \alpha_i^{nu}$.

Пусть $A \in L(H)$, $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{e_k\}_1^\infty$ — ортонормированные базисы в H. Если $\sum_{i,k} |(Af_k, e_i)|^2 < \infty$, то величину $N(A) = (\sum_{i,k} |(Af_k, e_i)|^2)^{1/2}$ называют *абсолютной нормой оператора* A.

Следствие. *Пусть* $\widetilde{A} = A_1, A_2, \dots$ *и* $\widetilde{A}' = A'_1, A'_2, \dots$ *— последовательности операторов из* $L(H)$ *и члены последовательностей обладают следующими свойствами*:

а) $A_i A'_{i+1} = A'_i A_{i+1} = A'_i A'_{i+1}$ *при любом* $i \in \mathbf{N}$;

б) $A_j - A'_j \in H_\infty$ *для любого* $j \in \mathbf{N}$ *и* $\sigma_i(A_j - A'_j) \leqslant \lambda_i$ *для любых* $i, j \in \mathbf{N}$;

в) *ряд* $\sum_i \lambda_i^2$ *сходится.*

Тогда оператор $(F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')) \in H_\infty$ *и* $N(F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')) \leqslant (\sum_j \lambda_j^{2n})^{1/2}$.

Пользуясь методом, использованным при доказательстве теоремы 4 в [1], получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $\widetilde{A} = A_1, A_2, \dots$ *и* $\widetilde{A}' = A'_1, A'_2, \dots$ *— последовательности операторов из* $L(H)$ *и члены последовательностей обладают следующими свойствами*:

а) $A_i A'_{i+1} = A'_i A_{i+1} = A'_i A'_{i+1}$ *при любом* $i \in \mathbf{N}$;

б) $A_j - A'_j \in H_\infty$ *для любого* $j \in \mathbf{N}$ *и* $\sigma_i(A_j - A'_j) \leqslant \alpha_i$ *для дюбых* $i, j \in \mathbf{N}$;

в) *для некоторого* $u > 0$ *ряд* $\sum s_i \alpha_i^u$ *сходится.*

Обозначим $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ *сингулярные числа оператора* $F_n(\widetilde{A}) - F_n(\widetilde{A}')$.

Тогда ряд $\sum_i \gamma_i^{(u/n)}$ *сходится и* $\sum_i \gamma_i^{(u/n)} \leqslant \sum_i \alpha_i^u$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horn A.* On the singular values of a product of completely continuous operators. — Proc. Nat. Acad. U.S.A., 1950, v. 36, № 7, p. 374–375.
2. *Ахизер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966.

А. В. К о л о д з е й (Москва, ВЦ РАН). **Критерии согласия для случайных комбинаторных объектов.**

Рассматриваются комбинаторные объекты, которые обладают свойством разложимости на компоненты, причем вес объекта равен сумме весов компонент. Например, для графов компоненты — компоненты связности, вес — число вершин; для многочленов над конечным полем компоненты — неприводимые сомножители канонического разложения, вес — степень многочлена и т. п.

Пусть K_n — множество разложимых объектов веса n, $c_i(k)$ — число компонент веса i в объекте k из K_n. Тогда $c_1(k) + 2c_2(k) + \cdots + nc_n(k) = n$, и для любого n вектор

$$\mathbf{C} \equiv \left(\frac{c_1(k)}{n}, \frac{c_2(k)}{n}, \ldots, \frac{c_n(k)}{n}, 0, 0, \ldots \right) \in \Omega,$$

где Ω — бесконечномерный симплекс таких векторов $(x_1, x_2, \ldots)$ с неотрицательными координатами, что $\sum_{i=0}^{\infty} ix_i = 1$. Пусть на множестве K_n задано такое вероятностное распределение $P(\lambda)$, что совместное распределение числа компонент $c_1(k), c_2(k), \ldots, c_n(k)$ с тем или иным весом представимо как совместное распределение независимых пуассоновских случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \ldots, \lambda_n$ соответственно при условии $\xi_1 + 2\xi_2 + \cdots + n\xi_n = n$. Указанные распределения рассматриваются, например, в [1].

Для $x, y \in \Omega$ обозначим $J(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \ln(x_i/y_i)$ — информационное расстояние Кульбака–Лейблера [2], $J(A, y) = \inf_{x \in A} J(x, y)$, $H(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} x_i \ln x_i$ — энтропия, $\rho(x, y) = \sup_i |\ln(x_i/y_i)|$.

Утверждение.

1. *Функция $\rho(x, y)$ — неевклидовая метрика на множестве Ω, допускающая бесконечные значения.*

2. *Для любых $x, y \in \Omega$ справедливо неравенство* $|H(x) - H(y)| \leqslant (e^{\rho(x,y)} - 1)|U(x) + H(y)|$.

Теорема. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна в метрике $\rho(x, y)$ на множестве Ω. Тогда при $n \to \infty$ для любой последовательности $a_n \to \alpha$*

$$-\frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\{\varphi(\mathbf{C}) \geqslant a_n\} \;\to\; J(\{x \in \Omega,\, \varphi(x) \geqslant \alpha\}, \lambda e) - J(\Omega, \lambda e),$$

где $\lambda e = (e\lambda_1, e\lambda_2, \ldots, e\lambda_n, 0, 0, \ldots)$.

Следствие. *Критерий согласия для распределения $P(\lambda)$ на основе функции $\varphi(x) = J(x, \lambda e)$ наиболее эффективен по Бахадуру в классе критериев с критической областью вида $\varphi(\mathbf{C}) \geqslant a_n$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Случайные комбинаторные объекты. — Доклады Академии наук, 2004, т. 396, № 2, с. 151–154.
2. *Кульбак С.* Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967, 408 с.