ДХ
5431
511/07
Е-303
ДХ
Основной фонд

ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ.

МЕТОДИКА АРИѲМЕТИКИ.

СОСТАВИЛЪ

Ѳ. И. Егоровъ.

БИБЛІОТЕКА
772

Изданіе 5-е.

Цѣна 1 руб.

Изданіе книжнаго магазина
В. В. ДУМНОВА
подъ фирмою
„Наслѣдн. бр. Салаевыхъ".

МОСКВА.
Типо-литогр. Русскаго Товарищества, Чистые пруды, Мыльниковъ пер., с. д.
1906.

2.6395

ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ.

Инв. № 772
Е-303
02
Е-30 4
511(07)
Е-303
Основной фонд

МЕТОДИКА АРИѲМЕТИКИ.

СОСТАВИЛЪ
Ѳ. И. Егоровъ.

БИБЛИОТЕКА
П-Никольской второй (в. н.) школы взрослых повышенного типа.
Инв. № 772
19

Изданіе 5-е.

Изданіе книжнаго магазина
В. В. ДУМНОВА
подъ фирмою
„Наслѣдн. бр. Салаевыхъ".

ЗАП.-СИБ. КРАЕВАЯ НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
№ 20035

МОСКВА.
Типо-литогр. Русскаго Товарищества, Чистые пруды, Мыльниковъ пер., с. д.
1906.

© ОТГИЗ СОРАН

DX
5431

Книга эта составлена примѣнительно къ „Руководству ариѳметики для среднихъ учебныхъ заведеній и городскихъ училищъ“ и къ задачникамъ: „Собраніе задачъ и вычисленій и другихъ упражненій въ предѣлѣ первой сотни чиселъ“, „Собраніе задачъ, вычисленій и другихъ упражненій на отвлеченныя и именованныя цѣлыя числа“ и „Собраніе задачъ и вычисленій на дроби, простыя и десятичныя, и правила: тройное, пропорціональнаго дѣленія, процентовъ и другія“ того же автора.

Она же можетъ служить подспорьемъ при веденіи курса по составленной тѣмъ же авторомъ книгѣ „Ариѳметика и Сборникъ ариѳметическихъ задачъ для начальныхъ училищъ.“

6
1493
ГИПТ СО АН СССР
Гос.Публ.Науч-ка
Библиотека
Дистанция самрсая

БИБЛИОТЕКА
С.-Николаевской второй гос. школы взрослых
повышенного типа.
Инв. №
19 г.

ВВЕДЕНІЕ.

1. **Образовательное значеніе ариѳметики.** Образовательное значеніе математики, какъ учебнаго предмета, заключается въ простотѣ и общности основныхъ ея понятій, точности опредѣленій, строгости выводовъ, неразрывности цѣпи логическихъ построеній и неопровержимости добытыхъ истинъ. Эти свойства заставляли всегда и вездѣ видѣть въ математикѣ могущественное орудіе умственнаго развитія и отводить ей почетное мѣсто во всѣхъ системахъ образованія. Эта точная, по преимуществу, наука обладаетъ еще однимъ свойствомъ, которое дѣлаетъ ее особенно цѣннымъ учебнымъ предметомъ и должно отражаться и на ея преподаваніи: математика представляетъ собою не только умственную дисциплину, но и орудіе, которымъ ежечасно приходится пользоваться и въ наукѣ, и въ практической жизни. Въ научной области это выражается стремленіемъ перевести всѣ законы природы на языкъ числовыхъ соотношеній, или дать имъ геометрическое истолкованіе, а если является возможность, то и все содержаніе науки подвергнуть математической обработкѣ. Значеніе математики въ практической жизни сдѣлается яснымъ, если вспомнимъ, что строительное искусство, мореплаваніе, инженерное искусство и т. д. основаны на математикѣ и только благодаря ей достигли современнаго развитія.

2. Всѣ эти особенности, въ бо́льшей или меньшей степени, отражаются и на первой ступени математическихъ наукъ — на ариѳметикѣ. Отличительную ея черту составляетъ простота матеріала. Понятіе, выражаемое словомъ *число*, принадлежитъ къ наиболѣе общимъ и простымъ понятіямъ. Почти нѣтъ области, къ которой понятіе числа было бы не приложимо, и въ то же время нѣтъ понятія, которое было бы настолько бѣдно содержаніемъ. Оно заключаетъ въ себѣ только одинъ признакъ — признакъ множественности, количественности. Простота основного понятія дѣлаетъ

простымъ и самый предметъ, въ которомъ оно развивается. Это почти единственный учебный предметъ, которымъ дѣтскій умъ въ состояніи овладѣть всецѣло. Объясняется ли какое-либо правило, прилагается ли правило къ рѣшенію какого-либо вопроса—всегда дѣло можетъ быть поставлено такъ, что дѣти отдадутъ себѣ ясный и полный отчетъ въ каждомъ шагѣ этого объясненія, въ каждой частности рѣшенія этого вопроса. Сознательное усвоеніе предмета и обдуманное примѣненіе его къ рѣшенію различныхъ, посильныхъ дѣтскому разумѣнію, вопросовъ возбуждаютъ въ дѣтяхъ увѣренность въ средствахъ, которыя они почерпаютъ изъ изученія ариѳметики, пріучаютъ давать должную оцѣнку этимъ средствамъ и прививаютъ цѣлый рядъ умственныхъ навыковъ, которые имѣютъ значеніе во всей дальнѣйшей ихъ дѣятельности. Образовательное значеніе ариѳметики вполнѣ соотвѣтствуетъ ея значенію какъ необходимаго орудія въ дальнѣйшемъ образованіи и въ практической жизни. Какъ первая ступень математическихъ наукъ, она служитъ необходимой основой всей математики и всѣхъ наукъ и искусствъ, на ней основанныхъ; въ практической жизни она является необходимымъ орудіемъ во всякой дѣятельности и во всѣхъ обыденныхъ житейскихъ отношеніяхъ въ видѣ купли-продажи, вычисленія процентовъ, расчетахъ за работы и т. п. Поэтому преподаваніе ариѳметики должно быть построено такъ, чтобы усвоеніе ея дѣтьми было вполнѣ сознательнымъ, чтобы на ея изученіи развивались въ дѣтяхъ умственные навыки къ точному логическому мышленію и чтобы въ то же время дѣти пріучались пользоваться ею какъ необходимымъ орудіемъ и въ практической жизни, и въ наукѣ. Дѣти на урокахъ ариѳметики не только должны ознакомиться съ ариѳметикой въ томъ или другомъ объемѣ, но и пріобрѣсти искусство вѣрно и достаточно быстро вычислять и прилагать это искусство къ рѣшенію вопросовъ какъ изъ практической жизни, такъ и изъ доступной имъ научной области.

3. Возможность приложенія ариѳметики къ рѣшенію различныхъ вопросовъ имѣетъ громадное педагогическое значеніе. Хорошо подобранная ариѳметическая задача представляетъ почти единственный случай, гдѣ ученикъ самостоятельно разрѣшаетъ посильный для него вопросъ. Самостоятельное приложеніе пріобрѣтаемыхъ знаній разъясняетъ и дѣлаетъ ихъ нашей полной собственностью; они изъ знаній обращаются въ умѣнье. Приложеніе знаній къ вопросамъ практической жизни сближаетъ школу и жизнь и поддерживаетъ въ дѣтяхъ вниманіе и охоту къ ученію. Вводя въ курсъ ариѳметики приложеніе ея къ рѣшенію различ-

ныхъ практическихъ вопросовъ, преподаватель, сверхъ того, затрогиваетъ попутно такія понятія изъ области житейскихъ отношеній, которыхъ не касается ни одинъ изъ остальныхъ учебныхъ предметовъ и правильное разъясненіе которыхъ важно и въ практическомъ, и въ образовательномъ отношеніи.

4. Значеніе ариѳметики какъ необходимаго орудія въ наукѣ и въ практической жизни настолько важно, что за нимъ часто забываютъ ея силу какъ умственной дисциплины и все преподаваніе сводятъ къ развитію въ дѣтяхъ искусства вѣрно и быстро вычислять и прилагать эти вычисленія къ рѣшенію задачъ. Признавая все значеніе за этимъ искусствомъ, мы все-таки думаемъ, что не менѣе важное образовательное вліяніе слѣдуетъ признать и за выясненіемъ существенныхъ теоретическихъ положеній ариѳметики. Обѣ стороны преподаванія не мѣшаютъ другъ другу, а, напротивъ, взаимно помогаютъ и дополняютъ. Всякое теоретическое положеніе ариѳметики, вполнѣ сознанное и понятое дѣтьми, позволяетъ имъ гораздо свободнѣе распоряжаться и пріемами вычисленія, и пріемами рѣшенія задачъ; съ другой стороны, нѣтъ лучшаго средства для выясненія отвлеченныхъ теоретическихъ положеній ариѳметики, какъ иллюстрація ихъ хорошо подобранными примѣрами и задачами. Облекая теоретическое положеніе въ конкретную форму задачи изъ знакомой дѣтямъ области обыденныхъ житейскихъ отношеній, мы дѣлаемъ его доступнымъ дѣтскому пониманію и помогаемъ тѣмъ усвоенію его въ общей отвлеченной формѣ. Такимъ образомъ, усвоеніе ариѳметическихъ понятій и положеній и пріобрѣтеніе навыковъ въ быстромъ и вѣрномъ вычисленіи и въ рѣшеніи задачъ могутъ и должны итти рука объ руку, взаимно другъ друга пополняя и освѣщая.

5. **Счетъ. Число.** Содержаніе ариѳметики, какъ и всего математическаго анализа, состоитъ въ развитіи понятія о числѣ и операціи надъ числами. Основными понятіями для ариѳметики, такимъ образомъ, являются число и дѣйствіе надъ числомъ, находящіяся въ тѣсной зависимости съ третьимъ столь же основнымъ понятіемъ о единицѣ. Они такъ тѣсно связаны между собою, что установить одно изъ нихъ независимо отъ остальныхъ едва ли возможно; существованіе одного изъ нихъ какъ бы предполагаетъ и существованіе двухъ другихъ. Такъ, счетъ съ одной стороны можно признать за первоначальный способъ образованія числа; съ другой стороны онъ есть такая же операція надъ числами, какъ и всякое другое дѣйствіе, а каждое дѣйствіе представляетъ собою способъ составленія новаго числа по двумъ или болѣе даннымъ числамъ. Такимъ образомъ, чтобы получить число,

надо произвести дѣйствіе, а чтобы произвести дѣйствіе, надо имѣть данныя числа; чтобы считать, надо имѣть единицы, а понятіе о единицѣ возникаетъ при самомъ счетѣ.

Установленіе основныхъ понятій ариѳметики представляетъ большія трудности. Можетъ быть, это зависитъ отъ того, что мы, какъ говоритъ въ своей книгѣ „Что такое числа и для чего они служатъ“ *) извѣстный германскій ученый Дедекиндъ, „съ самыхъ раннихъ лѣтъ нашей жизни упражняемъ способность нашего духа, на которой зиждется образованіе понятія о числѣ,“ и такимъ образомъ незамѣтно для себя „пріобрѣтаемъ цѣлый рядъ ариѳметическихъ истинъ, на которыя наши первые учителя ссылаются, какъ на нѣчто простое, само-собою понятное, даваемое нашимъ внутреннимъ созерцаніемъ, отчего многія, въ дѣйствительности сложныя понятія неправильно считаются простыми“.

Въ предисловіи къ этой книгѣ Дедекиндъ признаетъ, что „если изслѣдовать то, что мы дѣлаемъ при счетѣ множества (Menge) или количества вещей (Anzahl von Dingen), то приходимъ къ созерцанію (Betrachtung) способности нашего духа относить (beziehen) одну вещь къ другой, устанавливать соотвѣтствіе одной вещи другой, или одну вещь обозначать при помощи другой (изображать одну вещь другой), безъ каковой способности вообще невозможно никакое мышленіе.“ „На этомъ единственномъ и вполнѣ необходимомъ основаніи,“ прибавляетъ онъ, „должна быть построена вся наука о числахъ.“

Выполняя эту мысль, Дедекиндъ исходитъ изъ разсмотрѣнія системъ элементовъ. (множествъ, совокупностей предметовъ), устанавливаетъ понятіе объ эквивалентности (равенствѣ) системъ и ихъ неравенствѣ, приходитъ къ различенію конечной и безконечной системъ элементовъ, выясняетъ понятіе о „просто-безконечной“ системѣ и такимъ путемъ приходитъ къ ряду натуральныхъ чиселъ. Чтобы обосновать рядъ натуральныхъ чиселъ, Дедекинду потребовалось установить достаточно длинный рядъ положеній.

Штольцъ и Гмейнеръ въ своей „Теоретической Ариѳметикѣ“ **), приведя опредѣленіе Эвклида, что „число есть множество (Menge), состоящее изъ единицъ,“ находятъ это опредѣленіе недостаточнымъ, потому что, „оно не исчерпываетъ сущности числа“ и въ немъ совершенно упускается изъ виду, что

*) Richard Dedekind—Was sind und was sollen die Zahlen. Zweite Auflage. Braunschweig. 1893.

**) Theoretische Arithmetik von Dr. Otto Stolz, O. Professor a. d. Universität Jnsbruck und Dr. I. A. Gmeiner, Privat-docent a. d. Universität in Wien, I Abteilung. 1901.

числа образуютъ послѣдовательно-продолжающійся рядъ (eine fortlaufende Folge).

Построеніе Дедекинда они признаютъ „нѣсколько сложнымъ“ и приходятъ къ заключенію, что „готоваго опредѣленія числа дать нельзя“ и что ученіе о цѣлыхъ числахъ, слѣдуя Пеано (Peano) „можно свести къ слѣдующимъ основнымъ положеніямъ: 1) единица 1 есть число; 2) за каждымъ числомъ слѣдуетъ другое число; 3) число, которое слѣдуетъ за какимъ-либо другимъ числомъ, никогда не можетъ быть единицей 1; 4) каждое число принимается равнымъ самому себѣ; 5) если за каждымъ изъ двухъ чиселъ a и b слѣдуетъ одно и то же число, то эти числа (a и b) равны между собою; или: въ ряду чиселъ ни одно число не повторяется; число, слѣдующее за числомъ a, отлично отъ него и всѣхъ предшествующихъ чиселъ и считается больше каждаго изъ нихъ; 6) если система чиселъ, къ которымъ принадлежитъ число 1, такова, что въ ней за каждымъ числомъ является слѣдующее число, то она содержитъ въ себѣ всякое число.“

Геттингенскій профессоръ Гильбертъ *) ставитъ вопросъ нѣсколько иначе. Обращая вниманіе на то, что при построеніи геометріи „обыкновенно начинаютъ съ допущенія существованія всѣхъ изучаемыхъ въ геометріи элементовъ и затѣмъ устанавливаютъ соотношеніе между этими элементами—въ существенныхъ чертахъ слѣдуя Евклиду—съ помощію извѣстныхъ аксіомъ, а именно аксіомъ сочетанія, порядка, конгруенціи и непрерывности“, онъ предлагаетъ подобный же аксіоматическій методъ „и въ теоріи понятія о числѣ“, и устанавливаетъ четыре класса такихъ аксіомъ: 1) аксіомы сочетанія, 2) аксіомы счета, 3) аксіомы порядка, 4) аксіомы непрерывности.

6. Въ начальномъ преподаваніи за основную ариѳметическую операцію можно принять **счетъ**, понимая подъ этимъ образованіе каждаго новаго числа изъ предыдущаго. Исходя изъ этой операціи можно установить, какъ увидимъ ниже, понятія о всѣхъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ.

Послѣдовательное повтореніе счета (5 да 1—шесть, 6 да 1—семь, 7 да 1—восемь и т. д.) можно назвать **послѣдовательнымъ счетомъ**. Послѣдовательный счетъ можетъ быть веденъ до безконечности; помощію его образуется безконечный рядъ натуральныхъ чиселъ.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15...

*) Переводъ статьи профессора Гильберта можно найти во 2-мъ номерѣ 10-го тома „Извѣстій Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“ за 1900 годъ.

Ознакомить дѣтей со счетомъ и выяснить имъ связанныя съ этой операціей понятія о единицѣ и числѣ можно только единственнымъ путемъ, заставляя ихъ воспроизводить счетъ въ примѣненіи къ какимъ-либо дѣйствительнымъ предметамъ (наглядный счетъ). Прибавимъ, что выясненіе этихъ понятій было бы крайне затруднительно, если бы дѣти въ своей дошкольной жизни естественнымъ путемъ не вырабатывали по крайней мѣрѣ зачатковъ этихъ понятій.

Отъ счета предметовъ получаются предметныя числа. Производя счетъ разныхъ предметовъ, дѣти постепенно отвлекаютъ понятіе о числѣ отъ считаемыхъ предметовъ и образуютъ понятіе объ отвлеченной единицѣ и объ отвлеченномъ числѣ.

7. Послѣдовательный счетъ даетъ очень несовершенное понятіе о количествѣ предметовъ, входящихъ въ данную группу, и позволяетъ сравнивать ее непосредственно только съ предыдущей и съ послѣдующей группами. Болѣе ясное представленіе о числѣ предметовъ мы получимъ, если разобьемъ группу считаемыхъ предметовъ на меньшія одинаковыя между собою группы, о которыхъ имѣемъ опредѣленное представленіе; тогда для полученія понятія о группѣ считаемыхъ предметовъ остается дать себѣ отчетъ о числѣ образованныхъ новыхъ группъ, т.-е. пересчитать образованныя нами группы точно такъ же, какъ считали отдѣльные предметы.

Въ общежитіи для нѣкоторыхъ предметовъ и явленій установилась опредѣленная группировка. Такъ, платки, ножи, ложки и т. п. считаютъ дюжинами, дни—недѣлями и т. п. Чѣмъ чаще употребляется данная группировка, тѣмъ яснѣе дѣлается пониманіе числа, выраженнаго при ея помощи.

При пересчитываніи образованныхъ искусственно одинаковыхъ группъ, эти группы играютъ совершенно такую же роль, какъ и отдѣльные предметы при ихъ сосчитываніи; поэтому эти образованныя искуственно группы можно назвать тоже единицами, при чемъ для отличія отъ отдѣльныхъ предметовъ—единицами сложными, а отдѣльные предметы—простыми единицами. Простая единица въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ разсматривается какъ недѣлимое.

Какую бы новую группировку мы ни придали данной совокупности предметовъ, число ихъ отъ этого не измѣнится. Это свойство принадлежитъ и отвлеченному числу; слѣд. отвлеченное число не зависитъ отъ способа группировки его единицъ.

8. Группировкой простыхъ единицъ въ сложныя, группировкой этихъ сложныхъ единицъ въ новыя сложныя и т. д. воспользовалась ариѳметика для выраженія чиселъ, принявъ, что каждыя десять единицъ образуютъ слѣдующую высшую единицу. Такая система выраженія чиселъ наз. десятичной системой счисленія, или нумераціей. Ариѳметика вообще ограничивается, а начальный курсъ ея по необходимости долженъ ограничиваться разсмотрѣніемъ чиселъ въ опредѣленной формѣ, именно въ десятичной. Этимъ ариѳметика отличается и отъ алгебры, и отъ теоріи чиселъ. Съ точки зрѣнія алгебры представленіе результата въ десятичной формѣ является только преобразованіемъ, самое же дѣйствіе считается оконченнымъ, коль скоро оно обозначено надлежащимъ образомъ. Такъ, обозначеніе

$$35+27$$

съ точки зрѣнія алгебры выражаетъ сумму чиселъ 35 и 27, а въ ариѳметикѣ выражаетъ требованіе представить результатъ въ десятичной формѣ, послѣ чего сложеніе только и считается законченнымъ. Полученіе десятичнаго числа 62 съ точки зрѣнія алгебры есть преобразованіе суммы $35+27$ въ иную сумму $60+2$, а съ точки зрѣнія ариѳметики есть опредѣленіе суммы, которой раньше мы не имѣли.

Такимъ образомъ, ариѳметика разсматриваетъ числа и дѣйствія съ ними въ зависимости отъ опредѣленной системы счисленія (мы здѣсь исключаемъ такъ называемую общую ариѳметику, которая у насъ проходится всегда совмѣстно съ алгеброй), предоставляя разсмотрѣніе дѣйствій вообще алгебрѣ, а разсмотрѣніе чиселъ, независимо отъ системы счисленія,—теоріи чиселъ. Съ этой точки зрѣнія, вопросъ о признакахъ дѣлимости есть вопросъ ариѳметическій, а вопросъ о первоначальныхъ числахъ принадлежитъ теоріи чиселъ; вопросъ объ опредѣленіи частнаго есть вопросъ ариѳметики, а изученіе всѣхъ свойствъ дѣленія—вопросъ алгебры. Преслѣдуя главнымъ образомъ вопросы вычисленія въ опредѣленной системѣ выраженія чиселъ, ариѳметика пользуется положеніями алгебры и теоріи чиселъ для установленія и объясненія пріемовъ вычисленія. Чѣмъ строже желаемъ мы объяснить пріемы вычисленія, чѣмъ свободнѣе желаемъ быть въ выборѣ этихъ пріемовъ, тѣмъ больше заимствованій должны сдѣлать изъ той и другой науки.

9. Вопросу о возможности непосредственно представлять числа придаютъ значеніе, котораго онъ едва ли заслуживаетъ. При его рѣшеніи обыкновенно сопоставляютъ мнѣніе Тэна, по которому представленіе числа возможно до весьма небольшого предѣла (четыре, пять), и мнѣніе Грубе и его послѣдователей, по которому „непосредственному созерцанію“ доступны всѣ первыя сто чиселъ. Безъ сомнѣнія, правда здѣсь скорѣе на сторонѣ Тэна.

Но у насъ есть средство помочь себѣ въ воспріятіи и представленіи чиселъ выше 5-ти, состоящее въ группировкѣ единицъ. Каждая система счисленія имѣетъ цѣлію помочь воспріятію и представленію чиселъ, и мы достигаемъ этого тѣмъ съ большею легкостью, чѣмъ болѣе привыкаемъ къ избранной системѣ. Тэнъ, разбирая этотъ вопросъ, беретъ въ примѣръ число 36 и говоритъ, что 36 мы понимаемъ какъ 35 съ единицею, а 35 есть 34 съ единицею, и такъ „постепенно по лѣстницѣ переберемся черезъ ровъ, слишкомъ широкій для нашихъ ногъ“. Къ этому слѣдуетъ добавить, что система счисленія позволяетъ намъ значительно уменьшить число ступеней въ этой лѣстницѣ и тѣмъ облегчаетъ воспріятіе и представленіе чиселъ. Система счисленія представляетъ число 36 въ видѣ 3 десятковъ и 6 единицъ. Если десятка мы не можемъ представить себѣ непосредственно, то можемъ представить его какъ совокупность двухъ пятковъ и такимъ образомъ дойти до болѣе или менѣе яснаго представленія числа 36, хотя такое представленіе и нельзя назвать непосредственнымъ. Прибавимъ къ этому, что весьма многіе люди для привычныхъ предметовъ могутъ воспринимать числа съ достаточною точностью и гораздо выше даваемаго Тэномъ предѣла; напр., очень многіе довольно точно могутъ опредѣлить число людей въ толпѣ, число головъ скота въ стадѣ, не прибѣгая къ группировкѣ предметовъ и къ ихъ пересчитыванію.

10. Дѣйствія. Дѣйствіе, для производства котораго даются два числа, наз. простымъ. Если число данныхъ чиселъ болѣе двухъ, то дѣйствіе наз. сложнымъ.

Назовемъ послѣдовательнымъ такой рядъ дѣйствій, изъ которыхъ каждое слѣдующее производится надъ результатомъ предыдущаго. Если при этомъ всѣ дѣйствія одинаковы, то такой рядъ дѣйствій наз. послѣдовательнымъ повтореніемъ этого дѣйствія.

Послѣдовательный прямой счетъ даетъ начало сложенію. Повторивъ, начиная съ 5, прямой счетъ послѣдовательно 3 раза (5 да 1—шесть, 6 да 1—семь, 7 да 1—восемь), мы къ числу 5 присчитаемъ 3 единицы, т.-е. сложимъ числа 5 и 3. Одно послѣдовательное повтореніе прямого счета не составляетъ еще сложенія: для сложенія двухъ чиселъ необходимо опредѣленное число повтореній прямого счета, именно прямой счетъ долженъ быть произведенъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ слагаемомъ, а для этого надо вести также счетъ прибавляемымъ единицамъ. Такимъ образомъ, сложеніе представляетъ совокупность двухъ послѣдовательныхъ прямыхъ счетовъ, одного—начинающагося отъ перваго слагаемаго (5+1=6, 6+1=7, 7+1=8), другого—начинающагося отъ единицы (присчитали одну единицу,

присчитали двѣ единицы, присчитали три единицы). Изъ сказаннаго вытекаетъ слѣдующее опредѣленіе сложенія двухъ чиселъ: сложить два числа значитъ къ первому числу присчитать послѣдовательно всѣ единицы второго. Сложеніе нѣсколькихъ (болѣе двухъ) чиселъ есть дѣйствіе слоѣное и состоитъ изъ сложенія первыхъ двухъ слагаемыхъ, затѣмъ изъ сложенія полученной суммы съ третьимъ слагаемымъ и т. д.

Сложеніе подчиняется перемѣстительному закону, т.-е. сумма не измѣняется отъ перестановки слагаемыхъ. Этотъ законъ есть непосредственное слѣдствіе положенія, что результатъ счета не зависитъ отъ порядка, въ которомъ онъ производится, и что число не зависитъ отъ способа группировки его единицъ.

11. Указанное опредѣленіе сложенія даетъ пріемъ, которымъ можетъ быть составленъ результатъ этого дѣйствія. Другой способъ опредѣленія дѣйствія состоитъ въ указаніи такого условія, которому долженъ удовлетворять результатъ дѣйствія и по которому можно бы было найти способъ составленія этого результата. Такимъ путемъ опредѣляется вычитаніе. Вычесть значитъ найти такое число, которое отъ сложенія съ однимъ изъ данныхъ чиселъ даетъ другое данное число; иначе: вычесть значитъ по данной суммѣ и одному слагаемому опредѣлить другое слагаемое. Отсюда видно, что можно различать два случая вычитанія: опредѣленіе перваго слагаемаго и опредѣленіе второго слагаемаго. Слѣд. вычитаніе рѣшаетъ два вопроса; для вычитанія 9 изъ 15 эти вопросы могутъ быть поставлены въ такомъ видѣ: 1) къ какому числу надо прибавить 9, чтобы получить 15, и 2) сколько единицъ надо прибавить къ 9-ти, чтобы получить 15. Въ первомъ вопросѣ отвѣту соотвѣтствуетъ названіе остатка, во второмъ—названіе разности. Хотя эти два вопроса и различны по смыслу, но относятся къ одному дѣйствію вслѣдствіе того, что сумма не измѣняется отъ перестановки слагаемыхъ; на основаніи этого закона всякое вычитаніе мы можемъ по произволу привести или къ опредѣленію перваго слагаемаго или къ опредѣленію второго слагаемаго. Въ обоихъ случаяхъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ рядомъ испытаній, выполняемыхъ помощію сложенія. Напр., складывая въ приведенномъ примѣрѣ 9 съ 3-мя, найдемъ только 12 и заключимъ, что 3 не годится; складывая 9 съ 5-ю, получимъ 14 и также заключимъ, что 5 не годится; сложивъ же 9 съ 6-ю, получимъ требуемое число 15 и заключимъ, что искомое слагаемое есть 6.

Въ частномъ случаѣ, когда данное слагаемое есть единица (напр. 5—1=4), вычитаніе можетъ быть названо обратнымъ

счетомъ. Послѣдовательное повтореніе обратнаго счета наз. послѣдовательнымъ обратнымъ счетомъ. Къ вычитанію можно перейти отъ послѣдовательнаго обратнаго счета, и тогда опредѣленіе вычитанія приметъ слѣдующій видъ: вычесть значитъ отъ бо́льшаго изъ данныхъ чиселъ отсчитать столько единицъ, сколько ихъ содержится въ меньшемъ числѣ. Опредѣленіе это имѣетъ то преимущество передъ предыдущимъ, что даетъ пріемъ для составленія результата дѣйствія и представляетъ аналогію съ опредѣленіемъ сложенія, но вмѣстѣ съ тѣмъ оно нѣсколько суживаетъ понятіе о вычитаніи, разсматривая только одинъ изъ вопросовъ этого дѣйствія. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что вычитаніе, подобно сложенію, представляетъ сочетаніе двухъ послѣдовательныхъ счетовъ: обратнаго для опредѣленія разности (15—1=14, 14—1=13, 13—1=12, 12—1=11, 11—1=10, 10—1=9, 9—1=8, 8—1=7, 7—1=6) и прямого для опредѣленія того, сколько разъ былъ повторенъ обратный счетъ (отсчитали одну единицу, отсчитали двѣ единицы и т. д).

Способъ, которымъ мы отъ сложенія перешли къ вычитанію, наз. обращеніемъ дѣйствія. Два дѣйствія наз. взаимно обратными, если въ первомъ изъ нихъ дается результатъ и одно изъ данныхъ второго дѣйствія, а ищется другое данное второго.

12. Послѣдовательное повтореніе сложенія надъ однимъ и тѣмъ же числомъ приводитъ къ умноженію.

Сложимъ 5 съ 5-ю, полученную сумму 10 сложимъ съ 5-ю, новую полученную сумму 15 сложимъ опять съ 5-ю; получимъ 20. Въ приведенномъ примѣрѣ мы 5 умножимъ на 4. Такимъ образомъ, умножить одно число на другое значитъ первое число сложить само съ собою, къ полученной суммѣ прибавить то же число и т. д., пока не сдѣлаемъ столько сложеній, сколько единицъ во второмъ числѣ безъ одной. Короче это выражаютъ, говоря: умножить значитъ одно число взять слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ числѣ. По этому опредѣленію умноженіе слагается изъ послѣдовательныхъ сложеній и счета этихъ сложеній. Умноженіе, какъ и сложеніе, подчиняется перемѣстительному закону. Какъ выяснить этотъ законъ дѣтямъ, будетъ указано ниже.

13. Опредѣленіе дѣленія аналогично съ опредѣленіемъ вычитанія, т.-е. указываетъ условіе, которому долженъ удовлетворять результатъ и по которому этотъ результатъ можетъ быть полученъ. Раздѣлить значитъ по произведенію и одному множителю опредѣлить другого множителя. Можно различить два случая дѣленія: опредѣленіе множимаго и опредѣленіе множителя. Поэтому дѣленіе рѣшаетъ два вопроса; для дѣленія 36 на 4 эти вопросы могутъ быть поставлены въ такомъ видѣ: 1) какое число надо умножить на 4, чтобы получить 36, и 2) на какое число надо умножить 4, чтобы получить 36. Иначе: 1) какое число надо взять слагаемымъ 4 раза, чтобы получить въ суммѣ 36; 2) сколько разъ надо взять слагаемымъ 4, чтобы получить въ суммѣ 36.

Эти два вопроса, различные по смыслу, относятся къ одному дѣйствію вслѣдствіе того, что произведеніе не измѣняется отъ перестановки множителей. На основаніи этого закона всякое дѣленіе по произволу можемъ привести или къ опредѣленію множимаго, или къ опредѣленію множителя. Первый вопросъ обыкновенно выражаютъ въ формѣ требованія: опредѣлить одну изъ равныхъ частей дѣлимаго, второй въ формѣ требованія: опредѣлить, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ. Поэтому дѣленіе въ первомъ случаѣ иногда называютъ дѣленіемъ на части, или собственно дѣленіемъ, а во второмъ—дѣленіемъ по содержанію, или кратнымъ сравненіемъ чиселъ.

Оба вопроса могутъ быть рѣшены рядомъ испытаній, выполняемыхъ умноженіемъ. Въ приведенномъ примѣрѣ, умножая 4 на 7, получимъ только 28 и заключимъ отсюда, что 7 не годится; умножая 4 на 8, получимъ 32 и также заключимъ, что и 8 не годится; умноживъ же 4 на 9 и получивъ въ произведеніи требуемое число 36, заключимъ, что частное отъ дѣленія 36 на 4 есть 9. Вмѣсто этого, можно рѣшить вопросъ помощью послѣдовательнаго вычитанія дѣлителя изъ дѣлимаго и сосчитываніемъ этихъ вычитаній. Дѣйствительно, если раздѣлить значитъ узнать, сколько разъ данное число должно быть взято слагаемымъ, чтобы получить данную сумму, то мы рѣшимъ этотъ вопросъ, сосчитавъ, сколько разъ данное слагаемое можно вычесть изъ данной суммы.

14. Изъ изложеннаго слѣдуетъ:

1. Понятія объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ могутъ быть образованы на основаніи понятія о прямомъ счетѣ.

2. Ариѳметическія дѣйствія находятся въ тѣсномъ подчиненіи другъ другу, опредѣляемомъ порядкомъ ихъ образованія.

3. Понятіе объ ариѳметическомъ дѣйствіи можетъ быть дано или указаніемъ способа составленія результата (сложеніе, умноженіе), или указаніемъ условія, которому подчиняется результатъ и которое даетъ возможность найти тотъ или другой способъ для составленія этого результата (вычитаніе и дѣленіе).

4. Для нѣкоторыхъ дѣйствій по существу возможенъ только первый способъ опредѣленія (сложеніе, умноженіе). Такія дѣйствія считаются прямыми. Дѣйствія, взаимно-обратныя съ пря-

мыми, наз. обратными. Каждое обратное дѣйствіе даетъ два вопроса, которые для вычитанія и дѣленія приводятся къ одному дѣйствію вслѣдствіе того, что сложеніе и умноженіе подчиняются перемѣстительному закону.

Пониманіе дѣйствія гораздо доступнѣе для дѣтей тогда, когда оно характеризуется способомъ составленія результата, чѣмъ когда оно характеризуется условіемъ, которому подчиняется результатъ, потому что въ послѣднемъ случаѣ является необходимость изъ сдѣланнаго условія выводить способъ составленія результата. Поэтому въ первое время обученія лучше характеризовать дѣйствія способомъ составленія результата.

5. По способу составленія результатовъ каждое новое прямое дѣйствіе представляетъ сочетаніе послѣдовательнаго повторенія одного изъ предшествующихъ прямыхъ дѣйствій и послѣдовательнаго прямого счета.

6. Результатъ каждаго обратнаго дѣйствія можетъ быть найденъ или рядомъ испытаній, выполняемыхъ соотвѣтствующимъ прямымъ дѣйствіемъ, или помощью послѣдовательнаго повторенія одного изъ предшествующихъ обратныхъ дѣйствій и послѣдовательнаго прямого счета.

Такимъ образомъ, счетъ является основнымъ ариѳметическимъ дѣйствіемъ не только потому, что изъ понятія о немъ образуются понятія о всѣхъ остальныхъ дѣйствіяхъ, но и потому еще, что онъ, какъ составной элементъ, входитъ въ каждое изъ послѣдующихъ дѣйствій.

15. Сказанное нами въ главныхъ чертахъ остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, если поведемъ образованіе дѣйствій далѣе, т.-е. разсмотримъ возвышеніе въ степень и дѣйствія ему обратныя.

Возвышеніе въ степень слагается изъ послѣдовательнаго повторенія умноженія надъ однимъ и тѣмъ же числомъ и послѣдовательнаго прямого счета, необходимаго для опредѣленія надлежащаго числа сдѣланныхъ умноженій.

Такимъ образомъ, возвысить въ степень значитъ одно число взять множителемъ столько разъ, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ. Возвышеніе въ степень не подчиняется перемѣстительному закону, и потому имѣетъ два обратныхъ дѣйствія: 1) опредѣленіе основанія степени по данной степени и ея показателю (извлеченіе корня), 2) опредѣленіе показателя степени по данной степени и ея основанію (логариѳмированіе). Такъ, обращая возвышеніе въ степень $5^3=125$, мы можемъ задать себѣ два вопроса: 1) какое число надо возвысить въ 3-ю степень чтобы получить 125, 2) въ какую степень надо возвысить 5, чтобы получить 125. Эти два вопроса не могутъ быть сведены къ одному дѣйствію, потому что 5^3 (т.-е. 125) не равно 3^5 (т.-е. 243).

Результаты обоихъ дѣйствій могутъ быть опредѣлены помощью ряда испытаній выполняемыхъ прямымъ дѣйствіемъ; одно же изъ нихъ (логариѳмированіе) можетъ быть приведено къ послѣдовательному повторенію дѣленія на одно и то же число ($125:5=25$, $25:5=5$, $5:5=1$)

и къ сосчитыванію этихъ дѣленій. Возвышеніе въ степень и обратныя ему дѣйствія въ курсѣ ариѳметики не разсматриваются, хотя и для нихъ существуетъ цѣлый рядъ чисто ариѳметическихъ вопросовъ.

16. Разсмотрѣнные нами пріемы выполненія дѣйствій слишкомъ длинны и утомительны для того, чтобы ихъ постоянно прилагать къ дѣлу. Задача ариѳметики состоитъ въ томъ, чтобы сократить или обойти эти пріемы. Всѣ упрощенія и отступленія отъ первоначальныхъ пріемовъ вычисленія, непосредственно вытекающихъ изъ опредѣленій дѣйствій, основаны на законахъ, которымъ подчиняются дѣйствія, на принятомъ способѣ выраженія чиселъ и на пользованіи ранѣе опредѣленными результатами дѣйствій.

17. Законы, которымъ подчиняются ариѳметическія дѣйствія. Выше уже указанъ перемѣстительный законъ, которому подчиняются сложеніе и умноженіе. Кромѣ того, существуютъ еще два закона: сочетательный (иначе собирательный) и распредѣлительный. Сочетательный законъ состоитъ въ слѣдующемъ:

1) Чтобы къ какому-нибудь числу прибавить сумму нѣсколькихъ чиселъ, можно прибавить къ нему послѣдовательно одно за другимъ всѣ слагаемыя, и наоборотъ.

2) Чтобы какое-либо число умножить на произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, можно умножить его послѣдовательно на множителей этого произведенія, и наоборотъ.

Распредѣлительный законъ состоитъ въ слѣдующемъ: чтобы умножить сумму на какое-либо число, можно умножить на это число каждое слагаемое и полученныя произведенія сложить, и наоборотъ.

Эти законы и слѣдствія ихъ обыкновенно излагаются въ формѣ правилъ объ измѣненіи результатовъ дѣйствій при измѣненіи данныхъ.

18. Системы счисленія. Каждая система счисленія, основанная на однихъ началахъ съ десятичной, группируетъ простыя единицы въ сложныя, эти сложныя единицы группируетъ въ новыя сложныя и т. д., при чемъ число единицъ простыхъ или сложныхъ, образующихъ новую группу, остается все время одно и то же. Эти простыя и сложныя единицы называются соотвѣтственно единицами 1-го разряда, единицами 2-го разряда и т. д. Число, показывающее, сколько единицъ какого-либо разряда составляютъ единицу слѣдующаго высшаго разряда, наз. основаніемъ системы. Всѣ системы, однородныя съ 10-й, отличаются другъ отъ друга только своими основаніями. Система, основаніе которой есть 12, наз. двѣнадцатеричной; система, основаніемъ которой служитъ 2, наз. двоичной и т. д.

Система счисленія выражаетъ число въ видѣ суммы слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое состоитъ изъ единицъ только одного

разряда. Такъ, десятичная система выражаетъ число въ видѣ суммы слагаемыхъ, изъ которыхъ самое малое состоитъ изъ простыхъ единицъ, слѣдующее за нимъ—изъ десятковъ, слѣдующее—изъ сотенъ и т. д. Каждое изъ этихъ слагаемыхъ, въ свою очередь, представляетъ произведеніе единицы какого-либо разряда на однозначное число; напр. 5000 есть произведеніе 1000 на 5, 70 есть произведеніе 10 на 7.

Для письменнаго обозначенія чиселъ цыфрѣ даютъ значеніе по формѣ и по мѣсту, при чемъ формой означается число единицъ и мѣстомъ—разрядъ единицъ. Въ каждой системѣ счетъ единицами какого-либо разряда нѣтъ надобности вести далѣе числа, предшествующаго основанію системы (въ десятичной системѣ до 9), потому что съ прибавленіемъ еще одной единицы того же разряда, мы можемъ изъ полученнаго числа образовать единицу слѣдующаго высшаго разряда; поэтому для обозначенія чиселъ въ каждой системѣ совершенно достаточно было бы столькихъ цыфръ, сколько единицъ въ основаніи системы безъ одной (9-ти въ 10-й системѣ); но для того, чтобы не стѣснять себя мѣстомъ написанія числа, вводится во всѣхъ системахъ еще одна цыфра—0. Эта же цыфра служитъ для обозначенія отсутствія числа. Такимъ образомъ въ каждой системѣ счисленія столько однозначныхъ чиселъ, сколько единицъ въ основаніи системы безъ одной, и столько цыфръ, сколько единицъ въ основаніи системы.

19. Для письменнаго обозначенія чиселъ по 12-ой системѣ къ цыфрамъ 10-ой системы надо прибавить еще двѣ: одну для обозначенія десяти единицъ, другую—для обозначенія одиннадцати единицъ каждаго разряда. Согласимся съ этой цѣлью употреблять знакъ a для десяти и b для одиннадцати.

Выражая число по 10-ой системѣ, мы должны сгруппировать простыя единицы въ десятки, десятки, если возможно, въ сотни и т. д.; выражая то же число по 12-ой системѣ, мы простыя единицы должны сгруппировать въ дюжины, дюжины, если возможно, въ гроссы и т. д. Такъ какъ отъ способа группировки единицъ величина числа не зависитъ, то мы получимъ два выраженія одного и того же числа. Отъ перемѣны основанія системы, стало быть, измѣняется только форма выраженія чиселъ, а не самыя числа. Такимъ образомъ, написавъ

$$10,\ 100,\ 1000,\ 5ab,\ b930,\ 5954,$$

мы обозначимъ по 12-ой системѣ слѣдующія числа: дюжину; гроссъ; дюжину гроссовъ; 5 гроссовъ, десять дюжинъ и одиннадцать единицъ; одиннадцать дюжинъ гроссовъ, 9 гроссовъ и 3 дюжины; 5 дюжинъ гроссовъ, 9 гроссовъ, 5 дюжинъ и 4 единицы. Тѣ же числа по 10-ой системѣ выразятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$12,\ 144,\ 1728,\ 851,\ 20340,\ 10000.$$

Сравнивая эти обозначенія однихъ и тѣхъ же чиселъ по разнымъ системамъ, мы замѣчаемъ: 1) одно и то же число по одной системѣ выражается

проще, по другой сложнѣе, слѣд. простота числа зависитъ не исключительно отъ его величины, а главнымъ образомъ отъ выраженія его въ той или другой системѣ счисленія; 2) число цыфръ, потребныхъ для обозначенія числа, такъ же зависитъ отъ системы счисленія, въ которой оно выражено. Въ послѣднемъ отношеніи нѣтъ рѣзкой разницы между 10-й и 12-й системами, потому что основанія ихъ очень близки между собой. Чѣмъ дальше другъ отъ друга основанія системъ, тѣмъ рѣзче недостатки и преимущества относительно выраженія чиселъ одной системы сравнительно съ другой; напр., въ двоичной системѣ нѣкоторыя числа, требующія по 10-ой системѣ одной цыфры, могутъ быть обозначены только при помощи трехъ или четырехъ цыфръ.

20. Основныя ариѳметическія таблицы. Каждая система счисленія для производства всѣхъ четырехъ дѣйствій даетъ возможность довольствоваться таблицами сложенія и умноженія однозначныхъ чиселъ. Чѣмъ больше основаніе системы, тѣмъ обширнѣе и эти основныя таблицы, потому что при бо́льшемъ основаніи системы въ ней больше и однозначныхъ чиселъ. Таблица сложенія въ каждой системѣ составляется помощью прямого счета, таблица умноженія—помощью сложенія.

Таблица сложенія даетъ суммы каждыхъ двухъ однозначныхъ чиселъ и позволяетъ опредѣлять однозначныя разности при однозначномъ вычитаемомъ; таблица умноженія даетъ произведенія каждыхъ двухъ однозначныхъ чиселъ и позволяетъ опредѣлять однозначныя частныя при однозначномъ дѣлителѣ.

Дѣйствія съ остальными числами приводятся къ этимъ двумъ таблицамъ. Поэтому знаніе таблицъ и умѣнье пользоваться ими при вычитаніи и дѣленіи составляютъ необходимое условіе вѣрнаго и быстраго вычисленія. Для быстроты вычисленій полезно располагать еще нѣкоторыми результатами дѣйствій, не входящими въ таблицы; напр., для умноженія и дѣленія по 10-й системѣ полезно знать произведенія чиселъ второго десятка (10—20) на однозначныя числа.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ: 1) всѣ прямыя дѣйствія приводятся къ тѣмъ же дѣйствіямъ надъ однозначными числами, при чемъ въ результатѣ всегда получается число не выше двузначнаго; 2) обратныя—къ дѣйствіямъ надъ числами не выше двузначныхъ, при чемъ одно изъ данныхъ и результатъ непремѣнно однозначные; 3) сложеніе и вычитаніе по таблицѣ не выходитъ изъ предѣловъ двухъ единицъ второго разряда (послѣднее число таблицы сложенія 18); 4) умноженіе и дѣленіе не выходитъ изъ предѣловъ единицы 3-го разряда (послѣднее число въ таблицѣ умноженія есть 81). Отсюда вытекаетъ возможность въ первое время обученія ограничиваться числами, не превышающими единицы 3-го разряда. Этотъ предѣлъ для различныхъ системъ счисленія различенъ; для 10-й онъ есть сотня, для 12-й гроссъ, т.-е. около ста пятидесяти, и зависитъ не отъ того, до какого предѣла доступны числа непосредственному созерцанію, а отъ принятой системы счисленія.

ЗАП.-СИБ. КРАЕВАЯ НАУЧНАЯ СИБ. БИБЛИОТЕКА № 84425

21. Дѣйствія съ многозначными числами. Дѣйствія съ многозначными числами приводятся къ таблицамъ не одинаково легко, и тѣмъ легче, чѣмъ проще выражается число при принятой системѣ счисленія. Такъ, почти непосредственно могутъ приводиться къ таблицамъ: 1) сложеніе—тогда, когда слагаемыя состоятъ изъ единицъ только одного разряда, одинаковаго для обоихъ слагаемыхъ; 2) вычитаніе или при тѣхъ же условіяхъ, или тогда, когда вычитаемое состоитъ изъ единицъ одного разряда, а уменьшаемое единицъ этого разряда заключаетъ меньше, чѣмъ вычитаемое, но зато содержитъ въ себѣ еще одну единицу слѣдующаго высшаго разряда; 3) умноженіе—тогда, когда одно изъ данныхъ состоитъ только изъ единицъ одного разряда, а другое — однозначное; 4) дѣленіе, во-первыхъ тогда, когда при однозначномъ дѣлителѣ дѣлимое состоитъ изъ единицъ только одного разряда или двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ разрядовъ, при чемъ единицъ высшаго разряда меньше, чѣмъ простыхъ единицъ въ дѣлителѣ, и частное состоитъ изъ единицъ только одного разряда, и, во-вторыхъ тогда, когда дѣлитель содержитъ единицы только одного разряда, а дѣлимое состоитъ или только изъ единицъ того же разряда, или заключаетъ въ себѣ единицы слѣдующаго высшаго разряда, но въ меньшемъ числѣ, чѣмъ единицъ даннаго разряда, въ дѣлителѣ. Достигнуть такого приведенія можно распространеніемъ результатовъ таблицъ на сложныя единицы; напр. при сложеніи 9 сотенъ съ 5-ю сотнями мы можемъ сказать, что по таблицѣ сложенія 9 единицъ съ 5-ю единицами составляютъ 14 единицъ, каковы бы ни были складываемыя единицы, слѣд. 9 сотенъ съ 5-ю сотнями составятъ 14 сотенъ; при дѣленіи 8100 на 900, мы можемъ сказать, что по таблицѣ умноженія отъ дѣленія 81 единицы на 9 такихъ же единицъ получается въ частномъ 9, каковы бы ни были взятыя единицы, слѣд. отъ дѣленія 81 сотни на 9 сотенъ въ частномъ такъ же получается 9. Такіе случаи дѣйствій съ многозначными числами полезно разсматривать прежде другихъ, какъ потому, что они сравнительно легче, такъ и потому, что остальные случаи могутъ быть къ нимъ сведены.

22. Десятичная система счисленія и однородныя съ нею системы, какъ мы видѣли, выражаютъ числа въ видѣ суммъ слагаемыхъ, состоящихъ каждое изъ единицъ только одного разряда, а законы перемѣстительный, сочетательный и распредѣлительный даютъ возможность свести дѣйствіе надъ суммами къ дѣйствіямъ надъ слагаемыми.

При помощи этихъ законовъ сложеніе и вычитаніе приводятся къ приведеннымъ выше случаямъ этихъ дѣйствій; умноженіе можетъ быть разложено на умноженія чиселъ, обозначаемыхъ значащей цыфрой съ нулями, а дѣленіе—на такія дѣленія,

которыя въ частномъ даютъ единицы одного только разряда. При этомъ приходится принимать во вниманіе, что каждое изъ слагаемыхъ, на которыя разлагаетъ числа система счисленія, представляетъ произведеніе однозначнаго числа на единицу соотвѣтствующаго разряда.

23 Сказанное относится одинаково ко всѣмъ системамъ счисленія однороднымъ съ десятичной, такъ что съ измѣненіемъ основанія системы пріемы вычисленія въ общихъ чертахъ остаются безъ измѣненія. Вотъ примѣры всѣхъ четырехъ дѣйствій по 12-й системѣ выполненные по тѣмъ же правиламъ, какъ и въ десятичной системѣ:

1 1	. . .	1	
		4 1	
$+3b7$	5004	$b52$	5233 | 41
$4a8$	-2567	$\times a4$	41 | 133
$8a3$	2659	3988	113
		9638	103
		$9a148$	103
			103
			0

Цыфры, напечатанныя вверхъ мелкимъ шрифтомъ, показываютъ, сколько единицъ того разряда, надъ которымъ онѣ стоятъ, получилось отъ дѣйствія надъ единицами предшествующаго низшаго разряда.

24. Мѣсто первоначальныхъ пріемовъ вычисленія начальномъ курсѣ ариѳметики. Ариѳметика устанавливаетъ способы составленія основныхъ таблицъ и пріемы, помощью которыхъ ариѳметическія дѣйствія приводятся къ этимъ таблицамъ. Преподаваніе же, коль скоро оно не ограничивается однимъ выясненіемъ теоретическихъ положеній, должно обратить вниманіе на усвоеніе таблицъ и на пріобрѣтеніе навыка въ пріемахъ вычисленія. Значительное облегченіе въ усвоеніи таблицъ составляетъ то обстоятельство, что при опредѣленіи результатовъ, заключающихся въ нихъ, нѣтъ надобности прибѣгать постоянно къ первоначальнымъ пріемамъ, помощью которыхъ онѣ составляются. Первоначальные пріемы вычисленія необходимы лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда не только данныя числа въ дѣйствіи, но и результатъ его не превышаетъ основанія системы. Какъ скоро результатъ дѣйствія въ сложеніи и умноженіи, или одно изъ данныхъ чиселъ въ вычитаніи и дѣленіи будетъ число двузначное, то въ вычисленіяхъ можно пользоваться услугами системы счисленія. Такимъ путемъ мы можемъ привести всѣ дѣйствія въ предѣлахъ основныхъ таблицъ къ такимъ случаямъ дѣйствій, когда не только данныя числа въ дѣйствіи, но и результатъ его не превышаетъ 10-ти. Такъ, 8 съ 7-ю нѣтъ надобности складывать помощію послѣдовательнаго присчитыванія единицъ; мы можемъ сложить 8 сперва только съ 2-мя и потомъ полученную сумму 10 соединить съ

оставшимися 5-ю на основаніи системы счисленія. Умножать 4 на 7 не зачѣмъ помощью послѣдовательнаго повторенія сложенія: мы можемъ 4 умножить на 5, а потомъ 4 на 2 и соединить эти два произведенія.

Эти пріемы не только не облегчаютъ опредѣленіе результатовъ дѣйствій въ предѣлахъ таблицъ, но въ извѣстной мѣрѣ могутъ замѣнить усвоеніе таблицъ на память. Дѣйствительно, безразлично, помнитъ ли ученикъ произведеніе 8 на 7, или можетъ вычислить его съ такою же затратою времени, сколько потребуется на припоминаніе. Между тѣмъ въ педагогическомъ отношеніи приложеніе пріемовъ вычисленія предпочтительнѣе заучиванія результатовъ. Усвоеніе пріемовъ вычисленія совершается быстрѣе, чѣмъ усвоеніе результатовъ, потому что болѣе или менѣе одинаковые пріемы вычисленія повторяются при нахожденіи цѣлаго ряда результатовъ; приложеніе пріемовъ вычисленія требуетъ отъ учениковъ бо́льшей умственной самостоятельной работы, чѣмъ простое заучиваніе результатовъ; наконецъ, владѣя пріемомъ вычисленія, ученикъ никогда не будетъ поставленъ въ то безпомощное положеніе, которое такъ часто встрѣчается при утерѣ изъ памяти нѣкоторыхъ необходимыхъ результатовъ, заученныхъ наизусть.

Итакъ, пріемы вычисленія, непосредственно вытекающіе изъ опредѣленій дѣйствій, необходимы только въ тѣхъ случаяхъ, когда и данныя, и результатъ дѣйствія не превышаютъ основанія системы, хотя и здѣсь эти пріемы могутъ подлежать нѣкоторому сокращенію; напр., вмѣсто послѣдовательнаго отсчитыванія 4-хъ единицъ отъ 9-ти, можно отнять отъ 9-ти сперва 2, если только эта разность извѣстна, а затѣмъ изъ полученной разности 7 отнять остальныя 2 единицы. Во всякомъ случаѣ, въ предѣлѣ основанія системы, т.-е. когда и данныя и результатъ дѣйствія не превышаютъ 10-ти, система счисленія никакой услуги оказать намъ не можетъ.

Пріемы вычисленія въ предѣлахъ основныхъ таблицъ обыкновенно не излагаются въ руководствахъ ариѳметики. Это зависитъ отъ слѣдующихъ причинъ: 1) эти пріемы вычисленія очень разнообразны и представляютъ менѣе опредѣленности сравнительно съ пріемами дѣйствій внѣ основныхъ таблицъ; 2) руководства разсматриваютъ по преимуществу пріемы письменнаго вычисленія, а дѣйствія въ предѣлахъ основныхъ таблицъ по самому существу своему могутъ быть выполнены только устно; 3) наконецъ каждое руководство принимаетъ таблицы за данное, на основаніи котораго слѣдуетъ строить всѣ остальные пріемы вычисленія.

25. Мѣсто системы счисленія въ начальномъ курсѣ ариѳметики. Усвоеніе системы счисленія и примѣненіе ея къ вычисленіямъ обусловливается очень многими требованіями. Въ основѣ каждой системы счисленія лежитъ возможность производить счетъ не только простыми, но и сложными единицами; поэтому необходимой подготовкой къ усвоенію системы счисленія должно служить усвоеніе простого счета и связанныхъ съ нимъ понятій объ отвлеченномъ числѣ и единицѣ. Каждая система счисленія выражаетъ число въ видѣ суммы нѣсколькихъ слагаемыхъ, гдѣ каждое слагаемое представляетъ собою произведеніе однозначнаго числа на единицу какого-либо разряда. Поэтому для усвоенія системы счисленія весьма важно имѣть нѣкоторое понятіе о сложеніи и умноженіи. Пользованіе системой счисленія при дѣйствіяхъ обусловливается умѣніемъ переводить единицы низшаго разряда въ высшій и наоборотъ, а этотъ переводъ требуетъ умноженія и дѣленія. Такимъ образомъ, усвоеніе системы счисленія и пользованіе ею въ пріемахъ вычисленія требуетъ нѣкотораго знакомства со всѣми четырьмя ариѳметическими дѣйствіями. Поэтому *начальное преподаваніе ариѳметики никоимъ образомъ не можетъ начинаться съ системы счисленія.*

Требованіе это тѣмъ настоятельнѣе, что дѣти школьнаго возраста (7—8 лѣтъ) имѣютъ весьма смутныя представленія о числахъ и о простомъ послѣдовательномъ счетѣ даже въ предѣлѣ перваго десятка. Съ такимъ матеріаломъ, очевидно, они не въ состояніи осилить системы счисленія сознательно и принуждены усваивать ее чисто механически, что крайне неблагопріятно отражается на всемъ дальнѣйшемъ курсѣ ариѳметики. Кромѣ того, болѣе или менѣе полное усвоеніе системы счисленія требуетъ продолжительнаго времени, и во все это время почти нѣтъ возможности прилагать ариѳметическія знанія къ вычисленіямъ и рѣшенію задачъ; по крайней мѣрѣ эти приложенія получаютъ крайне однообразный и малоразвивающій характеръ.

26. Необходимость совмѣстнаго разсмотрѣнія дѣйствій. Пріемы вычисленія почти въ каждомъ дѣйствіи требуютъ рѣшенія вопросовъ, относящихся къ слѣдующимъ за нимъ дѣйствіямъ; напр., приведенный нами пріемъ сложенія 8-ми и 7-ми требуетъ умѣнья отнять 2 отъ 7-ми; точно также пріемъ сложенія, состоящій въ такъ называемомъ округленіи числа, требуетъ вычитанія; пріемъ умноженія на число, обозначаемое значащей цыфрой съ нулями, и вообще на числа, разлагающіяся на множителей, требуетъ дѣленія; точно также требуютъ дѣленія такъ называемые сокращенные пріемы умноженія на 25, 125 и т. п. Все это приводитъ къ *необходимости совмѣстнаго разсмотрѣнія дѣйствій, а не изученія каждаго дѣйствія отдѣльно.*

Къ такому изученію дѣйствій приближаются нѣкоторые фран-

цузскіе учебники, вводящіе общій обзоръ всѣхъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій передъ подробнымъ разборомъ каждаго изъ нихъ. Изъ нашихъ учебниковъ подобный общій обзоръ появился впервые, если не ошибаемся, въ учебникѣ профессора Бугаева.

27. Требованіе совмѣстнаго изученія дѣйствій позволяетъ примѣнить къ ариѳметикѣ такъ называемое концентрическое распредѣленіе матеріала.

Укажемъ на выгоды, которыя можно извлечь изъ приложенія этого начала въ преподаваніи ариѳметики. Какъ уже было выше сказано, совмѣстное изученіе дѣйствій позволяетъ не стѣсняться въ выборѣ пріемовъ вычисленія, требующихъ приложенія другихъ дѣйствій кромѣ разсматриваемаго. При совмѣстномъ изученіи дѣйствій является возможность сравнивать каждое дѣйствіе съ остальными и тѣмъ способствовать лучшему пониманію и усвоенію ихъ. Совмѣстное изученіе дѣйствій даетъ болѣе свободы въ распредѣленіи матеріала, позволяя основывать его не на томъ, какія дѣйствія необходимы для рѣшенія даннаго вопроса и разъясненія даннаго положенія, а на сравнительной трудности и сложности вопросовъ и положеній ариѳметики. Совмѣстное изученіе дѣйствій даетъ также болѣе свободы въ выборѣ примѣровъ на вычисленія и въ выборѣ задачъ и позволяетъ избѣгать однообразія въ этихъ упражненіяхъ. Самая же существенная выгода совмѣстнаго изученія дѣйствій состоитъ въ томъ, что изученію системы счисленія и приложенію ея къ пріемамъ вычисленія можно придать постепенность, необходимую въ начальномъ преподаваніи.

28. Все сказанное можно свести къ слѣдующимъ положеніямъ:

1. Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ разсматриваетъ числа и дѣйствія надъ ними преимущественно со стороны пріемовъ вычисленія въ опредѣленной системѣ счисленія, и потому изучаетъ свойства чиселъ и дѣйствій по стольку, по сколько это необходимо для установленія пріемовъ вычисленія.

2. Въ основѣ ариѳметики лежитъ счетъ, какъ начальный способъ образованія числа и какъ основное ариѳметическое дѣйствіе, постепенныя усложненія и видоизмѣненія котораго даютъ начало всѣмъ остальнымъ дѣйствіямъ.

3. Всѣ вычисленія ариѳметика приводитъ къ двумъ основнымъ таблицамъ: таблицѣ сложенія и таблицѣ умноженія однозначныхъ чиселъ.

4. Расположеніе матеріала въ ариѳметикѣ опредѣляется: a) генетическою связью между дѣйствіями; b) возможностью болѣе или менѣе легко привести дѣйствіе къ основнымъ таблицамъ.

Бо́льшая или меньшая легкость приведенія дѣйствія къ таблицамъ зависитъ отъ бо́льшей или меньшей простоты обозначенія числа.

5. Для дѣйствій въ предѣлахъ основныхъ таблицъ съ теоретической точки зрѣнія достаточно указать способъ составленія этихъ таблицъ и пользованія ими; для быстроты же вычисленій необходимо знаніе таблицъ и пріобрѣтеніе навыка въ пользованіи ими.

6. Хотя въ приложеніи системы счисленія и законовъ, которымъ подчиняются дѣйствія, ариѳметика ограничивается случаями, которые выходятъ изъ предѣловъ основныхъ таблицъ и для которыхъ поэтому возможно письменное вычисленіе, но то и другое возможно и желательно и въ предѣлахъ основныхъ таблицъ; первоначальные пріемы вычисленія, даваемые опредѣленіями дѣйствій, являются необходимыми только въ предѣлахъ основанія системы.

7. Для пониманія системы счисленія и для приложенія ея къ вычисленіямъ необходимо нѣкоторое знакомство со всѣми четырьмя дѣйствіями.

8. Очень многіе пріемы вычисленій таковы, что требуютъ знанія не только прилагаемаго дѣйствія, но и дѣйствій, за нимъ слѣдующихъ.

29. Распредѣленіе курса. Бо́льшая часть существующихъ учебниковъ не удовлетворяютъ требованіямъ, вытекающимъ изъ этихъ положеній, потому что полное ихъ удовлетвореніе обусловливается нарушеніемъ систематичности въ изложеніи. Впрочемъ, это и не составляетъ существеннаго недостатка въ учебникахъ, такъ какъ учебникъ можетъ быть данъ въ руки дѣтей только послѣ значительной предварительной подготовки ихъ и со стороны чтенія и со стороны ариѳметическихъ познаній. Учебникъ въ начальномъ преподаваніи можетъ служить только хорошимъ средствомъ при повтореніи курса, когда всѣ необходимыя свѣдѣнія и навыки уже пріобрѣтены и остается только привести ихъ въ болѣе или менѣе строгую систему.

Въ начальномъ преподаваніи необходимо, сохраняя въ распредѣленіи курса послѣдовательность, опредѣляемую генетическою связью между дѣйствіями, принять во вниманіе: 1) необходимость подготовить дѣтей къ усвоенію системы счисленія со стороны изученія дѣйствій; 2) различіе между первоначальными пріемами вычисленія, даваемыми опредѣленіями дѣйствій, между пріемами вычисленія въ предѣлахъ основныхъ таблицъ и между пріемами вычисленія внѣ этихъ таблицъ; 3) необходимость постепенности какъ въ изученіи системы счисленія, такъ и въ приложеніи ея къ пріемамъ вычисленія.

Такъ какъ необходимость системы счисленія для выраженія чиселъ, возможность и цѣлесообразность тѣхъ или другихъ пріе-

мовъ вычисленія обусловливаются предѣломъ, въ которомъ заключаются данныя числа и результаты дѣйствій, то распредѣленіе начальнаго курса ариѳметики цѣлыхъ чиселъ должно быть построено на постепенномъ повышеніи предѣла какъ данныхъ чиселъ, такъ и результатовъ дѣйствій, при чемъ предѣлами этими естественно служатъ основаніе системы счисленія и зависящій отъ него предѣлъ, въ которомъ заключаются основныя таблицы ариѳметики.

На основаніи этого положенія ариѳметику цѣлыхъ чиселъ можно распредѣлить на три отдѣла: 1) ариѳметика первоначальныхъ пріемовъ вычисленія непосредственно вытекающихъ изъ опредѣленій дѣйствій, или ариѳметика перваго десятка чиселъ; 2) ариѳметика въ предѣлахъ основныхъ таблицъ, или ариѳметика первой сотни чиселъ; 3) ариѳметика внѣ предѣловъ этихъ таблицъ, или ариѳметика цѣлыхъ чиселъ любой величины.

30. Въ первомъ отдѣлѣ каждое число разсматривается какъ группа одноименныхъ единицъ, каждое число обозначается особымъ словомъ и особымъ знакомъ. Система счисленія въ этомъ предѣлѣ не можетъ оказать никакой помощи въ вычисленіяхъ, и всѣ дѣйствія приводятся къ тѣмъ первоначальнымъ пріемамъ, которые вытекаютъ непосредственно изъ опредѣленій дѣйствій, т.-е. сложеніе и вычитаніе къ счету, умноженіе—къ послѣдовательному сложенію и дѣленіе—къ послѣдовательному вычитанію.

Второй отдѣлъ со стороны системы счисленія требуетъ знакомства съ первой счетной единицей—десяткомъ и перевода десятковъ въ единицы и единицъ въ десятки. Со стороны дѣйствій онъ можетъ быть ограниченъ основательнымъ знакомствомъ съ вопросами каждаго дѣйствія, съ названіями чиселъ, входящихъ въ каждое дѣйствіе и подготовкой къ усвоенію соотношеній между дѣйствіями и ихъ законовъ. Со стороны пріемовъ вычисленія онъ по необходимости долженъ быть ограниченъ пріемами устнаго вычитанія, при чемъ эти пріемы должны быть основаны на десятичномъ составѣ чиселъ, на непосредственномъ смыслѣ вопросовъ, рѣшаемыхъ каждымъ дѣйствіемъ, и на тѣхъ основныхъ пріемахъ вычисленія, которые непосредственно вытекаютъ изъ опредѣленій дѣйствій. Цыфра въ этомъ отдѣлѣ еще не можетъ играть роли орудія въ вычисленіяхъ.

Введеніе десятка, какъ первой счетной единицы, должно быть сдѣлано очень осторожно для того, чтобы дѣти вполнѣ освоились съ этимъ понятіемъ и могли имъ свободно пользоваться при выраженіи чиселъ первой сотни и въ вычисленіяхъ съ ними.

А для этого необходимъ цѣлый рядъ упражненій надъ числами, выражаемыми полными десятками, что и составитъ переходный отдѣлъ отъ ариѳметики перваго десятка къ ариѳметикѣ первой сотни чиселъ. Поэтому составленный нами задачникъ для первой сотни чиселъ распадается на три отдѣла: 1) счетъ единицами отъ 1 до 10-ти; 2) счетъ десятками отъ 10 до 100 и 3) счетъ единицами и десятками отъ 1 до 100; при чемъ подъ словомъ счетъ разумѣется не только простой прямой счетъ, но и всѣ его видоизмѣненія и усложненія, дающія начало четыремъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ.

Что касается ариѳметики цѣлыхъ чиселъ любой величины, то въ содержаніи и распредѣленіи этого отдѣла можно въ бо́льшей или меньшей степени слѣдовать существующимъ руководствамъ. Нѣкоторыя отступленія отъ руководствъ и особенности, которыя представляются необходимыми съ нашей точки зрѣнія, будутъ указаны въ своемъ мѣстѣ.

31. Величина. Измѣреніе величинъ. Подъ величиной разумѣютъ „все то, что можетъ быть больше или меньше“. Безъ сомнѣнія, такое опредѣленіе очень мало говоритъ дѣтямъ; кромѣ того, оно должно быть дополнено условіемъ о равенствѣ величинъ и условіемъ, при которомъ одну величину слѣдуетъ считать больше другой. Въ примѣненіи къ опредѣленному роду величинъ, напр., къ отрѣзкамъ прямой, къ угламъ, къ вѣсу предметовъ, эти понятія устанавливаются очень легко; въ общемъ же видѣ ихъ характеризовать трудно, да и едва ли есть въ томъ надобность. Въ преподаваніи, вмѣсто приведеннаго опредѣленія величины, предпочтительнѣе ограничиться перечисленіемъ разсматриваемыхъ величинъ, сказавъ, что длина, ширина, вѣсъ, время и т. п. наз. величинами, и указавъ, когда величины каждаго рода равны и когда одна считается больше другой. Двѣ величины, про которыя можно сказать, что онѣ равны или что одна больше другой, однородны; въ противномъ случаѣ величины разнородны, и сравненіе ихъ по размѣру немыслимо.

Слово „величина“ часто употребляется въ двухъ смыслахъ. Или подъ этимъ словомъ разумѣютъ извѣстный родъ величинъ, напр., время, вѣсъ и т. п.: тогда для обозначенія опредѣленнаго размѣра величины употребляютъ выраженіе „значеніе величины“. Или подъ словомъ „величина“ понимаютъ безразлично и извѣстный родъ величины и различныя значенія, которыя можетъ получать величина этого рода. Такъ какъ въ каждомъ частномъ случаѣ легко судить, въ какомъ смыслѣ употреблено слово „величина“, то нѣтъ особенной надобности вводить не совсѣмъ удачное выраженіе „значеніе величины“.

Чтобы получить понятіе о какой-либо величинѣ, ее сравни-

ваютъ съ величиной того же рода установленнаго размѣра, которая наз. единицей или мѣрой этого рода величинъ. Такое сравненіе наз. измѣреніемъ величинъ.

Измѣреніе имѣетъ цѣлію выразить размѣръ величины числомъ. Примѣняя счетъ къ измѣренію величинъ, изъ которыхъ бо́льшая часть суть величины непрерывныя (сплошныя), мы каждую измѣряемую величину стараемся представить состоящею изъ отдѣльныхъ равныхъ между собою величинъ (единица измѣренія), которыя затѣмъ можно было бы подвергуть счету подобно тому, какъ мы считаемъ элементы какой-либо группы. Такимъ образомъ измѣреніе слагается изъ спеціальнаго для каждаго рода величинъ процесса, при помощи котораго непрерывная величина разбивается на отдѣльныя равныя между собою величины и изъ счета этихъ величинъ. Для пространственныхъ величинъ (линіи, углы и т. п.) первый процессъ въ основѣ своей состоитъ въ наложеніи одной величины на другую; для другихъ величинъ онъ носитъ иной характеръ и часто требуетъ примѣненія особыхъ приборовъ, напр. вѣсовъ при измѣреніи вѣса предметовъ, часовъ при измѣреніи времени и т. д.

Съ величинами и ихъ измѣреніемъ, очевидно, можно знакомить дѣтей только послѣ того, когда они уже получили понятіе о болѣе элементарной операціи—о счетѣ и когда они уже освоились съ числами и съ дѣйствіями надъ ними.

32. Составныя именованныя и дробныя числа. Когда удается измѣряемую величину разбить на величины, равныя выбранной единицѣ, то въ результатѣ измѣренія получается цѣлое число. Если же этого не удается, то поступаютъ двоякимъ образомъ.

Или прибѣгаютъ къ измѣренію единицами различнаго размѣра, начиная съ измѣренія выбранной единицей и затѣмъ измѣряя остающіеся остатки послѣдовательно единицами меньшаго размѣра; напр., при взвѣшиваніи положивъ на одну чашку вѣсовъ взвѣшиваемый предметъ, на другую чашку кладутъ сперва пудовыя гири, затѣмъ фунтовыя и, наконецъ, гири въ нѣсколько золотниковъ. Понятно, что такое измѣреніе можетъ быть произведено съ точностью до единицы наименьшаго размѣра, употребленной при измѣреніи. Результаты такого измѣренія выражаются составными именованными числами. Вслѣдствіе этого въ ариѳметику вводится особый отдѣлъ: преобразованія и дѣйствія съ составными именованными числами.

Или выбранную единицу дѣлятъ на одинаковыя доли и измѣряютъ величину при помощи этихъ долей. Результатъ такого измѣренія выражается дробью. Съ этой точки зрѣнія дробь есть число, состоящее изъ одинаковыхъ долей единицы. Такое установленіе понятія о дроби требуетъ установленія понятія о долѣ

единицы, а затѣмъ видоизмѣненія всѣхъ понятій о дѣйствіяхъ въ примѣненіи къ числамъ, состоящимъ изъ долей единицы. Вслѣдствіе этого въ бо́льшей части руководствъ ариѳметики признается два способа происхожденія чиселъ—счетъ и измѣреніе, и такимъ образомъ вводится въ ариѳметику нѣкоторая двойственность, которая невыгодно отражается на многихъ ея отдѣлахъ.

33. Формальное ученіе о дробяхъ. Можно избѣжать этой двойственности, если смотрѣть на дроби съ такой же фрмальной точки зрѣнія, съ которой разсматриваются отрицательныя, ирраціональныя и комплексныя числа. При такомъ взглядѣ цѣлое число представляется результатомъ счета, а всѣ дальнѣйшія обобщенія понятія о числѣ (дробь, отрицательное число, ирраціональное число, комплексное число) суть только символы, къ установленію которыхъ мы приходимъ, желая выразить результаты обратныхъ дѣйствій (дѣленія, вычитанія, извлеченія корня) въ тѣхъ случаяхъ, когда эти результаты не могутъ быть выражены числами изъ той же области, къ которой принадлежатъ данныя числа.

Въ этомъ смыслѣ дробь есть символъ частнаго двухъ цѣлыхъ чиселъ, когда дѣленіе не можетъ быть выполнено въ цѣлыхъ числахъ. Придавая такое значеніе дроби, можно все ученіе о дробяхъ построить независимо отъ того, имѣетъ ли этотъ символъ какое-либо конкретное значеніе, или нѣтъ, подобно тому, какъ можно построить ученіе объ отрицательныхъ или комплексныхъ числахъ независимо отъ всякихъ геометрическихъ и иныхъ представленій этихъ чиселъ и дѣйствій съ ними.

34. На каждый изъ такихъ символовъ мы должны наложить условія, выбранныя такъ, чтобы они не противорѣчили частнымъ случаямъ, когда символы обращаются въ цѣлыя числа, и чтобы они позволяли для дѣйствій надъ символами установить опредѣленія, при которыхъ дѣйствія подчиняются тѣмъ же основнымъ законамъ, что и дѣйствія съ цѣлыми числами.

Такъ, разсматривая дробь какъ символъ частнаго и условившись этотъ символъ обозначать въ формѣ $\frac{a}{b}$, гдѣ a и b суть цѣлыя числа, мы прежде всего должны установить, что слѣдуетъ разумѣть подъ равенствомъ этихъ символовъ. Если мы примемъ, что два символа $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$ равны, когда $a.\ b_1 = b.\ a_1$, другими словами, что двѣ дроби равны, если произведеніе числителя первой на знаменателя второй равно произведенію знаменателя первой на числителя второй, то введемъ такое условіе, которое выполняется и тогда, когда каждый изъ этихъ символовъ обращается въ цѣлое число, т.-е. когда дѣленіе

a на b и a_1 на b_1 можетъ быть выполнено въ цѣлыхъ числахъ. Дѣйствительно, если два цѣлыхъ частныхъ равны, то произведеніе перваго дѣлимаго на второго дѣлителя равно произведенію перваго дѣлителя на второе дѣлимое, и наоборотъ: если первое произведеніе равно второму, то частныя равны. Пусть, напр., отъ дѣленія c на d и отъ дѣленія c_1 на d_1 получается одно и то же цѣлое число m; тогда чтобы изъ произведенія $c.d_1$ получить произведеніе $d.c_1$, надо перваго множителя c раздѣлить на m, а второго d_1 умножить на m, а отъ этого произведеніе цѣлыхъ чиселъ не мѣняется. Наоборотъ, если $c.d=d.c_1$ и отъ дѣленія c на d получается цѣлое число m, то и отъ дѣленія c_1 на d_1 получается въ частномъ то же цѣлое число m, потому что если первый множитель c перваго произведенія въ m разъ больше перваго множителя d второго произведенія, то для равенства этихъ произведеній необходимо, чтобы второй множитель c_1 второго произведенія былъ въ m разъ больше множителя d_1 перваго произведенія, т.-е. необходимо, чтобы $c_1 : d_1 = m$. Въ томъ же самомъ убѣдимся, раздѣливъ два равныхъ цѣлыхъ числа $c.d_1$ и $d.c_1$ на одно и то же цѣлое число $d.d_1$.

Равенство дробей, понимаемое въ указанномъ смыслѣ, удовлетворяетъ всѣмъ аксіомамъ, которыя установлены для равенства цѣлыхъ чиселъ; напр., аксіомѣ: двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собою. Пусть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{a_1}{b_1}=\frac{c}{d}$; тогда и $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$. Дѣйствительно, первое равенство означаетъ, что $a.d=b.c$, второе, что $a_1.d=b_1.c$; перемноживъ всѣ эти равенства крестъ на крестъ, получимъ $a.d.b_1.c = b.c.a_1.d$, откуда, выбросивъ одинаковыхъ множителей, будемъ имѣть $ab_1=ba_1$, а это и составляетъ условіе равенства символовъ $\frac{a}{b}$ и $\frac{a_1}{b_1}$.

Изъ этого условія непосредственно слѣдуетъ, что если равны двѣ дроби съ равными знаменателями, то у нихъ и числители равны; если равны двѣ дроби съ равными числителями, то у нихъ и знаменатели равны; если числителя и знаменателя умножить или раздѣлить на одно и то же цѣлое число, то получимъ дробь, равную данной. Такъ, напр., $\frac{a}{b}=\frac{a.m}{b.m}$; дѣйствительно $a.b.m = b.a.m$, такъ какъ эти два произведенія цѣлыхъ чиселъ отличаются другъ отъ друга только порядкомъ множителей.

35. Для сложенія разсматриваемыхъ символовъ можно установить слѣдующее опредѣленіе: сумма дробей съ одинаковыми знаменателями есть дробь, числитель которой есть сумма числителей, а знаменатель—общій знаменатель данныхъ дробей; сумма дробей съ разными знаменателями есть сумма дробей, которыя получатся, когда данныя дроби приведемъ къ общему знаменателю. Изъ этого опредѣленія легко вывести, что сложеніе дробей подчиняется тѣмъ же законамъ, что и сложеніе цѣлыхъ чиселъ. Для умноженія дробей опредѣленіе можетъ быть дано въ такой формѣ: произведеніе дробей есть дробь, числитель которой есть произведеніе числителей, а знаменатель—произведеніе знаменателей данныхъ дробей. Легко видѣть, что при такомъ опредѣленіи умноженіе дробей подчиняется тѣмъ же законамъ (перемѣстительному, сочетательному и распредѣлительному), которымъ подчиняется умноженіе цѣлыхъ чиселъ.

Вычитаніе и дѣленіе могутъ быть опредѣлены какъ обратныя дѣйствія сложенію и умноженію.

36. Приведенныхъ примѣровъ достаточно, чтобы видѣть какимъ путемъ можетъ быть развито ученіе о дробяхъ съ формальной точки зрѣнія. Такой взглядъ на дробь вноситъ въ ученіе о дробяхъ полную ясность и послѣдовательность. Во всякомъ случаѣ передъ другими способами развитія ученія о дробяхъ онъ имѣетъ то преимущество, что устанавливаетъ полное единство въ пониманіи числа и всѣхъ обобщеній этого понятія.

Въ начальномъ преподаваніи формальное развитіе ученія о дробяхъ не примѣнимо по многимъ соображеніямъ. Во-первыхъ, по самому характеру своему, оно едва ли доступно дѣтямъ. Во-вторыхъ, нельзя обойтись въ преподаваніи безъ конкретнаго толкованія дробей какъ въ видахъ разъясненія ученія о дробяхъ къ измѣренію величинъ и къ рѣшенію задачъ.

Вводя же рядомъ съ формальнымъ взглядомъ на дробь конкретное ея толкованіе, мы рискуемъ запутать дѣтей настолько, что они не усвоятъ ни того ни другого. Ознакомленіе учащихся съ формальной точки зрѣнія на дробь должно быть отнесено къ тому времени, когда они уже вполнѣ овладѣютъ конкретнымъ пониманіемъ дроби, т.-е. къ повторительному курсу ариѳметики въ одномъ изъ старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній.

37. Распредѣленіе преобразованій и дѣйствій съ составными именованными числами. Какъ уже выше замѣчено, понятіе о величинахъ и ихъ измѣреніи можетъ быть дано только послѣ того, какъ дѣти до нѣкоторой степени овладѣютъ понятіемъ о числѣ и о дѣйствіяхъ съ числами. Пріемы вычисленія съ составными именованными числами содержатъ въ себѣ гораздо болѣе произвольнаго сравнительно съ пріемами вычисленія надъ отвлеченными числами.

Хотя для дѣйствій съ этими числами и установлены правила,

въ которыхъ единицы различныхъ наименованій играютъ такую же роль, какую въ дѣйствіяхъ съ отвлеченными числами играютъ единицы различныхъ разрядовъ, но эти пріемы вычисленія могутъ быть обойдены приведеніемъ составныхъ именованныхъ чиселъ въ простыя именованныя числа при помощи раздробленія и превращенія. Послѣдній пріемъ представляетъ значительныя выгоды, когда вычисляющій владѣетъ дробными числами; но и въ цѣлыхъ числахъ этотъ пріемъ во многихъ случаяхъ требуется самымъ характеромъ мѣръ, въ которыхъ выражено число; напр., всѣ числа, выраженныя въ мѣсяцахъ и суткахъ, необходимо для вычисленій раздроблять въ сутки, такъ какъ единичное отношеніе между мѣсяцемъ и сутками не постоянно. Во всякомъ случаѣ правила дѣйствій съ составными именованными числами не могутъ быть мотивированы съ той ясностью и точностью, какія возможны въ дѣйствіяхъ съ отвлеченными числами. Самые пріемы вычисленія съ составными именованными числами усваиваются дѣтьми довольно легко, но за то не имѣютъ такого образовательнаго вліянія, какъ дѣйствія съ отвлеченными числами. Отдѣлъ этотъ значительно сократится, когда у насъ будетъ введена метрическая система мѣръ. При настоящемъ же положеніи дѣла весьма желательно затрачивать на него возможно меньше времени, которое съ бо́льшей пользой можетъ быть посвящено другимъ отдѣламъ. напр. дробнымъ числамъ.

Въ этихъ видахъ можно воспользоваться мыслью, проведенною В. П. Шереметевскимъ въ одномъ изъ засѣданій комиссіи преподавателей математики при Учебномъ отдѣлѣ О. Р. Т. З. въ Москвѣ. Г. Шереметевскій предлагаетъ не дѣлать изъ дѣйствій съ составными именованными числами особаго отдѣла, а пріемы вычисленій съ ними указывать въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ курса отвлеченныхъ чиселъ. Не говоря уже о томъ, что предлагаемое распредѣленіе значительно сокращаетъ время, затрачиваемое обыкновенно на составныя именованныя числа, оно, кромѣ того, позволяетъ ввести бо́льшее разнообразіе и содержательность въ практическія упражненія во время курса отвлеченныхъ чиселъ.

Первое ознакомленіе дѣтей съ русскими мѣрами можетъ быть сдѣлано, когда они будутъ изучать счетъ десятками. Здѣсь умѣстно познакомить дѣтей съ такими мѣрами, единичное отношеніе между которыми выражается полными десятками. Таковы пудъ и фунтъ, бочка и ведро. Въ слѣдующемъ отдѣлѣ (счетъ единицами и десятками) слѣдуетъ познакомить со всѣми русскими мѣрами, единичное отношеніе которыхъ не превышаетъ 100. Раздробленіе и превращеніе этихъ мѣръ представляютъ прекрасныя упражненія въ умноженіи и дѣленіи. Дѣйствія съ составными именованными числами въ этомъ отдѣлѣ должны производиться не по правиламъ, а какъ удобнѣе въ каждомъ частномъ случаѣ. Полное ознакомленіе съ русской системой мѣръ можетъ быть закончено вмѣстѣ съ переходомъ къ счету до 1000. Метрическую систему мѣръ, знакомство съ которой въ настоящее время обязательно во всякой школѣ, умѣстнѣе всего пріурочить къ изученію нумераціи. Пріемы письменнаго вычисленія съ составными именованными числами въ каждомъ дѣйствіи должны слѣдовать за соотвѣтствующими пріемами письменнаго вычисленія съ отвлеченными числами. При такомъ порядкѣ дѣти постепенно и незамѣтно для самихъ себя ознакомятся вполнѣ съ раздробленіемъ и превращеніемъ именованныхъ чиселъ.

Ознакомленіе съ мѣрами каждаго рода должно дѣлаться наглядно, при чемъ дѣти должны сами производить измѣренія. Для этого каждая школа должна быть снабжена образцами мѣръ и инструментовъ, при помощи которыхъ производится измѣреніе, а именно: образцами линейныхъ мѣръ русскихъ и метрическихъ, вѣсами съ разновѣсками русскими и метрическими, мѣрами ёмкости и т. д.

38. Распредѣленіе дѣйствій съ дробными числами. Какъ уже выше сказано, дробь въ начальномъ преподаваніи можетъ быть разсматриваема только какъ совокупность одинаковыхъ долей единицы. Каждое дѣйствіе съ дробями сводится къ одному или нѣсколькимъ дѣйствіямъ надъ цѣлыми числами (членами дроби). Поэтому дроби могутъ вводиться въ преподаваніе тогда, когда дѣтямъ выяснено понятіе о величинѣ и ея измѣреніи и когда дѣти уже достаточно овладѣли механизмомъ вычисленія съ цѣлыми числами. При этомъ, разъ выяснено дѣтямъ, какимъ путемъ и къ какимъ дѣйствіямъ надъ членами дроби сводится то или другое дѣйствіе, величина членовъ дроби не можетъ уже затруднять дѣтей. Быстрота и вѣрность вычисленій съ дробями обусловливается не величиной ея членовъ, а яснымъ пониманіемъ дѣйствій съ дробями и умѣньемъ вычислять съ цѣлыми числами. Поэтому всѣ курсы дробей, основанные на постепенномъ повышеніи величины членовъ дроби, нельзя признать построенными правильно.

Болѣе существенное значеніе въ распредѣленіи курса дробей имѣетъ бо́льшая или меньшая трудность сведенія дѣйствія надъ дробью къ дѣйствіямъ надъ цѣлыми числами, а равно и то обстоятельство, къ одному или къ нѣсколькимъ дѣйствіямъ съ цѣлыми числами приводится разсматриваемое дѣйствіе надъ дробью. Въ этомъ отношеніи всѣ дѣйствія и преобразованія съ дробями можно подраздѣлить на два рода — *простыя дѣйствія и преобразованія* и *сложныя дѣйствія и преобразованія*, отнеся къ первымъ тѣ изъ нихъ, которыя при-

водятся къ одному дѣйствію съ цѣлыми числами, а ко вторымъ—тѣ, которыя приводятся къ послѣдовательному ряду такихъ дѣйствій. Къ простымъ дѣйствіямъ и преобразованіямъ могутъ быть отнесены: исключеніе изъ неправильной дроби цѣлаго числа и обратное преобразованіе, сложеніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями, умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число; къ сложнымъ—сокращеніе и приведеніе дробей къ одному знаменателю, сложеніе и вычитаніе дробей съ разными знаменателями, умноженіе и дѣленіе на дробь. Простыя дѣйствія и преобразованія съ дробями сравнительно легко усваиваются дѣтьми, чему много способствуетъ аналогія большей части изъ нихъ съ преобразованіями и дѣйствіями надъ именованными числами. Поэтому преподаваніе ариѳметики дробей надо начинать съ простыхъ дѣйствій и преобразованій надъ дробями и отъ нихъ постепенно переходить къ сложнымъ дѣйствіямъ и преобразованіямъ.

Сложныя преобразованія и сложныя дѣйствія съ дробями для выполненія своего требуютъ приложенія, такъ называемой статьи о дѣлимости цѣлыхъ чиселъ (признаки дѣлимости, общій наибольшій дѣлитель, первоначальныя и составныя числа, наименьшее кратное). Строгая постановка всѣхъ этихъ ученій въ курсѣ начальныхъ и городскихъ училищъ и въ первыхъ четырехъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній невозможна, потому что требуетъ отъ дѣтей такого математическаго развитія, которымъ они не могутъ обладать въ возрастѣ отъ 10-ти до 12—14 лѣтъ. Слѣдуетъ прибавить, что особый характеръ доказательствъ, свойственный многимъ изъ упомянутыхъ ученій, дѣлаетъ усвоеніе ихъ довольно затруднительнымъ даже и для болѣе взрослыхъ учениковъ. Ученія эти скорѣе составляютъ часть теоріи чиселъ или, по крайней мѣрѣ, введеніе въ эту науку. Такъ какъ съ одной стороны приходится пользоваться многими положеніями изъ этихъ ученій, а съ другой стороны нѣтъ возможности провести ихъ вполнѣ строго, то статья о дѣлимости цѣлыхъ чиселъ не можетъ имѣть самостоятельнаго значенія въ начальномъ преподаваніи. При изложеніи ея приходится не столько доказывать, сколько объяснять. А потому усвоеніе ея всецѣло зависитъ отъ удачнаго подбора примѣровъ и упражненій.

Всѣ положенія изъ статьи о дѣлимости цѣлыхъ чиселъ должно давать дѣтямъ по мѣрѣ того, какъ у нихъ будетъ накопляться матеріалъ для приложенія этихъ положеній къ вычисленіямъ надъ дробями; иначе эти положенія явятся мертвымъ капиталомъ, при томъ недостаточно обоснованнымъ.

Ознакомленіе дѣтей съ дробями нежелательно откладывать до окончанія курса ариѳметики цѣлыхъ чиселъ по многимъ оно-

вательнымъ соображеніямъ. На первое мѣсто слѣдуетъ поставить то нѣсколько печальное обстоятельство, что вообще въ нашихъ школахъ, начиная съ начальной, значительный процентъ учащихся не доходитъ до конца курса. Такія дѣти могутъ выйти изъ школы безъ всякаго понятія о дробяхъ, между тѣмъ какъ запросы обыденной жизни предъявляютъ въ этомъ отношеніи настоятельную необходимость. Затѣмъ, сама ариѳметика цѣлыхъ чиселъ не можетъ обойтись безъ нѣкоторыхъ понятій о доляхъ числа, а слѣд. и о доляхъ единицы. Стоитъ припомнить только, что дѣленіе на цѣлое число рѣшаетъ вопросъ объ опредѣленіи части числа. Поэтому въ послѣднее время установился обычай давать нѣкоторыя свѣдѣнія о дробяхъ по окончаніи курса ариѳметики первой сотни чиселъ. Этотъ курсъ можетъ быть ограниченъ простѣйшими преобразованіями и дѣйствіями съ дробями, и проходится послѣ усвоенія дѣтьми дѣйствій съ цѣлыми числами въ предѣлѣ первой сотни чиселъ. Тогда второй курсъ дробей потребуетъ очень немногихъ дополненій относительно простыхъ дѣйствій съ дробями, послѣ чего для сокращенія дробей и приведенія ихъ къ одному знаменателю придется ввести, такъ называемый, отдѣлъ о дѣлимости цѣлыхъ чиселъ и затѣмъ уже обратиться къ сложнымъ дѣйствіямъ съ дробями.

39. Прежде, чѣмъ приступить къ подробной разработкѣ предлагаемаго курса, слѣдовало бы сдѣлать обзоръ существующихъ у насъ руководствъ къ преподаванію ариѳметики, но въ виду ихъ многочисленности (методика г. Евтушевскаго, методика г. Гольденберга, совмѣстная методика гг. Шохоръ-Троцкаго и Житкова, двѣ отдѣльныя методики г. Шохоръ-Троцкаго, отдѣльная методика г. Житкова, руководство г. Воленса, руководство г. Паульсона, руководство г. Латышева, руководство г. Лубенца и многія другія) такой обзоръ занялъ бы слишкомъ много мѣста. Поэтому мы ограничимся указаніемъ на три руководства, съ которыми совѣтовали бы ознакомиться нашимъ читателямъ. Это методики г. Евтушевскаго, въ которой можно познакомиться съ методомъ Грубе, методика г. Гольденберга, гдѣ читатели найдутъ основательный разборъ этого метода, и руководство г. Латышева, въ которомъ можно найти много полезныхъ указаній относительно веденія всего курса.

I.

Задачи и другія упражненія на урокахъ ариѳметики.

40. Прежде, чѣмъ перейти къ подробной разработкѣ намѣченной программы, разсмотримъ упражненія, которыя изо дня въ день повторяются на урокахъ ариѳметики. Сюда относится рѣшеніе задачъ и вычисленіе примѣровъ. При правильной постановкѣ начальнаго преподаванія упражненія эти поглощаютъ бо́льшую часть времени, отводимаго на преподаваніе ариѳметики, и только меньшая его часть посвящается разъясненію ариѳметическихъ положеній и правилъ. Необходимо, чтобы „теорія не излагалась ученикамъ и не предшествовала практическимъ упражненіямъ, а чтобы, наоборотъ, теорія постепенно вырабатывалась учениками и представляла собою рядъ выводовъ изъ практическихъ упражненій въ вычисленіяхъ и рѣшеніи задачъ“, совершенно справедливо замѣчаетъ г. Латышевъ. Для полнаго усвоенія теоріи необходимо, чтобы ученикъ самостоятельно примѣнялъ ее на практикѣ. Какъ бы ни было хорошо понято учениками объясненіе какого-либо ариѳметическаго положенія, при переходѣ къ отдѣльнымъ частнымъ случаямъ дѣти всегда встрѣчаютъ затрудненія; надо много разнообразныхъ примѣровъ, чтобы дать возможность учащимся выработать умѣнье прилагать свое знаніе къ дѣлу и побѣждать встрѣчающіяся трудности. Такимъ образомъ, практическія упражненія должны и предшествовать каждому новому шагу въ курсѣ, и непосредственно слѣдовать за нимъ.

41. Задачи. Задачей наз. всякій вопросъ, для рѣшенія котораго по двумъ или нѣсколькимъ числамъ требуется найти новое число. Извѣстныя числа въ задачѣ наз. данными; число, которое ищется, наз. искомымъ. Въ задачѣ поясняется значеніе всѣхъ данныхъ чиселъ; такія поясненія наз. условіями задачи. Если условія состоятъ въ прямомъ указаніи дѣйствій, которыя надо произвести надъ данными числами для полученія искомаго, то такую задачу мы будемъ называть примѣромъ на вычисленіе; подъ словомъ же „задачи“ будемъ разумѣть только такіе вопросы, гдѣ условія не указываютъ прямо дѣйствій, которыя надо произвести надъ данными числами для опредѣленія искомаго, и гдѣ, слѣд., дѣйствія тѣмъ или инымъ путемъ должны быть найдены рѣшающимъ на основаніи условій вопроса. Такъ, вопросъ

1) Найти частное отъ дѣленія на 5 суммы чиселъ 46 и 24?

есть примѣръ на вычисленіе, потому что въ немъ прямо указаны

дѣйствія, которыя надо произвести надъ данными числами для опредѣленія искомаго, а вопросъ

2) Два поѣзда идутъ навстрѣчу другъ другу; одинъ проходитъ 30 верстъ въ часъ, другой 40 верстъ. На сколько верстъ они сближаются въ часъ?

есть задача, потому что въ немъ не указано, какое дѣйствіе надо произвести надъ данными числами для полученія искомаго. Это дѣйствіе опредѣляется на основаніи условія, которое указываетъ, что поѣзда ѣдутъ навстрѣчу другъ другу, изъ котораго слѣдуетъ, что для рѣшенія задачи надо числа 30 и 40 сложить. Если бы вмѣсто этого условія было сказано, что поѣзда идутъ другъ за другомъ и что первый идетъ впереди второго, то для рѣшенія задачи слѣдовало бы изъ 40 вычесть 30. Условія и данныя числа въ задачѣ часто вмѣстѣ называютъ данными задачи.

Приведенная задача рѣшается однимъ дѣйствіемъ; такія задачи принято называть простыми. Задача, требующая для своего рѣшенія болѣе одного дѣйствія, наз. сложной. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что съ теченіемъ курса одну и ту же задачу иногда приходится разсматривать то какъ сложную, то какъ простую, потому что почти каждое ариѳметическое дѣйствіе первоначально является какъ сочетаніе двухъ или нѣсколькихъ изъ предшествующихъ дѣйствій. Такъ, всякая задача на умноженіе цѣлыхъ чиселъ можетъ быть рѣшена рядомъ послѣдовательныхъ сложеній; всякая задача, требующая умноженія или дѣленія на дробь, можетъ быть рѣшаема двумя дѣйствіями — умноженіемъ и дѣленіемъ на цѣлое число.

42. Простыя задачи. Чтобъ рѣшить простую задачу, надо выбрать дѣйствіе, которымъ она рѣшается, и выполнить это дѣйствіе. Чтобы правильно выбрать дѣйствіе, надо частный вопросъ задачи подвести подъ одинъ изъ общихъ вопросовъ, которые характеризуютъ каждое ариѳметическое дѣйствіе. Такимъ образомъ, на рѣшеніи простыхъ задачъ дѣти, помимо производства дѣйствій, упражняются въ чисто логической дѣятельности—подведеніи частныхъ случаевъ подъ общій. Кромѣ того, только на рѣшеніи простыхъ задачъ можно вполнѣ уяснить дѣтямъ необходимость и смыслъ дѣйствій надъ числами, познакомить ихъ съ различными случаями примѣненія каждаго дѣйствія и съ различными способами выраженія одного и того же ариѳметическаго требованія. Никакія опредѣленія, разъясненія и правила въ этомъ отношеніи не могутъ замѣнить хорошо и послѣдовательно подобранныхъ простыхъ задачъ.

Вопросы, которые рѣшаются каждымъ ариѳметическимъ дѣйствіемъ, могутъ быть формулированы въ слѣдующемъ видѣ.

Понятіе о сложеніи заключаетъ въ себѣ понятіе о цѣломъ (сумма) и его частяхъ (слагаемыя); поэтому сложеніемъ рѣшаются вопросы объ опредѣленіи цѣлаго, когда даны всѣ его части. Такова, напр., задача:

3) Работникъ, получивъ мѣсячное жалованье, отослалъ изъ него 9 руб. своей семьѣ, $5^1/_2$ руб. истратилъ на харчи, $3^3/_4$ руб. — на квартиру, и у него осталось еще $4^1/_4$ руб. Сколько жалованья получалъ онъ въ мѣсяцъ?

Рѣшеніе. $9+5^1/_2+3^3/_4+4^1/_4=22^1/_2$.

Здѣсь искомое жалованье работника есть цѣлое, а отосланныя семьѣ, истраченныя на харчи, на квартиру и оставшіяся у работника деньги—части этого цѣлаго.

Затѣмъ, прибавить значитъ увеличить данное число на нѣсколько единицъ; поэтому другой вопросъ сложенія можетъ быть формулированъ какъ вопросъ объ увеличеніи числа на нѣсколько единицъ, или нѣсколькими единицами. Такова задача:

4) Дѣвочкѣ $7^1/_2$ лѣтъ, а братъ старше ея $4^1/_2$ годами; сколько лѣтъ брату?

Рѣшеніе. $7^1/_2+4^1/_2=12$.

Здѣсь братъ старше сестры на $4^1/_2$ года, т.-е. число его лѣтъ на $4^1/_2$ единицы больше числа лѣтъ сестры.

Вычитаніе есть дѣйствіе, обратное сложенію, т.-е. дѣйствіе, гдѣ по суммѣ (уменьшаемое) и одному слагаемому (вычитаемое) опредѣляется другое слагаемое (разность). Такъ какъ искомое слагаемое можно разсматривать, какъ часть суммы, то вычитаніемъ рышаются вопросы, гдѣ по цѣлому и одной его части требуется опредѣлить другую его часть. Такова задача:

5) Изъ куска сукна въ $25^3/_4$ арш. продано $18^1/_2$ арш.; сколько аршинъ осталось?

Рѣшеніе. $25^3/_4-18^1/_2=7^1/_4$.

Здѣсь $25^3/_4$ арш. выражаетъ величину цѣлаго куска, $18^1/_2$ арш.—величину проданной части куска, а пщется оставшаяся часть.

Затѣмъ, искомое слагаемое можетъ выражать, къ какому числу было прибавлено нѣсколько единицъ для полученія суммы; поэтому второй вопросъ вычитанія можетъ быть формулированъ такъ: опредѣлить число, которое меньше даннаго на нѣсколько единицъ.

Такова задача:

6) Карандашъ стоитъ 9 коп., а ручка для пера на $6^1/_2$ коп. дешевле; что стоитъ ручка?

Рѣшеніе. $9-6^1/_2=2^1/_2$.

Здѣсь требуется опредѣлить число, которое меньше 9 на $6^1/_2$ единицъ, или, какъ говорятъ, требуется уменьшить 9 на $6^1/_2$ единицъ.

Наконецъ, искомое слагамое можетъ выражать, сколько единицъ было прибавлено къ данному слагаемому (вычитаемому) для полученія суммы (уменьшаемаго), т.-е. на сколько единицъ уменьшаемое больше вычитаемаго; поэтому вопросъ вычитанія можетъ быть формулированъ, какъ вопросъ о сравненіи двухъ чиселъ, при чемъ опредѣляется, на сколько единицъ одно число больше другого.

7) Почтовый поѣздъ проходитъ въ часъ $40^1/_2$ верстъ, а пассажирскій—$31^3/_4$ версты; на сколько верстъ почтовый поѣздъ идетъ скорѣе?

Рѣшеніе. $40^1/_2-31^3/_4=8^3/_4$.

При цѣломъ множителѣ произведеніе есть сумма равныхъ слагаемыхъ, множимое—одно изъ слагаемыхъ, множитель показываетъ, сколько слагаемыхъ, т.-е. произведеніе есть цѣлое, всѣ части котораго равны; поэтому умноженіе рѣшаетъ вопросы, въ которыхъ надо составить цѣлое изъ равныхъ частей. Такова задача:

8) Что стоитъ ящикъ чаю, если въ немъ 8 фунтовъ чаю и фунтъ стоитъ $2^1/_4$ руб.?

Рѣшеніе. $2^1/_4\times 8=18$.

Здѣсь стоимость ящика (цѣлое) надо составить изъ цѣны перваго фунта, изъ цѣны второго фунта и т. д. до цѣны 8-го фунта включительно, а такъ какъ цѣна каждаго фунта равна $2^1/_4$ руб., то надо $2^1/_4$ сложить съ $2^1/_4$, еще съ $2^1/_4$ и т. д., т.-е. $2^1/_4$ умножить на 8.

Когда множитель есть дробь, то умноженіе рѣшаетъ вопросъ объ опредѣленіи такой части множимаго, какую указываетъ множитель. Такова задача:

9) Что стоятъ $^5/_8$ фунта чаю, если фунтъ его стоитъ 2,4 рубля?

Рѣшеніе. $2{,}4\times{}^5/_8=1{,}5$.

Здѣсь $^5/_8$ фунта чаю стоятъ $^3/_8$ цѣны одного фунта, т.-е. $^3/_8$ отъ 2,4 руб.

Умножая какое-либо число на цѣлаго множителя, мы множимое увеличиваемъ во столько разъ, сколько единицъ во множителѣ. Это понятіе объ увеличеніи числа въ цѣлое число разъ

распространяютъ на умноженіе и въ томъ случаѣ, когда множитель есть смѣшанное число. Такъ, умножая какое-либо число на $4\frac{3}{8}$, говорятъ, что его увеличиваютъ въ $4\frac{3}{8}$ раза, понимая подъ этимъ, что множимое берется слагаемымъ 4 раза, и къ этой суммѣ присоединяется еще $\frac{3}{8}$ множимаго. Поэтому умноженіе рѣшаетъ вопросъ объ увеличеніи числа въ нѣсколько разъ. Такова задача:

10) Въ одномъ колоколѣ $9\frac{3}{5}$ пуда, а другой въ $4\frac{3}{8}$ разъ тяжеле; сколько вѣситъ второй колоколъ?

Рѣшеніе. $9\frac{3}{5} \times 4\frac{3}{8} = 42$.

Если бы то же самое дѣйствіе требовалось для рѣшенія задачи:

11) Отъ своей деревни до станціи желѣзной дороги помѣщикъ доѣхалъ въ $4\frac{3}{8}$ часа, проѣзжая по $9\frac{3}{5}$ версты въ часъ. Сколько верстъ отъ деревни помѣщика до станціи?

то удобнѣе разсудить такъ: чтобы узнать, сколько верстъ помѣщикъ проѣхалъ въ 4 часа, надо $9\frac{3}{5}$ взять слагаемымъ 4 раза, т.-е. $9\frac{3}{5}$ умножить на 4, а чтобы узнать, сколько онъ проѣхалъ въ остальныя $\frac{3}{8}$ часа, надо взять $\frac{3}{8}$ отъ $9\frac{3}{5}$, т.-е. $9\frac{3}{5}$ умножить на $\frac{3}{8}$; слѣд. для рѣшенія задачи надо $9\frac{3}{5}$ умножить на $4\frac{3}{8}$.

Дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію, т.-е. дѣйствіе, въ которомъ по произведенію (дѣлимое) и одному производителю (дѣлитель) ищется другой производитель (частное). При дѣленіи на цѣлое число, искомый производитель можетъ быть множимымъ; тогда данное произведеніе есть сумма, данный производитель указываетъ, изъ скольких равныхъ слагаемыхъ состоитъ эта сумма, а искомый производитель есть одно изъ этихъ слагаемыхъ. Поэтому первый вопросъ дѣленія можетъ быть формулированъ какъ опредѣленіе одной изъ равныхъ частей цѣлаго. Такова задача:

12) Во сколько минутъ поѣздъ желѣзной дороги проходитъ 1 версту, если станцію въ 24 версты онъ проходитъ въ 27,2 минуты?

Рѣшеніе. $27{,}2 : 24 = 1\frac{2}{15}$.

Здѣсь 27,2 минуты надо распредѣлить поровну между 24 верстами, т.-е. найти 24-ю часть 27,2.

Когда при дѣленіи на дробь, искомый производитель есть множимое, то данное произведеніе представляетъ такую часть этого множимаго, какую указываетъ дѣлитель, ибо оно получается отъ умноженія искомаго множимаго на этого дѣлителя; искомое же множимое есть цѣлое; слѣд. въ этомъ случаѣ дѣленіе рѣшаетъ вопросъ объ опредѣленіи цѣлаго по его части, при

чемъ дѣлитель указываетъ, какая часть цѣлаго извѣстна, а дѣлимое—чему она равна. Такова задача:

13) Пройдя $\frac{7}{18}$ всего разстоянія между двумя городами, поѣздъ отошелъ отъ перваго города на 126 верстъ; сколько верстъ между этими городами?

Рѣшеніе. $126 : \frac{7}{18} = 324$.

Когда искомый производитель есть множитель, то вопросъ дѣленія получаетъ различный смыслъ въ зависимости отъ того, будетъ ли частное цѣлое, правильная дробь, или смѣшанное число. Если частное (искомый множитель) есть цѣлое число, то дѣлимое (данное произведеніе) есть сумма, дѣлитель (данный множитель) представляетъ величину каждаго слагаемаго, а ищется, изъ скольких такихъ слагаемыхъ состоитъ данная сумма. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ дѣленіе рѣшаетъ вопросъ о томъ, сколько разъ одно число (дѣлитель) содержится въ другомъ (дѣлимомъ), или во сколько разъ одно число (дѣлимое) больше другого числа (дѣлителя). Таковы задачи:

14) На заводѣ приготовили 24 пуда сахару головами въ $\frac{3}{5}$ пуда каждая; сколько головъ сахару приготовили?

Рѣшеніе. $24 : \frac{3}{5} = 40$.

15) Поѣздъ желѣзной дороги идетъ отъ одной станціи до другой $\frac{9}{16}$ час., употребляя на каждую версту по $\frac{3}{64}$ часа; сколько верстъ между этими станціями?

Рѣшеніе. $\frac{9}{16} : \frac{3}{64} = 12$.

Если частное (искомый множитель) есть правильная дробь, то дѣленіемъ мы узнаемъ, на какую дробь надо умножить дѣлителя (данное множимое), чтобы получить дѣлимое (данное произведеніе), другими словами: какую часть надо взять отъ дѣлителя, чтобы получить дѣлимое. Поэтому дѣленіе въ этомъ случаѣ рѣшаетъ вопросъ о томъ, какую часть одно число (дѣлимое) составляетъ отъ другого (дѣлителя).
Таковы задачи:

16) Поѣздъ желѣзной дороги въ 1 часъ проходитъ 32 версты; во сколько времени пройдетъ онъ станцію въ 24 версты?

Рѣшеніе. $24 : 32 = \frac{3}{4}$.

17) Аршинъ бархату стоитъ 6 руб., сколько бархату можно купить на $\frac{3}{4}$ руб.?

Рѣшеніе. $\frac{3}{4} : 6 = \frac{1}{8}$.

Въ первой задачѣ разсужденіе ведется слѣдующимъ образомъ: 24 версты поѣздъ пройдетъ не въ цѣлый часъ, а въ такую часть часа, какую 24 составляютъ отъ 32; во второй: на $\frac{3}{4}$ руб. можно купить такую часть аршина, какую $\frac{3}{4}$ составляютъ отъ 6.

Когда частное есть смѣшанное число, то дѣлимое (данное произведеніе) есть сумма нѣсколькихъ дѣлителей (данное множимое) и нѣкоторой его части, и слѣд. дѣленіемъ рѣшается вопросъ, сколько разъ надо взять дѣлитель слагаемымъ и какую часть дѣлителя надо прибавить къ этой суммѣ, чтобы получить дѣлимое. На этотъ случай распространяютъ выраженіе: сколько разъ одно число (дѣлитель) содержится въ другомъ (дѣлимомъ) или во сколько разъ одно число (дѣлимое) больше другого (дѣлителя).
Такова задача:

18) Кубическій дюймъ воды и $^{12}/_{251}$ куб. дюйма серебра вѣсятъ $^{1}/_{25}$ фунта; во сколько разъ серебро тяжелѣе воды?

Рѣшеніе. $1 : \frac{12}{251} = 20^{11}/_{12}$.

Для приведенія этой задачи къ дѣленію разсужденіе слѣдуетъ составить слѣдующимъ образомъ: если 1 куб. дюймъ воды и $^{12}/_{251}$ куб. дюйма серебра вѣсятъ одинаково, то серебро тяжелѣе воды во столько разъ, во сколько 1 больше $^{12}/_{251}$.

Сообразно съ этимъ, значеніе дѣленія на цѣлое число, въ смыслѣ опредѣленія части дѣлимаго, переносятъ на смѣшаннаго дѣлителя и говорятъ, что раздѣлить, напр. на $16^{2}/_{3}$ значитъ уменьшить дѣлимое въ $16^{2}/_{3}$ раза. А потому ко всѣмъ перечисленнымъ вопросамъ дѣленія слѣдуетъ присоединить еще вопросъ объ уменьшеніи числа въ нѣсколько разъ, равносильный вопросу объ опредѣленіи части дѣлимаго при цѣломъ дѣлителѣ.
Такова задача:

19) Чай дороже сахара въ $12^{1}/_{2}$ разъ; что стоитъ фунтъ сахару, если фунтъ чаю стоитъ 2 р. 25 коп.?

Рѣшеніе. $225 : 12^{1}/_{2} = 18$.

43. Сложныя задачи. Каждая сложная задача при рѣшеніи расчленяется на простыя задачи.

Такъ, сложная задача

20) Купецъ купилъ нѣсколько ящиковъ товару по 4 рубля за ящикъ. Въ 8 ящикахъ товаръ испортился и не пошелъ въ продажу, а остальной товаръ купецъ продалъ по 6 руб. за ящикъ. Сколько ящиковъ купецъ купилъ, если отъ всего этого оборота не получилъ ни прибыли, ни убытка?

можетъ быть расчленена на слѣдующія четыре простыхъ задачи:

1. Зная, что каждый ящикъ обошелся купцу въ 4 руб. и что въ 8 ящикахъ товаръ испортился, можемъ узнать, сколько убытку понесъ купецъ отъ этихъ ящиковъ, для чего 4 руб. умножимъ на 8 и получимъ 32 руб.

2. Этотъ убытокъ купецъ покрылъ прибылью на остальныхъ ящикахъ, которые сталъ продавать по 6 руб., тогда какъ ему каждый ящикъ обошелся только въ 4 руб. Узнаемъ, сколько прибыли получилъ купецъ на каждомъ изъ остальныхъ ящиковъ; для этого надо изъ 6 вычесть 4; получимъ 2.

3. Каждый изъ остальныхъ ящиковъ при продажѣ давалъ купцу 2 рубля прибыли, а всего прибыли получено на этихъ ящикахъ 32 руб., такъ какъ ею купецъ покрылъ весь убытокъ на 8 ящикахъ. Узнаемъ, сколько ящиковъ было продано; для этого надо 32 раздѣлить на 2; получимъ 16.

4. Продано 16 ящиковъ, да въ 8 ящикахъ товаръ испортился; по этимъ даннымъ можемъ наконецъ рѣшить и вопросъ предложенной задачи—сколько ящиковъ было куплено для этого надо 16 сложить съ 8-ю; получимъ 24.

Такимъ образомъ, чтобы рѣшить сложную задачу, надо расчленить ее на простыя задачи и рѣшить эти простыя задачи. Расчлененіе сложной задачи на простыя съ указаніемъ послѣдовательности, въ которой онѣ должны рѣшаться, наз. составленіемъ плана рѣшенія задачи, а рѣшеніе простыхъ задачъ—рѣшеніемъ задачи.

44. Синтетическій пріемъ рѣшенія задачъ. Для рѣшенія сложныхъ задачъ (собственно для составленія плана рѣшенія) существуютъ два пріема: синтетическій и аналитическій. Расчленяя приведенную сложную задачу на простыя, мы шли отъ данныхъ задачи. Мы выбрали изъ сложной задачи два данныхъ (ящикъ обошелся купцу въ 4 рубля, товаръ испортился въ 8 ящикахъ) и по нимъ поставили вопросъ (сколько убытку понесъ купецъ на 8 ящикахъ), который рѣшается однимъ дѣйствіемъ; затѣмъ опять взяли два данныхъ изъ сложной задачи и по нимъ поставили новый вопросъ; потомъ взяли два найденныя въ ранѣе составленныхъ простыхъ задачахъ числа и по нимъ поставили вопросъ; наконецъ взяли одно найденное число (16 ящиковъ уцѣлѣло) и одно данное сложной задачи (въ 8 ящикахъ товаръ испортился) и при ихъ помощи намъ удалось поставить и рѣшить тотъ самый вопросъ, который предложенъ въ сложной задачѣ. Такой пріемъ рѣшенія задачъ наз. синтетическимъ. Слѣд., въ синтетическомъ пріемѣ рѣшенія берутся данныя сложной задачи или данныя, найденныя въ ранѣе составленныхъ простыхъ задачахъ, и къ этимъ даннымъ подбираются вопросы. Составлять и рѣшать простыя задачи приходится до тѣхъ поръ, пока не удастся поставить вопросъ, предложенный въ сложной задачѣ. Въ синтезѣ мы постоянно соображаемъ, что намъ извѣстно изъ сложной задачи и изъ простыхъ задачъ, ранѣе составленныхъ и рѣ-

шенныхъ, и что мы можемъ узнать при этихъ данныхъ. Синтетическое рѣшеніе приведенной задачи можно представить въ слѣдующей схемѣ:

Зная:	Можно узнать:	Рѣшеніе:
1. Что каждый ящикъ обошелся купцу въ 4 руб. 2. Что товаръ испортился въ 8 ящикахъ.	Сколько руб. убытку купецъ понесъ на 8 ящикахъ.	4×8=32
1. Что каждый ящикъ обошелся купцу въ 4 руб. 2. Что продалъ онъ каждый изъ остальныхъ ящиковъ за 6 руб.	Сколько прибыли получалъ купецъ на каждомъ изъ остальныхъ ящикахъ.	6—4=2
1. Что всего прибыли купцу надо было получить на проданныхъ ящикахъ 32 руб. 2. Что каждый проданный ящикъ давалъ 2 руб. прибыли.	Сколько ящиковъ было продано.	32 : 2=16
1. Что продано 16 ящиковъ. 2. Что 8 ящиковъ не пошли въ продажу.	Сколько ящиковъ было куплено.	16+8=24

Удача въ примѣненіи синтетическаго пріема къ рѣшенію задачи зависитъ отъ удачнаго выбора данныхъ для каждой простой задачи и отъ удачной постановки вопроса. Дѣйствительно, для первой простой задачи выбираются 2 данныхъ изъ сложной задачи, гдѣ ихъ всегда больше 2-хъ, а для послѣдующихъ простыхъ задачъ выборъ становится еще обширнѣе, такъ какъ для нихъ данными могутъ служить не только данныя сложной задачи, но и числа, получившіяся при рѣшеніи ранѣе составленныхъ простыхъ задачъ. Что касается до постановки вопроса, то при одной и той же комбинаціи данныхъ можно рѣшить по большей части нѣсколько вопросовъ. Для рѣшенія задачи синтетическимъ путемъ надо умѣть хорошо сопоставлять и выбирать данныя и по даннымъ ставить вопросы. Синтетическое рѣшеніе задачи допускаетъ поэтому два рода ошибокъ: 1) въ сопоставленіи и выборѣ данныхъ и 2) въ постановкѣ вопросовъ.

45. Аналитическій пріемъ рѣшенія задачъ. Рѣшимъ аналитически задачу:

21) Въ чайномъ магазинѣ 3 фунта чаю, по 4 руб. за фунтъ, смѣшали съ чаемъ по 2 руб. за фунтъ. Сколько взято чаю второго сорта, если при продажѣ смѣси по $2^1/_2$ руб. за фунтъ получили 3 рубля прибыли?

Для этого стараемся подобрать такія данныя, при помощи которыхъ вопросъ задачи можно рѣшить однимъ дѣйствіемъ. Такъ какъ первый сортъ чаю, при продажѣ по цѣнѣ смѣси, даетъ убытокъ, то на второмъ сортѣ, который при продажѣ по цѣнѣ смѣси даетъ прибыль, должно покрыть весь убытокъ отъ перваго сорта и получить сверхъ того еще 3 рубля прибыли; поэтому мы рѣшимъ вопросъ задачи, если будемъ знать: 1) сколько всей прибыли слѣдуетъ получить на второмъ сортѣ чаю и 2) сколько прибыли даетъ каждый его фунтъ. Для рѣшенія придется всю прибыль на чаѣ второго сорта раздѣлить на прибыль съ одного фунта. Такимъ образомъ у насъ составлена простая задача, но рѣшить ее мы не можемъ, ибо не знаемъ ни всей прибыли на чаѣ второго сорта, ни прибыли на одномъ фунтѣ этого чаю. Поэтому, раньше надо узнать: 1) сколько прибыли слѣдуетъ получить на всемъ чаѣ второго сорта и 2) сколько прибыли получается съ каждаго фунта его. Къ этимъ вопросамъ опять подбираемъ данныя, при помощи которыхъ каждый изъ нихъ можно рѣшить однимъ дѣйствіемъ. Для рѣшенія перваго необходимо знать: 1) сколько убытку получено на первомъ сортѣ чаю и 2) сколько прибыли слѣдуетъ получить на всей смѣси. Эти данныя для рѣшенія перваго вопроса надо сложить. Для рѣшенія второго вопроса надо знать: 1) что стоитъ магазину фунтъ чаю второго сорта и 2) почемъ онъ продается въ смѣси, при чемъ изъ второго даннаго надо вычесть первое. Послѣднія два данныя мы знаемъ изъ сложной задачи и потому простую задачу о прибыли съ каждаго фунта чаю второго сорта мы можемъ рѣшить, но задачу о прибыли на всемъ чаѣ второго сорта рѣшить еще нельзя, потому что неизвѣстенъ убытокъ на всемъ чаѣ перваго сорта. Поэтому, чтобы рѣшить вопросъ о прибыли со всего чаю второго сорта, надо раньше узнать, сколько убытку получено со всего чаю перваго сорта, а для этого надо знать: 1) сколько убытку давалъ каждый фунтъ этого чаю при продажѣ его по цѣнѣ смѣси и 2) сколько этого чаю вошло въ смѣсь. Послѣднее данное извѣстно изъ сложной задачи, а для опредѣленія перваго надо знать: 1) что стоилъ магазину фунтъ чаю перваго сорта и 2) почемъ онъ продавался въ смѣси. Оба эти данныя находятся въ сложной задачѣ и потому задачу объ убыткѣ съ каждаго фунта чаю перваго сорта можемъ рѣшить. Тогда будемъ имѣть всѣ данныя для опредѣленія убытка на всемъ чаѣ перваго сорта, по которому опредѣлимъ, сколько всей прибыли слѣдуетъ получить на всемъ чаѣ второго сорта. А имѣя прибыль на всемъ чаѣ вто-

рого сорта и рѣшивъ задачу о прибыли на каждомъ фунтѣ этого сорта, для которой данныя знаемъ изъ сложной задачи, можно рѣшить задачу о числѣ фунтовъ чаю второго сорта, т.-е. рѣшить вопросъ, предложенный въ сложной задачѣ.

Итакъ, рѣшая задачу аналитически, опредѣляютъ прежде всего, какія данныя необходимы для рѣшенія вопроса сложной задачи однимъ дѣйствіемъ. Если одно или оба изъ этихъ данныхъ не заключаются въ сложной задачѣ, то опредѣляютъ, при помощи какихъ новыхъ данныхъ можно найти каждое изъ намѣченныхъ ранѣе данныхъ. Съ тѣми изъ новыхъ данныхъ, которыхъ нѣтъ въ предложенной задачѣ, поступаютъ такъ же, какъ и съ первыми, и продолжаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока всѣ данныя послѣдней простой задачи будутъ извѣстны изъ сложной задачи. Составленныя такимъ образомъ простыя задачи надо рѣшать, начиная съ послѣдней, такъ какъ въ ней всѣ данныя извѣстны. Рѣшая простыя задачи въ такой послѣдовательности, мы постепенно будемъ находить данныя, необходимыя для рѣшенія предшествующихъ простыхъ задачъ. Въ анализѣ мы постоянно соображаемъ, что намъ надо узнать сперва для рѣшенія вопроса сложной задачи, потомъ для отысканія тѣхъ данныхъ, которыхъ въ сложной задачѣ нѣтъ, но которыя необходимы для рѣшенія составленной простой задачи и т. д. Аналитическое рѣшеніе приведенной задачи можно представить въ слѣдующей схемѣ:

Чтобы узнать:	Надо опредѣлить:	Рѣшеніе:
Сколько фунтовъ чаю второго сорта вошло въ смѣсь.	1. Сколько всего прибыли слѣдуетъ получить на чаѣ второго сорта. 2. Сколько прибыли даетъ каждый фунтъ его.	$7\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 15$
Сколько всего прибыли слѣдуетъ получить на чаѣ второго сорта.	1. Сколько убытку получено на чаѣ перваго сорта. 2. Сколько прибыли слѣдуетъ получить на всей смѣси (3 руб.).	$4\frac{1}{2} + 3 = 7\frac{1}{2}$
Сколько прибыли даетъ каждый фунтъ чаю 2-го сорта.	1. Что стоитъ фунтъ чаю 2-го сорта магазину (2 руб.). 2. Почемъ онъ продается въ смѣси ($2\frac{1}{2}$ руб.).	$2\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

Чтобы узнать:	Надо опредѣлить:	Рѣшеніе:
Сколько убытку получено на чаѣ перваго сорта.	1. Сколько убытку давалъ каждый фунтъ чаю 1-го сорта. 2. Сколько чаю этого сорта вошло въ смѣсь (3 фунта).	$1\frac{1}{2} \times 3 = 4\frac{1}{2}$
Сколько убытку давалъ каждый фунтъ чаю 1-го сорта.	1. Что стоитъ магазину фунтъ чаю 1-го сорта (4 руб.). 2. Почемъ онъ продается въ смѣси ($2\frac{1}{2}$ руб.).	$4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Примѣч. Во второй графѣ въ скобкахъ поставлены тѣ данныя, которыя извѣстны изъ сложной задачи.

Удача въ примѣненіи анализа къ рѣшенію задачъ зависитъ только отъ удачнаго подбора данныхъ для простыхъ задачъ; вопросъ же для каждой простой задачи опредѣляется или вопросомъ сложной задачи, или предшествующими простыми задачами. Ошибиться въ подборѣ данныхъ возможно, потому что почти для рѣшенія каждаго вопроса можно подобрать нѣсколько различныхъ сочетаній данныхъ. Напр., вопросъ разобранной сейчасъ задачи, кромѣ выбранныхъ нами данныхъ, можно рѣшить еще при помощи слѣдующихъ: 1) стоимости всего чаю второго сорта и 2) цѣны каждаго его фунта. Но эта комбинація, несмотря на кажущееся ея преимущество (одно данное—цѣна фунта чаю второго сорта—извѣстно изъ сложной задачи), не можетъ повести къ рѣшенію задачи, потому что стоимость всего чаю второго сорта можетъ быть опредѣлена только послѣ опредѣленія его количества. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для примѣненія аналитическаго пріема надо умѣть къ вопросу подбирать необходимыя для его рѣшенія данныя и что при аналитическомъ пріемѣ возможны ошибки только одного рода—въ подборѣ данныхъ.

Нѣтъ надобности всегда дѣлать полный анализъ задачи, т.-е. расчленять сложную задачу на простыя задачи; достаточно при помощи анализа расчленить ее на такія задачи, рѣшеніе которыхъ намъ извѣстно, хотя бы онѣ и были сложныя.

46. Изъ сравненія аналитическаго и синтетическаго пріемовъ рѣшенія задачъ, легко прійти къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1. Синтетическій пріемъ представляетъ собою какъ бы рядъ отдѣльныхъ попытокъ, не связанныхъ общею руководящею нитью и потому случайно приводящихъ къ цѣли. Не видно, почему и для чего были выбраны изъ сложной задачи тѣ или другія данныя и по нимъ поставленъ тотъ, а не другой вопросъ. Аналити-

ческій пріемъ, наоборотъ, представляетъ цѣпь логически связанныхъ между собою и вытекающихъ другъ изъ друга заключеній. И тотъ, и другой путь допускаютъ возможность ошибокъ, и потому нѣтъ такихъ пріемовъ для рѣшенія задачъ, приложеніе которыхъ всегда и безошибочно вело бы къ цѣли.

2. Въ синтезѣ каждая простая задача установляется въ окончательной формѣ, со всѣми данными и вопросомъ, и, не будучи связана съ послѣдующими задачами, можетъ быть рѣшена тотчасъ послѣ ея составленія. Въ анализѣ въ большей части простыхъ задачъ необходимыя данныя могутъ быть опредѣлены только изъ рѣшенія послѣдующихъ простыхъ задачъ, и потому къ рѣшенію можно приступать только послѣ установленія всѣхъ этихъ задачъ.

3. Ходъ мысли въ синтезѣ проще и первоначальнѣе, чѣмъ въ анализѣ. Поставить вопросъ по даннымъ, безъ сомнѣнія, легче, чѣмъ къ вопросу подобрать данныя, при помощи которыхъ онъ можетъ быть рѣшенъ; только послѣ цѣлаго ряда заключеній перваго рода возможенъ переходъ къ обратнымъ заключеніямъ. Построить рядъ отдѣльныхъ, не связанныхъ между собою, заключеній легче, чѣмъ цѣлую цѣпь вытекающихъ другъ изъ друга заключеній.

Отсюда слѣдуетъ, что анализъ строже и послѣдовательнѣе ведетъ къ цѣли, а синтезъ легче и доступнѣе для примѣненія. Поэтому въ рѣшеніи сложныхъ задачъ съ дѣтьми сперва долженъ примѣняться синтетическій пріемъ и отъ него слѣдуетъ постепенно переходить къ анализу.

Прибавимъ къ этому, что анализъ и синтезъ въ чистой формѣ могутъ быть примѣнены только въ изложеніи рѣшенія задачи; при самомъ же рѣшеніи мысль наша попеременно принимаетъ то аналитическое, то синтетическое направленіе. Дѣйствительно составляя изъ данныхъ сложной задачи простую задачу, мы непремѣнно обращаемъ вниманіе на то, подвинетъ ли насъ эта простая задача къ рѣшенію данной сложной задачи, или нѣтъ; точно также, подбирая для составленія простой задачи данныя къ вопросу сложной задачи, мы стараемся о томъ, чтобы эти данныя могли быть опредѣлены при помощи данныхъ сложной задачи.

47. Алгебраическое и ариѳметическое рѣшеніе задачъ. Всѣ сложныя задачи могутъ быть рѣшены путемъ составленія изъ нихъ уравненій и рѣшенія составленныхъ уравненій. Въ приведенной выше первой сложной задачѣ, обозначивъ искомое число ящиковъ черезъ x, найдемъ, что продано $x-8$ ящиковъ, что за нихъ выручено купцомъ $(x-8) \cdot 6$ рублей и что всѣ ящики ему обошлись въ $4x$ руб. Такъ какъ при этой продажѣ купецъ выручилъ всѣ затраченныя имъ деньги, то обѣ суммы должны быть равны, и мы получимъ уравненіе

$$(x-8) \cdot 6 = 4x,$$

рѣшеніе котораго представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$6x-48=4x;\ 2x=48,\ x=24.$$

Для второй задачи легко составить слѣдующее уравненіе

$$4 \cdot 3+2x+3=2^1/_2 \cdot (x+3).$$

гдѣ черезъ x означено число фунтовъ чаю второго сорта. Рѣшеніе этого уравненія представится въ слѣдующемъ видѣ:

$$12+2x+3=2^1/_2x+7^1/_2;\ 7^1/_2={}^1/_2x;\ 15=x.$$

Такой способъ рѣшенія задачъ принадлежитъ алгебрѣ. Какъ видимъ, онъ слагается изъ двухъ операцій—составленія уравненій и рѣшенія составленныхъ уравненій. Рѣшеніе ур—ій подчиняется опредѣленнымъ правиламъ, всегда приводящимъ къ цѣли, если только рѣшаемыя уравненія возможны; что касается составленія ур—ій, то для него нѣтъ вполнѣ опредѣленныхъ правилъ, и тѣ совѣты, которые обыкновенно даются на этотъ счетъ въ учебникахъ алгебры (предположивъ задачу рѣшенной и обозначивъ неизвѣстныя буквами, слѣдуетъ поступать такъ, какъ будто хотимъ повѣрить найденное рѣшеніе задачи; или: составить такое равенство, которымъ неявно выражается зависимость неизвѣстнаго числа отъ данныхъ чиселъ) не всегда могутъ быть выполнены въ достаточной степени удачно въ примѣненіи къ различнымъ случаямъ. Кромѣ того, какъ это видно изъ приведенныхъ выше подробностей рѣшенія первой задачи, составленіе уравненій до нѣкоторой степени требуетъ умѣнья рѣшать задачи ариѳметическимъ путемъ.

48. Сопоставляя алгебрическое рѣшеніе задачъ съ ариѳметическимъ, легко прійти къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) Алгебраическій пріемъ общнѣе ариѳметическихъ, но примѣненіе его тоже не всегда безошибочно приводитъ къ цѣли.

2) Алгебраическій пріемъ требуетъ нѣкотораго знакомства съ ариѳметическими пріемами рѣшенія задачъ и потому, естественно, можетъ быть данъ учащимся только послѣ ознакомленія ихъ съ ариѳметическими пріемами.

3) Работа при алгебраическомъ рѣшеніи задачъ распредѣляется между составленіемъ уравненій и преобразованіями, которыя надо произвести надъ уравненіями для ихъ рѣшенія; а такъ какъ эти преобразованія подчиняются опредѣленнымъ правиламъ и имѣютъ до нѣкоторой степени механическій характеръ, то ал

гебраическое рѣшеніе задачъ представляется болѣе легкимъ сравнительно съ ариѳметическимъ.

4) Ариѳметическое рѣшеніе сравнительно съ алгебраическимъ требуетъ, такъ сказать, бо́льшаго проникновенія въ условія задачи, болѣе глубокаго изслѣдованія зависимости между величинами, и потому имѣетъ бо́льшее образовательное значеніе. Такъ, въ приведенной выше задачѣ на смѣшеніе надо было сопоставить цѣны обоихъ сортовъ чаю съ цѣною смѣси; надо было, кромѣ того, изслѣдовать зависимость между прибылью на одномъ сортѣ и убыткомъ на другомъ.

Между ариѳметическимъ и алгебраическимъ рѣшеніями задачи, по нашему мнѣнію, существуетъ такое же соотношеніе, какое между рѣшеніемъ геометрическихъ задачъ на построеніе путемъ чисто геометрическимъ и помощію составленія уравненій и построенія ихъ рѣшеній. Если послѣдній способъ значительно легче и общнѣе перваго, то зато первый гораздо больше знакомитъ насъ съ данной задачей и даетъ точное и наглядное представленіе о каждомъ послѣдовательномъ шагѣ въ рѣшеніи, о каждой вспомогательной задачѣ, черезъ которую при этомъ приходится пройти.

49. Трудность и сложность ариѳметическаго рѣшенія задачи въ бо́льшей части случаевъ соотвѣтствуетъ не только трудности составленія уравненій изъ задачи, но и количеству и разнообразію преобразованій, которымъ надо подвергнуть составленныя уравненія для ихъ рѣшенія. Если задача приводится къ одному уравненію первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ и если преобразованія, необходимыя для рѣшенія этого уравненія, немногочисленны и просты, то задача въ бо́льшей части случаевъ и ариѳметически рѣшается довольно просто. Вмѣстѣ съ трудностію составленія уравненій, съ возрастаніемъ числа ихъ и съ усложненіемъ преобразованій, необходимыхъ для рѣшенія уравненій, возрастетъ и трудность ариѳметическаго рѣшенія задачи. Хорошей иллюстраціей высказанной мысли могутъ служить слѣдующія видоизмѣненія задачъ на смѣшеніе съ ихъ ариѳметическими и алгебраическими рѣшеніями.

22) Что стоитъ фунтъ чаю, составленнаго изъ 25 фунтовъ чаю по 5 руб. и 15 фун. по 3 руб. за фунтъ?

Ариѳм. рѣшеніе. 25 фун. чаю по 5 руб. за фунтъ стоятъ $5 . 25 = 125$ р.; 15 фун. чаю по 3 руб. за фунтъ стоятъ $3 . 15 = 45$ р.: слѣд. вся смѣсь, которой было $25 + 15 = 40$ фунтовъ., стоитъ $125 + 45 = 170$ руб., а фунтъ ея стоитъ $170 : 40 = 4^1/_4$ руб.

Алгебраич. рѣшеніе. Положимъ, что фунтъ смѣси стоитъ x р.; тогда вся смѣсь, которой было $25+15$ фун., стоитъ $x . (25+15)$ руб.; съ другой стороны 25 ф. чаю стоятъ $5 . 25$ руб., а 15 фун. $3 . 15$ руб., и слѣд. вся смѣсь стоитъ $5 . 25 + 3 . 15$, а потому $x . (25+15) = 5 . 25 + 3 . 15$; или $40x = 170$; $x = 170 : 40 = 4^1/_4$.

23) Опредѣлить цѣну чаю, 15 фунтовъ котораго отъ смѣшенія съ 25-ю фун. чаю, по 5 руб. за фунтъ, составляютъ смѣсь, цѣною въ $4^1/_4$ руб. за фунтъ.

Ариѳм. рѣшеніе. 25 фун. чаю по 5 руб. стоятъ $5 . 25 = 125$ р., а вся смѣсь, которой было $25+15 = 40$ фун., стоитъ $4^1/_4 . 40 = 170$ руб.; слѣд. 15 фун. чаю другого сорта стоятъ $170 - 125 = 45$, а каждый фунтъ его стоитъ $45 : 15 = 3$ руб.

Алгебраич. рѣшеніе. Положимъ, что фунтъ чаю перваго сорта стоитъ x руб., тогда 15 ф. его стоятъ $x . 15$ руб., а 25 ф. чаю по 5 руб. стоятъ $5 . 25$ руб., слѣд. вся смѣсь стоитъ $x . 15 + 5 . 25$ р. Съ другой стороны та же смѣсь, которой было $25 + 15$ фун., стоитъ $4^1/_4 . (25+15)$ руб., а потому:

$$x . 15 + 5 . 25 = 4^1/_4 . (25+15), \text{ или}$$
$$15x + 125 = 170;\ 15x = 45;$$
$$x = 45 : 15 = 3.$$

24) Сколько фунтовъ чаю, въ 3 руб. за фунтъ, надо смѣшать съ 25-ю фун. чаю, по 5 руб. за фунтъ, чтобы полученную смѣсь можно было продавать безъ прибыли и убытку по $4^1/_4$ руб.?

Ариѳм. рѣшеніе. Каждый фунтъ пятирублеваго чаю при продажѣ по цѣнѣ смѣси даетъ $5 - 4^1/_4 = {}^3/_4$ руб. убытку, а всѣ 25 фун его дадутъ ${}^3/_4 . 25 = 18^3/_4$ руб. убытку. Столько же прибыли долженъ дать трехрублевый чай, такъ какъ смѣсь должна быть продана безъ прибыли и убытку. Каждый фунтъ трехрублеваго чаю даетъ $4^1/_4 - 3 = 1^1/_4$ рублей прибыли; слѣд. его должно взять $18^3/_4 : 1^1/_4 = 15$ фунтовъ.

Алгебраич. рѣшеніе. Положимъ, что трехрублеваго чаю надо взять x фунтовъ; онъ будетъ стоить $3 . x$ руб., а пятирублевый чай стоитъ $5 . 25$ руб.; слѣд. вся смѣсь стоитъ $3 . x + 5 . 25$ руб. Съ другой стороны смѣси получилось $x+25$ фунтовъ и слѣдовательно она стоитъ $4^1/_4 . (x+25)$ руб., а потому:

$$4^1/_4 . (x+25) = 3x + 5.25, \text{ или}$$
$$4^1/_4 x + 106^1/_4 = 3x + 125;$$
$$1^1/_4 x = 18^3/_4;\ x = 18^3/_4 : 1^1/_4 = 15.$$

25) По скольку фунтовъ чаю, въ 5 руб. за фунтъ и въ 3 руб. за фунтъ, надо взять для составленія смѣси въ 40 фунтовъ, цѣною по $4^1/_4$ руб. за фунтъ?

Ариѳм. рѣшеніе. Если мы возьмемъ для составленія смѣси одинъ пятирублевый чай, то каждый фунтъ смѣси выйдетъ дороже требуемаго на $5-4^1/_4=^3/_4$ руб., а вся смѣсь—на $^3/_4\times40=30$ руб. Чтобы понизить стоимость смѣси, не измѣняя ея количества, надо пятирублевый чай замѣнять трехрублевымъ. Отъ замѣны одного фунта чаю перваго сорта однимъ фунтомъ второго, стоимость смѣси понижается на 5—3=2 р.; а чтобы понизить ее на 30 р., надо замѣнить 30 : 2=15 фунтовъ перваго сорта такимъ же количествомъ второго; слѣд. чаю второго сорта войдетъ въ смѣсь 15 фунтовъ, а перваго 40—15=25 фунтовъ.

Алгебраич. рѣшеніе. Положимъ, что пятирублеваго чаю надо взять x фунтовъ, а трехрублеваго y фунтовъ; такъ какъ всей смѣси должно быть 40 фунтовъ, то первое уравненіе будетъ:

$$x+y=40.$$

Затѣмъ x фунт. пятирублеваго чаю стоятъ $5.x$ руб., а y фунт. трехрублеваго $3.y$ руб.; слѣд. вся смѣсь стоитъ $5x+3y$ руб. Съ другой стороны, зная, что смѣси должно быть 40 фунтовъ, цѣною по $4^1/_4$ руб. за фунтъ, мы опредѣлимъ стоимость смѣси, умноживъ $4^1/_4$ на 40, а потому будемъ имѣть 2-е уравненіе:

$$5x+3y=4^1/_4.40, \text{ или } 5x+3y=170.$$

Чтобы рѣшить эти уравненія, умножаемъ первое на 3 и вычитаемъ изъ второго; получаемъ

$$\begin{array}{l} 5x+3y=170 \\ 3x+3y=120 \\ \hline 2x=50;\ x=25;\ \text{слѣд. } y=40-25=15. \end{array}$$

Приведенныя задачи расположены, какъ каждый легко замѣтитъ, по степени трудности ихъ ариѳметическаго рѣшенія. Уравненія для всѣхъ четырехъ задачъ составляются почти одинаково легко, въ рѣшенія же этихъ уравненій съ каждой задачей входятъ все новыя и болѣе сложныя преобразованія. Въ рѣшеніе 2-й задачи вошло, сравнительно съ первой, лишнее преобразованіе—перенесеніе извѣстныхъ членовъ изъ одной части уравненія въ другую; въ рѣшеніе третьей—раскрытіе скобокъ, перенесеніе неизвѣстныхъ членовъ изъ одной части въ другую и соединеніе членовъ, содержащихъ неизвѣстное, въ одинъ членъ; въ рѣшеніе четвертой—исключеніе изъ уравненій неизвѣстнаго. Всѣ эти преобразованія въ алгебрѣ дѣлаются почти механически, и поэтому ихъ смыслъ и значеніе для рѣшенія задачи совершенно ускользаютъ отъ вниманія рѣшающаго.

Замѣтимъ кстати, что нѣкоторыя задачи легче поддаются ариѳметическому рѣшенію, чѣмъ алгебраическому. Такъ, задача:

26) Когда для перевозки партіи хлѣба въ каждый вагонъ нагрузили по 600 пудовъ, то осталось 200 пудовъ. Чтобы не прибавлять лишняго вагона, оставшійся хлѣбъ распредѣлили между нѣкоторыми нагруженными вагонами по 50 пудовъ въ каждый. Во сколько пудовъ была эта партія хлѣба, если вагоновъ съ грузомъ въ 600 пудовъ оказалось въ 5 разъ больше, чѣмъ вагоновъ съ грузомъ въ 650 пудовъ?

рѣшается ариѳметически очень просто, если сообразить, что вагоновъ съ грузомъ въ 650 пудовъ было столько, сколько разъ 50 содержится въ 200, между тѣмъ какъ алгебраически она приводится къ слѣдующему уравненію:

$$\frac{x-200}{600}\cdot\frac{5}{6}\cdot600+\frac{x-200}{600}\cdot\frac{1}{6}\cdot650=x,$$

составленіе и рѣшеніе котораго требуетъ гораздо больше труда и времени.

Еще болѣе наглядный примѣръ представляетъ задача:

27) Четыре лица A, B, C и D играютъ на томъ условіи, что проигравшій игру платитъ каждому изъ остальныхъ столько, сколько тотъ имѣетъ. Когда по очереди каждый проигралъ по одной игрѣ, то у всѣхъ нихъ оказалось денегъ поровну, именно по 48 руб. Сколько денегъ имѣлъ каждый изъ нихъ до игры?

Для рѣшенія ея замѣчаемъ, что послѣ четвертой игры деньги A, B и C удвоились, поэтому до четвертой игры каждый изъ нихъ имѣлъ по 48 : 2=24 руб., а D имѣлъ 48 руб., оставшіеся у него послѣ четвертой игры, да 3 раза по 24 руб., отданныхъ имъ послѣ 4-й игры A, B и C; т.-е. D имѣлъ $48+24\times3=120$ руб. Точно такъ же найдемъ, что до 3-й игры у A и B было по 12 руб., у D—60 руб.; а у C—24 руб., оставшіеся послѣ 3-й игры, да отданные имъ A и B 12×2 руб. и отданные D 60 руб., всего 108 руб. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно. Алгебраически задача приводится къ 4-мъ уравненіямъ съ четырьми неизвѣстными, составленіе и рѣшеніе которыхъ занимаетъ достаточно мѣста и времени. Задача и рѣшеніе ея заимствованы изъ „Методовъ рѣшеній ариѳметическихъ задачъ“ г. Александрова.

50. Попытки классифицировать ариѳметическія задачи. Какъ приведенныя нами задачи, такъ и вообще всѣ задачи, въ рѣшеніе которыхъ входятъ первыя четыре дѣйствія, одинаково подчиняются и алгебраическому, и ариѳметическому рѣшенію, при чемъ при составленіи уравненій алгебра поставлена въ необходимость пользоваться ариѳметическими пріемами. Если однѣ изъ такихъ задачъ легче рѣшаются алгебраически, а для другихъ

ариѳметическое рѣшеніе представляется болѣе простымъ и изящнымъ, то это обстоятельство отчасти опредѣляется такими частностями въ условіяхъ задачъ, которыя трудно поддаются точному формулированію, а отчасти зависитъ отъ недостаточной разработки ариѳметическихъ пріемовъ рѣшенія задачъ, и во всякомъ случаѣ не можетъ служить основаніемъ для того, чтобы ту или другую задачу считать исключительно ариѳметической или исключительно алгебраической. Единственное исключеніе составляютъ задачи, которыя требуютъ для своего рѣшенія однихъ прямыхъ дѣйствій (сложеніе и умноженіе): составленіе уравненій для такихъ задачъ въ бо́льшей части случаевъ хотя и возможно, но является крайне искусственнымъ. Поэтому задачи, приводящіяся къ первымъ четыремъ дѣйствіямъ, совершенно невозможно точно; и опредѣленно разграничить между ариѳметикой и алгеброй развѣ согласиться отнести къ ариѳметикѣ задачи на одни прямыя дѣйствія, всѣ же остальныя считать алгебраическими. Но тогда, чтобы быть логически послѣдовательными, надо и всѣ обратныя дѣйствія исключить изъ ариѳметики.

Между тѣмъ, попытки къ такому разграниченію задачъ встрѣчаются въ нашей педагогической литературѣ. Такъ, въ своей „Методикѣ начальной ариѳметики“ А. И. Гольденбергъ предлагаетъ считать чисто ариѳметическими такія задачи, гдѣ „зависимость искомаго числа отъ данныхъ чиселъ настолько проста, что представляется возможнымъ обнять какъ бы сразу, или почти сразу, тѣ подсказанныя изложеніемъ задачи дѣйствія надъ данными числами, выполненіе которыхъ необходимо и достаточно для опредѣленія искомаго числа“, и утверждаетъ, что „отличительный признакъ этихъ задачъ заключается въ томъ, что для такой задачи непосредственно, или почти непосредственно, можетъ быть составлена формула рѣшенія“, т.-е. „равенство, которымъ явно выражается зависимость искомаго числа отъ всѣхъ данныхъ чиселъ задачи“. Въ задачахъ же алгебраическаго характера „зависимость между искомымъ числомъ и данными числами не на столько прозрачна, что можно было бы непосредственно установить планъ рѣшенія, какъ для задачъ чисто-ариѳметическихъ“, „что можетъ потребоваться длинный рядъ разсужденій, чтобы распутать задачу, т.-е. установить порядокъ тѣхъ ариѳметическихъ дѣйствій надъ данными числами, выполненіе которыхъ приведетъ къ отвѣту на предложенную задачу“. „Общій пріемъ рѣшенія такихъ задачъ заключается въ составленіи уравненія“ и въ рѣшеніи составленнаго уравненія. Какъ видно, дѣленіе задачъ на чисто-ариѳметическія и задачи алгебраическаго характера дано крайне осторожно и съ массою оговорокъ („непосредственно, или почти непосредственно“ „не настолько прозрачна“, „можетъ потребовать“). И дѣйствительно: возможность непосредственно установить планъ рѣшенія задачи, кромѣ бо́льшей или меньшей трудности (запутанности) задачи, зависитъ во многомъ отъ способности рѣшающаго быстро схватывать условія задачи и разбираться въ нихъ, отъ навыка его въ рѣшеніи задачъ, отъ послѣдовательности, въ которой рѣшаются задачи, отъ степени вниманія и напряженія умственныхъ силъ, опредѣляемыхъ продолжительностью и характеромъ предшествующей работы рѣшающаго, наконецъ, даже отъ расположенія духа рѣшающаго. Неопредѣленность и субъективность предлагаемаго критерія сказывается особенно рельефно въ примѣненіи къ опредѣленному ряду задачъ, напр. въ примѣненіи къ вышеприведеннымъ четыремъ задачамъ на смѣшеніе. Если первую изъ нихъ г. Гольденбергъ отнесетъ къ задачамъ ариѳметическимъ, а послѣднюю къ задачамъ алгебраическаго характера, то относительно второй и особенно относительно третьей могутъ возникнуть большія сомнѣнія. Очевидно, устанавливая дѣленіе задачъ на чисто-ариѳметическія и задачи алгебраическаго характера, г. Гольденбергъ не столько имѣлъ въ виду строгое разграниченіе между ариѳметическими и алгебраическими задачами, сколько желалъ указать на необходимость нѣкоторой умѣренности въ примѣненіи на практикѣ замысловатыхъ и непосильныхъ для дѣтей задачъ, излишнее и неоправдываемое ничѣмъ пользованіе которыми вошло въ обычай у нѣкоторыхъ преподавателей и у составителей задачниковъ. Это заключеніе мы позволяемъ себѣ вывести на томъ основаніи, что самъ г. Гольденбергъ нисколько не отказывается въ преподаваніи ариѳметики отъ задачъ, которымъ онъ приписываетъ алгебраическій характеръ, признаетъ, что „пріемы рѣшенія такихъ задачъ несомнѣнно содѣйствуютъ умственному развитію учащихся“, и свои сборники снабдилъ достаточнымъ запасомъ ихъ.

51. Мы остановились на этомъ предметѣ дольше, чѣмъ въ первомъ изданіи нашей книги, потому что мысль, высказанная г. Гольденбергомъ, подверглась дальнѣйшему развитію и такому толкованію, съ которымъ едва ли кто можетъ согласиться. Г. Шохоръ-Троцкій въ своей „Методикѣ ариѳметики“ прямо утверждаетъ, что „задачи, извѣстныя подъ именемъ ариѳметическихъ, могутъ быть точно распредѣлены на два класса: 1) задачи чисто-ариѳметическія и 2) задачи алгебраическія“; что чисто-ариѳметическими задачами называются такія, приложеніе къ которымъ „алгебраическаго пріема приводитъ прямо къ ряду дѣйствій надъ данными числами“, а алгебраическими—такія, „что приложеніе къ нимъ алгебраическаго пріема приводитъ къ ряду дѣйствій надъ неиз-

вѣстною, искомою величиной", при чемъ въ подстрочномъ примѣчаніи первыя характеризуетъ формулой:

$$x=f(a,\ b,\ c....m,\ n),$$

а вторыя формулой:

$$f(x,\ a,\ b,\ c....m,\ n)=0,$$

гдѣ x есть искомое число, а a, b, $c....m$, n—данныя числа и символъ $f(\ \ )$ обозначаетъ совокупность какихъ-либо ариѳметическихъ дѣйствій. Такимъ образомъ, основаніемъ для раздѣленія задачъ на ариѳметическія и алгебраическія ставится возможность составить уравненіе. Такъ какъ для всякой задачи, въ рѣшеніе которой входитъ хотя одно обратное дѣйствіе, составленіе уравненія безусловно возможно и сомнѣніе можетъ являться только относительно задачъ, въ рѣшеніе которыхъ входятъ одни прямыя дѣйствія, то своей классификаціей г. Шохоръ-Троцкій исключаетъ изъ области ариѳметики даже простыя задачи на обратныя дѣйствія (вычитаніе и дѣленіе). Желая исправить эту несообразность, въ другомъ своемъ сочиненіи „Опытъ методики ариѳметики для преподавателей математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ" г. Шохоръ-Троцкій предлагаетъ „для краткости условиться задачи, для рѣшенія которыхъ требуется одно дѣйствіе, будь то дѣйствіе, прямое или обратное, называть тоже ариѳметическими" и такимъ образомъ исключаетъ изъ области ариѳметики только сложныя задачи, въ которыхъ встрѣчается хотя одно обратное дѣйствіе, т.-е. напр. всѣ задачи на тройное правило.

Насколько вообще дѣленіе задачъ на ариѳметическія и алгебраическія шатко, лучше всего указываетъ примѣръ самого г. Шохоръ-Троцкаго, который одну и ту же задачу („Методика ариѳметики", 1886 годъ, стр. 95, задача № 2; „Опытъ методики", 1888 годъ, стр. 68—69, задача № 2) въ одномъ своемъ сочиненіи считаетъ чисто-ариѳметической, а въ другомъ признаетъ за алгебраическую. Затѣмъ въ составленномъ имъ задачникѣ подъ рубрикой „Сложныя чисто-ариѳметическія задачи" находимъ массу задачъ, которыя по его же опредѣленію слѣдуетъ считать алгебраическими. Беремъ наудачу 5-ю задачу изъ этой рубрики („Сборникъ упражненій по ариѳметикѣ для учащихъ", 1888 годъ, стр. 82, № 705):

28) „Нѣкто получаетъ въ годъ 800 руб., а расходуетъ по „стольку руб. въ мѣсяцъ, что въ теченіе 7 мѣсяцевъ можетъ „сберечь 126 руб. Спрашивается, по сколько (у) рублей онъ „расходуетъ въ годъ"?

и, обозначивъ неизвѣстный годовой расходъ черезъ x, составляемъ уравненіе:

$$7.\ \frac{800-x}{12}=126$$

въ томъ, конечно, предположеніи, что годовой расходъ равномѣрно распредѣляется по всѣмъ мѣсяцамъ года (при иномъ предположеніи задача становится неопредѣленной). Полагаемъ, что это уравненіе вполнѣ соотвѣтствуетъ характерной для алгебраическихъ задачъ по идеѣ г. Шохоръ-Троцкаго формулѣ:

$$f(x,\ a,\ b,\ c....m,\ n)=0.$$

При такой шаткости въ классификаціи задачъ на чисто-ариѳметическія и алгебраическія, очевидно, нельзя придавать ей сколько-нибудь серьезнаго значенія, а слѣд. не можетъ быть и рѣчи объ особой роли задачъ ариѳметическихъ и алгебраическихъ въ преподаваніи ариѳметики, а тѣмъ болѣе объ исключеніи задачъ алгебраическаго характера изъ курса ариѳметики.

52. Другая попытка классифицировать ариѳметическія задачи сдѣлана г. Конашевичемъ въ его „Опытѣ систематизаціи ариѳметическихъ задачъ".

Эта классификація обнимаетъ главнымъ образомъ задачи съ двумя неизвѣстными и распредѣляетъ ихъ на шесть группъ: 1) задачи, въ которыхъ даются или могутъ быть опредѣлены сумма и разность неизвѣстныхъ; 2) задачи, въ которыхъ даются или могутъ быть опредѣлены сумма и краткое отношеніе неизвѣстныхъ; 3) задачи, въ которыхъ даются или могутъ быть опредѣлены разность и кратное отношеніе между неизвѣстными; 4) задачи, въ которыхъ даются или могутъ быть опредѣлены сумма и произведеніе неизвѣстныхъ; 5) задачи, въ которыхъ даются или могутъ быть опредѣлены разность и произведеніе неизвѣстныхъ; 6) задачи, въ которыхъ даются или могутъ быть опредѣлены произведеніе и частное неизвѣстныхъ. Послѣднія три группы задачъ въ область ариѳметики введены быть не могутъ, потому что требуютъ для рѣшенія извлеченія квадратнаго корня; вторая и третья группы представляютъ частные случаи задачъ на правило пропорціональнаго дѣленія, а первая группа относится къ такъ называемому дѣленію числа въ разностномъ отношеніи. Задачи, въ которыхъ только одно неизвѣстное или болѣе двухъ неизвѣстныхъ, г. Конашевичъ старается всегда привести къ задачамъ съ двумя неизвѣстными. Изъ сказаннаго очевидно, что эта классификація далеко не обнимаетъ всѣхъ ариѳметическихъ задачъ; кромѣ того, слѣдуетъ замѣтить, что пріемы рѣшенія болѣе сложныхъ задачъ каждой группы, особенно пріемы приведенія ихъ къ основнымъ, у г. Конашевича вообще крайне искусственны и громоздки.

53. Всѣ другія попытки классифицировать ариѳметическія задачи оказываются еще болѣе неудачными. Такъ напр. г. Комаровъ („Методическое рѣшеніе типическихъ ариѳметическихъ за-

дачъ въ начальныхъ училищахъ") всѣ ариѳметическія задачи раздѣлилъ на 34 типа, къ сожалѣнію не давъ никакихъ основаній для такого дѣленія, а эти основанія далеко не ясны изъ заголовковъ, которыми онъ снабдилъ каждый типъ задачъ. Дѣйствительно: что слѣдуетъ понимать подъ задачами „на сравненіе величинъ, сперва относимыхъ для этого къ одинаковымъ единицамъ"? Какая разница между задачами „на пропорціональное дѣленіе" и задачами, въ которыхъ „число дѣлится на части кратно неравныя"? Что слѣдуетъ понимать подъ задачами, „въ которыхъ, по стоимостямъ отдѣльныхъ предметовъ и всѣхъ, опредѣляется количество предметовъ"? Какая разница между задачами, „относящимися къ тройному правилу", и задачами, въ которыхъ „данное количество рабочихъ измѣняется, и требуется опредѣлить, во сколько времени исполнится работа"? Какая разница между задачами, „въ которыхъ, по общей стоимости различныхъ предметовъ, общему количеству ихъ и цѣнѣ каждаго, опредѣляется количество ихъ" и задачами, „въ которыхъ, по данной цѣнѣ единицъ смѣшиваемыхъ веществъ и самой смѣси, опредѣляется количество смѣшиваемыхъ веществъ"?

54. Въ августовской книжкѣ журнала „Педагогическій Сборникъ" за 1902-й годъ г. Агапьевъ предлагаетъ, вмѣсто классификаціи задачъ, систематизировать ихъ „по дѣйствіямъ и числу дѣйствій, въ строго послѣдовательномъ порядкѣ, начиная отъ самыхъ простыхъ задачъ, рѣшаемыхъ однимъ дѣйствіемъ, и постепенно усложняя ихъ однимъ, двумя и т. д. вопросами". Такую систематизацію онъ думаетъ выполнить слѣдующимъ путемъ.

Онъ беретъ четыре формулы $a+b$, $a-b$, $a\times b$, $a:b$ и подъ каждую формулу подводитъ „всѣ простыя задачи, рѣшеніе которыхъ обнимается ею".

Затѣмъ, каждую простую задачу „усложняетъ однимъ дѣйствіемъ", замѣняя въ приведенныхъ четырехъ формулахъ послѣдовательно сперва a, затѣмъ b, черезъ $d+c$, $d-c$, $d\times c$ и $d:c$" и такимъ образомъ, отбросивъ равнозначащія формулы, получаетъ слѣдующія 24 комбинаціи: 1) $(d+c)+b$, $(d-c)+b$, $d\,.\,c+b$, $d:c+b$; 2) $d+c-b$, $d-c-b$, $d\,.\,c-b$, $d:c-b$; 3) $(d+c)\,.\,b$, $(d-c)\,.\,b$, $d\,.\,c\,.\,b$, $(d:c)\,.\,b$; 4) $(d+c):b$, $(d-c):b$, $d\,.\,c:b$, $d:c:b$; 5) $a-(d+c)$, $a-(d-c)$, $a-d\,.\,c$, $a-d:c$; 6) $a:(d+c)$, $a:(d-c)$, $a:(d\,.\,c)$, $a:(d:c)$. Сообразно съ этимъ онъ признаетъ 24 типа „задачъ на два дѣйствія". „Чтобы получить всѣ типы сложныхъ задачъ на 3 дѣйствія, слѣдуетъ со всѣми типами задачъ на два дѣйствія поступить точно такъ же, какъ поступали съ задачами на одно дѣйствіе". Г. Агапьевъ полагаетъ, что такимъ образомъ получится 145 типовъ задачъ на 3 дѣйствія. Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ думаетъ, что „рекомендуемый имъ способъ систематизаціи ариѳметическихъ задачъ не

можетъ быть распространенъ дальше, примѣнительно къ задачамъ на 4, 5 и т. д. дѣйствій, такъ какъ получилась бы весьма сложная и даже не выполнимая система комбинацій элементовъ задачи".

Мысль не новая. Она въ бо́льшей или меньшей степени проводится въ каждомъ задачникѣ, такъ какъ во всѣхъ задачникахъ послѣ простыхъ задачъ обыкновенно предлагаются сперва сложныя задачи на два дѣйствія; въ задачникѣ же профессора Бугаева эта мысль проведена въ достаточной степени систематично. Относительно использованія ея въ преподаваніи слѣдуетъ замѣтить, что трудность рѣшенія задачи опредѣляется въ весьма малой степени числомъ дѣйствій, необходимыхъ для ея рѣшенія, или формулой, къ которой она приводится. Очень хорошимъ примѣромъ въ этомъ отношеніи могутъ служить слѣдующія двѣ задачи, приводимыя г. Агапьевымъ въ своей статьѣ:

29) Въ бассейнъ проведены двѣ трубы; черезъ первую въ 7 минутъ вливается 77 ведеръ воды, а черезъ вторую въ 5 минутъ вливается 40 вед. воды. Сколько воды вольется въ бассейнъ въ 3 минуты, если открыть обѣ трубы одновременно?

30) Два мальчика по лугу ловили бабочекъ; одинъ въ 5 дней наловилъ 60 бабочекъ, а другой въ 7 дней—56 бабочекъ; сколько бабочекъ наловили они вмѣстѣ въ первые три дня?

Обѣ задачи рѣшаются по одной и той же формулѣ $(a:m+b:n)\,.\,p$, между тѣмъ, по словамъ г. Агапьева, первая задача потребовала часовой классной работы и все-таки была усвоена плохо, а вторая въ $^1/_2$ часа была вполнѣ разобрана и усвоена. Еще болѣе рѣзкую разницу встрѣтилъ бы г. Агапьева, если бы взялъ такія двѣ задачи:

31) Два поѣзда вышли одновременно изъ двухъ станцій, между которыми 300 верстъ, навстрѣчу другъ другу. Черезъ сколько часовъ они встрѣтятся, если первый проходитъ въ часъ 40, а второй 35 верстъ?

32) Мальчикъ каждый мѣсяцъ тратитъ на бумагу 40 коп. и на другія письменныя принадлежности 35 коп. На сколько мѣсяцевъ ему хватитъ 3 руб.?

Обѣ задачи требуютъ однихъ и тѣхъ же дѣйствій и рѣшаются по одной той же формулѣ: $m:(a+b)$, между тѣмъ каждый сколько-нибудь опытный преподаватель скажетъ, что вторую задачу можно смѣло предлагать въ классѣ, а первая требуетъ значительной предварительной работы. Точно такъ же каждый преподаватель сочтетъ болѣе легкой задачу г. Агапьева, помѣщенную нами подъ № 30, чѣмъ нашу задачу подъ № 31, хотя послѣдняя требуетъ только 2-хъ дѣйствій, а первая трехъ. При чемъ

же здѣсь число дѣйствій и формула, къ которой приводится задача? Скажемъ даже больше: часто дѣти бываютъ въ состояніи сами составить правильно задачу по заданной формулѣ и не могутъ рѣшить задачи, приводящейся къ той же формулѣ, но съ инымъ содержаніемъ. Чтобы рѣшить задачу, надо хорошо знать и понимать зависимость между величинами, входящими въ нее, а этого-то часто и недостаетъ дѣтямъ. Безъ сомнѣнія, играетъ здѣсь роль и „словесная форма задачи“, но этой формѣ г. Агапьевъ, повидимому, придаетъ слишкомъ важное значеніе.

55. Неудача всѣхъ приведенныхъ попытокъ классифицировать ариѳметическія задачи заставляетъ думать, что едва ли и возможна на сколько-нибудь строгая и послѣдовательно проведенная классификація ихъ, по крайней мѣрѣ, въ томъ направленіи, въ которомъ это до сихъ поръ дѣлалось. Да, если бы какую-либо классификацію ариѳметическихъ задачъ и удалось установить, то едва ли въ значительной степени можно было бы ею пользоваться въ преподаваніи. Примѣръ г.г. Гольденберга и Шохоръ-Троцкаго, раздѣлившихъ задачи на чисто-ариѳметическія и алгебраическія и принужденныхъ задачи обоихъ родовъ ввести въ свои ариѳметическіе задачники, по нашему мнѣнію, въ достаточной степени подтверждаетъ это положеніе. То же самое слѣдуетъ сказать и про „систематизацію“ г. Агапьева. Гораздо важнѣе въ педагогическомъ отношеніи послѣдовательный подборъ задачъ, сообразно съ цѣлями курса, и постепенность въ ознакомленіи дѣтей съ пріемами рѣшенія. Если мы обратимся къ существующимъ сборникамъ, изъ которыхъ каждый посильно разрѣшаетъ этотъ вопросъ, то замѣтимъ, что бо́льшая часть заключающихся въ нихъ задачъ, помимо задачъ на сложеніе и вычитаніе, относятся или непосредственно къ правиламъ тройному и пропорціональнаго дѣленія, или заключаютъ элементы этихъ правилъ (бо́льшая часть простыхъ задачъ на умноженіе и дѣленіе), или представляютъ комбинаціи задачъ того и другого правила, или наконецъ какимъ-либо инымъ путемъ примыкаютъ къ этимъ правиламъ. Другими словами: почти всѣ задачи сборниковъ относятся къ пропорціональнымъ величинамъ. Такъ, напр., задачи о курьерахъ принадлежатъ къ правилу пропорціональнаго дѣленія. Дѣйствительно, чтобы рѣшить, черезъ сколько часовъ встрѣтятся два курьера, находящіеся на разстояніи 120 верстъ и ѣдущіе первый со скоростью 15 верстъ въ часъ, а второй со скоростью 9 верстъ, мы, раздѣливъ 120 пропорціонально 15 и 9, узнаемъ, сколько верстъ проѣхалъ каждый курьеръ до встрѣчи, и тогда уже легко рѣшимъ предложенный въ задачѣ вопросъ. Задача о томъ, черезъ сколько лѣтъ отецъ, имѣющій отъ роду 40 лѣтъ, будетъ втрое старше сына, которому теперь 6 лѣтъ, можетъ быть приведена къ особому виду пропорціональнаго дѣленія. Для этого надо сперва узнать, сколько лѣтъ будетъ отцу и сколько лѣтъ сыну тогда, когда отношеніе лѣтъ ихъ будетъ равно 3, т.-е. найти два числа, разность которыхъ равна 40—6=34, а отношеніе=3. И очень многія задачи, повидимому имѣющія мало общаго съ пропорціональнымъ дѣленіемъ, могутъ быть тѣмъ или инымъ способомъ сведены къ этому послѣднему. Поэтому въ каждомъ курсѣ ариѳметики обязательно познакомить дѣтей не только съ пріемами рѣшенія задачъ на правила тройное и пропорціональнаго дѣленія, но по возможности и съ разнообразными видоизмѣненіями этихъ задачъ. Затѣмъ останется еще рядъ задачъ, трудно поддающихся подведенію подъ эти правила или требующихъ особенныхъ, болѣе или менѣе искусственныхъ пріемовъ. Выборъ такихъ задачъ долженъ быть сдѣланъ особенно тщательно и осторожно. Не слѣдуетъ при этомъ задаваться мыслью, что чѣмъ труднѣе задача, тѣмъ производительнѣе ея рѣшеніе для дѣтей. Производительны для нихъ только тѣ задачи, въ рѣшеніи которыхъ они сами могутъ принять дѣятельное участіе и гдѣ участіе ихъ не ограничивается одними вычисленіями, но распространяется и на изслѣдованіе зависимости между величинами, входящими въ задачу, и на установленіе пріема рѣшенія. Въ особенности слѣдуетъ избѣгать искусственнаго затрудненія задачъ, состоящаго въ многосложности условій, въ неясномъ ихъ изложеніи, въ опущеніи нѣкоторыхъ условій и въ введеніи лишнихъ условій, потому что отъ этого задачи теряютъ свой характеръ математическихъ вопросовъ и обращаются въ загадки, отгадываніе которыхъ едва ли можно считать производительной работой.

56. Ариѳметическіе пріемы рѣшенія задачъ. Во главѣ всѣхъ ариѳметическихъ пріемовъ рѣшенія задачъ долженъ быть поставленъ способъ приведенія къ единицѣ со всѣми его видоизмѣненіями (способъ обратнаго приведенія къ единицѣ, способъ приведенія къ общей мѣрѣ и т. п.). Этотъ способъ примѣняется къ задачамъ на пропорціональныя величины. Получилъ онъ свое названіе отъ того, что въ немъ, прежде чѣмъ опредѣлить требуемый задачей размѣръ одной изъ пропорціональныхъ величинъ, опредѣляютъ размѣръ одной изъ нихъ, соотвѣтствующій единичному размѣру другой. При этомъ, если единичный размѣръ берется для той величины, оба размѣра которой даны въ задачѣ, то способъ сохраняетъ свое общее названіе—способа приведенія къ единицѣ; если же единичный размѣръ берется для той величины, одинъ изъ размѣровъ которой ищется, то онъ носитъ названіе способа обратнаго приведе-

нія къ единицѣ. Каждая задача тройного правила можетъ быть рѣшена обоими способами, какъ это можно видѣть въ нашемъ „Руководствѣ ариѳметики.“ Тамъ же можно найти подробности этого способа и его частныя видоизмѣненія. При дальнѣйшемъ изложеніи курса въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ мы укажемъ и на эти подробности и частныя видоизмѣненія.

Способомъ приведенія къ единицѣ, рѣшаются также задачи объ опредѣленіи частей цѣлаго и цѣлаго по его частямъ.

Изъ задачъ на пропорціональное дѣленіе хорошо подчиняются способу приведенія къ единицѣ тѣ, которыя могутъ быть названы задачами на правило товарищества.

57. Способъ пропорціональнаго измѣненія примѣняется къ тѣмъ же задачамъ, что и способъ приведенія къ единицѣ, и въ нѣкоторыхъ случаяхъ имѣетъ преимущество предъ послѣднимъ. Это тѣ случаи, когда способъ приведенія къ единицѣ во время рѣшенія даетъ несообразныя числа, хотя задача сама по себѣ ничего несообразнаго не представляетъ. Такова, напр., задача:

33) Для исполненія нѣкоторой работы 24 человѣка должны работать ежедневно по $10^5/_9$ часа; по скольку часовъ въ день должны работать 40 человѣкъ, чтобы исполнить ту же работу и въ тотъ же срокъ?

Приводя къ единицѣ число рабочихъ. найдемъ что одинъ человѣкъ для того, чтобы исполнить работу къ назначенному сроку, долженъ работать ежедневно по $10^5/_9 \times 24$, т.-е по $253^1/_3$ часовъ, а приводя къ единицѣ время, найдемъ, что при ежедневной работѣ въ теченіе одного часа нужно $24 \times 10^5/_9$, т.-е. $253^1/_3$ человѣка. Чтобы избѣжать несообразностей при способѣ приведенія къ единицѣ, приходится вводить понятіе объ особой составной единицѣ въ данномъ случаѣ о такомъ количествѣ работы, которое можетъ исполнить одинъ человѣкъ въ одинъ часъ и которое можно назвать рабочимъ часомъ. Между тѣмъ способъ пропорціональнаго измѣненія даетъ очень простое и не содержащее несообразностей рѣшеніе задачи: число рабочихъ увеличилось въ $40 : 24 = 1^2/_3$ раза, а потому время ежедневной работы должно уменьшиться во столько же разъ; слѣд. 40 рабочихъ должны работать ежедневно по $10^5/_9 : 1^2/_3 = 6^1/_3$ часовъ.

Какъ видимъ изъ привиденнаго примѣра, въ способѣ пропорціональнаго измѣненія опредѣляется отношеніе данныхъ размѣровъ одной величины и затѣмъ въ этомъ отношеніи или въ обратномъ, какъ въ приведенной задачѣ, измѣняется данный размѣръ другой величины. Въ какомъ отношеніи, прямомъ или обратномъ, слѣдуетъ измѣнить данный размѣръ другой величины,

зависитъ отъ того, входятъ ли въ задачу величины прямо пропорціональныя или обратно пропорціональныя. Свбодное примѣненіе способа пропорціональнаго измѣненія требуетъ основательнаго знакомства съ ученіемъ объ отношеніяхъ. При этомъ условіи дѣти легко понимаютъ этотъ способъ и любятъ примѣнять его къ рѣшенію задачъ.

58. Способъ пропорціональнаго дѣленія примѣняется какъ къ задачамъ, непосредственно относящимся къ этому правилу, такъ и къ задачамъ, приводимымъ къ нему, а потому имѣетъ почти столь же важное значеніе, какъ и способъ приведенія къ единицѣ. Относительно подробностей способа пропорціональнаго дѣленія позволяемъ себѣ опять указать на упомянутое выше наше руководство.

Въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ задачи этого рода могутъ быть даны только въ томъ случаѣ, когда отношенія между частями выражаются цѣлыми числами. Приводимъ такую задачу съ ея рѣшеніями.

34) Число 99 раздѣлить на 3 части такъ, чтобы вторая была втрое, а третья впятеро больше первой; первую часть отнять отъ 20, разность повторить 7 разъ, къ произведенію прибавить 17 и сумму раздѣлить на 5.

Рѣшеніе. Чтобы вторая часть была втрое, а третья впятеро больше первой, надо сдѣлать такъ, чтобы первая содержала въ себѣ одно число, вторая 3 такихъ же числа, а третья пять такихъ же чиселъ; значитъ 99 должно содержать въ себѣ $1+3+5$, т.-е. 9 такихъ же чиселъ, а потому 99 надо раздѣлить на 9 равныхъ долей и въ первую часть взять одну такую долю, во вторую 3 такихъ доли и въ третью 5 такихъ же долей. Раздѣливъ 99 на 9, получивъ 11; въ первой части будутъ 11, во второй $11 \times 3 = 33$, въ третьей $11 \times 5 = 55$. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

Другое рѣшеніе. Первая часть въ самой себѣ содержится 1 разъ, да во второй 3 раза, да въ третьей 5 разъ, слѣд. во всемъ числѣ 99 она должна содержаться $1+3+5=9$ разъ; поэтому первая часть равна $99:9=11$, вторая $11 \times 3 = 33$, третья $11 \times 5 = 55$. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

Рѣшеніе такихъ задачъ полезно начать съ задачъ слѣдующаго характера:

35) Изъ 45 учениковъ третья часть училась хорошо, третья часть—удовлетворительно, а остальные слабо. Хорошихъ и удовлетворительныхъ учениковъ перевели въ слѣдующій классъ, а слабыхъ оставили въ томъ же классѣ. Сколько учениковъ перевели?—сколько оставили?—во сколько разъ перевели больше, чѣмъ оставили?

59. Дѣленіе въ разностномъ отношеніи. Нѣтъ такой книги по ариѳметикѣ, гдѣ въ томъ или другомъ видѣ не трактовался бы вопросъ о пропорціональномъ дѣленіи, но въ очень немногихъ изъ нихъ разбирается вопросъ о дѣленіи числа въ разностномъ отношеніи, хотя задачи, сюда относящіяся, встрѣчаются почти во всѣхъ задачникахъ и простѣйшія изъ нихъ помѣщаются обыкновенно, и совершенно справедливо, на первыхъ страницахъ. Задачи эти гораздо легче задачъ на пропорціональное дѣленіе, и съ пріемами рѣшенія ихъ дѣти, безъ всякаго сомнѣнія, должны быть ознакомлены раньше, чѣмъ съ пріемами рѣшенія задачъ на пропорціональное дѣленіе. Подъ дѣленіемъ числа въ разностномъ отношеніи мы подразумѣваемъ разложеніе числа на нѣсколько слагаемыхъ, между которыми дано разностное отношеніе. Приведемъ нѣсколько задачъ на такое дѣленіе съ ихъ рѣшеніями.

36) Два крестьянина раздѣлили между собою 25 десятинъ земли такъ, что одному досталось 7-ю десятинами больше, чѣмъ другому. Сколько земли досталось каждому?

Рѣшеніе. Чтобы первому досталось 7-ю десятинами больше, чѣмъ второму, можно ему съ самаго начала отдѣлить 7 десятинъ а затѣмъ остающіяся 25—7=18 десят. раздѣлить между обоими поровну. Изъ нихъ каждому придется по 18:2=9 десятинъ. Столько десятинъ достанется второму, а первый получитъ такія же 9 десятинъ, да раньше ему отдѣлено 7 дес., слѣд., всего онъ получитъ 9+7=16 дес.

Для разъясненія этого пріема рѣшенія можетъ служить слѣдующая задача:

37) Изъ 17 карандашей старшій братъ взялъ себѣ сперва 3 карандаша, а остальные раздѣлилъ поровну съ своимъ младшимъ братомъ. Сколько карандашей досталось старшему?—сколько младшему?—на сколько старшему досталось больше, чѣмъ младшему?

Приводимъ другой пріемъ рѣшенія такихъ задачъ.

38) Въ барку нагрузили 4080 четвертей пшеницы, ржи и овса; пшеницы было на 180 четв. меньше, чѣмъ ржи, а ржи на 120 четв. меньше, чѣмъ овса. Сколько было пшеницы?—сколько ржи?—сколько овса?

Рѣшеніе. 4080 есть сумма трехъ неравныхъ слагаемыхъ: числа четвертей пшеницы, ржи и овса. Сравняемъ первое и третье слагаемыя со вторымъ, для чего къ первому надо прибавить 180, а отъ третьяго отнять 120; отъ этого и къ суммѣ прибавится 180 и отнимется 120, и она обратится въ 4080+180—120=4140. Такъ какъ 4140 есть сумма трехъ слагаемыхъ, изъ которыхъ

каждое равно второму, то для опредѣленія второго слагаемаго, т.-е. числа четвертей ржи, остается 4140 раздѣлить на 3; получимъ 1380. Для опредѣленія числа четвертей пшеницы надо отъ 1380 отнять 180, а для опредѣленія числа четвертей овса—къ 1380 прибавить 120; найдемъ, что пшеницы было 1200 четв., а овса 1500 четв.

Подготовкой къ такому пріему рѣшенія можетъ служить задача:

39) Сумма трехъ слагаемыхъ 300, второе слагаемое на 50 единицъ больше, а третье на 20 единицъ меньше перваго. Какая получится сумма, если каждое изъ послѣднихъ двухъ слагаемыхъ сдѣлать одинаковымъ съ первымъ?—если каждое изъ первыхъ двухъ сдѣлать одинаковымъ съ третьимъ?—если и первое и третье сдѣлать одинаковымъ со вторымъ? чему равно каждое слагаемое?

Этотъ пріемъ можетъ быть данъ только послѣ того, когда дѣти ознакомятся съ измѣненіями суммы при измѣненіи слагаемыхъ. Тогда онъ представляетъ очень хорошее приложеніе теоретическихъ положеній ариѳметики къ рѣшенію задачъ. Къ дѣленію числа въ разностномъ отношеніи могутъ быть приведены такія задачи, которыя на первый взглядъ кажутся къ нему не относящимися. Напр., задача:

40) Въ двухъ коробкахъ лежало 63 карандаша, а когда изъ обѣихъ истратили поровну, то въ одной осталось 27 карандашей, а въ другой 18. Сколько карандашей было въ каждой коробкѣ?

приводится къ дѣленію числа въ разностномъ отношеніи помощью слѣдующаго соображенія: если изъ обѣихъ коробокъ истратили поровну, то въ той изъ нихъ было больше, въ которой больше осталось, и на столько, на сколько больше въ ней осталось; поэтому для рѣшенія задачи надо 63 раздѣлить на 2 части такъ, чтобы одна была на 27—18=9 единицъ больше другой. Задача можетъ быть рѣшена, впрочемъ, и иначе: въ обѣихъ коробкахъ осталось 27+18=45 каранд.; изъ обѣихъ истрачено 63—45=18, а изъ каждой 18:2=9; слѣд. въ первой было 27+9=36 каранд., а во второй 18+9=27 карандашей.

60. Способъ произвольнаго допущенія прилагается къ рѣшенію многихъ задачъ и можетъ въ значительной степени видоизмѣняться. Въ общихъ чертахъ онъ состоитъ въ томъ, что мы при рѣшеніи задачи дѣлаемъ сознательно нѣкоторое ошибочное предположеніе и затѣмъ его исправляемъ. Такимъ пріемомъ рѣшена нами выше четвертая задача на правило смѣшенія (№ 25). Та же задача, какъ извѣстно, можетъ быть приведена

къ пропорціональному дѣленію. Способомъ произвольнаго допущенія рѣшаются также многія задачи, по условіямъ близкія къ 4-му виду задачъ на смѣшеніе, но которыя въ собственномъ смыслѣ къ смѣшенію не относятся. Такова, напр., задача:

41) Разносчикъ продавалъ яблоки по 3 коп. и груши по 8 коп. за штуку. Сколько онъ продалъ яблокъ и сколько грушъ, если за 60 штукъ тѣхъ и другихъ выручилъ 3 рубля?

Рѣшеніе. Допустивъ, что разносчикъ продалъ одни яблоки, мы найдемъ, что онъ долженъ былъ бы выручить $3\times60=180$ коп., т.-е. на $300-180=120$ коп. меньше его дѣйствительной выручки. Эта разность въ 120 коп. произошла отъ того, что каждая груша дороже яблока на $8-3=5$ коп. Если бы мы допустили, что разносчикъ только вмѣсто одной груши продалъ одно яблоко, то тогда высчитанная нами выручка отличалась бы отъ дѣйствительной на 5 коп., а такъ какъ всего она отличается отъ дѣйствительной на 120 коп., то разносчикъ всего продалъ грушъ $120:5=24$ штуки, а яблокъ $60-24=36$ штукъ.

Такимъ же пріемомъ могутъ быть рѣшены задачи:

42) Изъ магазина продали 5080 штукъ апельсиновъ и лимоновъ съ прибылью въ 28 руб. 20 коп., при чемъ на каждый десятокъ апельсиновъ получено 18 коп. прибыли, а на каждый десятокъ лимоновъ 13 коп. убытку. Сколько продали апельсиновъ?—сколько лимоновъ?

Рѣшеніе. Допустимъ, что всѣ 5080 штукъ были апельсины тогда магазинъ долженъ былъ бы получить $18\times508=9144$ коп. прибыли, на $9144-2820=6324$ коп. больше, чѣмъ требуется въ задачѣ. Чтобы уничтожить этотъ излишекъ, надо часть апельсиновъ замѣнить лимонами. Отъ замѣны одного десятка апельсиновъ десяткомъ лимоновъ покроется только $18+13=31$ коп. изъ этого излишка въ прибыли, слѣдовательно, лимоновъ было продано $6324:31=204$ десятка, а апельсиновъ $508-204=304$ десятка.

43) Хозяйка за $1^1/_4$ фунта чаю и за голову сахара заплатила 7 руб. 2 коп.; на другой мѣсяцъ, когда цѣна чая повысилась на $4^1/_6\,\%$, а цѣна сахара понизилась на $8^1/_3\,\%$, ей за то же количество чаю и сахару пришлось заплатить 6 р. 81 коп. Найти первоначальную цѣну чая и сахара, если голова сахару вѣсила въ оба раза по $22^1/_2$ фунта.

Рѣшеніе. Допустимъ, что оба товара повысились въ цѣнѣ на $4^1/_6\,\%$; тогда во второй мѣсяцъ хозяйкѣ пришлось бы заплатить $702:100\,.\,4^1/_6=29^1/_4$ коп. лишнихъ противъ перваго, т.-е. во второй мѣсяцъ всего пришлось бы заплатить $702+29^1/_4=731^1/_4$ коп., на $731^1/_4-681=50^1/_4$ коп. больше дѣйствительно уплаченной суммы. Этотъ излишекъ произошелъ отъ того, что на сахарѣ, вмѣсто пониженія въ цѣнѣ на $8^1/_3\,\%$, мы предположили повышеніе въ $4^1/_6\,\%$; слѣдовательно $50^1/_4$ коп. составляютъ $4^1/_6+8^1/_3=12^1/_2\,\%$ первоначальной стоимости сахару; а потому сахаръ стоилъ $50^1/_4:12^1/_2\times100=402$ коп. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

61. Къ способу произвольнаго допущенія примыкаетъ способъ подобія. Способъ подобія примѣняется къ задачамъ на пропорціональныя величины. Состоитъ онъ въ томъ, что неизвѣстнымъ даютъ произвольныя значенія, сохраняя между ними заданныя отношенія, и при помощи этихъ значеній находятъ размѣръ величины, которая дана въ задачѣ и которая пропорціональна неизвѣстнымъ; затѣмъ находятъ отношенія двухъ размѣровъ этой величины, даннаго и найденнаго, и производятъ соотвѣтствующія измѣненія во взятыхъ значеніяхъ неизвѣстныхъ. Примѣненія способа подобія очень обширны. Приведемъ нѣсколько задачъ съ ихъ рѣшеніями.

44) Чайный торговецъ купилъ три ящика чаю, всего $3^1/_4$ пуда, и за первый ящикъ заплатилъ 72 руб., за второй 66 руб. и за третій 40 руб. Сколько чаю было въ каждомъ ящикѣ, если 1,1 фунта изъ перваго ящика стоили столько же, сколько $1^1/_5$ изъ второго, а $6^2/_3$ фунта изъ второго, сколько $5^1/_2$ фун. изъ третьяго?

Рѣшеніе. Допустимъ, что въ первомъ ящикѣ было 8 фун. чаю; тогда фунтъ его стоилъ $72:8=9$ руб., слѣд. 1,1 фунта его стоили $9\,.\,1{,}1=9{,}9$ руб.; а такъ какъ столько же стоили $1^1/_5$ фун. чаю изъ второго ящика, то фунтъ его стоилъ $9{,}9:1^1/_5=5^1/_2$ руб., и чаю во второмъ ящикѣ было $66:5^1/_2=12$ фун. Если фунтъ чаю изъ второго ящика стоилъ $5^1/_2$ руб., то $6^2/_3$ фун. его стоили $5^1/_2\times6^2/_3=36^2/_3$ руб.; столько же стоили $5^1/_2$ фун. изъ третьяго ящика, слѣд. фун. его стоилъ $36^2/_3:5^1/_2=6^2/_3$ руб., и въ 3-мъ ящикѣ было $40:6^2/_3=6$ фун. чаю. Такимъ образомъ мы найдемъ, что чаю въ трехъ ящикахъ тогда было бы $8+12+6=26$ фун. А у насъ, дано, что его было $40\times3^1/_4=130$ ф., т.-е. въ $130:26=5$ разъ больше; слѣд. и въ каждомъ ящикѣ было тоже въ 5 разъ больше, т.-е. въ первомъ было $8\,.\,5=40$ фунтовъ; во второмъ $12\times5=60$ фун., въ третьемъ $6\times5=30$ фунтовъ, или: 1 пудъ, $1^1/_2$ пуда, $^3/_4$ пуда.

45) Изъ двухъ сортовъ муки, въ 1 р. 75 к. и въ 1 р. 55 к. за пудъ, составлена смѣсь въ 1 р. 68 к. за пудъ. Сколько взято муки каждаго сорта, если перваго сорта вошло въ смѣсь на 1 пудъ 8 фун. больше, чѣмъ второго?

Рѣшеніе. Возьмемъ перваго сорта 13 пудовъ. Каждый пудъ перваго сорта даетъ 175 — 168 = 7 коп. убытку, а 13 пудовъ дадутъ 7×13=91 коп. убытку. Столько же прибыли долженъ дать второй сортъ. Каждый пудъ его даетъ 168—155=13 к. прибыли; слѣд. второго сорта, при 13 пудахъ перваго, надо взять 91 : 13=7 пудовъ. Тогда перваго сорта войдетъ въ смѣсь на 13—7=6 пудовъ больше, чѣмъ второго, а намъ надо, чтобы его вошло только на $1^1/_5$ пуда больше; $1^1/_5$ меньше 6-ти въ $6 : 1^1/_5 = 5$ разъ, слѣд. и каждаго сорта надо взять въ 5 разъ меньше, т.-е. перваго сорта надо взять $13 : 5 = 2^3/_5$ пуда, или 2 пуд. 24 фун., а второго $7 : 5 = 1^2/_5$ пуда, или 1 пудъ 16 фун.

46) При продажѣ головы сахару, вѣсомъ въ 19,2 фун., за 3 руб. 8 коп., торговецъ понесъ $2^7/_9\,\%$ убытку. Что стоитъ фунтъ этого сахару самому торговцу?

Рѣшеніе. Если бы фунтъ сахару стоилъ продавцу 100 к., то онъ его продавалъ бы за $100 - 2^7/_9 = 97^2/_9$ коп. и выручилъ бы за всю голову $97^2/_9 \times 19{,}2 = 1866^2/_3$ коп., въ $1866^2/_3 : 308 = 6^2/_{33}$ раза больше данной стоимости головы сахару; слѣд. фунтъ сахару стоилъ въ $6^2/_{33}$ раза меньше 100 копеекъ, т.-е. онъ стоилъ $100 : 6^2/_{33} = 16^1/_2$ коп.

Вообще всѣ задачи на проценты могутъ быть рѣшаемы способомъ подобія, при чемъ начальный капиталъ для простоты можетъ быть предполагаемъ всегда въ 100 руб. Замѣтимъ, что для задачъ на проценты существуютъ иные болѣе легкіе и прямые пріемы, которые въ своемъ мѣстѣ и будутъ нами указаны.

62. Остальные изъ существующихъ пріемовъ ариѳметическаго рѣшенія задачъ по большей части заключаютъ въ себѣ элементы перечисленныхъ пріемовъ, очень разнообразны и трудно поддаются точному формулированію. Какъ на одинъ изъ такихъ пріемовъ, можно указать пріемъ, которымъ рѣшена выше приведенная задача о четырехъ игрокахъ и который, слѣдуя г-ну Александрову, можно назвать способомъ перемѣщенія или перестановки данныхъ. Тотъ же авторъ выдѣляетъ какъ особые способы ариѳметическаго рѣшенія задачъ: способы исключенія неизвѣстныхъ (сложенія и вычитанія, подстановки, уравниванія неизвѣстныхъ), способъ метатезиса извѣстнаго и неизвѣстнаго, т.-е., если можно такъ выразиться, переносъ наименованій отъ извѣстныхъ къ неизвѣстнымъ (напр. цѣну аршина, выраженную въ рубляхъ, считать за число аршинъ, а число аршинъ за цѣну аршина), способъ среднихъ ариѳметическихъ, способъ остатковъ и наконецъ способъ двойныхъ гипотезъ (фальшивое или гадательное правило Магницкаго). Относительно способа исключенія неизвѣстныхъ слѣдуетъ сказать, что онъ носитъ скорѣе алгебраическій, чѣмъ ариѳметическій, характеръ. Способу метатезиса самъ авторъ не

придаетъ существеннаго значенія. И дѣйствительно: задача, къ которой онъ его примѣняетъ, можетъ быть рѣшена безъ этого способа, слишкомъ искусственнаго. Приводимъ задачу и ея рѣшеніе, которое намъ кажется болѣе подходящимъ.

47) Купецъ продалъ нѣсколько аршинъ синяго сукна по 7 руб. и нѣсколько аршинъ чернаго по 3 р., всего на сумму 44 руб.; въ другой разъ онъ продалъ и синяго сукна, и чернаго сукна по стольку же аршинъ, что и въ первый разъ, но выручилъ только 43 руб., потому что синее сукно продавалъ по 5 руб., а черное по 6 руб. за аршинъ. Сколько продано каждаго сукна?

Рѣшеніе. Если бы купецъ въ первый разъ продалъ все сукно вдвое дороже, т.-е. синее по 7.2=14 руб. и черное по 3×2=6 р. за аршинъ, то и выручилъ бы вдвое больше, т.-е. 44×2=88 руб., на 88—43=45 руб. больше, чѣмъ во второй разъ. Но тогда черное сукно онъ продавалъ бы въ оба раза по одинаковой цѣнѣ, а синее сукно въ первый разъ на 14—5=9 руб. за аршинъ дороже, чѣмъ во второй. Такъ какъ отъ этого стоимость всего сукна повышается на 45 руб., то синяго сукна продано 45 : 9 = 5 аршинъ. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

Способъ среднихъ ариѳметическихъ есть по существу способъ рѣшенія задачъ на правило смѣшенія, соотвѣтствующихъ четвертому виду приведенныхъ нами выше задачъ на это правило.

Чтобы познакомить со способомъ, который г. Александровъ называетъ способомъ остатковъ, приведемъ нѣсколько задачъ, удобно рѣшающихся этимъ пріемомъ.

48) Если поѣздъ желѣзной дороги будетъ итти по 40 верстъ въ часъ, то на все разстояніе между двумя городами употребитъ 3 часами 46 мин. 30 сек. меньше времени, чѣмъ назначено; если же онъ будетъ итти по 30 верстъ въ часъ, то ему потребуется на 1 часъ 15 мин. 30 сек. больше времени, чѣмъ назначено. Сколько верстъ между этими городами?

Рѣшеніе. Проходя 40 верстъ въ часъ, поѣздъ на каждую версту затрачиваетъ 1 часъ : 40 = 1 м. 30 сек., а проходя 30 верстъ въ часъ, на версту затрачиваетъ 1 час. : 30 = 2 мин. Затрачивая на 1 версту 2 мин.—1 м. 30 сек.=30 секундами меньше времени, поѣздъ выгадываетъ на всемъ разстояніи 3 час. 46 м. 30 сек. + 1 час. 15 мин. 30 сек.=18120 секундъ; слѣд. разстояніе между городами заключало въ себѣ 18120 : 30 = 604 версты.

49) У торговца ягодами было 38 фунт. малины, которую онъ разложилъ въ корзинки, по $2^3/_8$ фунта въ каждую, и 23,75 фунта земляники, которую разложилъ въ корзинки,

по $1^3/_{16}$ фунта въ каждую. Когда онъ продалъ одинаковое число корзинокъ той и другой, то у него осталось столько же земляники, сколько и малины. Сколько выручилъ торговецъ за проданную ягоду, если малину онъ продавалъ по 12 коп., а землянику по 16 коп. за фунтъ?

Рѣшеніе. Малины у разносчика было на $38-23{,}75=14{,}25$ фунта больше, чѣмъ земляники; отъ продажи одной корзинки земляники и одной корзинки малины эта разность уменьшалась на $2^3/_8-1^3/_{16}=1^3/_{16}$ фунт.; слѣд. торговецъ продалъ по стольку корзинокъ малины и корзинокъ земляники, сколько разъ $1^3/_{16}$ содержится въ 14,25; т.-е. по 12 корзинокъ. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

50) Поѣзда желѣзной дороги въ прямомъ направленіи двигаются со скоростью 24 верстъ въ часъ, а въ обратномъ—со скоростью 16 верстъ въ часъ, и на обратный путь употребляютъ 4-мя часами болѣе, чѣмъ на прямой. Какой длины дорога?

Рѣшеніе. Когда въ обратномъ направленіи поѣздъ будетъ итти столько же времени, сколько и въ прямомъ, то ему останется пройти до конца дороги еще $16\times4=64$ версты. Этого остатка не бываетъ при движеніи въ прямомъ направленіи отъ того, что въ этомъ направленіи поѣздъ проходитъ на $24-16=8$ верстъ въ часъ больше, чѣмъ въ обратномъ; слѣд. въ прямомъ направленіи поѣздъ все разстояніе проходитъ въ $64:8=8$ часовъ; длина всей дороги равна $24\times8=192$ верстамъ.

Что касается способа двойныхъ гипотезъ, или такъ называемаго фальшиваго правила, то онъ очень трудно поддается разъясненію и введенъ былъ въ ариѳметику въ то время, когда способы рѣшенія уравненій были еще не разработаны. Въ настоящее время онъ не имѣетъ значенія и во всякомъ случаѣ не можетъ быть вводимъ въ преподаваніе, такъ какъ задачи, разрѣшаемыя при его помощи, или могутъ быть рѣшены иными пріемами, или уже настолько трудны и запутаны, что рѣшеніе ихъ дѣтьми не мыслимо. Всѣ задачи, которыя приведены г. Александровымъ на этотъ способъ въ его „Методахъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ“, безусловно, какъ и онъ самъ указываетъ, могутъ быть рѣшены иными способами.

Считаемъ долгомъ обратить вниманіе преподавателей ариѳметики на эту книгу, которой и мы отчасти пользовались при предлагаемомъ изложеніи способовъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ.

Въ заключеніе надо сказать, что перечисленные способы ариѳметическаго рѣшенія задачъ далеко не обнимаютъ всѣхъ возможныхъ пріемовъ рѣшенія. Почти каждая задача позволяетъ

видоизмѣнить одинъ изъ общихъ пріемовъ, а нѣкоторыя задачи могутъ потребовать и спеціально для нихъ подобраннаго пріема рѣшенія.

Мы здѣсь не остановились подробно на правилѣ процентовъ и совершенно не коснулись правилъ учета векселей и перевода мѣръ. Задачи эти не требуютъ спеціальныхъ пріемовъ и разрѣшаются тѣми же способами, которые вообще примѣнимы къ задачамъ на пропорціональныя величины.

63. Работы при рѣшеніи задачъ съ дѣтьми. Предложеніе задачъ. Обращаясь къ рѣшенію задачъ съ дѣтьми, прежде всего слѣдуетъ сказать о способахъ предложенія задачъ дѣтямъ.

Предлагаться задачи могутъ въ трехъ различныхъ формахъ: 1) задача предлагается преподавателемъ отъ себя, 2) задача читается преподавателемъ по задачнику и 3) задача читается по задачнику дѣтьми. Первая форма самая удобная и для дѣтей, и для учителя, потому что въ ней преподаватель невольно приноравливается къ дѣтскому пониманію и, слѣдя за дѣтьми, можетъ легко узнать, что въ задачѣ ими не понято, и на разъясненіе этого мѣста обратить особенное вниманіе. Вторая форма, весьма мало отличаясь отъ первой, имѣетъ то весьма важное неудобство, что лишаетъ преподавателя возможности слѣдить за дѣтьми во время предложенія задачи и подмѣчать ихъ отношеніе къ дѣлу. По нашему мнѣнію, къ ней надо прибѣгать возможно рѣже. Третья форма прилагается къ задачамъ, задаваемымъ для самостоятельнаго рѣшенія въ классѣ и внѣ класса.

При рѣшеніи простыхъ задачъ въ большей части случаевъ достаточно предложить задачу для того, чтобы она была на столько усвоена дѣтьми, на сколько это необходимо для ея рѣшенія. Что касается сложныхъ задачъ, то одного предложенія задачи иногда оказывается недостаточнымъ. Чтобы судить, усвоили ли дѣти содержаніе задачи и вмѣстѣ съ тѣмъ способствовать ея усвоенію, хорошимъ средствомъ служитъ повтореніе задачи однимъ изъ учениковъ, котораго, въ случаѣ ошибокъ, должны поправлять товарищи по назначенію преподавателя. Если никто изъ учениковъ не вызывается исправить ошибки, это можетъ сдѣлать самъ преподаватель; но никогда не слѣдуетъ самому преподавателю повторять нѣсколько разъ всю задачу, потому что при такомъ порядкѣ дѣти привыкаютъ недостаточно внимательно относиться къ первому предложенію задачи и считаютъ себя въ правѣ требовать многократнаго повторенія задачи учителемъ, а это ведетъ къ потерѣ времени и къ безпорядкамъ въ классѣ. При нѣкоторой настойчивости легко достигнуть, чтобы черезъ 4—6 недѣль послѣ начала ученія каждый ученикъ могъ повторить предложенную преподавателемъ задачу безъ особаго искаженія смысла. Когда повтореніе

задачи не дается дѣтямъ сразу, то полезно вызвать содержаніе ея рядомъ вопросовъ, поставленныхъ такъ, чтобы они требовали воспроизведенія задачи. Вопросы: „о комъ (о чемъ) говорится въ задачѣ?“, „что говорится“ и т. п., совершенно непригодны по своей многочисленности и неопредѣленности; каждый вопросъ долженъ быть поставленъ такъ, чтобы вызвать въ отвѣтъ какое-либо данное число задачи. Такъ, для воспроизведенія задачи:

51) Разносчикъ, купивъ у крестьянки 2 корзинки ягодъ, въ одной 5, а въ другой 4 фунта, по 40 коп. за корзинку, переложилъ эти ягоды въ меньшія корзинки, по 3 фунта въ каждую, и продалъ ихъ по 30 коп. за корзинку. Сколько прибыли получилъ разносчикъ?

можно предложить слѣдующіе вопросы:

Сколько корзинокъ съ ягодами купилъ разносчикъ? Сколько ягодъ было въ каждой корзинкѣ?—Въ какія корзинки онъ пересыпалъ ягоды и по скольку въ каждую?—Почемъ онъ покупалъ каждую корзинку и почемъ продавалъ?—Что спрашивается въ задачѣ?

Въ первое время обученія полезно заставлять дѣтей отдѣлять данныя задачи отъ вопроса, предлагая для этого перечислять все, что дано въ задачѣ, и сказать, что въ ней ищется. Особенно важно отдѣленіе данныхъ отъ вопроса въ тѣхъ задачахъ, въ которыхъ формою рѣчи вопросъ связанъ съ однимъ или нѣсколькими данными въ выраженіяхъ въ родѣ слѣдующихъ: „сколько, получено прибыли, если“, „сколько у землевладѣльца стало земли если“ и т. д. Такихъ выраженій лучше избѣгать въ первое время обученія.

Если въ задачѣ встрѣчаются незнакомыя дѣтямъ слова и условныя выраженія, то необходимо ихъ объяснить, при чемъ съ такими словами и выраженіями лучше познакомить раньше предложенія задачи, потому что дѣти съ трудомъ запоминаютъ слова и выраженія, смысла которыхъ не понимаютъ.

Вспомогательнымъ средствомъ для усвоенія содержанія задачи можетъ служить запись ея на классной доскѣ и въ тетрадяхъ учениковъ. Запись не должна содержать словеснаго изложенія всѣхъ условій задачи, а только одни данныя числа, расположенныя при томъ такъ, чтобы расположеніе это указывало въ нѣкоторой степени на связь между данными. Полная запись всей задачи занимаетъ на классной доскѣ и въ тетрадяхъ учениковъ много мѣста и мѣшаетъ легко находить нужныя данныя. Кромѣ данныхъ, можно записывать иногда и вопросъ задачи. Сейчасъ приведенная задача можетъ быть записана слѣдующимъ образомъ:

1) 5 ф. } по 40 коп. за корз.
2) 4 ф. } по 40 коп. за корз.
По 3 ф. въ корз., по 30 коп. за корз. } Ск. получ. прибыли?

При письменномъ рѣшеніи задачъ полезно пріучать учениковъ къ подобной записи задачи и тогда, когда они рѣшаютъ задачу по задачнику, потому что такая запись выдѣляетъ данныя задачи и ихъ соотношенія рельефнѣе, чѣмъ полное изложеніе условій въ задачникѣ.

64. При рѣшеніи задачъ съ дѣтьми слѣдуетъ начинать несомнѣнно съ простыхъ задачъ, но и въ теченіе всего курса приходится по временамъ предлагать простыя задачи съ цѣлью выяснить какое-либо ариѳметическое положеніе или для упражненія въ какомъ-либо новомъ для дѣтей пріемѣ вычисленія, когда всякое усложненіе задачи можетъ вредно отразиться на успѣхѣ дѣла, отвлекая вниманіе дѣтей отъ главной цѣли урока. За исключеніемъ этихъ случаевъ, должно предлагать дѣтямъ преимущественно сложныя задачи, какъ дающія болѣе матеріала для ихъ развитія и болѣе интересующія дѣтей.

Содержаніе начальныхъ задачъ должно браться изъ области отношеній, знакомыхъ дѣтямъ; иначе имъ придется знакомиться съ новымъ для нихъ дѣломъ рѣшенія задачъ на матеріалѣ, мало для нихъ понятномъ и требующимъ много разъясненій со стороны преподавателя. Эти разъясненія могутъ совершенно заслонить отъ дѣтей самое рѣшеніе задачи.

65. Требованія отъ дѣтей при рѣшеніи простыхъ задачъ. При рѣшеніи простыхъ задачъ дѣти должны: 1) найти окончательный отвѣтъ на задачу, 2) указать дѣйствіе, которымъ задача рѣшена, 3) изложить пріемъ вычисленія окончательнаго отвѣта; т.-е. дѣти должны отвѣтить на вопросы:

Какой отвѣтъ получили?—Какое дѣйствіе произвели для рѣшенія задачи?—Какъ произвели это дѣйствіе?

Въ бо́льшей части случаевъ эти требованія должны быть поставлены въ приведенномъ порядкѣ, потому что для дѣтей естественно прежде всего постараться отвѣтить на предложенный въ задачѣ вопросъ и потомъ уже прослѣдить, какъ этотъ отвѣтъ ими найденъ. Кромѣ того, ставя на первое мѣсто требованіе окончательнаго отвѣта, мы даемъ возможность каждому ученику не только самостоятельно сдѣлать вычисленіе, но и выбрать необходимое для рѣшенія задачи дѣйствіе. Многіе считаютъ весьма существеннымъ, чтобы дѣти при выборѣ дѣйствія излагали и основаніе, по которому дѣйствіе ими выбрано. Вполнѣ обстоятельный отвѣтъ на это требованіе возможенъ только тогда, когда дѣти ознакомятся со всѣми основными вопросами каждаго дѣйствія, потому что правильный отвѣтъ долженъ состоять въ указаніи на то,

что вопросъ задачи есть частный видъ общаго вопроса, рѣшаемаго такимъ-то дѣйствіемъ. Въ началѣ же преподаванія отвѣтъ на такое требованіе можетъ состоять только въ поясненіи, что предложенный вопросъ можетъ быть рѣшенъ тѣмъ пріемомъ вычисленія, который характеризуетъ данное дѣйствіе. При сложеніи и вычитаніи объясненіе это въ бо́льшей части случаевъ сводится къ повторенію условій задачи и ошибокъ въ выборѣ дѣйствій почти не встрѣчается; поэтому требованіе это можно предлагать только при умноженіи и дѣленіи, и вообще въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣти ошибаются въ выборѣ дѣйствія. Ошибки въ указаніи дѣйствія особенно часто встрѣчаются въ началѣ обученія. Такая ошибка при вѣрномъ окончательномъ отвѣтѣ не можетъ еще считаться доказательствомъ того, что задача не рѣшена и отвѣтъ найденъ догадкой или взятъ у другого ученика. Указаніе дѣйствія требуетъ отъ ребенка не только рѣшенія задачи, но и наблюденія надъ ходомъ мысли, которымъ онъ дошелъ до рѣшенія, а самонаблюденіе мало доступно дѣтямъ. Ошибки, наичаще встрѣчающіяся, состоятъ въ указаніи, вмѣсто требуемаго дѣйствія, взаимообратнаго съ нимъ. Такъ вмѣсто вычитанія дѣти часто указываютъ сложеніе, вмѣсто дѣленія—умноженіе. Сдѣлавъ, напр., вычитаніе 7-ми изъ 10-ти и получивъ 3, ребенокъ въ то же время соображаетъ, что 3 и 7 должны составить вмѣстѣ 10, и потому указываетъ, вмѣсто вычитанія, сложеніе; или, слѣдуя формѣ вопроса задачи, онъ вычитаніе 7-ми изъ 10-ти производитъ, соображая, сколько единицъ надо добавить къ 7-ми, чтобы получить 10, и это понятіе „добавить для полученія 10-ти“ указываетъ въ опредѣленіи дѣйствія, говоря, что задача рѣшена сложеніемъ. Для предупрежденія такихъ ошибокъ, полезно по временамъ измѣнять намѣченный выше порядокъ рѣшенія задачи, требуя отъ дѣтей указанія дѣйствія ранѣе опредѣленія ими окончательнаго отвѣта, а для исправленія ихъ полезно заставлять дѣтей производить надъ данными числами задачи указанныя ими дѣйствія. Несообразность полученнаго отвѣта лучше всего можетъ убѣдить дѣтей въ неправильности сдѣланнаго ими указанія дѣйствія.

Если задача рѣшена вѣрно всѣми дѣтьми, то можно не требовать отъ нихъ отчета въ томъ, какъ произведено вычисленіе. Отчетъ этотъ необходимо слѣдуетъ требовать только въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣкоторыми дѣтьми получены ошибочные отвѣты, когда пріемъ вычисленія недостаточно еще усвоенъ дѣтьми и когда преподаватель имѣетъ въ виду замѣнить извѣстный уже дѣтямъ пріемъ вычисленія другимъ, болѣе короткимъ. Къ изложенію пріемовъ вычисленія должно привлекать преимущественно учениковъ слабыхъ или давшихъ невѣрный отвѣтъ на задачу.

Если простая задача рѣшается письменно, то раньше рѣшенія полезно требовать отъ дѣтей указанія дѣйствія, къ которому она относится; въ противномъ случаѣ нѣкоторыя дѣти могутъ ошибиться въ выборѣ дѣйствія, а исправленіе этой ошибки при письменномъ вычисленіи занимаетъ много времени. Письменное рѣшеніе задачи производится непремѣнно всѣми дѣтьми, одними въ своихъ тетрадяхъ, другими на классной доскѣ, къ которой они вызываются по очереди. Одновременное рѣшеніе въ тетрадяхъ и на классной доскѣ очень удобно для исправленія ошибокъ въ вычисленіяхъ.

66. Требованія отъ дѣтей при рѣшеніи сложныхъ задачъ. Переходъ къ рѣшенію сложныхъ задачъ представляетъ для дѣтей существенный шагъ впередъ. Рѣшая простыя задачи, они упражнялись только въ выборѣ дѣйствій, необходимыхъ для задачи, и въ производствѣ вычисленій; съ рѣшеніемъ же сложныхъ задачъ, какъ мы видѣли, необходимо связано расчлененіе ихъ на простыя задачи. Чтобы подготовить дѣтей къ этой новой работѣ, полезно упражнять ихъ въ составленіи простыхъ задачъ съ заданными преподавателемъ данными или съ заданнымъ вопросомъ. Въ первомъ случаѣ дѣти сами должны поставить вопросъ задачи, во второмъ—подобрать данныя, необходимыя для рѣшенія предложеннаго вопроса. Вотъ нѣсколько образцовъ такихъ упражненій:

У разносчика на лоткѣ стояли 3 корзины и въ каждой лежало по 3 дыни. Что можно узнать объ этомъ разносчикѣ?

Докончите задачу: богомолка прошла изъ своей деревни до монастыря 8 верстъ и въ часъ проходила по 4 версты...

Мальчику 10 лѣтъ, а сестра впятеро моложе его. Что можно узнать про сестру мальчика?

Учитель принесъ въ классъ коробку грифелей и роздалъ изъ нея 8 грифелей ученикамъ. Что долженъ сосчитать учитель, чтобы потомъ узнать, сколько грифелей было въ коробкѣ?

Кухаркѣ на покупку провизіи дали 1 рубль. Что надо сосчитать, чтобы узнать, вѣрно ли ей дали сдачу?

Крестьянинъ отправился изъ деревни въ городъ на пассажирскомъ поѣздѣ желѣзной дороги и прибылъ въ городъ черезъ 3 часа. О чемъ вы спросите крестьянина, чтобы сосчитать, сколько верстъ отъ деревни до города?—О чемъ спросите, чтобы сосчитать, сколько верстъ проходилъ поѣздъ въ часъ?

Купецъ купилъ землю за 60 рублей. Что еще нужно знать, чтобы опредѣлить сколько десятинъ куплено?—Что еще нужно знать, чтобы опредѣлить цѣну каждой десятины?

Въ тѣхъ же видахъ полезно требовать отъ дѣтей составленія задачъ, которыя рѣшались бы назначеннымъ дѣйствіемъ, при чемъ иногда можно давать и числа, надъ которыми должно быть произведено назначенное дѣйствіе, а иногда предоставлять дѣтямъ и выборъ чиселъ. Образцы такихъ упражненій можно найти въ составленныхъ нами „Задачахъ на цѣлыя числа“.

При упражненіяхъ въ составленіи задачъ полезно обратить вниманіе дѣтей на то, что при однородности данныхъ могутъ быть поставлены вопросы, относящіеся къ сложенію, вычитанію и дѣленію по содержанію, а при разнородности—вопросы, относящіеся къ умноженію и дѣленію на части.

Чтобы уяснить дѣтямъ необходимость расчленять сложную задачу на простыя, можетъ служить слѣдующее упражненіе. Выбравъ какую-либо сложную задачу, преподаватель предлагаетъ сперва рѣшить дѣтямъ одну за другой—всѣ простыя задачи, на которыя расчленяется выбранная сложная. Напр., передъ рѣшеніемъ сложной задачи:

52) Мальчикъ подъ одной яблоней нашелъ 5 яблокъ, а подъ другой 4 яблока; изъ нихъ 3 яблока самъ съѣлъ, а остальныя отдалъ своимъ сестрамъ, по 2 яблока каждой. Сколько у мальчика сестеръ?

рѣшаются съ дѣтьми послѣдовательно простыя задачи:

Мальчикъ подъ одной яблоней нашелъ 5 яблокъ, а подъ другой 4; сколько яблокъ онъ нашелъ?

Изъ этихъ яблокъ онъ съѣлъ 3 штуки; сколько яблокъ у него осталось?

Оставшіяся яблоки онъ роздалъ сестрамъ, по 2 яблока каждой; сколько у мальчика сестеръ?

Затѣмъ заставляютъ дѣтей перечислить все, что имъ было извѣстно въ этихъ трехъ задачахъ и что они нашли въ послѣдней задачѣ. Такимъ образомъ дѣти составятъ выбранную преподавателемъ сложную задачу. Послѣ этого имъ можно предложить совершенно такую же сложную задачу, только съ другими данными; напр.:

53) Другой мальчикъ подъ одной яблоней нашелъ 7 яблокъ, а подъ другой 3 яблока; изъ нихъ 4 яблока съѣлъ самъ, а остальныя роздалъ своимъ сестрамъ, по 3 яблока каждой. Сколько сестеръ у этого мальчика?

Можно ожидать, что эту задачу дѣти уже легко расчленятъ на простыя, а въ случаѣ затрудненій преподаватель всегда имѣетъ возможность указать на предыдущую задачу и на задачи, изъ которыхъ она была составлена. Нѣсколько такихъ упражненій значительно подвинутъ дѣло впередъ.

67. Устное рѣшеніе сложныхъ задачъ. Прежде всего установимъ порядокъ упражненій при устномъ рѣшеніи сложныхъ задачъ.

Если задача не очень трудна, то можно предоставить дѣтямъ рѣшить ее самостоятельно. Самостоятельное рѣшеніе пріучаетъ дѣтей разбираться въ условіяхъ задачи, чего очень трудно достигнуть, если задачи постоянно рѣшаются при помощи учителя; оно же даетъ случай прилагать, а слѣд. и развивать необходимую при рѣшеніи задачъ находчивость въ выборѣ пріемовъ рѣшенія.

Для самостоятельнаго рѣшенія задачи надо предоставить въ распоряженіе дѣтей достаточно времени для того, чтобы вдуматься въ условія задачи, установить планъ рѣшенія и выполнить требуемыя задачей вычисленія. При числахъ, удобныхъ для устнаго вычисленія, на все это требуется не болѣе 5 минутъ. Не слѣдуетъ дожидаться рѣшенія задачи всѣми дѣтьми. Въ каждомъ классѣ всегда найдутся дѣти, стоящія по способностямъ и по знаніямъ ниже другихъ; отъ нихъ нельзя ожидать самостоятельнаго исполненія работъ, приноровленныхъ къ общему уровню класса. Не слѣдуетъ также много увеличивать количество времени для самостоятельнаго рѣшенія, если преподаватель замѣчаетъ, что дѣти затрудняются въ рѣшеніи. Обыкновенно при самостоятельномъ рѣшеніи задачи классъ раздѣляется на нѣсколько группъ: одни дѣти заявляютъ о полученномъ рѣшеніи почти тотчасъ послѣ предложенія задачи, мало-по-малу начинаютъ къ нимъ присоединяться остальныя дѣти, но почти постоянно остается нѣсколько человѣкъ, отъ которыхъ нельзя дождаться рѣшенія. Если заявленія о рѣшеніи долго не получается и отъ дѣтей первой группы, то это означаетъ, что задача или непосильна для класса, или дѣти слишкомъ утомлены предшествовавшими занятіями; или задача требуетъ отъ нихъ нѣкоторой находчивости, которой въ данный моментъ у нихъ не является. Оставлять дѣтей долго безъ помощи въ этомъ непріятномъ положеніи едва ли умѣстно, тѣмъ болѣе, что долгое ожиданіе самостоятельнаго рѣшенія оказывается почти всегда безплоднымъ. Въ такомъ случаѣ лучше прекратить самостоятельное рѣшеніе задачи дѣтьми и совмѣстно съ ними выработать пріемъ ея рѣшенія.

Самостоятельное рѣшеніе задачи дѣтьми должно быть закончено отобраніемъ отъ рѣшившихъ задачу полученныхъ ими отвѣтовъ. Помимо контроля въ исполненіи работы, полученные дѣтьми отвѣты укажутъ преподавателю, насколько классъ сладилъ съ предложенной задачей и насколько подробно надо остановиться на разборѣ ея рѣшенія. Прибавимъ практическое замѣчаніе, что отвѣты отбирать слѣдуетъ сперва отъ болѣе слабыхъ

учениковъ и затѣмъ уже переходить къ болѣе сильнымъ; авторитетъ послѣднихъ часто заставляетъ слабыхъ учениковъ измѣнять свои отвѣты.

68. Слѣдующая работа должна состоять въ объясненіи учениками полученнаго ими рѣшенія. При этомъ объясненіи ученики должны расчленить сложную задачу на простыя, при чемъ каждая простая задача должна быть формулирована достаточно полно и точно, и изложить болѣе или менѣе полно рѣшеніе каждой простой задачи. При подробномъ разборѣ рѣшенія задачи требованія эти предъявляются относительно каждой простой задачи въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) простая задача должна быть ясно выражена дѣтьми съ указаніемъ и вопроса, и данныхъ, необходимыхъ для его рѣшенія, 2) должно быть дано ея рѣшеніе, 3) объяснено, какимъ дѣйствіемъ оно получено и 4) разсказано, какъ это дѣйствіе выполнено. Требованія эти могутъ быть выражены для первой простой задачи слѣдующими вопросами:

Что вы сначала узнали въ задачѣ?—По какимъ даннымъ?—Сколько получили?—Какимъ дѣйствіемъ и почему?—Какъ произвели вычисленіе?

Вопросы предлагаются всему классу, а отвѣчаютъ на нихъ отдѣльные ученики по назначенію преподавателя. Подобные же вопросы слѣдуетъ предлагать относительно всѣхъ послѣдующихъ простыхъ задачъ. Каждая простая задача рѣшается только послѣ того, когда преподаватель убѣдится, что она понята и выраженіе ея усвоено всѣмъ классомъ, для чего она можетъ быть повторена. Впослѣдствіи, когда дѣти освоятся съ рѣшеніемъ сложныхъ задачъ, должно пріучать ихъ давать всѣ эти отвѣты въ связи на одинъ общій вопросъ: какъ вы рѣшили задачу?

Приводимъ примѣрный пересказъ одного изъ пріемовъ рѣшенія задачи, приведенной нами подъ № 40 (стр. 63):

Въ этой задачѣ прежде всего можно узнать, сколько карандашей осталось въ обѣихъ коробкахъ. Если въ первой осталось 27 карандашей, а во второй 18, то, чтобы узнать, сколько осталось въ обѣихъ, надо 27 сложить съ 18-ю; получимъ 45. Зная, что въ обѣихъ коробкахъ осталось 45 карандашей, а было всего 63 карандаша, можно узнать, сколько карандашей истратили изъ обѣихъ коробокъ; для этого надо изъ 63 вычесть 45 получимъ 18. Въ задачѣ же сказано, что изъ обѣихъ коробокъ истрачено поровну; чтобы узнать, сколько истрачено изъ каждой коробки, надо 18 раздѣлить пополамъ, получимъ 9. Если изъ первой коробки истрачено 9 карандашей и въ ней послѣ этого осталось 27 карандашей, то, чтобы узнать, сколько карандашей въ ней было, надо 27 сложить съ 9-ю; получимъ 36. Точно такъ же, чтобы узнать, сколько карандашей было во второй коробкѣ, надо истраченные изъ нея 9 карандашей сложить съ оставшимися 18-ю; найдемъ, что во второй коробкѣ было 27 карандашей.

Отчетъ въ рѣшеніи задачи на смѣшеніе, приведенной нами подъ № 24 (стр. 49), можно считать вполнѣ удовлетворительнымъ, если онъ будетъ данъ въ слѣдующемъ видѣ:

Въ этой задачѣ прежде всего можно узнать, сколько стоитъ чай второго сорта; для этого намъ извѣстно, что его было взято 25 фунтовъ и фунтъ стоилъ 5 руб. Чтобы узнать, что стоитъ чай второго сорта, надо 5 умножить на 25, потому что 25 фунтовъ этого чаю стоятъ 25 разъ по 5 руб.; получимъ 125 руб. Затѣмъ можно узнать, сколько получилось смѣси. Перваго сорта вошло въ смѣсь 25 фунтовъ, да второго 15 фунтовъ; надо эти числа сложить; получимъ, что смѣси было 40 фунтовъ. Зная, сколько было смѣси и что фунтъ ея стоитъ 4 руб. 25 коп., можно узнать, что стоитъ вся смѣсь; для этого надо 4 р. 25 коп. умножить на 40; получимъ 170 руб. Если же вся смѣсь стоитъ 170 руб., а второй сортъ 125 руб., то, чтобы узнать, что стоитъ первый сортъ чаю, надо изъ 170 руб. вычесть 125 р.; получимъ 45 р. Столько стоятъ 15 фунтовъ чаю перваго сорта, а чтобы узнать, что стоитъ 1 фунтъ его, надо 45 руб. раздѣлить на 15, потому что цѣна одного фунта составляетъ 15-ю часть стоимости 15 фунтовъ. Найдемъ, что фунтъ чаю перваго сорта стоитъ 3 рубля.

Мы привели этотъ пересказъ въ расчетѣ, что задача будетъ рѣшаться въ цѣлыхъ числахъ.

69. На практикѣ затрудненія встрѣчаются чаще всего въ расчлененіи сложной задачи на простыя. Иногда ученикъ, нашедшій даже вѣрный отвѣтъ, не въ состояніи бываетъ хорошо объяснить, черезъ рѣшеніе какихъ простыхъ задачъ онъ дошелъ до своего отвѣта. При самостоятельномъ рѣшеніи задачи всѣ силы ученика направлены на полученіе окончательнаго отвѣта и потому самый ходъ мысли ускользаетъ отъ его вниманія настолько, что онъ не можетъ дать въ немъ яснаго отчета, не можетъ расчленить свое рѣшеніе на отдѣльныя составныя части.

Чтобы пріучить дѣтей отдавать себѣ ясный отчетъ въ расчлененіи сложной задачи, полезно нѣсколько задачъ рѣшить совмѣстно съ дѣтьми, стараясь возможно рельефнѣе выставить на видъ, что искомое число въ такихъ задачахъ нельзя найти с р а з у, а приходится прежде отыскать нѣсколько чиселъ, которыхъ въ задачѣ не было и о которыхъ въ ней не спрашивалось, но которыя необходимы для опредѣленія искомаго числа.

Правильное формулированіе простыхъ задачъ иногда не дается дѣтямъ отъ того только, что языкъ ихъ недостаточно богатъ и точенъ. Надо очень внимательно относиться къ предлагаемымъ дѣтьми выраженіямъ для простыхъ задачъ, потому что въ неправильномъ отвѣтѣ очень часто скрывается вѣрная мысль, для которой только недостаетъ надлежащихъ выраженій. Искусный преподаватель сумѣетъ открыть ее и подъ неправильной оболочкой, поможетъ выяснить и облечь въ болѣе правильную и точную форму. Чтобы провѣрить мысль ученика, выраженную неправильно и неточно, можно потребовать отъ него указанія дѣйствія, которымъ онъ думаетъ рѣшить составленную простую задачу. Вѣрное указаніе дѣйствія можетъ служить ручательствомъ и за вѣрность мысли.

Когда, несмотря на все это, дѣти все-таки затрудняются въ расчлененіи сложной задачи на простыя, можно помочь имъ указаніемъ на данныя, необходимыя какъ для составленія первой простой задачи, такъ и послѣдующихъ; дѣтямъ тогда останется подобрать только вопросы къ этимъ даннымъ, что обыкновенно они выполняютъ уже легко.

При формулированіи простыхъ задачъ дѣти любятъ ограничиваться постановкой одного вопроса; полезно требовать, чтобы они указывали и данныя для каждой простой задачи.

Когда отвѣтъ на сложную задачу данъ дѣтьми вѣрный и въ отвѣтахъ на простыя задачи дѣти не ошибаются, то нѣтъ надобности долго останавливаться на рѣшеніи каждой простой задачи.

Если же при самостоятельномъ рѣшеніи задачи получено много невѣрныхъ отвѣтовъ, если дѣти ошибаются въ отвѣтахъ и на простыя задачи, то каждая простая задача должна быть разобрана подробно и каждое дѣйствіе произведено вслухъ. Къ подробному классному разбору задачи надо привлекать по возможности всѣхъ дѣтей, останавливаясь преимущественно на тѣхъ, которыя или совсѣмъ не рѣшили задачи, или дали невѣрный отвѣтъ.

70. Послѣ подробнаго разбора задачи, полезно требовать отъ дѣтей краткаго повторенія ея рѣшенія, при чемъ должны быть указаны вопросы всѣхъ простыхъ задачъ, полученные на нихъ отвѣты и дѣйствія, помощію которыхъ опредѣлены эти отвѣты. Краткое повтореніе рѣшенія приведенной выше задачи на смѣшеніе можетъ быть сдѣлано приблизительно въ такой формѣ:

Сначала узнали, сколько стоитъ чай второго сорта, для чего 5 р. умножили на 25 и получили 125 р. Затѣмъ узнали, сколько было всей смѣси, для чего сложили 25 съ 15-ю, получили 40. Тогда можно было узнать, сколько стоитъ вся смѣсь, для чего 4 р. 25 к. умножили на 40 и получили

170 р. Потомъ узнали, сколько стоитъ чай перваго сорта, для чего изъ 170 р. вычли 125 р. и получили 45 р. Наконецъ узнали, что стоитъ каждый фунтъ чаю перваго сорта, для чего 45 р. раздѣлили на 15 и получили 3 рубля.

Такое повтореніе рельефнѣе выставляетъ дѣтямъ послѣдовательность въ простыхъ задачахъ, что при подробномъ разборѣ каждой простой задачи легко ускользаетъ отъ ихъ вниманія. Оно же можетъ служить хорошимъ средствомъ для испытанія, усвоено ли рѣшеніе задачи всѣми дѣтьми въ классѣ.

71. Когда задача рѣшается различными пріемами, то весьма производительную работу составляетъ сравненіе этихъ пріемовъ. Критеріемъ должно служить число дѣйствій въ каждомъ пріемѣ и сравнительная трудность ихъ. Напр., опредѣленіе прибыли по даннымъ покупной и продажной цѣнамъ и по количеству товара можетъ быть достигнуто помощію опредѣленія покупной и продажной стоимостей товара, или помощію опредѣленія прибыли, полученной на каждой единицѣ товара. Второй пріемъ цѣлесообразнѣе, потому что въ немъ однимъ дѣйствіемъ меньше и дѣйствія приходится производить надъ меньшими числами. Полезно поощрять дѣтей къ придумыванію различныхъ пріемовъ рѣшенія для одной и той же задачи. На нѣкоторые, болѣе короткіе, пріемы можетъ указывать и самъ преподаватель.

72. Письменныя работы при рѣшеніи задачъ могутъ быть двухъ родовъ: или вычисленія при рѣшеніи задачи производятся устно, а письменно только обозначаются дѣйствія и ихъ результаты, или и всѣ вычисленія производятся письменно. Собственно только второе упражненіе можетъ быть названо *письменнымъ рѣшеніемъ* задачи, въ точномъ смыслѣ этого слова; для перваго же упражненія болѣе подходитъ названіе *записи рѣшенія* задачи, выполненнаго устно. Запись рѣшенія задачи можетъ вводиться какъ только дѣти ознакомятся съ письменнымъ обозначеніемъ чиселъ и дѣйствій; письменное же рѣшеніе задачъ возможно только послѣ ознакомленія дѣтей съ пріемами письменнаго вычисленія.

Запись рѣшенія задачи представляется весьма полезнымъ упражненіемъ во многихъ отношеніяхъ. Она позволяетъ нагляднѣе показать дѣтямъ расчлененіе сложной задачи на простыя, облегчаетъ рѣшеніе задачъ, избавляя отъ необходимости держать въ памяти отвѣты на рѣшенныя простыя задачи, даетъ возможность въ классахъ, состоящихъ изъ нѣсколькихъ отдѣленій, предлагать задачи для самостоятельныхъ занятій дѣтямъ тѣхъ отдѣленій, съ которыми преподаватель не предполагаетъ заниматься лично, позволяетъ давать внѣклассныя работы, состоящія въ рѣшеніи задачъ, и, наконецъ, представляетъ незамѣнимое

средство для испытанія, усвоенъ ли дѣтьми пріемъ рѣшенія задачъ опредѣленнаго типа.

73. Запись рѣшенія сперва практикуется надъ задачами, уже рѣшенными устно, а затѣмъ уже надъ задачами, которыя ранѣе не рѣшались и для которыхъ, слѣдовательно, и самое рѣшеніе, и запись этого рѣшенія должны быть выполнены дѣтьми самостоятельно.

Чтобы записанное дѣтьми рѣшеніе можно было удобно и скоро провѣрить и исправить, необходимо предварительно установить общій для всего класса планъ рѣшенія, если такого же рода задачи раньше не рѣшались. Незнаніе плана рѣшенія задачи, предложенной ученикамъ для записи, ведетъ къ исправленіямъ и измѣненіямъ въ записяхъ дѣтей, а это беретъ много времени и пріучаетъ дѣтей къ неряшливому веденію письменныхъ работъ. Кромѣ того, при незнаніи плана рѣшенія нѣкоторыя дѣти могутъ совершенно не исполнить заданной имъ работы, будучи не въ состояніи сами придумать какой-либо пріемъ для рѣшенія задачи. Выполнить работу во время провѣрки и исправленія ея преподавателемъ у товарищей эти дѣти такъ же едва ли будутъ въ состояніи, потому что запись рѣшенія задачи требуетъ болѣе времени, чѣмъ повѣрка, да и выполненіе записи во время повѣрки задачи уже не будетъ имѣть того производительнаго характера, какой представляетъ самостоятельная запись рѣшенія задачи.

Установленіе плана рѣшенія задачи производится дѣтьми подъ руководствомъ преподавателя. При этомъ весьма умѣстно заставлять дѣлать полный анализъ задачи. Въ первое время необходимо не только расчленять задачу на простыя, но и намѣчать дѣйствія для каждой простой задачи. Каждый ученикъ долженъ умѣть перечислить въ порядкѣ всѣ простыя задачи, необходимыя для рѣшенія данной сложной задачи, и указать для каждой изъ нихъ дѣйствіе и числа, надъ которыми дѣйствіе должно быть произведено. По мѣрѣ того, какъ дѣти будутъ освоиваться съ этой работой, предварительное выясненіе плана можетъ сокращаться и, наконецъ, нетрудныя задачи могутъ быть предлагаемы дѣтямъ безъ всякой предварительной разработки.

74. Запись рѣшенія можетъ содержать въ себѣ краткое изложеніе вопроса каждой простой задачи, обозначеніе дѣйствія, которымъ эта задача рѣшается, и обозначеніе результата дѣйствія. Сперва записывается вопросъ, подъ нимъ обозначается дѣйствіе и его результатъ. Вопросы въ ихъ послѣдовательномъ порядкѣ отмѣчаются цыфрами и запись ведется параллельно рѣшенію задачи, т.-е. каждый вопросъ записывается, рѣшается и это рѣшеніе пишется подъ вопросомъ, затѣмъ ученикъ переходитъ уже къ слѣдующему вопросу. Иначе, запись рѣшенія не представитъ никакой существенной выгоды, а будетъ только отягощать учениковъ. Такъ какъ каждая простая задача займетъ при этомъ по крайней мѣрѣ двѣ строки (въ одной—вопросъ, въ другой—его рѣшеніе), а иногда и больше (при длинномъ вопросѣ), то вниманіе дѣтей должно быть направлено на правильный счетъ вопросовъ, а не строчекъ, какъ это обыкновенно дѣлаютъ теперь. Вотъ образецъ такой записи для задачи подъ № 51 (стр. 70):

1) Ск. фунтовъ ягодъ купилъ разносчикъ?
$$5 + 4 = 9$$
2) Ск. коп. онъ заплатилъ за эти ягоды?
$$40 \times 2 = 80$$
3) Во ск. корзинъ пересыпалъ онъ ягоды?
$$9 : 3 = 3$$
4) За ск. копеекъ онъ продалъ ягоды?
$$30 \times 3 = 90$$
5) Ск. копеекъ прибыли получилъ разносчикъ?
$$90 - 80 = \mathbf{10}$$

Выполнивъ такую запись, ученикъ дастъ полный отчетъ въ рѣшеніи предложенной ему задачи.

При записываніи рѣшенія задачи на классной доскѣ, достаточно обозначать только одни дѣйствія и ихъ результаты, такъ какъ вопросы дѣти высказываютъ при этомъ вслухъ.

Когда дѣти еще не освоились съ механизмомъ чтенія и письма, то запись рѣшенія задачи необходимо сведется только къ обозначенію дѣйствій и ихъ результатовъ, при чемъ каждое дѣйствіе должно быть обозначено въ отдѣльной строкѣ.

75. Письменное рѣшеніе задачъ располагается въ той же схемѣ, съ той разницей, что обозначеніе дѣйствія и его результата замѣняется письменнымъ его выполненіемъ, когда оно выполнено ученикомъ письменно; если же ученикъ въ состояніи выполнить дѣйствіе устно, то оно обозначается въ той же формѣ, какъ и прежде. Считаемъ здѣсь умѣстнымъ замѣтить, что при письменномъ рѣшеніи задачъ, какъ и вообще при письменныхъ вычисленіяхъ, нѣтъ надобности требовать отъ дѣтей непремѣнно письменнаго выполненія каждаго дѣйствія; напротивъ, надо пріучать ихъ прибѣгать къ письменному вычисленію только тогда, когда устное ихъ затрудняетъ.

Приводимъ нѣсколько образцовъ письменныхъ рѣшеній, при чемъ выбираемъ въ достаточной степени сложныя задачи, чтобы исчерпать по возможности всѣ случаи.

54) Два брата, имѣвшіе вмѣстѣ 82350 рубл., купили пополамъ имѣніе, по 50 руб. за десятину; первый затратилъ

на покупку 15-ю часть своихъ денегъ, а второй—12-ю часть своихъ. Сколько десятинъ было въ имѣніи?—Сколько денегъ было у каждаго брата?

Рѣшеніе. 1) Ск. разъ часть денегъ, затраченная каждымъ братомъ, содержится во всѣхъ ихъ деньгахъ?

$$15 + 12 = 27$$

2) Ск. денегъ затратилъ каждый братъ на покупку имѣнія?

82 350	27
1 35	3 050
0	

3) Что стоитъ имѣніе?

$$3\ 050 \times 2 = 6\ 100$$

4) Ск. десятинъ въ имѣніи?

6 100	50
11	122
10	
0	

5) Ск. денегъ было у перваго брата?

$$\begin{array}{r} 3\ 050 \\ \times\ 15 \\ \hline 15\ 25 \\ 30\ 5 \\ \hline \mathbf{45\ 750} \end{array}$$

6) Ск. денегъ было у второго брата?

$$3050 \times 12 = \mathbf{36600}$$

55) Землевладѣлецъ, желая купить сосѣдній лугъ, за десятину котораго просили 120 руб., разсчиталъ, что если онъ шестнадцатую часть всей своей земли продастъ по 48 руб. за десятину, то для покупки луга къ вырученнымъ деньгамъ надо будетъ добавить 270 рублей; если же онъ эту часть земли продастъ по 72 руб. за десятину, то у него отъ вырученныхъ денегъ останется еще 845 руб. Сколько десятинъ будетъ у землевладѣльца, когда онъ продастъ шестнадцатую часть земли и взамѣнъ ея купить лугъ?

Рѣшеніе. 1) На ск. рублей больше получитъ землевладѣлецъ за 16-ю часть земли, продавъ ее, вмѣсто 42 р., по 72 р. за десятину?

$$270 + 845 = 1115$$

2) На ск. рублей больше онъ будетъ получать при этомъ за каждую десятину?

$$72 - 48 = 24$$

3) На ск. копеекъ больше онъ будетъ получать за каждую квадратную сажень?

$$2400 : 2400 = 1$$

4) Ск. земли разсчитывалъ продать землевладѣлецъ?

1 115 р.: 1 к.=111 500, т.-е. 111 500. кв. саж.=

111 500	2 400
15 5	46
1 100	

=46 дес. 1 100 кв. саж.

5) Ск. рублей получитъ землевладѣлецъ за эту часть земли при первомъ расчетѣ?

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 46 \\ \hline 288 \\ 1\ 92 \\ \hline 2\ 208 \end{array}$$

48 : 24=2
2×11=22

2 208+22=**2 230**

6) Ск. рублей стоитъ лугъ?

$$2\ 230 + 270 = 2\ 500$$

7) Какъ великъ лугъ?

12 000 : 2 400=5
250 000 : 5=50 000, т.-е.
50 000 кв. саж.=**20** дес. **2000** кв. саж.

50 000	2400
2 000	20

8) Ск. земли останется у землевладѣльца послѣ продажи 16-й части ея?

$$\begin{array}{r} 46\ \text{дес.} + 1\ 100\ \text{кв. саж.} \\ \times 15 \\ \hline 690 \quad + 16\ 500 \\ \hline \mathbf{696}\ \text{дес.} + \mathbf{2100}\ \text{кв. саж.} \end{array}$$

16 500	2400
2 100	6

9) Ск. земли будетъ у землевладѣльца послѣ покупки луга?

$$\begin{array}{r} 696\ \text{дес.} + 2\ 100\ \text{кв. саж.} \\ 20 \quad + 2\ 000 \\ \hline \mathbf{717}\ \text{дес.} + \mathbf{1\ 700}\ \text{кв. саж.} \end{array}$$

56) Четыре работника копали канаву: первый могъ ее выкопать въ 72 дня, второй въ 60 дней, третій въ 80 дней и четвертый въ 90 дней. Когда они проработали 12 дней, то имъ осталось копать еще 1 версту 151 саж. Какой длины была канава?

Рѣшеніе. 1) Какую часть канавы первый работникъ исполнялъ въ 1 день?

$$1 : 72 = \frac{1}{72}$$

2) Какую часть второй?

$$1 : 60 = \frac{1}{60}$$

3) Какую часть третій?

$$1 : 80 = \frac{1}{80}$$

4) Какую часть четвертый?

$$1 : 90 = \frac{1}{90}$$

5) Какую часть канавы исполняли въ одинъ день четыре работника вмѣстѣ?

$$\frac{1}{72} + \frac{1}{60} + \frac{1}{80} + \frac{1}{90} = \frac{5}{360} + \frac{6}{360} + \frac{9}{720} + \frac{8}{720} =$$

$$= \frac{11}{360} + \frac{17}{720} = \frac{22}{720} + \frac{17}{720} = \frac{39}{720} = \frac{13}{240}$$

6) Какую часть канавы они вырыли въ 12 дней?

$$\frac{13}{240} \times 12 = \frac{13}{240 : 12} = \frac{13}{20}$$

7) Какую часть канавы имъ осталось вырыть послѣ 12-ти дней работы?

$$1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

8) Сколько саженъ въ $\frac{1}{20}$ долѣ канавы?

$$(500 + 151) : 7 = 651 : 7 = 93$$

9) Какой длины была вся канава?

$93 \times 20 = 1860$ саж., или **3 версты 360 саж.**

При рѣшеніи этой задачи мы предполагали, что дѣтямъ неизвѣстны еще умноженіе и дѣленіе на дробь; въ противномъ случаѣ однимъ вопросомъ (8-мъ) было бы меньше.

Въ вопросы надо стараться вводить наименованія получаемыхъ отвѣтовъ. Этотъ пріемъ избавляетъ отъ нелогичностей, съ которыми приходится встрѣчаться, если наименованія приписывать къ получаемымъ результатамъ.

76. Въ нѣкоторыхъ методикахъ совѣтуютъ сперва произвести всѣ дѣйствія, а потомъ уже записать рѣшеніе задачи строками, въ первой части которыхъ излагается значеніе результата каждой простой задачи, а во второй въ видѣ равенства обозначается соотвѣтствующее дѣйствіе и его результатъ. Пріемъ этотъ требуетъ двойного записыванія каждаго дѣйствія, и потому осложняетъ запись.

Нѣкоторые предпочитаютъ избѣгать какъ записыванія вопросовъ простыхъ задачъ, такъ и обозначенія значенія результатовъ простыхъ задачъ, находя, что изложеніе значенія результатовъ простыхъ задачъ „очень затрудняетъ дѣтей, а преодолѣніе этого затрудненія не входитъ въ цѣли преподаванія начальной ариѳметики“, что такое записываніе не можетъ „служить и для уясненія плана рѣшенія задачи, отвѣтъ на которую уже найденъ“. Мы съ своей стороны думаемъ, что записываніе вопросовъ простыхъ задачъ, сопровождаемое производствомъ соотвѣтствующихъ дѣйствій, представляетъ весьма удобную форму для изложенія письменнаго рѣшенія задачи, заставляя дѣтей давать себѣ полный отчетъ въ ея рѣшеніи и позволяя преподавателю легко прослѣдить какъ за общимъ ходомъ рѣшенія, такъ и за правильностью вычисленій. Письменное изложеніе вопросовъ простыхъ задачъ не должно встрѣчать особыхъ затрудненій, если эти вопросы предварительно хорошо выработаны устно; для избѣжанія орѳографическихъ ошибокъ надо возможно короче и проще формулировать вопросы и допускать сокращенное ихъ записываніе.

Окончательный отвѣтъ на задачу полезно выдѣлять подчеркиваніемъ двумя чертами, а результаты простыхъ задачъ можно подчеркивать одной чертой, если, кромѣ основного дѣйствія, для полученія результата требуется еще какое-либо преобразованіе.

77. Для письменнаго рѣшенія задачъ въ классѣ можно предложить нѣсколько различныхъ пріемовъ. Если преподаватель можетъ лично руководить все время работой дѣтей, то задача можетъ рѣшаться въ слѣдующемъ порядкѣ:

Послѣ установленія всѣмъ классомъ плана рѣшенія, для рѣшенія первой простой задачи преподаватель вызываетъ къ классной доскѣ одного ученика, преимущественно изъ слабыхъ и разсѣянныхъ, а остальныя дѣти рѣшаютъ эту задачу въ своихъ тетрадкахъ. На классной доскѣ нѣтъ надобности выписывать вопросы простыхъ задачъ, такъ какъ рѣшающій высказываетъ ихъ вслухъ. По окончаніи рѣшенія первой простой задачи преподаватель заставляетъ дѣтей сравнить ихъ результаты съ результатомъ, полученнымъ на классной доскѣ, и исправить замѣченныя при этомъ ошибки какъ на классной доскѣ, такъ и въ те-

традяхъ. Если остаются ошибки, не замѣченныя дѣтьми, то преподаватель самъ обращаетъ на нихъ вниманіе дѣтей и заставляетъ исправить. Такимъ же порядкомъ рѣшаются и слѣдующія простыя задачи, при чемъ для каждой простой задачи полезнѣе вызывать новаго ученика, чѣмъ представлять рѣшенія всей сложной задачи на классной доскѣ одному изъ нихъ. Такъ какъ производство вычисленій на классной доскѣ занимаетъ всегда больше времени, чѣмъ въ тетрадяхъ, то дѣти, рѣшающія задачу въ тетрадяхъ, почти всегда успѣваютъ и записать вопросъ рѣшаемой простой задачи, и произвести требуемое вычисленіе раньше, чѣмъ оно будетъ окончено на классной доскѣ. Точно такъ же ученикъ, рѣшившій какую-либо простую задачу на классной доскѣ, успѣваетъ записать ея рѣшеніе въ своей тетради и рѣшить слѣдующую простую задачу въ то время, пока послѣдняя рѣшается его товарищемъ на классной доскѣ. При такомъ порядкѣ задача рѣшается всѣми учениками болѣе или менѣе одновременно, ошибки въ рѣшеніи въ бо́льшей части случаевъ могутъ быть предупреждены, а если и случаются, то исправляются своевременно.

Вмѣсто этого, дѣти могутъ рѣшать всѣ простыя задачи, одну за другой, въ своихъ тетрадяхъ. По окончаніи каждой простой задачи, полученные отвѣты выспрашиваются преподавателемъ и провѣряются. Если отвѣтъ у всѣхъ одинаковъ и вѣренъ, то вычисленіе не воспроизводится; если отвѣты различны, то однимъ изъ учениковъ вычисленіе пересказывается вслухъ, а остальные, слѣдя по своимъ тетрадямъ, заявляютъ, если у нихъ вычисленіе произведено не такъ, какъ оно пересказывается, и сдѣланныя ошибки исправляются. Если для какой-либо простой задачи потребовалось очень сложное вычисленіе и въ немъ сдѣлано много ошибокъ, то одного изъ учениковъ полезно заставить воспроизвести это вычисленіе на классной доскѣ.

Такой пріемъ можно примѣнять къ задачамъ, даваемымъ дѣтямъ одного отдѣленія въ то время, когда преподаватель занятъ съ другимъ.

Послѣ рѣшенія задачи одинъ изъ учениковъ повторяетъ вкратцѣ все рѣшеніе.

Наконецъ, можно предоставить дѣтямъ рѣшить всю сложную задачу самостоятельно. Въ этомъ случаѣ должны выбираться задачи, подобныя которымъ уже рѣшались раньше, или при рѣшеніи которыхъ не встрѣтится большихъ затрудненій для установленія пріема рѣшенія. Такое рѣшеніе задачъ составляетъ очень удобную работу для самостоятельныхъ занятій дѣтей въ классѣ въ то время, когда преподаватель занятъ съ другими отдѣленіями класса, а также для внѣклассныхъ занятій дѣтей.

Повѣрка самостоятельнаго письменнаго рѣшенія задачи должна состоять въ пересказѣ учениками общаго хода рѣшенія и въ подробномъ разборѣ тѣхъ простыхъ задачъ, которыя невѣрно рѣшены нѣкоторыми дѣтьми.

78. Просмотръ учителемъ тетрадей всѣхъ учениковъ у себя на дому нельзя рекомендовать какъ постоянный способъ повѣрки письменныхъ работъ, потому что онъ требуетъ отъ учителя слишкомъ много времени, если дѣлается послѣ каждаго урока, а если производится рѣже, то отодвигаетъ исправленіе ошибокъ настолько, что дѣти успѣваютъ забыть и задачу, и ея рѣшеніе. Кромѣ того, однимъ домашнимъ просмотромъ и подчеркиваніемъ ошибокъ нельзя ограничиться; необходимо объяснить эти ошибки ученикамъ и заставить исправить ихъ, а на это потребуется столько же времени, какъ и на предложенную выше провѣрку письменныхъ работъ въ классѣ. Но время отъ времени тетради дѣтей должны просматриваться учителемъ для того, чтобы слѣдить за общимъ ходомъ письменныхъ работъ каждаго ученика и обращать вниманіе его на неисправности въ этихъ работахъ. Для этого можно брать тетради къ себѣ на домъ, а также просматривать ихъ въ то время, когда ученики вызываются для работы на классной доскѣ.

Въ классахъ, состоящихъ изъ нѣсколькихъ отдѣленій, полезно установить за правило, чтобы задачи, которыя предложены ученикамъ для самостоятельнаго письменнаго рѣшенія и которыхъ преподаватель во время уроковъ не успѣетъ провѣрить, или дѣти не успѣютъ окончить, считались работой, заданной къ слѣдующему уроку для внѣкласснаго исполненія. Съ повѣрки этихъ работъ долженъ начинаться слѣдующій урокъ.

79. Ознакомленіе дѣтей съ различными пріемами рѣшенія задачъ. Намъ остается сказать о самомъ важномъ при рѣшеніи задачъ, именно о томъ, какъ поступать съ тѣми задачами, которыя затрудняютъ дѣтей и вслѣдствіе этого не могутъ быть ими рѣшены самостоятельно. Затрудненія эти могутъ происходить отъ различныхъ причинъ и потому здѣсь трудно указать какія-либо общія средства.

Если затрудненія происходятъ отъ незнанія дѣтьми пріема, которымъ задача рѣшается, то самостоятельнаго рѣшенія нельзя и требовать отъ дѣтей, за исключеніемъ выдающихся изъ нихъ по своимъ способностямъ къ рѣшенію математическихъ вопросовъ.

Съ такими пріемами необходимо ознакомить рядомъ методически подобранныхъ задачъ. Какъ примѣръ такого подбора приводимъ слѣдующій рядъ задачъ:

57) Одинъ покупатель купилъ въ лавкѣ 4 арш. сукна, а другой 9 аршинъ того же сукна, и второй заплатилъ 6-ю рублями больше перваго. Сколько заплатилъ за свое сукно первый покупатель?—сколько второй?

58) Изъ мебельной лавки одному покупателю продали диванъ и 8 креселъ за 96 рублей, а другому по тѣмъ же цѣнамъ диванъ и 9 креселъ за 104 рубля. Что стоитъ диванъ? —что стоитъ каждое кресло?

59) Разносчикъ въ воскресенье продалъ 60 яблокъ и 80 грушъ и выручилъ за нихъ 2 р. 90 к., а въ понедѣльникъ 60 яблокъ и 40 грушъ и выручилъ за нихъ 1 руб. 90 коп. Что стоитъ десятокъ яблокъ?—что стоитъ десятокъ грушъ?

Если бы при рѣшеніи первой изъ этихъ задачъ встрѣтилось все-таки нѣкоторое затрудненіе, то оно тотчасъ же будетъ устранено, когда преподаватель предложитъ дѣтямъ обдумать, отчего второй покупатель за свое сукно заплатилъ больше перваго.

Послѣ этого можно рискнуть предложить и слѣдующую задачу:

60) За 15 арш. сукна и 7 арш. бархату заплатили 109 р., а за 10 арш. такого же сукна и 14 арш. такого же бархату —138 руб. Что стоитъ аршинъ сукна? что стоитъ аршинъ бархату?

Разумѣется, переходъ къ этой задачѣ требуетъ большой сообразительности и, можетъ быть, не будетъ сдѣланъ самими дѣтьми, но всё-таки у преподавателя будетъ на что опереться при разъясненіи ея дѣтямъ. Считаемъ нужнымъ оговориться, что вообще задачи, требующія при исключеніи неизвѣстнаго предварительнаго преобразованія условій, надо давать крайне осторожно.

Чтобы навести дѣтей на пріемъ рѣшенія задачъ о встрѣчѣ двухъ движущихся предметовъ, можетъ служить задача:

61) Между двумя городами 420 верстъ; изъ нихъ навстрѣчу другъ другу одновременно вышли два поѣзда. Первый въ часъ проходитъ 32 версты, второй—28 верстъ. На какомъ разстояніи другъ отъ друга будутъ оба поѣзда черезъ часъ послѣ ихъ выхода?—черезъ 2 часа?—черезъ 3 часа?—черезъ 5 часовъ?—черезъ 7 часовъ?

Чтобы ознакомить съ пріемомъ рѣшенія задачи, приведенной выше подъ № 56 (стр. 83), могутъ служить задачи:

62) Для переписки сочиненія наняты 3 писца: первый въ день переписалъ $^1/_{24}$ сочиненія, второй $^1/_{30}$ и третій $^1/_{40}$. Какую часть сочиненія переписали они всѣ въ одинъ день?

63) Для очистки сада наняты 4 работника: первый могъ исполнить всю работу въ 18 дней, второй въ 20 дней, третій въ 24 дня и четвертый въ 36 дней. Черезъ 5 дней они были разсчитаны. Какая часть сада осталась неочищенной?

Хорошимъ средствомъ для наведенія на надлежащій пріемъ рѣшенія служитъ видоизмѣненіе одной и той же задачи и рѣшеніе другъ за другомъ взаимно-обратныхъ задачъ *). Такъ напр. задача:

64) Артель плотниковъ зарабатываетъ каждый рабочій день по 7 руб., а на свое содержаніе тратитъ ежедневно по 2 рубля. Сколько дней въ августѣ мѣсяцѣ артель была безъ работы, если у нея отъ заработанныхъ въ этомъ мѣсяцѣ денегъ остался 1 рубль?

Скорѣе будетъ рѣшена дѣтьми самостоятельно, если передъ ней будетъ рѣшена обратная задача:

65) Артель плотниковъ зарабатывала въ день по 7 рублей, а тратила на свое содержаніе по 2 рубля въ день. Сколько она сберегла денегъ въ апрѣлѣ, если въ теченіе его по случаю Страстной, Пасхи и другихъ праздниковъ не работала 16 дней?

Послѣдняя задача укажетъ дѣтямъ, какъ образуется избытокъ заработанныхъ денегъ надъ издержанными, чѣмъ и поможетъ найти пріемъ рѣшенія первой задачи.

Вообще строго соображеннымъ подборомъ задачъ можно многаго достигнуть въ дѣлѣ постепеннаго ознакомленія дѣтей съ пріемами ихъ рѣшенія. На своемъ мѣстѣ поставленная, даже и трудная задача, если она хорошо подготовлена вспомогательными задачами, дается дѣтямъ сравнительно легко и представляетъ благодарную и производительную работу.

Рѣшеніе многихъ задачъ можетъ быть основано на соотношеніяхъ между числами въ дѣйствіяхъ, на измѣненіяхъ результатовъ дѣйствій при измѣненіи данныхъ и вообще на различныхъ теоретическихъ положеніяхъ ариѳметики. Мѣсто такихъ задачъ опредѣляется временемъ сообщенія дѣтямъ соотвѣтствующихъ теоретическихъ положеній. Такъ приведенный нами способъ дѣленія числа въ разностномъ отношеніи, основанный на свойствахъ суммы, можетъ быть данъ, какъ уже было замѣчено, только послѣ ознакомленія дѣтей съ этими свойствами. Точно такъ же только послѣ полнаго ознакомленія съ основными свойствами вычитанія можетъ быть дана задача, о которой мимоходомъ было сказано выше:

---

*) Взаимно-обратными паз. такія задачи, въ которыхъ при тѣхъ же условіяхъ одно изъ данныхъ первой служитъ искомымъ во второй и искомое первой входитъ въ число данныхъ второй.

66) Отцу 55 лѣтъ, сыну 25 лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вдвое старше сына?

При этомъ ее придется обставить цѣлымъ рядомъ упражненій и задачъ, которыя и приводимъ.

67) Отцу 40 лѣтъ, сыну 12. На сколько лѣтъ отецъ старше сына?—на сколько лѣтъ отецъ будетъ старше сына черезъ 5 лѣтъ? — черезъ 18 лѣтъ? — На сколько лѣтъ отецъ былъ старше сына 5 лѣтъ тому назадъ? — 11 лѣтъ тому назадъ?

68) Братъ старше сестры 7-ю годами. На сколько лѣтъ братъ будетъ старше сестры черезъ 2 года?—черезъ 8 лѣтъ?—на сколько онъ былъ старше сестры 3 года тому назадъ?—5 лѣтъ тому назадъ?

69) Какова должна быть разность для того, чтобы уменьшаемое было вдвое больше вычитаемаго?—чтобы уменьшаемое было втрое больше вычитаемаго?

70) Сыну 24 года, черезъ 12 лѣтъ онъ будетъ вдвое моложе отца. Сколько лѣтъ отцу?

71) Отецъ старше сына на 24 года; сыну теперь 20 лѣтъ. Черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ вдвое старше сына?

Первыя двѣ задачи обратятъ вниманіе дѣтей на неизмѣняемость разности между лѣтами двухъ лицъ, пока они живутъ; третья заставитъ вывести соотношеніе между вычитаемымъ и разностью, при которомъ кратное отношеніе между уменьшаемымъ и вычитаемымъ принимаетъ данную величину; послѣднія двѣ окончательно выяснятъ пріемъ рѣшенія приведенной задачи.

Для пользы дѣла необходимо, чтобы вспомогательныя задачи и упражненія имѣли самостоятельное образовательное значеніе; при этомъ нѣтъ надобности, чтобы они непосредственно предшествовали задачѣ, для рѣшенія которой они служатъ подготовкой.

80. При всей строгости и послѣдовательности въ подборѣ задачъ дѣти всё-таки иногда не могутъ напасть на требуемый пріемъ рѣшенія. Въ такихъ случаяхъ иногда бываетъ достаточно разобрать съ ними, какъ могло образоваться одно изъ данныхъ чиселъ задачи при помощи другихъ данныхъ и искомаго числа. Такой способъ можетъ быть приложенъ къ приведенной нами задачѣ подъ № 54 (стр. 81). Передъ ея рѣшеніемъ полезно предложить дѣтямъ подумать, какъ бы можно было узнать, сколько денегъ было у обоихъ братьевъ вмѣстѣ, если бы было дано, сколько десятинъ было въ имѣніи, а всѣ прочія условія задачи не измѣнились бы. Иногда придется вдаваться въ болѣе подробное изслѣдованіе соотношенія между величинами, входящими въ задачу. Напр. для выработки пріема рѣшенія задачъ на смѣшеніе, при-

веденныхъ нами подъ № 24 и № 25 (стр. 49), необходимо разъяснить дѣтямъ, какъ образуется прибыль и убытокъ при продажѣ смѣсей и въ какомъ соотношеніи прибыль на одномъ сортѣ должна находиться съ убыткомъ на другомъ для того, чтобы въ результатѣ дать прибыль или убыль на всей смѣси, или отсутствіе той и другой. Всѣ эти пріемы, по существу своему аналитическіе, не представляютъ полнаго анализа задачи, но въ бо́льшей части случаевъ оказываются достаточными для ея рѣшенія. Постоянно прилагать полный анализъ излишне и безцѣльно.

Иногда все затрудненіе въ рѣшеніи задачи происходитъ отъ того только, что дѣти не ясно представляютъ себѣ зависимость между величинами, въ нее входящими. Примѣромъ можетъ служить задача объ опредѣленіи высоты предмета по длинѣ его тѣни, когда извѣстна длина тѣни, отбрасываемой другимъ предметомъ данной высоты. Разъясненіе неизвѣстной дѣтямъ зависимости между величинами предпочтительнѣе дѣлать раньше заданія задачи, потому что съ одной стороны дѣти легче усвоиваютъ содержаніе задачи, условія которой для нихъ вполнѣ ясны, а съ другой во время разъясненія зависимости между величинами дѣти легко могутъ забыть задачу и ее все равно придется повторить еще разъ.

Хорошимъ средствомъ для разъясненія условій задачи могутъ служить схематическіе чертежи, напр., при рѣшеніи задачъ о встрѣчѣ движущихся предметовъ, разстояніе между ними можетъ быть изображено отрѣзкомъ прямой, направленіе движенія—стрѣлками, при чемъ скорость можетъ быть надписана надъ соотвѣтствующей стрѣлкой.

81. Повѣрка рѣшенія. Пониманію рѣшенія задачи и соотношеній между ея данными много помогаетъ повѣрка рѣшенія, т.-е. опредѣленіе, согласно ли найденное рѣшеніе со всѣми условіями задачи. Въ случаѣ вѣрнаго рѣшенія повѣрка разъясняетъ и укрѣпляетъ въ дѣтяхъ приложенный ими къ задачѣ пріемъ рѣшенія; въ случаѣ же невѣрнаго рѣшенія представляетъ лучшее средство для убѣжденія дѣтей въ неправильности рѣшенія, а иногда можетъ повести и къ открытію вѣрнаго рѣшенія задачи. Такъ очень часто задачи о дѣленіи четнаго числа на двѣ части въ разностномъ отношеніи дѣти рѣшаютъ, раздѣливъ число на двѣ равныя части и затѣмъ къ одной части прибавивъ, а отъ другой отнявъ заданную разность. Только повѣрка рѣшенія убѣждаетъ ихъ въ невѣрности этого пріема. Разборъ же, отъ чего произошла ошибка, можетъ привести къ вѣрному рѣшенію.

82. Въ дальнѣйшемъ изложеніи постараемся указать болѣе подробно порядокъ въ распредѣленіи задачи и разберемъ рѣшеніе тѣхъ изъ нихъ, въ которыхъ можетъ встрѣтиться затрудненіе.

Замѣтимъ въ заключеніе, что указывая пріемы для разработки съ дѣтьми различныхъ вопросовъ, мы не хотимъ сказать, что только одни эти пріемы примѣнимы къ дѣлу; мы желаемъ только помочь неопытному преподавателю на первое время, а опытный всегда самъ выберетъ пріемъ, ближе ведущій въ данныхъ обстоятельствахъ къ намѣченной цѣли.

83. Примѣры на вычисленія. Однѣ задачи не могутъ дать достаточнаго матеріала для упражненія учениковъ въ вычисленіяхъ. Въ задачѣ вычисленія невольно отступаютъ на задній планъ, а главное вниманіе обращается на установленіе и развитіе пріема рѣшенія. Особенно трудно на рѣшеніи задачъ достигнуть надлежащей быстроты въ вычисленіяхъ, потому что быстрота рѣшенія задачи опредѣляется главнымъ образомъ умѣньемъ быстро разобраться въ условіяхъ задачи и найти путь для ея рѣшенія, а не быстротой вычисленій. Поэтому, кромѣ рѣшенія задачъ, въ число упражненій по ариѳметикѣ вводятся численные примѣры, въ которыхъ вниманіе дѣтей можетъ быть сосредоточено на быстротѣ и вѣрности вычисленія, такъ какъ дѣйствія и порядокъ ихъ указываются въ заданіи. Нѣкоторые преподаватели предпочитаютъ для этой цѣли задачи, расчлененіе которыхъ на простыя не встрѣчаетъ затрудненій. Не отвергая совсѣмъ такихъ упражненій, мы всё-таки думаемъ, что отвлеченные примѣры въ указанныхъ цѣляхъ предпочтительнѣе задачъ: они прямѣе указываютъ дѣтямъ, чего именно имъ слѣдуетъ добиваться относительно вычисленій и заставляютъ дѣтей видѣть въ задачахъ не только поводъ къ производству тѣхъ или другихъ дѣйствій, а такіе вопросы, которые заставляютъ вдумываться въ зависимость между величинами.

Численные примѣры, какъ и задачи, могутъ выполняться устно и письменно, при чемъ слѣдуетъ отличать упражненія собственно въ письменномъ вычисленіи отъ упражненій въ устномъ вычисленіи, соединенномъ съ обозначеніемъ дѣйствій и ихъ результатовъ.

84. Обозначеніе ряда дѣйствій. Считаемъ полезнымъ привести здѣсь условія, которыя приняты при обозначеніяхъ ряда дѣйствій надъ числами.

Четыре ариѳметическія дѣйствія дѣлятъ на два порядка, относя къ первому сложеніе и вычитаніе, а ко второму—умноженіе и дѣленіе. Если рядъ дѣйствій состоитъ изъ дѣйствій одного порядка и каждое слѣдующее дѣйствіе слѣдуетъ производить надъ результатомъ предыдущаго дѣйствія, то дѣйствія обозначаютъ въ порядкѣ ихъ производства; сообразно съ этимъ и выполняютъ дѣйствія въ порядкѣ ихъ обозначенія. Напр., если 5

надо умножить на 9, произведеніе раздѣлить на 3, частное умножить на 2 и это произведеніе раздѣлить на 5, то пишутъ:

$$5\times9:3\times2:5$$

и выполняютъ это обозначеніе въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$5\times9=45;\ 45:3=15;\ 15\times2=30;\ 30:5=6.$$

Написавши

$$8+4-7-3+9+4,$$

обозначимъ, что 8 надо сложить съ 4-мя, изъ суммы вычесть 7, изъ разности вычесть 3, эту разность сложить съ 9 и къ суммѣ прибавить 4, и должны выполнить это обозначеніе въ слѣдующей послѣдовательности:

$$8+4=12,\ 12-7=5,\ 5-3=2,\ 2+9=11,\ 11+4=15$$

Если въ рядъ обозначенныхъ дѣйствій входятъ дѣйствія разныхъ порядковъ, то дѣйствія второго порядка выполняютъ раньше дѣйствій перваго порядка; дѣйствія же одного и того же порядка выполняютъ въ порядкѣ ихъ обозначенія—безразлично, относятся ли дѣйствія перваго порядка къ числамъ, даннымъ въ обозначеніи, или къ результатамъ дѣйствій второго порядка, которыя по этому правилу должны быть опредѣлены раньше. Такъ, написавши

$$60-9\times6-24:8+20:5,$$

обозначимъ, что 9 надо умножить на 6, 24 раздѣлить на 8, 20 раздѣлить на 5, произведеніе вычесть изъ 60-ти, изъ этой разности вычесть первое частное и къ полученной разности прибавить второе частное. Обозначеніе должно быть выполнено въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$9\times6=54,\ 24:8=3,\ 20:5=4,\ 60-54=6,\ 6-3=3,\ 3+4=7.$$

Результатъ не измѣнится, если надъ каждымъ произведеніемъ и частнымъ, тотчасъ послѣ ихъ вычисленія произведемъ требуемое сложеніе или вычитаніе. Сообразно съ этимъ, обозначеніе можно прочесть въ слѣдующей формѣ: 9 умножить на 6, произведеніе вычесть изъ 60-ти, 24 раздѣлить на 8, частное вычесть изъ полученной разности, затѣмъ 20 раздѣлить на 5 и это частное прибавить къ разности, полученной отъ второго вычитанія, и выполнить въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$9\times6=54,\ 60-54=6,\ 24:8=3,\ 6-3=3,\ 20:5=4,\ 3+4=7.$$

Всѣ отступленія отъ установленнаго этими правилами порядка въ выполненіи дѣйствій обозначаются постановкой с к о б о к ъ, которымъ даютъ различныя формы: простыя скобки ( ), квадратныя [ ], волнистыя { } и т. п. Обозначенія дѣйствій, за-

ключенныя въ скобки, выполняютъ раньше дѣйствій, знаки которыхъ поставлены внѣ скобокъ. Если бы въ послѣднемъ примѣрѣ требовалось изъ 60 вычесть 9, разность умножить на 6, 24 раздѣлить на 8, 20 раздѣлить на 5 и сумму этихъ частныхъ вычесть изъ полученной разности, то слѣдовало бы написать

$$(60-9)\times 6-(24:8+20:5)$$

и выполнить это обозначеніе въ слѣдующемъ порядкѣ:

60—9=51, 51×6=306, 24 : 8=3, 20 : 5=4, 3+4=7, 306—7=299.

Написавши

$$\Big[(5-3)\times 2+(64+36):5\Big]:6$$

обозначимъ, что требуется изъ 5 вычесть 3 и разность умножить на 2, 64 сложить съ 36 и сумму раздѣлить на 5, произведеніе сложить съ частнымъ и сумму раздѣлить на 6. Выполнимъ это обозначеніе въ слѣдующемъ порядкѣ:

5—3=2, 2×2=4, 64+36=100, 100 : 5=20, 20+4=24, 24 : 6=4.

Такимъ образомъ, при выполненіи обозначенія ряда дѣйствій, если въ немъ нѣтъ скобокъ, слѣдуетъ дѣйствія одного и того же порядка производить въ порядкѣ ихъ обозначенія; дѣйствія второго порядка выполнять раньше дѣйствій перваго порядка; если же въ обозначеніи есть скобки, то дѣйствія, обозначенія которыхъ заключены въ скобки, слѣдуетъ выполнять раньше дѣйствій, знаки которыхъ находятся внѣ скобокъ; если входитъ нѣсколько скобокъ, то сперва слѣдуетъ выполнить дѣйствія, указанныя во внутреннихъ скобкахъ.

Замѣтимъ, что въ скобки можно заключать обозначеніе каждаго дѣйствія, надъ результатомъ котораго слѣдуетъ произвести еще какое-либо дѣйствіе, но тогда пришлось бы ставить очень много скобокъ. Такъ послѣдніе два примѣра тогда пришлось бы написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Big[(60-9)\times 6\Big]-\Big[(24:8)+(20:5)\Big];$$

$$\Big\{\Big[(5-3)\times 2\Big]+\Big[64+36):5\Big]\Big\}:6.$$

Для упрощенія горизонтальную черту, обозначающую дѣленіе, считаютъ вмѣстѣ съ тѣмъ и скобками. На основаніи этого послѣдній примѣръ можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{(5-3)\times 2+(64+36):5}{6}$$

Во многихъ задачникахъ и руководствахъ обозначенія дѣленія при помощи двухъ точекъ заключаютъ въ скобки безразлично, какое бы дѣйствіе надъ частнымъ ни приходилось затѣмъ обозначить.

Прибавимъ, что въ скобки часто заключаютъ обозначеніе дѣйствія для того, чтобы лучше его выдѣлить изъ ряда остальныхъ дѣйствій, хотя бы по существующимъ правиламъ въ скобкахъ и не было надобности. Напр. пишутъ:

$$a+(b+m)+c=(a+b+c)+m,$$

желая выразить положеніе: если къ одному изъ слагаемыхъ прибавимъ нѣсколько единицъ, то и къ суммѣ прибавится столько же единицъ. Здѣсь смыслъ второй части равенства нисколько не измѣнится, если въ ней опустимъ скобки.

Вообще слѣдуетъ сказать, что заключеніе въ скобки такихъ обозначеній дѣйствій, которыя не принято заключать въ скобки при обозначеніи надъ ихъ результатами новыхъ дѣйствій, не извращаетъ смысла обозначеній, между тѣмъ какъ пропускъ скобокъ можетъ ввести нѣкоторую сбивчивость, а иногда и совершенно извратить смыслъ обозначенія. Напр., обозначеніе

$$5\times 15-4\times 17$$

не измѣнитъ своего смысла, если обозначенія умноженій заключимъ въ скобки:

$$(5\times 15)-(4\times 17),$$

обозначеніе же

$$5\times(20-4)-(100-25)$$

совершенно измѣнитъ смыслъ и сдѣлается невозможнымъ для выполненія, если мы напишемъ его безъ скобокъ:

$$5\times 20-4-100-25.$$

85. При устномъ вычисленіи, учитель предлагаетъ выбранный примѣръ настолько медленно, чтобы дѣти успѣвали во время предложенія произвести всѣ назначенныя дѣйствія, и затѣмъ выспрашиваетъ полученные окончательные результаты. Вычисленіе

72) $$\frac{7\times 14+2}{4}+\frac{6\times 15-27}{7}$$

можетъ быть предложено въ слѣдующей формѣ: 7 повторить 14 разъ (дѣлается такая остановка, чтобы дѣти успѣли выполнить это дѣйствіе, что при нѣкоторой опытности, всегда легко замѣтить), къ полученному числу прибавьте 2 (такая же остановка), отъ полученнаго числа возьмите 4-ю часть и запомните ее хорошенько (болѣе длинная остановка); теперь 6 повторите 15 разъ (остановка), отъ полученнаго числа отнимите 27 (остановка), отъ полученнаго числа возьмите 7-ю часть (остановка) и эту часть

прибавьте къ тому числу, которое вы запомнили; сколько получили?

Когда дѣти ознакомятся съ названіями дѣйствій и чиселъ, входящихъ въ каждое дѣйствіе, то же вычисленіе можетъ быть дано въ слѣдующихъ выраженіяхъ: 7 умножьте на 14 (остановка), произведеніе сложите съ 2-мя (остановка), сумму раздѣлите на 3, полученное частное запомните; затѣмъ 6 умножьте на 15 (остановка), изъ произведенія вычтите 27 (остановка), разность раздѣлите на 7 (остановка) и полученное частное сложите съ частнымъ, которое вы нашли раньше. Сколько получилось?

Вообще при чтеніи примѣровъ слѣдуетъ назначать каждое дѣйствіе отдѣльно и въ той послѣдовательности, въ которой дѣйствія должны быть выполнены. Напр. обозначеніе

$$4 \times (30 - 14) + 3 \times 12$$

слѣдуетъ читать такъ: отъ 30 отнять 14, на эту разность умножить 4, затѣмъ 3 умножить на 12 и это произведеніе сложить съ первымъ, а не такъ: 4 умножить на 30 безъ 14, къ произведенію прибавить 3, умноженное на 12. Если послѣдній способъ и можно допускать впослѣдствіи, то въ первое время обученія онъ очень сбиваетъ дѣтей.

Повторять данный примѣръ не должны ни учитель, ни ученики. Если затѣмъ, при провѣркѣ примѣра, и окажется, что нѣкоторыя дѣти забыли порядокъ дѣйствій, то въ этомъ бѣды нѣтъ: всегда найдется такой ученикъ, который припомнитъ и весь примѣръ, и пропущенныя товарищами дѣйствія.

По мѣрѣ того, какъ дѣти начинаютъ считать быстрѣе, остановки между назначеніями дѣйствій дѣлаются короче.

Обыкновенно при вычисленіи примѣровъ дѣти разбиваются на группы: одни получаютъ результатъ скорѣе, другіе медленнѣе, а третьи, наконецъ, спутываются на какомъ-либо промежуточномъ дѣйствіи и не доводятъ вычисленія до конца. Это не мѣшаетъ производительности работы, потому что во время провѣрки всѣ дѣти должны будутъ выполнять всѣ назначенныя дѣйствія.

Для провѣрки работы одинъ ученикъ, по назначенію преподавателя, вспоминаетъ первое дѣйствіе, другой говоритъ результатъ этого дѣйствія и, если этотъ результатъ у кого-либо оказывается ошибочнымъ, то вычисленіе производится вслухъ. Такъ же поступаютъ и съ каждымъ слѣдующимъ дѣйствіемъ. Къ повѣркѣ привлекаются преимущественно ученики, давшіе ошибочный отвѣтъ или не доведшіе вычисленія до конца.

Упражненія эти значительно развиваютъ въ дѣтяхъ быстроту вычисленій и свободное обращеніе съ числами и пріемами

вычисленій, почему ихъ иногда называютъ упражненіями въ быстромъ счетѣ.

Быстрый счетъ необходимо вести въ теченіе всего начальнаго курса ариѳметики, соотвѣтственно усложняя числа и дѣйствія съ ними. Дѣтямъ особенно нравятся упражненія, въ которыхъ послѣ ряда дѣйствій надъ большими и довольно сложными числами получается сравнительно небольшой или круглый результатъ; напр. вычисленіе:

73) $$\frac{\left\{\left[\frac{(725+275)\times(725-275)}{18}\times 40 - 790\ 000\right] : 14\right\} + 17\ 000}{4\ 000},$$

которое въ результатѣ даетъ 8. Оно можетъ быть предложено дѣтямъ въ слѣдующей формѣ: сумму чиселъ 725 и 275 умножить на ихъ разность (остановка, необходимая для того, чтобы произвести 3 дѣйствія), 18-ю часть произведенія умножить на 40 (остановка для двухъ дѣйствій), изъ послѣдняго произведенія вычесть 790 000, разность раздѣлить на 14, къ частному прибавить 17 000 и сумму раздѣлить на 4 000; сколько получится?

86. Письменныя упражненія въ вычисленіяхъ начинаются, когда дѣти ознакомятся съ цыфрами и знаками первыхъ дѣйствій, и сперва состоятъ въ послѣдовательномъ обозначеніи дѣйствій и ихъ результатовъ, при чемъ результаты вычисляются устно. Примѣры для этого пишутся учителемъ на классной доскѣ, или учениками подъ его диктовку въ своихъ тетрадкахъ и на классной доскѣ, или назначаются ученикамъ по задачнику. Работа располагается въ слѣдующемъ порядкѣ:

74) $$\frac{35\times 2 - 8\times 8}{3}\times 47 - \frac{7\times 8 - 4\times 9}{5}\times 19 = 18$$

1) $35\times 2 = 70$
2) $8\times 8 = 64$
3) $70 - 64 = 6$
4) $6 : 3 = 2$
5) $2\times 47 = 94$
6) $7\times 8 = 56$
7) $4\times 9 = 36$
8) $56 - 36 = 20$
9) $20 : 5 = 4$
10) $4\times 19 = 76$
11) $94 - 76 = 18$

75) $$\frac{\left(5 - 2\frac{7}{15}\right) : 4 + \left(10 - 5\frac{3}{5}\right) : 12 - \frac{17}{45}}{2\frac{3}{5}\times 12 + \frac{4}{5}\times 31} = \frac{1}{90}$$

1) $5 - 2\frac{7}{15} = 2\frac{8}{15}$
2) $2\frac{8}{15} : 4 = \frac{19}{30}$
3) $10 - 5\frac{3}{5} = 4\frac{2}{5}$
4) $4\frac{2}{5} : 12 = \frac{11}{30}$

5) $\frac{19}{30}+\frac{11}{30}=1$

6) $1-\frac{17}{45}=\frac{28}{45}$

7) $2\frac{3}{5}\times 12=31\frac{1}{5}$

8) $\frac{4}{5}\times 31=24\frac{4}{5}$

9) $31\frac{1}{5}+24\frac{4}{5}=56$

10) $\frac{28}{45}:56=\frac{1}{90}$

Провѣряется работа такъ же, какъ и при устныхъ упражненіяхъ въ вычисленіи. Отвѣтъ въ первой строкѣ вписывается по окончаніи всего вычисленія.

Иногда полезно требовать исполненія работъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{35\times 2-8\times 8}{3}\times 47-\frac{7\times 8-4\times 9}{5}\times 19=$$

$$\frac{70-64}{3}\times 47-\frac{56-36}{5}\times 19=$$

$$\frac{6}{3}\times 47-\frac{20}{5}\times 19=2\times 47-4\times 19=94-76=\mathbf{18}$$

Здѣсь обозначенія дѣйствій постепенно, въ порядкѣ ихъ выполненія, замѣняются получаемыми результатами.

Чтеніе примѣровъ дѣтьми и диктовка ихъ дѣтямъ производятся въ той же формѣ, какъ указано выше для устнаго вычисленія.

87. Примѣры собственно для письменнаго вычисленія предлагаются, выполняются и провѣряются одинаково съ только что разобранными, съ тою разницею, что нѣкоторыя дѣйствія могутъ быть для провѣрки выполнены на классной доскѣ, если примѣры были сдѣланы всѣми учениками въ своихъ тетрадяхъ. Если все вычисленіе исполняется на классной доскѣ, то для каждаго дѣйствія, а иногда и для части дѣйствія, слѣдуетъ вызывать отдѣльнаго ученика для того, чтобы возможно бо́льшее число дѣтей приняли участіе въ работѣ подъ руководствомъ преподавателя; остальныя дѣти всѣ вычисленія обязательно выполняютъ на своихъ тетрадяхъ. Сдѣлавшіе часть вычисленія на классной доскѣ продолжаютъ его въ своихъ тетрадяхъ.

Вотъ нѣсколько образцовъ расположенія такого рода работъ:

76) $\left[\frac{24\ 486\ 624\ 000}{12\ 060}:\frac{10\ 152\ 000}{4\ 800}\times 3\ 125-646\ 950\right]:78\ 435=\mathbf{30}$

1) 24 486 624 000 | 12 060
366 6 | 2 030 400
4 824
0

2) 10 152 000 | 4 800
55 | 2 115
72
24 0
0

3) 2 030 400 | 2 115
1 903 5 | 960
126 90
0

4) 3125
×960
18750
28125
3000000

5) 3 000 000
−646 950
2 353 050

6) 2 353 050 | 78 435
2 353 05 | 30
0

Числа, полученныя въ результатахъ, можно не переписывать для производства надъ ними новыхъ дѣйствій, если этому не препятствуетъ принятое расположеніе дѣйствій. Приведенное вычисленіе тогда приметъ слѣдующій видъ:

1) 24 486 624 000 | 12 0.60
366 6 | 2 030 400 | 2 115 ... (3)
4 824 | 1 903 5 | 960
0 | 126 90
0

2) 10 152 000 | 4 800
55 | 2 115
72
24 0
0

960 × 3 125 ...(4)
187 50
2 812 5

5) 3 000 000
− 646 950

6) 2 353 050 | 78 435
2 353 05 | 30
0

77) $\frac{[(5\text{ чтв.}+4\text{ чтк.}+5\text{ г.})\times 306-(1133\text{ чтв.}+3\text{ чтк.}+4\text{ г.})]:6}{(7\text{ кб. с.}+109\text{ кб. ф.}+1044\text{ кб. д.}):(2\text{ кб. с.}+150\text{ кб ф.}+1500\text{ кб. д.})}=$

$=\mathbf{31\ чтв.\ 6\ чтк.\ 7\ г.}$

1) 5 чтв. + 4 чтк. + 5 г.
× 306
1530 + 1224 + 1530

2) 1706 + 7 + 2
− 1133 + 3 + 4

3) 573 + 3 + 6
33 + 24 + 24
8×3 27 30
24 8×3 0
24

1530 | 8
73 | 191
10 | 1224
2 | 1415 | 8
61 | 176
55 | 1530
7 | 1706

6 | 95 чтв. + 4 чтк. + 5 г.

4) (7 кб. с. + 109 кб. ф. + 1044 кб. д.) : (2 кб. с. + 150 кб. ф. + 1500 кб. д.)

$343\times7=2401$; $2401+109=1728\times2510$; $1728\times1=1728$; 8640; 3456; 4337280; $4337280+1044=4338324$; $4338324\times3=4338324$; 0; 1446108.

$343\times2=686$; $686+150=1728\times836$; $1728\times6=10368$; 5184; 13824; 1444608; $1444608+1500=1446108$.

5) 95 чтв. + 4 чтк. + 5 г. | 3

$8\times2=16$; $16+16=20$; $8\times2=16$; $16+16=21$; $21\times3=0$.

31 чтв. + 6 чтк. + 7 г.

78) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2498}+\frac{121}{3747}+\frac{4}{6245}\right)\times 7\frac{61}{77}-\frac{8}{55}\right]\times 6\frac{9}{16}+\frac{1}{18}\right\}:3\frac{2}{9}=\frac{1}{4}$

1) $\frac{1}{2498}+\frac{121}{3747}+\frac{4}{6245}=\frac{3}{7494}+\frac{242}{7494}+\frac{4}{6245}=\frac{245}{7494}+\frac{4}{6245}=$

$=\frac{245.5}{7494.5}+\frac{4.6}{6245.6}=\frac{1225+24}{37470}=\frac{1249}{37470}=\frac{1}{30}$;

$3747\,|\,2498\,|\,1249$; $3747 : 1149 = 3$; $7494\,|\,6245\,|\,1249$; $7494 : 1249 = 6$

2) $\frac{1}{30}\times 7\frac{61}{77}=\frac{1\times 600}{30\times 77}=\frac{20}{77}$; 3) $\frac{20}{77}-\frac{8}{55}=\frac{100-56}{385}=\frac{44}{385}=\frac{4}{35}$;

4) $\frac{4}{35}\times 6\frac{9}{16}=\frac{1.3}{35.16}=\frac{3}{4}$; 5) $\frac{3}{4}+\frac{1}{18}=\frac{27+2}{36}=\frac{29}{36}$;

6) $\frac{29}{36}:3\frac{2}{9}=\frac{29\times 9}{36\times 29}=\frac{1}{4}$.

При исполненіи этого вычисленія мы складывали дроби послѣдовательно, т.-е. сперва первую со второй, а затѣмъ полученную сумму съ третьей дробью, при чемъ общаго знаменателя нашли при помощи общаго наибольшаго дѣлителя.

88. Упражненія въ вычисленіяхъ, какъ и въ рѣшеніи задачъ, должны начинаться съ простыхъ примѣровъ на одно дѣйствіе и итти, постепенно усложняясь. Къ примѣрамъ на одно дѣйствіе

приходится прибѣгать, впрочемъ, и среди курса, когда нужно познакомить дѣтей съ какимъ-либо новымъ пріемомъ вычисленія и упражнять ихъ въ этомъ пріемѣ; но держать долго на такихъ примѣрахъ неудобно, потому что дѣти, не упражняясь въ другихъ дѣйствіяхъ, теряютъ пріобрѣтенный въ нихъ навыкъ; при томъ долгія упражненія только въ одномъ какомъ-либо дѣйствіи придаютъ монотонность классной работѣ и быстро утомляютъ и преподавателя, и учениковъ.

Примѣры на вычисленіе представляютъ собою самую удобную работу для самостоятельныхъ занятій дѣтей въ классѣ и внѣ класса, потому что они не требуютъ никакихъ предварительныхъ разъясненій и могутъ быть выбраны вполнѣ посильно для каждаго ученика.

89. Внѣклассныя работы. Считаемъ здѣсь умѣстнымъ обратить вниманіе на общій характеръ, которымъ должны отличаться работы дѣтей, производимыя безъ руководства и помощи преподавателя, и особенно внѣклассныя работы. Работы эти должны способствовать усвоенію и закрѣпленію въ дѣтяхъ пройденнаго, а не знакомить ихъ съ чѣмъ-либо новымъ. Сообщеніе и разработка новаго должны производиться подъ непосредственнымъ руководствомъ и наблюденіемъ учителя. Поэтому, всякая самостоятельная работа, а внѣклассная по преимуществу, должна выбираться такъ, чтобы дѣти знали, какъ ее надо исполнить, и имѣли всѣ данныя для ея исполненія. Работы, не удовлетворяющія этому условію, ведутъ къ напрасной тратѣ времени, лишаютъ дѣтей необходимой увѣренности въ своихъ силахъ, даютъ имъ поводъ не исполнять и такихъ работъ, которыя полнѣ соотвѣтствуютъ ихъ силамъ и знаніямъ, и вселяютъ недружелюбное отношеніе къ преподавателю. А внѣклассныя непосильныя работы могутъ имѣть еще худшія послѣдствія, заставляя добросовѣстныхъ учениковъ безплодно тратить массу труда и времени въ ущербъ физическому развитію, а недобросовѣстныхъ—въ лучшемъ случаѣ прибѣгать къ чужой помощи, а въ худшемъ къ списыванію. Поэтому задачи для внѣклассной работы должны выбираться очень осторожно и лучше ихъ замѣнять примѣрами на вычисленіе. Въ составленныхъ нами задачникахъ находится большой запасъ примѣровъ для устнаго и письменнаго вычисленія.

90. Ариѳметическія загадки. Особое мѣсто между задачами занимаютъ упражненія, которыя для дѣтей можно назвать ариѳметическими загадками. Задачи эти состоятъ въ рѣшеніи ариѳметическимъ путемъ простѣйшихъ уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Въ этихъ упражненіяхъ дѣйствія прямо не назначены, но легко опредѣляются изъ существующихъ между ними соотношеній, а потому эти упражненія занимаютъ среднее мѣсто между другими задачами и примѣрами на вычисленіе. Для усвоенія соотношеній между дѣйствіями и зависимости между числами въ каждомъ дѣйствіи, разбираемыя упражненія представляютъ наилучшее средство. Вотъ нѣсколько примѣровъ такихъ упражненій.

79) $\frac{?\times 5+80}{3}\times 2+40=100.$

80) $\frac{?+35}{25}\times 24+8-79=1.$

81) $2\ 500:\frac{[(1\ 000-?)\times 6+600]\times 8-9\ 000}{6}=5.$

82) $100-\left[90\ 000-\left(\frac{112\ 500}{?}-468\right)\times 150\right]:450=44.$

Въ первое время эти упражненія предлагаются въ слѣдующей формѣ (79): задуманное число повторили 5 разъ, къ полученному числу прибавили 80, 3-ю часть полученнаго числа повторили 2 раза, къ полученному числу прибавили 40 и получили 100; какое число задумано?

Запись же для дѣтей можетъ быть исполнена въ такой схемѣ:

$$\left.\begin{array}{l}\times\ 5\\ +\ 80\\ :\ 3\\ \times\ 2\\ +\ 40\end{array}\right\}\ 100$$

Затѣмъ дѣти постепенно знакомятся съ приведенными выше обозначеніями и читаютъ примѣры въ слѣдующей формѣ (80): къ какому числу надо прибавить 35, чтобы, повторивши 25-ю часть полученнаго числа 24 раза, прибавивъ къ новому полученному числу 4 и отнявъ 79, получить 1?

Когда же ознакомятся съ названіями дѣйствій и чиселъ, то чтеніе примѣровъ можетъ принять такую форму (81 и 82):

Какое число надо вычесть изъ 1000, чтобы, умноживъ разность на 6, прибавивъ къ произведенію 600, помноживъ сумму на 8, вычтя изъ полученнаго произведенія 9000, раздѣливши эту разность на 6 и раздѣливши на полученное частное 2500, получить въ послѣднемъ частномъ 5?

Найти число, отъ дѣленія на которое 112 500 получимъ такое частное, что если вычтемъ изъ него 468, разность умножимъ на 150, произведеніе вычтемъ изъ 90 000, новую разность раздѣлимъ на 450 и это частное вычтемъ изъ 100, то получимъ въ разности 44.

91. Рѣшеніе загадокъ въ первое время обученія должно быть основано на непосредственномъ смыслѣ вопросовъ, относящихся къ каждому дѣйствію. Такъ рѣшеніе для 2-й изъ приведенныхъ загадокъ (№ 80) можетъ быть выработано приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Сначала узнаемъ, сколько было, когда еще не отнимали 79. Когда отняли 79, то осталась 1-ца, значитъ до этого число состояло и изъ 1-цы, и изъ 79-ти. Чтобы найти его, надо къ 79-ти прибавить 1-цу, получимъ 80. Теперь узнаемъ, сколько было до прибавленія 8-ми. Послѣ прибавленія 8-ми получилось 80, значитъ до прибавленія было меньше 80 на 8 единицъ, т.-е. 72. Это число 72 получилось отъ повторенія другого неизвѣстнаго числа 24 раза, значитъ это неизвѣстное число должно содержаться (повторяться) въ 72-хъ 24 раза, и чтобы получить его, надо 72 раздѣлить на 24 части; найдемъ 3. Это число составляетъ 25-ю часть ранѣе бывшаго числа; если въ одной части 3 единицы, то въ 25 частяхъ 25 разъ по 3, т.-е. 75. Это число получено отъ прибавленія къ задуманному числу 35, слѣд. 75 состоитъ и изъ задуманнаго числа, и изъ 35. Чтобы найти задуманное число, надо изъ 75 вычесть 35; найдемъ, что задумано было 40.

Послѣ отысканія задуманнаго числа полезно заставить дѣтей провѣрить, удовлетворяетъ ли оно условіямъ загадки. Рѣшеніе загадки и ея повѣрка, если вычисленія при этомъ производятся устно, могутъ быть записаны въ такой формѣ:

$79+1=80$	$40+35=75$
$80-8=72$	$75:25=3$
$72:24=3$	$3\times 24=72$
$3\times 25=75$	$72+8=80$
$75-35=40$	$80-79=1$

Когда дѣти ознакомятся съ соотношеніями дѣйствій и зависимостью между числами въ каждомъ дѣйствіи, то рѣшеніе загадокъ можетъ быть ведено иначе. Напр., рѣшеніе загадки подъ № 82 можетъ принять слѣдующій видъ:

Въ послѣднемъ вычитаніи намъ извѣстны уменьшаемое 100 и разность 44; для опредѣленія вычитаемаго, надо изъ 100 вычесть 44; получимъ 56. Это вычитаемое раньше было частнымъ въ дѣленіи, дѣлитель котораго есть 450; чтобы опредѣлить неизвѣстное дѣлимое, надо частное 56 умножить на дѣлителя 450, отъ чего получимъ 25 200. Это число раньше было разностью въ вычитаніи, въ которомъ уменьшаемое было 90 000. Чтобы найти неизвѣстное вычитаемое, надо изъ уменьшаемаго 90 000 вычесть разность 25 200;

получимъ 64 800. Это вычитаемое получилось отъ умноженія на 150 нѣкоторой неизвѣстной разности; чтобы найти ее, надо 64 800 раздѣлить на 150, такъ какъ каждый множитель равенъ частному отъ дѣленія произведенія на другого множителя. Сдѣлавъ это дѣленіе, найдемъ, что разность была 432. А такъ какъ вычитаемое въ этомъ вычитаніи было 468, то для отысканія неизвѣстнаго уменьшаемаго надо 468 сложить съ 432; получимъ 900. Это уменьшаемое получилось отъ дѣленія 112 500 на искомое число; поэтому для опредѣленія искомаго числа (дѣлителя) надо 112 500 (дѣлимое) раздѣлить на 900 (частное), отъ чего получимъ 125.

Вычисленіе для опредѣленія искомаго числа и повѣрка располагаются въ слѣдующемъ порядкѣ:

Рѣшеніе.

1) 100 − 44 = 56

2) 56 × 450 = 280 + 224 = 25 200

3) 90 000 − 25 200 = 64 800

4) 64 800 : 150 = 432 ..(5)

5) 432 + 468 = 900

6) 112 500 : 900 = 125.

Повѣрка.

1) 112 500 : 125 = 900 ..(2)

2) 112 5 − 0 = 900

3) 432 × 150 = 64 800

4) 90 000 − 64 800 = 25 200

5) 25 200 : 450 = 56

6) 100 − 56 = 44.

92. Упражненія эти могутъ доходить до рѣшенія очень сложныхъ уравненій; достаточно ограничиться такими видами уравненій, гдѣ неизвѣстное находится только въ одной части уравненія и для рѣшенія которыхъ не приходится дѣлать приведенія подобныхъ членовъ, содержащихъ неизвѣстное; рѣшеніе другихъ видовъ уравненій ариѳметическимъ путемъ было бы затруднительно и потребовало бы соображеній, выходящихъ изъ предѣловъ начальной ариѳметики.

Рѣшеніе числовыхъ загадокъ въ началѣ дается дѣтямъ съ большимъ трудомъ, но послѣ освоенія съ пріемами ихъ рѣшенія, загадки составляютъ одно изъ любимыхъ дѣтьми упражненій и могутъ служить очень удобной работой для самостоятельныхъ занятій. Вводить загадки въ число упражненій по ариѳметикѣ можно только послѣ ознакомленія дѣтей со всѣми 4-мя дѣйствіями, когда понятія о дѣйствіяхъ уже достаточно окрѣпли; поэтому въ нашемъ руководствѣ загадки впервые вводятся только въ концѣ ариѳметики перваго десятка чиселъ. Первыя загадки должны заключать въ себѣ не болѣе 2-хъ дѣйствій и не должны требовать опредѣленія вычитаемаго по уменьшаемому и разности и дѣлителя по дѣлимому и частному, а также повторенія одного и того же дѣйствія, потому что опредѣленіе вычитаемаго и дѣлителя требуетъ болѣе трудныхъ соображеній, чѣмъ опредѣленіе уменьшаемаго и дѣлимаго, а повторенія одного и того же дѣйствія сбиваетъ дѣтей при первомъ знакомствѣ съ этимъ родомъ упражненій. Знакомство съ пріемами рѣшенія загадокъ можетъ быть достигнуто только подъ руководствомъ преподавателя; сами дѣти стараются угадать искомое число и убѣдиться въ его вѣрности путемъ провѣрки. Разъ число угадано дѣтьми вѣрно, они никакъ не могутъ согласиться съ необходимостью какого-либо иного пріема для рѣшенія загадки; поэтому пріемы рѣшенія загадокъ могутъ быть выяснены дѣтямъ только на загадкахъ, искомое число для которыхъ еще ими не опредѣлено.

Каждая загадка, предлагаемая дѣтямъ, непремѣнно должна быть записана на классной доскѣ, потому что на запоминаніе ихъ тратится непроизводительно очень много времени. Рѣшеніе же можетъ быть находимо и письменно, и устно, сообразно съ числами, входящими въ загадку.

II.

Счетъ единицами отъ 1 до 10.

93. Въ этомъ отдѣлѣ дѣти знакомятся съ первоначальными пріемами вычисленія, которые непосредственно вытекаютъ изъ опредѣленій дѣйствій. Пріемы эти, какъ мы видѣли, не требуютъ знанія системы счисленія, и примѣненіе ихъ цѣлесообразно только въ предѣлахъ основанія системы, т.-е. въ предѣлахъ перваго десяткая чиселъ, гдѣ каждое число представляетъ группу однородныхъ единицъ и для своего обозначенія требуетъ особаго слова и особаго знака.

Сообразно съ цѣлію этого отдѣла, каждое дѣйствіе въ предѣлѣ перваго десятка, по возможности, характеризуется пріемомъ вычисленія, вытекающимъ изъ его опредѣленія. Такъ *сложеніе* будемъ характеризировать дѣтямъ какъ *присчитываніе къ числу опредѣленной группы единицъ*, *вычитаніе*—какъ *отсчитываніе отъ числа такой же группы единицъ*, *умноженіе*—какъ *счетъ парами, тройками* и т. д. Дѣленіе въ общемъ видѣ трудно характеризовать пріемомъ вычисленія и потому придется подраздѣлись его на два отдѣль-

ныхъ случая: 1) дѣленіе числа на равныя части и 2) дѣленіе по содержанію, которыя въ глазахъ дѣтей въ первое время явятся двумя отдѣльными дѣйствіями. Сообразно съ этимъ и дѣти могутъ обозначать дѣйствія словами, выражающими характеръ пріема вычисленія. Вмѣсто сложить они могутъ говорить присчитать, прибавить одно число къ другому; вмѣсто вычесть—отсчитать, отнять, отбавить одно число отъ другого; вмѣсто умножить—повторить число нѣсколько разъ, взять число нѣсколько разъ, сосчитать число нѣсколько разъ; вмѣсто раздѣлить, смотря по смыслу вопроса, — или найти такую-то часть числа, раздѣлить число на столько-то частей, или узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, сколько разъ одно число повторяется въ другомъ, сколько разъ отъ одного числа можно отнять другое.

94. Программа отдѣла и общій ходъ упражненій. Обученіе начинается съ основного и вмѣстѣ съ тѣмъ съ самаго простого ариѳметическаго дѣйствія, т.-е. со счета, и располагается въ слѣдующемъ порядкѣ, опредѣляемомъ генетической связью между дѣйствіями: 1) простой прямой счетъ, 2) простой обратный счетъ, 3) присчитываніе къ числу и отсчитываніе отъ числа опредѣленной группы единицъ (сложеніе и вычитаніе), 4) прямой счетъ по 2 (умноженіе 2-хъ), 5) обратный счетъ по 2 (дѣленіе на 2), 6) прямой и обратный счетъ по 3 (умноженіе 3-хъ, дѣленіе на 3), 7) прямой и обратный счетъ по 4 (умноженіе 4-хъ, дѣленіе на 4), 8) прямой и обратный счетъ по 5 (умноженіе 5-ти, дѣленіе на 5).

Каждое новое дѣйствіе начинается упражненіями на наглядныхъ пособіяхъ, потомъ идутъ упражненія въ рѣшеніи простыхъ задачъ съ предметными числами, наконецъ, упражненія съ отвлеченными числами; только послѣ этого дѣйствіе примѣняется къ рѣшенію сложныхъ задачъ и вычисленію сложныхъ примѣровъ. Всѣ дѣйствія въ этомъ предѣлѣ могутъ производиться только устно, поэтому письменныя упражненія какъ при вычисленіи примѣровъ, такъ и при рѣшеніи задачъ, могутъ состоять исключительно въ обозначеніи дѣйствій и ихъ результатовъ. Письменныя упражненія должны всегда слѣдовать за устными. Въ своемъ мѣстѣ мы укажемъ, когда они могутъ начинаться.

95. Значеніе наглядныхъ упражненій въ преподаваніи ариѳметики. Ставя на первое мѣсто упражненія на наглядныхъ пособіяхъ, считаемъ умѣстнымъ сдѣлать здѣсь нѣсколько замѣчаній

о значеніи этихъ упражненій въ преподаваніи ариѳметики и о правильной ихъ постановкѣ. Ни о числѣ, ни о дѣйствіи мы не можемъ дать дѣтямъ нагляднаго представленія подобно тому, какъ это дѣлается, напр., въ естествовѣдѣніи при помощи живыхъ экземпляровъ растеній, гербаріевъ, рисунковъ и моделей, въ географіи—при помощи рисунковъ, фотографій, рельефныхъ картъ и т. п., потому что ни чиселъ, ни дѣйствій надъ числами мы не можемъ показать дѣтямъ; чтобы познакомить дѣтей съ основными ариѳметическими понятіями о счетѣ, числѣ и единицѣ, мы должны прибѣгнуть къ счету предметовъ. Примѣнять ариѳметическія дѣйствія для дѣтей гораздо легче къ числамъ, полученнымъ ими самими отъ счета предметовъ; различные пріемы вычисленія легче схватываются дѣтьми, когда эти пріемы воспроизводятся при помощи наглядныхъ пособій.

Выучить дѣтей правильно и сознательно вести простой прямой счетъ было бы почти невозможно, если бы сама жизнь въ дошкольный еще періодъ не вызывала въ дѣтяхъ потребности въ этой операціи и не представляла многочисленныхъ случаевъ ея примѣненія.

На наглядныя упражненія въ преподаваніи ариѳметики надо смотрѣть какъ на примѣненіе ариѳметическихъ дѣйствій и пріемовъ вычисленія къ числамъ, непосредственно полученнымъ дѣтьми отъ счета предметовъ. Сообразно съ этимъ упражненія на наглядныхъ пособіяхъ должно организовать такъ, чтобы они указывали дѣтямъ не только результаты производимыхъ дѣйствій, но и знакомили ихъ съ пріемами вычисленія, помощію которыхъ эти результаты могутъ быть добыты. Пользованіе наглядными пособіями исключительно какъ средствомъ для добыванія результатовъ дѣйствій („инструментальный счетъ“, какъ выражаются нѣкоторые педагоги) не можетъ быть оправдано. Такое пользованіе не даетъ представленія о пріемахъ вычисленія и потому слишкомъ разсчитываетъ на усвоеніе результатовъ дѣйствій одной памятью, вслѣдствіе чего всякій разъ, какъ дѣти забудутъ нужный имъ результатъ, приходится или снова прибѣгать къ „инструментальному счету“, что крайне неудобно, или подсказывать дѣтямъ этотъ результатъ, что еще хуже. Дѣти, пріученныя къ „инструментальному счету“, чувствуютъ себя безъ наглядныхъ пособій безпомощными и долго потомъ прибѣгаютъ къ счету по пальцамъ.

Еще болѣе неумѣстнымъ представляется намъ прибѣгать къ наглядымъ пособіямъ при вычисленіяхъ, требующихся для рѣшенія какой-либо задачи, при чемъ кубики ариѳметическаго ящика или шарики счетовъ изображаютъ лошадей, аршины, дома,

яблоки и т. п. Одно изъ двухъ: или дѣти въ достаточной степени подготовлены къ рѣшенію предлагаемой задачи со стороны умѣнья производить вычисленія — и тогда наглядныя пособія излишни, или не подготовлены — и тогда слѣдуетъ обратить вниманіе на упражненія, которыя могутъ подвинуть ихъ въ этомъ умѣньи. При рѣшеніи задачъ на наглядныхъ пособіяхъ вся производительность задачи исчезаетъ, внѣшній интересъ поглощаетъ интересъ дѣла и работа получаетъ характеръ полуигры, полуученья.

96. Въ разсматриваемомъ отдѣлѣ курса нѣтъ надобности въ наглядныхъ пособіяхъ, спеціально приспособленныхъ къ преподаванію; для счета въ предѣлѣ 10-ти одинаково хорошо могутъ служить всякіе предметы, находящіеся подъ руками. Но чтобы не возвращаться еще разъ къ этому предмету, укажемъ два изъ нихъ: классные счеты и ариѳметическій ящикъ или наборъ спичекъ „С.-Петербургской мастерской учебныхъ пособій и игръ“. Хорошо, если классные счеты, кромѣ горизонтальныхъ, будутъ снабжены еще вертикальными проволоками, которыя особенно удобны, потому что одинаково хорошо видны всѣмъ ученикамъ въ классѣ. Ариѳметическій ящикъ долженъ заключать въ себѣ отъ 200 до 300 отдѣльныхъ кубиковъ, отъ 20 до 30 брусковъ, изъ которыхъ каждый представляетъ собою 10 кубиковъ, и отъ 5 до 6 досокъ, изъ которыхъ каждая представляетъ собою 10 брусковъ и слѣд. 100 кубиковъ; всего ящикъ долженъ представлять собою 1000 кубиковъ. На каждомъ брускѣ и на каждой доскѣ должно быть намѣчено дѣленіе на кубики. Наборъ спичекъ состоитъ болѣе чѣмъ изъ 1000 спичекъ и заключаетъ въ себѣ отдѣльныя спички и связки спичекъ по 10 штукъ и по 100 штукъ въ совершенно достаточномъ количествѣ для потребностей преподаванія. Наборъ спичекъ по своему составу и цѣнѣ сравнительно съ ариѳметическимъ ящикомъ очень удобенъ для немноголюдныхъ классовъ и для домашняго обученія. По нашему мнѣнію въ школѣ можно вполнѣ ограничиться классными счетами.

97. Простой прямой счетъ. Первое упражненіе въ прямомъ счетѣ удобнѣе всего провести на классныхъ счетахъ. Упражненіе состоитъ въ постепенномъ образованіи чиселъ перваго десятка и ведется слѣдующимъ образомъ: на одну изъ вертикальныхъ проволокъ надѣвается одинъ шарикъ, къ нему прибавляется другой, и дѣти считаютъ, сколько всѣхъ шариковъ надѣто на проволоку. Затѣмъ, на слѣдующую проволоку надѣваются сразу 2 шарика и къ нимъ прибавляется одинъ шарикъ, а дѣти говорятъ, сколько шариковъ было сперва на этой проволокѣ, сколько къ нимъ прибавили и сколько шариковъ на ней стало. Счетъ ведется дѣтьми въ такихъ выраженіяхъ:

Одинъ шарикъ да одинъ шарикъ — два шарика, два шарика да одинъ шарикъ — три шарика и т. д. — Къ одному шарику присчитали (прибавили) еще одинъ, стало два шарика; къ двумъ шарикамъ присчитали еще одинъ, стало три шарика и т. д.

Для повторенія дѣти вызываются къ счетамъ и считаютъ шарики на горизонтальныхъ проволокахъ, при чемъ требованія ставятся въ такой формѣ:

Отсчитайте два шарика. — Къ двумъ прибавьте (присчитайте) одинъ шарикъ; сколько стало? — Сосчитайте, сколько шариковъ надѣто на проволокѣ?

До какого числа можно довести счетъ на первомъ урокѣ, — укажутъ всегда сами дѣти: на какомъ числѣ начинаютъ они путаться, на томъ и слѣдуетъ остановиться; затѣмъ уже въ слѣдующіе уроки можно постепенно довести счетъ до 10-ти.

Первое время обученія полезно посвятить необходимой подготовкѣ къ грамотѣ и ознакомленію дѣтей со школьными порядками и требованіями классной дисциплины. Въ эти подготовительныя упражненія легко ввести элементъ счета; тогда для перваго урока ариѳметики останется только упорядочить знанія, пріобрѣтенныя при приготовительныхъ упражненіяхъ, и счетъ можетъ быть сразу доведенъ до 10.

Наглядныя упражненія въ счетѣ должны обязательно производиться на разныхъ предметахъ; для этого можно, напр., заставить дѣтей сосчитать, сколько въ классѣ оконъ, сколько ученическихъ столовъ, если ихъ не болѣе 10-ти, сколько учениковъ за каждымъ столомъ, сколько пальцевъ на рукахъ и т. п. Такая перемѣна предметовъ необходима для того, чтобы дѣти отвлекли понятіе о числѣ отъ понятія о считаемыхъ предметахъ.

98. За наглядными упражненіями въ счетѣ слѣдуетъ счетъ предметными числами, т.-е. счетъ предметовъ, которыхъ въ данный моментъ нѣтъ передъ глазами дѣтей. Учитель заставляетъ дѣтей разсказать, какъ они сосчитаютъ яблоки, ложки, дома на улицѣ и т. п. Отвѣты даются въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Одно яблоко да одно яблоко — два, два яблока да еще одно — три яблока и т. д. — Къ одной ложкѣ прибавлю (присчитаю) еще одну, станетъ двѣ; къ двумъ присчитаю одну, стенетъ три и т. д. — Одинъ домъ, два дома, три дома и т. д.

Упражненія эти назначаются для перехода къ отвлеченному счету, къ которому можно приступить только тогда, когда счетъ предметными числами идетъ вполнѣ свободно. Для перехода къ отвлеченному счету, учитель предлагаетъ дѣтямъ сказать, какъ

они будутъ считать какія-нибудь вещи, или предметы, и долженъ добиться отвѣта въ одной изъ слѣдующихъ формъ:

Одинъ (одна, одно) да одинъ—два, два да одинъ—три и т. д.—Къ одному присчитаю (прибавлю) одинъ, станетъ два; къ двумъ присчитаю одинъ, станетъ три и т. д.—Одинъ, два, три и т. д.

При этомъ сообщается дѣтямъ, что каждая вещь, каждый предметъ при счетѣ называется единицей, а два, три и т. д. называются числами, послѣ чего отвлеченный счетъ дѣти ведутъ и въ такой формѣ:

Одна единица да одна единица—двѣ единицы, двѣ единицы да одна единица—три единицы и т. д.

Требованія отъ дѣтей не ограничиваются однимъ послѣдовательнымъ счетомъ, начиная отъ единицы; каждый ученикъ долженъ умѣть, кромѣ того, правильно отвѣчать на вопросы:

Сколько выйдетъ, когда къ пяти присчитаете одинъ?—Когда къ семи прибавите одинъ?—Восемь да одинъ—сколько?—Три да одна—сколько?—Я насчиталъ у себя пять карандашей, какъ стану считать дальше?—Мальчикъ досчиталъ до семи, какъ онъ будетъ считать дальше?—Считайте отъ трехъ?—отъ пяти?—отъ двухъ?

99. Упражненія въ отвлеченномъ счетѣ должны чередоваться съ рѣшеніемъ задачъ, въ которыхъ требуется: 1) присчитать къ числу единицу, 2) сосчитать нѣсколько единицъ, 3) послѣдовательно присчитать къ данному числу нѣсколько единицъ; напримѣръ:

83) У крестьянина четыре лошади, онъ купилъ еще одну. Сколько лошадей стало у крестьянина?

84) Ученикъ сдѣлалъ одну тетрадь для русскаго языка, одну—для ариѳметики, одну—для рисованія, одну—для чистописанія и одну черновую. Сколько тетрадей сдѣлалъ ученикъ?

85) Во время урока учитель заставилъ шестерыхъ учениковъ говорить стихи, одного—писать на доскѣ, одного—читать по книгѣ и одного разсказывать прочитанное. Сколько учениковъ было спрошено?

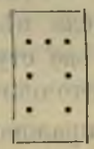
Отвѣты требуются въ полной формѣ:

У крестьянина стало пять лошадей.—Ученикъ сдѣлалъ пять тетрадей.—Учитель спросилъ девять учениковъ.

Одного отвѣта, даже и вѣрнаго, мало; слѣдуетъ требовать отчета, какъ полученъ отвѣтъ. Объясненіе рѣшенія задачъ должно быть дано приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Къ четыремъ лошадямъ присчиталъ одну лошадь, стало пять лошадей.—Тетрадь для русскаго языка да тетрадь для ариѳметики—двѣ тетради; да тетрадь для рисованія—три тетради; да тетрадь для чистописанія—четыре тетради; да черновая тетрадь—пять тетрадей; всего пять тетрадей.—Шесть учениковъ говорили стихи, да одинъ писалъ на доскѣ, стало семь; да еще одинъ читалъ, стало восемь; да еще одинъ разсказывалъ, стало девять; всего спрошено было девять учениковъ.

100. Для самостоятельныхъ упражненій въ это время можно предложить пересчитываніе значковъ, поставленныхъ на бумагѣ или на доскѣ и выставленіе самими дѣтьми значковъ въ опредѣленномъ числѣ. Для этого могутъ служить таблицы съ такъ называемыми фигурами чиселъ перваго десятка. Дѣтямъ задается пересчитать точки въ каждой таблицѣ и разсказать, какъ онѣ расположены; напр., про таблицу



дѣти должны сказать, что въ ней поставлено семь точекъ, что пять точекъ стоятъ вверху и двѣ внизу; или: три точки съ одной стороны таблицы, три съ другой и одна въ серединѣ. Такимъ образомъ, каждая таблица даетъ поводъ произвести нѣсколько упражненій въ счетѣ. Обратить вниманіе дѣтей на расположеніе точекъ въ таблицахъ полезно еще и въ томъ отношеніи, что опредѣленный способъ группированія единицъ много помогаетъ воспринимать числа и воспроизводить ихъ въ своемъ воображеніи. Поэтому и при наглядныхъ упражненіяхъ въ счетѣ, полезно группировать предметы, чтобы помогать правильному ихъ пересчитыванію.

Самостоятельнымъ письменнымъ упражненіемъ можетъ служить воспроизведеніе дѣтьми такихъ таблицъ въ своихъ тетрадяхъ.

101. Обратный счетъ. За прямымъ слѣдуетъ обратный счетъ, т.-е. отсчитываніе по единицѣ отъ каждаго числа перваго десятка. Упражненія въ обратномъ счетѣ располагаются въ той же послѣдовательности, какъ и въ прямомъ счетѣ. Сперва на наглядныхъ пособіяхъ отъ каждаго числа, начиная съ двухъ, отнимается по единицѣ, затѣмъ то же самое производится на

предметныхъ числахъ и, наконецъ, въ отвлеченномъ видѣ. Счетъ производится въ такихъ выраженіяхъ:

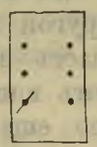
Два безъ одного — одинъ. — Отъ пяти отсчитаемъ (отнимемъ) одинъ, останется (станетъ) четыре.

Заканчиваются упражненія послѣдовательнымъ обратнымъ счетомъ отъ каждаго числа перваго десятка въ такой формѣ:

Девять безъ одного—восемь, восемь безъ одного—семь и т. д. — Отъ семи единицъ отсчитаемъ одну, останется шесть единицъ; отъ шести единицъ отсчитаемъ одну, останется пять и т. д.—Пять, четыре, три и т. д.

Обратный счетъ пригалается къ задачамъ, въ которыхъ требуется: 1) отсчитать отъ даннаго числа единицу, 2) отсчитать отъ даннаго числа послѣдовательно нѣсколько единицъ. Кромѣ этихъ задачъ, можно ввести еще задачи съ выраженіями „больше“, „меньше“ и частными видами ихъ: „старше“, „моложе“, „дороже“, „дешевле“ и т. п. Рѣшеніе этихъ задачъ не встрѣтитъ затрудненій, такъ какъ понятія „больше“ и „меньше“ дѣти безъ всякаго сомнѣнія приносятъ въ школу и ихъ затрудняетъ только дальнѣйшее развитіе этихъ понятій, состоящее въ различеніи увеличенія и уменьшенія числа нѣсколькими единицами и въ нѣсколько разъ; на данной же ступени въ такомъ различеніи нѣтъ ни надобности, ни достаточнаго матеріала.

Для самостоятельныхъ упражненій въ обратномъ счетѣ служатъ таблицы съ фигурами чиселъ, въ которыхъ вычеркнуто по одной точкѣ, напр.



Дѣти считаютъ, сколько точекъ поставлено въ каждой таблицѣ, сколько зачеркнуто и сколько осталось незачеркнутыхъ, и воспроизводятъ таблицы въ своихъ тетрадяхъ.

102. Цыфры и знаки дѣйствій. Познакомивъ дѣтей съ прямымъ и обратнымъ счетомъ, мы считаемъ возможнымъ познакомить ихъ съ письменнымъ обозначеніемъ чиселъ и дѣйствій.

Вопросъ о времени введенія цыфръ и знаковъ дѣйствій рѣшается весьма различно. Одни считаютъ введеніе ихъ „преждевременнымъ“ до окончанія ариѳметики перваго десятка чиселъ безъ объясненія основаній такого мнѣнія; другіе думаютъ, что „вообще съ этимъ спѣшить не нужно“, полагая, что при болѣе

раннемъ введеніи этихъ обозначеній „дѣти будутъ мыслить не о числѣ, а о цыфрѣ, его изображающей, и будутъ всѣ дѣйствія относить не къ числу, а къ цыфрѣ“.

По нашему мнѣнію рѣшеніе вопроса находится въ зависимости: 1) отъ нуждъ училища (дѣлятся ли классы на отдѣленія, или нѣтъ, и слѣд. есть ли настоятельная необходилость въ самостоятельныхъ письменныхъ работахъ, или безъ нихъ можно обойтись), 2) отъ того ариѳметическаго матеріала, которымъ должны владѣть дѣти, чтобы за введеніемъ письменныхъ обозначеній могли слѣдовать письменныя работы ариѳметическаго характера, и 3) отъ общей подготовки дѣтей къ письменнымъ работамъ. Имѣя въ виду училища, классы которыхъ подраздѣляются на отдѣленія, мы ограничиваемся minimum'омъ того ариѳметическаго матеріала, при которомъ возможно и цѣлесообразно введеніе письменныхъ обозначеній. Этотъ minimum состоитъ въ такомъ знакомствѣ съ числами и дѣйстіями, которое можетъ дать дѣтямъ усвоеніе прямого и обратнаго счета.

103. Познакомить дѣтей съ обозначеніемъ первыхъ десяти чиселъ цыфрами гораздо легче, чѣмъ выучить ихъ писать слова, потому что для обозначенія слова необходимо расчленить его на составные элементы и обозначить эти элементы, между тѣмъ какъ цыфрой въ предѣлѣ 10 обозначается прямо то понятіе, которое желаютъ обозначить.

Очень многіе преподаватели затрудняютъ дѣло, стараясь уяснить дѣтямъ значеніе цыфры какъ условнаго знака числа и отличіе цыфры отъ числа, и затрачиваютъ на это много времени и труда.

Намъ кажется, что совершенно достаточно передъ введеніемъ цыфръ выяснить дѣтямъ, что простѣйшій способъ письменнаго обозначенія чиселъ состоитъ въ постановкѣ столькихъ письменныхъ значковъ, сколько единицъ въ обозначаемомъ числѣ, но что тогда для обозначенія большихъ чиселъ потребуется очень много значковъ, что для пониманія обозначеній надо будетъ каждый разъ пересчитывать выставленные значки. Поэтому для каждаго изъ первыхъ девяти чиселъ согласились брать особый знакъ.

Объ условности обозначенія чиселъ цыфрами, объ отличіи цыфры отъ числа и т. п. совершенно неумѣстно говорить въ это время по недостаточному развитію дѣтей. Роль цыфры дѣти гораздо лучше поймутъ изъ ряда упраженій, направленныхъ надлежащимъ образомъ, чѣмъ изъ длинныхъ бесѣдъ по этому поводу.

Цыфры должны даваться постепенно, при чемъ для каждой цыфры надо выбирать простѣйшее и наиболѣе правильное начер-

таніе, указывать элементы, изъ которыхъ составлено это начертаніе, и способъ написанія цыфры. При обозначеніи десяти слѣдуетъ указать дѣтямъ, что нулемъ обозначается отсутствіе единицъ.

Упражненія при ознакомленіи дѣтей съ цыфрами состоятъ: 1) въ ознакомленіи дѣтей съ ихъ формою и въ пріобрѣтеніи навыка въ письмѣ ихъ; 2) въ чтеніи написанныхъ цыфръ и 3) въ записываніи назначаемыхъ учителемъ чиселъ.

Чтобы дѣти пріучились правильно разставлять цыфры и знаки дѣйствій, тетради для ариѳметическихъ упражненій полезно дѣлать изъ бумаги, разграфленной на квадратныя клѣтки, и заставлять писать каждую цыфру и каждый знакъ въ особой клѣткѣ.

Чтобы дѣти могли повторить безъ учителя значеніе цыфръ и навести, въ случаѣ надобности, справку о значеніи какой-либо изъ нихъ, въ нашемъ задачникѣ помѣщены таблицы, раздѣленныя каждая на двѣ части, изъ которыхъ въ первой помѣщена фигура числа, а во второй—цыфра, обозначающая это число.

Нѣкоторые преподаватели знакомству съ арабскими цыфрами предпосылаютъ ознакомленіе съ римскими цыфрами на томъ основаніи, что начертаніе послѣднихъ проще и онѣ даютъ нѣкоторое представленіе о составѣ обозначаемыхъ чиселъ. Опытъ убѣдилъ насъ, что римскія цыфры въ это время задерживаютъ обученіе на начальныхъ упражненіяхъ долѣе, чѣмъ требуется, не принося существенной пользы дѣлу, и что непосредственное введеніе арабскихъ цыфръ не представляетъ особыхъ затрудненій. Удобный случай ознакомить дѣтей съ обозначеніемъ первыхъ 12-ти чиселъ римскими цыфрами представится, когда пойдетъ рѣчь о раздѣленіи сутокъ на части и объ устройствѣ часовъ.

104. Болѣе затрудненій представляетъ ознакомленіе дѣтей съ обозначеніемъ дѣйствій. Здѣсь прежде всего надо уяснить потребность въ обозначеніи дѣйствій, затѣмъ познакомить съ самыми знакоположеніями, научить правильно читать обозначенія дѣйствій и правпльно обозначать назначаемыя дѣйствія.

Лучшимъ средствомъ для уясненія потребности въ обозначеніи дѣйствій служитъ сравненіе двухъ задачъ, въ которыхъ съ одинаковыми данными числами требуется произвести различныя дѣйствія, для чего могутъ служить, напр., слѣдующія двѣ задачи:

86) Когда мальчикъ, идя въ училище, прошелъ уже 4 версты, то ему осталось пройти еще 1 версту. Сколько верстъ отъ дома до училища?

87) Мальчику надо итти отъ дома до училища 4 версты. Одну версту онъ уже прошелъ; сколько верстъ осталось ему пройти?

Послѣ рѣшенія этихъ задачъ, на классной доскѣ записываются данныя числа каждой задачи въ особой строкѣ:

4 1
4 1

Затѣмъ выясняется, что для рѣшенія первой задачи пришлось единицу присчитать къ 4-мъ, а для рѣшенія второй — единицу отсчитать отъ 4-хъ, но что этого различія изъ записей, сдѣланныхъ на доскѣ, не видно, а чтобы сдѣлать это яснымъ, надо обозначить, что было сдѣлано въ первой задачѣ и что во второй. Послѣ этого указываются принятыя для обозначенія дѣйствій знаки плюсъ и минусъ. Дальнѣйшія упражненія состоятъ въ чтеніи обозначеній дѣйствій; напр., учитель требуетъ отъ дѣтей прочесть обозначенія:

$$3+1,\ 5-1,\ 6+1,\ 9+1,\ 10-1,\ 8-1,$$

а затѣмъ требуетъ обозначить, что къ 7-ми надо прибавить 1-цу, отъ 8-ми отнять 1-цу и т. п.

Такимъ образомъ, съ знакомъ плюсъ дѣти соединятъ понятіе „присчитать“, съ знакомъ минусъ — понятіе „отсчитать“. Знакъ плюсъ читается словами: присчитать, придать, прибавить, приложить и короче словомъ: да, а знакъ минусъ—словами: отсчитать, отнять, отбавить, вычесть и короче словомъ: безъ. Не лишнее дать и названія плюсъ и минусъ для этихъ знаковъ.

При ознакомленіи съ знакомъ равенства, указывается дѣтямъ, что знаки плюсъ и минусъ показываютъ только, что надо сдѣлать съ числами, а для того, чтобы обозначить, сколько получится послѣ рѣшенія, ставится знакъ равенства и послѣ него полученное число. Знакъ равенства читается словами: получится, составитъ, выйдетъ, останется, смотря потому, послѣ обозначенія какого дѣйствія онъ поставленъ.

105. Письменныя упражненія въ предѣлѣ перваго десятка представляютъ повтореніе разобранныхъ выше устныхъ упражненій въ прямомъ и обратномъ счетѣ. Они состоятъ преимущественно изъ вычисленія примѣровъ. Нѣкоторые изъ примѣровъ должны быть исполнены на классной доскѣ для того, чтобы дѣти усвоили, какъ ихъ слѣдуетъ исполнять въ своихъ тетрадяхъ. При самостоятельной работѣ, дѣти должны списать каждый примѣръ въ свои тетради и поставить послѣ знака равенства полученное ими число. Повѣрка работы производится помощію чтенія ея однимъ изъ учениковъ, при чемъ остальные слѣдятъ по своимъ тетрадямъ и заявляютъ о каждомъ отличіи ихъ работы отъ чи-

таемой. Послѣ прочтенія каждаго примѣра необходимо спрашивать дѣтей, такъ ли у нихъ онъ записанъ, какъ былъ прочтенъ, и провѣрять отвѣты внимательнымъ осмотромъ тетрадей. Съ теченіемъ времени дѣти привыкаютъ хорошо слѣдить за повѣрочнымъ чтеніемъ и заявлять о встрѣчающихся ошибкахъ, такъ что предлагаемый способъ провѣрки не занимаетъ много времени. Передъ выполненіемъ работы всѣ задаваемые примѣры прочитываются дѣтьми вслухъ, какъ для опредѣленія количества заданной работы, такъ и для провѣрки, хорошо ли дѣти ее понимаютъ. Примѣры:

$$5+1= \ , \ 5-1=$$

читаются въ слѣдующихъ выраженіяхъ: къ 5-ти присчитать 1, выйдетъ сколько? отъ 5-ти отсчитать 1, выйдетъ сколько? 5 да 1 — сколько? 5 безъ 1 — сколько?

Послѣ же рѣшенія, т.-е. когда будетъ написано:

$$5+1=6, \ 5-1=4,$$

надо читать въ слѣдующихъ выраженіяхъ: къ 5-ти присчитать 1, получится 6; отъ 5-ти отсчитать 1, останется 4; 5 да 1 — 6; 5 безъ 1-го — 4.

Вычисленіе этихъ примѣровъ, въ видѣ самостоятельной работы, можетъ продолжаться и въ то время, когда въ устныхъ упражненіяхъ дѣти будутъ знакомиться съ слѣдующими дѣйствіями.

106. Сложеніе и вычитаніе. Предыдущія упражненія ознакомили дѣтей съ элементами, изъ которыхъ слагаются сложеніе и вычитаніе, и теперь возможно перейти къ упражненіямъ въ этихъ дѣйствіяхъ.

Присчитываніе къ числу и отсчитываніе отъ него нѣсколькихъ единицъ встрѣчалось и въ предшествовавшихъ упражненіяхъ: но тамъ эти упражненія сводились къ одному послѣдовательному счету, въ прямомъ или обратномъ порядкѣ, такъ какъ не требовалось присчитать или отсчитать опредѣленной группы единицъ. Упражненія въ сложеніи и вычитаніи, сравнительно съ ними, усложняются требованіемъ присчитать или отсчитать опредѣленную группу единицъ, вслѣдствіе чего приводятся къ одновременному веденію двухъ послѣдовательныхъ счетовъ, прямыхъ для сложенія, обратнаго и прямого для вычитанія.

Трудность сложенія опредѣляется величиною второго слагаемаго, трудность вычитанія — величиною вычитаемаго: чѣмъ больше то и другое, тѣмъ продолжительнѣе, а слѣд. и труднѣе процессы обоихъ дѣйствій. Между обоими дѣйствіями такъ много

общаго, что переходъ отъ присчитыванія какой-либо группы единицъ къ ея отсчитыванію дается дѣтямъ легче, чѣмъ переходъ къ присчитыванію слѣдующей высшей группы единицъ. На основаніи этого сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ перваго десятка мы разсматриваемъ совмѣстно и располагаемъ въ порядкѣ постепеннаго повышенія присчитываемой и отсчитываемой группы единицъ.

107. Первыя упражненія въ присчитываніи 2-хъ могутъ быть проведены на классныхъ счетахъ. Надѣвъ на одну изъ вертикальныхъ проволокъ нѣсколько шариковъ, напр. 3, и заставивъ дѣтей сосчитать надѣтые шарики, преподаватель беретъ 2 шарика и надѣваетъ ихъ послѣдовательно по одному на ту же проволоку, требуя отъ дѣтей каждый разъ отчета, сколько шариковъ стало на проволокѣ. Работа заканчивается вопросами:

Сколько всего шариковъ присчитали къ 3-мъ шарикамъ? — Сколько шариковъ стало послѣ этого? — Какъ присчитывали 2 шарика къ 3-мъ шарикамъ?

Ее можно считать вполнѣ удавшеюся, если дѣти дадутъ слѣдующіе отвѣты:

Мы къ 3-мъ шарикамъ присчитали всего два шарика. — Стало всего 5 шариковъ. — Къ 3-мъ шарикамъ присчитали сперва 1 шарикъ, стало 4 шарика; потомъ къ 4-мъ присчитали еще шарикъ, и стало всего 5 шариковъ.

Нѣсколько подобныхъ же присчитываній 2-хъ шариковъ къ другимъ числамъ, напр. къ 5-ти, къ 7-ми, дѣти выполняютъ сами подъ руководствомъ учителя на горизонтальныхъ проволокахъ, послѣ чего можно перейти къ присчитыванію 2-хъ безъ помощи наглядныхъ пособій, но на предметныхъ числахъ. Примѣры предлагаются въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Сколько составится, если къ 4-мъ карандашамъ присчитаемъ 2 карандаша? — къ 6-ти яблокамъ прибавимъ 2 яблока? и т. д. — Какъ присчитать къ 4-мъ карандашамъ 2 карандаша? — Какъ къ 6-ти яблокамъ прибавить 2 яблока?

А затѣмъ уже даются отвлеченные примѣры: сколько составятъ 2 да 2? 8 да 2? и т. д. — Какъ сосчитали?

Отвѣты даются въ слѣдующей формѣ:

Когда къ 4-мъ карандашамъ присчитаемъ 2 карандаша, то составится 6 карандашей; 8 да 2 составятъ 10. — Чтобы къ 4-мъ карандашамъ присчитать 2, сперва присчитали 1, составилось 5 карандашей; потомъ къ 5-ти присчитали второй карандашъ и вышло 6 карандашей. — Къ 8-ми прибавили сперва одну единицу, получили 9; потомъ къ 9-ти прибавили вторую единицу, получили 10.

Нѣкоторые изъ отвлеченныхъ примѣровъ записываются на доскѣ въ видѣ равенствъ:

$$4+2=6,\ 7+2=9,\ 8+2=10.$$

Отъ отвлеченныхъ примѣровъ можно перейти къ рѣшенію задачъ и къ вычисленіямъ, которыя исполняются и провѣряются такъ, какъ уже было указано выше.

108. Черезъ тотъ же рядъ упражненій должно провести и отсчитываніе 2-хъ. Требованія отъ учениковъ ставятся въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Сколько останется (получится), когда отъ 7-ми отсчитаемъ (отнимемъ, отбавимъ, откинемъ) 2?—Отсчитайте 2 отъ 9-ти?—Сколько составятъ 5 безъ 2-хъ?—Какъ сосчитали?

Отвѣты же даются въ слѣдующей формѣ:

Когда отъ 7-ми отсчитаемъ 2, останется 5. — 5 безъ 2-хъ составитъ 3. — Отъ 5 отсчитали 1, осталось 4, потомъ отъ 4-хъ отсчитали вторую единицу, осталось 3.

Отсчитываніе 2-хъ отъ даннаго числа прилагается къ рѣшенію задачъ и вычисленію примѣровъ.

109. Такимъ же путемъ можно познакомить дѣтей съ присчитываніемъ и отсчитываніемъ 3-хъ, 4-хъ и т. д., съ тою разницею, что упражненія на наглядныхъ пособіяхъ можно постепенно сокращать. При этомъ полезно пріучать дѣтей пользоваться тѣми результатами дѣйствій, которые имъ удалось запомнить. Такъ, вмѣсто того, чтобы присчитать 5 къ какому-либо числу по единицѣ, можно потребовать отъ дѣтей, чтобы они сперва присчитали сразу 3 единицы, если результатъ этого дѣйствія они запомнили, а потомъ уже присчитали оставшіяся 2 единицы. Совмѣстное веденіе сложенія и вычитанія вполнѣ позволяетъ примѣнять такіе пріемы вычисленія, а ознакомленіе съ ними весьма полезно, потому что знакомитъ съ общимъ характеромъ всѣхъ послѣдующихъ ариѳметическихъ пріемовъ вычисленія, состоящихъ въ пользованіи ранѣе опредѣленными результатами дѣйствій.

110. Дѣти часто измѣняютъ порядокъ слагаемыхъ для облегченія дѣйствія; напр., вмѣсто сложенія 3-хъ съ 6-ю, складываютъ 6 съ 3-мя, подмѣтивъ, что такая перестановка не измѣняетъ результата. Избѣгать такого пріема не слѣдуетъ, хотя наталкивать дѣтей на него было бы преждевременно.

Въ вычитаніи, когда разность меньше вычитаемаго (9 — 7, 8—5), можно опредѣлять, сколько единицъ надо прибавить къ

вычитаемому, чтобы получить уменьшаемое; напр., вмѣсто вычитанія 7-ми изъ 9-ти, можно опредѣлить, сколько единицъ надо прибавить къ 7-ми, чтобы получить 9. Пріемъ этотъ значительно сокращаетъ вычисленіе, но требуетъ для своего приложенія нѣкотораго пониманія соотношенія между сложеніемъ и вычитаніемъ и потому долженъ даваться дѣтямъ съ большой осторожностью.

111. Работа съ сложеніемъ и вычитаніемъ можетъ считаться законченной, когда дѣти безъ затрудненія могутъ:

1) опредѣлить каждую изъ суммъ и каждую изъ разностей:

1 + 2	6 + 2	2 + 3	7 + 3	4 + 4	2 + 5	1 + 6	1 + 7	2 + 8
2 + 2	7 + 2	3 + 3	—	5 + 4	3 + 5	2 + 6	2 + 7	—
3 + 2	8 + 2	4 + 3	1 + 4	6 + 4	4 + 5	3 + 6	3 + 7	1 + 9
4 + 2	—	5 + 3	2 + 4	—	5 + 5	4 + 6	—	
5 + 2	1 + 3	6 + 3	3 + 4	1 + 5	—	—	1 + 8	

3 — 2	8 — 2	5 — 3	10 — 3	8 — 4	7 — 5	7 — 6	8 — 7	10 — 8
4 — 2	9 — 2	6 — 3	—	9 — 4	8 — 5	8 — 6	9 — 7	—
5 — 2	10 — 2	7 — 3	5 — 4	10 — 4	9 — 5	9 — 6	10 — 7	10 — 9
6 — 2	—	8 — 3	6 — 4	—	10 — 5	10 — 6	—	
7 — 2	9 — 3	9 — 3	7 — 4	6 — 5	—	—	9 — 8	

2) дать отчетъ въ пріемахъ вычисленія, которыми эти результаты могутъ быть опредѣлены,

и 3) запомнять нѣкоторые изъ нихъ.

Дожидаться, чтобы дѣти усвоили всѣ эти результаты на память излишне, такъ какъ имъ еще много разъ придется опредѣлять эти результаты и усвоеніе ихъ памятью дается само собою, безъ особой затраты времени.

112. Какъ извѣстно, вопросы сложенія и вычитанія могутъ предлагаться въ различныхъ формахъ. Такъ, для сложенія 5-ти и 3-хъ, кромѣ основного вопроса (сколько получится, когда къ 5-ти прибавимъ 3), можно поставить еще слѣдующій: отъ какого числа надо отнять 5 (или 3), чтобы получить 3 (или 5)? Для вычитанія 3-хъ изъ 8-ми, кромѣ основного вопроса (сколько получится, когда отъ 8-ми отсчитаемъ 3), можно поставить еще слѣдующіе два: 1) сколько надо прибавить къ 3-мъ, чтобы получить 8? 2) къ какому числу надо прибавить 3, чтобы получить 8?

Рѣшеніе вопросовъ сложенія и вычитанія, не въ основной ихъ формѣ, требуетъ пониманія соотношенія между сложеніемъ и вычитаніемъ, какъ дѣйствій взаимно-обратныхъ, и потому ставить ихъ въ этой формѣ можно только тогда, когда дѣти уже достаточно освоятся съ этими дѣйствіями; на данной же ступени обученія лучше избѣгать такихъ вопросовъ.

113. Послѣ ознакомленія съ сложеніемъ и вычитаніемъ является возможность ввести рѣшеніе сложныхъ задачъ и вычисленіе сложныхъ примѣровъ. Достаточный запасъ этихъ упражненій находится въ нашемъ задачникѣ. Въ немъ идутъ сперва упражненія на сложеніе нѣсколькихъ чиселъ, затѣмъ на послѣдовательное вычитаніе изъ даннаго числа 2-хъ чиселъ и наконецъ упражненія, требующія обоихъ дѣйствій.

Считаемъ необходимымъ замѣтить, что сложеніе нѣсколькихъ чиселъ на этой ступени обученія представляется сложнымъ дѣйствіемъ, состоящимъ изъ сложенія первыхъ двухъ чиселъ, сложенія этой суммы съ слѣдующимъ числомъ и т. д. Сообразно съ этимъ задача, требующая сложенія нѣсколько чиселъ, должна разбиваться на нѣсколько простыхъ задачъ, приводящихся каждая къ сложенію 2-хъ слагаемыхъ. То же самое слѣдуетъ сказать и о вычисленіи примѣровъ, требующихъ сложенія нѣсколькихъ чиселъ; вычисленіе такихъ примѣровъ должно быть ведено по слѣдующему образцу:

88) $4+2+3=9$
$4+2=6$
$6+3=9$

114. Умноженіе и дѣленіе. Выше мы указали, что умноженіе слагается изъ послѣдовательнаго повторенія сложенія надъ однимъ и тѣмъ же числомъ и изъ послѣдовательнаго прямого счета, а дѣленіе — изъ послѣдовательнаго вычитанія одного числа изъ другого и сосчитыванія этихъ вычитаній; поэтому подготовительною работой для умноженія и дѣленія въ предѣлѣ перваго десятка можетъ служить послѣдовательное повтореніе сложенія и вычитанія надъ однимъ и тѣмъ же числомъ, иначе счетъ равными группами единицъ въ прямомъ и обратномъ порядкѣ. Сообразно съ этимъ упражненія въ умноженіи и дѣленіи въ предѣлѣ перваго десятка могутъ быть озаглавлены: „прямой и обратный счетъ по 2, по 3, по 4 и по 5-ти“. Умноженіе чиселъ выше 5-ти и дѣленіе на числа выше 5-ти въ предѣлѣ перваго десятка встрѣтиться не могутъ, если разсматривать исключительно случаи безостаточнаго дѣленія.

Прямой и обратный счетъ по 2, по 3 и т. д. можетъ начинаться въ концѣ предшествующаго отдѣла, гдѣ онъ представитъ очень хорошее упражненіе въ сложеніи и вычитаніи, особенно удобное въ концѣ уроковъ, такъ какъ эти упражненія, безъ нарушенія смысла, могутъ быть прерваны вмѣстѣ со звонкомъ.

115. Упражненіе въ прямомъ счетѣ по два ведется сперва на классныхъ счетахъ, гдѣ шарики располагаются парами

или на одной проволокѣ, или на различныхъ проволокахъ. Для повторенія нагляднаго счета по 2 могутъ служить фигуры чиселъ 4, 6, 8 и 10, разгруппированныхъ на пары. Необходимо достигнуть, чтобы это упражненіе шло совершенно свободно и безъ остановокъ, приблизительно въ слѣдующемъ видѣ: два да два—четыре, четыре да два—шесть и т. д., или проще: два, четыре, шесть, восемь, десять.

116. Для перехода отъ счета по 2 къ умноженію 2-хъ на 2, на 3, на 4 и на 5 лучшимъ средствомъ служатъ задачи. Рѣшеніе задачъ приведетъ дѣтей къ необходимости не только вести послѣдовательный счетъ по 2, но и отдавать себѣ отчетъ въ томъ, сколько разъ въ каждомъ данномъ случаѣ они повторили 2. Для образца приводимъ задачу и ея рѣшеніе.

89) Въ саду 3 дорожки, на каждой по двѣ скамейки. Сколько скамеекъ въ саду?

Рѣшеніе. На первой дорожкѣ 2 скамейки, да на второй 2, стало 4; да на третьей еще 2, стало 6; въ саду было 6 скамеекъ.

Изъ рѣшенія выводится, что 2 пришлось сосчитать (взять, повторить) 3 раза. Рѣшеніе записывается въ видѣ равенства:

$$2+2+2=6.$$

Въ слѣдующихъ задачахъ дѣти ранѣе рѣшенія опредѣляютъ, сколько разъ придется сосчитать 2 и почему. Для образца приводимъ задачу и ея рѣшеніе.

90) Крестьянинъ продалъ 3 куля овса, по 2 рубля за куль. Сколько получилъ онъ за овесъ?

Рѣшеніе. Чтобы узнать, сколько крестьянинъ получилъ за овесъ, надо 2 рубля сосчитать 3 раза, потому что и за первый куль крестьянинъ получилъ 2 рубля, и за второй—2 р., и за третій—2 р. Когда 2 сосчитаемъ 3 раза, получимъ 6; слѣд. крестьянинъ получилъ за овесъ 6 рублей.

Для краткости мы приводимъ здѣсь и будемъ далѣе приводить связное изложеніе рѣшеній задачъ. Если на урокѣ сразу не удается получить отъ дѣтей такого рѣшенія, то слѣдуетъ расчленить его на составныя части, заставить дѣтей послѣдовательно высказать каждую часть и затѣмъ повторить въ связномъ видѣ.

Послѣ разбора нѣсколькихъ задачъ, требующихъ умноженія 2-хъ на 2, 3, 4 и 5, слѣдуетъ ознакомить дѣтей съ знакомъ умноженія, указавъ, что вмѣсто

$$2+2+2=6,$$

принято писать короче

$$2 \times 3 = 6$$

и что косой крестъ замѣняетъ слова „сосчитать“, „повторить“, „взять нѣсколько разъ“. Чтобы дѣти лучше вникли въ смыслъ этого обозначенія, полезно упражнять ихъ въ замѣнѣ обозначеній умноженія косымъ крестомъ обозначеніями при помощи знака плюсъ и наоборотъ. Необходимо требовать, чтобы дѣти указывали, какое число надо повторить, и какое число показываетъ, сколько разъ надо повторить. Читаются обозначенія умноженія въ слѣдующихъ выраженіяхъ: 2 повторить (взять, сосчитать) 4 раза, выйдетъ (получится) 8; 3 раза по 2 составитъ 6; пятью 2 равно 10. Кромѣ косого креста слѣдуетъ ознакомить съ обозначеніемъ умноженія точкой.

Послѣ этого возможно приступить къ сложнымъ задачамъ и вычисленіямъ гдѣ, кромѣ умноженія, встрѣчаются и ранѣе разсмотрѣнныя дѣйствія. Чтобы дѣти могли правильно выполнять примѣры на вычисленія, необходимо пріучить ихъ читать обозначенія дѣйствій въ томъ порядкѣ, въ которомъ дѣйствія должны выполняться. Такъ обозначенія

91) $5 + 2 \times 2$, $9 - 2 \times 3$, $10 - 2 \times 4 + 2 \times 3$

дѣти должны читать: 1) 2 повторить 2 раза и полученное число прибавить къ 5-ти; 2) 2 взять 3 раза и полученное число отнять отъ 9-ти; 3) 2 сосчитать 4 раза, полученное число отнять отъ 10-ти; затѣмъ 2 повторить 3 раза и полученное число прибавить къ тому, что осталось. Приведенные примѣры должны быть выполнены въ слѣдующемъ порядкѣ:

$2 \times 2 = 4$	$2 \times 3 = 6$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times 3 = 6$
$5 + 4 = 9$	$9 - 6 = 3$	$10 - 8 = 2$	$2 + 6 = 8.$

Чтобы облегчить для дѣтей пониманіе и чтеніе примѣровъ на вычисленіе обозначенія умноженія можно заключать въ скобки.

117. Дѣленіе, какъ мы уже имѣли случай указать, подраздѣляется на два случая: дѣленіе на части и дѣленіе по содержанію. Эти два значенія дѣленія на столько трудно сводятся другъ къ другу и къ общему опредѣленію дѣленія, что въ первое время обученія удобнѣе разсматривать ихъ совершенно независимо другъ отъ друга и для каждаго значенія установить особый знакъ. Изъ обычныхъ обозначеній дѣленія обозначенію

$$\frac{8}{2} = 4$$

условимся придавать значеніе дѣленія на части, а обозначенію

$$8 : 2 = 4$$

значеніе дѣленія по содержанію. Первое обозначеніе читается: 8 раздѣлить на 2 части, получимъ въ каждой части по 4, или половина 8-ми равна 4; второе—въ 8-ми 2 повторяется (содержится) 4 раза. Въ послѣдствіи, когда оба случая дѣленія будутъ сведены къ общему опредѣленію, оба обозначенія могутъ употребляться, какъ это и принято, для обоихъ значеній дѣленія безразлично.

Подготовительнымъ упражненіемъ къ обоимъ случаямъ дѣленія на 2 служитъ обратный счетъ по два, который начинается вычитаніемъ 2-хъ изъ чиселъ 4, 6, 8, 10 и заканчивается послѣдовательнымъ отниманіемъ 2-хъ отъ каждаго изъ этихъ чиселъ. Для самостоятельнаго повторенія дѣтьми этого счета служатъ таблицы съ фигурами чиселъ 4, 6, 8, 10, разгруппированными по 2, изъ которыхъ въ каждой вычеркнуто по 2 точки.

118. Чтобы отъ этого упражненія перейти къ дѣленію на части, необходимо предварительно ознакомить дѣтей съ понятіями о цѣломъ и о части. Для этого можно на глазахъ дѣтей разрѣзать листъ бумаги на полулисты, четверти и осьмушки, раздѣлить кругъ, начерченный на доскѣ, на 3, 6, 9 частей и т. п., и познакомить съ названіями этихъ частей.

Приводимъ рядъ упражненій, которыя помогутъ дѣтямъ усвоить эти понятія.

92) Два мальчика купили яблоко и раздѣлили его между собою поровну. Сколько досталось каждому?

93) Крестьянинъ привезъ изъ города пряниковъ и раздѣлилъ его поровну между своими 4-мя дѣтьми. Сколько досталось каждому?

94) Отъ цѣлаго хлѣба отрѣзали четверть хлѣба для завтрака. Сколько хлѣба осталось?

95) Лавочникъ развѣсилъ фунтъ чаю на восьмушки и продалъ 5 восьмушекъ. Сколько чаю осталось?

96) У плотника была доска въ 1 сажень, для починки пола онъ отпилилъ отъ нея двѣ трети. Какой длины доска осталась?

97) Въ лавкѣ было 4 мѣшка муки и изъ каждаго продали по половинѣ, а послѣ всю оставшуюся муку насыпали полными мѣшками. Сколько вышло полныхъ мѣшковъ?

98) На каждаго человѣка въ артели полагалось по четверти фунта говядины; въ артели было 4 человѣка. Сколько говядины выходило въ день?

Послѣ такого знакомства съ частями цѣлаго, можно перейти къ дѣленію чиселъ на 2 равныя части. Первыя упражненія дѣлаются наглядно для чего предлагаютъ дѣтямъ 4, 6, 8, 10 шари-

ковъ надѣть на 2 проволоки счетовъ поровну; 4, 6, 8, 10 кубиковъ раздѣлить поровну между двумя учениками. Пріемъ дѣленія состоитъ въ послѣдовательномъ отниманіи по 2 отъ дѣлимаго числа и раздѣленія каждой взятой пары на 2 части. Чтобы раздѣлить 6, дѣти берутъ изъ нихъ 2 и въ каждую часть отдѣляютъ по 1, затѣмъ отъ оставшихся 4 снова берутъ 2 и въ каждую часть кладутъ по 1, и такъ же поступаютъ съ оставшимися 2-мя; такимъ образомъ получаютъ въ каждой части по 3.

Отъ дѣленія на наглядномъ пособіи переходятъ къ рѣшенію задачъ, затѣмъ къ дѣленію отвлеченныхъ чиселъ и знакомятся съ приведеннымъ выше обозначеніемъ дѣленія на части. Въ этомъ обозначеніи дѣти должны умѣть указать значеніе каждаго числа, примѣрно, въ слѣдующей формѣ: верхнее число дѣлится на части, нижнее показываетъ, на сколько частей надо дѣлить, и послѣднее—сколько получается въ каждой части.

119. Для ознакомленія съ дѣленіемъ по содержанію лучшимъ средствомъ могутъ служить задачи, требующія такого дѣленія. Приводимъ образецъ задачи и ея рѣшенія.

99) Изъ 8 листовъ бумаги мальчикъ сдѣлалъ тетради, въ 2 листа каждую. Сколько тетрадей онъ сдѣлалъ?

Рѣшеніе. Когда мальчикъ сдѣлалъ первую тетрадь, у него осталось $8-2=6$ листовъ бумаги; послѣ второй тетради у него осталось $6-2=4$ листа; послѣ третьей $4-2=2$ листа, изъ которыхъ онъ сдѣлалъ четвертую тетрадь. Слѣд. мальчикъ сдѣлалъ 4 тетради.

Изъ этого рѣшенія видно, что пришлось отъ 8-ми отнимать по 2 и считать, сколько разъ можно было произвести это дѣйствіе; столько и вышло тетрадей. Поэтому въ слѣдующихъ задачахъ можно требовать, чтобы дѣти раньше рѣшенія опредѣлили, что имъ придется сдѣлать для рѣшенія. Въ отвѣтѣ они должны указать, что для рѣшенія задачи надо сосчитать, сколько разъ отъ даннаго числа можно отнять по 2. По указанію учителя это выраженіе замѣняется выраженіемъ: сосчитать, сколько разъ 2 содержится (повторяется) въ данномъ числѣ. Послѣ упражненій на отвлеченныхъ числахъ, даваемыхъ въ формѣ вопросовъ: сколько разъ 2 содержится (повторяется) въ 4, 6, 8, 10, можно познакомить дѣтей съ приведеннымъ выше обозначеніемъ дѣленія по содержанію.

Оба случая дѣленія примѣняются затѣмъ къ рѣшенію болѣе сложныхъ задачъ и примѣровъ на вычисленіе.

120. Умноженіе 3-хъ, 4-хъ и 5-ти и дѣленіе на эти числа проводятся тѣмъ же путемъ, съ той разницей, что прямой счетъ

по 3, по 4 и по 5-ти ведется совмѣстно съ обратнымъ и дѣти знакомятся одновременно и съ умноженіемъ каждаго изъ этихъ чиселъ, и съ дѣленіемъ на него.

121. На умноженіи и дѣленіи въ предѣлѣ перваго десятка надо остановиться на столько долго, чтобы дѣти 1) совершенно освоились съ приведенными пріемами вычисленія въ этихъ дѣйствіяхъ, съ обозначеніями дѣйствій и чтеніемъ этихъ обозначеній, 2) умѣли прилагать эти дѣйствія къ рѣшенію задачъ и примѣровъ на вычисленія и 3) запомнили бо́льшую часть произведеній и частныхъ, что, впрочемъ, при достаточномъ количествѣ упражненій дается само-собою, безъ особаго заучиванія таблицъ умноженія и дѣленія.

Весь матеріалъ умноженія и дѣленія въ первомъ десяткѣ заключается въ слѣдующихъ таблицахъ:

$2\times2=4$	$4:2=2$	$3\times2=6$	$6:3=2$
$2\times3=6$	$6:2=3$	$3\times3=9$	$9:3=3$
$2\times4=8$	$8:2=4$	$4\times2=8$	$8:4=2$
$2\times5=10$	$10:2=5$	$5\times2=10$	$10:5=2$

Составленіе такихъ таблицъ дѣтьми можетъ служить хорошимъ средствомъ для запоминанія результатовъ умноженія и дѣленія. Для каждаго случая дѣленія дѣти должны составлять отдѣльныя таблицы съ соотвѣтствующимъ обозначеніемъ дѣйствія.

122. Кромѣ изложенныхъ нами пріемовъ вычисленія, возможно и желательно примѣненіе пріемовъ вычисленія, основанныхъ на усвоеніи памятью тѣхъ результатовъ умноженія и дѣленія, которые даются ранѣе другихъ. Такъ, при умноженіи 2-хъ на 5, можно 2 повторить сперва 3 раза, потомъ 2 повторить 2 раза и сложить полученныя числа, если только дѣти успѣли запомнить, что $2\times3=6$ и $2\times2=4$. При дѣленіи чиселъ на 4, можно каждое число сперва раздѣлить на 2 и полученное число снова раздѣлить на 2 и такимъ образомъ воспользоваться умѣньемъ дѣтей дѣлить числа пополамъ. Для объясненія этого пріема дѣленія на 4 стоитъ только напомнить дѣтямъ, какъ дѣлятъ яблоко или листъ бумаги на 4 равныя части.

При рѣшеніи задачъ, вмѣсто дѣленія по содержанію, дѣти указываютъ иногда дѣленіе на части; напр., для рѣшенія задачи, сколько фунтовъ чаю, въ 2 рубля каждый, можно купить на 8 рублей, они предлагаютъ раздѣлить 8 рублей на равныя части. Ошибка происходитъ часто только отъ того, что, рѣшивъ задачу, дѣти смѣшиваютъ данное число съ искомымъ и, найдя, что чаю было куплено 4 фунта, принимаютъ за искомое цѣну одного фунта. Такія ошибки нельзя оставлять не исправленными, потому что онѣ ведутъ къ неправильному пониманію и дѣйствій, и задачъ.

Въ этихъ видахъ надо быть особенно настойчивымъ въ требованіи полнаго усвоенія содержанія задачи и заставлять дѣтей отдѣлять данныя задачи отъ ея вопроса; затѣмъ полезно указывать на несоотвѣтствіе результата съ вопросомъ задачи. Такъ въ приведенномъ примѣрѣ можно указать, что, раздѣливъ 8 рублей на части, мы въ каждой части получимъ рубли, а въ задачѣ требовалось узнать, сколько фунтовъ чаю было куплено.

123. Упражненія въ предѣлѣ перваго десятка слѣдуетъ закончить повтореніемъ всего пройденнаго, соединеннымъ съ развитіемъ нѣкоторыхъ изъ усвоенныхъ дѣтьми понятій. Сюда можетъ быть отнесено ознакомленіе съ понятіями увеличить и уменьшить на нѣсколько единицъ и въ нѣсколько разъ, и нѣкоторое знакомство съ отношеніями дѣйствій между собою.

124. Сравненіе чиселъ можно производить сперва при помощи наглядныхъ пособій. Для разностнаго сравненія чиселъ на двѣ проволоки счетовъ помѣщается сперва по одинаковому числу шаровъ, напр. по 4, и затѣмъ на одну изъ нихъ надѣвается еще нѣсколько шаровъ, напр. 2 шара. Дѣти говорятъ, что на обѣихъ проволокахъ сначала было поровну, а потомъ на одной стало больше, чѣмъ на другой, именно на нее надѣто 2 шара лишнихъ противъ другой. Если дѣти не найдутъ общепринятаго выраженія, что на одной проволокѣ на 2 шара, или 2-мя шарами, больше, чѣмъ на другой, то преподаватель самъ знакомитъ съ этими выраженіями и пріучаетъ дѣтей къ надлежащему ихъ употребленію рядомъ упражненій, въ родѣ слѣдующихъ 2-хъ:

100) Два мальчика сдѣлали себѣ по 5-ти тетрадей, а потомъ второй сдѣлалъ еще 3 тетради. У котораго мальчика больше тетрадей? — На сколько?

101) Въ двѣ кадки налили по 6 ведеръ воды, а потомъ изъ первой вылили 4 ведра. Въ какой кадкѣ воды стало меньше? — На сколько?

Послѣ этого можно потребовать, чтобы дѣти сами опредѣляли, какое изъ данныхъ чиселъ больше и на сколько, сначала на наглядныхъ пособіяхъ, затѣмъ въ задачахъ и наконецъ въ отвлеченномъ видѣ.

125. Кратное сравненіе чиселъ должно пройти черезъ тотъ же рядъ послѣдовательныхъ упражненій. Помѣстивъ на двухъ проволокахъ одинаковое число шаровъ, напр. по 4 шара, и прибавивъ на вторую проволоку еще 4 шара, слѣдуетъ заставить дѣтей разсказать, на какой проволокѣ шаровъ стало больше и на сколько; затѣмъ надо обратить вниманіе на то, что на второй

проволокѣ было помѣщено 2 раза по 4 шара, а на первой только 1 разъ, и что это выражаютъ, говоря, что на второй проволокѣ вдвое (въ 2 раза) больше шаровъ, чѣмъ на первой. Подобнымъ же образомъ можно познакомить дѣтей съ выраженіями: больше въ три раза (втрое) въ четыре раза (вчетверо) и т. д. Для той же цѣли могутъ служить задачи:

102) Столяръ въ понедѣльникъ сдѣлалъ 3 рамы, а во вторникъ до обѣда — 3 рамы и послѣ обѣда еще 3 рамы. Въ какой день столяръ сдѣлалъ больше рамъ? На сколько? —Во сколько разъ?

103) Въ одной комнатѣ было 2 стула, а въ другой у каждой стѣны стояло по 2 стула. Въ какой комнатѣ было меньше стульевъ? — На сколько? — Во сколько разъ?

126. Затѣмъ дѣти производятъ кратное сравненіе чиселъ на наглядныхъ пособіяхъ, въ задачахъ и въ отвлеченномъ видѣ. Для разностнаго сравненія чиселъ 9 и 3 дѣти должны отдѣлить отъ 9 три; для кратнаго—они должны будутъ расгруппировать 9 на тройки, отдѣливъ сначала отъ 9 три и потомъ разбивъ 6 на 2 группы, по 3 въ каждой. На вопросъ, почему можно сказать, что 9 шестью больше 3, въ отвѣтѣ должно быть указано, что въ 9-ти кромѣ 3-хъ находится еще 6, или что 9 состоитъ изъ 3-хъ и 6-ти. На вопросъ, почему можно сказать, что 9 второе больше 3-хъ, въ отвѣтѣ должно быть указано, что 3 въ 9-ти заключается (содержится) 3 раза.

Отъ разностнаго и кратнаго сравненія чиселъ можно перейти къ рѣшенію задачъ, въ которыхъ требуется увеличить или уменьшить число въ нѣсколько разъ и нѣсколькими единицами. При этомъ надо указать, что для увеличенія числа на нѣсколько единицъ слѣдуетъ къ нему прибавить, а для уменьшенія—отнять отъ него эти единицы; что для увеличенія числа въ нѣсколько разъ надо его повторить столько же разъ, а для уменьшенія — раздѣлить на столько же частей. Указанія эти непосредственно вытекаютъ изъ тѣхъ понятій, которыя дѣти должны соединять съ выраженіями „больше и меньше нѣсколькими единицами“ и „въ нѣсколько разъ“ и которыя они должны усвоить изъ предшествующихъ упражненій.

127. Многіе преподаватели считаютъ понятія увеличить и уменьшить нѣсколькими единицами и въ нѣсколько разъ на столько простыми и основными, что характеризуютъ ими самыя дѣйствія; напр. умножить у нихъ значитъ увеличить число въ нѣсколько разъ и вмѣсто уможить они часто говорятъ увеличить въ нѣсколько разъ; вычесть значитъ уменьшить нѣсколькими единицами и вмѣсто

вычесть они говорятъ уменьшить нѣсколькими единицами. Такой взглядъ неправиленъ, потому что если понятіе „больше“ и „меньше“ можно считать присущимъ понятію о величинѣ, то дальнѣйшее расчлененіе этого понятія: „больше и меньше на нѣсколько единицъ“ и „больше и меньше въ нѣсколько разъ“ требуетъ опредѣленія; по отношенію къ обратнымъ дѣйствіямъ, этотъ взглядъ суживаетъ ихъ значеніе. Кромѣ того, вмѣсто совершенно опредѣленныхъ и раздѣльныхъ понятій о дѣйствіяхъ, выражаемыхъ словами прибавить (присчитать), отнять (отсчитать) и т. д., здѣсь вводятся болѣе сложныя выраженія, которыя дѣтьми легко смѣшиваются и рѣдко высказываются вполнѣ точно. Точно такъ же нельзя признать правильными и умѣстными объясненія въ родѣ слѣдующихъ: если одинъ фунтъ чаю стоитъ 2 рубля, то 3 фунта стоятъ въ 3 раза больше, поэтому 2 рубля надо умножить на 3; если 3 фунта стоятъ 6 рублей, то одинъ фунтъ стоитъ въ 3 раза меньше, поэтому 6 рублей надо раздѣлить на 3. Такія объясненія не показываютъ, какимъ путемъ дѣти дошли до выбора того или другого дѣйствія, потому что разъ 3 фунта стоятъ въ 3 раза больше, то необходимость умноженія не подлежитъ никакому сомнѣнію; важно же знать, какимъ путемъ изъ задачи выведено, что 3 фунта должны стоить въ 3 раза больше, а этого объясненіе не даетъ. Гораздо ближе къ дѣлу тѣ объясненія, которыя мы приводили выше при рѣшеніи соотвѣтствующихъ задачъ. Кромѣ того, разбираемыя объясненія ставятъ соотношеніе между стоимостью одной единицы и стоимостью нѣсколькихъ единицъ въ нѣкоторую зависимость отъ данной въ задачѣ стоимости (2 р., 6 р.), между тѣмъ какъ такой зависимости на самомъ дѣлѣ не существуетъ, потому что соотношеніе это остается справедливымъ, будутъ ли 3 фунта стоить 6, 10, или 200 рублей.

128. Для уясненія дѣтямъ соотношеній между дѣйствіями можетъ служить рѣшеніе ариѳметическихъ загадокъ. Какъ уже было выше сказано, упражненія эти вначалѣ даются дѣтямъ съ большимъ трудомъ и потому съ ними надо быть крайне осторожнымъ. Первыя загадки должны содержать только одно дѣйствіе. Онѣ знакомятъ дѣтей со способами опредѣленія одного изъ данныхъ чиселъ въ дѣйствіи по его результату и другому данному. Загадки эти могутъ быть слѣдующихъ 10 типовъ:

1) $5+?=7$; 3) $?-3=4$; 5) $?\times 3=9$; 7) $?:4=2$; 9) $\frac{?}{3}=3$;

2) $?+5=10$; 4) $8-?=3$; 6) $2\times ?=8$; 8) $6:?=3$; 10) $\frac{8}{?}=4$

и задаются въ формѣ вопросовъ:

Сколько надо прибавить къ 5, чтобы получить 7?—Къ какому числу надо прибавить 5, чтобы получить 10?—Отъ какого числа надо отнять 3, чтобы осталось 4?—Сколько надо отнять отъ 8, чтобы осталось 3?—Какое число надо повторить 3 раза, чтобы вышло 9?—Сколько разъ надо сосчитать 2, чтобы получить 8?—Въ чакомъ числѣ 4 повторяется (содержится) 2 раза?—Какое число въ 6 содержится 3 раза?—Какое число надо раздѣлить на 3 части, чтобы получить въ каждой части по 3?—На сколько частей надо раздѣлить 8, чтобы въ каждой части получить по 2?

Всѣ эти загадки представляютъ вопросы на различныя ариѳметическія дѣйствія, поставленные, какъ выражаются, косвенно.

Первая загадка разрѣшается соображеніемъ, что къ 5-ти надо прибавить столько, сколько ему не хватаетъ до 7, а чтобы это узнать, надо отъ 7-ми отнять 5. Вторая: если послѣ прибавленія 5-ти получилось 10, то чтобы узнать, сколько было раньше, надо эти 5 снова отбавить (отнять) отъ 10-ти. Третья: когда отняли 3, то осталось 4; значитъ раньше въ числѣ заключались и отнятыя 3 единицы и оставшіяся 4 единицы. Четвертая: чтобы получить 8, надо къ оставшимся 3 единицамъ присчитать отнятыя; а чтобы узнать сколько единицъ слѣдуетъ присчитать къ 3-мъ, надо отъ 8-ми отнять 3. Пятая: искомое число должно въ 9 повторяться 3 раза и слѣд. составлять 3-ю часть 9-ти. Шестая: 2 надо повторить столько разъ, сколько разъ оно содержится въ 8-ми. Седьмая: надо 4 повторить 2 раза. Восьмая: если искомое число въ 6-ти содержится 3 раза, то оно должно составлять 3-ю часть 6-ти. Девятая: въ каждой части искомаго числа по 3 единицы, а въ трехъ частяхъ его 3 раза по 3 единицы. Десятая: на столько частей, сколько разъ 4 содержится въ 8-ми.

Если загадка въ отвлеченномъ видѣ трудно понимается дѣтьми, то ее должно облечь въ форму конкретной задачи, и тогда она разрѣшится дѣтьми легко. Весьма полезно заставлять самихъ дѣтей составлять такія задачи.

Часто при разрѣшеніи загадокъ дѣти замѣняютъ дѣйствіе, которымъ она рѣшается, обратнымъ ему дѣйствіемъ. Такъ, напр., первую загадку рѣшаютъ, прибавляя къ 5-ти по единицѣ до тѣхъ поръ, пока не получится 7, и считая прибавляемыя единицы; четвертую—отнимая отъ 8-ми по единицѣ до тѣхъ поръ, пока не останется 3, и считая отнятыя единицы; шестую—прибавляя къ 2-мъ послѣдовательно по 2, пока не получится 8. Такихъ пріемовъ не слѣдуетъ отвергать, потому что они никакой неправильности въ себѣ не заключаютъ и даютъ основаніе для установленія пріемовъ вычитанія и дѣленія, основанныхъ на пониманіи этихъ дѣйствій, какъ обратныхъ сложенію и умноженію.

Къ рѣшенію загадокъ, требующихъ болѣе одного дѣйствія, можно приступить только послѣ того, когда съ загадками на одно дѣйствіе дѣти совершенно освоятся. Записывать загадки слѣдуетъ въ схемѣ, приведенной выше при разборѣ этого рода упражненій (гл. I, стр. 102). Тамъ же указаны и пріемы рѣшенія загадокъ. Загадки на этой ступени не могутъ еще служить матеріаломъ для самостоятельныхъ упражненій дѣтей.

129. Цѣль перваго отдѣла ариѳметики будетъ достигнута, если дѣти:

1) настолько ознакомятся съ дѣйствіями, насколько это возможно, имѣя дѣло съ одними первоначальными пріемами вычисленія;

2) освоятся съ начальными пріемами вычисленія настолько, что свободно будутъ примѣнять ихъ къ каждому частному случаю;

3) освоятся съ обозначеніемъ чиселъ и отдѣльныхъ дѣйствій и научатся разбираться въ обозначеніяхъ ряда нѣсколькихъ дѣйствій;

4) будутъ правильно примѣнять дѣйствія къ рѣшенію задачъ, вычисленіямъ и загадкамъ;

5) наконецъ усвоятъ на память бо́льшую часть результатовъ дѣйствій въ этихъ предѣлахъ.

Весьма трудно опредѣлить время, потребное для полнаго достиженія всѣхъ намѣченныхъ результатовъ; оно находится въ большой зависимости отъ возраста, способностей и развитія обучающихся. Вообще слѣдуетъ сказать, что съ началомъ обученія ариѳметикѣ спѣшить не нужно: чѣмъ болѣе окрѣпнутъ дѣти и чѣмъ болѣе они пріобрѣтутъ ариѳметическихъ знаній изъ жизни, тѣмъ скорѣе и основательнѣе пойдетъ ихъ обученіе ариѳметикѣ. То, на что съ шестилѣтнимъ ребенкомъ надо затратить двѣ—три недѣли, съ восьмилѣтнимъ можетъ быть пройдено въ три, четыре урока.

III.

Счетъ десятками отъ 10 до 100.

130. Этотъ отдѣлъ имѣетъ цѣлью ознакомить дѣтей съ десяткомъ, какъ съ первой сложной единицей счета, и дать имъ первыя основанія къ пользованію системой счисленія при производствѣ вычисленій. Упражненія надъ числами, состоящими изъ полныхъ десятковъ, ведутся подобно упражненіямъ съ числами, составленными изъ единицъ, и располагаются въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) прямой и обратный счетъ десятками; словесное и письменное обозначеніе чиселъ, составленныхъ изъ полныхъ десятковъ; 2) сложеніе и вычитаніе чиселъ, составленныхъ изъ полныхъ десятковъ; 3) прямой и обратный счетъ по 2, по 3, по 4 и по 5 десятковъ; умноженіе и дѣленіе чиселъ, составленныхъ изъ полныхъ десятковъ.

131. **Прямой счетъ** десятками ведется сперва наглядно. Для этой цѣли могутъ служить шарики классныхъ счетовъ. Когда дѣти отсчитаютъ десять шариковъ, то преподаватель надѣваетъ ихъ на одну изъ вертикальныхъ проволокъ; затѣмъ они отсчитываютъ второй десятокъ, который помѣщается на другую проволоку и т. д. до тѣхъ поръ, пока не будетъ отсчитано 100 шариковъ. Такимъ образомъ 100 шариковъ будутъ разгруппированы въ десятки и у дѣтей сама собою должна возникнуть потребность пересчитать эти десятки. Счетъ десятками ведется въ слѣдующихъ выраженіяхъ: одинъ десятокъ, два десятка, три десятка, четыре десятка и т. д.

Послѣ прямого производится обратный счетъ десятками. Оба упражненія повторяются на конкретныхъ и на отвлеченныхъ числахъ.

Когда дѣти освоятся со счетомъ десятками, надо познакомить ихъ съ принятыми названіями чиселъ, составленныхъ изъ полныхъ десятковъ, указавъ, если будетъ возможно, этимологическій составъ этихъ названій. Послѣ этого дѣти повторяютъ счетъ десятками въ выраженіяхъ: десять, двадцать, тридцать, сорокъ, пятьдесятъ и т. д. до ста.

При письменномъ обозначеніи этихъ чиселъ, преподаватель объясняетъ, что они записываются при помощи тѣхъ же цыфръ, какъ и первыя десять чиселъ, что для этого уговорились цыфры, обозначающія десятки, ставить на второмъ мѣстѣ отъ правой руки, а чтобы видно было, что цыфра стоитъ на второмъ мѣстѣ, на первомъ ставятъ цыфру нуль, которая сама по себѣ не означаетъ никакого числа. Послѣ этого слѣдуютъ упражненія въ написаніи и чтеніи чиселъ. Для повторенія названій чиселъ и ихъ письменнаго обозначенія могутъ служить фигуры чиселъ, составленныхъ изъ полныхъ десятковъ, съ ихъ названіями и обозначеніями цыфрами.

132. **Сложеніе и вычитаніе** чиселъ, составленныхъ изъ полныхъ десятковъ, можно производить тѣмъ же пріемомъ, какъ и въ предыдущемъ отдѣлѣ, т.-е. къ первому слагаемому присчитывать послѣдовательно всѣ десятки второго и отъ уменьшаемаго послѣдовательно отсчитывать всѣ десятки вычитаемаго. Но, кромѣ этого пріема, необходимо, чтобы дѣти научились примѣнять къ

числамъ, составленнымъ изъ полныхъ десятковъ, тѣ результаты сложенія и вычитанія, какіе они усвоили въ предыдущемъ отдѣлѣ. Такъ, чтобы сложить сорокъ съ тридцатью, дѣти скадываютъ 4 десятка съ тремя десятками и, примѣнивъ къ этому сложенію усвоенный ими изъ предыдущаго отдѣла результатъ, что 4 да 3 составляютъ 7, говорятъ, что получится 7 десятковъ, или семьдесятъ. Чтобы 50 вычесть изъ 90, они вычитаютъ 5 десятковъ изъ 9 десятковъ, пользуясь усвоеннымъ ими результатомъ 9—5=4.

Упражненія, сюда относящіяся, выполняются частію устно, частію письменно, такъ чтобы устныя и письменныя работы чередовались между собою.

133. Умноженію и дѣленію предшествуетъ прямой и обратный счетъ по 20, по 30, по 40, по 50-ти. Въ умноженіи множитель долженъ быть однозначный, потому что помощію счета по 20, по 30, по 40 и по 50 можно найти такія произведенія, въ которыхъ множимыми будутъ или 20, или 30, или 40, или 50; произведенія же 2-хъ на 40 или 3-хъ на 20 и т. д. могутъ быть опредѣлены только помощію счета по 2 и по 3 единицы, а такой счетъ требуетъ знанія состава чиселъ изъ десятковъ и единицъ. Умноженіе выполняется или при помощи послѣдовательнаго сложенія, или приводится къ умноженію въ предѣлахъ перваго десятка. Такъ, чтобы 30 умножить на 3, можно къ 30 прибавить 30 и къ полученному числу снова прибавить 30, или можно сослаться на то, что $3 \times 3 = 9$, и слѣд. 3 десятка, повторенные 3 раза, дадутъ 9 десятковъ, или девяносто.

Въ дѣленіи на части дѣлитель долженъ быть однозначный, а въ дѣленіи по содержанію двузначный, потому что для опредѣленія, сколько разъ напр. 2 содержится въ 40, надо отъ 40 отнимать по 2, а при этомъ встрѣтятся числа, составленныя изъ десятковъ и единицъ, съ которыми дѣти еще не знакомы; при дѣленіи же напр. на 20 частей придется разсматривать 20 какъ число, состоящее изъ простыхъ единицъ, а въ этомъ отдѣлѣ оно разсматривается какъ совокупность двухъ десятковъ.

Дѣленіе можетъ выполняться или при помощи послѣдовательнаго вычитанія, или можетъ приводиться къ дѣленію въ предѣлѣ перваго десятка. Такъ, чтобы 80 раздѣлить на 4 части, можно взять изъ нихъ сперва 4 десятка и въ каждую часть отдѣлить по 1 десятку, затѣмъ также раздѣлить остальные 4 десятка; или можно сослаться на то, что четвертая часть 8-ми равна 2-мъ, и слѣд. четвертая часть 8-ми десятковъ равна 2 десяткамъ, или 20-ти. Чтобы узнать, сколько разъ 20 содержится въ 100, можно отъ 100 послѣдовательно отнимать по 20 и сосчитать, сколько

разъ можно выполнить это вычитаніе; или можно сослаться на то, что 2 содержится въ 10-ти 5 разъ, а слѣд. и въ 10 десяткахъ 2 десятка также содержатся 5 разъ. Весь матеріалъ для умноженія и дѣленія содержится въ слѣдующихъ таблицахъ:

$20 \times 2 = 40$	$\frac{20}{2} = 10$	$\frac{100}{2} = 50$	$\frac{40}{4} = 10$	$40 : 20 = 2$
$20 \times 3 = 60$	$\frac{40}{2} = 20$	$\frac{30}{3} = 10$	$\frac{80}{4} = 20$	$60 : 20 = 3$
$20 \times 4 = 80$	$\frac{60}{2} = 30$	$\frac{60}{3} = 20$	$\frac{50}{5} = 10$	$80 : 20 = 4$
$20 \times 5 = 100$	$\frac{80}{2} = 40$	$\frac{90}{3} = 30$	$\frac{100}{5} = 20$	$100 : 20 = 5$
$30 \times 2 = 60$				$60 : 30 = 2$
$30 \times 3 = 90$				$90 : 30 = 3$
$40 \times 2 = 80$				$80 : 40 = 2$
$50 \times 2 = 100$				$100 : 50 = 2$

Упражненія, сюда относящіяся, выполняются устно и письменно.

134. Разбираемый отдѣлъ въ сущности представляетъ собою приложеніе и повтореніе того, что было изложено въ первомъ отдѣлѣ курса; поэтому для усвоенія этого дѣла требуется сравнительно очень немного времени, если только понятіе о десяткѣ, какъ сложной счетной единицѣ, будетъ хорошо усвоено дѣтьми.

При обученіи дѣтей, для которыхъ вычисленія въ предѣлѣ перваго десятка не представляютъ затрудненій, можно всѣ необходимыя понятія сообщить въ этомъ второмъ отдѣлѣ курса и вслѣдствіе этого затратить гораздо менѣе времени на изученіе перваго отдѣла.

Въ началѣ разбираемаго отдѣла всѣ дѣйствія надъ числами слѣдуетъ производить, приводя ихъ къ тѣмъ пріемамъ вычисленія, которые были даны въ первомъ отдѣлѣ, при чемъ простая единица замѣняется десяткомъ; въ концѣ же должно приводить всѣ дѣйствія къ дѣйствіямъ въ предѣлахъ перваго десятка.

Въ нашемъ задачникѣ въ числѣ задачъ, относящихся къ этому отдѣлу, встрѣчаются такія, для рѣшенія которыхъ необходимо знать единичныя отношенія пуда къ фунту и часа къ минутѣ. Передъ рѣшеніемъ ихъ слѣдуетъ познакомить дѣтей съ этими мѣрами, а равно съ инструментами (вѣсы, часы), при помощи которыхъ производится измѣреніе. Ознакомленіе должно быть сдѣлано наглядно.

Задачи этого отдѣла весьма мало отличаются отъ задачъ предыдущаго. Изъ задачъ на сложеніе и вычитаніе считаемъ нелишнимъ обратить вниманіе на тѣ, въ которыхъ требуется измѣнить сумму сообразно съ измѣненіями въ слагаемыхъ. Другія задачи относятся къ вычисленію стоимости нѣсколькихъ единицъ по данной стоимости другого числа единицъ, при чемъ стоимость одной единицы выражается дробнымъ числомъ; напр., требуется опредѣлить стоимость 6 кусковъ полотна, зная, что 3 куска стоятъ

40 рублей. Во всѣхъ этихъ задачахъ число единицъ, стоимость которыхъ ищется, представляетъ собою кратное числа единицъ, стоимость которыхъ дается. Такъ къ приведенной задачѣ 6 кусковъ вдвое больше 3-хъ и потому и стоить должны вдвое больше 3-хъ кусковъ, т.-е. стоимость ихъ равна $40 \times 2 = 80$. Кромѣ этихъ задачъ, находится цѣлый рядъ задачъ на обмѣнъ. Рѣшеніе ихъ въ той послѣдовательности, въ какой они расположены, едва ли вызоветъ какія-либо недоразумѣнія.

135. Цѣль этого отдѣла будетъ достигнута, если дѣти:

1) вполнѣ освоятся съ десяткомъ, какъ со счетной единицей;

2) научатся сознательно обозначать числа, составленныя изъ полныхъ десятковъ;

3) научатся свободно примѣнять къ этимъ числамъ пріемы вычисленія, усвоенные въ предыдущемъ отдѣлѣ, и приводить вычисленія съ этими числами къ вычисленіямъ въ предѣлахъ перваго десятка.

IV.

Счетъ единицами и десятками отъ 1 до 100.

136. Совмѣстный счетъ единицами и десятками представляетъ одинъ изъ самыхъ важныхъ отдѣловъ курса ариѳметики. Здѣсь дѣти впервые знакомятся съ числами, состоящими изъ единицъ различныхъ разрядовъ; пріемы вычисленія въ этомъ отдѣлѣ принимаютъ характеръ, состоящій въ пользованіи ранѣе опредѣленными результатами дѣйствій и десятичнымъ составомъ чиселъ,— характеръ, который сохраняется за ними во всемъ остальномъ курсѣ; наконецъ въ этомъ отдѣлѣ заключается бо́льшая часть тѣхъ результатовъ дѣйствій, которые входятъ въ основныя таблицы ариѳметики и на пользованіи которыми построены всѣ остальные пріемы вычисленія. Отъ правильной постановки этого отдѣла зависитъ успѣшность въ ходѣ всего остального курса, потому что здѣсь закладываются основы тѣхъ понятій, которыя только развиваются и пополняются въ остальныхъ частяхъ курса.

Къ дѣйствіямъ въ предѣлахъ перваго десятка и къ дѣйствіямъ надъ числами, состоящими изъ полныхъ десятковъ, можно было прилагать первоначальные пріемы вычисленія, непосредственно вытекающіе изъ понятій о дѣйствіяхъ; въ дѣйствіяхъ въ предѣлѣ перваго десятка, въ бо́льшей части случаевъ, первоначальные пріемы вычисленія являются единственно возможными; дѣйствія надъ числами, состоящими изъ полныхъ десятковъ, хотя и могутъ сводиться къ дѣйствіямъ въ предѣлѣ перваго десятка, но такое

приведеніе не представляетъ существенныхъ преимуществъ сравнительно съ приложеніемъ начальныхъ пріемовъ вычисленія, приводящихъ дѣйствія съ этими числами къ счету десятками. На числахъ же, состоящихъ изъ десятковъ и единицъ, дѣти придутъ къ необходимости иныхъ пріемовъ вычисленія, кромѣ первоначальныхъ, потому что, хотя приложеніе первоначальныхъ пріемовъ вычисленія къ этимъ числамъ и возможно, но настолько затрудняетъ и замедляетъ вычисленіе, что нецѣлесообразность ихъ рѣзко бросается въ глаза.

Законы дѣйствій, на которыхъ основаны сокращенные пріемы вычисленія, въ разсматриваемомъ отдѣлѣ не могутъ быть уяснены дѣтямъ въ общемъ видѣ, но въ приложеніи къ числамъ, состоящимъ изъ десятковъ и единицъ, они легко понимаются дѣтьми и въ каждомъ частномъ случаѣ могутъ быть пояснены на основаніи понятій о дѣйствіяхъ, которыя вынесены дѣтьми изъ двухъ предыдущихъ отдѣловъ.

Необходимый для приложенія пріемовъ вычисленія запасъ результатовъ дѣти отчасти усвоили на память изъ предыдущихъ отдѣловъ, отчасти могутъ опредѣлять съ достаточной быстротой и затѣмъ будутъ усваивать по мѣрѣ прохожденія разсматриваемаго отдѣла; даже съ характеромъ самыхъ пріемовъ вычисленія они могли нѣсколько ознакомиться, если преподаватель не упускалъ изъ виду нашихъ указаній о возможности и желательности приложенія этихъ пріемовъ въ предѣлѣ перваго десятка и къ числамъ, состоящимъ изъ полныхъ десятковъ.

Совершенно новымъ элементомъ въ разсматриваемомъ отдѣлѣ является составъ чиселъ изъ десятичныхъ группъ и пользованіе этимъ составомъ при вычисленіяхъ. Поэтому на изученіе состава чиселъ первой сотни изъ десятковъ и единицъ должно быть обращено серьезное вниманіе; только тогда можно переходить къ изученію дѣйствій съ числами первой сотни, когда дѣти вполнѣ ознакомятся съ десятичнымъ составомъ этихъ чиселъ.

Особенное вниманіе надо обратить на усвоеніе пріемовъ вычисленія, пользуясь десятичнымъ составомъ чиселъ. Только послѣ этого можно озаботиться объ усвоеніи результатовъ, входящихъ въ основныя таблицы, при чемъ нѣтъ надобности, какъ мы уже имѣли случай указать выше, добиваться усвоенія всѣхъ этихъ результатовъ памятью; достаточно, если дѣти запомнятъ нѣкоторые изъ нихъ и научатся съ достаточной быстротой примѣнять ихъ къ опредѣленію остальныхъ. Къ заучиванію таблицъ почти не приходится прибѣгать, если давать дѣтямъ достаточное количество разнообразныхъ упражненій и обращать ихъ вниманіе на выгоду, которую они пріобрѣтаютъ съ усвоеніемъ результатовъ дѣйствій на память.

При изученіи каждаго дѣйствія слѣдуетъ ознакомить дѣтей съ названіями дѣйствія и чиселъ, входящихъ въ него; знакомство это значительно облегчаетъ и преподавателя, и дѣтей въ изложеніи пріемовъ вычисленія.

Здѣсь, какъ и въ предшествующихъ отдѣлахъ, сложеніе мы разсматриваемъ совмѣстно съ вычитаніемъ, а умноженіе совмѣстно съ дѣленіемъ, потому что это необходимо для установленія очень многихъ пріемовъ вычисленія; кромѣ того, сопоставленіе прямыхъ и обратныхъ дѣйствій значительно освѣщаетъ и смыслъ дѣйствій, и пріемы ихъ выполненія.

Существуетъ значительная разница между умноженіемъ и дѣленіемъ на однозначное число и на двузначное, какъ въ цѣли, съ которою они вводятся, такъ и въ самыхъ пріемахъ вычисленія. Въ первомъ случаѣ необходимо не только ознакомить дѣтей съ пріемами вычисленія, но и добиться усвоенія ими хотя части результатовъ на память; во второмъ вся задача сводится къ ознакомленію съ пріемами вычисленія. Въ первомъ случаѣ результаты умноженія и дѣленія могутъ быть опредѣляемы помощію разложенія множителя на части и разложенія дѣлимаго на части, кратныя дѣлителю; во второмъ приходится прибѣгать къ разложенію на части множимаго, а результаты дѣленія опредѣлять рядомъ испытаній, разсматривая дѣленіе какъ дѣйствіе обратное умноженію. Поэтому мы вводимъ сперва умноженіе однозначныхъ чиселъ и дѣленіе на однозначныя числа, а потомъ умноженіе двузначныхъ чиселъ и дѣленіе на двузначныя числа.

137. Программа отдѣла. На основаніи сказаннаго для разсматриваемаго отдѣла курса можно установить слѣдующую программу:

1. Составъ чиселъ первой сотни изъ десятковъ и единицъ въ связи съ словеснымъ и цыфирнымъ обозначеніемъ ихъ.
2. Сложеніе и вычитаніе.
3. Умноженіе и дѣленіе при однозначномъ множимомъ и дѣлителѣ.
4. Умноженіе и дѣленіе при двузначномъ множимомъ и дѣлителѣ.

Вычисленія въ этомъ отдѣлѣ, какъ и въ предыдущихъ, производятся только устно, такъ какъ, въ приложеніи къ числамъ первой сотни, письменные пріемы вычисленія не представляютъ существенныхъ выгодъ сравнительно съ устными и дѣти еще продолжаютъ знакомиться съ результатами основныхъ таблицъ, необходимыми для письменнаго вычисленія. Письменныя упражненія попрежнему состоятъ въ письменномъ обозначеніи дѣйствій и ихъ результатовъ, опредѣляемыхъ устно. При письменномъ рѣшеніи

задачъ можно требовать отъ дѣтей письменнаго изложенія вопросовъ простыхъ задачъ, на которыя расчленяются сложныя задачи. Письменныя упражненія должны чередоваться съ устными.

138. Составъ чиселъ первой сотни изъ десятковъ и единицъ. Упражненія состоятъ: 1) въ составленіи чиселъ на наглядномъ пособіи учителемъ, при чемъ онъ знакомитъ дѣтей съ этимологическимъ составомъ названій этихъ чиселъ; 2) въ составленіи на томъ же пособіи дѣтьми чиселъ, называемыхъ учителемъ, для чего дѣти каждое названное число должны разлагать на десятки и единицы. Въ началѣ удобнѣе брать числа, заключающія въ себѣ не менѣе двухъ десятковъ, такъ какъ названія этихъ чиселъ въ нашемъ языкѣ яснѣе указываютъ десятичный составъ ихъ, чѣмъ названія чиселъ, меньшихъ двадцати.

За наглядными упражненіями слѣдуютъ устныя упражненія въ составленіи чиселъ изъ десятковъ и единицъ и въ разложеніи ихъ на десятки и единицы. До тѣхъ поръ, пока каждый ученикъ не въ состояніи будетъ опредѣлить, изъ сколькихъ десятковъ и единицъ состоитъ каждое число первой сотни, и составить изъ даннаго числа десятковъ и единицъ требуемое число, дальнѣйшія упражненія невозможны.

Въ упражненіяхъ полезно сопоставлять числа изъ которыхъ въ одномъ столько десятковъ, сколько въ другомъ единицъ, напр. 12,21 и 20,потому что дѣти часто смѣшиваютъ эти числа другъ съ другомъ.

Въ связи съ устными упражненіями дѣти знакомятся съ письменнымъ обозначеніемъ чиселъ первой сотни, при чемъ преподаватель указываетъ имъ, что десятки принято ставить на второмъ и единицы на первомъ мѣстѣ отъ правой руки и что мѣсто единицъ, въ случаѣ ихъ отсутствія въ числѣ, занимается нулемъ. Упражненія заканчиваются прямымъ и обратнымъ счетомъ по единицѣ отъ одного десятка до слѣдующаго за нимъ и счетомъ единицами отъ 1 до 100.

139. Все изложенное примѣняется къ вычисленіямъ и рѣшенію задачъ и загадокъ, при чемъ устныя упражненія чередуются съ письменными. Нашъ задачникъ содержитъ достаточный запасъ упражненій всѣхъ родовъ для ознакомленія дѣтей съ составомъ чиселъ первой сотни изъ десятковъ и единицъ. Дѣйствія, введенныя въ эти упражненія, приходится производить или въ предѣлѣ перваго десятка, или надъ числами, состоящими изъ полныхъ десятковъ, за исключеніемъ сложенія и вычитанія, которыя примѣняются и къ числамъ, состоящимъ изъ десятковъ и единицъ, но которыя сводятся къ составленію этихъ чиселъ изъ десятковъ и единицъ и къ разложенію ихъ на десятки и единицы. Такимъ образомъ дѣти въ этомъ отдѣлѣ осваиваются съ простѣйшими случаями сложенія и вычитанія въ предѣлѣ первой сотни, со-

стоящими въ сложеніи полныхъ десятковъ съ единицами (80 + 5, 10 + 2, 7 + 80) и въ вычитаніи изъ даннаго числа его десятковъ или единицъ (85 — 5, 12 — 10, 87 — 80). Нѣкоторыя изъ этихъ упражненій на столько не сложны, что могутъ читаться учениками по книгѣ и тотчасъ же выполняться устно.

Задачи сравнительно съ прежними не заключаютъ въ себѣ новыхъ условій, но нѣкоторыя изъ нихъ требуютъ знанія единичныхъ отношеній дести къ листу, фунта къ золотнику и аршина къ вершку; съ этими мѣрами дѣти должны быть ознакомлены наглядно, для чего въ школѣ должны быть образцы всѣхъ мѣръ и приборы, при помощи которыхъ производится измѣреніе.

140. Сложеніе и вычитаніе ведется въ слѣдующемъ порядкѣ:

1. Сложеніе двузначнаго числа съ числомъ, состоящимъ только изъ десятковъ или только изъ единицъ, при чемъ сумма единицъ не превышаетъ 9-ти, и соотвѣтствующія вычитанія изъ двузначнаго числа чиселъ, состоящихъ только изъ десятковъ или только изъ единицъ, при чемъ въ вычитаемомъ единицъ меньше, чѣмъ въ уменьшаемомъ.

2. Сложеніе и вычитаніе двузначныхъ чиселъ, когда сумма единицъ не превышаетъ 9-ти и въ вычитаемомъ единицъ меньше, чѣмъ въ уменьшаемомъ.

3. Сложеніе, когда сумма единицъ равна 10-ти, и вычитаніе изъ чиселъ, состоящихъ изъ полныхъ десятковъ.

4. Сложеніе и вычитаніе въ предѣлѣ первой сотни, когда сумма единицъ больше 10-ти и въ вычитаемомъ единицъ больше, чѣмъ въ уменьшаемомъ.

141. Подготовительными упражненіями къ первому случаю сложенія и вычитанія служатъ упражненія въ послѣдовательномъ прибавленіи къ числу и въ послѣдовательномъ отсчитываніи отъ него по десятку и по единицѣ, т.-е. слѣдующія упражненія:

50 + 1, 51 + 1, 52 + 1, 53 + 1, и т. д. до 60;
69 — 1, 68 — 1, 67 — 1 и т. д. до 60;
2 + 10, 12 + 10, 22 + 10, 32 + 10 и т. д. до 92;
92 — 10, 82 — 10, 72 — 10 и т. д. до 2.

При помощи этихъ упражненій, которыя должно вести съ достаточной быстротой, дѣти хорошо осваиваются съ положеніемъ, что единицы надо прикладывать къ единицамъ, а десятки къ десяткамъ, и такъ же поступать при вычитаніи. Такимъ образомъ, чтобы къ 35 прибавить 40, дѣти должны 4 десятка прибавить къ 3-мъ десяткамъ и затѣмъ изъ полученныхъ 7 десятковъ и 5 единицъ, оставшихся отъ 35, составить число 75. Чтобы отъ 87 отнять 5 единицъ, они должны 5 единицъ отнять отъ 7-ми единицъ и изъ оставшихся 2 единицъ и 8 десятковъ составить 82.

142. Здѣсь умѣстно познакомить дѣтей съ названіями двухъ первыхъ дѣйствій и чиселъ, входящихъ въ нихъ, при чемъ должно объяснить происхожденіе тѣхъ изъ этихъ названій, которыя разъясняютъ смыслъ дѣйствія. Дѣти должны отдавать себѣ ясный отчетъ въ значеніи каждаго числа въ сложеніи и вычитаніи. Цѣль эта будетъ достигнута, если они въ состояніи будутъ отвѣчать на вопросы:

Что показываетъ сумма?—Что показываетъ слагаемое?—Что показываетъ уменьшаемое?—Что показываетъ вычитаемое?—Что показываетъ остатокъ или разность?

Отвѣты могутъ быть даны приблизительно въ слѣдующемъ видѣ:

Сумма показываетъ, сколько единицъ заключается во всѣхъ слагаемыхъ вмѣстѣ, или—сколько единицъ въ цѣломъ; слагаемое—сколько единицъ въ одной части этого цѣлаго. Или: первое слагаемое показываетъ, къ какому числу мы хотимъ прибавить нѣсколько единицъ, второе—сколько единицъ мы хотимъ прибавить, а сумма—сколько единицъ получимъ. Или: первое слагаемое показываетъ, какое число мы хотимъ увеличить на нѣсколько единицъ, второе слагаемое—на сколько единицъ мы хотимъ увеличить первое слагаемое, а сумма—сколько единицъ въ увеличенномъ числѣ.

Уменьшаемое показываетъ, сколько было всего единицъ, вычитаемое—сколько единицъ отнято, а остатокъ или разность—сколько единицъ осталось отъ уменьшаемаго. Или: уменьшаемое показываетъ, отъ какого числа мы хотимъ отнять нѣсколько единицъ; вычитаемое—сколько единицъ мы хотимъ отнять отъ уменьшаемаго, а разность—сколько единицъ останется. Или: уменьшаемое показываетъ, какое число мы хотимъ уменьшить на нѣсколько единицъ, вычитаемое—на сколько единицъ мы хотимъ уменьшить уменьшаемое, а остатокъ—сколько единицъ въ уменьшенномъ числѣ. Или: уменьшаемое и вычитаемое показываютъ числа, которыя хотимъ сравнить между собой, а разность—на сколько единицъ уменьшаемое больше вычитаемаго.

Особенно важно, чтобы дѣти усвоили первыя изъ приведенныхъ значеній чиселъ въ сложеніи и вычитаніи. Все это можетъ быть выяснено на хорошо подобранныхъ задачахъ, подобныхъ тѣмъ, которыя мы привели выше подъ №№ 3, 4, 5, 6 и 7 (стр. 36 и 37) и въ которыхъ слѣдуетъ только измѣнить числа сообразно съ знаніями дѣтей. Было бы желательно, чтобы дѣти и сами могли

составлять задачи, отвѣчающія каждому изъ указанныхъ здѣсь значеній суммы и разности.

Во все послѣдующее время надо заставлять учениковъ прилагать усвоенныя ими названія чиселъ въ соотвѣтствующихъ случаяхъ; напр., вычисленіе

$$87-50+2$$

дѣти должны читать: изъ 87 вычесть 50 и разность сложить съ 2-мя. Иначе дѣти легко забудутъ сообщенныя имъ названія.

143. Второй случай сложенія и вычитанія отличается отъ перваго только тѣмъ, что оба данныя содержатъ и десятки и единицы. Чтобы перейти къ нему, преподаватель заставляетъ дѣтей къ двузначному числу прибавить послѣдовательно два числа, изъ которыхъ одно состоитъ изъ полныхъ десятковъ, а другое — только изъ единицъ, напр., къ 43 прибавить 20 и къ полученной суммѣ еще прибавить 4 единицы, и опредѣлить, сколько всего такимъ образомъ будетъ прибавлено къ данному числу. Такимъ путемъ установляется пріемъ сложенія, по которому къ первому слагаемому прибавляются сперва десятки второго и затѣмъ уже его единицы. Совершенно такъ же установляется пріемъ вычитанія, по которому изъ уменьшаемаго вычитаются сперва десятки вычитаемаго, а потомъ изъ полученной разности — единицы вычитаемаго.

144. Въ третьемъ случаѣ сложенія и вычитанія упражненія начинаются съ прибавленія къ двузначному числу и вычитанія изъ него однозначныхъ чиселъ. Чтобы къ 57 прибавить 3, дѣти прибавляютъ эти 3 къ 7 единицамъ и полученный десятокъ присоединяютъ къ 50-ти. Чтобы отнять 4 отъ 60-ти, отнимаютъ 4 отъ одного десятка и оставшіяся 6 единицъ присоединяютъ къ оставшимся 5 полнымъ десяткамъ. Въ случаѣ надобности этотъ пріемъ можетъ быть поясненъ на наглядномъ пособіи.

При сложеніи двухъ двузначныхъ чиселъ, когда сумма единицъ даетъ 10, къ первому слагаемому прибавляются послѣдовательно десятки и единицы второго, при чемъ предпочтительнѣе прибавить сперва единицы. Что касается до вычитанія двузначнаго числа изъ числа, состоящаго изъ полныхъ десятковъ, то можно сперва отъ уменьшаемаго отнять единицы вычитаемаго и затѣмъ изъ полученной разности десятки вычитаемаго. Полезно пріучить дѣтей опредѣлять сперва, сколько въ разности будетъ полныхъ десятковъ, а затѣмъ уже опредѣлять ея единицы. Такъ, при вычитаніи 37 изъ 80-ти, дѣти должны сказать сперва, что полныхъ десятковъ останется 4 (потому что изъ 8-ми десятковъ надо вычесть 3 десятка вычитаемаго, да еще отдѣлить 1 десятокъ

для вычитанія 7-ми единицъ вычитаемаго), а отъ пятаго десятка останется 3 единицы и слѣд. всего въ разности получится 43.

145. Четвертый случай сложенія и вычитанія начинается съ сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ, дающихъ въ суммѣ больше 10-ти, и съ вычитанія однозначныхъ чиселъ изъ двузначныхъ, когда разность однозначная. Такъ какъ изъ предыдущихъ упражненій дѣти должны вынести умѣнье дополнять каждое однозначное число до десяти, то при сложеніи однозначныхъ чиселъ они могутъ сперва дополнить первое слагаемое до десятка и затѣмъ присоединить къ нему остальныя единицы второго слагаемаго. Такъ, для сложенія 8 и 6, къ 8-ми прибавляютъ 2 для составленія полнаго десятка и къ нему присоединяютъ остальныя 4 единицы (6—2) второго слагаемаго, и такимъ образомъ получаютъ въ суммѣ 14. Чтобы навести на этотъ пріемъ сложенія могутъ служить примѣры:

$$9+1+2,\ 7+3+5,$$

послѣ выполненія которыхъ дѣти опредѣляютъ, сколько они всего прибавили къ первому числу въ каждомъ примѣрѣ, и объясняютъ, почему сперва лучше было къ 9-ти прибавить 1, а къ 7-ми прибавить 3. Сообразно съ этимъ, при вычитаніи отъ уменьшаемаго сперва отнимается столько единицъ, сколько въ немъ ихъ заключается, а за тѣмъ изъ полученнаго отъ такого вычитанія полнаго десятка вычитаются остальныя единицы вычитаемаго; напр., чтобы вычесть 6 изъ 14, откидываютъ отъ 14-ти 4 единицы и изъ оставшагося десятка вычитаютъ остальныя 2 единицы (6—4) вычитаемаго, и такимъ образомъ получаютъ въ разности 8. Для наведенія на такой пріемъ вычитанія служатъ примѣры:

$$11-1-5,\ 15-5-3,$$

работа съ которыми ведется подобно тому, какъ съ приведенными выше примѣрами сложенія. Въ случаѣ недостаточно яснаго пониманія дѣтьми изложенныхъ пріемовъ сложенія и вычитанія, они могутъ быть воспроизведены на наглядныхъ пособіяхъ.

146. При сложеніи двузначнаго числа съ однозначнымъ, первое слагаемое также сперва дополняется до числа, состоящаго изъ полныхъ десятковъ, и къ этой суммѣ присоединяются остальныя единицы второго слагаемаго. При вычитаніи однозначнаго числа изъ двузначнаго, содержащаго въ себѣ не менѣе 2-хъ десятковъ, примѣняется тотъ же пріемъ, который примѣненъ нами сейчасъ къ вычитанію 6 изъ 14.

При сложеніи двухъ двузначныхъ чиселъ, сумма единицъ которыхъ больше 10-ти, можно:

1) Къ первому слагаемому прибавить десятки второго, полученную сумму дополнить единицами второго до числа, состо-

ящаго изъ полныхъ десятковъ, и наконецъ къ полученному числу присоединить остальныя единицы второго слагаемаго. Напр., для сложенія 37 съ 25-ю прибавляемъ къ первому слагаемому 20, полученное число 57 дополняемъ 3-мя единицами до полныхъ 6 десятковъ и, соединивъ эти 6 десятковъ съ остальными 2 единицами (5—3) второго слагаемаго, получаемъ въ суммѣ 62.

2) Дополнить первое слагаемое до полныхъ десятковъ единицами второго и къ суммѣ прибавить число, составленное изъ десятковъ и оставшихся единицъ второго слагаемаго. Напр., 37 дополняемъ 3-мя единицами до полныхъ 4-хъ десятковъ и прибавляемъ къ нимъ 22 единицы, оставшіяся отъ второго слагаемаго (25—3); получаемъ 62.

3) Къ первому слагаемому прибавить число, составленное изъ всѣхъ десятковъ и столькихъ единицъ второго, чтобы получить сумму, состоящую изъ полныхъ десятковъ, и эту сумму соединить съ оставшимися единицами второго слагаемаго. Напр., прибавляемъ къ 37-ми изъ второго слагаемаго 23 и, соединивъ полученную сумму 60 съ оставшимися 2 единицами (25 — 23) второго слагаемаго, получаемъ 62.

4) Сложить отдѣльно десятки и единицы обоихъ слагаемыхъ и соединить полученныя такимъ образомъ числа; напр., складываемъ 30 съ 20-ю, а 7 съ 5-ю, и соединяемъ полученныя суммы 50 и 12 въ одно число 62.

Сперва слѣдуетъ ознакомить дѣтей съ первыми двумя пріемами, для наведенія на которые могутъ служить примѣры:

$$48+10+6,\quad 58+2+24.$$

Третій пріемъ вводится послѣ полнаго освоенія дѣтей съ 2-мя первыми, а четвертый умѣстенъ только тогда, когда дѣти запомнятъ суммы каждыхъ двухъ однозначныхъ чиселъ.

147. При вычитаніи двузначныхъ чиселъ, когда въ уменьшаемомъ единицъ меньше чѣмъ вычитаемомъ, можно:

1) Изъ уменьшаемаго вычесть десятки вычитаемаго и изъ полученной разности вычесть единицы вычитаемаго, при чемъ сперва вычесть столько единицъ, сколько ихъ находится въ уменьшаемомъ, а затѣмъ уже изъ оставшихся полныхъ десятковъ вычесть остальныя единицы вычитаемаго. Напр., чтобы 38 вычесть изъ 85, вычитаемъ сперва 30, отъ полученной разности 55 откидываемъ 5 единицъ и изъ оставшихся полныхъ 5 десятковъ отнимаемъ остальныя 3 единицы вычитаемаго, получаемъ 47.

2) Отъ уменьшаемаго откинуть его единицы и изъ полученныхъ полныхъ десятковъ вычесть число, составленное изъ десятковъ и остальныхъ единицъ вычитаемаго. Напр., въ приведенномъ случаѣ откидываемъ отъ уменьшаемаго 5 единицъ и

изъ полученнаго числа 80 вычитаемъ число 33, составленное изъ десятковъ и остальныхъ 3 единицъ (8 — 5) вычитаемаго; получимъ 47.

3) Разложить вычитаемое на два числа, изъ которыхъ первое содержитъ въ себѣ всѣ десятки и столько единицъ, сколько ихъ въ уменьшаемомъ, а второе — остальныя единицы вычитаемаго, вычесть изъ уменьшаемаго первое число и изъ полученной разности — второе число. Напр., изъ 85 сперва вычитаемъ 35 и изъ полученныхъ полныхъ 5 десятковъ вычитаемъ остальныя 3 единицы (38—35) вычитаемаго; получимъ въ разности 47.

4) Вычесть изъ уменьшаемаго десятки вычитаемаго, отдѣлить отъ полученнаго числа десятокъ съ единицами, вычесть изъ отдѣленнаго числа единицы вычитаемаго и полученныя единицы соединить съ оставшимися десятками. Въ приведенномъ примѣрѣ вычитаемъ 30 изъ 85, отъ полученнаго числа 55 отдѣляемъ 15, вычитаемъ изъ нихъ 8 и полученныя 7 единицъ соединяемъ съ оставшимися 4 десятками; получаемъ 47.

Самый удобный — третій пріемъ, но онъ можетъ быть данъ только послѣ усвоенія дѣтьми перваго пріема. Четвертый пріемъ умѣстенъ тогда, когда дѣти запомнятъ однозначныя разности при однозначномъ вычитаемомъ. Какъ этотъ пріемъ вычитанія, такъ и 4-й пріемъ сложенія соотвѣтствуютъ болѣе письменному вычисленію, потому что требуютъ разложенія на составныя части обоихъ данныхъ чиселъ и такимъ образомъ заставляютъ при устномъ вычисленіи держать въ памяти больше чиселъ, чѣмъ другіе пріемы, требующіе разложенія на части только одного изъ данныхъ чиселъ.

148. Кромѣ перечисленныхъ пріемовъ, прилагающихся съ одинаковымъ удобствомъ ко всѣмъ числамъ, полезно ознакомить дѣтей съ пріемами, пригодными для чиселъ, отличающихся нѣкоторыми особенностями. Такъ, полезно указать дѣтямъ пріемъ сложенія и вычитанія, состоящій въ замѣнѣ слагаемаго и вычитаемаго полными десятками, если для этого надо къ нимъ прибавить не болѣе 3-хъ единицъ. Напр., вмѣсто 28, прибавляется и вычитается 30, а затѣмъ сумма исправляется вычитаніемъ изъ нея 2-хъ единицъ, а разность—прибавленіемъ къ ней 2-хъ единицъ. Объясненіе можетъ состоять въ указаніи, что, прибавивъ 30, вмѣсто 28, мы прибавили 2 лишнихъ единицы и слѣд. ихъ надо отбросить отъ суммы, а отнявъ 30, вмѣсто 28, мы отняли 2 лишнихъ единицы и ихъ надо присоединить къ остатку.

149. Для всѣхъ случаевъ сложенія и вычитанія въ нашемъ задачникѣ находится достаточный запасъ упражненій, содержащихъ въ себѣ, кромѣ сложенія и вычитанія, тѣ случаи умноженія и дѣленія, съ которыми дѣти ознакомились въ первыхъ двухъ

отдѣлахъ курса. Въ числѣ задачъ встрѣчаются такія, гдѣ по суммѣ нѣсколькихъ слагаемыхъ и суммѣ слагаемыхъ безъ одного требуется опредѣлить это послѣднее, и такія, гдѣ сообразно съ измѣненіями данныхъ чиселъ въ сложеніи и вычитаніи требуется измѣнить результаты этихъ дѣйствій. Дѣлать изъ этихъ задачъ какіе-либо теоретическіе выводы было бы преждевременно.

Для рѣшенія многихъ задачъ этого отдѣла необходимо знаніе единичныхъ отношеній мѣръ бумаги, вѣса, линейныхъ и времени. Со всѣми перечисленными мѣрами слѣдуетъ познакомить дѣтей ранѣе, чѣмъ онѣ встрѣтятся имъ въ задачахъ. Какъ мы уже имѣли случай замѣтить, съ мѣрами необходимо знакомить наглядно, указывая при этомъ пріемы и приборы для измѣренія. Такъ, при знакомствѣ съ линейными мѣрами полезно заставить дѣтей произвести нѣсколько измѣреній, разъясняя при этомъ, для чего существуетъ нѣсколько различныхъ мѣръ одного рода; при ознакомленіи съ мѣрами вѣса надо познакомить со устройствомъ вѣсовъ и произвести нѣсколько взвѣшиваній; при ознакомленіи съ мѣрами времени—познакомить съ часами. Здѣсь же нелишнимъ будетъ показать дѣтямъ обозначеніе первыхъ ста чиселъ римскими цыфрами.

Хорошимъ упражненіемъ въ сложеніи и вычитаніи служитъ послѣдовательный прямой и обратный счетъ равными группами единицъ, напр.,

$3+3=6$, $6+3=9$, $9+3=12$, $12+3=15$ и т. д.;
$99-3=96$, $96-3=93$, $93-3=90$, $90-3=87$ и т. д.;
$17+17=34$, $34+17=51$, $51+17=68$ и т. д.;
$90-15=75$, $75-15=60$, $60-15=45$ и т. д.

Упражненія эти имѣютъ значеніе для подготовки дѣтей къ умноженію и дѣленію; они особенно удобны въ концѣ урока, такъ какъ могутъ быть безъ нарушенія смысла прерваны во всякое время.

150. Умноженіе и дѣленіе на однозначное число въ предѣлѣ первой сотни мы располагаемъ на основаніи постепеннаго повышенія множимаго и дѣлителя, потому что основнымъ упражненіемъ для умноженія и дѣленія служитъ послѣдовательный счетъ равными группами единицъ въ прямомъ и обратномъ порядкѣ, т.-е счетъ по 2, по 3, по 4 и т. д. до 9. Освоиваясь съ этимъ счетомъ, дѣти пріобрѣтаютъ основные пріемы для умноженія и дѣленія; всѣ остальные пріемы представляютъ только ихъ сокращеніе и видоизмѣненіе, достигаемыя или при помощи знанія нѣкоторыхъ произведеній и частныхъ, или при помощи умѣнья быстро находить ихъ. Поэтому въ послѣдовательномъ счетѣ по 2, по три, по 4 и т. д. до 9-ти надо доводить дѣтей до полной отчетливости и достаточной быстроты. Упражненія въ послѣдовательномъ счетѣ ведутся преимущественно устно съ быстрыми переходами отъ одного ученика къ другому; въ видѣ письменнаго упражненія они могутъ предлагаться для самостоятельной работы. Прямой счетъ по 6 доводится до 96, а обратный начинается отъ 96; особенное вниманіе обращается на усвоеніе прямого и обратнаго счета въ предѣлахъ отъ 0 до 60; прямой счетъ по 7-ми доводится до 98-ми, а обратный счетъ начинается отъ 98-ми; особенное же вниманіе обращается на усвоеніе прямого и обратнаго счета въ предѣлахъ отъ 0 до 70.

151. Послѣ послѣдовательнаго счета по 2, дѣти при его помощи опредѣляютъ произведенія 2-хъ на числа отъ 1 до 10, для чего имъ предлагаются отвлеченные примѣры и простыя задачи. Затѣмъ составляется таблица этихъ произведеній. Послѣ этого преподаватель знакомитъ дѣтей съ названіями разсматриваемаго дѣйствія и чиселъ въ него входящихъ. Нѣтъ надобности требовать отъ дѣтей опредѣленія дѣйствія въ отвлеченномъ видѣ; цѣль вполнѣ будетъ достигнута, если дѣти сумѣютъ правильно отвѣтить на вопросъ о значеніи дѣйствія въ примѣненіи къ каждому частному случаю. Они покажутъ полное пониманіе дѣйствія, если скажутъ, что умножить 2 на 7 значитъ 2 повторить (взять, сосчитать) 7 разъ, умножить 3 на 5 значитъ 3 повторить 5 разъ, и укажутъ, какимъ путемъ дѣйствіе можетъ быть выполнено въ каждомъ изъ этихъ случаевъ. При ознакомленіи съ числами, входящими въ умноженіе, необходимо указать дѣтямъ не только названія ихъ, но и значеніе каждаго числа; такъ дѣти должны знать, что множитель показываетъ, сколько разъ надо взять множимое, что множимое можно назвать слагаемымъ, а произведеніе суммою одинаковыхъ слагаемыхъ.

152. Въ числѣ произведеній 2-хъ первыя пять произведеній дѣти опредѣляли въ предыдущихъ отдѣлахъ и должны ихъ помнить; надо показать, что пользуясь этими произведеніями, легко можно опредѣлять остальныя пять, не прибѣгая къ счету по 2. Такъ, чтобы найти произведеніе 2-хъ на 7, можно 2 умножить на 5, потомъ 2 умножить на 2 и сложить эти два произведенія; чтобы умножить 2 на 9, можно 2 умножить на 5, потомъ 2 умножить на 4 и сложить эти произведенія. Что касается произведенія 2-хъ на 10, то его можно опредѣлить, разложивъ 10 на 5 и 5, умноживъ 2 на каждое изъ этихъ слагаемыхъ и сложивъ полученныя произведенія; кромѣ того, полезно выяснить дѣтямъ, что отъ умноженія одной единицы на 10 получится десятокъ и что слѣд. отъ умноженія 2-хъ единицъ получится 2 десятка.

153. Послѣ освоенія съ произведеніями 2-хъ на числа отъ 1 до 10, дѣти знакомятся съ умноженіемъ 2-хъ на двузначныя числа

отъ 11 до 50. Общій пріемъ вычисленія состоитъ въ разложеніи множителя на десятки и единицы, въ умноженіи 2-хъ на каждое изъ этихъ слагаемыхъ и въ сложеніи полученныхъ произведеній; напр., чтобы умножить 2 на 37, умножаемъ 2 на 30, потомъ на 7 и складываемъ полученныя произведенія 60 и 14. Для опредѣленія произведенія 2-хъ на 30 дѣти пользуются знаніемъ произведенія 2-хъ на 10, при чемъ пріемъ вычисленія принимаетъ слѣдующій видъ: 2 повторяемъ 10 разъ, получаемъ 20; повторяемъ 2 еще 10 разъ, получаемъ опять 20, которые съ первыми 20-ю составятъ 40, наконецъ 2 повторяемъ еще 10 разъ, получаемъ еще 20, которые съ 40 составятъ 60. Умноженіе на двузначныя числа, кромѣ ознакомленія дѣтей съ пріемомъ этого умноженія, имѣетъ цѣлію упражнять дѣтей въ умноженіи на однозначныя числа и заставить ихъ запомнить эти произведенія. Для того, чтобы побудить дѣтей запомнить какіе-либо результаты, лучшимъ средствомъ служитъ разъясненіе на дѣлѣ выгоды ихъ помнить, а умноженіе на двузначныя числа убѣдитъ въ этомъ наглядно, такъ какъ безъ знанія первыхъ десяти произведеній очень трудно находить требуемые результаты. Упражненія въ умноженіи 2-хъ на двузначныя числа должны продолжаться до тѣхъ поръ, пока дѣти освоятся съ пріемомъ умноженія и запомнятъ всѣ произведенія 2-хъ на однозначныя числа; поэтому нѣтъ надобности перебирать всѣ произведенія 2-хъ на двузначныя числа.

154. Отъ умноженія 2-хъ, дѣти переходятъ къ дѣленію на 2 сперва всѣхъ чиселъ, дающихъ однозначныя частныя, а затѣмъ къ дѣленію чиселъ, дающихъ двузначныя частныя. Частныя для первыхъ чиселъ опредѣляются первоначально помощію послѣдовательнаго обратнаго счета по 2, дѣленіе разсматривается въ обоихъ своихъ значеніяхъ, и дѣти знакомятся съ названіями дѣйствія и чиселъ, въ него входящихъ. Здѣсь опять, какъ и въ умноженіи, нѣтъ надобности требовать отъ дѣтей опредѣленія дѣйствія въ общемъ видѣ; достаточно, чтобы дѣти были въ состояніи на каждомъ частномъ примѣрѣ указать правильно значеніе дѣйствія. Если дѣти сознательно и правильно будутъ отвѣчать, что 18 раздѣлить на 2 значитъ найти половину 18-ти и такъ же значитъ узнать, сколько разъ 2 содержится (повторяется) въ 18-ти, что 27 раздѣлить на 3 значитъ или найти треть (третью часть) 27-ми, или узнать, сколько разъ 3 повторяется въ 27-ми, то цѣль будетъ достигнута. При именованныхъ числахъ дѣленіе можетъ имѣть только одно изъ двухъ значеній, смотря по тому, именованный дѣлитель или отвлеченный; поэтому дѣленіе 16 фунтовъ на 2 можетъ означать только опредѣленіе половины 16-ти фунтовъ, дѣленіе 60 фунт. на 20 фунт. можетъ означать только опредѣленіе, сколько разъ 20 фунт. содержится въ 60 фунт. Весьма важно, чтобы дѣти привыкли дѣлать это различіе.

При ознакомленіи съ числами, входящими въ дѣленіе, должно, какъ и въ умноженіи, указывать не только названія, но и значеніе ихъ. Дѣти должны знать, что частное показываетъ часть дѣлимаго, или показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ; дѣлитель показываетъ, на сколько частей дѣлится дѣлимое и т. д.

155. Въ числѣ частныхъ отъ дѣленія на 2 четныхъ чиселъ до 20, первыя пять извѣстны дѣтямъ изъ предыдущихъ отдѣловъ; надо научить дѣтей пользоваться этими частными при опредѣленіи остальныхъ. Такъ, чтобы найти частное отъ дѣленія 16 на 2, можно раздѣлить порознь 10 на 2 и 6 на 2 и полученныя частныя 5 и 3 сложить. При этомъ слѣдуетъ наблюдать, чтобы дѣти излагали пріемъ дѣленія сообразно съ тѣмъ значеніемъ дѣленія, которое оно въ данномъ случаѣ имѣетъ. Дѣля 16 на 2 части, дѣти должны говорить, что отъ дѣленія 10-ти на 2 части въ каждой части получается по 5, да отъ дѣленія 6 на 2 части въ каждой части получится еще по 3, слѣд. половина 16-ти равна $5+3$, т.-е. 8; узнавая сколько разъ 2 содержится въ 16-ти, они должны говорить, что 2 въ 10-ти повторяется 5 разъ, да еще въ 6-ти 3 раза и слѣд. въ 16-ти повторяется $5+3$, т.-е. 8 разъ. Для дѣленія на 2, какъ и для умноженія, полезно заставить дѣтей составить таблицу.

156. Послѣ дѣленія на 2 всѣхъ четныхъ чиселъ до 20-ти дѣти переходятъ къ дѣленію на 2 чиселъ отъ 20 до 100. Если въ дѣлимомъ четное число десятковъ, то дѣлимое разлагается на десятки и единицы, каждое слагаемое отдѣльно дѣлится на 2 и частныя складываются; напр., чтобы раздѣлить 86 на 2, дѣлимъ на 2 отдѣльно 80 и 6 и полученныя частныя складываемъ. Если въ дѣлимомъ нечетное число десятковъ, то изъ него выдѣляется число, состоящее изъ одного десятка и всѣхъ единицъ, дѣлятся на 2 порознь оставшееся число и выдѣленное число и частныя складываются; напр., чтобы раздѣлить 74 на 2, дѣлимъ отдѣльно 60 и 14 и полученныя частныя 30 и 7 складываемъ.

Дѣленіе чиселъ выше 20-ти, какъ и умноженіе на двузначныя числа, вводится главнымъ образомъ съ тою цѣлью, чтобы дѣти запомнили частныя отъ дѣленія на 2 четныхъ чиселъ до 20-ти. Сообразно съ этимъ надо опредѣлить и время на эти упражненія.

157. Послѣ усвоенія послѣдовательнаго счета по 3, подобнымъ же путемъ проводится умноженіе 3-хъ и дѣленіе на 3, послѣ счета по 4—умноженіе 4-хъ и дѣленіе на 4 и т. д. до 9 включительно.

Въ умноженіи сперва опредѣляются помощію послѣдовательнаго прямого счета всѣ произведенія каждаго числа на числа отъ 1 до 10 и составляются таблицы этихъ произведеній. Послѣ этого дѣти обыкновенно уже запоминаютъ нѣкоторыя изъ найденныхъ произведеній и могутъ ими пользоваться при опредѣленіи слѣдую-

щихъ. Мы бы совѣтовали, начиная съ умноженія 4-хъ, на первомъ урокѣ давать дѣтямъ только первыя пять произведеній, потому что изъ предыдущаго курса извѣстны только произведенія 4-хъ и 5-ти на 2. Тогда на слѣдующемъ урокѣ можно потребовать опредѣленіе остальныхъ произведеній при помощи первыхъ пяти произведеній. Пріемъ вычисленія состоитъ въ разложеніи множителя на два слагаемыхъ, въ умноженіи множимаго на каждое изъ этихъ слагаемыхъ и въ сложеніи полученныхъ произведеній. Множителя надо такъ разлагать на слагаемыя, чтобы полученныя произведенія было нетрудно сложить. При умноженіи четныхъ чиселъ (4, 6, 8), если множитель больше 5-ти, первымъ слагаемымъ можетъ быть 5, потому что отъ умноженія на 5 получится произведеніе, состоящее изъ полныхъ десятковъ, и сложеніе произведеній не представитъ труда. При нечетномъ множимомъ (3, 5, 7, 9) надо множителя разлагать на такія слагаемыя, чтобы въ получаемыхъ произведеніяхъ сумма единицъ была меньше 10-ти, или чтобы въ одномъ изъ произведеній число единицъ было близко къ 10-ти, или чтобы оба слагаемыя были одинаковы (если множитель четный), или, наконецъ, чтобы одно изъ нихъ было однозначное. Напр., при умноженіи 6 на 7, 6 множится отдѣльно на 5 и на 2 и произведенія 30 и 12 складываются; при умноженіи 7 на 6, 7 множится порознь на 3 и на 3 и произведенія 21 и 21 складываются; при умноженіи 7 на 9, 7 множится порознь на 6 и на 3 и произведенія 42 и 21 складываются; при умноженіи 3 на 7, 3 множится отдѣльно на 4 и на 3 и произведенія 12 и 9 складываются. При умноженіи на 10, множимое множится на 5 и на 5 и произведенія складываются. Кромѣ того, слѣдуетъ выяснить дѣтямъ, что отъ умноженія на 10 каждая единица множимаго даетъ десятокъ и слѣд. должно получаться столько десятковъ, сколько единицъ было во множимомъ. Желательно достигнуть, чтобы дѣти умѣли выбирать наиболѣе удобный пріемъ для каждаго частнаго случая, но не слѣдуетъ тратить на это слишкомъ много времени. Важно одно, чтобы, забывъ какое-либо изъ произведеній, дѣти могли бы его возстановить, пользуясь тѣми произведеніями, которыя они хорошо помнятъ. Послѣ умноженія каждаго однозначнаго числа на числа отъ 1 до 10, дѣти переходятъ къ упражненіямъ въ умноженіи этого числа на двузначныя числа, главная цѣль котораго, повторяемъ, состоитъ въ усвоеніи на память первыхъ десяти произведеній каждаго однозначнаго числа. Пріемъ умноженія на двузначныя числа указанъ нами при подробномъ разборѣ умноженія 2-хъ.

158. При дѣленіи на каждое однозначное число, однозначныя частныя опредѣляются сперва при помощи послѣдовательнаго обратнаго счета; затѣмъ составляется таблица этихъ частныхъ. Послѣ этого дѣти обыкновенно запоминаютъ нѣкоторыя изъ най-

денныхъ частныхъ и могутъ ими пользоваться при опредѣленіи послѣдующихъ. Какъ и въ умноженіи, начиная съ дѣленія на 4, въ первый урокъ можно ограничиться первыми пятью частными, потому что изъ предыдущихъ упражненій дѣтямъ извѣстны только частныя отъ дѣленія 8 на 4 и отъ дѣленія 10 на 5. Тогда на слѣдующихъ урокахъ можно требовать отъ дѣтей опредѣленія остальныхъ частныхъ при помощи первыхъ пяти. Общій пріемъ вычисленія состоитъ въ разложеніи дѣлимаго на два слагаемыхъ, кратныхъ дѣлителю и частныя отъ дѣленія которыхъ уже извѣстны. Такъ при дѣленіи 15-ти на 3, можно раздѣлить отдѣльно 9 и 6 на 3 и полученныя частныя 3 и 2 сложить, при дѣленіи 48 на 6, можно раздѣлить отдѣльно 30 и 18 на 6 и частныя 5 и 3 сложить; при дѣленіи 56 на 7, можно раздѣлить отдѣльно 35 и 21 на 7 и частныя 5 и 3 сложить. При дѣленіи на нѣкоторыхъ дѣлителей, кромѣ общаго пріема, можно прилагать пріемы, болѣе удобные для этихъ дѣлителей. Такъ при дѣленіи на 5, можно дѣлить отдѣльно каждый десятокъ дѣлимаго и затѣмъ его единицы; напр., чтобы раздѣлить 45 на 5, замѣчаемъ, что каждый десятокъ отъ дѣленія на 5 даетъ въ частномъ 2, а 4 десятка дадутъ 4 раза 2, т. е. 8, да 5 единицъ дадутъ еще одну единицу; слѣд. всего получится въ частномъ 9. При дѣленіи на 4, можно дѣлимое послѣдовательно два раза раздѣлить на два; при дѣленіи на 6—раздѣлить дѣлимое пополамъ и затѣмъ каждую половину—на 3 части; при дѣленіи на 8—раздѣлить дѣлимое пополамъ и затѣмъ каждую половину на 4 части. Такъ, чтобы раздѣлить 48 на 6, дѣлимъ 48 пополамъ и замѣчаемъ, что для полученія 6 частей надо каждую половину 48-ми, т.-е. 24, раздѣлить еще на 3 части; слѣд. получимъ въ каждой части по 24 : 3, т.-е. по 8. Этотъ пріемъ, впрочемъ, хорошо поддается объясненію только при дѣленіи въ смыслѣ опредѣленія части дѣлимаго. При дѣленіи на 9, можно каждый десятокъ дѣлимаго раздѣлить на 9, а затѣмъ раздѣлить на 9 вмѣстѣ и единицы дѣлимаго, и единицы, оставшіяся отъ дѣленія десятковъ; напр., чтобы раздѣлить 63 на 9, замѣчаемъ, что каждый десятокъ даетъ въ частномъ по единицѣ и въ остаткѣ тоже по единицѣ, а 6 десятковъ дадутъ въ частномъ 6 единицъ и въ остаткѣ 6 единицъ, которыя съ 3 единицами, бывшими въ дѣлимомъ, составятъ девять и дадутъ въ частномъ еще 1-цу; слѣд. всего въ частномъ получимъ 6+1, т.-е. 7. Пріемъ этотъ одинаково удобно примѣняется и къ дѣленію на части, и къ дѣленію по содержанію.

159. Отъ дѣленія чиселъ, дающихъ однозначныя частныя, дѣти переходятъ къ дѣленію чиселъ, дающихъ частныя двузначныя. Упражненія эти имѣютъ главной цѣлью заставить дѣтей запомнить однозначныя частныя при однозначномъ дѣлителѣ. Общій пріемъ дѣленія въ этомъ случаѣ состоитъ въ раз-

ложеніи дѣлимаго на два слагаемыхъ, изъ которыхъ первое содержитъ число десятковъ, кратное дѣлителю, а второе всѣ остальные десятки и единицы дѣлимаго; напр., чтобы раздѣлить 78 на 3, дѣлимъ на 3 отдѣльно 60 и 18 и полученныя частныя 20 и 6 складываемъ; чтобы раздѣлить 98 на 7, дѣлимъ на 7 отдѣльно 70 и 28 и полученныя частныя 10 и 4 складываемъ.

Относительно пріемовъ дѣленія слѣдуетъ замѣтить то же, что и относительно пріемовъ умноженія. Желательно, чтобы дѣти умѣли выбрать для каждаго частнаго случая наиболѣе удобный пріемъ, но не слѣдуетъ затрачивать на это слишкомъ много времени. Необходимо только, чтобы дѣти, забывъ какое-либо частное, умѣли бы найти его.

160. Для прочнаго усвоенія произведеній однозначныхъ чиселъ и однозначныхъ частныхъ при однозначномъ дѣлителѣ, полезно удѣлять отъ урока нѣсколько минутъ на быстрое опредѣленіе этихъ произведеній и частныхъ. Вопросы надо ставить по возможности въ самой разнообразной формѣ, пріучая дѣтей прилагать умноженіе и дѣленіе къ опредѣленію не только результатовъ этихъ дѣйствій, но и данныхъ чиселъ. Для приложенія умноженія, кромѣ опредѣленія произведенія, можно требовать опредѣленія дѣлимаго; для приложенія дѣленія, кромѣ опредѣленія частнаго, можно требовать опредѣленія множителя и дѣлителя. Для умноженія вопросы могутъ быть поставлены въ слѣдующихъ двухъ формахъ:

Какое получится произведеніе отъ умноженія 8 на 7?—Какое число надо раздѣлить на 7 (на 8), чтобы получить 8 (7)?

Для дѣленія вопросы могутъ быть поставлены въ слѣдующихъ четырехъ формахъ:

Какое частное получится отъ дѣленія 56-ти на 7?—Какое число надо умножить на 7, чтобы получить 56?—На какое число надо умножить 7, чтобы получить 56? — На какое число надо раздѣлить 56, чтобы получить 7?

Каждый изъ этихъ вопросовъ можетъ видоизмѣняться, сохраняя основной характеръ. Вопросы умноженія могутъ быть предложены въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Умножьте 8 на 7? — Увеличьте 8 въ 7 разъ? — Какое число въ 7 разъ больше 8-ми?—Отъ какого числа 8 составляетъ 7-ю часть?—Въ какомъ числѣ 8 содержится 7 разъ?

Вопросы дѣленія могутъ быть предложены въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Раздѣлите 56 на 7?—Найдите 7-ю часть 56-ти?—Сколько разъ 7 содержится въ 56-ти?—Какое число въ 7 разъ меньше 56-ти? — Во сколько разъ 56 больше 7-ми? — Какое число надо повторить 7 разъ, чтобы получить 56?—Какое число

надо увеличить въ 7 разъ, чтобы получить 56?—Сколько разъ надо взять 7, чтобы получить 56?—Во сколько разъ надо увеличить 7, чтобы получить 56?—Во сколько разъ надо уменьшить 56, чтобы получить 7?—На сколько частей надо раздѣлить 56, чтобы въ каждой части получить по 7-ми?—Какое число 7 разъ содержится въ 56-ти?

Такая разнообразная форма вопросовъ заставитъ дѣтей вникать въ соотношеніе между умноженіемъ и дѣленіемъ и пользоваться результатами одного дѣйствія для опредѣленія результатовъ другого. Въ этихъ же видахъ полезно заставлять дѣтей провѣрять получаемыя ими частныя при помощи умноженія.

161. Въ умноженіи двузначныхъ чиселъ и въ дѣленіи на двузначныя числа главное вниманіе обращается на усвоеніе пріемовъ вычисленія, которые для этихъ чиселъ нѣсколько отличаются отъ предыдущихъ. При умноженіи множимое разлагается на десятки и единицы, каждое слагаемое множится отдѣльно на множителя и произведенія складываются; напр., чтобы 14 умножить на 6, можно умножить на 6 отдѣльно 10 и 4 и сложить полученныя произведенія 60 и 24; чтобы умножить 24 на 4, можно умножить на 4 отдѣльно 20 и 4 и сложить полученныя произведенія 80 и 16. Такимъ образомъ дѣти, познакомившись на умноженіи однозначныхъ чиселъ съ пріемомъ, состоящимъ въ разложеніи множителя на слагаемыя, въ умноженіи двузначныхъ чиселъ знакомятся съ пріемомъ, состоящимъ въ такомъ же разложеніи множимаго. Оба эти пріема встрѣтятся имъ въ умноженіи многозначныхъ чиселъ.

162. Дѣленіе на двузначныя числа можетъ приводиться или непосредственно къ послѣдовательному вычитанію дѣлителя изъ дѣлимаго или къ ряду испытаній при помощи умноженія. Второй пріемъ мы предпочитаемъ, потому что онъ пріучаетъ дѣтей вникать въ соотношеніе между умноженіемъ и дѣленіемъ и укрѣпляетъ въ ихъ памяти таблицу умноженія. Чтобы избѣжать слишкомъ большого числа испытаній и колебаній въ выборѣ чиселъ для испытанія, можно начинать съ такого числа, отъ умноженія котораго на десятки дѣлителя получается столько же десятковъ, сколько ихъ въ дѣлимомъ, или немного менѣе. Такъ, чтобы раздѣлить 84 на 12, замѣчаемъ, что въ каждой части будетъ меньше 8-ми, потому что если бы только въ 10-ти частяхъ было по 8-ми, то въ дѣлимомъ должно бы быть уже 80; поэтому пробуемъ, не будетъ ли въ каждой части по 7-ми, для чего умножаемъ 7 на 12 (въ одной части 7, въ 12-ти частяхъ 12 разъ по 7-ми) и, получивъ въ произведеніи 84, заключаемъ, что въ каждой части дѣйствительно будетъ по 7-ми. Чтобы узнать, сколько разъ 23 содержится въ 92, замѣчаемъ, что 23 содержится въ 92

не болѣе 4-хъ разъ, потому что 5 разъ десятки дѣлителя даютъ уже 100; умноживъ же 23 на 4, окончательно убѣждаемся, что 23 въ 92 содержится 4 раза.

Можно нѣсколько видоизмѣнить послѣдній пріемъ. Напр., при дѣленіи 84 на 12, дѣти находятъ, что на 12 сперва можно раздѣлить 60 (т.-е. 12×5), что отъ этого дѣленія получится 5, а затѣмъ уже дѣлятъ на 12 остальныя 24, получаютъ 2, и, сложивъ 5 и 2, находятъ частное 7. Для подготовки къ этому пріему можетъ служить слѣдующій рядъ упражненій:

Какое наименьшее число можно раздѣлить на 12?—На 19?—На 24?—Какія числа, кромѣ 12-ти, можно раздѣлить на 12?—Какія числа, кромѣ 19-ти, можно раздѣлить на 19?—Какія числа, кромѣ 24-хъ, можно раздѣлить на 24?

Изъ этихъ упражненій дѣти легко выведутъ, какъ находить числа, кратныя дѣлителя.

Разсмотрѣнный пріемъ особенно удобенъ тогда, когда дѣти запомнятъ нѣсколько частныхъ отъ дѣленія на двузначныя числа.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда дѣлитель разлагается на множителей, можно дѣленіе на двузначное число свести къ дѣленію на однозначныя числа. Такъ, дѣленіе на 16 можно свести къ двумъ послѣдовательнымъ дѣленіямъ на 4, дѣленіе на 18 къ дѣленію на 9 и къ дѣленію полученнаго числа на 2. Чтобы раздѣлить 90 на 18, дѣлимъ 90 на 9 частей, получаемъ въ каждой части по 10; а чтобы изъ 9-ти частей получить 18, надо еще каждую часть раздѣлить на 2; слѣд. 18-я часть 90 равна $10:2=5$.

163. Въ нашемъ задачникѣ всѣ упражненія въ умноженіи и дѣленіи распредѣлены сообразно изложенному выше порядку: умноженіе 2-хъ и дѣленіе на 2, умноженіе 3-хъ и дѣленіе на 3 и т. д. до умноженія 9-ти и дѣленія на 9; затѣмъ идетъ умноженіе двузначныхъ чиселъ и дѣленіе на двузначныя числа. Для каждаго изъ однозначныхъ чиселъ первыя вычисленія и задачи относятся къ умноженію его на однозначныя числа, слѣдующія за ними—къ умноженію на двузначныя числа, затѣмъ вводится дѣленіе при однозначномъ частномъ и, наконецъ, дѣленіе при двузначномъ частномъ. Въ число упражненій введено раздробленіе и превращеніе именованныхъ чиселъ. Такъ при умноженіи 3-хъ и дѣленіи на 3 введено раздробленіе лотовѣ въ золотники и саженъ въ аршины и соотвѣтствующія превращенія; при умноженіи 8-ми и дѣленіи на 8—раздробленіе четвертей въ четверики и четвериковъ въ гарнцы и соотвѣтствующія превращенія; при умноженіи двузначныхъ чиселъ и дѣленіи на двузначныя числа—раздробленіе аршинъ въ вершки, фунтовъ въ лоты и т. п. и соотвѣтствующія имъ превращенія. Напоминаемъ при этомъ уже не разъ сдѣланное нами замѣчаніе, что со всѣми этими мѣрами дѣтей надо знакомить наглядно передъ началомъ упражненій, къ нимъ относящихся. Введеніе раздробленія и превращенія дало возможность вводить въ задачи составныя именованныя числа. Дѣйствія съ ними надо производить не по правиламъ, а какъ удобнѣе въ каждомъ частномъ случаѣ. Такимъ образомъ, къ концу ариѳметики первой сотни чиселъ дѣти постепенно освоятся со всѣми русскими мѣрами, единичное отношеніе которыхъ не превышаетъ 100, а также усвоятъ и пріемы вычисленія съ составными именованными числами. Превращеніе именованныхъ чиселъ даетъ особенно благопріятный случай познакомить дѣтей съ остаткомъ при дѣленіи.

164. Постепенное расширеніе познаній дѣтей въ ариѳметикѣ даетъ возможность вводить задачи новыхъ типовъ и знакомить дѣтей съ пріемами ихъ рѣшенія. Первыя задачи каждаго отдѣла не требуютъ для своего рѣшенія особенныхъ пріемовъ; задачи, требующія разработки пріемовъ рѣшенія, помѣщаются уже послѣ нихъ. Къ такому расположенію задачъ насъ побуждало желаніе не затруднять незнакомыми дѣтямъ условіями первыя приложенія къ задачамъ только что усвоенныхъ пріемовъ вычисленія и результатовъ умноженія и дѣленія.

Начиная съ умноженія 2-хъ и дѣленія на 2, мы вводимъ задачи, требующія дѣленія числа на части въ разностномъ отношеніи. Пріемы рѣшенія этихъ задачъ указаны выше (стр. 48—49, § 53).

Начиная съ умноженія 8-ми и дѣленія на 8 вводятся задачи, требующія дѣленія числа на части въ кратномъ отношеніи. Пріемы рѣшенія этихъ задачъ также указаны нами выше (стр. 62—63, § 59).

Затѣмъ постепенно вводятся задачи о встрѣчѣ движущихся предметовъ, задачи сложнаго тройного правила, правила товарищества, смѣшенія и задачи, представляющія собою видоизмѣненія этихъ основныхъ задачъ или ихъ комбинаціи.

165. Пріемы рѣшенія перечисленныхъ задачъ общеизвѣстны и разсмотрѣны нами выше; сдѣлаемъ только нѣсколько замѣчаній о способѣ приведенія къ единицѣ.

Способъ приведенія къ единицѣ допускаетъ видоизмѣненія и отклоненія отъ той обычной формы, въ которой онъ излагается въ учебникахъ ариѳметики; эти измѣненія и отклоненія необходимо вводить въ рѣшеніе задачъ, если мы желаемъ оставаться понятными для дѣтей и заставлять ихъ вдумываться въ рѣшеніе задачъ. Приложеніе къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ способа приведенія къ единицѣ въ обычной его формѣ зачастую ведетъ къ сложному, мало понятному для дѣтей, рѣшенію, вводитъ соотношенія между величинами, чуждыя дѣйствительности, и требуетъ, кромѣ того, разъясненія дѣтямъ понятій въ родѣ „$^1/_4$ рабочаго“,

„28-ми-часовая работа въ теченіе сутокъ“, „постройка цѣлаго дома однимъ рабочимъ“, „постройка цѣлаго дома въ 1 часъ“ и т. п. Зависитъ это отъ ни на чемъ не основаннаго обычая приводить къ единицѣ всѣ величины, кромѣ искомой. Отступленія отъ этого обычая придаютъ рѣшенію задачъ бо́льшую естественность. Для примѣра возьмемъ 2 задачи и приведемъ для каждой по два рѣшенія, изъ которыхъ въ одномъ будемъ держаться приведеннаго обычая, а въ другомъ отступимъ отъ него.

104) Когда полмѣры яблокъ продаютъ за 72 коп., то каждый пятокъ яблокъ обходится въ 6 коп. Во что обойдется десятокъ, если полмѣры такихъ же яблокъ будутъ продавать за 84 коп.?

Первое рѣшеніе. Когда полмѣры яблокъ будутъ стоить 1 к., то каждый пятокъ обойдется въ 72 раза дешевле, т.-е. обойдется въ $6:72=\frac{1}{12}$ к.; а когда полмѣры яблокъ будутъ стоить 84 к., то пятокъ обойдется въ 84 раза дороже, т.-е. будетъ стоить $\frac{1}{12}\times 84=7$ к. Одно яблоко тогда будетъ стоить $7:5=\frac{7}{5}$ коп., а десятокъ обойдется въ $\frac{7}{5}\times 10=14$ коп.

Второе рѣшеніе. Если каждый пятокъ стоилъ 6 коп., то всего яблокъ помѣщалось въ полмѣрѣ $72:6=12$ пятковъ или 6 десятковъ; слѣд. когда полмѣры яблокъ будутъ стоить 84 коп., то десятокъ обойдется въ 84 коп. : $6=14$ коп.

105) Три работника, работая двѣ недѣли, вырыли ровъ, длиною въ 84 саж. Сколько нужно работниковъ, чтобы окончить эту работу въ 12 дней, если осталось еще рыть 96 саженъ?

Первое рѣшеніе. Чтобы вырыть ровъ, длиною въ 1 саж., надо $3:84=\frac{1}{28}$ работника, а чтобы вырыть ровъ, длиною въ 96 саж., работниковъ нужно $\frac{1}{28}\times 96=\frac{24}{7}$. Чтобы ровъ такой длины вырыть въ 1 день, работниковъ нужно $\frac{24}{7}\times 14=48$, а чтобы вырыть его въ 12 дней, работниковъ нужно $48:12=4$.

Второе рѣшеніе. Одинъ работникъ въ теченіе 14 дней можетъ вырыть $84:3=28$ саж., въ одинъ день онъ выроетъ $28:14=2$ саж., въ 12 дней $2\times 12=24$ саж.; слѣд. для того, чтобы вырыть ровъ въ 96 саж., работниковъ нужно $96:24=4$.

Вторыя рѣшенія совершенно свободны отъ дробей и на нашъ взглядъ гораздо естественнѣе и доступнѣе дѣтямъ.

Кромѣ этихъ видоизмѣненій и отступленій отъ шаблонной формы, полезно вводить еще такой пріемъ рѣшенія, въ которомъ вмѣсто приведенія къ единицѣ вводится приведеніе къ группѣ единицъ, содержащейся безъ остатка въ двухъ данныхъ въ задачѣ однородныхъ группахъ единицъ. Напр. для опредѣленія стоимости 18-ти платковъ, дюжина которыхъ стоитъ 16 рублей, можно отъ стоимости дюжины платковъ перейти къ стоимости 18-ти платковъ не черезъ стоимость одного платка, а черезъ стоимость полдюжины платковъ (полдюжины платковъ стоятъ $16:2=8$ руб., а три полдюжины, т.-е. 18, стоятъ $8\times 3=24$ р.). Такой пріемъ освобождаетъ также отъ дробей въ рѣшеніи, если отвѣтъ долженъ быть цѣлымъ. Не слѣдуетъ только злоупотреблять примѣненіемъ этого пріема къ такимъ случаямъ, гдѣ опредѣленіе группы единицъ, содержащейся безъ остатка въ двухъ данныхъ группахъ, становится для дѣтей затруднительнымъ, тѣмъ болѣе, что указать общій пріемъ отысканія такой группы, ранѣе статьи о дѣлимости, невозможно, а при нѣкоторомъ знакомствѣ съ дробями исчезаетъ самая надобность въ этомъ пріемѣ.

Точно такъ же рѣшеніе многихъ задачъ на правило товарищества можетъ быть значительно облегчено, если станемъ приводить рѣшеніе ихъ къ дѣленію числа на части въ кратномъ отношеніи.

Приводимъ задачу и ея рѣшенія тѣмъ и другимъ способомъ.

106) Два мальчика, сложившись деньгами, купили фунтъ вишенъ, въ которомъ оказалось 54 штуки. Сколько вишенъ долженъ получить 1-й и сколько 2-й, если 1-й далъ 2 к., а 2-й 4 к.?

1-е рѣшеніе. Оба мальчика дали $2+4=6$ коп., на одну копейку приходится $54:6=9$ вишенъ; первый долженъ получить $9\times 2=18$, а второй $9\times 4=36$ вишенъ.

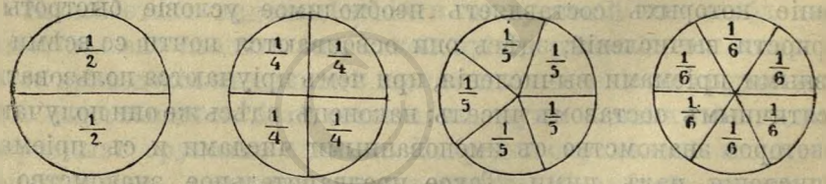
2-е рѣшеніе. Второй мальчикъ далъ денегъ вдвое больше перваго, и вишенъ долженъ получить вдвое больше перваго; поэтому 54 надо раздѣлить на 2 части такъ, чтобы вторая была вдвое больше первой. Раздѣливъ для этого 54 на 3, найдемъ, что первый мальчикъ получитъ 18 вишенъ, а второй $18\times 2=36$.

Второе рѣшеніе не потребуетъ дробей и въ томъ случаѣ, если въ фунтѣ будетъ не 54, а 81 вишня.

166. Дѣйствіе съ простѣйшими дробями. Въ ариѳметикѣ первой сотни чиселъ закладываются основы всего содержанія ариѳметики; слѣдующіе отдѣлы представляютъ собою только развитіе и расширеніе тѣхъ понятій, которыя дѣти пріобрѣтаютъ при упражненіяхъ въ этомъ предѣлѣ. Здѣсь дѣти получаютъ начальныя понятія о числахъ и дѣйствіяхъ съ ними; здѣсь они знакомятся съ основами десятичной системы счисленія; здѣсь же они усвоиваютъ тѣ результаты дѣйствій (таблицы сложенія и умноженія), знаніе которыхъ составляетъ необходимое условіе быстроты и вѣрности вычисленій; здѣсь они освоиваются почти со всѣми основными пріемами вычисленія, при чемъ пріучаются пользоваться десятичнымъ составомъ чиселъ; наконецъ, здѣсь же они получаютъ нѣкоторое знакомство съ именованными числами и съ пріемами вычисленія надъ ними. Такое предварительное знакомство съ ариѳметикой было бы не полно, если бы въ ариѳметикѣ же первой сотни чиселъ дѣти не получили нѣкоторыхъ понятій о дробяхъ.

Но помимо устраненія нѣкоторой неполноты курса, знакомство съ дробями является полезнымъ и крайне желательнымъ въ видахъ болѣе полнаго и точнаго разъясненія многихъ вопросовъ, относящихся къ цѣлымъ числамъ. Сюда принадлежитъ бо́льшая часть вопросовъ, относящихся къ дѣленію въ смыслѣ опредѣленія части дѣлимаго. Какъ мы уже видѣли выше, при первомъ знакомствѣ съ этимъ дѣйствіемъ приходится затрогивать съ дѣтьми понятія о цѣломъ и о доляхъ цѣлаго. Чѣмъ дальше будетъ развиваться ученіе о дѣленіи цѣлыхъ чиселъ, тѣмъ потребность въ пониманіи соотношеній между цѣлымъ и его долями и между различными долями цѣлаго все будетъ возрастать. На основаніи этого слѣдуетъ признать вполнѣ умѣстнымъ установившійся обычай отдѣлять часть времени, посвящаемаго ариѳметикѣ первой сотни чиселъ, на ознакомленіе дѣтей съ простѣйшими дробями; не слѣдуетъ только упускать изъ виду, что введеніемъ слишкомъ объемистаго курса дробей можно задержать обученіе ариѳметикѣ на малыхъ числахъ, принося очень сомнительную пользу дѣлу. Къ этой оговоркѣ насъ побуждаетъ то обстоятельство, что въ руководствахъ къ преподаванію ариѳметики, вышедшихъ въ послѣднее время, въ ариѳметикѣ первой сотни чиселъ дробямъ отводится слишкомъ много времени, при чемъ по необходимости многіе вопросы разбираются только для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ (напр. сложеніе $^1/_2$ съ $^1/_4$, съ $^1/_8$ и т. п.). Мы съ своей стороны признаемъ совершенно достаточнымъ въ ариѳметикѣ первой сотни чиселъ познакомить дѣтей: 1) съ происхожденіемъ и обозначеніемъ дробей, 2) съ исключеніемъ цѣлаго числа изъ неправильной дроби и съ обратнымъ преобразованіемъ, 3) съ опредѣленіемъ части цѣлаго и цѣлаго по его частямъ, 4) съ дѣйствіями надъ дробями, при чемъ для сложенія и вычитанія берутся только дроби съ одинаковыми знаменателями, а умноженіе и дѣленіе разсматриваются только при цѣломъ множителѣ и дѣлителѣ, когда оба дѣйствія сводятся къ измѣненію числителя.

167. Первое знакомство съ долями единицы должно быть дано наглядно при помощи чертежей, образцы которыхъ приводимъ:

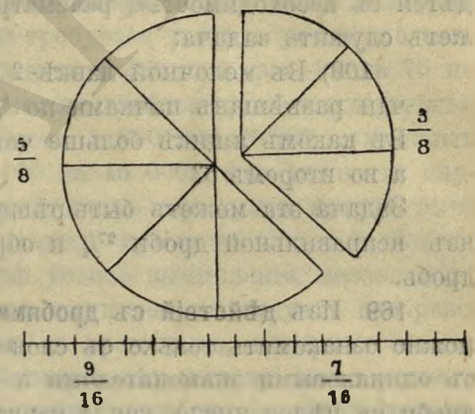


Мы избрали для дѣленія на части кругъ, потому что эта фигура даетъ наглядное представленіе о цѣломъ и его доляхъ. На

этихъ чертежахъ дѣти учатся называть различныя доли единицы.

Работа будетъ закончена, если дѣти въ состояніи будутъ хорошо отвѣтить на вопросы:

Какія доли единицы получатся, если ее раздѣлимъ на 3 части?—на 6 частей?—на 20равныхъ частей?—Какую долю аршинъ составляетъ отъ сажени?—часъ отъ сутокъ? — Какъ получить четверть единицы?—Сколько золотниковъ въ 8-й части фунта?—Сколько дней въ 6-й долѣ мѣсяца?



Затѣмъ на чертежѣ, который приводимъ, дается дѣтямъ понятіе о дроби, состоящей изъ нѣсколькихъ долей единицы.

Рядомъ такихъ упражненій дѣти пріучаются давать себѣ ясный отчетъ о составѣ дроби, знакомятся съ обозначеніемъ дробей и съ названіями ея членовъ. Послѣ этого можно дать рядъ упражненій, въ которыхъ дѣти учатся опредѣлять части цѣлаго и цѣлое по его частямъ. Далѣе слѣдуетъ знакомство съ правильными и неправильными дробями и съ происхожденіемъ дроби отъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ. Для послѣдней цѣли выбираются задачи въ родѣ слѣдующихъ:

107) Четыре мальчика раздѣлили между собою 3 яблока поровну. Сколько досталось каждому?

108) Изъ 25 фунтовъ муки испекли 3 одинаковыхъ хлѣба. Сколько муки пошло на каждый?

168. Исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби сперва производится послѣдовательнымъ составленіемъ единицъ изъ долей неправильной дроби. Такъ, чтобы изъ $^{20}/_3$ исключить цѣлое число, дѣти сперва составляютъ единицу изъ $^3/_3$ и говорятъ, что осталось $^{17}/_3$; затѣмъ снова берутъ $^3/_3$ и составляютъ изъ нихъ вторую единицу; останется $^{14}/_3$; изъ нихъ для образованія третьей единицы опять берутъ $^3/_3$ и т. д., пока не останется $^2/_3$, изъ которыхъ уже нельзя составить цѣлой единицы. Путемъ такихъ упражненій дѣти очень скоро приходятъ къ выводу, что для исключенія цѣлаго числа изъ неправильной дроби надо числителя раздѣлить на знаменателя. Этому много помогаетъ аналогія разсматриваемаго преобразованія съ превращеніемъ именованныхъ чиселъ. Обратное преобразованіе идетъ гораздо легче и едва ли требуетъ

какихъ-либо указаній. Замѣтимъ, что не слѣдуетъ спѣшить съ выводомъ такъ называемыхъ правилъ для этихъ преобразованій. Пусть дѣти сперва совершенно освоятся какъ съ самыми преобразованіями, такъ и съ тѣми соображеніями, помощію которыхъ преобразованія производятся. Хорошимъ средствомъ познакомить дѣтей съ необходимостью разсматриваемыхъ преобразованій можетъ служить задача:

109) Въ мелочной лавкѣ 2 ящика съ чаемъ, въ первомъ чай развѣшанъ пачками по $^1/_4$ фунта, а во второмъ фунтами. Въ какомъ ящикѣ больше чаю, если въ первомъ 27 пачекъ, а во второмъ 6?

Задача эта можетъ быть рѣшена исключеніемъ цѣлаго числа изъ неправильной дроби $^{27}/_4$ и обращеніемъ 6 въ неправильную дробь.

169. Изъ **дѣйствій съ дробями** на этой ступени обученія возможно ознакомить только съ сложеніемъ и вычитаніемъ дробей съ одинаковыми знаменателями и съ умноженіемъ и дѣленіемъ дроби на цѣлое число, когда первое приводится къ умноженію, а второе — къ дѣленію числителя. Всѣ эти дѣйствія легко понимаются дѣтьми по аналогіи съ дѣйствіями надъ именованными числами и представляютъ много случаевъ къ упражненіямъ въ исключеніи цѣлаго числа изъ неправильной дроби и къ обращенію смѣшаннаго числа въ неправильную дробь. Никакихъ правилъ дѣйствій при этомъ выводить не слѣдуетъ. Чтобы навести на пріемъ сложенія дробей, можно заставить прибавлять (считать) къ $^1/_4$ по $^1/_4$, къ $^1/_5$ по $^1/_5$ и т. п.; для вычитанія можетъ служить послѣдовательное вычитаніе (обратный счетъ) по одной долѣ изъ дроби, состоящей изъ такихъ же долей единицы; наконецъ для умноженія прибавленіе къ $^2/_{15}$ по $^2/_{15}$ и т. п., а для дѣленія послѣдовательное вычитаніе по $^3/_{10}$ изъ $^9/_{10}$, по $^2/_{15}$ изъ $^8/_{15}$ и т. п.

V.

Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ любой величины.

170. Существенное отличіе этого отдѣла отъ предыдущихъ составляютъ пріемы письменнаго вычисленія, при чемъ цыфры служатъ не только для обозначенія чиселъ, но такъ сказать являются орудіями вычисленія. Пріобрѣтеніе механизма письменнаго вычисленія въ старое время ставилось почти единственною задачей обученія ариѳметикѣ. Съ введеніемъ новыхъ методовъ преподаванія начали придавать значеніе и устному вычисленію, но часто примѣненіе его ограничивали числами первой сотни. Такой взглядъ нельзя признать правильнымъ. Оба способа вычисленія болѣе или менѣе равноправны и примѣненіе того или другого изъ нихъ должно опредѣляться не одною величиною чиселъ, подлежащихъ вычисленію, но и характеромъ ихъ. Если въ курсѣ первой сотни чиселъ отъ дѣтей требуется умѣнье устно сложить 64 и 36, вычесть 43 изъ 80, умножить 24 на 4, раздѣлить 75 на 15, то съ такимъ же правомъ можно требовать отъ нихъ умѣнья устно сложить 640 и 360, вычесть 4 300 изъ 8 000, умножить 24 000 на 4 и раздѣлить 75 000 на 15 000, такъ какъ эти случаи дѣйствій совершенно аналогичны съ первыми и могутъ быть выполнены помощію тѣхъ же самыхъ пріемовъ. Указать точныя границы, въ которыхъ умѣстно устное вычисленіе, невозможно; требованія относительно устнаго вычисленія слѣдуетъ сообразовать со способностями дѣтей и съ временемъ, которымъ можно для этого располагать. Но познакомить дѣтей съ пріемами устнаго вычисленія въ примѣненіи къ числамъ любой величины необходимо, потому что умѣнье вычислять устно значительно способствуетъ правильному усвоенію и толковому пониманію пріемовъ письменнаго вычисленія, разъясняетъ дѣтямъ особенности письменнаго вычисленія и заставляетъ ихъ придавать надлежащую цѣну тому облегченію, которое даставляетъ записываніе результатовъ дѣйствій по мѣрѣ ихъ полученія.

171. **Особенности устнаго вычисленія**. Общій характеръ всѣхъ пріемовъ вычисленія состоитъ въ стремленіи привести разбираемый случай дѣйствія къ такимъ дѣйствіямъ, результаты которыхъ намъ извѣстны. При устномъ вычисленіи вычисляющій пользуется вообще всѣми результатами, которыми располагаетъ, и часто опредѣляетъ результаты не по разрядамъ. Въ устномъ вычисленіи гораздо чаще, сравнительно съ письменнымъ, прибѣгаютъ къ измѣненію данныхъ чиселъ съ тѣмъ, чтобы по возможности упростить вычисленіе. Устное вычисленіе есть по преимуществу вычисленіе по свободному соображенію, и потому правила для него могутъ заключать въ себѣ только общія указанія способа, помощію котораго данный случай дѣйствія можетъ быть приведенъ къ такимъ случаямъ, которые уже ранѣе разобраны; подробности выполненія дѣйствія, порядокъ выполненія, послѣдовательность въ переходѣ отъ дѣйствія съ единицами одного разряда къ дѣйствію съ единицами другого и т. п., должны быть предоставлены выбору вычисляющаго, потому что онѣ могутъ значительно видоизмѣняться сообразно съ характеромъ чиселъ, подлежащихъ вычисленію; напр., устное сложеніе казалось бы удобнѣе начинать съ единицъ высшаго разряда, но

есть много случаевъ, въ которыхъ обратный порядокъ скорѣе и легче ведетъ къ цѣли. Такъ, для сложенія 493 и 257 лучше къ 493 приложить сперва 7 единицъ второго слагаемаго, потому что тогда сложеніе полученной суммы съ остальными 250-ю единицами второго слагаемаго совершается безъ всякаго затрудненія.

Упражненія въ устномъ вычисленіи способствуютъ развитію въ дѣтяхъ навыка въ выборѣ пріемовъ, наиболѣе соотвѣтствующихъ данному случаю дѣйствія, и тѣмъ значительно ускоряютъ ходъ вычисленій.

172. Особенности письменнаго вычисленія. Письменное вычисленіе имѣетъ цѣлью освободить вычисляющаго отъ необходимости держать въ памяти данныя числа въ дѣйствіяхъ и бо́льшую часть тѣхъ промежуточныхъ (неполныхъ) результатовъ, черезъ которые приходится пройти для опредѣленія окончательнаго (полнаго) результата дѣйствія. При установленіи пріемовъ письменнаго вычисленія предполагаются извѣстными только тѣ результаты дѣйствій, которые даются таблицами сложенія и умноженія однозначныхъ чиселъ. Для того, чтобы возможно меньше чиселъ держать въ памяти и вводить какъ можно меньше измѣненій въ сдѣланныхъ уже записяхъ, результаты дѣйствій при письменномъ вычисленіи опредѣляются по разрядамъ. Письменное вычисленіе, въ противоположность устному, есть вычисленіе по правиламъ, устанавливаемымъ въ болѣе или менѣе общей формѣ для всѣхъ чиселъ и имѣющимъ цѣлію свести вычисленіе къ результатамъ основныхъ таблицъ и къ нѣкоторымъ чисто механическимъ пріемамъ въ расположеніи чиселъ и обозначающихъ ихъ цыфръ.

Въ каждомъ правилѣ для письменнаго вычисленія легко раскрыть три элемента, существенное значеніе которыхъ весьма различно, но которые одинаково необходимы для того, чтобы вычисленіе было выполнено письменно. Первый элементъ состоитъ въ указаніи, какимъ путемъ независимо отъ того, письменно или устно производится вычисленіе, разсматриваемый случай дѣйствія можетъ быть приведенъ или непосредственно къ основнымъ таблицамъ, или къ такимъ дѣйствіямъ, способъ выполненія которыхъ при помощи основныхъ таблицъ установленъ уже ранѣе. Второй элементъ состоитъ въ установленіи, какимъ путемъ эти указанія могутъ быть выполнены при письменномъ вычисленіи съ тѣмъ, чтобы возможно меньше чиселъ держать въ памяти, возможно меньше дѣлать записей и исправленій въ нихъ. Наконецъ, третій элементъ заключается въ установленіи формы и расположенія записей. Напр. для умноженія многозначнаго числа на однозначное указывается: 1) какъ дѣйствіе приводится къ

таблицѣ умноженія, 2) въ какомъ порядкѣ удобнѣе опредѣлять произведенія единицъ каждаго разряда при письменномъ вычисленіи и 3) какъ слѣдуетъ располагать данныя числа и получаемые результаты. Первая сторона письменнаго вычисленія—самая существенная и въ общихъ чертахъ одинакова съ устнымъ вычисленіемъ; вторая, представляя существенное отличіе письменнаго вычисленія отъ устнаго, можетъ быть мотивирована съ достаточною основательностью и требуетъ непремѣннаго установленія, потому что отступленія отъ нея ведутъ часто къ утратѣ всѣхъ выгодъ письменнаго вычисленія, сравнительно съ устнымъ, къ цѣлому ряду поправокъ въ результатахъ и въ нѣкоторыхъ случаяхъ могутъ совершенно запутать вычисленіе; что касается третьей, то она наименѣе существенна, не всегда можетъ быть достаточно мотивирована и допускаетъ различныя видоизмѣненія.

173. Чтобы дѣти сознательно усвоили пріемы письменнаго вычисленія и научились правильно прилагать ихъ, необходимо, чтобы они умѣли отличать въ каждомъ пріемѣ существенное отъ несущественнаго и могли бы сдѣлать надлежащую оцѣнку того облегченія, которое доставляетъ обозначеніе промежуточныхъ и окончательнаго результатовъ по мѣрѣ ихъ опредѣленія. При ознакомленіи съ одними пріемами письменнаго вычисленія всѣ три стороны его настолько тѣсно сливаются другъ съ другомъ, что различеніе ихъ становится для дѣтей недоступнымъ, и они привыкаютъ придавать преимущественное значеніе расположенію чиселъ, такъ какъ оно нагляднѣе всего остального и легче усвоивается. Вслѣдствіе же того, что письменное вычисленіе обставлено правилами, регулирующими каждый шагъ вычисляющаго и представляющими очень мало его собственной находчивости и соображенію, дѣти усвоиваютъ преимущественно внѣшнюю, механическую, сторону вычисленія, не отдавая себѣ яснаго отчета ни въ значеніи этого механизма, ни въ основаніяхъ, на которыхъ онъ построенъ. Замѣчательно, что дѣти, знакомые съ одними пріемами письменнаго вычисленія, даже въ самыхъ простыхъ случаяхъ не могутъ приблизительно опредѣлять величину результата раньше полнаго его вычисленія.

Чтобы избѣгнуть указанныхъ недостатковъ, особенно важно ознакомить дѣтей съ общими началами вычисленія независимо отъ той частной формы, которая придается имъ письменнымъ выполненіемъ, а для этой цѣли необходимо ознакомить дѣтей съ устнымъ вычисленіемъ.

Введеніе устнаго вычисленія надъ числами любой величины не обременяетъ курса ариѳметики, требуетъ сравнительно небольшой затраты времени и значительно облегчаетъ усвоеніе пріемовъ письменнаго вычисленія.

174. Вычисленіе на русскихъ счетахъ. Кромѣ устнаго и письменнаго вычисленія, у насъ распространенъ еще особый родъ вычисленія, занимающій среднее мѣсто между первыми двумя, — это вычисленіе на русскихъ счетахъ. Нѣкоторые составители руководствъ по преподаванію ариѳметики признаютъ за вычисленіями на русскихъ счетахъ только практическое значеніе и потому считаютъ введеніе ихъ въ курсъ общеобразовательной школы излишнимъ. Этотъ взглядъ едва ли можно признать правильнымъ. Вычисленія на счетахъ основаны на той же десятичной системѣ и на тѣхъ же законахъ ариѳметическихъ дѣйствій, что и пріемы устнаго и письменнаго вычисленія. Знакомя дѣтей съ пріемами вычисленій на счетахъ, мы даемъ имъ лишній случай вдуматься въ эти основы ариѳметики; дѣти пріучаются отличать въ правилахъ производства дѣйствій существенное отъ частностей и особенностей, которыя опредѣляются тѣмъ, производятся ли дѣйствія устно, или письменно, или на счетахъ, и получаютъ больше простора въ выборѣ пріемовъ вычисленія. Вычисленія на счетахъ особенно полезны для освоенія дѣтей съ пріемами вычисленія, состоящими въ такъ называемомъ округленіи чиселъ.

Безъ сомнѣнія, общеобразовательная школа не можетъ поставить себѣ цѣлью такое же усвоеніе пріемовъ вычисленія на русскихъ счетахъ, какъ и пріемовъ устнаго и письменнаго вычисленій, но познакомить до нѣкоторой степени съ рускими счетами, по нашему мнѣнію, обязательно, тѣмъ болѣе, что они представляютъ собою одинъ изъ самыхъ простыхъ и очень удачныхъ счетныхъ инструментовъ.

175. Пріемы вычисленія основаны на законахъ, которымъ подчиняются ариѳметическія дѣйствія и которые отчасти приходилось примѣнять и въ предыдущихъ отдѣлахъ курса. Тамъ эти законы, какъ мы имѣли случай указать, не требовали установленія въ общемъ видѣ, такъ какъ каждый разъ они могли быть выяснены въ примѣненіи къ числамъ, надъ которыми дѣйствіе производилось, вслѣдствіе незначительной величины и простоты этихъ чиселъ; можно даже сказать, что въ бо́льшей части случаевъ, въ примѣненіи къ числамъ первой сотни, законы дѣйствій познаются дѣтьми непосредственно. Съ увеличеніемъ и усложненіемъ чиселъ, съ которыми производятся дѣйствія, законы дѣйствій теряютъ непосредственную очевидность, выводъ ихъ изъ понятій о дѣйствіяхъ становится затруднительнымъ и требуетъ много времени; поэтому выводить ихъ въ примѣненіи къ каждому частному случаю становится неудобнымъ. Для примѣра возьмемъ умноженіе и дѣленіе на числа, представляющія произведенія двухъ множителей. Дѣйствія эти приводятся къ послѣдовательному умноженію и дѣленію на каждаго множителя. Въ примѣненіи къ небольшимъ числамъ, напр. къ 6, этотъ пріемъ легко разъясняется непосредственно изъ понятій о дѣйствіяхъ. Чтобы повторить число 6 разъ, надо его повторить 3 раза, потомъ еще 3 раза и полученныя числа сложить, т.-е. надо число умножить на 3 и полученное произведеніе снова умножить на 2. Чтобы раздѣлить число на 6 частей, надо раздѣлить его пополамъ и потомъ каждую половину раздѣлить на 3 части, потому что если въ каждой половинѣ по 3 части, то въ цѣломъ будетъ $3+3=6$ частей. Въ примѣненіи же къ болѣе сложнымъ числамъ, ясность этого пріема теряется и онъ можетъ быть хорошо понятъ только тогда, когда дѣти поймутъ и усвоятъ въ общемъ видѣ законы, которымъ подчиняются ариѳметическія дѣйствія. Съ другой стороны разъясненіе законовъ дѣйствій въ ихъ общемъ видѣ представляетъ одну изъ самыхъ образовательныхъ работъ въ курсѣ ариѳметики, такъ какъ онъ оно вводитъ дѣтей до нѣкоторой степени въ область изученія зависимости величинъ другъ отъ друга, что составляетъ существенное содержаніе всей математики. Едва ли также можно считать основательными опасенія, что работа эта будетъ непосильна для дѣтей. Въ курсѣ первой сотни чиселъ дѣтямъ много разъ приходится, хотя и ощупью, прилагать законы дѣйствій, и потому выводъ ихъ въ общемъ видѣ, въ формѣ измѣненія результатовъ при измѣненіи данныхъ чиселъ, казалось бы, не долженъ встрѣтить серьезныхъ затрудненій.

176. Простѣйшіе случаи дѣйствій надъ многозначными числами. Пользованіе законами дѣйствій при вычисленіи опредѣляется десятичнымъ составомъ чиселъ. Съ изученія десятичной системы счисленія должна начинаться ариѳметика цѣлыхъ чиселъ любой величины, при чемъ не должно ограничиваться усвоеніемъ однихъ способовъ устнаго и письменнаго выраженія чиселъ любой величины. Чтобы не быть монотоннымъ, чтобы дѣйствительно служить основою для вычисленій, изученіе системы счисленія непремѣнно должно сопровождаться производствомъ дѣйствій надъ числами. Для этого могутъ служить тѣ простѣйшіе случаи, въ которыхъ приведеніе дѣйствій къ основнымъ таблицамъ можетъ быть достигнуто простымъ распространеніемъ результатовъ этихъ таблицъ на единицы высшихъ разрядовъ. Такое распространеніе встрѣчалось въ предыдущихъ отдѣлахъ курса только въ приложеніи къ числамъ, состоящимъ изъ полныхъ десятковъ. Въ числахъ любой величины дѣти должны пріобрѣсти прежде всего навыкъ быстро и безошибочно пользоваться такимъ распространеніемъ результатовъ основныхъ таблицъ. Помощью распространія результатовъ основныхъ таблицъ на единицы высшихъ разрядовъ могутъ быть выполнены слѣдующіе случаи дѣйствій:

1. Сложеніе, когда слагаемыя состоятъ изъ единицъ только одного разряда. Чтобы сложить 7000 и 8000 замѣчаемъ, что 7

какихъ-либо единицъ съ 8-ю такими же единицами составляютъ 15 такихъ же единицъ; поэтому и 7 единицъ 4-го разряда (тысячъ) съ 8-ю единицами 4-го разряда дадутъ 15 единицъ того же 4-го разряда, т.-е. 15 тысячъ; слѣд. 7000+8000=15000.

2. Вычитаніе въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда уменьшаемое и вычитаемое состоятъ изъ единицъ одного и того же разряда, и, во-вторыхъ, когда въ уменьшаемомъ единицъ того же рязряда, какъ въ вычитаемомъ, меньше, но оно заключаетъ въ себѣ еще единицу слѣдующаго высшаго рязряда. Чтобы вычесть 3000 изъ 8000, замѣчаемъ, что 8 какихъ-либо единицъ безъ 3 такихъ же единицъ составляютъ 5 такихъ же единицъ; поэтому и 8 единицъ 4-го разряда безъ 3 единицъ того же разряда составятъ 5 единицъ того же 4-го разряда, т.-е. 5 тысячъ; слѣд. 8000—3000=5000. Чтобы вычесть 400 изъ 1200, замѣчаемъ, что тысяча заключаетъ въ себѣ 10 сотенъ, которыя съ остальными 2-мя сотнями уменьшаемаго составятъ 12 сотенъ, и что 12 единицъ безъ 4 единицъ составляютъ 8 такихъ же единицъ; поэтому и 12 сотенъ безъ 4 сотенъ составятъ 8 сотенъ; слѣд. 1200—400=800.

Умноженіе — когда, при однозначномъ множителѣ, множимое состоитъ изъ единицъ только одного разряда. Чтобы умножить 500 на 7, замѣчаемъ, что всякія 5 единицъ, взятыя слагаемымъ 7 разъ, даютъ 35 такихъ же единицъ; поэтому и 5 единицъ 3-го разряда, взятыя слагаемымъ 7 разъ, дадутъ также 35 ед. 3-го разряда, т.-е. 35 сотенъ, которыя составятъ 3 тыс. и 5 сот.; слѣд. 500×7=3 500.

4. Дѣленіе въ двухъ случаяхъ: во-первыхъ, когда дѣлимое и дѣлитель состоятъ изъ единицъ одного и того же разряда, и, во-вторыхъ, когда дѣлитель состоитъ изъ единицъ одного разряда, а дѣлимое заключаетъ въ себѣ и единицы лѣдующаго высшаго разряда, но въ меньшемъ числѣ, чѣмъ единицъ даннаго разряда въ дѣлителѣ. Напр., чтобы раздѣлить 6300 на 700, надо узнать, на что слѣдуетъ умножить 700, чтобы получить въ произведеніи 6300; иначе, на что слѣдуетъ умножить 7 сот., чтобы получить въ произведеніи 63 сотни. Таблица умноженія показываетъ, что для полученія 63 какихъ-либо единицъ, надо 7 такихъ же единицъ умножить на 9; поэтому и для полученія 63 сотенъ надо 7 сотенъ умножить на 9; слѣд. 6300 : 700=9. Такъ же найдемъ, что 510 : 60 даютъ въ частномъ 8 и что въ остаткѣ получится 510—480=30.

Помощью таблицы умноженія также не трудно найти частное, когда при однозначномъ дѣлителѣ, дѣлимое состоитъ изъ единицъ только одного или двухъ слѣдующихъ другъ за другомъ разрядовъ, если при этомъ единицъ высшаго разряда въ дѣлимомъ меньше, чѣмъ простыхъ единицъ въ дѣлителѣ, и если частное въ обоихъ случаяхъ выражается въ единицахъ только одного разряда. Напр., чтобы раздѣлить 6300 на 7, надо 63 сотни.

раздѣлить на 7, а мы знаемъ что отъ дѣленія 63 единицъ на 7 получается 9 такихъ же единицъ; слѣд. отъ дѣленія 63 сот. на 7 получимъ 9 сотенъ, или 900.

177. Послѣ этого, мало-по-малу можно вводить болѣе сложные пріемы вычисленія съ многозначными числами. Порядокъ въ ознакомленіи дѣтей съ болѣе сложными пріемами вычисленія надъ многозначными числами опредѣляется порядкомъ въ разъясненіи имъ основныхъ положеній изъ теоріи дѣйствій, которая, начинаясь съ установленія понятій о числѣ и дѣйствіяхъ надъ нимъ, должна постепенно затронуть соотношенія между дѣйствіями, зависимость между числами въ каждомъ дѣйствіи и измѣненіе результатовъ дѣйствій при измѣненіи данныхъ. Письменное вычисленіе вводится послѣ разсмотрѣнія соотвѣтствующихъ случаевъ устнаго вычисленія.

Тѣ основанія для совмѣстнаго разсмотрѣнія дѣйствій, которыя мы уже не разъ имѣли случай намѣтить, сохраняютъ свою силу и для этого отдѣла курса.

178. Дѣйствія съ составными именованными числами, какъ мы уже имѣли случай замѣтить, нѣтъ надобности выдѣлять въ особую главу. Съ ними, какъ и съ пріемами вычисленія на счетахъ, должно знакомить въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ курса отвлеченныхъ цѣлыхъ чиселъ, что мы и постараемся сдѣлать въ послѣдующемъ изложеніи.

179. **Программа отдѣла.** Сводя вмѣстѣ все сказанное, можно предложить слѣдующую программу ариѳметики цѣлыхъ чиселъ любой величины.

1. Десятичная система счисленія и простѣйшіе случаи дѣйствій надъ многозначными числами.

2. Основныя понятія о дѣйствіяхъ. Зависимость между числами въ каждомъ дѣйствіи.

3. Измѣненія суммы, разности, произведенія и частнаго.

4. Письменные пріемы сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія. Приложенія ихъ къ преобразованіямъ и дѣйствіямъ надъ составными именованными числами.

Въ первыхъ трехъ отдѣлахъ программы должны преобладать устныя вычисленія, въ четвертомъ письменныя. Программа эта представляетъ скорѣе объемъ курса; подробности же распредѣленія читатель найдетъ далѣе.

180. **Число. Раздѣленіе чиселъ на отвлеченныя и именованныя.** Ознакомленію дѣтей съ системой счисленія должно быть предпослано выясненіе понятій о числѣ, единицѣ и раздѣленіи чиселъ на отвлеченныя и именованныя, цѣлыя и дробныя. Въ предшествующемъ курсѣ всѣ эти понятія затрогивались неоднократно, но въ

разное время; здѣсь надо припомнить ихъ и дать имъ по возможности полное и точное выраженіе. Не слѣдуетъ гнаться за тѣмъ, чтобы дѣти усвоили ихъ въ формѣ строго логическихъ опредѣленій, обычныхъ въ большинствѣ существующихъ учебниковъ. Форма эта, чуждая дѣтской рѣчи, можетъ быть усвоена дѣтьми только механически. На это еще можно было бы пойти, если бы строго логическая форма опредѣленій соотвѣтствовала бы вполнѣ и ихъ содержанію. Къ сожалѣнію, этого никакъ нельзя сказать про всѣ опредѣленія, даваемыя въ учебникахъ. Въ очень немногихъ изъ нихъ мы найдемъ строгое отдѣленіе понятій первоначальныхъ, не подлежащихъ опредѣленію, отъ понятій, которыя могутъ быть сведены къ первоначальнымъ и потому могутъ подлежать опредѣленію. Во всякомъ случаѣ слѣдуетъ помнить, что сила не въ опредѣленіяхъ, а въ дѣйствительномъ усвоеніи дѣтьми перечисленныхъ понятій.

Работа можетъ считаться законченной, если дѣти въ состояніи будутъ отвѣтить достаточно точно и полно на вопросы:

Какъ происходятъ числа?—Что можно считать?—Что наз. единицей при счетѣ?—Изъ чего состоитъ каждое число?—Когда число наз. именованнымъ?—Когда отвлеченнымъ?—Изъ чего состоитъ цѣлое число?—Изъ чего дробное?—Изъ чего смѣшанное число?

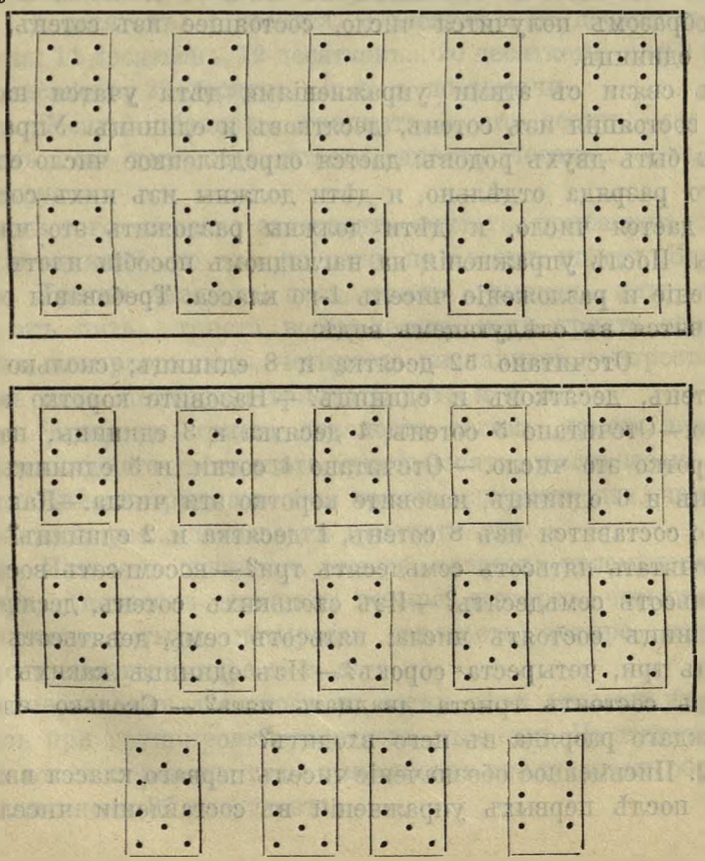
181. Десятичная система счисленія. Ознакомленіе съ системой счисленія должно быть начато съ указанія возможности производить счетъ предметовъ не только простыми единицами (по одному предмету), но и сложными единицами (парами, пятками, десятками, дюжинами). Слѣдуетъ указать, что подобнымъ же образомъ поступаютъ при измѣреніи, беря для измѣренія разстояній мѣрную цѣпь, представляющую собою десять саженъ, для взвѣшиванія—гири въ нѣсколько фунтовъ или пудовъ.

Съ системой счисленія должно знакомить дѣтей постепенно, при чемъ естественными подраздѣленіями представляются классы десятичной системы. Въ дѣленіи на классы удобнѣе держаться французской системы, по которой въ каждомъ классѣ заключается по три разряда: она проще нѣмецкой, гдѣ въ каждомъ классѣ заключается по шести разрядовъ. Различіе въ названіяхъ разрядовъ въ обѣихъ системахъ начинается со тысячи милліоновъ, которая у французовъ составляетъ единицу четвертаго класса (биллiонъ или милліардъ), а у нѣмцевъ — единицу 4-го разряда во 2-мъ классѣ. Такимъ образомъ, французы считаютъ милліонами только до тысячи милліоновъ, а нѣмцы до милліона милліоновъ; у французовъ слово биллiонъ означаетъ тысячу милліоновъ, а у нѣмцевъ—милліонъ милліоновъ.

Начиная знакомство съ первымъ классомъ десятичной системы, надо имѣть въ виду, что изъ предыдущаго курса дѣти вынесли

понятіе о единицахъ первыхъ двухъ разрядовъ этого класса и что остается познакомить ихъ только съ единицей третьяго разряда—сотней, какъ съ новой счетной единицей. Знакомство облегчается тѣмъ обстоятельствомъ, что съ сотней дѣти встрѣчались въ предыдущемъ курсѣ и производили надъ ней различныя дѣйствія; имъ слѣдовательно надо указать только на возможность группировать десятки въ сотни и выражать числа при помощи трехъ счетныхъ единицъ: единицъ, десятковъ и сотенъ. Лучшимъ средствомъ здѣсь могутъ служить конкретные примѣры. Такъ преподаватель предлагаетъ дѣтямъ разсказать, какъ они станутъ считать яблоки, собранныя въ большую корзину. По всей вѣроятности, на основаніи предшествующаго курса, дѣти скажутъ, что яблоки надо считать десятками. Тогда слѣдуетъ спросить, до какихъ поръ надо отсчитывать по десятку. Въ отвѣтъ дѣти должны указать, что отсчитывать по десятку надо до тѣхъ поръ, пока не останется меньше 10-ти яблокъ. Если преподаватель выбралъ для перваго примѣра число 236, то условливается съ дѣтьми, что такимъ образомъ будетъ отсчитано 23 десятка и 6 отдѣльныхъ яблокъ.

Въ случаѣ надобности можно прибѣгнуть къ слѣдующему рисунку:



Здѣсь точки для наглядности могутъ быть замѣнены кружками, а рамки, въ которыя заключены сотни, должны быть сдѣланы, когда зайдетъ рѣчь о группировкѣ десятковъ въ сотни. Такъ какъ дѣти знакомы изъ предыдущаго курса съ сотней, то имъ самимъ должна прійти мысль объ этой группировкѣ и такимъ образомъ они найдутъ, что въ корзинѣ было 2 сотни, 3 десятка и 6 яблокъ, и не затруднятся назвать это число коротко: двѣсти тридцать шесть. Если сами дѣти не догадаются сгруппировать десятки въ сотни, то преподаватель долженъ указать эту группировку и заставить выполнить ее подъ своимъ руководствомъ. Если въ училищѣ имѣется ариѳметическій ящикъ или наборъ спичекъ, то можно нѣсколько подобныхъ упражненій сдѣлать при помощи этихъ наглядныхъ пособій, хотя въ этомъ едва ли встрѣтится надобность. Въ нашихъ задачникахъ помѣщенъ рисунокъ, подобный приведенному здѣсь.

Результатъ подобныхъ упражненій долженъ состоять въ выводѣ, что для счета предметовъ, когда ихъ больше ста, надо прежде всего единицы сгруппировать (соединить) въ десятки, десятки сгруппировать въ сотни и сосчитать, сколько получилось сотенъ, сколько осталось десятковъ, не составившихъ полной сотни, и сколько осталось единицъ, не составившихъ полнаго десятка; и что такимъ образомъ получится число, состоящее изъ сотенъ, десятковъ и единицъ.

Въ связи съ этими упражненіями дѣти учатся называть числа, состоящія изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. Упражненія должны быть двухъ родовъ: дается опредѣленное число единицъ каждаго разряда отдѣльно, и дѣти должны изъ нихъ составить число; дается число, и дѣти должны разложить это число на разряды. Послѣ упражненій на наглядномъ пособіи идетъ устное составленіе и разложеніе чиселъ 1-го класса. Требованія отъ дѣтей ставятся въ слѣдующемъ видѣ:

Отсчитано 52 десятка и 8 единицъ; сколько здѣсь сотенъ, десятковъ и единицъ? — Назовите коротко это число.—Отсчитано 5 сотенъ, 4 десятка и 3 единицы, назовите коротко это число. — Отсчитано 4 сотни и 5 единицъ, 6 сотенъ и 6 единицъ, назовите коротко эти числа.—Какое число составится изъ 8 сотенъ, 1 десятка и 2 единицъ?—Какъ отсчитать пятьсотъ семьдесятъ три? — восемьсотъ восемь? — семьсотъ семьдесятъ? — Изъ сколькихъ сотенъ, десятковъ и единицъ состоятъ числа: пятьсотъ семь, девятьсотъ двадцать три, четыреста сорокъ? — Изъ единицъ какихъ разрядовъ состоитъ триста двадцать пять? — Сколько единицъ каждаго разряда въ него входитъ?

182. Письменное обозначеніе чиселъ перваго класса вводится тотчасъ послѣ первыхъ упражненій въ составленіи чиселъ изъ разрядовъ и обыкновенно не встрѣчаетъ затрудненій, такъ какъ требуетъ только распространенія на сотни тѣхъ условій, которыя сдѣланы были для обозначенія чиселъ, состоящихъ изъ десятковъ и единицъ. Въ бо́льшей части случаевъ дѣти сами приходятъ къ необходимости условиться (уговориться) для обозначенія сотенъ ставить цыфры на третьемъ мѣстѣ отъ правой руки, и свободно обозначаютъ числа, заключающія въ себѣ единицы всѣхъ трехъ разрядовъ; ошибки встрѣчаются только при обозначеніи чиселъ, не заключающихъ въ себѣ единицъ 1-го или 2-го разряда. Поэтому на обозначеніе такихъ чиселъ надо обратить особенное вниманіе. Кромѣ того, при упражненіяхъ полезно сопоставлять обозначеніе и чтеніе чиселъ, содержащихъ въ себѣ одинаковое число единицъ разныхъ разрядовъ; напр., полезно сопоставить числа: 32, 320 и 302; 506, 560 и 56.

183. Параллельно съ изложенными упражненіями должны итти упражненія въ прямомъ и обратномъ счетѣ сотнями, въ прямомъ и обратномъ счетѣ десятками и въ переводѣ десятковъ въ сотни и сотенъ въ десятки.

Первое упражненіе не требуетъ объясненій. Второе ведется въ слѣдующихъ двухъ формахъ:

1 десятокъ, 2 десятка, 3 десятка... 10 десятковъ, или сотня; 11 десятковъ, 12 десятковъ... 20 десятковъ, или 2 сотни; 21 десятокъ, 22 десятка... и т. д. до тысячи.

Десять, двадцать, тридцать,... сто десять, сто двадцать... сто девяносто, двѣсти, двѣсти десять... и т. д. до тысячи.

Кромѣ того, полезно заставлять считать, прибавляя или отнимая по единицѣ, по два, по пяти, по десяти, по сту. Напр.

Триста двадцать пять, триста тридцать пять, триста сорокъ пять... триста восемьдесятъ пять, триста девяносто пять, четыреста пять, четыреста пятнадцать, четыреста двадцать пять, четыреста тридцать пять и т. д.

Четыреста, триста девяносто восемь, триста девяносто шесть... триста двѣнадцать, триста десять, триста восемь и т. д.

Двѣсти тридцать два, триста тридцать два, четыреста тридцать два... девятьсотъ тридцать два.

Пятьсотъ девяносто четыре, пятьсотъ восемьдесятъ четыре,... пятьсотъ двадцать четыре, пятьсотъ четырнадцать, пятьсотъ четыре, четыреста девяносто четыре, четыреста восемьдесятъ четыре и т. д.

Съ переводомъ десятковъ въ сотни дѣти отчасти уже ознакомились при группировкѣ десятковъ въ сотни. На отвлеченныхъ числахъ этотъ переводъ дѣти выполняютъ слѣдующимъ образомъ, напр., для числа 37 десятковъ:

Чтобы составить одну сотню, надо соединить вмѣстѣ десять десятковъ, тогда отдѣльныхъ десятковъ останется 27; для составленія второй сотни надо соединить еще 10 десятковъ, останется 17 отдѣльныхъ десятковъ; для составленія третьей сотни надо соединить опять 10 десятковъ, тогда останется 7 отдѣльныхъ десятковъ, изъ которыхъ уже нельзя составить сотни; слѣд. изъ 37 десятковъ составится 3 сотни и останется еще 7 десятковъ.

Впослѣдствіи переводъ дѣлается короче:

Для составленія каждой сотни надо взять десять десятковъ; слѣд. изъ 37 десятковъ выйдетъ столько сотенъ, сколько разъ десять содержится въ 37, т.-е. составится 3 сотни и останется еще 7 десятковъ.

Переводъ сотенъ въ десятки дается дѣтямъ сравнительно легче и ведется ими слѣдующимъ образомъ:

Въ одной сотнѣ 10 десятковъ, а въ 6 сотняхъ 6 разъ по 10-ти десятковъ, т.-е. 60 десятковъ.

Дѣти должны умѣть опредѣлять, сколько полныхъ десятковъ содержится въ каждомъ числѣ перваго класса; напр. они должны умѣть найти, что въ 645 содержится 64 полныхъ десятка и остается еще 5 единицъ. Вопросъ рѣшается слѣдующимъ путемъ:

Въ каждой изъ 6-ти сотенъ числа содержится по 10 десятковъ, слѣд. въ 6 сотняхъ содержится $10.6 = 60$ десятковъ, да въ числѣ содержатся еще 4 отдѣльныхъ десятка, слѣд. всего въ немъ заключается $60 + 4 = 64$ десятка.

184. По мѣрѣ освоенія съ счисленіемъ въ предѣлѣ перваго класса, должны итти упражненія въ примѣненіи этихъ знаній къ производству дѣйствій надъ числами перваго класса. Въ составленномъ нами задачникѣ на цѣлыя числа любой величины находятся упражненія 4 родовъ: вопросы и упражненія, исчерпывающіе теоретическое содержаніе каждаго отдѣла, вычисленія, загадки и задачи. Хотя мы и старались расположить всѣ эти упражненія въ томъ порядкѣ, въ какомъ ихъ послѣдовательно можно предлагать въ классѣ, но очень часто въ видахъ экономіи мѣста приходилось отступать отъ этого порядка и соединять вмѣстѣ упражненія одного рода; поэтому просимъ не считать порядокъ расположенія упражненій въ задачникѣ вполнѣ соотвѣтствующимъ тому порядку, въ которомъ они должны быть даны на урокѣ. Первыя задачи назначены для повторенія и усвоенія кратныхъ отношеній сотни къ числамъ, меньшимъ ста. Такое предварительное ознакомленіе съ сотней значительно облегчаетъ введеніе ея, какъ новой единицы счета, и можетъ послужить, какъ увидимъ ниже, значительнымъ подспорьемъ въ производствѣ дѣйствій.

Послѣ рѣшенія первыхъ задачъ и ознакомленія дѣтей съ сотней, какъ единицей счета, могутъ быть даны вычисленія, которыя назначены для освоенія дѣтей со счетомъ сотнями. Для упражненій въ письменномъ составленіи чиселъ изъ разрядовъ и въ разложеніи ихъ на разряды могутъ служить спеціально составленныя упражненія слѣдующаго характера:

$$200 + 5 =,\ 850 - 50 =,\ 268 - 60 =,$$
$$400 + 50 + 6 =,\ 379 = ? + ? + ?,\ 3 + 900 + 6 =$$

Остальныя вычисленія, задачи и загадки назначены для усвоенія пріемовъ вычисленія, которые по преимуществу должны состоять въ примѣненіи результатовъ основныхъ таблицъ къ числамъ перваго класса. Полезно допускать и отступленія отъ этого общаго пріема, если они приводятъ къ болѣе скорому опредѣленію результата. Такъ, чтобы изъ 460 вычесть 90, можно девяносто вычесть изъ одной сотни этого числа и соединить оставшіяся отъ этого вычитанія 10 единицъ съ 360-ю; чтобы 25 умножить на 8, можно 25 умножить на 4, если дѣти запомнили это произведеніе, и затѣмъ полученное произведеніе умножить на 2; чтобы 300 раздѣлить на 5, можно каждую сотню отдѣльно раздѣлить на 5, зная, что пятая часть сотни равна 20, и затѣмъ сложить эти частныя. Особенное затрудненіе встрѣчаетъ дѣленіе на числа, состоящія изъ десятковъ. Приведеніе такихъ случаевъ дѣленія непосредственно къ таблицѣ умноженія невполнѣ разъясняетъ дѣтямъ, къ какому разряду принадлежитъ получаемое частное. Такъ, приведя дѣленіе 270 на 90 къ дѣленію 27 десятковъ на 9 десятковъ и примѣнивъ къ этому дѣленію результатъ $27 : 9 = 3$, дѣти часто неясно представляютъ себѣ, къ какому разряду принадлежатъ найденныя 3 единицы. Чтобы разъяснить это, можно прибѣгнуть къ слѣдующему способу: раздѣливъ одну сотню на 90, получимъ въ частномъ 1 и останется еще дѣлить 10; отъ дѣленія второй сотни получится еще 1 и останется дѣлить тоже 10, а всего отъ 2 сотенъ останется дѣлить 20, которыя съ 70-ю составятъ 90 и дадутъ въ частномъ еще 1; слѣд. всего въ частномъ получится 3 единицы. Пріемъ этотъ можетъ видоизмѣняться; напр. при дѣленіи 420 на 70 можно легко сообразить, что частное не должно быть менѣе 4 (каждая сотня отъ дѣленія на 70 даетъ 1-цу); взявъ же въ частное 4, мы раздѣлимъ только $70 \times 4 = 280$ и останется еще дѣлить 140, которыя дадутъ въ частномъ еще 2; слѣд. всего получимъ въ частномъ 6.

185. Послѣ ознакомленія съ счисленіемъ до тысячи, дальнѣйшее знакомство съ нимъ не представляетъ затрудненій. Дѣти хорошо понимаютъ возможность вести счетъ дальше тысячи и необходимость группировать для этого считаемые предметы въ десятки, десятки въ сотни, сотни въ тысячи и пересчитывать сколь-

ко единицъ каждаго разряда образовалось. Останется указать имъ, что тысячами считаютъ такъ же, какъ простыми единицами, т.-е. тысячи группируются въ десятки тысячъ и сотни тысячъ. Простыя единицы, десятки и сотни составляютъ первый классъ въ системѣ счисленія—классъ простыхъ единицъ; тысячи, десятки тысячъ и сотни тысячъ составляютъ второй классъ—классъ тысячъ. Для освоенія съ группировкой тысячъ въ десятки тысячъ и сотни тысячъ лучшимъ средствомъ служитъ прямой и обратный счетъ тысячами, который ведется до тысячи тысячъ (милліона). Счетъ тысячами можно довести напр. до 30 тысячъ, затѣмъ далѣе продолжать его десятками тысячъ до ста тысячъ, далѣе вести сотнями тысячъ до милліона, при чемъ въ промежуткахъ полезно опять переходить къ счету десятками тысячъ и тысячами; напр. доведя счетъ сотнями тысячъ до 500 тысячъ, можно заставить продолжать его десятками тысячъ до 580 тысячъ и далѣе тысячами до 600 тысячъ, откуда снова начать считать сотнями тысячъ. Подобнымъ же образомъ обратный счетъ отъ милліона можно начать тысячами и довести до 980, далѣе продолжать десятками тысячъ до 900 и затѣмъ считать сотнями тысячъ до 100 тысячъ и т. п. Кромѣ того, полезно сдѣлать нѣсколько упражненій въ прямомъ и обратномъ счетѣ, заставляя прибавлять и отнимать по нѣскольку единицъ и по нѣскольку десятковъ; напр. заставить прибавлять по 5 единицъ къ 2580, отнимать отъ 5795 по 2 десятка. Наконецъ, взявши какое-либо число, напр. 3784, можно заставить прибавлять къ нему по 1000 до 10784, къ полученному числу прибавлять по 100 до 11984, къ этому числу по 1 до 12000 и т. п. За упражненіями въ счетѣ должны итти упражненія въ переводѣ тысячъ въ сотни и десятки и обратно: въ переводѣ сотенъ и десятковъ въ тысячи. Переводъ десятковъ въ тысячи и тысячъ въ десятки можно основывать на томъ, что въ тысячѣ сто десятковъ.

186. Письменное обозначеніе чиселъ второго класса не встрѣчаетъ никакого затрудненія. Изъ того условія, что разрядамъ 1-го класса присвоены первыя три мѣста, дѣти легко придутъ къ условію—присвоить разрядамъ 2-го класса слѣдующія три мѣста. Для облегченія чтенія и обозначенія чиселъ полезно цыфры одного класса отдѣлять отъ цыфръ другого бо́льшимъ промежуткомъ, чѣмъ цыфры различныхъ разрядовъ одного и того же класса. Въ настоящее время такое размѣщеніе цыфръ принято уже во многихъ руководствахъ и задачникахъ. Чтобы дѣти возможно лучше вникли въ зависимость значенія цыфры отъ занимаемаго ею мѣста въ числѣ, могутъ служить упражненія въ опредѣленіи измѣненій въ значеніи цыфръ при приписываніи къ числу

нулей и при откидываніи нулей отъ числа, оканчивающагося нулями.

187. Какъ только дѣти познакомятся съ письменнымъ обозначеніемъ чиселъ 2-го класса, они примѣняютъ все усвоенное къ вычисленіямъ, задачамъ и къ загадкамъ, которыя носятъ такой же характеръ и расположены въ той же послѣдовательности, какъ и для чиселъ 1-го класса. Пріемы вычисленія сохраняютъ указанный выше характеръ. Въ вычисленіяхъ и задачахъ встрѣчаются такіе случаи дѣйствій, которые на первый взглядъ могутъ показаться трудными для устнаго выполненія, но которые легко выполняются, если только дѣти хорошо освоятся съ частями тысячи и съ десятичнымъ составомъ чиселъ. Напр., умноженіе 125 на 8 не должно встрѣтить затрудненія, если дѣти знаютъ 8-ю часть тысячи, вычитаніе единицы изъ 1000, изъ 10000 и т. п. не должно встрѣтить затрудненія, если дѣти достаточно освоились съ обратнымъ счетомъ.

188. Ознакомленіе съ слѣдующими классами десятичной системы занимаетъ сравнительно мало времени, если предыдущее усвоено хорошо. Работа располагается и направляется въ общихъ чертахъ такъ же, какъ и при изученіи 2-го класса. Въ нашемъ задачникѣ упражненія не идутъ далѣе чиселъ 4-го класса; на практикѣ возможно вполнѣ ограничиться числами 3-го класса, указавъ только, что составленіе новыхъ классовъ можно продолжить и далѣе. Многія задачи на эти числа составлены такъ чтобы показать, какимъ путемъ единица какого-либо разряда или класса образуется изъ предшествующихъ.

Ознакомленіе съ высшими классами десятичной системы, безъ ущерба дѣлу, можетъ быть отложено до того времени, когда дѣти ознакомятся болѣе основательно съ 4-мя дѣйствіями, къ которымъ и можно перейти послѣ знакомства съ первыми двумя классами чиселъ.

Слѣдуетъ ознакомить дѣтей, кромѣ того, съ славянской и римской системами счисленія, по крайней мѣрѣ въ общихъ чертахъ.

189. Когда дѣти изучаютъ систему счисленія, ихъ слѣдуетъ ознакомить съ русскими деньгами и съ русскими счетами. Раздробленіе рублей въ гривенники и копейки, превращеніе копеекъ и гривенниковъ въ рубли, откладываніе чиселъ на счетахъ, чтеніе и записываніе отложенныхъ чиселъ внесутъ значительное разнообразіе въ упражненія и помогутъ выяснить роль нуля при письменномъ обозначеніи чиселъ. Обращеніе десятковъ, сотенъ, тысячъ и десятковъ тысячъ рублей въ копейки иллюстрируютъ для дѣтей значеніе такихъ чиселъ, какъ 1000, 10000, 100000,

1000000. Встрѣчающіяся при этомъ умноженіе и дѣленіе на 10 и степени 10-ти приводятся къ простому приложенію соотношеній между единицами различныхъ разрядовъ, усвоеніе которыхъ составляетъ необходимое условіе пониманія системы счисленія; они производятся дѣтьми такъ же свободно и легко, какъ умноженіе и дѣленіе на однозначныя числа. Напр., умноженіе 450 на 100 дѣти исполняютъ слѣдующимъ образомъ:

Отъ умноженія одной сотни на 100 получается 100 сотенъ, или 10 тысячъ, а отъ умноженія 4 сотенъ получится 40000; отъ умноженія одного десятка на 100 получается 100 десятковъ, или тысяча, а отъ умноженія 5 десятковъ получится 5 тысячъ; слѣд. всего получится 45000.

Дѣленіе 7800 на 10 совершается слѣдующимъ образомъ:

Отъ дѣленія тысячи на 10 получается 100, отъ дѣленія 7 тысячъ, получится 700; отъ дѣленія одной сотни получится 10, отъ дѣленія 8 сотенъ получится 80; слѣд. всего получится 780.

Изъ другихъ русскихъ мѣръ при изученіи счисленія остается познакомить дѣтей съ верстой и годомъ, такъ какъ со всѣми остальными русскими мѣрами дѣти уже знакомы изъ предшествующаго курса. Здѣсь слѣдуетъ указать какое-либо разстояніе, извѣстное всѣмъ дѣтямъ и приблизительно равное верстѣ, сообщить, что въ часъ люди проходятъ около 4 верстъ и что, слѣд., одну версту приблизительно въ четверть часа.

При ознакомленіи съ счисленіемъ, умѣстно впервые познакомить дѣтей съ нѣкоторыми метрическими мѣрами. Какъ и при ознакомленіи съ русскими мѣрами, необходимо всѣ метрическія мѣры показать дѣтямъ и произвести нѣсколько измѣреній при ихъ помощи. На обложкѣ задачниковъ, нами составленныхъ, помѣщены рисунки нѣкоторыхъ метрическихъ и русскихъ мѣръ, чтобы наглядно показать ихъ сравнительную величину. За неимѣніемъ въ школѣ образцовъ метрическимъ мѣръ, преподаватель можетъ воспользоваться этими рисунками.

Раздробленіе и превращеніе метрическихъ мѣръ представляютъ прекрасное упражненіе для перевода единицъ одного разряда въ другой.

190. Основныя понятія о дѣйствіяхъ. Послѣ изученія системы счисленія надлежитъ перейти къ болѣе подробному, чѣмъ прежде, и болѣе глубокому изученію дѣйствій. Предварительно слѣдуетъ припомнить съ дѣтьми все усвоенное ими о дѣйствіяхъ въ предыдущемъ курсѣ и формулировать болѣе точно, чѣмъ это могло быть сдѣлано прежде. Относительно каждаго дѣйствія должно быть выработано его опредѣленіе и выяснено основное

свойство его результата, такъ какъ одного опредѣленія не достаточно для полной характеристики дѣйствія. За основное понятіе при опредѣленіи дѣйствій можетъ быть принято понятіе о счетѣ. Всѣ опредѣленія дѣйствій, построенныя на этомъ основаніи, читатели найдутъ въ нашемъ „Руководствѣ ариѳметики“ (гл. II). Мы здѣсь избѣгаемъ обычной формы опредѣленія дѣйствія (такое-то дѣйствіе есть дѣйствіе, въ которомъ и т. д.), потому что она безъ нужды только затрудняетъ дѣтей. При разъясненіи дѣйствій обращается вниманіе дѣтей на способы составленія таблицъ сложенія и умноженія однозначныхъ чиселъ и разъясняется, какъ пользоваться ими при всѣхъ четырехъ дѣйствіяхъ. Кромѣ того, надо формулировать въ общемъ видѣ основные вопросы, которые рѣшаются каждымъ изъ 4-хъ дѣйствій. Эти вопросы съ соотвѣтствующими примѣрами читатели найдутъ выше (стр. 36—40)).

Въ результатѣ этого отдѣла курса дѣти должны вполнѣ хорошо отвѣчать на вопросы:

Что значитъ сложить? — Вычесть? — Умножить? — Раздѣлить? — Какъ наз. числа въ каждомъ дѣйствіи? — Какъ найти уменьшаемое по вычитаемому и разности?—Какъ найти дѣлимое по дѣлителю и частному? — Какъ найти дѣлимое въ случаѣ дѣленія съ остаткомъ?—Какія изъ чиселъ въ умноженіи могутъ быть именованными? — Какія изъ чиселъ въ дѣленіи могутъ быть именованными? — Какъ составляются таблицы сложенія и умноженія? — Какія суммы и разности можно опредѣлить по таблицѣ сложенія и какъ надо поступать при ихъ опредѣленіи?— Какія произведенія и частныя можно опредѣлить по таблицѣ умноженія и какъ поступать при ихъ опредѣленіи? — Какія простыя задачи рѣшаются сложеніемъ? — Какія вычитаніемъ? — Какія умноженіемъ? — Какія дѣленіемъ?—Какая разница въ увеличеніи числа сложеніемъ и умноженіемъ? — Какая разница въ уменьшеніи числа вычитаніемъ и дѣленіемъ?—При помощи какихъ дѣйствій можно сравнить два числа?—Что мы узнаемъ, сравнивая числа при помощи вычитанія? — Что узнаемъ, сравнивая числа при помощи дѣленія? — Почему сумма и произведеніе не измѣняются отъ перестановки данныхъ чиселъ?—Почему для полученія уменьшаемаго надо вычитаемое сложить съ разностью?—Почему для полученія дѣлимаго надо дѣлителя умножить на частное?—Какое частное получается при отвлеченномъ дѣлителѣ?—Что оно показываетъ? — Какое частное получается при именованномъ дѣлителѣ?— Что оно показываетъ?

Кромѣ того, дѣти должны умѣть объяснить, какимъ образомъ можно, пользуясь таблицами, сложить 800 и 600, 9000 и 5000, вычесть 800 изъ 1500, 7000 изъ 12 000, умножить 400 на 9, 7000 на 5, 4800 раздѣлить на 6, 720 на 8, какъ число 5 увеличить 7-ю единицами, въ 7 разъ, какъ 48 уменьшить 3-мя единицами, въ 3 раза и т. п.

191. Укажемъ подробнѣе, какъ достигнуть этихъ результатовъ для умноженія. Чтобы формулировать съ дѣтьми опредѣленіе умноженія, можно воспользоваться задачами, относящимися къ этому дѣйствію; напр. можно воспользоваться задачей:

110) Съ десятины получается 70 мѣръ подсолнечнаго сѣмени; сколько сѣмени получится съ 5 десятинъ?

Рѣшеніе задачи дѣти должны объяснить въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Съ первой десятины получается 70 мѣръ сѣмени, да со второй еще 70 мѣръ, да съ 3-й еще 70 мѣръ, да съ 4-й — 70 мѣръ, да съ 5-й тоже 70 мѣръ; слѣд. съ 5-ти десятинъ получится 5 разъ по 70 мѣръ.

Отсюда выводится, что задачу можно рѣшить сложеніемъ:

$$70+70+70+70+70$$

и что слѣд. умножить 70 на 5 значитъ 70 взять слагаемымъ 5 разъ. Примѣнивъ это опредѣленіе еще къ нѣсколькимъ отвлеченнымъ примѣрамъ и обративъ вниманіе дѣтей на то, что въ каждомъ примѣрѣ первое число бралось слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во второмъ, можно потребовать отъ дѣтей опредѣленія умноженія въ общемъ видѣ. Послѣ опредѣленія умноженія дѣти опредѣляютъ числа, входящія въ дѣйствіе, указывая значеніе каждаго изъ нихъ такимъ образомъ: множимое есть одно изъ равныхъ слагаемыхъ, произведеніе — сумма этихъ слагаемыхъ,а множитель указываетъ, сколько всѣхъ слагаемыхъ. Изъ этого значенія множителя слѣдуетъ, что онъ можетъ быть только отвлеченнымъ. На это непремѣнно надо обратить вниманіе дѣтей, заставивъ ихъ высказать, какія числа въ умноженіи могутъ быть именованными, какое всегда бываетъ отвлеченнымъ. Все это должно сопровождаться примѣрами.

Далѣе обращается вниманіе дѣтей на то, что сложенія равныхъ слагаемыхъ они не дѣлаютъ и что въ этомъ нѣтъ и надобности, такъ какъ они многія произведенія помнятъ; что всѣ произведенія, которыя необходимо помнить, заключаются въ таблицѣ умноженія однозначныхъ чиселъ, называемой Пиѳагоровой. Указавъ способъ составленія этой таблицы, преподаватель показываетъ, какъ пользоваться ею для опредѣленія произведеній однозначныхъ чиселъ и какъ примѣнять ее къ опредѣленію

произведеній единицъ какого угодно разряда на однозначное число.

Чтобы познакомить дѣтей съ непзмѣняемостью произведенія отъ перестановки множителей, можетъ служить задача:

111) Одна крестьянка продала 5 фунтовъ земляники по 20 коп. за фунтъ, другая 20 фунтовъ черники по 5 коп. за фунтъ; какая крестьянка выручила больше?

Послѣ рѣшенія задачи, для объясненія равенства полученныхъ произведеній 20×5 и 5×20, преподаватель указываетъ на возможность опредѣлить стоимость ягодъ второй крестьянки умноженіемъ 20 на 5. Вмѣсто того, чтобы всѣ 5 копеекъ сразу множить на 20, можно сперва одну копейку повторить 20 разъ, получится 20 коп.; затѣмъ вторую копейку повторить 20 разъ, получится 20 коп.; отъ повторенія 3-й, 4-й, 5-й копеекъ также получится по 20 коп., и слѣд. всего получится 5 разъ по 20 коп., т.-е. 20 надо будетъ умножить на 5. Такой же пріемъ прилагается къ умноженію 6 на 40 при рѣшеніи задачи:

112) Помѣщикъ купилъ 6 коровъ, по 40 руб. каждую, и 40 барановъ по 6 руб. каждаго. Сколько денегъ онъ истратилъ?

Затѣмъ это разъясненіе примѣняется къ отвлеченнымъ примѣрамъ, которые выбираются такъ, чтобы перестановка множителей упрощала вычисленіе, напр. 7×12, 4×700, 5×140. Объясненіе, напр. для умноженія 4 на 700, дѣлается въ слѣдующей формѣ:

Отъ умноженія каждой единицы множимаго получается 700; слѣд. отъ умноженія всѣхъ 4-хъ единицъ получится 4 раза по 700.

Послѣ этого формулируется положеніе о неизмѣняемости произведенія въ слѣдующихъ словахъ: если множимое сдѣлаемъ множителемъ, а множителя — множимымъ, то произведеніе не измѣнится. Указавъ, что вслѣдствіе этого свойства оба данныя числа въ умноженіи назыв. безразлично множителями или производителями, преподаватель замѣняетъ эту формулировку болѣе короткой: произведеніе не мѣняется отъ перестановки множителей. Выведенное правило прилагается въ вычисленіяхъ и задачахъ къ случаямъ умноженія однозначнаго числа на числа высшихъ разрядовъ.

Сопоставляя сложеніе и умноженіе однихъ и тѣхъ же чиселъ, легко довести дѣтей до уясненія различія въ увеличеніи числа помощію прибавленія къ нему нѣсколькихъ единицъ и помощію умноженія его на какое-либо число. Изъ анализа рѣшаемыхъ при этомъ задачъ уже не трудно будетъ вывести, какіе вопросы рѣшаются умноженіемъ.

192. Съ каждымъ изъ 4-хъ дѣйствій работа ведется въ томъ же порядкѣ. Изъ задачъ, относящихся къ разбираемому дѣйствію,

выводится его опредѣленіе, при чемъ дѣти вспоминаютъ названія чиселъ, входящихъ въ дѣйствіе, и указываютъ ихъ значеніе; на задачахъ же они знакомятся съ основнымъ свойствомъ этихъ чиселъ, а затѣмъ при помощи ряда отвлеченныхъ примѣровъ формулируютъ это свойство и прилагаютъ его къ опредѣленію результатовъ дѣйствій при помощи основныхъ таблицъ; затѣмъ изъ анализа задачъ выводятся вопросы, рѣшаемые разсматриваемымъ дѣйствіемъ. Каждое новое дѣйствіе полезно сравнить съ предыдущими. Это не только помогаетъ дѣтямъ лучше понять и усвоить новое дѣйствіе, но и представляетъ лучшее средство для повторенія пройденнаго. Такъ вычитаніе надо сопоставить съ сложеніемъ (въ сложеніи ищемъ цѣлое, въ вычитаніи часть цѣлаго; помощію сложенія число увеличивается нѣсколькими единицами, помощію вычитанія число уменьшается нѣсколькими единицами); умноженіе надо сопоставить съ сложеніемъ (въ сложеніи слагаемыя могутъ быть не равны между собою, въ умноженіи они всѣ равны между собою; сложеніемъ опредѣляется цѣлое, когда извѣстны всѣ его части, умноженіемъ опредѣляется цѣлое, когда извѣстна одна изъ равныхъ его частей и число этихъ частей; помощію сложенія число увеличивается на нѣсколько единицъ, умноженіемъ—въ нѣсколько разъ); дѣленіе надо сопоставить съ умноженіемъ и вычитаніемъ (умноженіемъ опредѣляется цѣлое по одной изъ его равныхъ частей, дѣленіемъ одна изъ равныхъ частей цѣлаго; умноженіемъ число увеличивается въ нѣсколько разъ, дѣленіемъ уменьшается въ нѣсколько разъ; вычитаніемъ опредѣляется одна часть цѣлаго, когда извѣстны все цѣлое и другая его часть, дѣленіемъ опредѣляется одна изъ равныхъ частей цѣлаго; вычитаніемъ число уменьшается на нѣсколько единицъ, дѣленіемъ уменьшается въ нѣсколько разъ вычитаніемъ опредѣляется, на сколько единицъ одно число превышаетъ другое, дѣленіемъ—во сколько разъ одно число больше другого).

193. Остановимся еще нѣсколько на дѣленіи. При опредѣленіи дѣленія, каждое значеніе дѣйствія разсматривается отдѣльно, при чемъ первымъ берется дѣленіе на части. Изъ задачъ выводится непосредственно опредѣленіе этого значенія дѣленія и здѣсь же указывается, какимъ образомъ можно найти частное послѣдовательнымъ вычитаніемъ дѣлителя изъ дѣлимаго. Припомнивъ затѣмъ названія чиселъ въ дѣленіи и указавъ значеніе каждаго числа, слѣдуетъ перейти къ выводу основного соотношенія между числами въ дѣленіи. Для этой цѣли можетъ служить задача:

113) Когда хозяйка разложила купленную ею мѣру яблокъ въ 4 корзины поровну, то въ каждой оказалось по 40 штукъ. Сколько яблокъ было въ мѣрѣ?

Послѣ рѣшенія задачи, разъясняется дѣтямъ, что искомое число яблокъ было дѣлимымъ, 4 было при этомъ дѣлителемъ и 40 частнымъ, что слѣд., рѣшая эту задачу, мы, зная дѣлителя и частное, опредѣлили дѣлимое. Затѣмъ даются отвлеченные примѣры:

114) Дѣлитель 6, частное 50; дѣлитель 8, частное 30; дѣлитель 9, частное 20; найти дѣлимыя.

Рѣшеніе ведется въ слѣдующей формѣ:

Если дѣлитель 6, а частное 50, то дѣлимое было раздѣлено на 6 частей и въ каждой части было по 50; слѣд. дѣлимое заключало въ себѣ 50 единицъ первой части, 50 единицъ второй части, 50 единицъ 3-й части, 50 единицъ 4-й части, 50 единицъ 5-й части и 50 единицъ 6-й части; оно всего заключало въ себѣ 6 разъ по 50, дѣлимое было $50 \times 6 = 300$.

Послѣ этихъ примѣровъ, дѣти легко отвѣтятъ на вопросы, какъ найти дѣлимое, зная дѣлителя и частное, и почему для этого надо частное умножить на дѣлителя.

Совершенно такимъ же путемъ разсматривается и второе значеніе дѣленія—дѣленіе по содержанію. Послѣ этого, дѣленіе на части и дѣленіе по содержанію сравниваются между собою, при чемъ указывается, что частное въ обоихъ случаяхъ можно найти, отнимая послѣдовательно дѣлителя отъ дѣлимаго, и что въ обоихъ случаяхъ дѣлимое представляетъ произведеніе дѣлителя и частнаго. Отсюда выводится, что дѣйствіе въ обоихъ случаяхъ совершается одно и то же. Еще бо́льшимъ подтвержденіемъ этого вывода долженъ служить пріемъ опредѣленія частнаго по таблицѣ умноженія, который разъясняется на основаніи разсмотрѣннаго свойства дѣлимаго. Изъ анализа задачъ и изъ сопоставленія дѣленія съ умноженіемъ и вычитаніемъ формулируются въ общемъ видѣ вопросы, которые рѣшаются дѣленіемъ.

194. Дѣленіе съ остаткомъ дается прежде всего на задачахъ, въ которыхъ требуется превратить мѣры низшаго наименованія въ мѣры высшаго, а затѣмъ и на такихъ задачахъ, въ которыхъ вопросъ или непосредственно относится къ остатку отъ дѣленія, или гдѣ этотъ остатокъ нуженъ для опредѣленія искомаго въ задачѣ. На задачахъ же дѣти знакомятся съ зависимостью между числами въ дѣленіи съ остаткомъ. Отвлеченно эта зависимость разъясняется въ слѣдующемъ видѣ:

Если при дѣленіи на 8 получено 12 въ частномъ и 4 въ остаткѣ, то значитъ всего было раздѣлено $12 \times 8 = 96$, да кромѣ того осталось отъ дѣленія еще 4 единицы, слѣд. дѣлимое заключало въ себѣ и раздѣленныя 96 единицъ и оставшіяся 4 единицы, т.-е. дѣлимое равнялось $96 + 4 = 100$.

Иначе: 8 содержится 12 разъ въ числѣ $8 \times 12 = 96$, да еще осталось отъ дѣлимаго 4, слѣд. въ дѣлимомъ было $96 + 4 = 100$.

Послѣ формулированія соотношенія между числами въ дѣленіи, дѣти должны умѣть сказать, что, умножая дѣлителя на частное, они опредѣляютъ, сколько единицъ дѣйствительно раздѣлено, а прибавляя къ произведенію остатокъ, находятъ все дѣлимое. Необходимо указать, что остатокъ всегда меньше дѣлителя.

195. Скобки. При обозначеніи ряда дѣйствій надъ числами, кромѣ знаковъ дѣйствій, вводится еще особый знакъ—скобки. Выше (стр. 76 и 77) изложены правила постановки скобокъ.

Въ преподаваніи съ употребленіемъ скобокъ слѣдуетъ знакомить дѣтей мало-по-малу на хорошо подобранныхъ примѣрахъ.

Въ сложеніи скобки указываютъ только порядокъ дѣйствій; опущеніе ихъ не измѣняетъ результата. Съ введеніемъ вычитанія наступаетъ полная необходимость въ скобкахъ, и она должна быть разъяснена дѣтямъ сравненіемъ обозначеній, которыя получаютъ разный смыслъ при введеніи скобокъ и безъ нихъ, какъ, напр., сравненіемъ двухъ обозначеній:

$$100-(50-45),\quad 100-50-45.$$

Дѣтей надо упражнять въ правильномъ чтеніи обозначеній и въ исполненіи назначаемыхъ преподавателемъ обозначаній. Для первой цѣли могутъ служить всѣ вычисленія, помѣщенныя въ соотвѣтствующемъ отдѣлѣ задачника, а для второй—диктовка этихъ вычисленій учителемъ, и рѣшеніе упражненій, озаглавленныхъ: „Обозначить и произвести дѣйствія“. О способѣ чтенія обозначеній совокупности дѣйствій мы уже говорили въ главѣ о вычисленіяхъ.

196. Кромѣ обычныхъ упражненій, въ нашемъ задачникѣ помѣщены упражненія въ составленіи задачъ на назначенныя дѣйствія.

Упражненія эти представляютъ весьма удобное средство для полнаго усвоенія дѣтьми понятій объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ. Послѣ рѣшенія массы задачъ во время изученія первой сотни чиселъ, послѣ только что сдѣланнаго формулированія вопросовъ каждаго дѣйствія, совершенно возможно потребовать отъ дѣтей составленія задачъ на эти дѣйствія. Правильное выполненіе этой работы лучше всего можетъ свидѣтельствовать объ усвоеніи дѣтьми пройденнаго. Отъ работы дѣтей прежде всего должно требовать соотвѣтствія задачи назначеннымъ дѣйствіямъ; на второмъ планѣ должно стоять требованіе сообразности составленной задачи съ дѣйствительностью (жизнью); наконецъ полезно отличать оригинальность составленныхъ задачъ. Требованія относительно составленія задачъ должны быть постепенны: прежде всего дѣти должны научиться составлять правильно задачи на отдѣльныя

дѣйствія и это можетъ быть выполнено всѣми дѣтьми; затѣмъ можно требовать составленія задачъ на два дѣйствія и на 3 дѣйствія; дальнѣйшее увеличеніе числа дѣйствій будетъ уже затрудненіемъ, не оправдываемымъ цѣлью этой работы. Составленіе задачъ есть по преимуществу работа письменная, такъ какъ она требуетъ времени и возможности спокойно обдумать предложенныя условія. Числа для задачъ могутъ даваться именованныя и отвлеченныя.

197. Соотношенія между дѣйствіями. Зависимость между числами въ каждомъ дѣйствіи. Характеристика дѣйствій будетъ неполна, если не будетъ сопровождаться выясненіемъ соотношеній между дѣйствіями и зависимости между числами въ каждомъ дѣйствіи. Послѣ ознакомленія съ сложеніемъ и вычитаніемъ, выясняется зависимость между этими дѣйствіями, а послѣ ознакомленія съ умноженіемъ и дѣленіемъ—зависимость между умноженіемъ и дѣленіемъ. Лучшимъ средствомъ для этого могутъ служить задачи.

Чтобы выяснить соотношеніе между сложеніемъ и вычитаніемъ можно начать, напр., съ задачи:

115) Отъ Петербурга до Москвы по желѣзной дорогѣ 609 верстъ, а отъ Москвы до Рязани 185 вер. Сколько верстъ отъ Петербурга до Рязани, если изъ Петераурга въ Рязань надо ѣхать черезъ Москву?

Послѣ рѣшенія ея, дѣтямъ предлагается составить задачу, въ которой спрашивалось бы о разстояніи между Петербургомъ и Москвою.

Послѣ составленія и рѣшенія этой задачи, составляется и рѣшается задача о разстояніи между Москвою и Рязанью. Такимъ образомъ составляются и рѣшаются три задачи на три дѣйствія:

$$609 + 185 = 794;\quad 794 - 185 = 609;\quad 794 - 609 = 185.$$

Сравнивая эти дѣйствія, дѣти находятъ, что въ первомъ они опредѣляли сумму, зная слагаемыя, а во второмъ и третьемъ опредѣляли одно изъ слагаемыхъ, зная сумму и другое слагаемое, и дѣлаютъ выводъ, что каждому сложенію соотвѣтствуютъ два вычитанія, при помощи которыхъ по суммѣ и одному изъ слагаемыхъ опредѣляется другое слагаемое. Выводъ этотъ примѣняется къ отвлеченнымъ примѣрамъ. Затѣмъ формулируется правило объ опредѣленіи одного слагаемаго по суммѣ и другому слагаемому и вычитаніе опредѣляется, какъ дѣйствіе обратное сложенію, при чемъ уменьшаемое есть данная сумма, вычитаемое—данное слагаемое, а разность—искаемое слагаемое. Чтобы всѣ эти выводы лучше усвоились, они повторяются на нѣсколькихъ задачахъ, при чемъ дѣти для каждой задачи на сложеніе составляютъ соотвѣтствующія задачи на вычитаніе.

Такимъ же путемъ выясняется дѣтямъ, что каждой задачѣ на вычитаніе соотвѣтствуютъ тоже двѣ задачи, изъ которыхъ въ первой ищется уменьшаемое, а во второй вычитаемое. Изъ рѣшенія задачъ дѣлаются выводы о дѣйствіяхъ, соотвѣтствующихъ вычитанію, и о томъ, какъ опредѣлить уменьшаемое и вычитаемое, если остальныя два числа въ вычитаніи извѣстны. Дѣти должны не только знать, какъ опредѣлить каждое изъ данныхъ чиселъ въ вычитаніи, но и умѣть объяснить, почему для опредѣленія уменьшаемаго надо сложить вычитаемое и разность, а для опредѣленія вычитаемаго—вычесть разность изъ уменьшаемаго. Объясненія могутъ быть даны приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Вычитаемое показываетъ, сколько единицъ было отнято отъ уменьшаемаго, а разность—сколько единицъ послѣ этого осталось; присчитавъ къ оставшимся единицамъ отнятыя, мы снова получимъ столько единицъ, сколько ихъ было въ уменьшаемомъ. Уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и разность—слагаемыя, а для опредѣленія одного слагаемаго надо изъ суммы вычесть другое слагаемое.

Послѣ этого разсматривается случай нѣсколькихъ слагаемыхъ и дѣти упражняются въ опредѣленіи данныхъ чиселъ въ сложеніи и вычитаніи на отвлеченныхъ примѣрахъ и прилагаютъ усвоенное къ рѣшенію загадокъ и задачъ.

Совершенно также сопоставляются умноженіе и дѣленіе.

Для упражненій могутъ служить загадки, рѣшеніе которыхъ должно быть основано на разъясненной зависимости между числами въ каждомъ дѣйствіи.

Загадки этого отдѣла значительно усложнены сравнительно съ прежними и требуютъ опредѣленія всѣхъ элементовъ каждаго дѣйствія.

Небольшая группа упражненій въ нашемъ задачникѣ назначена для разъясненія дѣтямъ понятія о возвышеніи въ степень и извлеченіи корня. Если преподаватель сочтетъ нужнымъ познакомить дѣтей съ этими дѣйствіями, то указанныя упражненія помогутъ ему иллюстрировать и освѣтить ихъ задачами. Замѣтимъ, что на этой ступени обученія возвышеніе въ степень можетъ выполняться только послѣдовательнымъ умноженіемъ основанія самого на себя, а дѣйствія обратныя — рядомъ испытаній, выполняемыхъ при помощи возвышенія въ степень. Для всѣхъ другихъ пріемовъ матеріала у дѣтей недостаточно.

198. Повѣрка дѣйствій. Разъ зависимость между числами въ дѣйствіяхъ установлена, нетрудно установить и способы повѣрки дѣйствій. Для каждаго дѣйствія надо указать два способа повѣрки: тѣмъ же дѣйствіемъ и обратнымъ ему. Для иллюстрированія способовъ повѣрки служитъ составленіе задачъ на провѣряемое дѣйствіе и на провѣрочныя дѣйствія и цѣлый рядъ упражненій для приложенія пріемовъ повѣрки. На этихъ задачахъ дѣти должны выяснить себѣ, что несоотвѣтствіе результата повѣрки съ установленными правилами не есть еще доказательство невѣрности повѣряемаго дѣйствія; точно также согласіе результата повѣрки съ правиломъ не даетъ еще ручательства въ вѣрности повѣряемаго дѣйствія. Несогласіе результата повѣрки съ правиломъ указываетъ только на то, что или повѣряемое, или повѣрочное дѣйствіе, или оба дѣйствія произведены невѣрно, но въ какомъ изъ нихъ сдѣлана ошибка—съ точностью заключить нельзя. Согласіе же результата повѣрки съ правиломъ иногда зависитъ отъ ошибокъ въ каждомъ изъ дѣйствій, взаимно покрывающихъ другъ друга.

199. Изъ упражненій, приведенныхъ въ нашемъ задачникѣ въ этомъ отдѣлѣ, могутъ встрѣтить затрудненіе задачи, въ которыхъ по данному произведенію требуется опредѣлить его множителей. Чтобы рѣшеніе задачъ этого типа стало яснымъ, необходимо разобрать, какія числа въ задачѣ представляютъ произведенія и какія — множителей. Для примѣра приведемъ рѣшеніе одной изъ нихъ.

116) За нѣсколько головъ сахару, одинаковаго вѣса, заплачено 120 руб.; за одну голову во столько фунтовъ, сколько было головъ, пришлось бы заплатить 6 руб. Сколько вѣсила каждая голова?

Рѣшеніе. 120 руб. представляетъ произведеніе трехъ множителей: цѣны фунта, числа фунтовъ въ каждой головѣ и числа головъ; 6 руб. представляетъ произведеніе двухъ изъ нихъ: цѣны фунта и числа головъ; слѣд. для опредѣленія третьяго множителя, вѣса головы сахару, надо 120 раздѣлить на 6; получимъ 20.

200. Именованныя числа. Давъ понятія о четырехъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ, надо познакомить дѣтей съ раздробленіемъ и превращеніемъ именованныхъ чиселъ. Здѣсь достаточно дать только понятіе объ этихъ преобразованіяхъ, установить, что раздробленіе исполняется при помощи умноженія, а превращеніе при помощи дѣленія, и показать примѣненіе этихъ преобразованій при производствѣ дѣйствій надъ именованными числами. Предварительно слѣдуетъ затронуть понятіе о величинахъ и ихъ измѣреніи. Вмѣсто опредѣленія понятія „величина“ слѣдуетъ выяснить дѣтямъ, что предметы можно сравнивать по длинѣ, ширинѣ, высотѣ, вмѣстимости, стоимости, по продолжительности существованія и т. п., что въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ сравненіе даетъ точные результаты, показывающіе, во сколько разъ длина, вѣсъ одного предмета больше длины, вѣса другого, а въ другихъ

отношеніяхъ (напр. по цвѣту) сравненіе точныхъ результатовъ не даетъ; если мы укажемъ, что вѣсъ одного предмета можетъ равняться вѣсу другого или быть больше его, стоимость одного предмета равна или больше стоимости другого; а что вѣсъ одного предмета со стоимостью другого совсѣмъ и сравнивать нельзя, то для усвоенія дѣтьми понятія „величина“ сдѣлаемъ гораздо больше, чѣмъ сообщеніемъ любого изъ существующихъ опредѣленій этого понятія. Послѣ этого, можно дать дѣтямъ и самое слово, обозначающее понятіе, сказавъ, что длина, ширина, вмѣстимость, вѣсъ предметовъ наз. величинами, и что величины, которыя могутъ быть равны между собою или отличаться другъ отъ друга только своимъ размѣромъ, наз. однородными. Такъ же на рядѣ примѣровъ надо дать дѣтямъ понятіе объ измѣреніи величинъ и единицахъ измѣренія. Дѣти при этомъ должны припомнить тѣ мѣры, съ которыми они успѣли познакомиться въ предшествовавшемъ курсѣ. Для поясненія необходимости въ единицахъ различнаго размѣра могутъ служить съ одной стороны измѣренія, производимыя въ классѣ (измѣреніе длины, ширины, высоты различныхъ предметовъ, взвѣшиваніе предметовъ), съ другой стороны выраженіе одной и той же величины въ единицахъ разныхъ наименованій; напр., выраженіе разстоянія между Петербургомъ и Москвой въ верстахъ (приблизительно 600 верстъ), въ саженяхъ (300000), въ аршинахъ (900000). Измѣренія, производимыя въ классѣ, служатъ для подтвержденія невозможности обойтись однѣми крупными мѣрами, а выраженіе одной и той же величины въ единицахъ разныхъ наименованій—для указанія неудобства пользоваться однѣми мелкими мѣрами.

Работа можетъ считаться законченной, если дѣти въ состояніи будутъ отвѣтить достаточно точно и полно на вопросы:

Что можно измѣрять?—Когда величины наз. однородными?—Что значитъ измѣрить величину?—Что наз. единицей при измѣреніи?—Зачѣмъ для измѣренія величинъ каждаго рода установлены единицы различнаго размѣра?—Какъ наз. единицы различнаго размѣра?—Что наз. [единичнымъ отношеніемъ?—Перечислить линейныя мѣры.—Перечислить мѣры сыпучихъ тѣлъ.—Перечислить мѣры вѣса.—Перечислить монеты.—Перечислить мѣры времени.—Какъ считается бумага?—Какое именованное число наз. простымъ, какое—составнымъ?

Для перевода метрическихъ мѣръ въ русскія и русскихъ въ метрическія можно, въ круглыхъ числахъ, принимать: метръ=$22^1/_2$ вершк., $1^1/_2$ арш., 39 дюйм.; километръ = 469 саж., т.-е. на 31 саж. меньше версты; центиметръ = $^1/_4$ вершк., 4 линіямъ; верста = 1067 метр.; сажень = 213 центиметр.; аршинъ = 71 центиметр., вершокъ = 44 миллиметр.; гектолитръ = $^1/_2$ четверти, 8 ведр. 1 шт.;

четвертъ = 210 литр.; четверикъ = 26 литр.; бочка = 5 гектолитр.; килограммъ = $2^1/_2$ фунт., 2 фунт. 42 зол.; граммъ = $^1/_4$ золотн., 22,5 долямъ; пудъ = 16 килогр.; фунтъ = 409 грамм.; золотникъ = $4^1/_4$ грамм. Болѣе точныя цыфры даны въ таблицахъ, приложенныхъ къ нашимъ задачникамъ.

Съ квадратными и кубическими мѣрами слѣдуетъ ознакомить въ дальнѣйшемъ курсѣ.

Давая понятіе о раздробленіи, полезно выяснить, что множителемъ можно брать и единичное отношеніе, и раздробляемое число. Для этой цѣли могутъ служить упражненія въ родѣ слѣдующаго:

117) Какъ раздробить 15 четвертей въ четверики? Показать, что для этого можно и 8 умножить на 15, [и 15 умножить на 8.

Рѣшеніе. Въ одной четверти 8 четвериковъ, а въ 15-ти 15 разъ по 8-ми четвериковъ, т.-е. $8 \times 15 = 120$ четверик. Иначе: если изъ каждой четверти возьмемъ по 1-му четверику, то получимъ 15 четвериковъ; взявъ еще по 1-му четверику изъ каждой четверти, получимъ еще 15 четверик., и т. д., слѣд. надо будетъ $15+15+15+15+15+15+15+15$, или 15×8; получимъ 120 четвериковъ.

Необходимо также на примѣрахъ выяснить значеніе раздробленія и превращенія. Для этой цѣли могутъ служить упражненія въ родѣ слѣдующаго.

118) Что больше — 5 пуд. или 19200 зол.? — 10 саженъ или 480 вершковъ? 150000 центиметровъ или 15 километровъ?

201. Письменные пріемы вычисленія. Сообщенныхъ понятій о дѣйствіяхъ достаточно для того, чтобы приступить къ введенію письменнаго вычисленія. На этой ступени можно дать пріемы сложенія, вычитанія, умноженія на однозначное число, дѣленія на однозначное число, умноженія и дѣленія на 10, 100, 1000 и т. д. Что касается умноженія и дѣленія на многозначное число, то для полнаго выясненія ихъ необходимо предварительно ознакомить дѣтей съ измѣненіями результатовъ дѣйствій при измѣненіи данныхъ (законы распредѣлительный и сочетательный).

202. Письменные пріемы сложенія и вычитанія представляютъ одну изъ самыхъ легкихъ работъ во всей ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ, потому что въ предшествующемъ курсѣ дѣти усвоили всѣ необходимыя основы для этихъ пріемовъ и пріучились прилагать ихъ къ устному вычисленію. Здѣсь, какъ мы уже имѣли случай замѣтить, остается только указать и разъяснить особенности письменнаго вычисленія. Всѣ правила для письменнаго исполненія дѣйствій должны быть выведены постепенно, начиная съ основныхъ и заканчивая правиломъ о расположеніи чиселъ

при письменномъ вычисленіи. Такъ для сложенія эти правила должны быть даны въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) многозначныя числа складываются поразрядно; 2) когда при сложеніи единицъ какого-либо разряда получается менѣе 9-ти единицъ, то ихъ прямо вводятъ въ составъ суммы; когда же получится болѣе 9-ти единицъ, то изъ нихъ составляютъ единицы слѣдующаго высшаго разряда, къ которому ихъ и относятъ, а оставшіяся единицы складываемаго разряда вводятъ въ составъ суммы; 3) начинаютъ письменное сложеніе съ простыхъ единицъ; 4) слагаемыя при письменномъ сложеніи принято располагать другъ подъ другомъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д., сумму отдѣляютъ отъ слагаемыхъ горизонтальною чертою и подписываютъ подъ соотвѣтствующими разрядами слагаемыхъ.

Каждое изъ этихъ правилъ выводится на соотвѣтствующихъ примѣрахъ. Такъ, для перваго правила удобно взять примѣры, въ которыхъ сумма единицъ каждаго разряда меньше 9-ти, для третьяго правила выбранные примѣры должны быть выполнены двумя способами: начиная сложеніе съ простыхъ единицъ и начиная его съ единицъ высшаго разряда и т. п. Каждое правило дѣти должны умѣть объяснить. Такъ 3-е правило можетъ быть объяснено приблизительно въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Сложивъ единицы и выдѣливъ изъ нихъ, если окажутся десятки, можно оставшіяся единицы записать, такъ какъ отъ сложенія слѣдующихъ разрядовъ простыя единицы произойти не могутъ; точно такъ же, сложивъ послѣ этого десятки, присоединивъ къ нимъ десятки, полученные отъ сложенія единицъ, и выдѣливъ, если окажутся, сотни, оставшіеся десятки можно записать, такъ какъ отъ сложенія слѣдующихъ разрядовъ десятковъ прозойти не можетъ; то же слѣдуетъ сказать и про всѣ остальные разряды. Если же начать сложеніе съ единицъ высшаго разряда, то или нужно будетъ держать въ памяти полученные разряды суммы до окончательнаго ея опредѣленія, или придется цыфры нѣкоторыхъ разрядовъ суммы измѣнять, такъ какъ единицы этихъ разрядовъ (напр. сотни) могутъ прозойти при сложеніи слѣдующихъ низшихъ разрядовъ (десятковъ и единицъ).

Что касается до соединенія всѣхъ этихъ отдѣльныхъ правилъ въ общее правило сложенія, то въ этомъ нѣтъ особенной надобности, разъ всѣ детали подробно и хорошо выяснены дѣтямъ; во всякомъ случаѣ такое общее правило можно требовать

только тогда, когда дѣти съ письменнымъ сложеніемъ совершенно освоятся на примѣрахъ и задачахъ.

Всѣ правила должны быть разъяснены сперва на сложеніи двухъ чиселъ.

203. Точно также относительно вычитанія выводится: 1) для опредѣленія разности двухъ многозначныхъ чиселъ, надо вычесть послѣдовательно всѣ разряды вычитаемаго изъ соотвѣтствующихъ разрядовъ уменьшаемаго; 2) если въ какомъ-либо разрядѣ вычитаемаго единицъ окажется больше, чѣмъ въ томъ же разрядѣ уменьшаемого, то къ этому разряду уменьшаемаго присоединяютъ одну единицу изъ слѣдующаго высшаго разряда уменьшаемаго, выразивъ ее въ единицахъ вычитаемаго разряда и выполняютъ вычитаніе (у высшаго разряда уменьшаемаго занимаютъ одну единицу); 3) письменно вычитаніе начинаютъ съ простыхъ единицъ; 4) правило о расположеніи чиселъ при письменномъ вычитаніи.

Въ упражненіяхъ на вычитаніе особенное вниманіе надо обратить на тѣ случаи, когда въ обозначеніе уменьшаемаго входятъ нули.

204. Ходъ дѣйствій выражается въ слѣдующихъ словахъ:

6 584	.. ..	. ..
365	25 804	7 000
35 853	17 945	5 236
42 802	7 859	1 764

Первый примѣръ. 4 да 5 девять, 9 да 3 двѣнадцать. Двѣнадцать единицъ составляютъ 1 десятокъ и 2 единицы; 2 единицы пишемъ подъ единицами, а десятокъ прикладываемъ къ десяткамъ. Одинъ десятокъ да 8 дес. девять дес., 9 дес. да 6 дес. 15 дес., да 5 дес. 20 дес. Двадцать десятковъ составляютъ 2 сотни; подъ десятками пишемъ 0, а 2 сотни прикладываемъ къ сотнямъ. И т. д.

Короче: 4 да 5 девять, 9 да 3 двѣнадцать; 2 пишемъ подъ единицами, а 1 десятокъ прикладываемъ къ десяткамъ. Одинъ да 8, да 6, да 5 составляютъ 20 дес. или 2 сотни; подъ десятками пишемъ нуль, а 2 сотни прикладываемъ къ сотнямъ. И т. д.

Второй примѣръ. Пять изъ 4-хъ вычесть нельзя; занимаемъ одну сотню у 8-ми сотенъ, замѣняемъ ее 10-ю дес., занимаемъ у нихъ 1 дес. и присоединяемъ его къ 4 единицамъ; получаемъ 14 ед.; вычитаемъ изъ нихъ 5 единицъ и

разность 9 ед. пишемъ подъ единицами. 4 десятка вычитаемъ изъ 9 дес. и разность 5 дес. пишемъ подъ десятками. И т. д.

205. Въ этомъ отдѣлѣ нѣкоторое затрудненіе могутъ встрѣтить упражненія, въ которыхъ требуется возстановить пропущенныя цыфры въ данныхъ и результатахъ сложенія и вычитанія; напр., требуется возстановить пропущенныя и обозначенныя звѣздочками цыфры въ примѣрахъ:

119)

	3	5	8	*		*	7	5	*
+	6	5	*	2	−	3	6	*	7
	4	*	9	8		5	*	6	3
	*	*	3	2	4				

Рѣшеніе 1-го примѣра. Для опредѣленія пропущенной цыфры перваго слагаемаго, замѣчаемъ, что сумма единицъ остальныхъ двухъ слагаемыхъ есть 10, сумма же единицъ всѣхъ трехъ слагаемыхъ есть число, оканчивающееся 4-мя; поэтому послѣдняя цыфра перваго слагаемаго будетъ 4. Для опредѣленія пропущенной цыфры десятковъ во второмъ слагаемомъ замѣчаемъ, что сумма десятковъ въ остальныхъ слагаемыхъ вмѣстѣ съ десяткомъ, полученнымъ отъ сложенія единицъ, даетъ 18, а намъ надо въ суммѣ десятковъ получить число, оканчивающееся 2-мя; слѣд., искомая цыфра будетъ 4. Такимъ же путемъ найдемъ, что пропущенная цыфра 3-го слагаемаго есть 1, а затѣмъ уже не трудно опредѣлить пропущенныя цыфры въ суммѣ.

Другое рѣшеніе. Замѣнивъ пропущенныя въ слагаемыхъ цыфры нулями, получимъ въ суммѣ 14 180. Но въ требуемой суммѣ послѣднія три цыфры намъ извѣстны, именно 3, 2, 4; кромѣ того отъ сложенія сотенъ не можетъ получиться 2-хъ тысячъ; слѣд., требуемая сумма должна равняться 14324 и отличается отъ найденной нами на 14 324—14 180, т.-е. на 144. На столько же единицъ должны отличаться и данныя слагаемыя отъ взятыхъ нами слагаемыхъ; отсюда ясно, что искомая цыфра перваго слагаемаго есть 4, второго тоже 4 и третьяго 1.

Рѣшеніе 2-го примѣра. Чтобы опредѣлить цыфру единицъ уменьшаемаго, складываемъ единицы вычитаемаго и разности, отъ чего получаемъ 10 и заключаемъ, что цыфра единицъ уменьшаемаго есть 0. Чтобы опредѣлить цыфру десятковъ въ вычитаемомъ, вычитаемъ десятки разности изъ уменьшаемаго, отъ котораго надо предварительно откинуть одинъ десятокъ, занятый для вычитанія единицъ вычитаемаго; находимъ, что цыфра десятковъ вычитаемаго есть $14-6=8$. Чтобы опредѣлить цыфру сотенъ разности, вычитаемъ цыфру сотенъ вычитаемаго изъ уменьшаемаго, откинувъ отъ него одну сотню, занятую для вычитанія десятковъ вычитаемаго; находимъ, что цыфра сотенъ разности есть $6-6=0$. Наконецъ, чтобы опредѣлить цыфру тысячъ уменьшаемаго, останется сложить цыфры тысячъ въ вычитаемомъ и разности; получимъ $5+3=8$.

Другое рѣшеніе. Замѣнивъ пропущенныя цыфры въ вычитаемомъ и разности нулями, найдемъ, что уменьшаемое тогда должно бы быть $3607+5063=8670$; но въ искомомъ уменьшаемомъ на второмъ и третьемъ мѣстахъ стоятъ цыфры 5 и 7, слѣд., оно есть 8750, на $8750-8670=80$ больше найденнаго нами, а потому вычитаемое и разность должны быть больше взятыхъ нами на 80; отсюда заключаемъ, что искомая цыфра вычитаемаго есть 8, а разности 0.

Вторыя рѣшенія возможно дать только тогда, когда будетъ пройденъ отдѣлъ объ измѣненіяхъ суммы и разности.

206. Сложеніе и вычитаніе на русскихъ счетахъ. Чтобы 675 р. 35 коп. сложить съ 486 руб. 97 коп. на русскихъ счетахъ, откладываемъ на нихъ 675 р. 35 к. Затѣмъ на 7-й проволокѣ къ 6 косточкамъ прибавляютъ 4 косточки (4 сотни руб.); тогда на этой проволокѣ получится 10 косточекъ, которыя скидываемъ и замѣняемъ одной косточкой на 8-й проволокѣ (1 тыс. руб.). Далѣе надо на 6-й проволокѣ къ 7-ми косточкамъ, ранѣе отложеннымъ, прибавить 8 косточекъ (8 десятк. руб.); но мы можемъ на ней прибавить только 3 косточки, которыя съ прежними 7-ю составятъ 10 косточекъ; замѣняемъ ихъ 1-й косточкой на 7-й проволокѣ, а на освободившейся 6-й проволокѣ откладываемъ остальныя $8-3=5$ косточекъ. Чтобы отложить на 5-й проволокѣ 6 косточекъ, откладываемъ на ней сперва 5 косточекъ, замѣняемъ составившіяся 10 косточекъ одной косточкой на 6 проволокѣ, а на освободившейся 5-й проволокѣ откладываемъ оставшуюся $6-5=1$ косточку. Точно также, чтобы на 3-й проволокѣ, гдѣ уже было положено 3 косточки, прибавить 9 косточекъ, прибавляемъ сперва 7 косточекъ, получившіяся 10 косточекъ замѣняемъ одной на 5-й проволокѣ, а на освободившейся 3-й проволокѣ кладемъ остальныя $9-7=2$ косточки. Наконецъ, чтобы на 2-й проволокѣ, гдѣ уже положено 5 косточекъ, отложить еще 7 косточекъ, кладемъ сперва 5 косточекъ, получившіяся 10 косточекъ замѣняемъ одной на 3-й проволокѣ, а на оставшейся свободной 2-й проволокѣ откладываемъ еще $7-5=2$ косточки. Получаемъ 1 косточку на 8-й проволокѣ, 1 на 7-й, 6 на 6-й, 2 на 5-й, 3 на 3-й и 2 на 2-й, т.-е. 1162 р. 32 к. Если бы надо было сложить три числа, то къ полученной суммѣ 2-хъ чиселъ точно также слѣдовало бы прибавить третье слагаемое.

Обыкновенно при сложеніи на счетахъ поступаютъ нѣсколько иначе, стараясь возможно упростить вычисленіе. Такъ въ приве-

денномъ примѣрѣ соображаютъ, что 486 руб. на 14 руб. меньше 500 руб.; поэтому на 7-й проволокѣ прибавляютъ 5 косточекъ къ 6-ти косточкамъ, ранѣе отложеннымъ (сперва прибавляютъ 4 косточки, образовавшіяся 10 косточекъ замѣняютъ одной на 8-й проволокѣ и на освободившейся 7-й кладутъ еще одну косточку), а на 6-й проволокѣ скидываютъ 1 косточку и на 5-й—4 косточки. Затѣмъ, чтобы прибавить копейки, соображаютъ, что 97 коп. меньше рубля на 3 коп.; поэтому на 5-й проволокѣ прибавляютъ одну косточку, а на 2-й сбрасываютъ 3 косточки. Получаютъ то же самое число 1162 р. 32 коп.

Чтобы 695 руб. 83 коп. вычесть изъ 1022 р. 32 коп. на русскихъ счетахъ, откладываемъ на нихъ 1022 р. 32 к. и отнимаемъ сперва 6 сот. руб., т.-е. сбрасываемъ 6 косточекъ на 7-й проволокѣ. Но на ней у насъ совсѣмъ нѣтъ косточекъ, поэтому 1 скосточку на 8-й проволокѣ (1 тыс. руб.) замѣняемъ 10-ю коточками на 7-й проволокѣ (10 сот. руб.) и изъ нихъ сбрасываемъ 6 косточекъ; остается на 7-й проволокѣ 4 косточки. Затѣмъ слѣдуетъ сбросить 9 косточекъ на 6-й проволокѣ (9 дес. руб.), гдѣ у насъ лежитъ только 2 косточки. Сбросивъ эти двѣ косточки, замѣняемъ одну косточку съ 7-й проволоки 10-ю косточками на 6-й и сбрасываемъ остальныя 9—2=7 косточекъ. Чтобы скинуть 5 косточекъ (5 руб.) на 5-й проволокѣ, сбрасываемъ съ нея имѣющіяся 2 косточки, 1 косточку съ 6-й проволоки замѣняемъ 10-ю косточками на 5 проволокѣ и сбрасываемъ съ нихъ остальныя 5—2=3 косточки. Чтобы сбросить 8 косточекъ (8 гривенниковъ) на 3-й проволокѣ, скидываемъ имѣющіяся на ней 3 косточки, 1 косточку 5-й проволоки замѣняемъ 10-ю на 3-й и сбрасываемъ съ нихъ остальныя $8-3=5$ косточекъ. Наконецъ, чтобы сбросить 3 косточки на 2-й проволокѣ (3 коп.), сбрасываемъ имѣющіяся на ней 2 косточки, 1 косточку 3-й проволоки замѣняемъ 10-ю косточками на 2-й проволокѣ и сбрасываемъ съ нихъ остальную 3—2=1 косточку. Такимъ образомъ у насъ останется: на 7-й проволокѣ 3 косточки, на 6-й—2, на 5-й—6, на 3-й—4 и на 2-й—9 косточекъ, т.-е. 326 р. 49 коп. Чтобы сдѣлать это вычитаніе скорѣе, замѣчаемъ, что 695 руб. меньше 700 руб. на 5 руб.; поэтому съ 7-й проволоки сбрасываемъ 7 косточекъ (для чего одну косточку 8-й проволоки замѣняемъ 10-ю косточками 7-й), а зато на 5-й проволокѣ накидываемъ 5 косточекъ. Затѣмъ, чтобы скинуть копейки, замѣчаемъ, что 83 коп. на 17 коп. меньше рубля; поэтому на 5 проволокѣ сбрасываемъ 1 косточку (1 руб.), а на 3-й и 2-й накидываемъ 1 и 7 косточекъ. Получимъ опять 326 р. 49 коп.

207. Сложеніе и вычитаніе составныхъ именованныхъ чиселъ на этой ступени должно быть ограничено такими случаями, въ которыхъ данныя числа состояли бы не болѣе, какъ изъ единицъ

двухъ — трехъ наименованій и въ которыхъ превращеніе могло бы быть легко исполнено устно. Вычисленія можно располагать слѣдующимъ образомъ:

	2		2			
	325	пуд.	+27	фунт.	+15	лот.
	217		+32		+19	
	1308		+38		+30	
	1852	пуд.	+19	фунт.	+ 0	лот.

...		1000		...		7		8
625	килом.	+225	мтр.	312	чтв.	+0	чтк.	+0 гарнц.
478		+578		225		+6		+5
146	килом.	+647	мтр.	86	чтв.	+1	чтк.	+3 гарнц.

208. Письменные пріемы умноженія и дѣленія мы разсматриваемъ въ слѣдующемъ порядкѣ: 1) умноженіе и дѣленіе многозначнаго числа на однозначное; 2) умноженіе и дѣленіе многозначнаго числа на число, обозначаемое единицей съ нулями (на единицу какого угодно разряда); 3) умноженіе и дѣленіе многозначнаго числа на число, обозначаемое значащей цыфрой съ нулями (на нѣсколько единицъ какого угодно разряда); 4) умноженіе и дѣленіе многозначнаго числа на какое угодно многозначное число. Такая послѣдовательность опредѣляется съ одной стороны постепенностью въ сообщеніи пріемовъ вычисленія въ каждомъ изъ разсматриваемыхъ дѣйствій, съ другой стороны необходимостью знать нѣкоторые пріемы дѣленія для объясненія пріемовъ умноженія. Въ приведенномъ порядкѣ дѣти сперва знакомятся съ умноженіемъ на однозначное число и тѣмъ подготовляются къ умноженію на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями, а знакомство съ умноженіемъ на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями, подготовляетъ ихъ къ умноженію на какое угодно многозначное число. Дѣти знакомятся съ дѣленіемъ на 10, 100 и т. д. передъ умноженіемъ на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями, для котораго необходимо знаніе этого дѣленія. Въ дѣленіи на однозначное число дѣти учатся опредѣлять, изъ какихъ разрядовъ состоитъ частное, и это подготовляетъ ихъ къ опредѣленію разрядовъ частнаго при многозначномъ дѣлителѣ.

Кромѣ того, указанное распредѣленіе письменныхъ пріемовъ умноженія и дѣленія позволяетъ вводить почти во всѣ упражненія всѣ четыре дѣйствія и располагать упражненія по сравнительной ихъ трудности и сложности, а не по дѣйствіямъ.

До разъясненія дѣтямъ сочетательнаго и распредѣлительнаго законовъ, возможно ознакомить ихъ только съ умноженіемъ и дѣленіемъ на однозначное число и на числа, обозначаемыя единицей съ нулями.

209. Умноженіе многозначнаго числа на однозначное основано на положеніи, что для умноженія суммы достаточно умножить каждое слагаемое и полученныя произведенія сложить, при чемъ множимое разсматривается какъ сумма разрядовъ, изъ которыхъ оно состоитъ. Но выводъ можетъ быть сдѣланъ непосредственно приведеніемъ умноженія къ сложенію равныхъ слагаемыхъ. Для этого можно сопоставить сложеніе $312+312+312$ съ умноженіемъ 312×3, сложеніе $527+527+527+527$ съ умноженіемъ 527×4.

Чтобы установить правило начинать письменное умноженіе съ умноженія простыхъ единицъ множимаго, лучшимъ средствомъ служитъ сравненіе на однихъ и тѣхъ же примѣрахъ (386×7; 132×3) двухъ пріемовъ: начинать дѣйствіе съ простыхъ единицъ и начинать его съ единицъ высшаго разряда. Изъ этого сравненія выводится, что, при записываніи произведенія по мѣрѣ его опредѣленія, удобнѣе начинать дѣйствіе съ простыхъ единицъ, такъ какъ при такомъ порядкѣ единицы каждаго разряда въ произведеніи опредѣляются разомъ, въ памяти приходится держать числа, состоящія только изъ единицъ одного разряда и притомъ только до умноженія единицъ того же разряда во множимомъ; наконецъ найденныя и записанныя цифры произведенія не подлежатъ никакимъ измѣненіямъ.

При письменномъ умноженіи числа располагаются различно: въ однихъ руководствахъ предлагается данныя числа подписывать другъ подъ другомъ и подъ ними подписывать произведеніе, отдѣляя его чертою отъ данныхъ чиселъ; въ другихъ предпочитаютъ множимое и множителя писать рядомъ, а произведеніе подъ множимымъ, отдѣляя его чертою отъ данныхъ чиселъ. Каждое изъ этихъ расположеній имѣетъ свои выгоды и свои недостатки. Первое при многозначномъ множителѣ позволяетъ дѣлать меньше движеній глазомъ и рукою, такъ какъ при немъ разстояніе между перемножаемыми цифрами меньше, чѣмъ при второмъ; оно занимаетъ меньше мѣста въ горизонтальномъ направленіи и потому удобнѣе, когда въ горизонтальномъ направленіи мѣста на бумагѣ или на доскѣ мало. Второе можетъ повести къ сокращенію въ записяхъ, когда одна изъ цифръ множителя есть 1, позволяя множимое принимать за частное произведеніе множимаго на эту цифру; оно занимаетъ сравнительно съ первымъ меньше мѣста въ вертикальномъ направленіи и потому удобнѣе, когда мѣста на бумагѣ или на доскѣ въ этомъ направленіи мало.

Для умноженія на однозначное число и на число, обозначаемое значащей цифрой съ нулями, можно допустить и такое расположеніе, при которомъ всѣ три числа пишутся въ одну строку и произведеніе отдѣляется отъ данныхъ чиселъ знакомъ равенства, такъ какъ въ этихъ случаяхъ не входитъ сложеніе частныхъ

произведеній и всегда не трудно разсчитать, гдѣ должна быть написана низшая цифра произведенія. Такимъ образомъ для умноженія многозначнаго числа на однозначное можно указать дѣтямъ слѣдующія три расположенія чиселъ:

$$467\times8=3736;\qquad \begin{array}{r}467\\ \times8\\ \hline 3736\end{array}\,;\qquad \begin{array}{r}467\times8\\ \hline 3736\end{array}\,;$$

предлагая примѣнять то изъ нихъ, которое въ данныхъ обстоятельствахъ окажется удобнѣе. Ходъ дѣйствія выражается въ слѣдующей формѣ:

Отъ умноженія 7 единицъ на 8 получаемъ 56 единицъ, изъ которыхъ 6 единицъ записываемъ, такъ какъ отъ умноженія слѣдующихъ разрядовъ единицъ болѣе не получимъ, а 5 десятковъ приложимъ къ произведенію десятковъ; отъ умноженія 6 десятковъ на 8 получаемъ 48 десятковъ, которые съ 5-ю десятками, полученными отъ умноженія единицъ, составятъ 5 сотенъ и 3 десятка; 3 десятка записываемъ, такъ какъ отъ умноженія слѣдующихъ разрядовъ десятковъ не получится, а 5 сотенъ приложимъ къ произведенію сотенъ. И т. д.

Короче: 8-ю 7 единицъ—56 единицъ, пишемъ 6; 8-ю 6 десятковъ 48 десятковъ да 5 десятковъ—53 дес., пишемъ 3 десятка и т. д.

210. Дѣленіе многозначнаго числа на однозначное основывается на томъ, что для раздѣленія суммы на какое-либо число, можно раздѣлить на это число каждое слагаемое и полученныя частныя сложить. При этомъ дѣлимое разлагается на такія слагаемыя, изъ которыхъ каждое даетъ въ частномъ единицы только одного какого-либо разряда. Въ разложеніи дѣлимаго на такія слагаемыя и въ опредѣленіи разряда каждой цифры въ частномъ заключается вся трудность дѣленія многозначнаго числа на однозначное. Разъясненію недоразумѣній въ этомъ отношеніи много способствуетъ твердое и сознательное знаніе зависимости между числами въ дѣленіи. Подготовительными упражненіями могутъ служить слѣдующія:

120) Раздѣлить на 3 числа: 900, 30 и 6; раздѣлить на 3 сумму этихъ чиселъ.

121) Раздѣлить на 4 числа: 1200, 240 и 36; раздѣлить на 4 сумму этихъ чиселъ.

Въ первомъ упражненіи дѣтей можетъ затруднить только ясный отчетъ въ томъ, къ какому разряду принадлежитъ частное отъ дѣленія каждаго слагаемаго. Для этого можетъ служить слѣдующее соображеніе: если отъ дѣленія 9 единицъ на 3 получится 3 такихъ же единицы, то отъ дѣленія 9 сотенъ, т.-е. 9 единицъ

4-го разряда, на 3 получается 3 сотни, т.-е. 3 единицы 3-го же разряда.

Во второмъ упражненіи дѣтямъ придется разсуждать еще и о томъ, слѣдуетъ ли дѣлить единицы каждаго разряда въ каждомъ слагаемомъ отдѣльно, или перевести ихъ въ единицы одного низшаго разряда; напр., при дѣленіи 1200 можно отдѣльно дѣлить на 4 и 1000, и 200, или, переведя тысячу въ сотни, раздѣлить на 4 всѣ полученныя 12 сотенъ заразъ. Для рѣшенія этого вопроса дѣти должны разсудить, что отъ дѣленія 1200 на 4 въ частномъ тысячъ не получится, ибо для этого дѣлимое должно содержать въ себѣ по крайней мѣрѣ $1000 \times 4 = 4000$, а могутъ получиться только сотни и низшіе разряды, и что гораздо удобнѣе опредѣлить сперва всѣ сотни, которыя могутъ получиться въ частномъ, и для этого раздѣлить на 4 разомъ 12 сотенъ. Не лишнимъ будетъ заставить дѣтей раздѣлить на 4 отдѣльно 1000 и 200 и такимъ образомъ на дѣлѣ убѣдить ихъ въ преимуществѣ второго пріема.

Въ первомъ примѣрѣ разложеніе дѣлимаго 936 на слагаемыя, дающія въ частномъ единицы только одного разряда, совпадаетъ съ разложеніемъ его на разряды, и потому никакихъ вопросовъ вызвать не можетъ. Во второмъ упражненіи естественно долженъ возникнуть вопросъ о томъ, почему дѣлимое 1475 разлагается не на разряды. Для перваго слагаемаго вопросъ разрѣшается соображеніемъ, что отъ дѣленія 1476 на 4 въ частномъ не могутъ получиться тысячи, а получаются сотни и низшіе разряды, и что изъ сотенъ для дѣленія на 4 мы беремъ 14 сотенъ, а не 12 сотенъ, потому что заранѣе не можемъ знать, сколько сотенъ изъ 14 можно раздѣлить такъ, чтобы въ частномъ получить только однѣ сотни. Въ слѣдующихъ упражненіяхъ дѣти прежде всего должны опредѣлять, будетъ ли высшій разрядъ частнаго одинаковъ съ высшимъ разрядомъ дѣлимаго, или будетъ ниже его, для чего они находятъ наименьшую величину дѣлимаго, при которой высшій разрядъ частнаго одинаковъ съ высшимъ разрядомъ дѣлимаго, и сравниваютъ ее съ даннымъ дѣлимымъ. Напр., для опредѣленія высшаго разряда частнаго въ дѣленіи 56 994 на 7, дѣти говорятъ, что для полученія въ частномъ десятковъ тысячъ необходимо въ дѣлимомъ имѣть по крайней мѣрѣ 7 десятковъ тысячъ (10000×7), а наше дѣлимое меньше этого числа и слѣдовательно въ частномъ десятковъ тысячъ не получится, а получатся тысячи и низшіе разряды.

211. Послѣ опредѣленія единицъ каждаго разряда въ частномъ, дѣти должны объяснить, для чего находится произведеніе найденной цыфры частнаго на дѣлителя (чтобы узнать, сколько единицъ даннаго разряда раздѣлили), для чего это произведеніе вычитается изъ соотвѣтствующихъ разрядовъ дѣлимаго (чтобы узнать, сколько единицъ даннаго разряда осталось дѣлить), наконецъ, для чего къ остатку сносится слѣдующая цыфра дѣлимаго (чтобы перевести единицы оставшагося разряда въ единицы слѣдующаго низшаго разряда и прибавить къ полученному числу единицы того же разряда въ дѣлимомъ).

Такимъ образомъ, производя дѣленіе 56 994 на 7, дѣти должны передавать ходъ дѣйствія приблизительно въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Въ частномъ десятковъ тысячъ не получится, потому что для этого въ дѣлимомъ должно заключаться по крайней мѣрѣ $10\,000 \times 7 = 70\,000$; 5 десятковъ тысячъ переводимъ въ тысячи, прибавляемъ 6 тысячъ, и полученное число 56 тысячъ дѣлимъ на 7. Отъ дѣленія 56 единицъ на 7 получается 8 единицъ, отъ дѣленія 56 тысячъ получится 8 тысячъ. Чтобы узнать, сколько тысячъ мы раздѣлили, надо 8 тысячъ умножить на 7, получимъ 56 тысячъ, а такъ какъ и надо было раздѣлить 56 тысячъ, то тысячъ у насъ не останется. Далѣе дѣлимъ 9 сотенъ на 7. Отъ дѣленія 9 единицъ на 7 получится 1 единица, отъ дѣленія 9 сотенъ на 7 получится 1 сотня. Чтобы узнать, сколько сотенъ мы раздѣлили, умножаемъ 1 сотню на 7, получаемъ 7 сотенъ; а надо было раздѣлить 9 сотенъ, слѣд., намъ остается раздѣлить еще 2 сотни (9—7), отъ дѣленія которыхъ сотенъ уже не получится, потому что для этого надо имѣть въ дѣлимомъ по крайней мѣрѣ 7 сотенъ. Обращаемъ 2 сотни въ десятки, получаемъ 20 десятковъ, прибавляемъ къ нимъ 9 десятковъ дѣлимаго и дѣлимъ 29 десятковъ на 7. Отъ дѣленія 29 единицъ на 7 получаемъ 4 единицы, отъ дѣленія 29 десятковъ на 7 получаемъ 4 десятка; чтобы узнать, сколько десятковъ раздѣлили, надо 4 десятка умножить на 7, получимъ 28 десятковъ; а надо было раздѣлить 29 десятковъ, слѣд., намъ остается еще раздѣлить 1 десятокъ (29—28), отъ дѣленія котораго десятковъ уже не получится. Переводимъ 1 десятокъ въ единицы, прибавляемъ 4 единицы, и полученное число 14 дѣлимъ на 7; получаемъ 2 единицы, отъ умноженія которыхъ на 7 получается ровно 14 единицъ, и, слѣд., дѣленіе совершится безъ остатка.

Впослѣдствіи слѣдуетъ требовать болѣе краткаго пересказа хода дѣленія, приблизительно въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Изъ 56 тысячъ на 7 можно раздѣлить всѣ 56 тысячъ, получимъ въ частномъ 8 тысячъ, и тысячъ у насъ не останется; изъ 9 сотенъ на 7 можно раздѣлить только 7 сотенъ, получимъ въ частномъ 1 сотню, и останется раздѣлить еще

2 сотни; 2 сотни переводимъ въ десятки и прибавляемъ десятки дѣлимаго; получаемъ 29 десятковъ, изъ которыхъ на 7 можно раздѣлить 28 десятковъ; въ частномъ получимъ 4 десятка, и останется 1 десятокъ; его переводимъ въ единицы и присоединяемъ 4 единицы дѣлимаго; получаемъ 14 единицъ, изъ которыхъ можно раздѣлить всѣ 14 единицъ; въ частномъ получаемъ 2 единицы.

Дѣйствіе располагается въ слѣдующихъ двухъ видахъ:

```
56 994|7          56 994|7
-56   |8 142  ;      9  |8 142
 9                  29
-7                  14
 29                  0
-28
 14
-14
  0
```

Первое расположеніе соотвѣтствуетъ болѣе подробному пересказу; второе—краткому.

212. Слѣдуетъ еще разъяснить дѣтямъ, почему дѣленіе начинаютъ съ единицъ высшаго разряда, въ противоположность остальнымъ тремъ дѣйствіямъ. Это возможно сдѣлать тогда, когда дѣти предварительно достаточно освоятся со способомъ производства письменнаго дѣленія. Разъясненіе должно состоять въ сравненіи на одномъ и томъ же примѣрѣ двухъ способовъ начинать дѣленіе: съ простыхъ единицъ и съ единицъ высшаго разряда. Для этой цѣли можетъ служить, напр., дѣленіе 978 на 6, которое производится въ двухъ видахъ:

```
978|6          978|6
-6 |1           37| 163
 72|12           18
-6 |+150          0
 12| 163
-12
 900
  6
 30
  0
```

Выводъ дѣлается въ слѣдующихъ словахъ:

Если дѣленіе, какъ и остальныя дѣйствія, начинать съ простыхъ единицъ, то низшіе разряды частнаго (въ данномъ случаѣ десятки и единицы) придется опредѣлять по частямъ, и потому, для полученія окончательнаго частнаго, придется всѣ полученныя ранѣе частныя сложить; когда же дѣленіе начнемъ съ единицъ высшаго разряда, то единицы каждаго разряда опредѣляются разомъ и чтобы получить окончательное частное, никакого дополнительнаго дѣйствія производить не приходится.

213. Изъ ошибокъ, которыя встрѣчаются у дѣтей при дѣленіи на однозначное число, слѣдуетъ обратить особое вниманіе на пропускъ нулей въ обозначеніи частнаго. Чтобы разъяснить эти ошибки въ дѣленіяхъ:

```
28 048|8          2 430|9
 4 0  |3 506        63 |270
  48               0
   0
```

слѣдуетъ заставлять дѣтей каждый разъ правильно высказывать, единицы какого разряда они записали въ частномъ и единицы какого разряда начинаютъ послѣ этого дѣлить. Такъ, въ первомъ примѣрѣ, послѣ дѣленія 40 сотенъ, дѣти должны сказать, что они въ частномъ записали 5 сотенъ, что сотенъ послѣ этого не осталось и что слѣдуетъ далѣе дѣлить 4 десятка, отъ дѣленія которыхъ въ частномъ десятковъ не получится; поэтому въ частномъ на мѣстѣ десятковъ надо поставить 0, а 4 десятка перевести въ единицы, присоединить къ полученному числу 8 единицъ и раздѣлить на 8, отъ чего получится 6 единицъ. Во второмъ примѣрѣ, раздѣливши 63 десятка на 9, дѣти говорятъ, что въ частномъ получится 7 десятковъ, что десятковъ не останется, а такъ какъ въ дѣлимомъ нѣтъ единицъ, то и въ частномъ единицъ не получится; поэтому на мѣстѣ единицъ въ частномъ надо поставить нуль. Полезно также провѣрять полученное невѣрное частное умноженіемъ его на дѣлителя и объяснять, почему отъ такого умноженія не получается дѣлимое и какія поправки надо сдѣлать въ частномъ, чтобы получить въ произведеніи дѣлимое.

214. Въ нашемъ задачникѣ преподаватель найдетъ обильный матеріалъ для умноженія и дѣленія на однозначное число, при чемъ особенное вниманіе обращено на такіе случаи, въ которыхъ дѣти часто ошибаются (нули во множимомъ, нули въ частномъ). Въ числѣ упражненій находится цѣлый рядъ примѣровъ на раздробленіе и превращеніе простыхъ именованныхъ чиселъ, когда единичное отношеніе мѣръ выражается однозначнымъ числомъ. Много мѣста отведено задачамъ на опредѣленіе частей цѣлаго и цѣлаго по его частямъ. Рѣшаются эти задачи обычнымъ путемъ: сперва опредѣляется помощію дѣленія одна часть цѣлаго, а потомъ помощію умноженія опредѣляется или цѣлое, или требуемое число частей цѣлаго. Когда дано нѣсколько частей цѣлаго, то

при опредѣленіи одной части его дѣти иногда ошибаются, полагая, что надо дѣлить всегда на то число, которое указываетъ, какія части берутся; напр., когда 7 девятыхъ частей цѣлаго составляютъ 392, то при опредѣленіи одной части цѣлаго дѣти предлагаютъ раздѣлить данное число на 9 вмѣсто 7. Надо разъяснить, что все искомое число было раздѣлено на 9 частей, и что такихъ частей въ 392 содержится только 7. Если бы этого оказалось недостаточнымъ, то можно прибѣгнуть къ наглядному объясненію, предположивъ, что 392 версты составляютъ 7 девятыхъ частей какого-либо разстоянія, и представивъ все разстояніе въ видѣ прямой, раздѣленной на 9 равныхъ частей, изъ которыхъ въ 7-ми частяхъ заключается 392 версты.

Остальныя задачи относятся къ дѣленію числа въ разностномъ и въ кратномъ отношеніи. О тѣхъ и о другихъ уже было сказано достаточно. Кромѣ того, встрѣчаются упражненія, въ которыхъ требуется опредѣлить пропущенныя цыфры въ данныхъ и результатахъ дѣйствій. Приводимъ нѣсколько упражненій.

122) Возстановить пропущенныя цыфры въ примѣрахъ:

$$\begin{array}{r} 5*3* \\ \times\ 7 \\ \hline 3*673 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} *5*6 & 4 \\ \hline 0 & 62* \end{array}$$

Рѣшеніе 1-го примѣра. Отъ умноженія 3 десятковъ на 7 получается 21 десятокъ, или 2 сотни и 1 десятокъ, а въ произведеніи 7 десятковъ; слѣд., 6 изъ нихъ произошли отъ умноженія единицъ на 7. Отъ умноженія единицъ на 7 произошли и 3 единицы, стало быть отъ умноженія единицъ на 7 получилось 63, и для опредѣленія единицъ множимаго надо 63 раздѣлить на 7, получимъ 9. Двѣ сотни въ произведеніи произошли, какъ мы видѣли, отъ умноженія 3 десятковъ, а всего въ произведніи 6 сотенъ, слѣд., отъ умноженія сотенъ множимаго произошло 4 сотни. Чтобы опредѣлить, сколько сотенъ было во множимомъ, надо узнать, отъ умноженія какого числа на 7 получается произведеніе, оканчивающееся 4-мя. Такое число есть 2, слѣд., во множимомъ было 2 сотни. Чтобы опредѣлить тысячи произведенія, замѣчаемъ, что отъ умноженія 2 сотенъ множимаго получается 1 тысяча, да отъ умноженія 5 тысячъ множимаго получается еще 5 тысячъ; слѣд., въ произведеніи должно быть 6 тысячъ.

Рѣшеніе 2-го примѣра. Отъ умноженія 6 сотенъ частнаго на дѣлителя 4 получается 24 сотни, или 2 тысячи и 4 сотни; отсюда заключаемъ, что въ дѣлимомъ должно быть 2 тысячи, и что 1 сотня дѣлимаго произошла отъ умноженія десятковъ и единицъ частнаго на дѣлителя. Отъ умноженія 2 десятковъ частнаго на дѣлителя получается только 8 десятковъ, значитъ изъ 1 сотни,

происшедшей отъ умноженія десятковъ и единицъ, 2 десятка произошли отъ умноженія единицъ. Такъ какъ въ дѣлимомъ заключается еще 6 единицъ, то отъ умноженія единицъ частнаго на дѣлителя должно получиться по крайней мѣрѣ 26. Но 26 дѣлится на 4 съ остаткомъ, а у насъ дѣленіе совершилось безъ остатка; поэтому отъ умноженія единицъ частнаго на дѣлителя должно получиться число, большее 26 и оканчивающееся 6-ю. Такое число есть 36 и, слѣд., цыфра единицъ частнаго есть 9. Нетрудно уже затѣмъ найти, что цыфра десятковъ дѣлимаго есть 1.

215. Умноженіе и дѣленіе на русскихъ счетахъ. Чтобы 264 р. 75 коп. умножить на 4 на русскихъ счетахъ, можно взять 264 р. 75 коп. слагаемымъ 4 раза, отложивъ на счетахъ 4 раза по 264 р. 75 коп., или умножить устно 200 р. на 4, 60 р. на 4, 4 р. на 4, 75 коп. на 4 и полученныя произведенія 800 руб., 240 р., 16 р. и 3 руб. сложить на счетахъ; обоими способами получимъ 1059 р.

Дѣленіе на счетахъ производить вообще неудобно; въ бо́льшей части случаевъ приходится сводить его къ послѣдовательному вычитанію. Такъ, чтобы узнать, сколько разъ 63 р. 25 коп., содержатся въ 379 р. 50 коп., откладываемъ на счетахъ 379 р. 50 коп., скидываемъ съ нихъ 63 р. 25 коп. и кладемъ для памяти на одной изъ свободныхъ проволокъ одну косточку; съ оставшагося числа, 316 р. 25 коп. опять скидываемъ 63 р. 25 коп. и для памяти на той же проволокѣ кладемъ другую косточку; продолжаемъ такъ до тѣхъ поръ, пока у насъ или ничего не останется, или останется число, меньшее 63 р. 25 коп.; число косточекъ, положенныхъ для памяти, покажетъ, сколько разъ 63 р. 25 коп. содержатся въ 379 р. 50 коп. Въ приведенномъ примѣрѣ остатка не получится; а сосчитавъ отложенныя для памяти косточки, найдемъ, что въ частномъ будетъ 6.

Чтобы 58 руб. раздѣлить на 8 частей, сперва въ каждую часть беремъ по 5 руб., что и отмѣчаемъ, откладывая на одной изъ свободныхъ проволокъ 5 косточекъ. Взявъ въ каждую часть по 5 руб., мы раздѣлимъ 5 р. $\times 8 = 40$ р. Скидываемъ ихъ съ 58 р., а изъ оставшихся 18 руб. беремъ въ каждую часть по 2 руб., которые прикладываемъ къ только что отложеннымъ 5 руб. Взявъ въ каждую часть по 2 руб., мы еще раздѣлимъ 2 р. $\times 8 = 16$ р., которые и скидываемъ съ оставшихся 18 руб. Останется дѣлить 2 руб. Такъ какъ отъ ихъ дѣленія полныхъ рублей не получимъ, то беремъ въ каждую часть по 20 коп., которыя откладываемъ на проволокѣ ниже той, гдѣ уже отложены 5 руб. и 2 руб. Раздѣлимъ 20 к. $\times 8 = 1$ р. 60 к., которые сбрасываемъ съ 2 руб. Оставшіяся 40 коп., при дѣленіи на 8, дадутъ еще 5 коп. Такимъ образомъ получимъ 7 р. 25 коп.

216. Умноженіе и дѣленіе именованныхъ чиселъ. Для упражненій слѣдуетъ выбирать только такіе случаи, гдѣ превращеніе сводится къ дѣленію на однозначное число, а раздробленіе – къ умноженію на однозначное число.

Относительно умноженія слѣдуетъ выяснить, что умножать можно только именованное число на отвлеченное, потому что множитель показываетъ, сколько разъ надо взять множимое слагаемымъ.

Относительно дѣленія надо напомнить дѣтямъ двоякое значеніе этого дѣйствія и показать, что въ примѣненіи къ именованнымъ числамъ могутъ быть два случая дѣленія: дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное и дѣленіе именованнаго числа на именованное; что въ первомъ случаѣ частное именованное и показываетъ, какъ велика часть дѣлимаго, а во второмъ частное – отвлеченное и показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.

Дѣленіе именованнаго числа на именованное полезно начать съ дѣленія простого именованнаго числа на простое же именованное низшаго наименованія. На такихъ примѣрахъ особенно удобно выяснить дѣтямъ необходимость приводить дѣлимое и дѣлителя въ единицы одного наименованія. Для этого можно первоначально предоставить дѣтямъ опредѣлить, сколько разъ одно число, напр. 24 лота, содержится въ другомъ, напр. въ 3 фунтахъ, помощію послѣдовательнаго вычитанія дѣлителя изъ дѣлимаго:

32	32	32	
3 ф. + 0 лот.	2 ф. + 8 лот.	1 ф. + 16 лот.	24 лот.
— 24 лот.	— 24 лот.	— 24 лот.	— 24 лот.
2 ф. + 8 лот. ;	1 ф. + 16 лот. ;	24 лот. ;	0 .

Отсюда дѣти увидятъ, что они 3 фунта постепенно раздробили въ лоты, и легко придутъ къ другому рѣшенію вопроса, состоящему въ раздробленіи заразъ всѣхъ 3 фунтовъ въ лоты и въ дѣленіи полученнаго числа на 24.

Умноженіе можно располагать слѣдующимъ образомъ:

37 в. + 170 саж. + 2 арш.		12 | 3	
	× 6	0 | 4	
222	+ 1020	+ 12	1020
224 в. + 24 саж. + 0 арш.			1024 | 500
			24 | 2

Въ этомъ расположеніи сперва найдено непревращенное произведеніе, превращеніе произведено въ сторонѣ, превращенное

произведеніе подписано подъ непревращеннымъ и отдѣлено отъ него чертою. Примѣръ подобранъ такъ, что превращеніе легко произвести устно.

Дѣленіе можно располагать слѣдующимъ образомъ:

387 пуд. + 31 лот. + 2 зол.	5	
37	30	+ 3
40 × 2	1	5 зол.
80 ф.		0
30		
0		

24 вер.	9	55 чтв. 1 чтк. : 7 грнц. = 504
500 × 6	2 в. + 333 саж. + 1 ;	8 × 55
3000 саж.		440
30		+ 1
30		8 × 441
3 × 3		3528 | 7
9 арш.		28 | 504
0		0

Въ послѣднемъ примѣрѣ при раздробленіи, хотя и обозначено, что 8 надо умножить на 55 и 8 на 441, но на самомъ дѣлѣ 55 и 441 умножены на 8. Для объясненія этого отступленія отъ обозначенія надо напомнить дѣтямъ, что произведеніе не измѣняется отъ перестановки множителей, и что удобнѣе умножать на однозначное число, чѣмъ на многозначное.

217. Умноженіе и дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д. основывается на соотношеніяхъ между единицами различныхъ разрядовъ и на тѣхъ же положеніяхъ, какъ умноженіе и дѣленіе на однозначныя числа.

Прежде всего надо выяснить, что единицы каждаго разряда отъ умноженія на 10 обращаются въ единицы слѣдующаго высшаго разряда, для чего могутъ служить слѣдующія упражненія:

Сколько получится отъ умноженія 5, 6, 9 единицъ на 10?—Во что обратятся 5 десятковъ, 8 десятковъ, 40, 90 отъ умноженія на 10? — Сколько получится отъ умноженія 5 сотенъ, 3 тысячъ, 7 десятковъ тысячъ, 6 милліоновъ на 10? — Во что обратятся единицы, десятки, сотни и т. д. отъ умноженія на 10?

Дѣти должны отвѣчать, что отъ умноженія одной единицы получается десятокъ, отъ умноженія одного десятка получается сотня, отъ умноженія одной сотни получается тысяча и т. д.,

потому что 10 единицъ каждаго разряда составляютъ единицу слѣдующаго высшаго разряда; отъ умноженія 6 единицъ получится 6 десятковъ, или 60, отъ умноженія 8 десятковъ получится 8 сотенъ, или 800, и т. д. Послѣ этого возможно давать примѣры на умноженіе многозначнаго числа на 10, которые устно исполняются на основаніи сдѣланнаго вывода, а для письменнаго умноженія выводится правило о приписываніи къ числу нуля съ правой стороны для того, чтобы единицы обратить въ десятки, десятки въ сотни, сотни въ тысячи и т. д.

Умноженіе на 100, на 1000 и т. д. можетъ быть разсмотрѣно такъ же, какъ и умноженіе на 10, при чемъ дѣлается выводъ, что отъ умноженія на 100 единицы множимаго обращаются въ сотни, сотни въ тысячи и т. д.; отъ умноженія на 1000 единицы обращаются въ тысячи, десятки въ десятки тысячъ и т. д., и что вообще отъ умноженія какого-либо числа на 10, 100, 1000 и т. д. единицы его обращаются въ единицы того разряда, къ которому принадлежитъ множитель, десятки — въ единицы слѣдующаго высшаго разряда и т. д. Правило для письменнаго умноженія формулируется въ слѣдующихъ словахъ: чтобы умножить на число, обозначаемое единицей съ нулями, надо къ множимому приписать справа столько нулей, сколько ихъ во множителѣ. Письменное умноженіе располагается въ двухъ видахъ:

$$574 \times 100 = 57400;$$

$$\begin{array}{r} 8204 \\ \times\ 1000 \\ \hline 8204000 \end{array}.$$

218. При дѣленіи на числа, обозначаемыя единицей съ нулями, выводится, что отъ дѣленія числа на 10, десятки его обращаются въ единицы, сотни въ десятки и т. д., а простыя единицы, если онѣ заключаются въ дѣлимомъ, должны получиться въ остаткѣ; что вообще отъ дѣленія на число, обозначаемое единицей съ нулями, единицы одинаковаго разряда съ дѣлителемъ обращаются въ простыя единицы, единицы слѣдующаго высшаго разряда въ десятки и т. д., а единицы низшихъ разрядовъ сравнительно съ дѣлителемъ должны получиться въ остаткѣ. На основаніи этого устанавливается правило для письменнаго дѣленія: чтобы раздѣлить на число, обозначаемое единицей съ нулями, надо въ дѣлимомъ отбросить справа столько цыфръ, сколько нулей въ дѣлителѣ; оставшееся число будетъ частнымъ, а откинутое — остаткомъ. Располагается дѣленіе въ слѣдующихъ двухъ видахъ:

$$\begin{array}{r|l} 83400 & 100 \\ \hline 0 & 834 \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 95732 & 1000 \\ \hline 732 & 95 \end{array}.$$

219. Умноженіе и дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д. на русскихъ счетахъ приводится къ отложенію числа одной или нѣсколькими проволоками выше или ниже сравнительно съ тѣмъ, какъ надо отложить множимое или дѣлимое. Такъ, чтобы 375 руб. 25 коп. умножить на 100, надо отложить это число двумя проволоками выше; получимъ 37525 руб.; чтобы 375 руб. 40 коп. раздѣлить на 10, надо это число отложить одной проволокой ниже; получимъ 37 руб. 54 коп.

220. Умножать и дѣлить на 10, 100, 1000 и т. д. приходится при раздробленіи и превращеніи именованныхъ чиселъ, выраженныхъ въ метрическихъ мѣрахъ; поэтому въ этомъ отдѣлѣ полезно ввести дѣйствія съ именованными числами, выраженными въ метрическихъ мѣрахъ. При дѣйствіяхъ съ составными именованными числами этого рода, можно всѣ данныя числа раздроблять въ единицы низшаго наименованія, производить надъ полученными числами назначенныя дѣйствія и результаты, если можно, превращать. Приводимъ нѣсколько примѣровъ:

1) Сложить 125 кгр. 567 гр. съ 376 кгр. 415 гр. и съ 245 кгр. 612 гр.

125 кгр. 567 гр. = (125 . 1000 + 567) гр. = 125 567 гр.
376 кгр. 415 гр. = (376 . 1000 + 415) гр. = 376 415 гр.
245 кгр. 612 гр. = (245 . 1000 + 612) гр. = 245 612 гр.

$$\begin{array}{r} 125\ 567 \text{ гр.} \\ 376\ 415 \text{ гр.} \\ 245\ 612 \text{ гр.} \\ \hline 747\ 594 \text{ гр.} = 747 \text{ кгр. } 594 \text{ гр.} \end{array}$$

2) Изъ 205 кмтр. вычесть 178 кмтр. 25 дкмтр. 8 мтр.

205 кмтр. = 205 . 1000 мтр. = 205 000 мтр.
178 кмтр. 25 дкмтр. 8 мтр. = (178 . 1000 + 25 . 10 + 8) мтр. = 178 258 мтр.

$$\begin{array}{r} 205\ 000 \text{ мтр.} \\ 178\ 258 \\ \hline 26\ 742 \text{ мтр.} = 26 \text{ кмтр. } 742 \text{ мтр.} \end{array}$$

3) 5 гектолтр. 7 лтр. 8 децилитр. умножить на 5.

5 гектолтр. 7 лтр. 8 дцлтр. = (5 . 1000 + 7 × 10 + 8) дцлтр. = 5078 дцлтр.

$$\begin{array}{r} 5\ 078 \text{ децилтр.} \times 5. \\ \hline 25\ 390 \text{ децилтр.} = 25 \text{ гектолтр. } 3 \text{ декалтр. } 9 \text{ литр.} \end{array}$$

4) 27 кгр. 684 гр. раздѣлить на 6.

27 кгр. 684 гр. = (27 . 1000 + 684) гр. = 27 684 гр.

$$\begin{array}{r|l} 27\ 684 \text{ гр.} & 6 \\ \hline 3\ 6 & 4614 \text{ гр.} = 4 \text{ кгр. } 614 \text{ гр.} \\ \hline 8 & \\ \hline 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

221. Измѣненія суммы. Измѣненія суммы отъ измѣненій въ слагаемыхъ настолько легко и непосредственно вытекаютъ изъ основного понятія о сложеніи, что могутъ быть выведены съ дѣтьми изъ этихъ понятій на отвлеченныхъ примѣрахъ; задачи здѣсь служатъ главнымъ образомъ для иллюстрированія и примѣненія этихъ измѣненій. Прежде всего слѣдуетъ разъяснить дѣтямъ положеніе, что каждая единица, прибавленная къ слагаемому, должна войти и въ сумму, ибо сумма содержитъ въ себѣ всѣ единицы, заключающіяся въ слагаемыхъ. Для этой цѣли можетъ служить задача:

123) Сложить 25 съ 29-ю; сложить 26 съ 29-ю. Какая изъ этихъ суммъ больше?—Почему?

Она требуетъ сравненія двухъ суммъ, въ которыхъ вторыя слагаемыя одинаковы, а первое слагаемое второй суммы превышаетъ соотвѣтствующее слагаемое первой на единицу. Результатъ сравненія двухъ суммъ разъясняется сравненіемъ ихъ слагаемыхъ.

Выводъ формулируется въ слѣдующихъ словахъ:

Отъ прибавленія единицы къ одному изъ слагаемыхъ, и къ суммѣ прибавляется тоже единица, потому что сумма должна заключать въ себѣ всѣ единицы, которыя находятся въ слагаемыхъ, а слѣд. въ нее должна войти и та новая единица, которую только что прибавили къ слагаемому.

Для измѣненія суммы отъ прибавленія къ слагаемому нѣсколькихъ единицъ можетъ служить задача:

124) Въ училищѣ 3 класса: въ 1-мъ классѣ 20 мальчиковъ и 15 дѣвочекъ, во 2-мъ 16 мальчиковъ и 16 дѣвочекъ, въ 3-мъ 10 мальчиковъ и 10 дѣвочекъ. Сколько мальчиковъ въ училищѣ?—сколько дѣвочекъ?—Въ какомъ классѣ мальчиковъ больше, чѣмъ дѣвочекъ?

Работа ведется такъ же, какъ и съ предыдущимъ примѣромъ. Затѣмъ отъ дѣтей требуются отвѣты на вопросы: какъ измѣняется сумма отъ прибавленія къ слагаемому 3-хъ, 5-ти, 17-ти единицъ, и, наконецъ, на общій вопросъ, какъ измѣняется сумма отъ прибавленія къ слагаемому нѣсколькихъ единицъ и отъ чего происходитъ такое измѣненіе. Подобнымъ же путемъ проводятся измѣненія суммы при вычитаніи изъ слагаемаго одной и нѣсколькихъ единицъ, при чемъ дѣти разбираютъ сперва нѣсколько частныхъ случаевъ и затѣмъ выводятъ положеніе въ общемъ видѣ. Послѣ этого идутъ упражненія въ опредѣленіи измѣненій суммы при одновременномъ увеличеніи двухъ слагаемыхъ и въ опредѣленіи измѣненной суммы по данной суммѣ и по даннымъ измѣненіямъ въ слагаемыхъ. Для примѣненія всего изложеннаго можетъ служить задача:

125) На одной фабрикѣ было 240 работниковъ и 160 работницъ, а на другой работниковъ 50-ю больше, а работницъ 30-ю меньше, чѣмъ на первой. На какой фабрикѣ больше работающихъ?

Дѣти обыкновенно рѣшаютъ ее, опредѣляя число всѣхъ работающихъ на первой и на второй фабрикахъ и находя разность между этими числами, для чего имъ приходится произвести 3 сложенія и 2 вычитанія. Одобривъ это рѣшеніе, какъ вѣрное, преподаватель долженъ указать иное рѣшеніе, основанное на измѣненіяхъ суммы отъ измѣненій въ слагаемыхъ и приводящееся только къ одному вычитанію:

Число работающихъ на каждой фабрикѣ есть сумма числа работниковъ и числа работницъ; первое слагаемое второй суммы на 50 больше, а второе на 30 меньше соотвѣтствующихъ слагаемыхъ первой суммы, слѣд. вторая сумма больше первой на 50—30, т.-е. на 20.

Этотъ пріемъ рѣшенія дѣти должны самостоятельно приложить къ задачѣ:

126) Въ двухъ кошелькахъ лежало 1500 руб.; изъ перваго истратили 250 руб., а во второй вложили 150 руб.; сколько денегъ стало въ обоихъ кошелькахъ?

222. Дальнѣйшія упражненія состоятъ: 1) въ опредѣленіи измѣненій суммы при одновременномъ увеличеніи однихъ слагаемыхъ и уменьшеніи другихъ; 2) въ опредѣленіи измѣненной суммы, когда дана начальная сумма и измѣненія, сдѣланныя въ слагаемыхъ; 3) въ примѣненіи выведенныхъ положеній къ производству вычисленій и рѣшенію задачъ; 4) въ опредѣленіи измѣненій, которыя нужно сдѣлать въ слагаемыхъ, чтобы достигнуть желаемаго измѣненія въ суммѣ. Приведемъ примѣры нѣкоторыхъ изъ перечисленныхъ упражненій.

127) $5\,700 + 3\,800 + 1\,400$.

Рѣшеніе. Вмѣсто данныхъ слагаемыхъ беремъ 6 000, 4 000 и 1 000, которыя въ суммѣ дадутъ 11 000; но такъ какъ при этомъ мы прибавили къ первому слагаемому 300 и ко второму 200, а отъ третьяго отняли 400, то полученная сумма на $300+200-400$, т.-е. на 100, больше требуемой; отнявъ 100 отъ 11 000, получимъ требуемую сумму 10 900.

128) Сумма двухъ слагаемыхъ 200. Какъ можно измѣнить слагаемыя, чтобы получить въ суммѣ 150?

Рѣшеніе. Требуемая сумма меньше данной на $200-150=50$. Чтобы уменьшить сумму на 50, можно: 1) отъ одного изъ слагаемыхъ отнять 50; 2) отъ одного слагаемаго отнять часть 50-ти

(напр. 35), а отъ другого остальную часть (15); 3) отъ одного слагаемаго отнять больше 50-ти (напр. 70), зато къ другому слагаемому прибавить столько единицъ (20), на сколько отнятое число превышаетъ 50.

129) Въ училищѣ 6 классовъ. Въ 4-мъ, 5-мъ и 6-мъ классахъ всего 84 ученика; въ 1-мъ классѣ 19-ю учениками больше, чѣмъ въ 4-мъ; во 2-мъ 17-ю больше, чѣмъ въ 5-мъ; въ 3-мъ 10-ю больше, чѣмъ въ 6-мъ. Сколько учениковъ въ этомъ училищѣ?

Рѣшеніе. Число 84 есть сумма трехъ слагаемыхъ: числа учениковъ 4-го, числа учениковъ 5-го и числа учениковъ 6-го классовъ. Чтобы найти число учениковъ во всемъ училищѣ, надо къ ней прибавить также сумму трехъ слагаемыхъ: числа учениковъ 1-го, числа учениковъ 2-го и числа учениковъ 3-го классовъ. Послѣдняя сумма больше первой на 19+17+10, т.-е. на 46, потому что ея слагаемыя превышаютъ соотвѣтствующія слагаемыя первой на 19, 17 и 10. Слѣд., вторая сумма равна 84+46, т.-е. 130, а число учениковъ въ училищѣ есть 84+130=214.

Особенно важное приложеніе измѣненій суммы представляетъ рѣшеніе задачъ, требующихъ дѣленія числа въ разностномъ отношеніи. Рѣшеніе этихъ задачъ разобрано нами выше (страницы 62, 63).

223. Измѣненія разности хорошо объясняются дѣтямъ на основаніи того, что уменьшаемое показываетъ, сколько было всего единицъ, вычитаемое—сколько единицъ отнято и разность—сколько единицъ осталось. Измѣненія разности при измѣненіяхъ уменьшаемаго тѣмъ легче усваиваются, что они одинаковы съ измѣненіями уменьшаемаго. Первымъ упражненіемъ можетъ служить задача:

130) Два брата, изъ которыхъ одинъ получалъ въ годъ 1500 руб., а другой 2000 руб., прожили въ теченіе года по 850 руб. Сколько сберегъ первый братъ?—сколько второй братъ?—который братъ сберегъ больше?—почему?

Она требуетъ сравненія двухъ разностей при одинаковомъ вычитаемомъ. Послѣ этого слѣдуетъ прослѣдить съ дѣтьми на какомъ-либо отвлеченномъ примѣрѣ измѣненія разности отъ прибавленія къ уменьшаемому одной, двухъ и т. д. единицъ, и затѣмъ потребовать отъ дѣтей формулированія правила для этихъ измѣненій. Аналогично выводится правило объ измѣненіяхъ разности при уменьшеніи уменьшаемаго.

Чтобы объяснить измѣненія разности при измѣненіи вычитаемаго, можно взять задачу:

131) Столяръ продалъ два дивана, по 75 руб. за каждый. Сколько прибыли получилъ онъ на каждомъ диванѣ, если первый ему обошелся въ 58 руб., а второй въ 67 руб. отъ котораго дивана получено больше прибыли? Почему?

Она требуетъ сравненія двухъ разностей при одинаковомъ уменьшаемомъ. При измѣненіи вычитаемаго, дѣтей особенно поражаетъ противоположность въ измѣненіи разности и вычитаемаго; поэтому надо постараться хорошо разъяснить, что каждая единица, прибавляемая къ вычитаемому, отнимается отъ разности. Объясненіе можетъ быть основано на томъ, что, прибавивъ къ вычитаемому единицу, мы отъ уменьшаемаго, кромѣ прежнихъ единицъ вычитаемаго, должны будемъ отнять и новую, только что прибавленную, единицу и что эту единицу придется отсчитать отъ того числа, которое прежде получилось въ разности; слѣдовательно новая разность будетъ меньше прежней на единицу. Такъ же объясняется измѣненіе разности отъ прибавленія къ вычитаемому нѣсколькихъ единицъ. Измѣненія разности отъ уменьшенія вычитаемаго уже не встрѣчаютъ затрудненія и объясняются аналогично съ измѣненіями при увеличеніи вычитаемаго. Такъ, если отъ вычитаемаго отнимемъ 3 единицы, то ихъ не придется отсчитывать отъ уменьшаемаго и онѣ останутся въ разности; слѣдовательно новая разность будетъ больше прежней на 3 единицы.

Для измѣненій разности отъ совмѣстныхъ измѣненій въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ служатъ упражненія, аналогичныя съ упражненіями для измѣненій суммы. Въ число этихъ упражненій могутъ быть введены задачи, въ которыхъ по даннымъ лѣтамъ двухъ лицъ требуется опредѣлить, черезъ сколько лѣтъ одно изъ нихъ будетъ въ нѣсколько разъ старше другого, и о рѣшеніи которыхъ нами достаточно сказано выше (стр. 89—90).

При формулированіи всѣхъ правилъ объ измѣненіяхъ суммы и разности слѣдуетъ по возможности избѣгать выраженій „увеличится“ и „уменьшится“, а замѣнять ихъ болѣе опредѣленными указаніями на дѣйствія, которыя совершаются съ результатами при измѣненіи данныхъ.

224. Кромѣ того, изъ правилъ объ измѣненіи суммы и разности полезно сдѣлать слѣдующіе выводы: 1) чтобы прибавить къ суммѣ какое-либо число, достаточно прибавить его къ одному изъ слагаемыхъ; 2) чтобы отъ суммы отнять какое-либо число, достаточно отнять его отъ одного изъ слагаемыхъ; 3) чтобы къ какому-либо числу прибавить сумму нѣсколькихъ чиселъ можно къ этому числу прибавить сперва одно слагаемое, къ полученной суммѣ прибавить другое слагаемое и т. д. до послѣдняго слагаемаго включительно; 4) чтобы къ какому-либо числу прибавить разность двухъ чиселъ, можно прибавить къ нему уменьшаемое и изъ полученной суммы вычесть вы-

читаемое; 5) чтобы изъ какого-либо числа вычесть сумму нѣсколькихъ слагаемыхъ, можно вычесть изъ него одно слагаемое, изъ полученной разности вычесть другое слагаемое и т. д. до послѣдняго слагаемаго включительно; 6) чтобы изъ какого-либо числа вычесть разность двухъ чиселъ, можно вычесть изъ него уменьшаемое и къ полученной разности прибавить вычитаемое, или прибавить вычитаемое и изъ суммы вычесть уменьшаемое. Всѣ эти положенія или непосредственно вытекаютъ изъ правилъ объ измѣненіи суммы и разности, или могутъ быть очень легко разъяснены на основаніи этихъ правилъ. Для каждаго случая необходимо подобрать подходящіе примѣры и задачи.

Напр. для разъясненія послѣдняго вывода можно взять вычитаніе 298-ми изъ 500, которое производится слѣдующимъ образомъ:

Вычтемъ сперва 300 изъ 500, получимъ 200. Но вычитая 300, вмѣсто 298-ми, мы къ вычитаемому прибавили 2 единицы, отчего разность уменьшилась на 2 единицы; слѣд. для опредѣленія вѣрной разности надо къ полученной разности 200 прибавить 2 единицы; получимъ 202.

Затѣмъ останется обратить вниманіе дѣтей на то, что 298 есть разность между 300 и 2-мя и что для ея вычитанія изъ 500, мы вычли сперва уменьшаемое 300 и къ полученной разности 200 прибавили вычитаемое 2. Полезно этотъ примѣръ облечь въ форму задачи:

132) Купецъ изъ взятыхъ съ собою 500 рублей отдалъ въ уплату за купленный товаръ 300 руб. и получилъ сдачи 2 рубля. Сколько денегъ у него осталось?

Она можетъ быть рѣшена двумя пріемами:

Первое рѣшеніе. Чтобы узнать, что стоилъ товаръ, надо изъ 300 рублей вычесть 2 рубля, а чтобы узнать, сколько денегъ осталось у купца, надо эту разность 298 руб. вычесть изъ 500 руб.; получится 202 рубля.

Второе рѣшеніе. Когда купецъ отдалъ въ уплату за товаръ 300 рублей, то у него осталось $500 - 300 = 200$ руб., а когда онъ получилъ 2 рубля сдачи, то у него стало на 2 рубля больше, т.-е. 202 рубля.

225. Для того, чтобы освѣтить возможно больше измѣненія суммы и разности, полезно заставлять дѣтей облекать въ форму задачъ различные примѣры этихъ измѣненій, и на соотношенія величинъ, входящихъ въ задачи, провѣрять найденныя соотношенія между измѣненіями данныхъ и результатовъ дѣйствій. Съ

этой цѣлью въ нашемъ задачникѣ помѣщенъ цѣлый рядъ упражненій, въ которыхъ требуется составить задачу для какого-либо дѣйствія съ данными числами, затѣмъ сдѣлать указанныя измѣненія въ данныхъ и, сообразно съ каждымъ изъ этихъ измѣненій, измѣнить составленную задачу.

226. Въ числѣ упражненій этого отдѣла находятся нѣсколько задачъ, въ которыхъ по ошибочному результату ряда сложеній и вычитаній требуется опредѣлить вѣрный результатъ. Рѣшеніе такихъ задачъ заставитъ дѣтей вдуматься какъ въ пріемы вычисленій, такъ и въ зависимость между числами въ каждомъ дѣйствіи. Эти задачи имѣютъ еще и то значеніе, что вводятъ дѣтей въ область разсужденій надъ отвлеченными числами. Приведемъ нѣкоторыя задачи.

133) Ученику надо было изъ нѣкотораго числа вычесть 3789 и разность сложить съ числами 4512 и 8675, а онъ, чтобы сдѣлать скорѣе, къ уменьшаемому прибавилъ 35, вмѣсто вычитаемаго взялъ 3800, а вмѣсто двухъ послѣднихъ слагаемыхъ взялъ 4500 и 8700, и получилъ 15 400. Изъ какого числа надо было вычесть 3789?—Найти вѣрную сумму.

Рѣшеніе. 15 400 есть сумма трехъ чиселъ: разности, 4500 и 8700; поэтому, чтобы найти эту разность, надо изъ 15 400 вычесть сумму $4500 + 8700 = 13\,200$; получимъ $15\,400 - 13\,200 = 2\,200$. Если же разность равна 2200, а за вычитаемое ученикъ взялъ 3800, то уменьшаемое у него было $2200 + 3800 = 6000$. Но это уменьшаемое ученикъ получилъ, прибавивъ къ истинному 35; слѣд. истинное уменьшаемое было $6000 - 35 = 5965$. Чтобы найти вѣрную сумму, замѣчаемъ, что, прибавивъ къ уменьшаемому 35 и къ вычитаемому $3800 - 3789 = 11$, ученикъ увеличилъ разность на $35 - 11 = 24$ единицы, второе слагаемое уменьшилъ на $4512 - 4500 = 12$ и третье увеличилъ на $8700 - 8675 = 25$ и отъ этого получилъ въ суммѣ на $24 + 25 - 12 = 37$ единицъ больше; поэтому вѣрная сумма равна $15\,400 - 37 = 15\,363$.

134) При вычитаніи сдѣлали слѣдующія ошибки: въ уменьшаемомъ цыфру единицъ 6 приняли за 0, а въ вычитаемомъ цыфру сотенъ 7 приняли за единицу и цыфру тысячъ 5 за 3; въ разности получили 3268. Найти вѣрную разность.

Рѣшеніе. Уменьшаемое уменьшили на 6 единицъ, а вычитаемое на $700 - 100 = 600$, вслѣдствіе ошибки въ цыфрѣ сотенъ, и на $5000 - 3000 = 2000$, вслѣдствіе ошибки въ цыфрѣ тысячъ, т.-е. всего вычитаемое уменьшили на $600 + 2000 = 2600$. Отъ измѣненія уменьшаемаго разность уменьшилась на 6, а отъ измѣненія вычитаемаго она увеличилась на 2600; слѣд. въ окончательномъ результатѣ она увеличилась на $2600 - 6 = 2594$ и стала равна 3268. Истинная разность равна $3268 - 2594 = 674$.

227. Измѣненія произведенія при измѣненіяхъ множителей можно вывести, разсматривая произведеніе какъ сумму равныхъ слагаемыхъ. Начинаемъ мы съ измѣненій произведенія при измѣненіяхъ множителя, потому что они непосредственнѣе и легче вытекаютъ изъ понятія объ умноженіи.

Исходнымъ пунктомъ можетъ служить задача.

135) Одинъ покупатель купилъ 4 арш. сукна, по 3 р. 50 к. за аршинъ, а другой 5 арш. такого же сукна. Сколько заплатилъ каждый?—на сколько второй заплатилъ больше?—почему?

Она требуетъ сравненія двухъ произведеній, въ которыхъ, при одинаковомъ множимомъ, множитель второго на 1-цу больше множителя перваго. Результатъ сравненія разъясняется указаніемъ на то, что оба произведенія представляютъ суммы одинаковыхъ слагаемыхъ, но только во второй суммѣ однимъ слагаемымъ больше. Сдѣланный выводъ провѣряютъ на отвлеченныхъ примѣрахъ, при чемъ для наглядности полезно произведенія записывать въ видѣ суммъ равныхъ слагаемыхъ, напр.

$$15 \times 5 = 15 + 15 + 15 + 15 + 15 \quad = 75$$
$$15 \times 6 = 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 90$$

Выводъ формулируется въ слѣдующихъ словахъ: отъ прибавленія къ множителю единицы, къ произведенію прибавляется множимое. Затѣмъ, на отвлеченныхъ примѣрахъ прибавляютъ къ множителю 2, 3, 4 единицы и совершенно такимъ же путемъ приходятъ къ выводу, что отъ прибавленія къ множителю нѣсколькихъ единицъ, столько же множимыхъ прибавляется къ произведенію. Измѣненія произведенія при вычитаніи изъ множителя одной и нѣсколькихъ единицъ проводятся совершенно такъ же.

Для вывода измѣненій произведенія отъ умноженія множителя на какое-либо число можетъ служить задача:

136) Въ книжный магазинъ доставили изъ типографіи сперва 8 пачекъ книгъ, по 25 штукъ въ каждой, затѣмъ 8 такихъ же пачекъ и наконецъ опять 8 такихъ же пачекъ. Сколько доставлено книгъ въ первый разъ? сколько доставлено книгъ въ первые два раза? сколько доставлено книгъ во всѣ три раза?

При рѣшеніи объясняется, что для опредѣленія числа книгъ, доставленныхъ въ первый разъ, надо 25 умножить на 8; для опредѣленія числа книгъ, доставленныхъ въ первые два раза, можно или 25 умножить на 16, или сложить 200 съ 200; для опредѣленія числа книгъ, доставленныхъ во всѣ три раза, можно или 25

умножить на 24, или 200 сложить съ 200 и еще съ 200. Такимъ образомъ получимъ три произведенія:

$$25 \times 8 = 200,$$
$$25 \times 16 = 200 + 200 = 400,$$
$$25 \times 24 = 200 + 200 + 200 = 600,$$

самое образованіе которыхъ показываетъ, что отъ умноженія множителя на 2 и произведеніе умножается на 2; что отъ умноженія множителя на 3, произведеніе умножается на 3. Примѣняя этотъ выводъ къ отвлеченнымъ примѣрамъ, дѣти не только опредѣляютъ измѣненія произведенія, но и объясняютъ ихъ. Объясненіе можетъ быть дано приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Умноживъ въ умноженіи $50 \times 7 = 350$ множителя на 3, мы къ нему прибавимъ сперва 7 единицъ, отъ чего къ произведенію прибавится 7 разъ 50, т.-е. 350; потомъ къ множителю еще прибавимъ 7 единицъ, отъ чего къ произведенію опять прибавится 7 разъ 50, т.-е. 350; слѣдоват., произведеніе обратится въ $350 + 350 + 350$, т.-е. оно умножится на 3.

Объясненіе измѣненій произведенія отъ дѣленія множителя можетъ быть основано на томъ, что если мы множителя, раздѣленнаго напр. на 3, снова умножимъ на 3, то должны изъ измѣненнаго произведенія получить прежнее произведеніе, а слѣд., измѣненное произведеніе въ 3 раза меньше прежняго.

228. Для пониманія измѣненій произведенія отъ измѣненій во множимомъ, весьма важно разъяснить дѣтямъ измѣненія суммы и разности отъ умноженія данныхъ чиселъ на одно и то же число. Для этой цѣли могутъ служить упражненія, подобныя слѣдующимъ:

137) Сложить 750 съ 250. Какая получится сумма, когда къ первому слагаемому прибавимъ 750 и ко второму 250?—во сколько разъ она больше первой?—почему?

Рѣшеніе. Получимъ въ суммѣ 1000. Когда къ первому слагаемому прибавимъ 750, то и къ суммѣ прибавится 750; когда ко второму слагаемому прибавимъ 250, то къ суммѣ прибавится еще 250; слѣд., къ суммѣ прибавится всего $750 + 250 = 1000$ и она обратится въ $1000 + 1000 = 2000$. Сумма стала вдвое больше первой, потому что къ каждому слагаемому прибавилось столько единицъ, сколько въ немъ было сначала, а отъ этого и къ суммѣ прибавилось столько единицъ, сколько въ ней было сначала.

138) Какъ измѣнится сумма, если каждое слагаемое умножить на 3?

Рѣшеніе. Сумма умножится на 3. Дѣйствительно, чтобы умножить каждое слагаемое на 3, можно къ каждому изъ нихъ прибавить по стольку единицъ, сколько въ немъ было сначала, и

затѣмъ то же самое сдѣлать во второй разъ. Когда мы въ первый разъ сдѣлаемъ это, то къ суммѣ прибавится столько единицъ, сколько въ ней было сначала; то же произойдетъ и во второй разъ; слѣд. сумма утроится.

139) Три мальчика снимали въ саду яблоки въ теченіе 3-хъ дней; въ первый день старшій мальчикъ снялъ 250 яблокъ, средній — 200 и младшій — 150; во второй и третій день они продолжали работу съ такимъ же успѣхомъ. Сколько яблокъ сняли мальчики въ первый день? — Сколько яблокъ они сняли во всѣ три дня?

Рѣшеніе. Въ первый день мальчики сняли $250+200+150=600$ яблокъ; во всѣ три дня $250.3+200.3+150.3=750+600+450=1800$, или иначе и проще: $600.3=1800$.

Затѣмъ весьма важно разъяснить измѣненія суммы, происходящія отъ прибавленія поровну къ каждому слагаемому. Для примѣра приводимъ задачу:

140) У хозяйки ежемѣсячно выходило 1 пудъ муки въ 2 р. 40 коп., мѣра крупъ въ 1 р. 50 коп., мѣра картофеля въ 40 коп. и 1 саж. дровъ въ 4 р. 50 к. Сколько лишнихъ денегъ затратитъ хозяйка на эти продукты, если каждый изъ нихъ вздорожаетъ на 10 коп.?

Измѣненія произведенія отъ прибавленія къ множимому и отъ вычитанія изъ него одной единицы объясняются слѣдующимъ образомъ:

Прибавивъ къ множимому единицу, мы прибавимъ къ каждому слагаемому по единицѣ; отъ этого и къ суммѣ ихъ, т.-е. къ произведенію, прибавится столько единицъ, сколько было слагаемыхъ, т.-е. прибавится множитель; вычтя изъ множителя единицу, мы отъ каждаго слагаемаго отнимемъ по единицѣ, отъ этого и отъ суммы ихъ отнимется столько единицъ, сколько всѣхъ слагаемыхъ, т.-е. отнимется множитель.

Разъ это установлено, уже не трудно вывести, что отъ прибавленія къ множимому или отъ вычитанія изъ него нѣсколькихъ единицъ, столько же множителей прибавится или вычтется изъ произведенія.

Объясненіе измѣненій произведенія отъ умноженія множимаго на какое-либо число, можно основать на измѣненіи суммы отъ умноженія каждаго слагаемаго на одно и то же число. Для примѣра приводимъ упражненія:

141) Умножить 12 на 5. Какое произведеніе получится, когда къ множимому прибавимъ 12 единицъ? — во сколько разъ оно больше перваго произведенія? — почему? — Какое произведеніе получится, когда къ множимому прибавимъ

еще 12 единицъ?—во сколько разъ оно больше перваго произведенія?—почему?—Какое произведеніе получится, когда къ множимому прибавимъ еще 12 единицъ? — во сколько разъ оно больше перваго произведенія?—почему?

Рѣшеніе. Отъ умноженія 12 на 5 получится 60. Когда къ множимому прибавить 12 единицъ, то придется множить на 5 сумму двухъ слагаемыхъ $12+12$, изъ которыхъ каждое даетъ въ произведеніи 60; слѣд. въ произведеніи получимъ $60+60=120$. Второе произведеніе вдвое больше перваго, потому что множимое во второмъ случаѣ вдвое больше перваго. Такъ же объясняется и вторая часть задачи.

142) Какъ измѣнится произведеніе, если множимое умножить на 6?

Рѣшеніе. Произведеніе умножится на 6, потому что въ немъ каждое слагаемое умножится на 6.

229. Упражненія въ измѣненіи произведенія при одновременныхъ измѣненіяхъ множимаго и множителя легко выполняются дѣтьми, если требуется опредѣлить измѣненное произведеніе; но если требуется опредѣлить, какъ измѣнится произведеніе при данныхъ измѣненіяхъ во множимомъ и во множителѣ, то въ бо́льшей части случаевъ дѣти ошибаются, полагая, что при умноженіи множимаго на одно число и множителя на другое, произведеніе умножится на сумму этихъ чиселъ, а не на ихъ произведеніе; что при дѣленіи каждаго множителя, произведеніе раздѣлится на сумму дѣлителей, а не на ихъ произведеніе; что при умноженіи одного множителя на какое-либо число и при дѣленіи другого множителя на другое число, произведеніе умножится или раздѣлится на разность этихъ чиселъ, вмѣсто ихъ частнаго. Объяснить эти ошибки дѣтямъ, исходя изъ понятія объ умноженіи, нѣсколько трудно; болѣе понятнымъ для нихъ является сопоставленіе измѣненныхъ произведеній съ начальными. Такъ, найдя, во что обратится произведеніе 300, когда множимое умножится на 3, а множитель умножится на 4, можно заставить дѣтей сравнить полученное произведеніе 3600 съ начальнымъ и вывести, что начальное произведеніе умножилось на 12, т.-е. на произведеніе 4×3. Нѣсколько такихъ сопоставленій въ различныхъ случаяхъ совмѣстнаго измѣненія множителей пріучаютъ дѣтей отдавать себѣ ясный отчетъ, какъ измѣняется произведеніе въ каждомъ изъ этихъ случаевъ.

230. Каждый выводъ относительно измѣненія произведенія долженъ сопровождаться цѣлымъ рядомъ упражненій. Одни изъ нихъ назначаются для закрѣпленія вывода, другія для примѣненія его къ вычисленіямъ и рѣшенію задачъ. Только послѣ этого можно переходить къ слѣдующему выводу. Если же сперва сдѣлать всѣ выводы, а потомъ уже дать ихъ примѣненіе, то работа будетъ

имѣть монотонный характеръ, дѣти легко спутаютъ различные выводы между собою и не усвоятъ пройденнаго основательно. Вообще, каждое теоретическое положеніе дѣти цѣнятъ по стольку, по скольку оно можетъ быть примѣнено къ вычисленіямъ и рѣшенію задачъ.

Относительно измѣненій произведенія упражненія могутъ быть слѣдующихъ видовъ: 1) опредѣлить, какъ измѣнится произведеніе при данныхъ измѣненіяхъ во множителяхъ, 2) найти измѣненное произведеніе по начальному и по даннымъ измѣненіямъ во множителяхъ, 3) опредѣлить измѣненія во множителяхъ, необходимыя для того, чтобы получить опредѣленное измѣненіе въ произведеніи, 4) приложеніе измѣненій произведенія къ производству вычисленій и 5) приложеніе измѣненій произведенія къ рѣшенію задачъ. Приведемъ образцы нѣкоторыхъ упражненій.

143) Произведеніе 600. Какъ можно измѣнить множителей, чтобы получить въ произведеніи 50?

Рѣшеніе. Произведеніе требуется уменьшить въ 600 : 50, т.-е. въ 12 разъ. Для этого можно: 1) одного изъ множителей раздѣлить на 12, если онъ дѣлится на это число; 2) одного множителя раздѣлить на 4, другого на 3; 3) одного множителя раздѣлить на число въ 2, и т. д. раза больше 12-ти, если онъ дѣлится безъ остатка, а другого умножить соотвѣтственно на 2, на 3 и т. д.

144) Произведеніе 150, одинъ множитель въ 6 разъ больше другого. Какое получится произведеніе, если меньшій множитель сдѣлается равнымъ большему?

Рѣшеніе. Когда меньшій множитель сдѣлается равнымъ большему, то онъ увеличится въ 6 разъ, а отъ этого и произведеніе увеличится въ 6 разъ и обратится въ $150 \times 6 = 900$.

145) Вычисленія. $48 \times 3 + 56 = ?$; $2 \times 395 + 210 = ?$

$25 \times 12 - 297 = ?$; $(60 \times 7) : (12 \times 7) = ?$

Рѣшеніе. Въ первомъ вычисленіи вмѣсто 48, умножаемъ 50 на 3, но такъ какъ къ множимому прибавили 2 единицы, то надо отъ произведенія 150 отнять 2 множителя, т.-е. 6. Во второмъ вычисленіи, вмѣсто 395, умножаемъ 2 на 400, но такъ какъ мы при этомъ къ множителю прибавили 5 единицъ, то отнимаемъ отъ полученнаго произведенія 5 множимыхъ, т.-е. 10. Въ третьемъ вычисленіи, умножаемъ 25 на 4, но такъ какъ мы при этомъ множителя раздѣлили на 3, то полученное произведеніе 100 умножаемъ на 3. Въ четвертомъ вычисленіи замѣчаемъ, что въ обоихъ произведеніяхъ множители одинаковы; а потому, чтобы узнать, во сколько разъ первое произведеніе больше второго, надо раздѣлить первое множимое 60 на второе 12; получаемъ въ отвѣтѣ 5.

146) На сколько умножится число, если его умножить на 60 и полученное произведеніе раздѣлить на 4?

Рѣшеніе. Произведеніе раздѣлится на 4, когда одинъ изъ множителей раздѣлится на 4; такъ какъ первый множитель остался безъ перемѣны, то второй 60 раздѣлился на 4; слѣд. число умножилось на 15.

147) Какъ умножить число на разность между 10-ю и 2-мя, не находя этой разности?

Рѣшеніе. Умноживъ число на 10, вмѣсто 10—2, мы къ множителю прибавимъ 2 единицы, поэтому отъ полученнаго произведенія надо будетъ отнять 2 множимыхъ; отсюда слѣдуетъ, что множимое можно отдѣльно умножить на 10 и на 2 и изъ перваго произведенія вычесть второе.

Примѣры полезно облекать въ форму конкретныхъ задачъ, двоякое рѣшеніе которыхъ можетъ значительно помочь толковому усвоенію разбираемаго отдѣла. Приводимъ для образца одну задачу съ ея рѣшеніями.

148) Съ завода отправили 9 подводъ съ посудой, на каждой по 2 ящика и въ каждомъ ящикѣ по 45 дюжинъ тарелокъ. Сколько тарелокъ отправлено съ завода?

Первое рѣшеніе. Узнаемъ сперва, сколько всего ящиковъ было отправлено; для этого надо 2 умножить на 9, получимъ 18. А такъ какъ въ каждомъ ящикѣ было по 45 дюжинъ тарелокъ, то чтобы узнать, сколько всѣхъ тарелокъ отправлено съ завода, останется 45 умножить на полученное произведеніе 18.

Второе рѣшеніе. Узнаемъ, сколько тарелокъ было отправлено на каждой подводѣ; для этого надо 45 дюжинъ умножить на 2, получимъ 90. А такъ какъ всѣхъ подводъ было 9, то для рѣшенія задачи останется 90 умножить на 9.

231. Измѣненія частнаго представляютъ одно изъ самыхъ трудныхъ мѣстъ курса. Объясняется это болѣе сложною, сравнительно съ другими дѣйствіями, зависимостью между числами въ дѣленіи и двоякимъ значеніемъ этого дѣйствія.

Удобнѣе всего начать съ измѣненій частнаго отъ прибавленія къ дѣлимому и отъ вычитанія изъ него кратныхъ дѣлителя. Для этой цѣли могутъ служить упражненія, подобныя слѣдующимъ:

149) Барышникъ купилъ 8 лошадей за 1600 руб., а продалъ ихъ по одинаковой цѣнѣ и получилъ на всѣхъ 400 руб. прибыли. Почемъ онъ продавалъ каждую лошадь?

Первое рѣшеніе. Узнаемъ, во что обошлась ему каждая лошадь; для этого 1600 руб. раздѣлимъ на 8, получимъ 200 руб. Потомъ узнаемъ, сколько прибыли получилъ онъ на каждой лошади; для этого 400 руб. раздѣлимъ на 8, получимъ 50 руб. Тогда, сложивши 200 руб. съ 50 руб., узнаемъ, что онъ каждую лошадь продавалъ за 250 руб.

Второе рѣшеніе. Узнаемъ сперва, за сколько онъ продалъ всѣхъ лошадей; для этого надо сложить 1600 руб. съ 400 руб., получимъ 2000 руб. А тогда для рѣшенія задачи останется раздѣлить 2000 руб. на 8, что дастъ 250 руб.

150) Торговецъ за 6 кусковъ полотна заплатилъ 120 руб., а продалъ ихъ за 150 руб.; сколько прибыли получилъ онъ на каждомъ кускѣ?

Первое рѣшеніе. Кусокъ полотна стоилъ торговцу 120 : 6=20 р., а продалъ онъ его за 150 : 6 = 25 руб.; слѣд., на каждомъ кускѣ имѣлъ прибыли 25 — 20 = 5 руб.

Второе рѣшеніе. На 6 кускахъ торговецъ получилъ прибыли 150—120=30 руб.; слѣд. на каждомъ кускѣ 30 : 6=5 руб.

Изъ сопоставленія такихъ рѣшеній не трудно вывести правило о дѣленіи суммы и разности на какое-либо число. Правило это можно примѣнить къ хорошо подобраннымъ примѣрамъ на вычисленіе, каковы:

151) (1200 : 3+240 : 3)—1440 : 3
152) (20000 : 5—15 : 5)—19 985 : 5
153) 81360 : 9+1440 : 12—695 : 5

Первые два примѣра даютъ въ результатѣ 0, и этотъ результатъ можетъ быть найденъ безъ всякихъ вычисленій, если обратить вниманіе на то, что въ первомъ примѣрѣ въ скобкахъ дѣлятся слагаемыя на 3, а внѣ скобокъ ихъ сумма, а во второмъ—въ скобкахъ уменьшаемое и вычитаемое, а внѣ скобокъ—ихъ разность. Въ третьемъ примѣрѣ дѣти должны 81 360 разложить на слагаемыя 81000 и 360, изъ которыхъ каждое легко дѣлится на 9; 1440 — разложить на слагаемыя 1200 и 240, изъ которыхъ каждое легко дѣлится на 12, и 695 разсматривать, какъ разность 700 и 5.

232. Для измѣненій частнаго отъ умноженія дѣлимаго на какое-либо число могутъ служить слѣдующія двѣ задачи:

154) Въ поѣздъ, состоящій изъ 8 вагоновъ, на станціи отправленія помѣстилось 72 человѣка, поровну въ каждый вагонъ; на слѣдующей станціи въ поѣздъ сѣло 72 человѣка, также поровну въ каждый вагонъ; на слѣдующей станціи въ поѣздъ сѣло еще 72 человѣка, также поровну въ каждый вагонъ. Сколько пассажировъ помѣщалось въ каждомъ вагонѣ при отправленіи поѣзда? — сколько послѣ выхода его со второй станціи? — сколько послѣ выхода его съ третьей станціи?

155) Двадцать четыре работника за первую недѣлю работы получили 96 рублей, поровну каждый работникъ; во вторую недѣлю они опять заработали 96 руб.; въ третью недѣлю они заработали еще 96 руб. Сколько заработалъ каждый работникъ въ первую недѣлю? — Сколько въ первыя двѣ недѣли?—Сколько во всѣ три недѣли?

Каждая задача разбирается отдѣльно. Въ каждой изъ нихъ разъясняется, что для рѣшенія второго вопроса можно или удвоить частное, полученное при рѣшеніи перваго вопроса, или суммы 72 + 72 и 96 + 96 раздѣлить на соотвѣтствующихъ дѣлителей; а для рѣшенія третьяго вопроса можно или утроить частное, полученное при рѣшеніи перваго вопроса, или суммы 72 + 72 + 72 и 96+96+96 раздѣлить на соотвѣтствующихъ дѣлителей. Рѣшеніе записывается въ слѣдующей формѣ:

72 : 8=9	96 : 24=4
(72+72) : 8=9+9=18	(96+96) : 24=4+4=8
(72+72+72) : 8=9+9+9=27	(96+96+96) : 24=4+4+4=12

Какъ указанный способъ рѣшенія, такъ и сдѣланная запись приведутъ дѣтей къ заключенію, что если къ дѣлимому прибавить дѣлимое же, т.-е. умножить дѣлимое на 2, то и частное умножится на 2; если дѣлимое утроить, то и частное утроится. Провѣряя сдѣланный выводъ на отвлеченныхъ примѣрахъ, дѣти объясняютъ измѣненія частнаго приблизительно въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Умножить дѣлимое, напр., на 3, значитъ къ дѣлимому прибавить дѣлимое же и къ полученной суммѣ снова прибавить дѣлимое; отъ этого къ частному каждый разъ будетъ прибавляться прежнее частное и, слѣд., частное умножится на 3.

Измѣненія частнаго отъ дѣленія дѣлимаго на какое-либо число можно объяснить слѣдующимъ образомъ:

Когда дѣлимое, раздѣленное, напр., на 3, снова умножимъ на 3, то изъ измѣненнаго частнаго должны получить опять прежнее частное; а такъ какъ при этомъ измѣненное частное должно умножиться на 3, то, слѣд., оно меньше прежняго въ 3 раза.

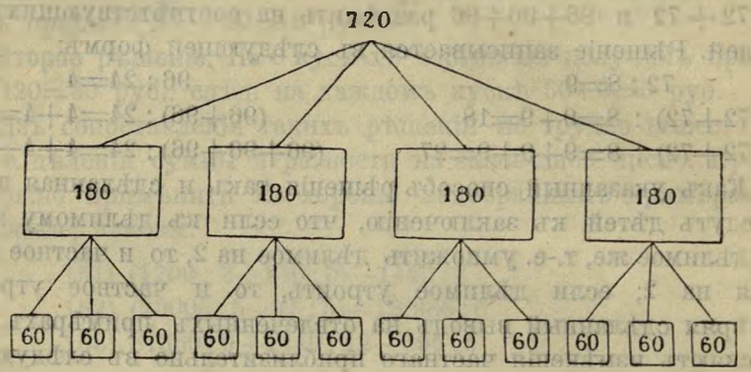
Хорошей иллюстраціей здѣсь можетъ служить задача:

156) Разносчикъ первую сотню яблокъ продалъ за 6 руб., а вторую долженъ былъ уступить за половину этой цѣны. Почемъ онъ продавалъ каждое яблоко изъ первой сотни?—изъ второй?—во сколько разъ яблоко изъ второй сотни дешевле яблока изъ первой?—почему?

233. Для объясненія измѣненій частнаго отъ измѣненій дѣлителя можетъ служить слѣдующая задача съ ея видоизмѣненіями, сообразно измѣненіямъ дѣлителя:

157) 720 яблокъ разложены поровну въ 4 ящика. Сколько яблокъ въ каждомъ ящикѣ?

Послѣ рѣшенія (720 : 4 = 180) преподаватель предлагаетъ дѣтямъ сосчитать, сколько яблокъ будетъ въ каждой корзинѣ, если яблоки изъ каждаго ящика переложить въ 3 корзины, поровну въ каждую, и во сколько корзинъ тогда будутъ разложены всѣ яблоки. Затѣмъ можно предложить рѣшить тѣ же вопросы, когда яблоки будутъ переложены изъ каждаго ящика въ 4, 5 и т. д. корзинъ, поровну въ каждую. Для наглядности эти переложенія можно пояснить схематически рисунками, одинъ изъ которыхъ здѣсь приводимъ:



Работа оканчивается выводомъ, что отъ умноженія дѣлителя на 3, 4, 5 и т. д. частное дѣлится на 3, 4, 5 и т. д. Прилагая этотъ выводъ къ отвлеченнымъ примѣрамъ, дѣти объясняютъ измѣненія частнаго приблизительно въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

Умножая дѣлителя на 6, мы изъ каждой прежней части желаемъ сдѣлать 6 новыхъ частей, и потому прежнее частное дѣлимъ на 6.

Для поясненія измѣненій частнаго отъ дѣленія дѣлителя можетъ служить задача:

158) Въ 18 корзинъ набрали 3600 грушъ, поровну въ каждую; сколько грушъ въ каждой корзинѣ? Для перевозки въ Москву эти груши переложили въ ящики. Сколько ящиковъ понадобилось и по скольку грушъ было въ каждомъ, если изъ каждыхъ двухъ корзинъ груши переложили въ одинъ ящикъ?—если груши изъ каждыхъ трехъ корзинъ переложили въ одинъ ящикъ?—изъ каждыхъ 6-ти корзинъ въ одинъ ящикъ?—изъ каждыхъ 9 корзинъ въ одинъ ящикъ?

Сообразно съ этой задачей легко видоизмѣнить и приведенный схематическій чертежъ. Объясненіе для отвлеченныхъ примѣровъ дѣлается въ слѣдующей формѣ:

Дѣля дѣлителя на 4, мы соединяемъ каждыя 4 прежнихъ части въ одну новую, и потому новое частное должно быть въ 4 раза больше прежняго.

Измѣненія частнаго при измѣненіи дѣлителя можно закончить выводомъ правилъ, какъ дѣлить число на произведеніе двухъ другихъ чиселъ и на частное отъ дѣленія двухъ чиселъ. Для этой цѣли могутъ служить задачи:

159) Отрядъ солдатъ въ 2400 человѣкъ былъ отправленъ въ 5-ти поѣздахъ желѣзной дороги, по 12 вагоновъ въ каждомъ поѣздѣ. Сколько человѣкъ помѣщалось въ каждомъ вагонѣ?

Первое рѣшеніе. Въ каждомъ поѣздѣ было по 2400 : 5 = 480 человѣкъ, а въ каждомъ вагонѣ по 480 : 12 = 40 человѣкъ.

Второе рѣшеніе. Всего вагоновъ было 12 . 5 = 60, въ каждомъ вагонѣ находилось по 2400 : 60 = 40 человѣкъ.

160) Торговецъ купилъ партію вина за 3600 руб., при чемъ каждая бочка въ 50 ведеръ обошлась ему въ 900 руб. Сколько ведеръ вина онъ купилъ?

Первое рѣшеніе. Торговецъ купилъ 3600 : 900 = 4 бочки; въ 4 бочкахъ было 50 × 4 = 200 ведеръ.

Другое рѣшеніе. Каждое ведро обошлось торговцу въ 900 : 50 = 18 руб.; слѣд. онъ купилъ 3600 : 18 = 200 ведеръ вина.

234. Измѣненія частнаго при совмѣстныхъ измѣненіяхъ дѣлимаго и дѣлителя вызываютъ со стороны дѣтей такія же недоразумѣнія и могутъ быть разъяснены тѣмъ же путемъ, какъ и аналогичныя измѣненія произведенія. При совмѣстныхъ измѣненіяхъ дѣлимаго и дѣлителя надо обратить особое вниманіе на случаи неизмѣняемости частнаго, которые объясняются обычнымъ путемъ.

235. Всѣ разсмотрѣнныя измѣненія частнаго относятся къ дѣленію безъ остатка; когда въ дѣленіи получается остатокъ, то измѣненія частнаго могутъ отступать отъ выведенныхъ правилъ, за исключеніемъ правила о неизмѣняемости частнаго отъ умноженія или дѣленія дѣлимаго и дѣлителя на одно и то же число, и отъ прибавленія къ дѣлимому и отъ вычитанія изъ него кратныхъ дѣлителя.

236. Матеріалъ для примѣненія положеній объ измѣненіяхъ частнаго заключается: 1) въ опредѣленіи измѣненій частнаго по даннымъ измѣненіямъ дѣлимаго и дѣлителя; 2) въ опредѣленіи измѣненнаго частнаго по данному частному и измѣненіямъ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ; 3) въ опредѣленіи измѣненій, которыя необходимо сдѣлать въ данныхъ числахъ для того, чтобы до-

стигнуть желаемаго измѣненія въ частномъ; 4) въ приложеніи измѣненій частнаго къ вычисленіямъ и къ рѣшенію задачъ. Приводимъ нѣкоторыя изъ этихъ упражненій.

161) Въ какомъ изъ дѣленій удобнѣе прибавить къ дѣлимому, въ какомъ удобнѣе отнять дѣлителя, повтореннаго нѣсколько разъ:

$$392:4,\ 144:12,\ 375:75,\ 27:8?$$

Рѣшеніе. Въ первомъ дѣленіи можно къ дѣлимому прибавить удвоеннаго дѣлителя; тогда придется дѣлить 400 на 4 и отъ полученнаго частнаго отнять 2 единицы. Во второмъ надо отъ дѣлимаго отнять удвоеннаго дѣлителя; тогда придется дѣлить 120 на 12 и къ полученному частному прибавить 2 единицы. Въ третьемъ дѣленіи надо отъ дѣлимаго отнять дѣлителя; тогда придется 300 дѣлить на 75 и къ полученному частному прибавить единицу. Въ четвертомъ дѣленіи можно отъ дѣлимаго отнять учетвереннаго дѣлителя; тогда придется 240 дѣлить на 8 и къ полученному частному прибавить 4 единицы.

162) $700:14-49=?$, $1800:25+28=?$, $1800:24\times500=?$, $9600:1600\times50=?$, $400:8-376:8=?$

Рѣшеніе. Въ первомъ примѣрѣ дѣлимъ 700 на 7, но такъ какъ мы при этомъ дѣлителя раздѣлили на 2 и частное отъ этого умножилось на 2, то полученное частное 100 дѣлимъ на 2. Во второмъ дѣлимъ 1800 на 100, но такъ какъ мы при этомъ дѣлителя умножили на 4 и частное отъ этого раздѣлилось на 4, то полученное частное 18 надо умножить на 4. Въ третьемъ примѣрѣ дѣлимъ 1800 на 6, но такъ какъ мы при этомъ дѣлителя раздѣлили на 4 и частное отъ этого умножилось на 4, то полученное частное надо раздѣлить на 4. Въ четвертомъ примѣрѣ дѣлимъ дѣлимое 9600 и дѣлителя 1600 на 100, отъ чего частное не измѣнится. Въ пятомъ примѣрѣ второе дѣлимое 376 меньше перваго на $400-376=24$, а 24 есть утроенный дѣлитель, поэтому первое частное больше второго на 3.

237. Въ концѣ этого отдѣла хорошо дать рядъ задачъ отвлеченнаго характера, въ которыхъ 1) по различнымъ измѣненіямъ данныхъ чиселъ и по измѣненному и истинному результатамъ дѣйствій требуется опредѣлить данныя числа и 2) по ошибочному результату, полученному вслѣдствіе измѣненій въ данныхъ числахъ, требуется опредѣлить вѣрный результатъ. Приведемъ нѣкоторыя изъ этихъ задачъ.

163) Произведеніе двухъ чиселъ 98 000, а если отъ множителя отнять 5, то въ произведеніи будетъ 63 000. Найти эти числа.

Рѣшеніе. Когда отъ множителя отнимаемъ 5, то отъ произведенія отнимается 5 множимыхъ, а у насъ отъ произведенія отнялось $98\,000-63\,000=35\,000$; слѣд. въ 35 000 содержится 5 множимыхъ, множимое равно $35\,000:5=7\,000$, а множитель равенъ $98\,000:7000=(98\,000:7):1000=14\,000:1000=14$.

164) Частное двухъ чиселъ 36, а если отъ дѣлимаго отнимемъ 1000, то въ частномъ получимъ только 28. Найти эти числа.

Рѣшеніе. Вслѣдствіе, того, что отъ дѣлимаго отняли 1000, отъ частнаго отнялось $36-28=8$ единицъ. Отъ частнаго отнимается 8 единицъ тогда, когда отъ дѣлимаго отнимемъ 8 дѣлителей; слѣд. дѣлитель въ 1000 содержится 8 разъ и равенъ $1000:8=125$, а дѣлимое равно $125\times36=(125\times4)\times9=500\times9=4500$.

165) Ученику надо было 15 умножить на нѣкоторое число, произведеніе раздѣлить на 60 и частное вычесть изъ 92, а онъ къ множителю прибавилъ 2, раздѣлилъ только на 10 и, вычтя изъ 92, получилъ 17. Какое число должно было получиться? Какія поправки въ дѣйствіяхъ ученикъ забылъ сдѣлать?

Рѣшеніе. Ученикъ получилъ въ разности 17, когда уменьшаемое было 92; слѣд. вычитаемое у него было $92-17=75$. Это вычитаемое онъ получилъ отъ дѣленія на 10, слѣд. дѣлимое у него было $75\times10=750$. Это дѣлимое ученикъ получилъ отъ умноженія 15-ти на множителя, который былъ больше даннаго на 2; слѣд. вѣрное произведеніе меньше 750 на удвоенное множимое, т.-е. на $15\times2=30$. Вѣрное произведеніе есть $750-30=720$; вѣрное частное равно $720:60=72:6=12$ и вѣрная разность равна $92-12=80$. Ученикъ забылъ изъ произведенія вычесть удвоенное множимое, а частное, полученное отъ дѣленія на 10, забылъ раздѣлить на 6.

166) Ученику надо было нѣкоторое число умножить на 8, изъ произведенія вычесть 5391 и разность раздѣлить на 9. Чтобы быстрѣе сдѣлать вычисленіе, онъ прибавилъ къ множимому 75, вмѣсто 5391 взялъ 5400, но забылъ сдѣлать надлежащія поправки, и потому отъ дѣленія на 9 получилъ въ частномъ 2066 и въ остаткѣ 6. Какое частное должно получиться, если ошибки исправить?

Рѣшеніе. Дѣлимое у ученика было $2066\times9+6=18\,600$ и получено имъ отъ вычитанія, въ которомъ къ уменьшаемому прибавлено $75\times8=600$, а къ вычитаемому $5400-5391=9$; отъ этого разность получилась больше требуемой на $600-9=591$; слѣд. ученику надо было раздѣлить на 9 число $18\,600-591=18\,009$ и онъ долженъ былъ получить въ частномъ 2001.

238. Умноженіе и дѣленіе на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями основано на томъ, что каждое такое число представляетъ собою произведеніе значащей цыфры на единицу того разряда, къ которому оно принадлежитъ; напр., 500 есть произведеніе 5 на 100, 7000 есть произведеніе 7 на 1000. На основаніи этого для умноженія какого-либо числа на 500, на 7000, можно умножить его сперва на 5, на 7, а потомъ полученныя произведенія умножить соотвѣтственно на 100, 1000, смотря по тому, къ какому разряду принадлежитъ множитель. Чтобы раздѣлить какое-либо число на 500, на 7000, можно раздѣлить его сперва на 100, на 1000, а потомъ полученныя частныя раздѣлить на 5, на 7. Съ этими пріемами умноженія и дѣленія дѣти уже познакомились при изученіи измѣненій произведенія и частнаго; теперь остается только напомнить ихъ и примѣнить къ письменному вычисленію. Для этой цѣли могутъ служить упражненія подобныя слѣдующимъ:

167) На Нижегородскую ярмарку отправили съ фабрики 100 ящиковъ съ сукномъ. Сколько сукна было отправлено на ярмарку, если въ каждый ящикъ помѣщалось по 6 кусковъ и въ каждомъ кускѣ было по 54 аршина?

168) Число умножено на 4. Что надо сдѣлать съ полученнымъ произведеніемъ, чтобы получить произведеніе даннаго числа на 400?

169) Десяти мальчикамъ раздѣлили 250 листовъ бумаги; каждый изъ нихъ сдѣлалъ себѣ 5 тетрадокъ. Сколько листовъ пошло на каждую?

170) На сколько раздѣлится число, если мы зачеркнемъ справа двѣ цыфры и полученное число раздѣлимъ на 4?

Изъ всѣхъ этихъ упражненій дѣлается выводъ, что для умноженія какого-либо числа на число, обозначаемое значащей цыфрой съ нулями, надо множимое умножить на значащую цыфру и полученное произведеніе умножить на единицу того разряда, къ которому принадлежитъ множитель; а для дѣленія на такое же число надо дѣлимое раздѣлить на единицу того разряда, къ которому принадлежитъ дѣлитель, и полученное частное раздѣлить на значащую цыфру дѣлителя. Примѣняя это правило къ письменному вычисленію, дѣти видоизмѣнятъ его въ такое: для умноженія на число, обозначаемое значащей цыфрой съ нулями, надо множимое умножить на значащую цыфру и къ полученному произведенію приписать столько нулей, сколько ихъ во множителѣ; для дѣленія надо въ дѣлимомъ вычеркнуть справа столько цыфръ, сколько нулей въ дѣлителѣ, и оставшееся число раздѣлить на значащую цыфру дѣлителя. Дѣйствія могутъ быть расположены слѣдующимъ образомъ:

$385 \times 60 = 23100$;

$$\begin{array}{r} 2357 \\ \times 8000 \\ \hline 18856000 \end{array}$$

;

$$\begin{array}{r|l} 24360 & 70 \\ \hline 33 & 348 \\ 56 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

;

$$\begin{array}{r|l} 53427 & 900 \\ \hline 84 & 59 \\ 327 & \end{array}$$

.

239. Нѣкоторое затрудненіе для дѣтей представитъ опредѣленіе остатка. Если отъ дѣленія оставшагося числа получится остатокъ, то къ нему для полученія истиннаго остатка надо приписать зачеркнутыя въ дѣлимомъ цыфры; а если остатка отъ дѣленія на значащую цыфру дѣлителя не получится, то въ остаткѣ слѣдуетъ написать зачеркнутыя въ дѣлимомъ цыфры. Ошибки дѣтей могутъ быть здѣсь очень разнообразны: если отъ дѣленія на значащую цыфру не получается остатка, то дѣти забываютъ записать въ остаткѣ зачеркнутыя цыфры; если отъ дѣленія на значащую цыфру остатокъ получается, то дѣти забываютъ приписать къ нему зачеркнутыя цыфры дѣлимаго; наконецъ, нѣкоторыя дѣти остатокъ, полученный отъ дѣленія на значащую цыфру, складываютъ съ зачеркнутыми цыфрами, а другія, приписавъ къ остатку зачеркнутыя цыфры, дѣлятъ полученное число на значащую цыфру дѣлителя. Для разъясненія дѣтямъ вопроса объ остаткѣ, надо установить, что всѣ разряды дѣлимаго, которые ниже разряда дѣлителя, не могутъ быть раздѣлены на дѣлителя и должны получиться въ остаткѣ. Въ этихъ видахъ полезно рѣшить съ дѣтьми нѣсколько частныхъ вопросовъ:

При дѣленіи на 6000 какіе разряды дѣлимаго не могутъ быть раздѣлены и останутся въ остаткѣ? — При дѣленіи на 500 какіе разряды должны получиться въ остаткѣ? и т. п.

Затѣмъ передъ каждымъ дѣленіемъ полезно заставлять дѣтей опредѣлять, какіе разряды дѣлимаго должны перейти въ остатокъ безъ всякаго измѣненія. Чтобы пріучить дѣтей зачеркнутыя въ дѣлимомъ цыфры приписывать къ остатку, полученному отъ дѣленія на значащую цыфру дѣлителя, надо выяснить, что, зачеркнувъ въ дѣлимомъ столько цыфръ справа, сколько нулей въ дѣлителѣ, и дѣля оставшееся число на значащую цыфру дѣлителя, мы и дѣлимое, и дѣлителя дѣлимъ на одно и то же число (или на 10, или на 100, или на 1000 и т. д.), что отъ этого частное остается безъ перемѣны, а остатокъ уменьшается во столько разъ, на сколько мы раздѣлили дѣлимое и дѣлителя.

Въ заключеніе замѣтимъ, что дѣленіе на число, обозначаемое значащей цыфрой съ нулями, совершается въ обратномъ порядкѣ сравнительно съ умноженіемъ: въ умноженіи множимое сперва множится на значащую цыфру, а въ дѣленіи дѣлимое сперва дѣ-

лится на единицу того разряда, къ которому принадлежитъ дѣлитель. Порядокъ умноженія не примѣнимъ къ дѣленію вслѣдствіе того, что затруднено было бы правильное опредѣленіе остатка и приходилось бы дѣлать исправленія въ частномъ, зачеркивая въ немъ столько цыфръ справа, сколько нулей въ дѣлителѣ.

240. Въ вычисленіяхъ и задачахъ этого отдѣла встрѣчаются умноженіе и дѣленіе на числа, заключающія въ себѣ нѣсколько значащихъ цыфръ, но всѣ они выбраны такъ, что легко приводятся къ умноженію и дѣленію на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями. Такъ, чтобы выполнить умноженія и дѣленія:

171) 24×250, 18×350, 44×4500, 108×1500, 28×225, 64×125, 128×75, 32×175; $315000 : 150$, $252000 : 450$, $226800 : 175$, $8400 : 175$, $112500 : 125$,

надо множителей и дѣлителей умножить соотвѣтственно на 2 (250, 350, 1500, 450), или на 4 (125, 75, 175, 225). Чтобы подготовить дѣтей къ такому пріему умноженія и дѣленія, можно предварительно рѣшить съ ними вопросы, въ которыхъ предлагается опредѣлить, насколько умножится или раздѣлится число, если умножить или раздѣлить его на 300 и полученное произведеніе раздѣлить, а частное умножить на 4, и въ которыхъ требуется указать, какъ умноженіе и дѣленіе на 75, 125 и т. п. можно привести къ умноженію и дѣленію на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями.

241. Умноженіе на многозначное число слагается изъ умноженій на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями. Поэтому предварительно полезно выяснить, что произойдетъ съ числомъ, если мы его умножимъ отдѣльно на какія-либо числа и полученныя произведенія сложимъ, если мы его умножимъ на эти числа послѣдовательно. Затѣмъ, полезно указать разницу между умноженіемъ числа на 6 и на 4, и сложеніемъ этихъ произведеній и между умноженіемъ того же числа на 60 и на 4 и сложеніемъ этихъ произведеній. Цѣлый рядъ такихъ вопросовъ и упражненій преподаватель найдетъ въ нашемъ задачникѣ. Приводимъ изъ нихъ слѣдующія:

172) Умножить 225 на 4, умножить 225 на 20 и полученныя произведенія сложить; умножить 225 на 4 и полученное произведеніе умножить на 20. На сколько умножили 225 въ первомъ случаѣ?—на сколько во второмъ?

173) Изъ лавки одной покупательницѣ продали 2 остатка ситцу, въ 10 аршинъ и въ 2 арш., по 24 коп. за аршинъ, а другой—2 остатка, по 10 арш. въ каждомъ, по той же цѣнѣ. Сколько заплатила первая? — сколько вторая? — на сколько вторая больше первой?

Въ задачникѣ сперва идутъ упражненія въ умноженіи на двузначное число, затѣмъ на трехзначное и вообще на многозначное, потомъ на числа, въ обозначенія которыхъ входятъ нули.

Для вывода правила во всѣхъ этихъ случаяхъ полезно сопоставить дѣйствія: $84 \times 2 + 84 \times 30$ и 84×32, $214 \times 40 + 214 \times 3 + 214 \times 500$ и 214×543, $215 \times 400 + 215 \times 6$ и 215×406 и т. п.

Правило выводится сперва въ слѣдующихъ выраженіяхъ: для умноженія на многозначное число, надо множимое умножить порознь на всѣ разряды множителя и полученныя произведенія сложить. Выводъ дѣлается на основаніи опредѣленія умноженія приблизительно въ слѣдующемъ видѣ: умножить 412 на 253 значитъ 412 взять слагаемымъ 253 раза, а для этого можно 412 взять слагаемымъ 200 разъ, потомъ 50 разъ, наконецъ 3 раза и полученныя три суммы сложить, т.-е. надо умножить 412 на 200, умножить 412 на 50, умножить 412 на 3 и полученныя произведенія сложить. При этомъ сообщается дѣтямъ, что произведенія множимаго на каждый разрядъ множителя наз. частными (неполными) произведеніями, а сумма этихъ произведеній—общимъ (полнымъ) произведеніемъ.

Когда преподаватель убѣдится, что выведенное правило понято и усвоено дѣтьми вполнѣ сознательно, должно указать, какъ это правило выполняется въ письменномъ вычисленіи. Для этого выбранный примѣръ сперва исполняется въ слѣдующемъ видѣ.

$$\begin{array}{rl} 412 \times 200 = & 82\ 400 \\ 412 \times 50 = & 20\ 600 \\ 412 \times 3 = & 1\ 236 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 82\ 400 \\ +\ 20\ 600 \\ \underline{1\ 236} \\ 104\ 236 \end{array},$$

а затѣмъ преподаватель указываетъ, что удобнѣе расположить дѣйствіе такъ, чтобы частныя произведенія не приходилось переписывать для ихъ сложенія и чтобы множимое можно было написать только одинъ разъ, что для этого можно принять слѣдующія два расположенія:

$$\begin{array}{r} 412 \\ \times 253 \\ \hline 1\ 236 \\ 20\ 600 \\ 82\ 400 \\ \hline 104\ 236 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 412 \times 253 \\ \hline 1\ 236 \\ 20\ 600 \\ 84\ 400 \\ \hline 104\ 236 \end{array}.$$

При умноженіи на десятки и высшіе разряды множителя, множимое сперва умножается на значащую цыфру этого разряда, а потомъ справа приписывается соотвѣтствующее число нулей; поэтому, умножая на каждую значащую цыфру множителя, полу-

чаемое произведеніе надо начинать подписывать подъ тѣмъ разрядомъ предыдущаго произведенія, къ которому принадлежитъ эта цыфра множителя; тогда останется надлежащее число мѣстъ для нулей, которые надо приписать послѣ умноженія на значащую цыфру; иначе частныя произведенія не будутъ подписаны другъ подъ другомъ такъ, какъ это нужно для ихъ сложенія. На первое время слѣдуетъ требовать отъ дѣтей приписыванія этихъ нулей въ частныхъ произведеніяхъ.

242. Особенно слѣдуетъ остановиться на случаяхъ, когда во множителѣ нѣтъ единицъ одного или нѣсколькихъ промежуточныхъ разрядовъ и когда множители оканчиваются нулями. Первый случай съ теоретической стороны не представляетъ затрудненій, но на практикѣ дѣти въ немъ ошибаются очень часто, и потому на примѣрахъ, относящихся къ этому случаю умноженія, надо остановиться достаточно долго для того, чтобы дѣти съ нимъ окончательно освоились. Разбирается этотъ случай подобно основному. Умножить 1253 на 5007 значитъ 1253 взять слагаемымъ 5007 разъ, а для этого 1253 можно взять слагаемымъ 5000 разъ, потомъ 7 разъ и полученныя двѣ суммы сложить; слѣд. для умноженія 1253 на 5007 надо 1253 умножить на 5000, потомъ 1253 умножить на 7 и полученныя два произведенія сложить.

Полезно, кромѣ того, упражнять дѣтей въ опредѣленіи ошибокъ, которыя происходятъ, если частныя произведенія подписать не такъ, какъ слѣдуетъ.

Нѣтъ надобности требовать отъ дѣтей изложенія полнаго правила; достаточно, если они дадутъ обстоятельные отвѣты на отдѣльные вопросы о томъ, какъ располагаются числа при умноженіи, въ какой послѣдовательности надо вести умноженіе, какъ подписывать частныя произведенія одно подъ другимъ. При этомъ полезно выяснить, что умноженіе можно начинать и съ умноженія множимаго на простыя единицы множителя, и съ умноженія на единицы высшаго разряда во множителѣ, но что первый способъ представляетъ болѣе удобствъ для подписыванія другъ подъ другомъ частныхъ произведеній.

243. Умноженіе, когда множители оканчиваются нулями, можетъ быть разъяснено на основаніи положеній объ измѣненіяхъ произведенія при измѣненіи множителей. Какъ извѣстно, въ этомъ случаѣ отбрасываютъ нули во множимомъ и во множителѣ, перемножаютъ полученныя такимъ образомъ числа и къ произведенію приписываютъ столько нулей, сколько ихъ было въ обоихъ множителяхъ. При объясненіи этого пріема, полезно исправлять полученное произведеніе сперва отъ ошибки, происшедшей вслѣдствіе измѣненія множимаго, а потомъ уже отъ ошибки, происшедшей вслѣдствіе измѣненія множителя. Такимъ образомъ,

чтобы умножить 5700 на 320, дѣти вычеркиваютъ два нуля во множимомъ и одинъ нуль во множителѣ, умножаютъ 57 на 32 и говорятъ, что полученное произведеніе 1824 надо умножить на 100, т.-е. приписать къ нему справа два нуля, потому что, отбросивъ во множимомъ два нуля, мы множимое, а слѣд. и произведеніе, раздѣлили на 100, а затѣмъ полученное произведеніе 182 400 надо умножить еще на 10, т.-е. приписать къ нему еще нуль, потому что, отбросивъ во множителѣ нуль, мы множителя, а слѣд. и произведеніе, раздѣлили на 10. Дѣйствіе располагается въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{array}{r} 5700 \\ \times\ 320 \\ \hline 114 \\ 171 \\ \hline 1824000 \end{array}.$$

Такое послѣдовательное исправленіе произведенія отъ ошибокъ гораздо яснѣе для дѣтей и непосредственнѣе приводитъ къ правилу. Подготовкой къ этому пріему умноженія могутъ служить сопоставленія примѣровъ въ родѣ слѣдующихъ: 35×12, 350×12 и 350×1200, и рѣшеніе вопросовъ:

174) На какое число умножится 325, если мы его умножимъ на 48 и полученное произведеніе умножимъ на 100? — Какое измѣненіе произойдетъ въ произведеніи 480 на 2500 если мы во множимомъ откинемъ нули? — если откинемъ нули во множителѣ?

244. И при письменномъ умноженіи не слѣдуетъ забывать тѣхъ облегченій, достигнуть которыхъ позволяетъ знаніе положеній объ измѣненіи произведенія при измѣненіи множителей. Такъ, дѣти не должны по общему правилу умножать какое-либо число на 998, а должны его умножить на 1000 и изъ произведенія вычесть удвоенное множимое, при умноженіи на 125 могутъ умножать на 1000 и произведеніе дѣлить на 8.

Можно достигнуть нѣкотораго сокращенія въ записяхъ при умноженіи на двузначнаго множителя, если умножать на него какъ на однозначное число. Напр., для умноженія 2457 на 12, можно 7 единицъ умножить на 12 и изъ полученныхъ 84 единицъ 4 единицы записать, а 8 десятковъ запомнить для приложенія къ произведенію десятковъ; затѣмъ умножить 5 десятковъ на 12, прибавить 8 дес., полученныхъ отъ умноженія единицъ; изъ полученныхъ такимъ образомъ 68 десятковъ записать 8 десятковъ, а 6 сотенъ запомнить для прибавленія къ произведенію сотенъ; потомъ 4 сотни умножить на 12, къ произведенію прибавить 6 сотенъ и изъ полученныхъ 54 сотенъ записать 4 сотни,

а 5 тысячъ запомнить для прибавленія къ тысячамъ; наконецъ 2 тысячи надо умножить на 12, прибавить 5 тысячъ и всѣ полученныя 29 тысячъ записать. Дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r} 2457 \\ \times 12 \\ \hline 29484 \end{array}.$$

Такой пріемъ умноженія при двузначномъ множителѣ удобенъ, если дѣти пріучены хорошо считать устно. Его возможно прилагать и къ нѣкоторымъ трехзначнымъ множителямъ, каковы напр., 215, 312 и т. п. Этотъ пріемъ особенно удобенъ при умноженіи составныхъ именованныхъ чиселъ, какъ это и будетъ указано нами ниже.

Наконецъ, можно пріучать дѣтей пользоваться множимымъ какъ однимъ изъ частныхъ произведеній, когда въ обозначеніе множителя входитъ единица; въ такомъ случаѣ множителя слѣдуетъ располагать рядомъ съ множимымъ, какъ это сдѣлано въ примѣрахъ:

$$\begin{array}{r} 3574\times 251 \\ 17870 \\ 7148 \\ \hline 897074 \end{array}; \qquad \begin{array}{r} 427\times 123 \\ 854 \\ 1281 \\ \hline 52521 \end{array}.$$

245. Дѣленіе на многозначное число. Мы сперва разсматриваемъ случай, когда частное однозначное, и затѣмъ уже переходимъ къ опредѣленію многозначнаго частнаго. Такая послѣдовательность позволяетъ отдѣлить способъ опредѣленія цыфры частнаго отъ опредѣленія состава многозначнаго частнаго изъ разрядовъ. Одновременное ознакомленіе дѣтей съ этими обоими элементами дѣленія представляетъ большія затрудненія, такъ что обыкновенно объясняютъ только составъ многозначнаго частнаго изъ разрядовъ, опредѣленіе же цыфръ этихъ разрядовъ дѣлается наугадъ, безъ всякой руководящей мысли.

246. Однозначное частное. Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію цыфры частнаго при многозначномъ дѣлителѣ надо разъяснить дѣтямъ, когда при многозначномъ дѣлителѣ получается однозначное частное. На цѣломъ рядѣ прмѣровъ дѣти, пользуясь зависимостью между числами въ дѣленіи, пріучаются опредѣлять, получится ли частное однозначное, или многозначное. Вопросъ рѣшается слѣдующимъ образомъ.

Отъ дѣленія 992 на 248 получится частное однозначное, потому что, если бы въ частномъ былъ хотя одинъ десятокъ, то въ дѣлимомъ должно бы заключаться по крайней мѣрѣ

248 десятковъ, т.-е. 2 480 единицъ, а у насъ въ немъ всего 992 единицы. Отъ дѣленія 8 432 на 248 должно получиться частное многозначное, потому что если въ частномъ будетъ 1 десятокъ, то дѣлимое должно заключать въ себѣ 248 десятковъ, т.-е. 2 480 единицъ, а у насъ въ дѣлимомъ заключается гораздо больше единицъ, именно 8 432.

Полезно также упражнять дѣтей въ опредѣленіи предѣловъ, между которыми должно заключаться дѣлимое при данномъ дѣлителѣ для того, чтобы частное было однозначное; напр., можно предложить опредѣлить, между какими числами должно заключаться дѣлимое, чтобы при дѣленіи на 2425 получить однозначное частное. Этотъ вопросъ рѣшается слѣдующимъ образомъ:

Дѣлимое не можетъ быть меньше дѣлителя, стало быть и въ этомъ случаѣ дѣлимое не можетъ быть меньше 2425; когда въ частномъ получится одинъ десятокъ, то дѣлимое должно заключать въ себѣ 2425 десятковъ, т.-е. 24 250, а у насъ частное должно заключать въ себѣ меньше 10-ти, слѣд. и дѣлимое должно быть меньше 24 250. Итакъ дѣлимое должно заключаться между 2 425 и 24 250.

Изъ этихъ упражненій легко вывести, что для опредѣленія, получится ли частное однозначное или многозначное, надо дѣлителя умножить на 10; если дѣлимое меньше этого произведенія, то частное однозначное. Иначе: надо отбросить въ дѣлимомъ цыфру единицъ; если дѣлитель превышаетъ полученное такимъ образомъ число, то частное однозначное.

247. Научивъ дѣтей опредѣлять, когда частное получается однозначное, можно приступить къ опредѣленію цыфры частнаго. Для этого можно воспользоваться свойствомъ частнаго не измѣняться отъ дѣленія дѣлимаго и дѣлителя на одно и то же число. Дѣти сперва опредѣляютъ частныя въ примѣрахъ:

$$900:300\ ,\ 8000:2000\ ,\ 15000:5000\ ,\ 630:90$$

и пользуются при этомъ упомянутымъ свойствомъ частнаго. Отъ этихъ примѣровъ можно перейти къ слѣдующимъ:

$$975:325,\ 8682:2894,\ 1428:476,\ 483:69.$$

Напомнивъ дѣтямъ, что въ предыдущихъ примѣрахъ они для опредѣленія частнаго дѣлили дѣлимое и дѣлителя на 100, на 1000, на 10, преподаватель предлагаетъ и здѣсь воспользоваться тѣмъ же пріемомъ. Дѣйствія располагаются слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{r|l} 975 & 325 \\ \hline 975 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 8\,682 & 2\,894 \\ \hline 11\,576 & 4\ 3 \\ \hline 8\,682 & \\ \hline 0 & \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 1\,428 & 476 \\ \hline 1\,428 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 483 & 69 \\ \hline 552 & 87 \\ \hline 483 & \\ \hline 0 & \end{array}.$$

и пересказываются въ слѣдующихъ выраженіяхъ (для 1-го примѣра):

Зачеркнувъ по двѣ цыфры справа въ дѣлимомъ и дѣлителѣ, мы ихъ раздѣлили на 100; отъ этого частное не измѣнилось бы и мы получили бы въ немъ 9 : 3, т.-е. 3, если бы дѣленіе на 100 совершилось безъ остатка; по такъ какъ отъ дѣленія на 100 получились остатки 75 и 25, то частное 3 можетъ оказаться и невѣрнымъ. Чтобы узнать, годится ли найденное число 3, надо умножить дѣлителя 325 на 3 и сравнить произведеніе съ дѣлимымъ 975. Отъ умноженія 325 на 3 получается какъ разъ 975, слѣд. цыфра 3 вѣрна.

Подобнымъ же образомъ разбираются и остальные примѣры, при чемъ во второмъ и четвертомъ опредѣленныя вначалѣ цыфры частнаго 4 и 8 окажутся высоки, и ихъ придется понизить. Изъ этихъ примѣровъ дѣти выводятъ, что для опредѣленія однозначнаго частнаго надо въ дѣлителѣ вычеркнуть всѣ цыфры, кромѣ высшей, а въ дѣлимомъ столько цыфръ, сколько зачеркнуто въ дѣлителѣ, и затѣмъ раздѣлить полученныя числа: что опредѣленное такимъ образомъ частное можетъ оказаться невѣрнымъ, ибо хотя при этомъ дѣлимое и дѣлитель дѣлятся на одно и то же число, но отъ дѣленія ихъ получаются остатки: что, слѣдовательно, опредѣленное такимъ путемъ частное надо повѣрить, умноживъ на него дѣлителя и сравнивъ полученное произведеніе съ дѣлимымъ.

Остается показать, что опредѣленное указаннымъ способомъ частное никогда не можетъ оказаться меньше вѣрнаго, т.-е. его никогда не придется повышать. Для этого можно повысить частное на единицу и сравнить произведеніе высшей цыфры дѣлителя на это частное съ соотвѣтствующими разрядами дѣлимаго. Такъ въ первомъ примѣрѣ можно сказать, что если найденное частное 3 окажется невѣрнымъ, то истинное будетъ непремѣнно меньше, а не больше 3-хъ, ибо если бы въ частномъ было 4, то въ дѣлимомъ должно бы заключаться по крайней мѣрѣ 3 сот.$\times$4, т.-е. 12 сотенъ, а у насъ ихъ только 9. Въ послѣднемъ примѣрѣ истинное частное не можетъ быть больше найденнаго 8, ибо если бы мы взяли въ частное 9, то въ дѣлимомъ должно бы заключаться по крайней мѣрѣ 6 дес.$\times$9, т.-е. 54 десятка, а у насъ ихъ только 48.

Послѣ этого дѣти могутъ вывести окончательное правило:

Для опредѣленія цыфры частнаго надо раздѣлить на высшую цыфру дѣлителя высшую цыфру дѣлимаго, когда въ дѣлимомъ и дѣлителѣ одинаковое число цыфръ, и число, составленное изъ двухъ высшихъ цыфръ дѣлимаго, когда въ дѣлимомъ одной цыфрой больше, чѣмъ въ дѣлителѣ; найденную такимъ образомъ цыфру частнаго слѣдуетъ повѣрить, умноживъ на нее дѣлителя и сравнивъ произведеніе съ дѣлимымъ; если произведеніе будетъ равно или меньше дѣлимаго, то найденная цыфра вѣрна, и для полученія остатка останется вычесть это произведеніе изъ дѣлимаго; если произведеніе превыситъ дѣлимое, то слѣдуетъ брать послѣдовательно низшія цыфры и ихъ подвергать такой же провѣркѣ, до тѣхъ поръ, пока не получится произведеніе, не превышающее дѣлимаго.

Правило легко распадается на части и должно быть выведено постепенно; точно такъ же и воспроизводиться дѣтьми оно можетъ по отдѣльнымъ вопросамъ:

Какъ опредѣлить частное, когда въ дѣлимомъ и дѣлителѣ одинаковое число цыфръ?—Какъ опредѣлить частное, когда въ дѣлимомъ одной цыфрой больше, чѣмъ въ дѣлителѣ?—Какъ узнать, не высока ли опредѣленная такимъ образомъ цыфра частнаго?—Какъ надо поступать, если опредѣленная цыфра частнаго окажется высока?—Какъ опредѣлить остатокъ отъ дѣленія?

Важно не то, чтобы дѣти могли сказать правило безъ запинки и въ полномъ его составѣ, а чтобы они сознательно усвоили каждую его часть и умѣли прилагать его къ дѣлу.

248. Когда правило будетъ совершенно усвоено дѣтьми, слѣдуетъ показать имъ предварительную повѣрку найденной цыфры частнаго, состоящую въ умноженіи первыхъ двухъ высшихъ цыфръ дѣлителя на испытуемую цыфру и въ сравненіи полученнаго произведенія съ соотвѣтствующими разрядами дѣлимаго. Это особенно важно, когда въ дѣлителѣ много цыфръ; напр., въ дѣленіи 999 999 на 142 857. По данному правилу найдемъ здѣсь для частнаго цыфру 9. Чтобы убѣдиться въ ея негодности, стоитъ только 14 десятковъ тысячъ умножить на 9, получимъ 126 дес. тысячъ, тогда какъ въ дѣлимомъ только 99 дес. тысячъ. Такъ же найдемъ, что и слѣдующая цыфра 8 высока, ибо 14$\times$8 даетъ 112 десятк. тысячъ. Такая же предварительная повѣрка слѣдующей цыфры 7 уже не можетъ дать окончательнаго заключенія о пригодности или непригодности этой цыфры, и для окончательнаго рѣшенія вопроса придется умножить на нее всего дѣлителя. Цыфра 7 окажется требуемой. Такая предварительная повѣрка цыфры частнаго можетъ служить только для сужденія о непригодности взятой цыфры. Предварительная повѣрка должна производиться устно, такъ какъ въ ней приходится умножать на однозначное число только двѣ высшія цыфры дѣлителя; цыфра частнаго должна записываться только послѣ предварительной ея провѣрки.

249. Полезно также указать дѣтямъ, что при опредѣленіи частнаго удобно повышать высшую цыфру дѣлителя на единицу, когда за нею слѣдуетъ цыфра 5 или больше 5-ти. Опредѣленное такимъ образомъ частное можетъ оказаться или вѣрнымъ или меньше вѣрнаго, такъ какъ отъ увеличенія дѣлителя частное уменьшается. При такомъ способѣ опредѣленія цыфры, предварительная повѣрка становится затруднительной: произведеніе двухъ высшихъ цыфръ дѣлителя на опредѣленную цыфру частнаго, въ случаѣ невѣрности этой цыфры, должно оказаться меньше соотвѣтствующихъ разрядовъ дѣлимаго, но оно можетъ быть меньше и въ томъ случаѣ, если опредѣленная цыфра окажется вѣрной. Поэтому предварительную повѣрку здѣсь надо вести до тѣхъ поръ, пока произведеніе двухъ высшихъ цыфръ дѣлителя на испытаемую цыфру не окажется больше соотвѣтствующихъ разрядовъ дѣлимаго; тогда для частнаго надо брать предшедствующую цыфру. Напр., повысивъ въ дѣленіи 5951 : 1987 высшую цыфру дѣлителя на единицу, найдемъ для частнаго цыфру 2 (5 : 2=2); умноживъ на нее 19 сотенъ дѣлителя, получимъ 38 сотенъ, меньше чѣмъ ихъ въ дѣлимомъ, и потому еще ничего про найденную цыфру 2 сказать не можемъ. Подвергнувъ такой же повѣркѣ слѣдующую цыфру 3, получимъ 57 сотенъ, тоже меньше, чѣмъ ихъ въ дѣлимомъ. Подвергнувъ такой же повѣркѣ слѣдующую цыфру 4, получимъ 76 сотенъ — больше, чѣмъ въ дѣлимомъ, и отсюда заключимъ, что цыфра 4 высока. Останется затѣмъ подвергнуть полной повѣркѣ цыфру 3, которая и окажется вѣрной.

250. Частное многозначное. Чтобы перейти къ опредѣленію многозначнаго частнаго, надо научить опредѣлять, изъ какихъ разрядовъ оно должно состоять. Изъ предыдущаго дѣтямъ уже извѣстно, что многозначное частное получается, когда дѣлимое превышаетъ произведеніе дѣлителя на 10, т.-е. когда въ дѣлимомъ по крайней мѣрѣ одной цыфрой больше, чѣмъ въ дѣлителѣ. Чтобы перейти къ опредѣленію состава многозначнаго частнаго, полезно упражнять дѣтей въ опредѣленіи, не меньше какого числа должно быть дѣлимое для того, чтобы въ частномъ получить сотни при дѣленіи, напр., на 4 872; не больше какого числа должно быть дѣлимое для того, чтобы въ частномъ получить тысячи при дѣленіи на 275 и т. п. Рѣшая первый изъ этихъ вопросовъ, дѣти говорятъ, что когда въ частномъ получится сотня, то въ дѣлимомъ должно быть 4 872 сотни (100×4 872), и слѣд. для полученія сотенъ въ частномъ дѣлимое не должно быть меньше 487 200; рѣшая второй вопросъ, они должны сказать, что когда въ частное будетъ входить десятокъ тысячъ, въ дѣлимомъ должно быть 275 десятковъ тысячъ, и слѣд. дѣлимое

должно быть меньше 2 750 000 для того, чтобы въ частное могли войти только тысячи. Для той же цѣли полезно опредѣлять, войдетъ ли данный разрядъ въ частное при одномъ и томъ же дѣлимомъ и при разныхъ дѣлителяхъ и при одномъ и томъ же дѣлителѣ и при различныхъ дѣлимыхъ.

251. Послѣ этихъ упражненій можно перейти къ опредѣленію многозначнаго частнаго. Лучше всего начать съ такихъ примѣровъ, въ которыхъ частное заключаетъ въ себѣ значащую цыфру съ нулями, напр.

2960	74	24840	414	75800	379
296	40	2484	60	758	200
0		0		0	

Объясненіе ведется дѣтьми приблизительно въ слѣдующей формѣ (для перваго примѣра):

Въ частное не могутъ войти тысячи, потому что для этого въ дѣлимомъ должно быть по крайней мѣрѣ 74 тысячи, а у насъ въ немъ всего 2 тысячи; не могутъ войти и сотни, потому что для этого въ дѣлимомъ должно быть 74 сотни, а у насъ въ немъ всего 29 сотенъ; десятки же будутъ входить, потому что для этого въ дѣлимомъ должно быть 74 десятка, а у насъ ихъ 296. Чтобы найти, сколько десятковъ будетъ въ частномъ, надо 296 десятковъ раздѣлить на 74. Чтобы раздѣлить 296 десятковъ на 74, уменьшимъ 296 десятковъ въ 10 разъ и раздѣлимъ полученныя 296 единицъ на 74, для чего, какъ мы знаемъ, надо 29 раздѣлить на 7; получимъ 4, и эта цыфра окажется вѣрной. Но мы дѣлимое уменьшили въ 10 разъ, слѣд. отъ дѣленія 296 десятковъ на 74 получимъ въ 10 разъ больше 4 единицъ, т.-е. 4 десятка. Чтобы узнать, сколько десятковъ мы раздѣлили, надо 4 десятка умножить на 74; получимъ ровно 296 десятковъ. Отсюда заключаемъ, что отъ дѣленія 2960 на 74 получится 4 десятка и дѣленіе совершится безъ остатка. Чтобы показать, что въ частномъ получились 4 десятка, надо къ 4 приписать нуль.

252. Для перехода къ дѣленію въ томъ случаѣ, когда многозначное частное заключаетъ въ себѣ нѣсколько значащихъ цыфръ, могутъ служить упражненія въ родѣ слѣдующаго.

175) Раздѣлить 29600 на 74, раздѣлить 3700 на 74, раздѣлить 592 на 74 и частныя сложить; раздѣлить на 74 сумму этихъ чиселъ.

Цѣль этихъ упражненій состоитъ въ уясненіи, какимъ образомъ дѣленіе въ случаѣ многозначнаго частнаго слагается изъ дѣленій, дающихъ въ частномъ только одну значащую цыфру.

Ходъ дѣленія дѣти пересказываютъ вначалѣ слѣдующимъ образомъ:

48 375	645
45 15	75
3 225	
3 225	
0	

Отъ дѣленія 48 375 на 645 въ частномъ ни десятковъ тысячъ, ни тысячъ, ни сотенъ получиться не можетъ. Дѣйствительно, чтобы получить въ частномъ десятки тысячъ при дѣленіи на 645, надо имѣть въ дѣлимомъ по крайней мѣрѣ 645 дес. тысячъ; чтобы получить тысячи, надо имѣть 645 тысячъ, чтобы получить сотни—645 сотенъ, а у насъ въ дѣлимомъ всего только 4 дес. тысячъ, 48 тысячъ, 483 сотни. Десятки въ частномъ получатся, потому что ихъ въ дѣлимомъ 4837, а чтобы получить одинъ десятокъ въ частномъ, надо имѣть въ дѣлимомъ только 645 десятковъ. Чтобы узнать, сколько десятковъ будетъ въ частномъ, надо 4837 десятковъ раздѣлить на 645. Отъ дѣленія 4837 десятковъ получится столько десятковъ, сколько единицъ получается отъ дѣленія 4837 на 645, ибо дѣля 4837 единицъ, вмѣсто 4837 десятковъ, мы дѣлимое уменьшаемъ въ 10 разъ, а слѣд. и частное уменьшается въ 10 разъ, т.-е. въ частномъ получается столько единицъ, сколько должно быть десятковъ. Чтобы раздѣлить 4837 единицъ на 645, дѣлимъ 48 на 6, получаемъ 8, но эта цыфра по предварительной повѣркѣ ($64\times8=512$ дес., а въ дѣлимомъ 483 дес.) оказывается высока; поэтому беремъ въ частное цыфру 7, которая по предварительной повѣркѣ ($64\times7=448$ д., а у насъ 483 дес.) оказывается пригодной. Итакъ въ частномъ будетъ 7 десятковъ. Найдя, сколько десятковъ будетъ въ частномъ, нетрудно найти, сколько десятковъ мы раздѣлимъ, взявъ въ частное 7 десятковъ. Для этого надо 7 дес. умножить на 645; получимъ 4515 десятковъ. А такъ какъ надо было раздѣлить 4837 дес., то у насъ остается еще 4837 дес. — — 4515 дес. = 322 десятка. Отъ ихъ дѣленія десятковъ уже получить нельзя, ибо 322 меньше 645-ти; слѣд. отъ дѣленія 322 десятковъ получатся въ частномъ единицы. Но единицы также могутъ получиться и отъ дѣленія единицъ дѣлимаго; поэтому переводимъ 322 десятка въ единицы, прибавляемъ къ полученному числу 3220 еще 5 единицъ дѣлимаго, для чего къ 322 надо только снести 5 единицъ, и находимъ, что намъ остается дѣлить 3225 единицъ. Дѣлимъ 32 на 6, получаемъ цыфру единицъ 5, которая по предварительной повѣркѣ ($64\times5=320$) оказывается пригодной; а сдѣлавъ полную ея повѣрку, т.-е. умноживъ 645 на 5, найдемъ, что она вѣрна и что дѣленіе совершится безъ остатка.

Числа 4837 и 3225, изъ дѣленія которыхъ слагается дѣленіе 48375, можно назвать **неполными** дѣлимыми.

Когда дѣти достаточно освоятся съ дѣленіемъ, то въ пересказѣ можно дѣлать значительныя сокращенія: во-первыхъ, дѣти сразу опредѣляютъ, какое число изъ дѣлимаго надо прежде всего раздѣлить на дѣлителя; затѣмъ при дѣленіи каждаго неполнаго дѣлимаго не ссылаются на то, что замѣняютъ его простыми единицами. Такимъ образомъ, дѣля, напр., 3 258 790 на 674, дѣти говорятъ:

3 258 790	674
2 696	4 835
562 7	
539 2	
23 59	
20 22	
3 370	
3 370	
0	

Прежде всего надо раздѣлить 3 258 тысячъ на 674; въ частное можно взять 4 тысячи; ибо, хотя $32:6=5$, но $67\times5=$ $=335$, болѣе 325; что такимъ образомъ раздѣлимъ 2 696 тысячъ (674×4) и останется дѣлить 562 тысячи, которыя надо перевести въ сотни и прибавить къ нимъ сотни дѣлимаго для чего достаточно снести къ 562 цыфру сотенъ дѣлимаго 7.

Затѣмъ также пересказывается дѣленіе 5627 сотенъ и всѣхъ послѣдующихъ неполныхъ дѣлимыхъ. Первое неполное дѣлимое полезно отдѣлять какимъ-либо значкомъ, напр. чертою, поставленною вверху.

253. Особенное вниманіе надо обратить на тѣ случаи, гдѣ въ частное не входитъ одного или нѣсколькихъ промежуточныхъ разрядовъ. Для полнаго уразумѣнія этихъ случаевъ полезны упражненія, подобныя приведеннымъ выше передъ опредѣленіемъ многозначнаго частнаго, заключающаго въ себѣ нѣсколько значащихъ цыфръ; напр.

176) Раздѣлить 2 436 000 на 609, раздѣлить 3 045 на 609 и полученныя частныя сложить; раздѣлить на 609 сумму этихъ двухъ дѣлимыхъ.

Отъ дѣленія перваго числа получается 4 000, отъ дѣленія второго 5, отъ дѣленія суммы 2 439 045 должна получиться сумма 4 000 и 5, т.-е. 4 005. Чтобы дѣти научились избѣгать ошибокъ, слѣдуетъ требовать отъ нихъ отчета въ томъ, изъ единицъ какого разряда состоятъ неполныя дѣлимыя и потому единицы какого разряда получаются въ частномъ. Такъ, раздѣливъ изъ 2 439 045 сперва число 2 439, дѣти должны сказать, что раздѣлили тысячи, въ частномъ получили 4 тысячи и въ остаткѣ 3 тысячи. Переходя къ дѣленію этихъ 3 тысячъ и переведя ихъ въ 30 сотенъ, дѣти должны сказать, что сотенъ въ частномъ не получится, ибо ихъ въ дѣлимомъ меньше 609, и что

2 439 045	609
2 436	4 005
3 045	
3 045	
0	

въ частномъ на мѣстѣ сотенъ надо поставить 0; переведя эти сотни въ десятки и получивъ съ присоединеніемъ 4 десятковъ дѣлимаго 304 десятка, они также рѣшатъ, что и десятковъ въ частномъ не будетъ и что и на ихъ мѣстѣ надо поставить нуль; затѣмъ, переведя 304 дес. въ единицы и присоединивъ къ нимъ 5 единицъ дѣлимаго, они должны сказать, что дѣлятъ 3 045 единицъ и что въ частномъ получится 5 единицъ.

Ошибка съ пропускомъ нулей встрѣчается у дѣтей и тогда, когда частное оканчивается нулями, напр., при дѣленіи 2 859 400 на 493. Предупреждать и исправлять эти ошибки можно при помощи сейчасъ указанныхъ пріемовъ.

254. Когда дѣлитель оканчивается нулями, то дѣленіе можно упростить, зачеркнувъ въ дѣлителѣ нули, а въ дѣлимомъ столько цифръ, сколько нулей въ дѣлителѣ, и раздѣливши полученныя такимъ образомъ числа. Частное получится истинное, а остатокъ, если онъ будетъ, надо исправить, приписавъ къ нему зачеркнутыя въ дѣлимомъ цифры; если остатка не получится, то въ остаткѣ надо написать зачеркнутыя въ дѣлимомъ цифры. Напр., чтобы раздѣлить 358 746 на 4 600, зачеркиваемъ въ дѣлителѣ два нуля, а въ дѣлимомъ двѣ цыфры справа, и дѣлимъ 3 587 на 46; въ частномъ получаемъ 77, а къ остатку 45 приписываемъ вычеркнутыя въ дѣлимомъ 46.

```
358746|4600
 322  |77
 367
 322
 4546
```

Объяснить этотъ пріемъ дѣленія можно слѣдующимъ образомъ: 4 600 есть произведеніе 100 на 46, слѣдовательно 358 746 можно раздѣлить на 100 и полученное частное на 46.

Зачеркнувъ по двѣ цыфры въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ, мы ихъ уменьшимъ въ одинаковое число разъ, отъ этого остатокъ уменьшится во столько же разъ; поэтому остатокъ 45, получившійся отъ дѣленія 3 587 на 46, надо увеличить въ 100 разъ; получимъ 4 500; а такъ какъ у насъ отъ дѣленія на 100 осталось еще 46 единицъ, то ихъ надо прибавить къ 4 500, и получимъ въ остаткѣ 4 546.

Если преподаватель подобными объясненіями побоится запутать дѣтей, то этотъ частный случай можно производить по общему правилу, не зачеркивая цифръ въ дѣлимомъ и дѣлителѣ.

255. Правило для дѣленія на многозначное число можетъ быть дано только послѣ того, какъ дѣти вполнѣ усвоятъ на практикѣ производство дѣленія. Тогда правило явится краткимъ описаніемъ процесса, который дѣти продѣлывали много разъ, и не встрѣтитъ особыхъ затрудненій; до этого же времени усвоеніе правила не принесетъ существенной пользы, такъ какъ дѣти не сумѣютъ примѣнить его къ дѣлу и самое примѣненіе будетъ недостаточно освѣщено и мало производительно. Правило дѣленія распадается на отдѣльныя части, и прежде всего слѣдуетъ позаботиться о томъ, чтобы дѣти умѣли рѣшать сознательно и вполнѣ толково вопросы, относящіеся къ отдѣльнымъ частямъ правила. Такимъ образомъ они должны умѣть отвѣчать на слѣдующіе вопросы:

Какое число прежде всего слѣдуетъ отдѣлять въ дѣлимомъ для дѣленія?—Какъ слѣдуетъ поступать при опредѣленіи цифры каждаго разряда частнаго?—Какъ получаются слѣдующія неполныя дѣлимыя?—Какъ слѣдуетъ поступать, если, послѣ снесенія къ какому-либо остатку слѣдующей цифры дѣлимаго, получится число меньше дѣлителя?—Какъ слѣдуетъ поступать, если послѣ вычитанія произведенія дѣлителя на цифру какого-либо разряда въ частномъ, остатка не получится и слѣдующія цифры дѣлимаго будутъ нули?

256. Упражненія въ дѣленіи многозначнаго числа на многозначное въ нашемъ задачникѣ состоятъ, какъ и въ предшествующихъ главахъ, изъ вычисленій, числовыхъ загадокъ и задачъ. Приводимъ нѣкоторыя изъ нихъ.

177) Раздѣлить 43 725 на 25, начавъ дѣленіе съ единицъ; сдѣлать то же дѣленіе, начавъ его съ опредѣленія высшаго разряда частнаго. Какой пріемъ удобнѣе?

Рѣшеніе.

```
43 725|25          437 25|25
  25  |1 ;          187  |1749
 ----- ----         ----- ----
  700  28           12 2
  50  1 720          225
  200 1 749            0
 43000
 25
 180
 175
 ----
  50
  50
 ----
   0
```

178) Возстановить пропущенныя цифры въ примѣрѣ:

```
 31* *2| 2*2
 ----- ---
  65 * |126
 -----
  15 *2
 -----
     0
```

Рѣшеніе. Отъ вычитанія дѣлителя 2*2 изъ перваго неполнаго дѣлимаго 31* въ разности должно получиться 65; отсюда заключаемъ, что первая, пропущенная въ дѣлимомъ цифра есть

5+2=7, а дѣлитель равенъ 317—65=252, и что слѣдов. въ немъ пропущена цыфра 5. Зная же дѣлителя и частное, уже не трудно найти остальныя пропущенныя цыфры въ полномъ и въ неполныхъ дѣлимыхъ.

179) Помѣщикъ желаетъ купить мельницу, для чего продаетъ часть своей земли; если онъ продастъ десятину по 54 руб., то ему для покупки мельницы не хватитъ 892 руб.; если онъ возьметъ за десятину по 75 руб., то послѣ покупки у него останется еще 2300 руб. Что стоитъ мельница?

Рѣшеніе. Увеличивая цѣну каждой десятины на 75—54=21 руб., помѣщикъ на всей продаваемой землѣ выигрываетъ 892+2300=3 192 руб.; слѣдов. онъ хотѣлъ продать 3192 : 21=152 десятины. За нихъ онъ по второй цѣнѣ выручилъ бы 75×152= =11 400 руб.; слѣдов. мельница стоитъ 11 400—2300=9100 руб.

257. Умноженіе и дѣленіе на русскихъ счетахъ. Чтобы 278 р. 72 коп. умножить на счетахъ на 28, откладываемъ 2 раза это число на счетахъ одной проволокой выше, чѣмъ слѣдуетъ, т.-е. на 8-й, 7-й, 6-й, 5-й и 3-й проволокахъ; получаемъ 5 574 р. 40 коп., къ этому числу прибавляемъ 8 разъ по 278 р. 72 коп.; получаемъ окончательно 7 804 р. 16 коп. Гораздо скорѣе произведемъ вычисленіе, если отложимъ на счетахъ одною проволокою выше, чѣмъ слѣдуетъ, три раза данное число и съ полученнаго числа 8 361 р. 60 коп. сбросимъ два раза по 278 р. 72 коп.; получимъ, разумѣется, то же самое произведеніе 7 804 р. 16 коп.

Дѣленіе на многозначное число на счетахъ производится сравнительно трудно; пріемы могутъ примѣняться тѣ же, что указаны выше.

258. Составныя именованныя числа. Выше уже указано, гдѣ и какъ знакомить дѣтей съ пріемами вычисленія надъ составными именованными числами. Теперь остается только дополнить эти указанія 1) относительно ознакомленія дѣтей съ измѣреніемъ нѣкоторыхъ величинъ (поверхностей, объемовъ), 2) относительно преобразованій именованныхъ чиселъ (раздробленіе и превращеніе) и 3) относительно нѣкоторыхъ частностей въ производствѣ дѣйствій надъ именованными числами.

259. Мѣры поверхностей и объемовъ. Хотя способы измѣренія поверхностей и объемовъ относятся спеціально къ геометріи, но элементарное ознакомленіе съ ними не безъ основанія всегда вводилось въ курсъ начальной ариѳметики. Для учебныхъ заведеній, въ курсъ которыхъ совсѣмъ не входитъ геометрія, ознакомленіе съ квадратными и кубическими мѣрами представляетъ единственный случай затронуть съ дѣтьми область пространственныхъ представленій, образовательное значеніе которыхъ внѣ всякихъ сомнѣній; въ учебныхъ заведеніяхъ, въ которыхъ геометрія занимаетъ болѣе или менѣе важное мѣсто, изученіе квадратныхъ и кубическихъ мѣръ въ ариѳметикѣ можетъ служить нѣкоторой подготовкой къ послѣдующему курсу геометріи, ознакомивъ дѣтей хотя съ нѣкоторыми геометрическими представленіями; наконецъ, во многихъ учебныхъ заведеніяхъ ознакомленіе съ квадратными и кубическими мѣрами является необходимымъ для другихъ учебныхъ предметовъ; напр., для физики.

Изученію этихъ мѣръ должно предшествовать ознакомленіе дѣтей съ нѣкоторыми геометрическими представленіями. Для этой цѣли могутъ служить наглядныя бесѣды по моделямъ геометрическихъ тѣлъ, при чемъ можно ограничиться тремя тѣлами: кубомъ, прямоугольнымъ параллелипипедомъ и правильной треугольной призмой. Бесѣда о кубѣ ведется приблизительно при помощи слѣдующаго ряда вопросовъ:

Сколько у куба граней (сторонъ)? — Каковы онѣ между собою по величинѣ? — По скольку граней куба сходится вмѣстѣ? (По двѣ грани сходится въ прямой линіи или ребрѣ, по три въ точкѣ или вершинѣ). — Сколько у куба реберъ? — Каковы они между собою? — Сколько у куба вершинъ? — Если два куба отличаются другъ отъ друга по величинѣ, то каковы длины этихъ кубовъ, ширины ихъ, высоты ихъ? — Сколько у куба измѣреній и каковы они между собою? — Сколько измѣреній у грани куба? — У ребра? — У вершины?

Въ бесѣдѣ о прямоугольномъ параллелипипедѣ, кромѣ этихъ вопросовъ, предлагаются еще слѣдующіе:

Что образуютъ двѣ грани пар-да, сходясь въ ребрѣ? (Двугранный уголъ). — Сколько двугранныхъ угловъ у пар-да? — Сколько двугранныхъ угловъ у куба? — Что образуютъ два ребра пар-да, сходясь въ вершинѣ? (Линейный уголъ). — Отъ чего зависитъ величина линейнаго угла и отъ чего она не зависитъ? (Зависитъ отъ наклона сторонъ и не зависитъ отъ длины ихъ). — Сколько линейныхъ угловъ въ каждой грани и какъ ее поэтому можно назвать? (Четыреугольникъ).

Въ бесѣдѣ о правильной треугольной призмѣ обращается вниманіе на различные виды линейныхъ угловъ (прямой и косой уголъ), на различные виды фигуръ (четыреугольникъ и треугольникъ), и разсматриваются различные виды четыреугольниковъ (прямоугольникъ, квадратъ).

Изъ этихъ бесѣдъ дѣти должны вынести понятія о тѣлѣ, о поверхности тѣла (границы, грани тѣла), о линіи (границы гра-

ней), о точкѣ (границы линіи), объ углахъ, о фигурахъ граней (квадратъ, прямоугольникъ, треугольникъ), о кубѣ (тѣло, ограниченное 6-ю равными квадратами), прямоугольномъ параллелипипедѣ (тѣло, ограниченное 6-ю прямоугольниками, изъ которыхъ каждые два противоположныхъ равны между собою), треугольной призмѣ (тѣло, ограниченное двумя равными равносторонними треугольниками), о прямоугольникѣ (четыреугольникъ, въ которомъ всѣ углы прямые и противоположныя стороны равны), о квадратѣ (прямоугольникъ, въ которомъ всѣ стороны равны), объ измѣреніяхъ тѣла (три измѣренія), поверхностей или граней (два измѣренія), линіи (одно измѣреніе) и точки (не имѣети измѣреній).

260. Чтобы познакомить съ мѣрами поверхностей, слѣдуетъ сдѣлать для дѣтей ясной потребность въ этихъ мѣрахъ, познакомить съ измѣреніемъ площадей простѣйшихъ фигуръ—прямоугольника и квадрата, и наконецъ съ единичными отношеніями мѣръ поверхностей. Размѣры прямоугольника (основаніе и высота) совершенно достаточны для того, чтобы получить понятіе о величинѣ его площади, и выраженіе площади въ квадратныхъ мѣрахъ можетъ потребоваться только при сравненіи прямоугольниковъ съ различными основаніями и высотами. Знакомство съ квадратными мѣрами, безъ знанія способовъ измѣренія площадей хотя нѣкоторыхъ фигуръ, является мало понятнымъ для дѣтей и недостаточно мотивированнымъ, а изученіе единичныхъ отношеній квадратныхъ мѣръ дѣлается единственно достояніемъ памяти.

Для того, чтобы привести дѣтей къ необходимости измѣрять площадь прямоугольника квадратной единицей, можетъ служить сравненіе площадей прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, имѣющихъ равныя высоты и наконецъ имѣющихъ различныя основанія и высоты; напр.

180) Одинъ прямоугольный дворъ имѣетъ въ длину 8 саж. и въ ширину 6, другой въ длину 12 саж. и въ ширину 6, третій въ длину 8 саж. и въ ширину 4. Какой изъ этихъ трехъ дворовъ самый большой?—какой самый маленькій?

181) Одинъ прямоугольный садъ имѣетъ въ длину 18 саж. и въ ширину 8 саж., а другой — въ длину 16 саж. и въ ширину 9. Какой садъ больше?

Первая задача рѣшается легко, ибо каждые два сравниваемые прямоугольника имѣютъ или равныя основанія, или равныя высоты, или оба измѣренія одного изъ нихъ больше соотвѣтствующихъ измѣреній другого. Рѣшеніе этой задачи приводитъ дѣтей къ установленію зависимости величины площади прямоугольника отъ его основанія и высоты. Для рѣшенія второй задачи

надо сосчитать, сколько разъ въ томъ и другомъ саду уложится квадратъ, сторона котораго равняется одной саженi и который на первое время для дѣтей можно назвать саженнымъ квадратомъ. Наложеніе ведется слѣдующимъ образомъ:

Въ первомъ саду по его длинѣ можно уложить въ рядъ 18 саженныхъ квадратовъ, которые составляютъ вмѣстѣ полосу (прямоугольникъ), длиною въ 18 саж. и шириною въ 1 саж.; такихъ рядовъ, въ 18 квадр. саж. каждый, въ первомъ саду можно уложить 8; слѣд. всего въ первомъ саду уложится $18 \times 8 = 144$ квадр. саж.

Подобнымъ же путемъ дѣти находятъ, что во второмъ саду уложится тоже 144 квадр. саж. (16×9), и что слѣд. оба сада по величинѣ между собою одинаковы.

Задачи и ихъ рѣшеніе поясняются чертежемъ.

Повторивъ на нѣсколькихъ примѣрахъ изложенный пріемъ опредѣленія площади прямоугольника въ различныхъ квадратныхъ единицахъ, дѣти будутъ въ состояніи притти къ выводу, что для измѣренія площади прямоугольника какой-либо квадратной мѣрой, надо соотвѣтствующей линейной мѣрой измѣрить его длину и ширину и полученныя числа перемножить; произведеніе покажетъ, сколько взятыхъ квадратныхъ мѣръ уложится въ площади прямоугольника. Отъ измѣренія площади прямоугольника переходятъ къ измѣренію площади квадрата, разсматривая его какъ прямоугольникъ съ одинаковыми длиной и шириной, и выводятъ, что для измѣренія площади квадрата какой-либо квадратной мѣрой достаточно измѣрить соотвѣтствующей линейной мѣрой его сторону и полученное число умножить само на себя (возвысить въ квадратъ). Этотъ выводъ прилагается къ опредѣленію единичныхъ отношеній между квадратными мѣрами. Составныя именованныя числа, выражающія длину и ширину прямоугольника, необходимо раздроблять въ единицы одного наименованія, прежде чѣмъ приступать къ опредѣленію площади, на что указываютъ и выведенныя выше правила объ измѣреніи площадей прямоугольника и квадрата.

261. Знакомство съ мѣрами объемовъ ведется совершенно тѣмъ же путемъ, какъ и съ мѣрами поверхностей, для чего могутъ служить слѣдующія задачи:

182) Одинъ сундукъ имѣетъ въ длину 24, въ ширину 9 и въ вышину 12 вершковъ, другой—въ длину 18, въ ширину 9 и въ вышину 12 вершк., третій—въ длину 18, въ ширину 10 и въ вышину 9 вершк., четвертый—въ длину 18, въ ширину 10 и въ вышину 8 вершковъ. Какой изъ нихъ самый большой?—Какой самый малый?

183) Одинъ ящикъ имѣетъ въ длину 12, въ ширину 8 и въ вышину 6 вершковъ, другой—въ длину 16, въ ширину 6 и въ вышину 4 вершка. Какой ящикъ больше?

Для рѣшенія послѣдней задачи придется опредѣлять, сколько кубическихъ вершковъ уложится въ каждомъ ящикѣ. Рѣшеніе ведется примѣрно въ слѣдующемъ видѣ:

На дно перваго ящика по длинѣ его можно поставить 12 куб. вершковъ, которые составятъ рядъ длиною въ 12 вершковъ, а шириною и вышиною въ 1 вершокъ; такихъ рядовъ по ширинѣ ящика можно поставить 8, и тогда на днѣ ящика образуется слой въ $12 \times 8 = 96$ куб. вершковъ, длина котораго равна 12 вершк., ширина 8, а вышина 1 вершку; такихъ слоевъ въ ящикъ можно вложить 6, такъ какъ вышина ящика равна 6 вершкамъ, а каждый слой въ высоту занимаетъ только одинъ вершокъ; слѣд. всего въ ящикѣ можно помѣстить $96 \times 6 = 576$ куб. вершковъ.

Задача и ея рѣшеніе должны быть пояснены чертежами. Для наглядности полезно имѣть подъ руками кубическую четверть аршина, составленную изъ кубическихъ вершковъ.

262. Ознакомивъ дѣтей съ измѣреніемъ площади прямоугольника и объема прямоугольнаго пар-да, слѣдуетъ ознакомить ихъ со всѣми русскими и метрическими квадратными и кубическими мѣрами и съ тѣмъ, какъ можно опредѣлять единичныя отношенія между мѣрами высшаго и низшаго наименованія. Слѣдуетъ при этомъ указать въ наиболѣе простыхъ и круглыхъ числахъ соотношеніе между русскими и метрическими квадратными и кубическими мѣрами, а именно можно принимать:

1 кв. метръ=2 кв. арш. безъ 6 кв. вершк., т.-е. 506 кв. вершк.

1 кв. центиметръ=$^1/_{20}$ кв. вершк., или $15^1/_2$ кв. лин.

1 аръ=22 кв. саж. безъ 74 кв. вершк.

1 гектаръ=2196 кв. саж. 7 кв. арш., т.-е. 1 гектаръ на 203 кв. саж. 2 кв. арш. меньше десятины.

1 кв. километръ=219 750 кв. саж.

1 кв. верста=1 кв. километр. 138 020 кв. мтр.

1 кв. сажень=$4^1/_2$ кв. мтр., точнѣе 4 кв. мтр. 55 кв. дециметр.

1 кв. аршинъ=$^1/_2$ кв. мтр., точнѣе 5058 кв. центиметр.

1 кв. вершокъ=20 кв. центиметр., точнѣе 1976 кв. миллиметр.

1 кв. футъ=929 кв. центиметр.

1 десятина=109 ар. 25 кв. мтр.

---

1 куб. метръ (1 стеръ)=$^1/_{10}$ куб. саж., точнѣе: 2 куб. арш. 3195 куб. верш., т.-е. 1 куб. метръ меньше 3 куб. арш. на 900 куб. вершк.

1 куб. центиметръ=$^{11}/_{100}$ куб. вершк., или 61 куб. лин.

1 куб. сажень=10 куб. мтр., точнѣе: 9 куб. мтр. 712 150 куб. центиметр.

1 куб. арш.=360 куб. дециметр., точнѣе: 359 куб. дециметр. 710 куб. центиметр.

1 куб. вершокъ=88 куб. центиметр.

1 куб. футъ=28 куб. дециметр.

Сверхъ того полезно указать, что 1 четверикъ=1600 куб. дюйм., 1 ведро=750 куб. дюйм., 1 литръ=1 куб. дециметр., что 1 фунтъ есть вѣсъ 25 куб. дюймовъ чистой воды, а 1 граммъ есть вѣсъ 1 куб. центиметра чистой воды.

263. Въ училищахъ, гдѣ совсѣмъ не проходится геометрія, слѣдовало бы знакомить дѣтей съ измѣреніемъ площадей другихъ фигуръ, кромѣ прямоугольника, и съ измѣреніемъ объемовъ нѣкоторыхъ другихъ тѣлъ, кромѣ прямоугольнаго пар-да. Для сообщенія свѣдѣній объ измѣреніи площадей можно предложить слѣдующую послѣдовательность: площадь прямоугольнаго треугольника (половина площади прямоугольника), площадь всякаго треугольника (разбивается на прямоугольные треугольники, или разсматривается какъ разность прямоугольныхъ треугольниковъ), площадь параллелограмма и другихъ фигуръ.

При сообщеніи свѣдѣній объ измѣреніи объемовъ придется прибѣгать иногда къ пріемамъ, до нѣкоторой степени чуждымъ геометріи; напр., равновеликость прямого и наклоннаго пар-довъ при равновеликихъ основаніяхъ и равныхъ высотахъ разъяснить опытомъ, показавъ, что въ томъ и другомъ помѣщается одно и то же количество песку; при измѣреніи объема пирамиды такимъ же путемъ показать, что пирамида есть $^1/_3$ призмы, имѣющей съ пирамидой равновеликое основаніе и одинаковую высоту, и т. п.

Сверхъ того, полезно ознакомить дѣтей съ измѣреніемъ угловъ, съ вычисленіемъ длины окружности и площади круга.

264. О преобразованіяхъ именованныхъ чиселъ и о дѣйствіяхъ съ ними уже достаточно было сказано въ предыдущихъ отдѣлахъ.

Остается сдѣлать еще нѣсколько указаній относительно расположенія этихъ преобразованій и дѣйствій при письменномъ вычисленіи. Раздробленіе обыкновенно располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

24 кб. саж.+2 кб. арш.+3600 кб. в.=2 666 000 кб. в.

×27
168
48
648 кб. арш.
+2
650 кб. арш.
×4096
20480
24576
2662400 кб. верш.
+3600
2666000 кб. верш.

Противъ такого расположенія возражаютъ, что, во-первыхъ, правильно ведя разсужденіе, слѣдуетъ умножать 27 кб. арш. на 24, 4096 кб. вершк. на 650, а не такъ, какъ написано—24 кб. саж. умножить на 27, 650 кб. арш. на 4096, и что, во-вторыхъ, каждое произведеніе является числомъ другого наименованія, чѣмъ множимое (отъ умноженія 24 кб. саж. на 27 получается въ произведеніи 648 кб. арш.). Въ замѣнъ приведеннаго расположенія предлагается слѣдующее:

24 кб. саж.+2 кб. арш.+3600 кб. вершк.=2 666 000 кб. в.

27 × 24
108
54
648
+2
4096 × 650
20480
24576
2662400
+ 3600
2666000

Здѣсь множимыя и множители расположены въ томъ порядкѣ, какой вытекаетъ изъ разсужденія, а наименованія, во избѣжаніе недоразумѣній, совсѣмъ не обозначены, за исключеніемъ окончательнаго результата. Относительно перваго расположенія слѣдуетъ замѣтить: 1) что и при немъ во избѣжаніе недоразумѣній можно не обозначать наименованій за исключеніемъ послѣдняго результата; 2) что при расположеніи множителей другъ подъ другомъ нѣтъ надобности считать за множимое непремѣнно

верхнее число, а по произволу можно принимать за множимое и то, и другое число, смотря по тому, какое изъ нихъ намъ выгоднѣе принять за множимое (напр. при раздробленіи 650 куб. аршинъ въ кб. вершки мы умножали 4096 на 650, хотя 4096 и было подписано подъ 650); 3) самое разсужденіе при раздробленіи, какъ мы выше видѣли, можно повести такъ, что множителемъ явится всегда единичное отношеніе; напр. при раздробленіи 24 кб. саж. въ кб. аршины, мы можемъ сказать, что въ объемѣ въ которомъ кубическая сажень укладывается 24 раза, куб. аршинъ уложится въ 27 разъ больше, потому что онъ меньше куб. сажени въ 27 разъ; 4) наконецъ на приписываніе наименованій къ результатамъ должно смотрѣть какъ на облегчающія отмѣтки, аналогичныя выраженіямъ „умножить на значащую цыфру множителя", „сумма цыфръ числа" и т. п., которыя въ прямомъ смыслѣ совершенно неправильны, но допускаются всѣми въ виду ихъ удобства. Такимъ образомъ, оба расположенія раздробленія нельзя признать безупречными, и оба представятъ меньше недоразумѣній, если не приписывать наименованій къ промежуточнымъ результатамъ.

Въ расположеніи чиселъ при превращеніи, сложеніи и вычитаніи особыхъ затрудненій не встрѣчается.

Расположеніе чиселъ при умноженіи на однозначное число было указано выше. Его можно примѣнять и тогда, когда множитель многозначный не особенно сложенъ и на него можно умножать какъ на число однозначное; напр.

437 верст. + 215 саж. + 2 арш. + 14 вершк.
× 25
10 925 + 5 375 + 50 + 350
10 935 верст. + 398 саж. + 2 арш. + 14 вершк.

350 | 16
30 | 21
14 + 50
71 | 3
2 | 23
+ 5375
5398 | 500
398 | 10

Если же умноженіе на многозначнаго множителя, какъ на однозначнаго, затруднительно, то умноженіе и превращеніе единицъ каждаго наименованія можно производить отдѣльно и полное произведеніе писать въ превращенномъ видѣ; напр.

(25 кб. саж.+240 кб. ф.+1 512 кб. д.)×72=1 850 кб. с.+193 кб. ф.

1 512 кб. д.	240 кб. ф.	25 кб. с.
× 72	× 72	× 72
3 024	48	1 800
105 84	168	+ 50
108 864 | 1 728	17280	1 850
103 68 | 63	+ 63	
5 184	17343 | 343	
5 184	1715 | 50	
0	193	

Нѣкоторыя руководства для этихъ случаевъ умноженія предлагаютъ слѣдующее расположеніе:

25 кб. саж.	+ 240 кб. ф.	+ 1 512 кб. д.	× 72
1 800	48	3 024	
	16 8	105 84	
1 800	17 280	108 864 : 1 728	
+ 50	+ 63	103 68	
1 850	17 343 : 343	5 184	
	17 15	5 184	
	193	0	

1 850 кб. саж. + 193 кб. ф.

Единственное преимущество его предъ предыдущимъ состоитъ въ томъ, что составныя части множимаго не переписываются, но зато оно очень трудно для воспроизведенія дѣтьми: при малѣйшей оплошности, когда множитель трехзначный и выше, числа одного наименованія легко сольются съ числами другого наименованія, а нѣкоторыя числа совсѣмъ не умѣстятся на отведенномъ имъ мѣстѣ.

Расположеніе чиселъ при дѣленіи указано выше.

265. Въ нашемъ задачникѣ сравнительно очень мало задачъ на вычисленіе времени. По нашему мнѣнію этимъ задачамъ придаютъ значеніе, котораго онѣ далеко не заслуживаютъ, ибо представляютъ трудности, разрѣшеніе которыхъ не заключаетъ въ себѣ ничего особенно образовательнаго, а пріемы рѣшенія ихъ таковы, что не могутъ быть выработаны самими дѣтьми, а должны быть сообщены преподавателемъ.

Приводимъ для образца нѣкоторыя упражненія на составныя именованныя числа.

184) Превратить 100 030 дюйм. въ вершки, аршины и сажени; 25 272 вершк. въ дюймы, футы, сажени и версты.

Рѣшеніе. 1) Превративъ 100 030 дюйм. въ аршины и раздѣливъ для этого 100 030 на 28, найдемъ 3572 арш. и у насъ останется 14 дюймовъ, которые составляютъ полъ-аршина и слѣдов. заключаютъ въ себѣ 8 вершковъ. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно. 2) Превративъ 25 272 вершка въ аршины, найдемъ 1579 арш. и у насъ останется 8 вершковъ, которые составляютъ полъ-аршина и слѣд. заключаютъ въ себѣ 14 дюйм. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

185) Сколько полныхъ сутокъ прошло между двумя событіями, если первое совершилось 31 декабря високоснаго года, а второе—черезъ 25 лѣтъ 6 мѣсяцевъ?

Рѣшеніе. Изъ 25 лѣтъ 4-й, 8-й, 12-й, 16-й, 20-й и 24-й годы были високосные, а потому, умноживъ 365 на 25, мы къ полученному произведенію 9125 дней должны прибавить 6 сутокъ за високосные годы, и 30×6+3—2=181 сутокъ, заключающихся въ 6 мѣсяцахъ; всего получимъ 9312 сутокъ.

186) Сколько лѣтъ, мѣсяцевъ и дней прошло между двумя событіями, если первое совершилось 31 января простого года (3-го послѣ високоснаго), а второе черезъ 2225 сутокъ?

Рѣшеніе. Превративъ 2225 сутокъ въ годы, мы получимъ 6 лѣтъ и у насъ останется 35 дней. Но изъ этого остатка надо взять 2 дня для образованія двухъ високосныхъ годовъ (1-го и 5-го). Чтобы оставшіяся 33 сутокъ обратить въ мѣсяцы, замѣчаемъ, что 6-й годъ закончился 31-мъ января и что слѣдующій мѣсяцъ февраль содержитъ 28 дней; слѣд. всего прошло 6 лѣтъ 1 мѣсяцъ и 5 дней.

187) Мальчикъ началъ учиться 16 августа 1856 года. Когда онъ окончилъ образованіе, если учился 11 лѣтъ 9 мѣс. 5 дней?

Рѣшеніе. Черезъ 11 лѣтъ наступило 16-е августа 1867 года; еще черезъ 9 мѣс.—16-е мая 1868 года, и еще черезъ 5 дней—21-е мая того же года. Слѣд. мальчикъ окончилъ образованіе 21-го мая 1868 года.

188) Постройку деревяннаго дома начали 28 апрѣля въ 7 час. 30 мин. утра. Сколько времени строился домъ, если его окончили 23-го сентября того же года въ 5 час. утра?

Рѣшеніе. До 28-го августа 7 час. 30 мин. утра прошло 8—4=4 полныхъ мѣсяца, съ 28-го августа по 1-е сентября прошло еще 31—27=4 дн.; затѣмъ до 7 час. 30 мин. утра 23-го сентября прошло еще 23 сутокъ, но такъ какъ домъ окончили 23-го сентября въ 5 час. утра, то изъ послѣднихъ сутокъ надо выключить 2 час. 30 м.; слѣд. домъ строился:

4 мѣс. 4 сут.+23 сут.—2 ч. 30 м.=4 мѣс. 26 сут. 21 час. 30 мин.,
или 31.2+30.2+26 сут. 21 ч. 30 м.=148 сут. 21 час. 30 мин.

189) На фабрикѣ за сентябрь мѣсяцъ, въ теченіе котораго было 6 праздниковъ, уплачено всѣмъ работникамъ и работницамъ 1285 р. 20 коп., при чемъ 12 работникамъ за 13 рабочихъ дней пришлось получить столько же денегъ, сколько 15 работницамъ за 20 дней. Сколько было на фабрикѣ работниковъ и сколько работницъ, если работниковъ было вдвое больше, чѣмъ работницъ, и каждая работница получала 65 коп. въ день?

Рѣшеніе. Каждый работникъ получалъ въ день

$$(65\times15\times20) : (12\times13) = 1 \text{ р. } 25 \text{ коп.}$$

Два работника и одна работница получали въ день 1 руб. 25 к. $\times 2 + 65 = 3$ р. 15 коп., а въ 24 (т.-е. 30 — 6) рабочихъ дня сентября получили 75 р. 60 к. Работницъ было 12 8520 : 7560 = 17 человѣкъ, а работниковъ $17\times2=34$.

266. Курсъ цѣлыхъ чиселъ долженъ быть повторенъ на вычисленіи примѣровъ и рѣшеніи задачъ. Для этой цѣли въ нашемъ задачникѣ помѣщенъ особый отдѣлъ: Задачи на всѣ дѣйствія съ цѣлыми числами. Приведемъ нѣкоторыя изъ упражненій этого отдѣла.

190) Два брата хотѣли купить имѣніе; но у перваго не хватало для этого 1500 руб., а у второго 1900 руб. Тогда они сложились деньгами и купили вмѣстѣ это имѣніе. Что стоило имѣніе, если у обоихъ братьевъ было 11600 руб.?

Первое рѣшеніе. Чтобы первому брату можно было купить имѣніе, ему должно пріобрѣсти еще 1500 руб., а второму 1900 руб., тогда у обоихъ братьевъ было бы денегъ $11600+1500+1900 = 15000$ руб., и въ этой суммѣ стоимость имѣнія повторялась бы 2 раза; слѣд. имѣніе стоитъ $15000 : 2 = 7500$ руб.

Другое рѣшеніе. У перваго брата на $1900 - 1500 = 400$ руб. больше денегъ, чѣмъ у второго. Раздѣливъ 11 600 руб. на двѣ части такъ, чтобы въ первой было на 400 руб. больше, чѣмъ во второй, найдемъ, что у перваго брата было 6000 руб., у второго — 5 600 руб.; слѣд. имѣніе стоило $6000 + 1500 = 5600 + 1900 = 7500$ руб.

191) За 30 аршинъ синяго и 40 арш. чернаго сукна заплатили вмѣстѣ 200 руб. Что стоитъ аршинъ того и другого сукна, если синее вдвое дороже чернаго?

Рѣшеніе. Вмѣсто 30 арш. синяго сукна можно купить $30\times2 = 60$ арш. чернаго; слѣд. на 200 руб. можно купить $40+60=100$ арш. чернаго сукна. Аршинъ чернаго сукна стоитъ $200 : 100 = 2$ руб., а синяго $2\times2=4$ руб.

192) За 22 фунта чаю и 28 головъ сахару заплачено 184 руб. Что стоитъ фунтъ чаю и голова сахару, если за голову сахару платили 3 руб. больше, чѣмъ за фунтъ чаю?

Рѣшеніе. Замѣнимъ 28 головъ сахару 28-ю фунтами чаю; тогда за всю покупку придется заплатить на $3\times28=84$ руб. меньше; слѣд. $22+28=50$ фунт. чаю стоятъ $184-84=100$ руб. Фунтъ чаю стоитъ $100:50=2$ руб., а голова сахару $2+3=5$ руб.

193) Изъ одного города въ другой купецъ отправилъ обозъ съ товаромъ, а черезъ 9 часовъ послѣ выхода обоза выѣхалъ по той же дорогѣ самъ, и, дѣлая въ часъ на 6 верстъ 375 саж. больше обоза, догналъ его черезъ 6 часовъ, въ разстояніи 32 верстъ 250 саж. отъ другого города. Сколько верстъ между этими городами?

Рѣшеніе. Въ теченіе 6 часовъ купецъ проѣхалъ больше обоза 6 в. 375 саж. $\times6=40$ в. 250 саж.; эти 40 в. 250 саж. обозъ сдѣлалъ въ тѣ 9 часовъ, которые прошли до выѣзда купца; слѣд., обозъ шелъ въ часъ 40 в. 250 саж.: $9=4$ в. 250 саж.; въ 15 час. онъ прошелъ 4 в. 250 саж. $\times15=67$ в. 250 саж.; разстояніе между городами равно 67 в. 250 с. $+32$ в. 250 саж. $=100$ верстъ.

194) Изъ деревни въ городъ, находящійся отъ нея въ 160 верстахъ, одинъ крестьянинъ выѣхалъ, а другой пошелъ пѣшкомъ; черезъ 7 часовъ первый обогналъ второго на 42 версты. Сколько времени находился въ дорогѣ второй крестьянинъ, если первый достигъ города черезъ 26 часовъ послѣ выѣзда и при этомъ отдыхалъ 10 часовъ, а второй отдыхалъ 16 часовъ?

Рѣшеніе. Первый крестьянинъ весь путь проѣхалъ въ $26 - 10 = 16$ часовъ и слѣд. въ часъ проѣзжалъ $160 : 16 = 10$ верстъ. Второй, отставъ отъ перваго въ 7 часовъ на 42 версты, каждый часъ отставалъ отъ него на $42 : 7 = 6$ верстъ, и слѣд. въ часъ проходилъ $10-6=4$ версты. Чтобы дойти до города безъ отдыха, ему нужно было итти $160 : 4 = 40$ час., а такъ какъ онъ отдыхалъ 16 часовъ, то всего въ дорогѣ былъ $40+16=56$ часовъ.

195) За нѣсколько одинаковыхъ тетрадей заплачено 2 р. 40 коп.; за одну тетрадь во столько листовъ, сколько было тетрадей, пришлось бы заплатить 60 коп.; за купленныя тетради, если бы каждая изъ нихъ стоила столько копеекъ, сколько было въ ней листовъ, пришлось бы заплатить 1 р. 20 коп. Сколько куплено тетрадей?—сколько въ каждой тетради листовъ?—что стоитъ каждая тетрадь?

Рѣшеніе. 2 р. 40 коп., или 240 копеекъ представляетъ произведеніе трехъ множителей: цѣны листа, числа листовъ въ каждой тетради и числа тетрадей; 60 коп. представляетъ произведеніе двухъ изъ нихъ: цѣны листа и числа тетрадей; слѣд. для опредѣленія 3-го множителя, числа листовъ въ каждой тетради, надо 240 раздѣлить на 60. Такимъ образомъ найдемъ, что въ каждой тетради было $240 : 60 = 4$ листа. Затѣмъ 120 представляетъ про-

изведеніе двухъ множителей: числа листовъ въ каждой тетради и числа тетрадей. Такъ какъ мы узнали, что въ каждой тетради было по 4 листа, то для опредѣленія числа тетрадей надо 120 раздѣлить на 4; найдемъ, что тетрадей было 30. Для опредѣленія цѣны тетради останется 240 раздѣлить на 30, отъ чего получимъ 8. Итакъ, тетрадей было 30, по 4 листа въ каждой, и каждая тетрадь стоила 8 коп.

196) Въ четырехклассномъ училищѣ 125 человѣкъ. Въ первомъ и второмъ классахъ вмѣстѣ 80 человѣкъ, во второмъ и третьемъ 60 человѣкъ, а въ первомъ и третьемъ 70 человѣкъ. Сколько учениковъ въ четвертомъ классѣ?

Рѣшеніе. Сложивъ 80, 60 и 70, мы найдемъ двойную сумму учениковъ въ первыхъ трехъ классахъ. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

197) Отъ имѣнія до Москвы 228 верстъ. Владѣлецъ весь путь совершилъ въ 9 часовъ, при чемъ 5 часовъ ѣхалъ по желѣзной дорогѣ, а 4 часа на лошадяхъ, и по желѣзной дорогѣ въ часъ проѣзжалъ втрое больше, чѣмъ на лошадяхъ. Сколько верстъ надо ѣхать въ имѣніе по желѣзной дорогѣ и сколько на лошадяхъ?

Рѣшеніе. Если бы владѣлецъ все время ѣхалъ на лошадяхъ, то ему пришлось бы быть въ дорогѣ $5\times3+4=19$ часовъ; слѣд. онъ на лошадяхъ ѣхалъ по $228:19=12$ верстъ. На лошадяхъ владѣлецъ проѣхалъ $12\times4=48$ верстъ, а по желѣзной дорогѣ $228-48=180$ верстъ.

198) Мужъ и жена, работая на одной фабрикѣ, получали—мужъ по 1 р. 25 коп., а жена по 90 коп. въ день. При расчетѣ мужъ, хотя и работалъ 4-мя днями меньше жены, получилъ на 2 руб. больше жены. Сколько дней работалъ мужъ.—Сколько дней работала жена?

Рѣшеніе. Если бы мужъ работалъ столько же дней, что и жена, то онъ получилъ бы на 1 р. 25 коп. $\times4+2$ руб. $=7$ руб. больше жены. Этотъ излишекъ произошелъ бы единственно отъ того, что мужъ получалъ на 1 р. 25 коп.—90 коп.$=35$ коп. въ день больше, чѣмъ жена; слѣд. жена работала 7 руб.: 35 коп.$=20$ дней, а мужъ $20-4=16$ дней.

199) Въ каждомъ изъ двухъ училищъ было по 720 учениковъ; изъ перваго вышло нѣсколько учениковъ, а изъ второго вышло 257-ю учениками меньше, чѣмъ осталось въ первомъ. Сколько учениковъ осталось въ обоихъ училищахъ?

Первое рѣшеніе. Если бы изъ второго училища вышло ровно столько учениковъ, сколько ихъ осталось въ первомъ, то всего изъ обоихъ училищъ вышло бы 720, а слѣд. и осталось бы въ обоихъ 720. Но изъ второго училища вышло на 257 человѣкъ

меньше, стало быть въ обоихъ осталось на 257 человѣкъ больше 720-ти., т.-е. $720+257=977$.

Второе рѣшеніе. Въ обоихъ училищахъ было $720+720$ учениковъ. Отъ перваго слагаемаго этой суммы отнята часть 720; если бы отъ второго отняли остальную часть 720-ти (столько, сколько осталось въ первомъ), то сумма уменьшилась бы ровно на 720 и обратилась бы въ 720. Но отъ второго слагаемаго отняли на 257 меньше; эти 257 останутся въ суммѣ, и она обратится въ $720+257=977$.

Рѣшеніе разобранной задачи значительно облегчится, если предварительно рѣшить задачу, гдѣ отъ второго изъ равныхъ слагаемыхъ отнято ровно столько, сколько осталось въ первомъ.

200) Въ двухъ училищахъ было поровну учениковъ, а когда въ первое поступило еще 190 человѣкъ, а изъ второго вышло 170 человѣкъ, то въ первомъ стало втрое больше учениковъ, чѣмъ во второмъ. Сколько учениковъ было въ каждомъ училищѣ?—Сколько учениковъ стало въ каждомъ училищѣ?

Рѣшеніе. Когда въ первое училище поступило 190, а изъ второго училища вышло 170 человѣкъ, то въ первомъ стало на $190+170=360$ человѣкъ больше, чѣмъ во второмъ. Такъ какъ тогда въ первомъ стало втрое больше, чѣмъ во второмъ, то число учениковъ второго училища содержится 2 раза въ 360; слѣд. во второмъ училищѣ стало $360:2=180$ человѣкъ, а въ первомъ $180\times3=540$. Было въ каждомъ училищѣ по $540-190=180+170=350$ человѣкъ.

201) Разносчикъ продалъ 20 десятковъ яблокъ и 12 десятковъ грушъ, и груши продавалъ на 15 коп. за десятокъ дороже, чѣмъ яблоки. Сколько онъ выручилъ за проданный товаръ, если за яблоки получилъ на 60 коп. больше, чѣмъ за груши?

Рѣшеніе. Если бы разносчикъ груши продавалъ по той же цѣнѣ, что и яблоки, то онъ за яблоки выручилъ бы на $15\times12+60=2$ руб. 40 коп. больше, чѣмъ за груши. Этотъ лишекъ тогда произошелъ бы единственно отъ того, что яблокъ было куплено на $20-12=8$ десятковъ больше, чѣмъ грушъ; слѣд. десятокъ яблокъ стоитъ 2 руб. 40 коп.$:8=30$ коп., 20 десятковъ яблокъ стоятъ $30\times20=6$ руб., 12 десятковъ грушъ 6 руб.—60 коп.$=5$ р. 40 коп., весь товаръ 6 р.$+5$ р. 40 коп.$=11$ руб. 40 коп.

202) Въ кассѣ лежало 500 руб. пятирублевыми золотыми, трехрублевыми бумажками и серебряными рублями. Когда 14 трехрублевыхъ бумажекъ вынули изъ кассы, и, вмѣсто нихъ, вложили 8 золотыхъ и 6 рублей, то и монетъ каждаго сорта, и бумажекъ стало поровну. Сколько бумажекъ лежало въ кассѣ?—Сколько золотыхъ?—Сколько рублей?

Рѣшеніе. Когда изъ кассы выпули 14 трехрублевыхъ и, вмѣсто нихъ, вложили 8 золотыхъ и 6 рублей, то въ кассѣ стало 500—3×14+5×8+1×6=504 руб. Въ бумажкѣ трехрублевой, золотомъ и рублѣ заключается 3+5+1=9 руб., слѣд. бумажекъ и монетъ каждаго рода стало по 504:9=56 штукъ, а было: трехрублевыхъ 56+14=70, золотыхъ 56—8=48, рублей 56—6=50.

203) Торговецъ мебелью одному покупателю, взявшему 7 креселъ и нѣсколько стульевъ, согласился и кресла, и стулья отдать по одной цѣнѣ, именно по 4 руб. за штуку, и отъ этой продажи получилъ такую же прибыль, какую получилъ бы, продавши кресла по 7 рублей и стулья по 2 руб. 50 коп. за штуку. Сколько стульевъ купилъ покупатель?

Рѣшеніе. На каждомъ креслѣ торговецъ терялъ 7 р.—4 р.=3 рубля, а всего на 7 креслахъ потерялъ 3 р.×7=21 руб.; такъ какъ онъ отъ всей продажи имѣлъ такую же прибыль, какую получилъ бы продавая кресла по 7 руб. и стулья по 2 р. 50 коп., то онъ столько же, т.-е. 21 руб., выигралъ на стульяхъ. На каждомъ стулѣ онъ выигрывалъ 4 р.—2 р. 50 к.=1 р. 50 коп.. слѣдов. стульевъ было продано 21 р.:1 р. 50 к.=14 штукъ.

204) Въ магазинѣ былъ кофе въ 64 коп. и въ 55 коп. за фунтъ; покупатель взялъ одного сорта на 18 фунтовъ больше, чѣмъ другого, и заплатилъ за оба сорта поровну. Сколько онъ взялъ каждаго сорта?

Рѣшеніе. Если бы покупатель перваго сорта взялъ столько же, сколько и второго, то ему за первый сортъ пришлось бы заплатить на 64 коп.×18=11 руб. 52 коп. больше, чѣмъ за второй. Этотъ излишекъ произошелъ бы только отъ того, что фунтъ перваго сорта на 64 коп.—55 коп.=9 коп. дороже второго; слѣд., второго сорта было взято 11 р. 52 коп. : 9 коп.=128 фунтовъ. а перваго 128 ф.—18 ф.=110 ф.

205) Когда въ Петербургѣ полдень, въ Кіевѣ 12 час. 48 сек., а въ Харьковѣ 12 час. 23 м. 43 сек. пополудни. Который часъ въ Харьковѣ и который часъ въ Петербургѣ, когда въ Кіевѣ 4 часа 58 м. 17 сек. вечера?

Рѣшеніе. Въ Петербургѣ полдень, а слѣд. и полночь наступаетъ на 12 час. 48 сек.—12 ч.=48 сек. позже, а въ Харьковѣ на 12 час. 23 м. 43 сек.—12 час. 48 сек.=22 м. 55 сек. раньше, чѣмъ въ Кіевѣ; поэтому, когда въ Кіевѣ 4 часа 58 м. 17 сек. вечера, въ Петербургѣ должно быть 4 часа 58 м. 17 сек.—48 сек.=4 час. 57 м. 29 сек., а въ Харьковѣ 4 часа 58 м. 17 сек.+22 м. 55 сек.=5 час. 21 м. 12 сек. вечера.

206) Возстановить пропущенныя цыфры въ примѣрахъ:

```
  * * * *          * ***  798 | 5 73*
  ×   * 2          556 19     | 4 **
  1 8 * 4 8         40 1*8
7 4 9 9 *           0
  * * * 6 6 *
```

Рѣшеніе 1-го примѣра. Послѣдняя цыфра 2-го частнаго произведенія отъ сложенія со второй цыфрой 4 перваго частнаго произведенія должна дать число, оканчивающееся 6-ю; чтобы найти ее надо изъ числа, оканчивающагося 6-ю, вычесть 4, получимъ 2. Если послѣдняя цыфра второго частнаго произведенія есть 2, то третья, цыфра перваго частнаго произведенія должна быть такова, чтобы отъ сложенія съ 9-ю давать число, оканчивающееся 6-ю; для опредѣленія ея надо изъ числа, оканчивающагося 6-ю, вычесть 9, получимъ 7. Отсюда видно, что 1-е частное произведеніе есть 18 748, множимое равно 18 748 : 2=9 374, второе частное произведеніе есть 74 992, искомая цыфра множителя есть 74 992 : 9 374=8, а общее произведеніе равно 18 748+749 920=768 668.

Рѣшеніе 2-го примѣра. Чтобы найти послѣднюю цыфру частнаго, надо 40 1*8 раздѣлить на 573*; получимъ 7. Для опредѣленія послѣдней цыфры дѣлителя замѣчаемъ, что она отъ умноженія на 7 должна давать произведеніе, оканчивающееся 8-ю, ибо 8-ю оканчивается послѣднее дѣлимое; такое произведеніе есть только одно, именно 28, слѣд. послѣдняя цыфра дѣлителя есть 28 : 7=4. Чтобы найти вторую цыфру частнаго, надо 55 619 раздѣлить на 5 734; найдемъ 9. Итакъ частное есть 497. Для опредѣленія дѣлимаго остается 5 734 умножить на 497, получимъ 2 849 798. Первое частное произведеніе въ этомъ умноженіи покажетъ, что цыфра, пропущенная въ послѣднемъ неполномъ дѣлимомъ, есть 3.

207) Въ двухъ городахъ было поровну жителей, а когда въ первомъ городѣ число жителей возросло на 16 574 человѣка, а во второмъ уменьшилось на 15 836 человѣкъ, то въ первомъ стало въ 6 разъ больше жителей, чѣмъ во второмъ. Сколько жителей стало въ каждомъ городѣ?

Рѣшеніе. Число жителей въ первомъ городѣ стало больше, чѣмъ во второмъ, на 16 574+15 836=32 410, и отъ этого число жителей въ первомъ городѣ сдѣлалось въ 6 разъ больше числа жителей во второмъ. Такимъ образомъ знаемъ, что разность между двумя числами равна 32 410 и что второе содержится въ первомъ 6 разъ. Но если второе содержится въ первомъ 6 разъ, то въ разности между первымъ и вторымъ оно должно

содержаться только 5 разъ (если отъ дѣлимаго отнимемъ дѣлителя, то частное уменьшится на единицу); поэтому для опредѣленія числа жителей второго города надо 32 410 раздѣлить на 5, а для опредѣленія числа жителей перваго города полученное частное умножить на 6.

208) Извозчикъ взялся перевезти 18 кб. саж. 18 кб. арш. песку на разстояніе 250 саж., съ платою по 15 коп. съ куб. аршина; для нагрузки и разгрузки телѣги требуется 10 мин. времени, лошадь же проходитъ по 16 саж. 2 арш. въ минуту. Въ теченіе перваго дня онъ проработалъ 8 час. и получилъ за работу 3 руб. 60 коп. Сколько песку клалъ онъ каждый разъ на телѣгу и во сколько дней окончилъ работу, если и остальные дни работалъ по 8-ми часовъ?

Рѣшеніе. Чтобы отвезти возъ песку и вернуться назадъ, извозчикъ каждый разъ долженъ былъ проѣхать 250 саж.$\times$2=500 саж., для этого ему требовалось 500 саж. : 16 саж. 2 арш.=30 минутъ, а слѣд. съ нагрузкой и выгрузкой приходилось затрачивать на каждый возъ 30 м.+10 м.=40 минутъ; поэтому онъ въ теченіе перваго дня перевезъ 8 час.: 40 мин.=12 возовъ песку. Во всѣхъ этихъ возахъ помѣстилось 3 руб. 60 коп.: 15 коп.=24 кб. арш. песку; слѣдоват. извозчикъ клалъ каждый разъ на телѣгу 24 кб. арш. : 12=2 кб. арш. Вся перевозка была окончена въ

18 кб. саж. 18 кб. арш. : 24 кб. арш.=21 день.

209) Изъ чайнаго магазина продали въ теченіе года 65 000 фунтовъ чаю и сахару; если бы чаю продали на 275 фунтовъ меньше, а сахару на 2 325 фунтовъ больше, чѣмъ дѣйствительно, то сахару было бы продано въ 17 разъ больше, чѣмъ чаю. Какъ великъ годовой оборотъ магазина, если сахаръ продавали по 16 коп. за фунтъ, а чай по 2 руб. 50 коп.?

Рѣшеніе. Сколько фунтовъ чаю и сахару было бы продано, если бы перваго было продано на 275 фунтовъ меньше, а второго на 2 325 фунтовъ больше, чѣмъ въ дѣйствительности?

$$\begin{array}{r} 65\,000 \\ -275 \\ \hline 64\,725 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64\,725 \\ +2\,325 \\ \hline 67\,050 \end{array}$$

Сколько фунтовъ чаю было бы въ числѣ 67 050 фунт.?

$$\begin{array}{r|l} 67\,050 & 18 \\ \hline 13\,0 & 3\,725 \\ 45 & \\ \hline 90 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Сколько фунтовъ сахару тогда было бы продано?

$$\begin{array}{r} 67\,060 \\ -3\,725 \\ \hline 63\,325 \end{array}$$

Сколько фунтовъ чаю въ дѣйствительности было продано?

$$3\,725+275=4\,000$$

Сколько фунтовъ сахару въ дѣйствительности было продано?

$$63\,325-2\,325=61\,100$$

Сколько стоитъ проданный чай?

$$2\text{ р. }50\times 4\,000=10\,000\text{ р.}$$

Сколько стоитъ проданный сахаръ?

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 61\,000 \\ \hline 976\,000 \end{array}$$

коп. или 9 760 р.

Какъ великъ годовой оборотъ магазина?

$$10\,000+9\,760=19\,760\text{ р.}$$

210) Контора для перевозки клади взялась доставить изъ одного города въ другой 100 ящиковъ съ хрусталемъ, по 8 р. 25 к. за доставку каждаго ящика, съ такимъ условіемъ, чтобы владѣлецъ хрусталя не только не платилъ за перевозку попорченныхъ во время дороги ящиковъ, но и получалъ въ вознагражденіе по 25 руб. за каждый. Сколько ящиковъ доставлено въ цѣлости, если контора за эту доставку получила 326 р. 25 к.?

Рѣшеніе. За доставку всѣхъ ящиковъ въ цѣлости контора должна бы получить 8 р. 25 коп.$\times$100, т.-е. 825 р., а получила на 825 р.—326 р. 25 к., т.-е. на 498 р. 75 к. меньше. Эта потеря образовалась изъ тѣхъ потерь, которыя контора несла на каждомъ попорченномъ ящикѣ. На каждомъ попорченномъ ящикѣ контора теряла 8 р. 25 к. платы за провозъ и 25 руб. вознагражденія владѣльцу, т.-е. всего теряла 33 р. 25 коп. Раздѣливъ на это число всю потерю 498 р. 75 к., найдемъ, что было попорчено 15 ящиковъ; слѣд. доставлено въ цѣлости 100—15=85.

211) Арендаторъ имѣнія платилъ за пахотную землю по 4 р. 50 коп. съ каждой десятины, а за непахотную, которой было на 14 десятинъ меньше, чѣмъ пахотной, по 1 р. 75 к. Сколько десятинъ было въ имѣніи, если вся арендная плата составляла 781 р. 75 коп.?

Рѣшеніе. За 14 дес. непахотной земли арендная плата составляетъ 1 р. 75 коп.$\times$14=24 р. 50 коп.; слѣд., если бы въ имѣніи непахотной земли было бы столько же, сколько и пахот-

ной, то арендатору приходилось бы платить въ годъ 781 р. 75 коп. + 24 р. 50 к. = 806 руб. 25 коп. Такъ какъ плата за 1 десятину пахотной и 1 десятину непахотной земли составляетъ 4 р. 50 к. + 1 р. 75 коп. = 6 р. 25 коп., то пахотной земли было въ имѣніи 806 руб. 25 коп.: 6 р. 25 к. = 129 десятинъ, непахотной 129 дес.—14 дес.,=115 дес. а всего 129+115=244 дес.

212) На 5 400 руб. купецъ купилъ на фабрикѣ 2 сорта шерстяной матеріи; матеріи перваго сорта, которая была въ 8 разъ дороже, онъ взялъ въ 3 раза больше, чѣмъ матеріи второго сорта. Сколько кусковъ матеріи каждаго сорта онъ взялъ, если аршинъ матеріи перваго сорта стоитъ 2 р. 40 к. и въ каждомъ кускѣ ея было по 40 арш., а въ кускѣ матеріи второго сорта было по 30 аршинъ?

Рѣшеніе. Если бы матеріи перваго сорта было столько же, сколько и матеріи второго сорта, то за нее пришлось бы заплатить въ 8 разъ больше, чѣмъ за матерію второго сорта; но матеріи 1-го сорта взято въ 3 раза больше, чѣмъ матеріи второго сорта, слѣд. за нее заплачено въ 8 × 3, т.-е. въ 24 раза больше, чѣмъ за матерію второго сорта. Поэтому, чтобы узнать, сколько заплачено за матерію каждаго сорта, надо 5 400 рублей раздѣлить на 2 части, изъ которыхъ одна въ 24 раза больше другой. Узнавъ, сколько стоитъ матерія каждаго сорта, нетрудно уже рѣшить вопросъ задачи.

213) Имѣніе состояло изъ пахотной земли, лѣсу и неудобной земли; пахотной земли и лѣсу было въ 4 раза больше, чѣмъ неудобной земли; неудобной земли и лѣсу было въ 3 раза больше, чѣмъ пахотной земли. Сколько десятинъ было въ имѣніи, сколько было въ немъ пахотной земли и сколько лѣсу, если неудобной земли было 260 дес.?

Рѣшеніе. Въ имѣніи было 260 дес. × 5 = 1 300 дес.; пахотной земли было 1300 дес. : 4 = 325 дес.; лѣсу 1300 дес.—325 дес.—260 дес.=715 дес.

214) Пароходъ отправился съ устья рѣки на ея верховье, котораго и достигъ черезъ 2 сутокъ, а возвращаясь, не успѣлъ, вслѣдствіе заморозковъ дойти до устья и былъ въ дорогѣ только 16 часовъ. Какъ велика длина рѣки и въ какомъ разстояніи отъ ея устья зазимовалъ пароходъ, если всего онъ сдѣлалъ 560 верстъ и если по теченію онъ шелъ вдвое скорѣе, чѣмъ противъ теченія?

Рѣшеніе. Если бы всѣ 560 верстъ пароходъ прошелъ противъ теченія, то онъ былъ бы въ дорогѣ 2 сутокъ и 32 часа, потому что противъ теченія онъ шелъ вдвое медленнѣе, и на то разстояніе, которое по теченію онъ прошелъ въ 16 часовъ, противъ теченія времени ему потребовалось бы вдвое больше, т.-е. 16 × 2 часовъ. Отсюда заключаемъ, что всѣ 560 верстъ противъ теченія пароходъ можетъ пройти въ 24 × 2 + 32 = 80 часовъ, слѣд. противъ теченія въ часъ онъ шелъ 560 : 80 = 7 верстъ. А такъ какъ онъ всю рѣку отъ устья до верховья прошелъ въ 2 сутокъ, то длина рѣки равна 7 × 48 = 336 верстамъ. Значитъ отъ верховья рѣки онъ прошелъ 560 — 336 = 224 версты и зазимовалъ въ разстояніи 336—224=112 верстъ отъ устья.

215) Два брата согласились жить вмѣстѣ, съ тѣмъ чтобы старшій платилъ за квартиру и содержаніе по 33 рубля въ недѣлю, а младшій по 8 рублей; старшій для этого отложилъ изъ своихъ денегъ 3 000 рублей, а младшій 1 625 рублей. Когда они разъѣхались, то изъ отложенныхъ денегъ у обоихъ братьевъ осталось поровну. Сколько времени братья жили вмѣстѣ?

Рѣшеніе. Старшій отложилъ больше младшаго на 3 000 — — 1 625=1 375 рублей. Эта разность между отложенными деньгами уменьшалась еженедѣльно на 33 р. — 8 р. = 25 руб., ибо старшій на столько рублей тратилъ больше младшаго. Такъ какъ при разъѣздѣ отложенныя ими деньги сравнялись, то они жили вмѣстѣ 1 375 : 25=55 недѣль.

216) Отецъ, умирая, завѣщалъ на образованіе сына и дочери по 9000 рублей; хотя образованіе обоихъ продолжалось одинаковое число лѣтъ, но отъ образованія дочери осталось втрое больше денегъ, чѣмъ отъ образованія сына. Сколько лѣтъ продолжалось образованіе обоихъ, если на образованіе сына ежегодно выходило по 625 рублей, а на образованіе дочери—по 375 рублей?

Рѣшеніе. Чтобы отъ образованія сына осталось столько же денегъ, сколько и отъ образованія дочери, надо, чтобы и назначенная сумма и ежегодный расходъ на образованіе сына возрасли въ 3 раза (остатокъ отъ образованія сына есть разность между 9000 и всѣмъ расходомъ на образованіе; чтобы разность утроить, надо утроить и уменьшаемое и вычитаемое, т.-е. и 9000, и весь расходъ на образованіе; а чтобы весь расходъ утроился, долженъ утроиться и ежегодный расходъ). Итакъ, если на образованіе сына было бы завѣщано 9 000 × 3, т.-е. 27 000 руб., и ежегодно выходило бы 625 × 3, т.-е. 1875 р., то отъ образованія сына и дочери остались бы одинаковыя суммы. Но на сына тогда было бы завѣщано на 27 000 — 9 000, т.-е. на 18 000 рублей больше и ежегодно выходило бы на 1 875 безъ 375, т.-е. на 1 500 р. больше, чѣмъ на образованіе дочери; слѣд. образованіе продолжалось 18 000 : 1 500, т.-е. 12 лѣтъ.

217) Имѣніе, состоящее изъ 205 дес. пахотной земли и 45 дес. лѣсу, продано такъ, что десятина лѣсу пошла на 38 руб. дороже десятины пахотной земли. Сколько стоитъ имѣніе, если за пахотную землю получено на 6 610 руб. больше, чѣмъ за лѣсъ?

Рѣшеніе. Если бы лѣсъ былъ проданъ по той же цѣнѣ, что и пахотная земля, то за него выручили бы на 38 руб.×45=1710 руб. меньше и слѣд. тогда бы за пахотную землю было получено на 6610+1710=8320 руб. больше, чѣмъ за лѣсъ. Этотъ лишекъ произошелъ бы только отъ того, что пахотной земли было больше на 205 дес. — 45 дес. = 160 дес., чѣмъ лѣсу. Слѣд. 160 дес. пахотной земли стоятъ 8320 руб., одна дес. пахотной земли стоитъ 8 320 руб. : 160=52 руб., вся пахотная земля 52 руб.×205=10 660 руб., лѣсъ стоитъ 10 660 руб. — 6 610 руб. = 4050 р., все имѣніе стоитъ 10 660 р.+4050 р.=14 710 руб.

218) У казначея было 1 260 рублей рублями и трехрублевыми бумажками; если 8 трехрублевыхъ бумажекъ размѣнять на рубли, то трехрублевыхъ бумажекъ будетъ въ 9 разъ больше, чѣмъ рублей. Сколько у казначея было рублей?—Сколько трехрублевыхъ бумажекъ?

Рѣшеніе. Сумма, заключавшаяся въ трехрублевыхъ бумажкахъ, послѣ размѣна 8-ми изъ нихъ на рубли, стала больше суммы, заключавшейся въ рубляхъ, въ 9×3, т.-е. въ 27 разъ, потому что каждая трехрублевая бумажка заключаетъ въ себѣ въ 3 раза больше, чѣмъ рубль, да трехрублевыхъ бумажекъ стало въ 9 разъ больше, чѣмъ рублей; поэтому, чтобы узнать, какая сумма послѣ размѣна заключалась въ трехрублевыхъ бумажкахъ и какая въ рубляхъ, надо 1 260 р. раздѣлить на 2 части, изъ которыхъ первая въ 27 разъ больше второй. Найдемъ, что въ рубляхъ заключалось 45 р., а въ трехрублевыхъ бумажкахъ 1 215 р. Стало быть, рублей послѣ размѣна было 45, а трехрублевыхъ бумажекъ 1 215 : 3=405, а до размѣна рублей было 45—3 . 8=21, а трехрублевыхъ бумажекъ 405+8=413.

219) Каждому машинисту на желѣзной дорогѣ платятъ въ мѣсяцъ 45 руб., а помощнику его 28 руб.; всего же на жалованье машинистамъ и ихъ помощникамъ выходитъ 3 195 руб. Сколько на желѣзной дорогѣ машинистовъ и ихъ помощниковъ, если помощниковъ въ 6 разъ больше чѣмъ машинистовъ?

Рѣшеніе. На каждаго машиниста приходится 6 помощниковъ, и они всѣ вмѣстѣ получаютъ 45+28×6 руб.=45+168=213 рублей, а такъ какъ всего на жалованье выходитъ 3 195 руб., то машинистовъ было 3 195 : 213=15, а помощниковъ 15×6=90.

220) Изъ Петербурга въ Москву отправленъ поѣздъ желѣзной дороги съ 380 пассажирами и за провозъ ихъ получено 3 466 р. 48 коп. Изъ сколькихъ вагоновъ состоялъ поѣздъ, если, кромѣ багажнаго вагона и одного вагона 2-го класса, всѣ остальные вагоны были 3-го класса, если проѣздъ въ вагонѣ 2-го класса стоилъ 12 руб. 50 коп., а въ вагонѣ 3-го класса 8 руб. 68 коп. и если въ каждомъ вагонѣ 3-го класса помѣщалось по 56 человѣкъ?

Рѣшеніе. Если бы всѣ пассажиры платили по 12 руб. 50 коп., то за проѣздъ ихъ было бы получено 12 р. 50 к.×380=4750 р., на 4750 руб.—3466 руб. 48 коп.=1283 руб. 52 коп. больше, чѣмъ дѣйствительно. Этотъ лишекъ произошелъ отъ того, что мы съ каждаго пассажира 3-го класса насчитали 12 руб. 50 коп.—8 р. 68 коп. = 3 р. 82 коп. лишнихъ; слѣд. пассажировъ 3-го класса было 1283 руб. 52 коп. : 3 руб. 82 коп.=336 человѣкъ, вагоновъ 3-го класса было 336 : 56=6, а всѣхъ вагоновъ 6+2=8.

221) Хозяйка купила для варенья нѣсколько фунтовъ ягодъ и сахарнаго песку и расчитала, что если на каждый фунтъ ягодъ класть по 30 лот. 2 зол. сахарнаго песку, то ей придется прикупить еще 1 ф. 16 лот. песку, а если на каждый фунтъ ягодъ класть только по 24 лота песку, то у нея останется 1 фунтъ песку. Сколько было куплено ягодъ и сколько песку?

Рѣшеніе. Уменьшая количество сахару на каждый фунтъ ягодъ въ размѣрѣ 30 лот. 2 зол. — 24 лота, т.-е. въ размѣрѣ 6 лот. 2 зол., хозяйка уменьшала все количество потребнаго сахару на 1 ф. 16 лот. + 1 ф., т.-е. на 2 ф. 16 лот.; слѣд., ягодъ было столько фунтовъ, сколько разъ 6 лот. 2 зол. содержатся въ 2 ф. 16 лот., т.-е. 12 фунтовъ. Остальное рѣшеніе уже не трудно.

222) У мастера были два одинаковыхъ куска серебра. Когда изъ перваго куска онъ сдѣлалъ нѣсколько столовыхъ ложекъ, вѣсомъ каждую въ 56 гр., а изъ другого столько же чайныхъ ложекъ, вѣсомъ каждую въ 22 гр., то отъ перваго куска осталось 96 гр., а отъ второго 504 гр. Сколько серебра было у мастера?

Рѣшеніе. Отъ перваго куска осталось на 504 гр. — 96 гр., т.-е. на 408 гр. меньше, чѣмъ отъ второго; слѣд. изъ перваго куска было израсходовано больше, чѣмъ изъ второго, тоже на 408 гр. Произошло это отъ того, что каждая столовая ложка вѣсила больше чайной на 56 гр.—22 гр.=34 гр. Слѣд. ложекъ изъ каждаго куска было сдѣлано 408 гр. : 34 гр. = 12. Вѣсъ каждаго куска равенъ 56 гр.×12+96 гр.=768 гр.

223) У переплетчика было 3 дести 20 листовъ бѣлой бумаги и 5 дест. 15 лист. цвѣтной; на переплетъ каждой книги выходило по 1 листу бумаги каждаго сорта, и послѣ переплета нѣсколькихъ книгъ, цвѣтной бумаги осталось вдвое больше, чѣмъ бѣлой. Сколько книгъ было переплетено?

Рѣшеніе. Чтобы бѣлой бумаги осталось столько же, сколько и цвѣтной, должно ея взять вдвое больше 3 дест. 20 лист., т.-е. 7 дест. 16 лист., и расходовать на переплетъ каждой книги тоже вдвое больше, т.-е. не по 1, а по 2 листа. Тогда бѣлой бумаги будетъ израсходовано на 7 д. 16 л.—5 д. 15 л.=2 д. 1 л. больше, чѣмъ цвѣтной, и это прозойдетъ отъ того, что на каждую книгу бѣлой бумаги будетъ расходоваться 1 л. больше, чѣмъ цвѣтной; слѣд., всѣхъ книгъ переплетено 2 д. 1 л. : 1 л.=49.

224) Если почтовый поѣздъ желѣзной дороги будетъ итти со скоростью 40 верстъ въ часъ, то на все разстояніе между двумя городами затратитъ 3 часами 46 м. 30 сек. меньше времени, чѣмъ въ дѣйствительности; если же онъ будетъ итти со скоростью 30 верстъ въ часъ, то на то же разстояніе ему потребуется времени на 1 часъ 15 м. 30 сек. больше, чѣмъ въ дѣйствительности. Сколько верстъ между этими городами?

Рѣшеніе. Идя со скоростью 40 верстъ въ часъ, поѣздъ затрачиваетъ на каждую версту 1 ч. : 40=1 м. 30 сек., а идя со скоростью 30 верстъ въ часъ, онъ на каждую версту затрачиваетъ 1 ч. : 30=2 м. Выигрывая на каждой верстѣ 2 м. — 1 м. 30 сек.=30 сек., поѣздъ на всемъ разстояніи выигрываетъ 3 часа 46 м. 30 сек.+1 ч. 15 м. 30 сек.=5 час. 2 м.; разстояніе между городами равно 5 час. 2 м. : 30 сек.=604 верстамъ.

225) Въ типографіи на печатаніе одной книги вышло 42 стопы 10 дест. бумаги, а на печатаніе другой 12 ст. 12 дест. Когда, послѣ этого и той, и другой книги отпечатали одинаковое число экземпляровъ, то оказалось, что на обѣ книги издержано одинаковое количество бумаги. Сколько экземпляровъ каждой книги отпечатано, если первая была въ 15, а вторая въ 27 листовъ?

Рѣшеніе. Чтобы вышло на обѣ книги одинаковое количество бумаги, надо на вторую книгу затратить на 42 ст. 10 дест. — 12 ст. 12 дест., т.-е. на 29 ст. 18 дест. больше бумаги, чѣмъ на первую. На каждый же экземпляръ второй книги идетъ 27 — 15, т.-е. 12 листами больше, чѣмъ на экземпляръ первой; слѣд. обѣихъ книгъ послѣ затраты на первую 42 ст. 10 дест. и на вторую 12 ст. 12 дест., было отпечатано по стольку экземпляровъ, сколько разъ въ 29 стоп. 18 дест. содержатся 12 листовъ, т.-е. по 1196 экземпляровъ. Первой книги раньше было напечатано 42 ст. 10 дест. : 15 лист.=1360 экземпляровъ, а всего было напечатано 1360+1196=2556 экз. первой книги. Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ число экземпляровъ второй книги.

226) При вычитаніи чиселъ сдѣланы слѣдующія ошибки: въ уменьшаемомъ цыфра десятковъ тысячъ 4 принята за 1, цыфра сотенъ 8 принята за 3; въ вычитаемомъ цыфра тысячъ 0 принята за 6 и цыфра единицъ 9 за 2; въ разности получилось 120 305. Найти вѣрную разность?

Рѣшеніе. Уменьшаемое, вслѣдствіе ошибки въ цыфрѣ десятковъ тысячъ, уменьшено на 40000 — 10000 = 30000, а вслѣдствіе ошибки въ цыфрѣ сотенъ на 800 — 300 = 500, слѣд. оно всего уменьшено на 30000+500=30500; вычитаемое, вслѣдствіе ошибки въ цыфрѣ тысячъ, увеличено на 6000, а вслѣдствіе ошибки въ цыфрѣ единицъ, уменьшено на 9 — 2 = 7, слѣд. оно всего увеличено на 6000—7=5993. Итакъ разность 120 305 получилась, когда отъ уменьшаемаго отняли 30500, а къ вычитаемому прибавили 5993; слѣд. она менѣе вѣрной на 30500+5993=36493, а потому вѣрная разность есть 120 305+36493=156798.

227) Числа 59 775 и 43 126 надо было сложить съ разностью между 1 001 500 и нѣкоторымъ числомъ, а ученикъ вмѣсто перваго числа взялъ 60 000, вмѣсто второго 43 000, вмѣсто третьяго 1 000 000, а отъ неизвѣстнаго числа откинулъ 491, и получилъ въ суммѣ 149 000. Найти вѣрную сумму?

Рѣшеніе. Ученикъ къ первому изъ данныхъ слагаемыхъ прибавилъ 60 000—59 775, т.-е. 25; отъ второго отнялъ 43 126—43 000, т.-е. 126; чтобы узнать, что сдѣлалъ ученикъ съ третьимъ слагаемымъ, замѣчаемъ, что оно есть разность между 1 001 500 и неизвѣстнымъ числомъ и что ученикъ отъ уменьшаемаго отнялъ 1 001 500 — 1 000 000, т.-е. 1500, а отъ вычитаемаго отнялъ 401, отъ чего разность, иначе 3-е слагаемое, уменьшилось на 1500—401, т.-е. на 1099. Итакъ въ суммѣ получилось 149 000, когда къ первому слагаемому прибавили 25, отъ второго отняли 126 и отъ третьяго отняли 1099; слѣд. эта сумма меньше вѣрной на 1099+126—25, т.-е. на 1200, а потому искомая вѣрная сумма есть 149 000+1 200, т.-е. 150 200.

228) Нѣкоторое число надо было раздѣлить на 125, частное умножить на 75, къ произведенію прибавить 6200 и сумму раздѣлить на 7000. Несмотря на то, что въ первомъ дѣйствіи вмѣсто 125 взяли 1000, въ отвѣтѣ получили вѣрное число 5.

На какое число умножили вмѣсто 75, если послѣднія два дѣйствія сдѣлали вѣрно?—Какое число надо было раздѣлить на 125?

Рѣшеніе. Раздѣливъ на 1000, вмѣсто 125, получили частное въ 8 разъ меньше требуемаго, а такъ какъ послѣднія два дѣйствія сдѣланы вѣрно и полученъ вѣрный окончательный результатъ, то во второмъ дѣйствіи сдѣлано измѣненіе, уравновѣсившее измѣненіе въ первомъ, т.-е. такое, что произведеніе получилось въ 8 разъ больше того, какое получилось бы отъ умноженія полученнаго частнаго на 75; слѣд. умножили не на 75 а на $75 \times 8 = 600$. Для опредѣленія искомаго числа надо выполнить слѣдующій рядъ дѣйствій:

$$\Big[(5.7000 - 6200) : 75\Big] \times 125.$$

229) Нѣкоторое число надо было умножить на 30 060, произведеніе, раздѣлить на 2442, частное вычесть изъ 26 000 и разность раздѣлить на 25. Ученикъ принялъ 0 на мѣстѣ тысячъ во множителѣ за 6, къ общему произведенію забылъ приписать 0, который при умноженіи откинулъ во множителѣ, и въ послѣднемъ дѣлимомъ цыфру 9 на мѣстѣ десятковъ припялъ за 7; поэтому, въ окончательномъ результатѣ у него получилось на 881 больше вѣрнаго. Найти вѣрный результатъ и результатъ ученика.

Рѣшеніе. Второе частное у ученика получилось на 881 больше вѣрнаго, значитъ дѣлимое было больше вѣрнаго на $881 \times 25 = 22\,025$. Отъ вычитанія же онъ получилъ число еще на 20 больше истиннаго, ибо при дѣленіи цыфру десятковъ 9 принялъ за 7; слѣд. разность у него была больше требуемой на 22045. Уменьшаемаго ученикъ не измѣнялъ, значитъ вычитаемое у него получилось меньше вѣрнаго на 22045 единицъ. Это вычитаемое есть частное отъ дѣленія на 2442. Если частное было меньше на 22045 единицъ, то дѣлимое было меньше истиннаго на $2442 \times 22\,045 = 53\,833\,890$. Это дѣлимое получилось отъ умноженія на 30 060, въ которомъ ученикъ вмѣсто этого множителя взялъ 3 606, т.-е. уменьшилъ множителя на $30\,060 - 3\,606 = 26\,454$ единицы; отъ этого произведеніе уменьшилось на 53 833 890. Раздѣливъ 53 833 890 на 26 454, найдемъ неизвѣстное множимое 2 035. Вѣрный результатъ 38, результатъ ученика 919.

VI.

Ариѳметика дробей.

267. Программа курса простыхъ дробей. Выше (стр. 26—33) мы разсмотрѣли, какимъ образомъ можетъ быть построенъ курсъ дробей, и намѣтили въ общихъ чертахъ его распредѣленіе. Эта программа очень мало разнится отъ обычной программы въ руководствахъ. Различіе должно заключаться не въ программѣ, а въ количествѣ упражненій, отводимыхъ на различные отдѣлы этой программы. То, для чего въ учебникахъ отводится одна, двѣ странички, а иногда только нѣсколько строкъ, въ преподаваніи можетъ потребовать длиннаго ряда систематическихъ упражненій; то, что, въ учебникахъ разъясняется въ двухъ трехъ словахъ и подтверждается однимъ, двумя примѣрами, въ преподаваніи можетъ требовать болѣе тщательныхъ и подробныхъ разъясненій и цѣлаго ряда примѣровъ. Дѣти должны все изучаемое не только понять, но и усвоить, и овладѣть изучаемымъ настолько, чтобы свободно примѣнять въ различныхъ частныхъ случаяхъ; все это требуетъ многочисленныхъ и систематическихъ упражненій.

На основаніи сказаннаго можно предложить слѣдующее болѣе подробное примѣрное распредѣленіе курса простыхъ дробей.

1. Выясненіе понятія о долѣ единицы и о дроби какъ совокупности одинаковыхъ долей единицы. Правильныя и неправильныя дроби. Выраженіе частнаго отъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ въ видѣ дроби.

2. Исключеніе цѣлаго числа изъ неправильной дроби и обратное преобразованіе.

3. Измѣненія величины дроби отъ измѣненія числителя. Сложеніе и вычитаніе дробей съ одинаковыми знаменателями; умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число, когда оба дѣйствія сводятся къ измѣненію числителя.

4. Измѣненіе величины дроби отъ измѣненія знаменателя. Умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число.

5. Измѣненіе вида дробей.

6. Понятіе о сокращеніи дробей.

7. Опредѣленіе части числа и числа по его части.

8. Понятіе о приведеніи дробей къ одному знаменателю. Простѣйшіе случаи сложенія и вычитанія дробей съ разными знаменателями и простѣй-

шіе случаи опредѣленія, сколько разъ дробь содержится въ цѣломъ и дробномъ числѣ.

9. Признаки дѣлимости и примѣненіе ихъ къ сокращенію дробей.

10. Опредѣленіе общаго наибольшаго дѣлителя по способу послѣдовательнаго дѣленія. Примѣненіе къ сокращенію дробей.

11. Первоначальныя и составныя числа. Разложеніе чиселъ на первоначальныхъ множителей. Опредѣленіе наименьшаго кратнаго. Примѣненіе къ приведенію дробей къ одному знаменателю. Сложеніе и вычитаніе дробныхъ чиселъ.

12. Умноженіе и дѣленіе дробныхъ чиселъ.

Первые три отдѣла и отчасти 7-й до пѣкоторой степени знакомы дѣтямъ, если въ курсѣ 1-й сотни чиселъ они получили понятіе о дробяхъ въ томъ объемѣ, который нами намѣченъ въ IV главѣ этой книги.

Первые 8 отдѣловъ программы вполнѣ обнимаютъ курсъ простыхъ дѣйствій съ дробями, при чемъ 8-й представляетъ уже переходъ къ сложнымъ дѣйствіямъ и преобразованіямъ, которыя затѣмъ вполнѣ развиваются въ остальныхъ четырехъ отдѣлахъ программы. Всѣ необходимыя свѣдѣнія изъ статьи о дѣлимости цѣлыхъ чиселъ тотчасъ же сопровождаются примѣненіемъ къ вычисленіямъ надъ дробями.

О дробныхъ именованныхъ числахъ совсѣмъ не упоминается въ программѣ не потому, чтобы упражненій съ ними не слѣдовало вводить въ курсъ, а потому, что дѣйствія съ дробными именованными числами не представляютъ ровно никакихъ недоразумѣній: всѣ они могутъ быть выполнены или по правиламъ для цѣлыхъ именованныхъ чиселъ, или приведеніемъ въ единицы одного наименованія. Упражненія съ дробными именованными числами должны чередоваться съ упражненіями надъ отвлеченными дробными числами.

268. Выясненіе понятія о долѣ единицы и о дроби мы уже затрагивали выше. Указанныя тамъ упражненія придется отчасти повторить, отчасти видоизмѣнить и дополнить. Такъ, очень полезно заставить дѣтей уяснить себѣ, какую долю болѣе крупной мѣры составляетъ каждая изъ извѣстныхъ имъ мелкихъ мѣръ, сколько болѣе мелкихъ мѣръ содержатъ въ себѣ такія доли крупныхъ мѣръ, которыя выражаются цѣлымъ числомъ мелкихъ.

Когда войдутъ дроби, составленныя изъ нѣсколькихъ долей единицы, полезно предложить слѣдующій рядъ упражненій:

Какъ изъ пуда муки получить $^{7}/_{10}$ пуда?—Отъ листа мѣди, въ 1 квадр. аршинъ, отрѣзать кусокъ въ $^{9}/_{16}$ квадр. аршина?—Какъ изъ единицы составить $^{3}/_{4}$, $^{27}/_{100}$?—Сколько листовъ въ $^{7}/_{8}$ дести?—Сколько саженъ въ $^{3}/_{25}$ версты?—Сколько квадр. дюйм. въ $^{4}/_{9}$ кв. фута?—Какую часть фунта составляютъ 23 лота? — Какую часть кубич. сажени составляютъ 25 куб. аршинъ?

Для ясности языка полезно различать выраженія: „часть единицы“ и „доля единицы“. Въ составленныхъ нами книгахъ мы старались слову часть придать общее значеніе не цѣлаго, а подъ словомъ доля разумѣемъ одну изъ равныхъ частей цѣлаго. Такъ, $^{5}/_{8}$ аршина есть часть аршина и состоитъ изъ 5-ти одинаковыхъ (восьмыхъ) долей аршина; $^{1}/_{12}$ фунта есть въ одно и то же время и часть фунта, и доля фунта.

При напоминаніи дѣтямъ способа выражать дроби, слѣдуетъ указать, что дробь выражается двумя числами (числитель и знаменатель) не только письменно, но и устно. Къ сожалѣнію, послѣднее обстоятельство часто упускаютъ изъ виду даже въ учебникахъ и такимъ образомъ дроби, выраженныя устно, какъ бы не имѣютъ ни числителя, ни знаменателя.

Всѣ перечисленныя упражненія ведутъ къ пониманію дроби какъ совокупности одинаковыхъ долей единицы. Самое опредѣленіе дроби можетъ быть дано въ слѣдующихъ словахъ: дробь есть число, состоящее изъ равныхъ долей единицы.

269. Устное и письменное вычисленіе съ дробными числами. Здѣсь кстати сказать нѣсколько словъ объ устномъ и письменномъ вычисленіи съ дробными числами. Въ бо́льшей части существующихъ руководствъ по ариѳметикѣ и ея методикѣ, въ особенности же въ практикѣ преподаванія, почти совершенно не вводится устное вычисленіе съ дробями. Такой взглядъ никакъ не можетъ быть признанъ правильнымъ. Слѣдуетъ сказать, что устное вычисленіе надъ дробными числами затруднительнѣе, чѣмъ надъ цѣлыми, потому что для запоминанія каждой дроби приходится помнить два числа; поэтому устное вычисленіе въ дробяхъ не можетъ примѣняться въ такомъ объемѣ какъ въ цѣлыхъ числахъ. Но и здѣсь слѣдуетъ держаться того же правила, что и въ цѣлыхъ числахъ,— не производить письменно тѣхъ дѣйствій, которыя дѣти могутъ безъ особыхъ затрудненій выполнить устно. Первыя 260 упражненій въ нашей книгѣ „Собраніе задачъ и вычисленій на дроби, простыя и десятичныя, и на правило тройное, пропорціональнаго дѣленія и друг.“ составлены такъ, что почти не тре-

буютъ примѣненія письменнаго вычисленія; въ нихъ письменныя упражненія нужны главнымъ образомъ для того, чтобы ознакомить и освоить дѣтей съ правильными обозначеніями дѣйствій надъ дробями. Но и въ остальныхъ отдѣлахъ книги постоянно встрѣчаются случаи, къ которымъ легко и удобно примѣнять устное вычисленіе.

Въ заключеніе замѣтимъ, что между пріемами устнаго и письменнаго вычисленія съ дробными числами различіе значительно слабѣе, чѣмъ между пріемами письменнаго и устнаго вычисленія надъ цѣлыми числами, и главнымъ образомъ сводится къ различію между письменнымъ и устнымъ вычисленіемъ надъ цѣлыми числами. Обусловливается это тѣмъ обстоятельствомъ, что всѣ вычисленія съ дробными числами приводятся къ вычисленіямъ надъ цѣлыми числами—безразлично, производится ли дѣйствіе устно или письменно.

270. Послѣ выясненія понятія о дроби надлежитъ повторить съ дѣтьми раздѣленіе дробей на правильныя и неправильныя и выраженіе частнаго отъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ въ видѣ дроби. Для первой цѣли могутъ служить задачи, требующія сравненія дробей съ цѣлой единицей. Опредѣленіе правильной и неправильной дроби должно быть основано на отношеніи величины ихъ къ единицѣ, а не на сравнительной величинѣ числителя и знаменателя.

Выясненіе выраженія частнаго отъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ въ видѣ дроби также надлежитъ начать съ задачъ конкретнаго содержанія. Приводимъ для примѣра одну задачу съ ея рѣшеніемъ.

230) Извозчикъ на свою лошадь издерживаетъ въ недѣлю 5 мѣръ овса. Сколько овса выходитъ ежедневно?

Рѣшеніе. Чтобы раздѣлить 5 мѣръ на 7, раздѣлимъ сперва 1 мѣру на семь равныхъ долей; тогда на каждый день придется по $^1/_7$ мѣры; когда вторую мѣру раздѣлимъ на 7, то на каждый день придется еще по $^1/_7$ мѣры, а всего съ прежними по $^2/_7$ мѣры. Точно такъ же отъ дѣленія третьей, четвертой и пятой мѣры придется на каждый день по $^1/_7$ мѣры; слѣд. всего отъ дѣленія 5 мѣръ на 7 получимъ $^5/_7$ мѣры.

271. Исключеніе изъ неправильной дроби цѣлаго числа и обратное преобразованіе въ главныхъ чертахъ разработываются такъ, какъ уже было нами указано выше. Одно изъ очень полезныхъ упражненій состоитъ въ послѣдовательномъ прибавленіи по одной долѣ единицы, напр. по $^1/_4$, и въ послѣдовательномъ вычитаніи изъ какого-нибудь цѣлаго числа по одной долѣ единицы, напр. по $^1/_3$.

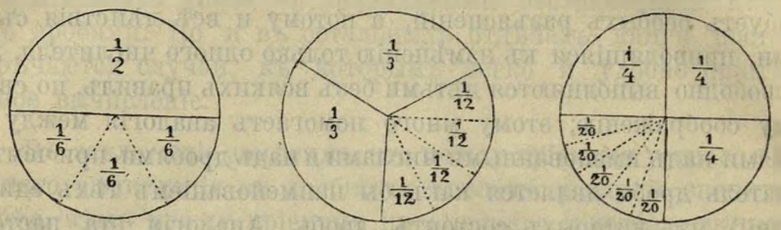
272. Измѣненія дроби отъ измѣненія числителя и простѣйшіе случаи дѣйствій съ дробями. Зависимость между величиною дроби и величиною ея числителя настолько очевидна для дѣтей, что не требуетъ особыхъ разъясненій, а потому и всѣ дѣйствія съ дробями, приводящіяся къ измѣненію только одного числителя, легко и свободно выполняются дѣтьми безъ всякихъ правилъ, по свободному соображенію; этому много помогаетъ аналогія между дѣйствіями надъ именованными числами и надъ дробями, при чемъ знаменатель дроби является какъ бы наименованіемъ тѣхъ единицъ (долей), изъ которыхъ состоитъ дробь. Аналогія эта настолько естественна, что на нее даже не приходится и указывать дѣтямъ; они сами ее чувствуютъ и пользуются ею. Подготовительными упражненіями для сложенія и вычитанія могутъ служить упомянутыя въ предыдущемъ параграфѣ послѣдовательное прибавленіе и послѣдовательное отниманіе по одной долѣ единицы. Для умноженія и дѣленія такими упражненіями могутъ служить послѣдовательное прибавленіе какой-нибудь дроби къ самой себѣ и послѣдовательное отниманіе какой-нибудь дроби отъ дроби, въ нѣсколько разъ бо́льшей и выраженной въ тѣхъ же доляхъ единицы; напр., послѣдовательное прибавленіе къ $^3/_8$ по $^3/_8$ и послѣдовательное отниманіе по $^3/_8$ отъ $^{15}/_8$. Главное значеніе разсматриваемаго отдѣла заключается въ томъ, что при его помощи на задачахъ и на другихъ упражненіяхъ дѣти успѣютъ достаточно освоиться съ дробями и съ преобразованіями дробей въ цѣлыя числа и цѣлыхъ чиселъ въ дроби прежде, чѣмъ приступятъ къ изученію болѣе трудной для ихъ пониманія зависимости между дробью и ея знаменателемъ.

273. Измѣненія дроби отъ измѣненія знаменателя требуютъ тщательной разработки. Безъ яснаго пониманія зависимости между дробью и ея знаменателемъ весь дальнѣйшій курсъ дробей не можетъ быть понятъ и усвоенъ дѣтьми удовлетворительно.

Прежде всего слѣдуетъ уяснить дѣтямъ соотношеніе между величиной доли и величиной ея знаменателя. Для этого дѣти пріучаются опредѣлять, какія доли единицы получатся, если какую-либо данную долю, напр. $^1/_3$, раздѣлить на нѣсколько равныхъ частей, напр. на 4 равныя части. Упражненія эти выполняются сперва наглядно при помощи чертежей, одинъ изъ которыхъ здѣсь приведенъ, а затѣмъ уже въ отвлеченномъ видѣ. Рѣшеніе ведется приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Если одну четверть раздѣлимъ на 5 равныхъ частей, то и въ другой, и въ третьей, и въ четвертой четверти будетъ содер-

жаться по 5-ти такихъ частей; слѣдов., въ цѣлой единицѣ ихъ будетъ 5×4, т.-е. 20 частей, и мы получимъ двадцатыя доли единицы.



Примѣненіемъ этихъ упражненій могутъ служить задачи:

231) Къ обѣду отрѣзали полхлѣба и разрѣзали его на 6 равныхъ кусковъ, по числу обѣдающихъ; какая доля хлѣба досталась каждому?

232) Старшій братъ $^1/_4$ пряника разрѣзалъ на 9 одинаковыхъ кусковъ и одинъ кусокъ подарилъ сестрѣ, а младшій $^1/_9$ такого же пряника разрѣзалъ на 4 равныхъ куска и отдалъ сестрѣ одинъ такой кусокъ. Отъ кого сестра получила больше?

Обратное упражненіе состоитъ въ опредѣленіи, сколько мелкихъ долей содержится въ какой-либо болѣе крупной долѣ, напр. сколько 6-хъ долей содержится въ одной трети, 12-хъ долей въ одной четверти и т. п. Вопросы разрѣшаются приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Въ цѣлой единицѣ 12 двѣнадцатыхъ долей, а въ одной четверти такихъ долей въ 4 раза меньше, т.-е. 12 : 4=3; слѣдов., въ одной четверти содержится 3 двѣнадцатыхъ доли. Примѣненіемъ этихъ упражненій могутъ служить задачи:

233) Купивъ пудъ муки, крестьянка отдала изъ него $^3/_4$ сосѣдкѣ въ уплату долга, а остальную муку расходовала по $^1/_{36}$ пуда въ день. На сколько дней ей хватило этой муки?

234) Купивъ фунтъ серебра, мастеръ $^3/_4$ его употребилъ на столовыя ложки, а изъ остального сдѣлалъ чайныя ложки въ $^1/_{48}$ фунта каждую. Сколько чайныхъ ложекъ сдѣлалъ мастеръ?

Когда эти два упражненія будутъ выполняться дѣтьми совершенно свободно, можно перейти къ сравненію различныхъ долей единицы и къ опредѣленію, во сколько разъ одна изъ нихъ крупнѣе или мельче другой. Подчеркнутыя выраженія мы особенно рекомендуемъ вмѣсто выраженій больше и меньше; они вносятъ бо́льшую ясность при одновременномъ сравненіи долей и ихъ знаменателей. Сравненіе долей единицы ведется приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Треть крупнѣе пятнадцатой доли въ 5 разъ, потому что въ цѣлой единицѣ 15 пятнадцатыхъ, а въ одной трети 15 : 3=5 пятнадцатыхъ долей. Двадцатая доля въ 4 раза мельче пятой, потому что въ одной пятой долѣ заключается 20 : 5=4 двадцатыхъ доли.

Послѣ этого дѣти уже въ состояніи будутъ находить доли, въ нѣсколько разъ крупнѣе или въ нѣсколько разъ мельче данной доли. Рѣшаются эти вопросы слѣдующимъ путемъ:

Чтобы найти доли, въ 6 разъ крупнѣе 24-хъ долей, надо соединять въ одну долю по 6-ти двадцать-четвертыхъ; слѣд. такихъ долей въ цѣлой единицѣ будетъ 24 : 6=4, и мы получимъ четверти. Чтобы найти долю, въ 2 раза мельче трети, надо каждую треть разбить на 2 равныя доли, слѣд. въ цѣлой единицѣ такихъ долей будетъ 2 . 3=6, и мы получимъ 6-я доли.

Всѣ эти упражненія должны быть закончены выводами: 1) изъ двухъ долей единицы та крупнѣе, у которой знаменатель меньше, и та мельче, у которой знаменатель больше; 2) чтобы доли сдѣлать крупнѣе, надо знаменателя ихъ уменьшить, а чтобы доли сдѣлать мельче, надо знаменателя ихъ увеличить. Выводы примѣняются къ сравненію дробей съ одинаковыми числителями и къ сравненію дробей съ одинаковыми знаменателями.

274. Умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число уже не можетъ встрѣтить затрудненій, если только все предыдущее будетъ усвоено дѣтьми вполнѣ сознательно. Сперва оба дѣйствія даются въ задачахъ и вычисленіяхъ, затѣмъ выводятся для нихъ правила и эти правила примѣняются къ новымъ задачамъ и вычисленіямъ. Дѣти должны не только усвоить правила, но и умѣть ихъ объяснить, а также должны умѣть выбрать для каждаго частнаго случая болѣе подходящій способъ умноженія и дѣленія дроби на цѣлое число.

Правила формулируются въ слѣдующихъ словахъ: чтобы умножить дробь на цѣлое число, можно умножить на это число ея числителя, оставивъ знаменателя безъ измѣненія, или можно раздѣлить на это число знаменателя (если только это дѣленіе совершается безъ остатка), оставивъ числителя безъ перемѣны; чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, можно числителя ея раздѣлить на это число (если только это дѣленіе совершается безъ остатка), оставивъ знаменателя безъ измѣненія, или можно умножить на это число знаменателя дроби, оставивъ числителя безъ перемѣны.

275. Измѣненіе вида дробей. Чтобы уяснить неизмѣняемость величины дроби при умноженіи ея членовъ на одно и то же число,

надо заставить дѣтей умножить сперва знаменателя дроби на какое-либо число, потомъ въ полученной дроби умножить числителя на то же число и сравнить между собою полученныя такимъ образомъ три дроби. Если взята дробь $^3/_8$, и умножили числителя и знаменателя на 2, то сравненіе ведется приблизительно въ слѣдующемъ видѣ:

Дробь $^3/_8$ въ два раза больше $^3/_{16}$, потому что знаменатель первой въ 2 раза меньше знаменателя второй, и дробь $^6/_{16}$ въ 2 раза больше $^3/_{16}$, потому что числитель $^6/_{16}$ въ 2 раза больше числителя $^3/_{16}$; дроби же $^3/_8$ и $^6/_{16}$ по величинѣ равны между собою, потому что каждая изъ нихъ въ 2 раза больше одной и той же дроби $^3/_{16}$. И дѣйствительно, умноживъ знаменателя и числителя дроби $^3/_8$ на 2, мы эту дробь во столько же разъ уменьшили отъ умноженія знаменателя на 2, во сколько разъ увеличили отъ умноженія числителя на 2.

Кромѣ того, полезно дать и слѣдующее объясненіе:

Дроби $^3/_8$ и $^6/_{16}$ по величинѣ равны между собою, потому что хотя въ первой изъ нихъ доли вдвое крупнѣе, чѣмъ во второй, но зато такихъ крупныхъ долей взято въ нее вдвое меньше, чѣмъ мелкихъ долей во второй дроби.

Подобнымъ же образомъ объясняется неизмѣняемость дроби при дѣленіи ея членовъ на одно и то же число.

У дѣтей является стремленіе обобщить сдѣланный выводъ, и они часто предполагаютъ, что и всякое другое одинаковое измѣненіе членовъ дроби не измѣняетъ ея величины. Поэтому, при формулированіи вывода, полезно избѣгать выраженій *увеличить* или *уменьшить* числителя и знаменателя дроби въ одинаковое число разъ, а вмѣсто этого говорить, что члены дроби *умножены* или *раздѣлены* на одно и то же число.

Съ той же цѣлью полезно разъяснить дѣтямъ измѣненія дроби, когда къ ея членамъ прикладывается поровну или когда отъ нихъ отнимается поровну. Чтобы сравнить получаемыя при этомъ дроби, можно найти отличіе каждой изъ нихъ отъ цѣлой единицы; эти разности всегда выразятся дробями, у которыхъ числители одинаковы и о сравнительной величинѣ которыхъ судить легко. Сравненіе можетъ быть сдѣлано приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Прибавивъ къ числителю и знаменателю дроби $^3/_8$ по 2, мы получимъ дробь $^5/_{10}$, которая, какъ и данная, меньше единицы на 5 долей (и $8-3=5$, и $10-5=5$, потому что отъ прибавленія поровну къ уменьшаемому и вычитаемому разность не измѣняется), но новыя доли (десятыя) мельче прежнихъ (восьмыхъ); слѣд. полученная дробь $^5/_{10}$ ближе къ единицѣ и больше данной дроби $^3/_8$.

Передъ этимъ полезно установить, что для опредѣленія отличія правильной дроби отъ единицы надо числителя вычесть изъ знаменателя, а въ неправильной дроби—наоборотъ.

Приводимъ для образца нѣсколько упражненій на разсмотрѣнныя измѣненія дробей:

235) Артель рабочихъ изъ 8 человѣкъ получила за работу 5 руб. Для исполненія другой работы къ артели было прибавлено 2 человѣка и плата за работу увеличена на 2 рубля. Какая работа выгоднѣе для рабочихъ?

236) За куль овса въ 11 пудовъ лавочникъ просилъ съ извозчика 8 руб. Но такъ какъ извозчику нужно было только 7 пудовъ, то лавочникъ соглашался отсыпать изъ куля лишній овесъ съ тѣмъ, чтобы и плата была уменьшена на 4 рубля. Выгодно ли было это извозчику?

276. Сокращеніе дробей. Какъ только дѣти уяснятъ себѣ неизмѣняемость дроби отъ умноженія и дѣленія ея членовъ на одно и то же число, сейчасъ же должны быть введены упражненія въ сокращеніи дробей, при чемъ дроби должны подбираться такъ, чтобы дѣтямъ легко было находить, на какія числа можно ихъ сократить, не пользуясь признаками дѣлимости и общимъ наиб. дѣлителемъ. Послѣ первыхъ упражненій дѣти должны опредѣлить, что значитъ сократить дробь, и уяснить себѣ, какія дроби могутъ быть сокращены и какія нѣтъ. Затѣмъ они знакомятся съ обозначеніемъ этого преобразованія.

Изъ упражненій въ сокращеніи дробей отмѣтимъ задачи, относящіяся къ преобразованіямъ именованныхъ чиселъ, и задачи на опредѣленіе части числа и числа по его части. Приводимъ для примѣра одну задачу 1-го рода съ ея рѣшеніемъ.

237) Какую часть версты составляютъ 416 саж. 2 арш.?

Рѣшеніе. Одинъ аршинъ составляетъ $^1/_3$ сажени, а 2 аршина составляютъ $^2/_3$ сажени; всѣ же 416 саж. 2 аршина составляютъ $416^2/_3$ саж., или $^{1250}/_3$ саж. Цѣлая сажень составляетъ $^1/_{500}$ версты, $^1/_3$ саж. составляетъ долю въ 3 раза мельче, т.-е. $^1/_{1500}$ вер., а $^{1250}/_3$ саж. составляютъ $^1/_{1500} \times 1250 = {}^{1250}/_{1500}$ версты. Сокративъ дробь $^{1250}/_{1500}$ на 10, получимъ $^{125}/_{150}$; эту дробь можно сократить на 5, получимъ $^{25}/_{30}$; эту дробь можно еще сократить на 5, получимъ $^5/_6$; слѣд. 416 саж. 2 арш. $= {}^5/_6$ версты.

277. Упражненія въ опредѣленіи части числа и числа по его части мы начинаемъ съ задачъ на опредѣленіе части какого-либо разстоянія и цѣлаго разстоянія по его части, потому что эти задачи допускаютъ иллюстрированіе рѣшеній чертежемъ, что значительно облегчаетъ пониманіе и усвоеніе пріемовъ рѣшенія. Задачи

на опредѣленіе части числа рѣдко вызываютъ какія-либо затрудненія. При опредѣленіи числа по его части у дѣтей иногда является сомнѣніе, на числителя или на знаменателя дроби должно дѣлить данное число для опредѣленія одной доли искомаго числа. Для разрѣшенія этихъ сомнѣній хорошимъ средствомъ служатъ упомянутые нами чертежи при рѣшеніи задачъ на разстоянія. Кромѣ того, съ той же цѣлью можно во время рѣшенія не упоминать, какія именно доли искомаго числа намъ даны, до тѣхъ поръ, пока это не потребуется для опредѣленія всего искомаго числа. Для примѣра приводимъ нѣсколько задачъ съ ихъ рѣшеніями.

238) Поѣздъ желѣзной дороги прошелъ $^5/_9$ всего разстоянія между двумя станціями желѣзной дороги, и ему осталось пройти еще 10 верстъ. Сколько верстъ между этими станціями?

Рѣшеніе. Весь путь между станціями (на классной доскѣ дѣлается чертежъ) былъ раздѣленъ на 9 равныхъ долей, изъ которыхъ поѣздъ уже прошелъ 5 долей, и ему осталось еще пройти 10 верстъ; слѣд., въ 4 доляхъ всего пути между станціями заключается 10 верстъ. Въ одной долѣ этого пути заключается $10 : 4 = 2^2/_4 = 2^1/_2$ вер.; во всемъ же пути такихъ долей 9, слѣд. весь путь заключаетъ въ себѣ $2^1/_2 \times 9 = 18^9/_2 = 22^1/_2$ версты.

239) Когда я прочелъ $^5/_{12}$ всей книги, то мнѣ осталось читать 124-мя страницами больше прочитаннаго. Сколько страницъ въ книгѣ?

Рѣшеніе. Вся книга была раздѣлена на 12 долей; изъ нихъ я прочелъ 5 долей, слѣд. осталось читать $12 - 5 = 7$ долей, т.-е. на $7 - 5 = 2$ доли больше прочитаннаго. А въ задачѣ сказано, что осталось прочесть на 124 страницы больше, чѣмъ я прочиталъ; слѣд. 124 страницы содержатся въ 2-хъ доляхъ книги. Въ одной долѣ книги заключается $124 : 2 = 62$ стр., а во всей книгѣ $62 \times 12 = 744$ страницы.

278. Когда дѣти освоятся съ измѣненіемъ вида дробей, можно давать упражненія на измѣненія величины дроби при совмѣстномъ измѣненіи ея числителя и знаменателя. Приводимъ нѣсколько упражненій съ ихъ рѣшеніями.

240) Какъ измѣнится дробь, 1) если числителя умножимъ на 15, а знаменателя на 5? 2) если числителя умножимъ на 2, а знаменателя раздѣлимъ на 3? 3) если числителя раздѣлимъ на 5, а знаменателя на 15?

Рѣшеніе. 1) Если числителя и знаменателя умножимъ только на 5, то дробь не измѣнится по величинѣ, но тогда намъ останется еще умножить числителя на $15 : 5$, т.-е. на 3, а отъ этого дробь умножится на 3; слѣд., если числителя умножимъ на 15, а знаменателя на 5, то дробь умножится на $15 : 5$, т.-е. на 3. 2) Вмѣсто того, чтобы знаменателя дѣлить на 3, можно на 3 умножить числителя, а такъ какъ числителя и безъ того надо умножить на 2, то слѣд. всего его придется умножить на 2×3, т.-е. на 6, а отъ этого дробь умножится на 6. 3) Если числителя и знаменателя раздѣлимъ только на 5, то дробь своей величины не измѣнитъ, но тогда намъ останется еще раздѣлить знаменателя на $15 : 5$, т.-е. на 3, а отъ этого дробь умножится на 3.

241) Отъ измѣненій въ числителѣ и знаменателѣ дроби, она уменьшилась въ 20 разъ. Какое измѣненіе сдѣлано въ числителѣ, если знаменатель былъ 1) умноженъ на 4? 2) умноженъ на 40? 3) раздѣленъ на 5?

Рѣшеніе. 1) Отъ умноженія знаменателя на 4 дробь уменьшилась въ 4 раза, всего же она была уменьшена въ 20 разъ; слѣд., отъ измѣненія числителя дробь уменьшилась въ $20 : 4$, т.-е. въ 5 разъ, а для этого числителя надо раздѣлить на 5. 2) Отъ умноженія знаменателя на 40 дробь уменьшилась въ 40 разъ, а на самомъ дѣлѣ она уменьшилась только въ 20 разъ, слѣд. отъ измѣненія числителя дробь увеличилась въ $40 : 20$, т.-е. въ 2 раза, а для этого числителя надо умножить на 2. 3) Отъ дѣленія знаменателя на 5, дробь увеличилась въ 5 разъ, а на самомъ дѣлѣ она уменьшилась въ 20 разъ, слѣд., отъ измѣненія числителя она уменьшилась въ $20 . 5$, т.-е. въ 100 разъ, а для этого числителя надо раздѣлить на 100.

279. Приведеніе дробей къ одному знаменателю необходимо проходить совмѣстно съ простѣйшими случаями сложенія и вычитанія дробей съ разными знаменателями; иначе потребность въ этомъ преобразованіи для дѣтей не будетъ достаточно обоснована.

Прежде всего дѣти пріучаются выражать данныя доли единицы въ иныхъ доляхъ; напр., $^1/_4$ выражаютъ въ 8-хъ, 12-хъ, 16-хъ, 20-хъ, и т. д. доляхъ, при чемъ рѣшеніе этихъ вопросовъ ведется въ слѣдующей формѣ:

Въ цѣлой единицѣ 12 двѣнадцатыхъ долей, слѣд., на $^1/_4$ приходится $12 : 4 = 3$ двѣнадцатыхъ доли.
Затѣмъ при помощи ряда упрежненій:

242) Можно ли $^1/_{10}$ выразить въ 20-хъ доляхъ?—Въ 30-хъ доляхъ?—Въ 15-хъ доляхъ?—Въ 25-хъ доляхъ?— Каковъ долженъ быть знаменатель тѣхъ долей, въ которыхъ можно выразить $^1/_8$?—Выразить $^3/_8$ въ 24-хъ доляхъ?—Подобрать нѣсколько такихъ дробей, которыми можно замѣнить $^8/_{15}$?

дѣти приходятъ къ выводу, что знаменатель долей, въ которыхъ можно выразить данную дробь, долженъ дѣлиться на знаменателя этой дроби безъ остатка. Самое преобразованіе дробей ведется слѣдующимъ образомъ:

Чтобы $^3/_8$ замѣнить 24-ми долями, узнаемъ сперва, сколько 24-хъ долей заключается въ $^1/_8$; для этого надо 24 раздѣлить на 8, потому что въ цѣлой единицѣ 24 двадцать-четвертыхъ, а въ $^1/_8$ въ 8 разъ меньше; слѣд., въ $^1/_8$ заключается $^3/_{24}$. Если въ $^1/_8$ три двадцать-четвертыхъ, то въ $^3/_8$ такихъ долей въ 3 раза больше, т.-е. $3\times3=9$. Итакъ $^3/_8=^9/_{24}$.

280. Чтобы отъ этихъ упражненій перейти къ приведенію дробей къ одному знаменателю, мы предлагаемъ цѣлый рядъ систематически подобранныхъ примѣровъ и задачъ на сложеніе и вычитаніе дробей. Приводимъ для образца нѣсколько такихъ упражненій:

243) $\frac{2}{3}+\frac{7}{12}$; $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$; $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$.

244) Мальчикъ половину своихъ денегъ истратилъ на книгу, а четырнадцатую часть на бумагу. Какая часть денегъ у него осталась?

245) Купецъ одному покупателю продалъ $^1/_7$ куска сукна, а другому $^3/_{14}$. Какая часть куска осталась у купца?

246) Съ осени до Рождества израсходовали $^1/_2$, а отъ Рождества до Пасхи $^3/_7$ всего годового запаса овса. Сколько овса осталось послѣ этого, если было заготовлено 52 мѣры?

Дѣлая первый изъ трехъ приведенныхъ примѣровъ, дѣти выразятъ трети въ 12-хъ доляхъ; рѣшая второй, выразятъ четверти въ 12-хъ доляхъ; поэтому при рѣшеніи третьяго примѣра, гдѣ приходится трети складывать съ четвертями, они не затруднятся трети и четверти выразить въ 12-хъ доляхъ. Точно также рѣшеніе первой изъ приведенныхъ задачъ покажетъ дѣтямъ, что $^1/_2$ можно выразить въ 14-хъ доляхъ, рѣшеніе второй задачи—что $^1/_7$ можно выразить въ 14-хъ доляхъ; и потому при рѣшеніи 3-й задачи, гдѣ надо половины сложить съ 7-ми долями, они тѣ и другія выразятъ въ 14-хъ доляхъ.

Послѣ разбора цѣлаго ряда подобранныхъ такимъ образомъ примѣровъ и задачъ, легко уже привести дѣтей къ выводу, что для сложенія и вычитанія дробей съ разными знаменателями, надо умѣть приводить дроби къ одному знаменателю, что этого знаменателя надо выбирать такъ, чтобы онъ дѣлился безъ остатка на знаменателя каждой данной дроби.

Хотя дальнѣйшія упражненія въ сложеніи и вычитаніи дробей и не расположены въ систематическомъ порядкѣ, но въ нихъ знаменатели дробей подобраны такъ, чтобы не затруднять дѣтей въ выборѣ общаго знаменателя.

281. Помощію приведенія дробей къ одному знаменателю рѣшается также вопросъ, сколько разъ одна дробь содержится въ другой. Чтобы познакомить дѣтей съ этимъ, надо начать съ вопроса, сколько разъ дробь содержится въ цѣломъ числѣ. Для дроби, состоящей изъ одной доли единицы, вопросъ рѣшается легко:

$^1/_4$ въ 25-ти содержится 100 разъ, потому что въ каждой цѣлой единицѣ $^1/_4$ содержится 4 раза, а въ 25-ти единицахъ она содержится $4.25=100$ разъ.

Для дроби, состоящей изъ нѣсколькихъ дробей единицы рѣшеніе нѣсколько усложняется и принимаетъ такой видъ:

Чтобы узнать, сколько разъ $^3/_5$ содержится въ 60-ти, узнаемъ сперва, сколько разъ $^1/_5$ содержится въ 60-ти. Въ одной единицѣ $^1/_5$ содержится 5 разъ, а въ 60-ти единицахъ она содержится $5\times60=300$ разъ. Если $^1/_5$ въ 60 единицахъ содержится 300 разъ, то $^3/_5$ должны содержатся въ 3 раза меньше, т.-е. $300:3=100$ разъ.

При опредѣленіи, сколько разъ дробь содержится въ дроби, можно предложить слѣдующую послѣдовательность въ упражненіяхъ:

Сколько разъ въ $^1/_4$ содержится $^1/_{12}$?—Сколько разъ въ $^4/_5$ содержится $^1/_{10}$?—Сколько разъ $^5/_{48}$ содержится въ $^{15}/_{16}$?—Сколько разъ $^4/_9$ содержится въ $2^2/_3$?

Рѣшаются эти вопросы слѣдующимъ образомъ:

Въ единицѣ $^1/_{12}$ содержится 12 разъ, а въ $^1/_4$ въ четыре раза меньше, т.-е. $12:4=3$ раза.—Въ единицѣ $^1/_{10}$ содержится 10 разъ, въ $^1/_5$ она содержится $10:5=2$ раза, а въ $^4/_5$ въ 4 раза больше, т.-е. $2\times4=8$ разъ.—По предыдущему найдемъ, что $^1/_{48}$ въ $^{15}/_{16}$ содержится 45 разъ, а $^5/_{48}$ содержится въ 5 разъ меньше, т.-е. $45:5=9$ разъ; иначе: $^{15}/_{16}=^{45}/_{48}$, а $^5/_{48}$ въ $^{45}/_{48}$ содержится столько же разъ, сколько разъ 5 содержится въ 45, т.-е. 9 разъ.

Въ задачникѣ находится достаточный запасъ задачъ этого рода.

282. Приводимъ еще нѣкоторыя изъ упражненій, относящихся къ этому отдѣлу.

247) Въ двухъ ящикахъ было $9^1/_3$ фунтовъ чаю. Когда изъ перваго пересыпали во второй $1^1/_{48}$ фунта, то въ первомъ всё-таки осталось на $^{47}/_{48}$ фунта больше, чѣмъ стало

во второмъ. Сколько чаю было первоначально въ каждомъ ящикѣ?

Рѣшеніе. Чтобы узнать, сколько чаю стало въ каждомъ ящикѣ, надо $9\frac{1}{3}$ раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы въ первой было на $\frac{47}{48}$ фунта больше, чѣмъ во второй; найдемъ, что въ первомъ ящикѣ стало $5\frac{5}{32}$ фунта, а во второмъ $4\frac{17}{96}$ фунта; слѣд., первоначально въ первомъ было $5\frac{5}{32}+1\frac{1}{48}=6\frac{17}{96}$ фунта, а во второмъ $4\frac{17}{96}-1\frac{1}{48}=3\frac{5}{32}$ фунта.

248) Семь апельсиновъ раздѣлить поровну между 12-ю мальчиками, не разрѣзая ни одного апельсина на 12 кусковъ.

Рѣшеніе. Каждому мальчику должно достаться по $\frac{7}{12}$ апельсина, а эту дробь можно разложить на сумму двухъ дробей $\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$; слѣд., каждому мальчику можно дать по $\frac{1}{3}$ и по $\frac{1}{4}$ апельсина, а для этого придется каждый изъ первыхъ 4 апельсиновъ разрѣзать на 3 части, а каждый изъ остальныхъ 3-хъ апельсиновъ разрѣзать на 4 части.

Въ заключеніе приведемъ два примѣра на вычисленіе съ ихъ рѣшеніями.

249) $\left[\left(\frac{8}{15}\times 5-\frac{8}{63}\times 9\right)\times 42-32\frac{1}{2}\right]:35=\frac{9}{10}$

Рѣшеніе.

1) $\frac{8}{15}\times 5=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$; 2) $\frac{8}{63}\times 9=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$; 3) $2\frac{2}{3}-1\frac{1}{7}=1\frac{14-3}{21}=1\frac{11}{21}$.

4) Чтобы $1\frac{11}{21}$ умножить на 42, умножаемъ 1 на 42, получаемъ 42, затѣмъ умножаемъ $\frac{11}{21}$ на 42, для чего можно $\frac{11}{21}$ сперва умножить на 21, получимъ 11, и полученное число 11 умножить на 2, получимъ 22; всего же получимъ $42+22=64$. Дѣйствіе при письменномъ вычисленіи можно расположить слѣдующимъ образомъ:

$$1\tfrac{11}{21}\times 42=42+\tfrac{11}{21}\times 21\times 2=42+11\times 2=42+22=64.$$

5) $64-32\frac{1}{2}=31\frac{1}{2}$; 6) $31\frac{1}{2}:35=\frac{63}{2}:35=\frac{63}{70}=\frac{9}{10}$.

250) $\left[\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{5}{21}+\frac{1}{42}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{33}+\frac{4}{22}+\frac{1}{66}\right)\right]\times 44=3\frac{1}{3}$.

Рѣшеніе. 1) Чтобы сложить дроби $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{5}{21}$ и $\frac{1}{42}$, складываемъ сперва $\frac{1}{14}$ и $\frac{1}{42}$, получаемъ $\frac{1}{42}=\frac{2}{21}$, эту дробь складываемъ съ $\frac{5}{21}$, получаемъ $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$; наконецъ къ этой дроби прибавляемъ $\frac{1}{6}$, получаемъ окончательно $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{33}+\frac{1}{22}+\frac{1}{66}=\frac{22+2+3+1}{66}=\frac{28}{66}$; 3) $\frac{1}{2}-\frac{28}{66}=\frac{33-28}{66}=\frac{5}{66}$.

5) Чтобы $\frac{5}{66}$ умножить на 44, умножаемъ сперва на 22, получаемъ $\frac{5}{3}$; а затѣмъ полученную дробь умножаемъ на 2, получаемъ окончательно $\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

283. Признаки дѣлимости и примѣненіе ихъ къ сокращенію дробей. Признаки дѣлимости на 2, на 5, на произведенія и на степени этихъ чиселъ даются дѣтямъ очень легко и могутъ быть разобраны по общему плану, который и приводимъ здѣсь въ примѣненіи къ 4.

Преподаватель или заставляетъ дѣтей подобрать число, которое заключало бы въ себѣ не менѣе 4-хъ значащихъ цыфръ и дѣлилось бы на 4 безъ остатка, или самъ даетъ такое число. Въ обоихъ случаяхъ число должно быть непосредственно раздѣлено на 4, чтобы весь классъ могъ убѣдиться, что оно дѣйствительно дѣлится на 4 безъ остатка. Затѣмъ во взятомъ числѣ поочередно измѣняются цыфры тысячъ, сотенъ, десятковъ и единицъ, и измѣненное число всякій разъ дѣлится на 4. Подобному же ряду испытаній можно подвергнуть одно изъ чиселъ, дающихъ остатокъ при дѣленіи на 4. Изъ этихъ испытаній дѣти выводятъ, что измѣненіе сотенъ и высшихъ разрядовъ на измѣняетъ дѣлимости числа на 4, а измѣненіе десятковъ и единицъ можетъ вести къ измѣненію дѣлимости числа на 4, т.-е. число, дѣлящееся на 4 безъ остатка, можетъ отъ измѣненія этихъ разрядовъ перестать дѣлиться на 4 безъ остатка, и наоборотъ. Отсюда естественно сдѣлать выводъ, что при дѣленіи на 4 достаточно обратить вниманіе на число, состоящее изъ десятковъ и единицъ, для того, чтобы узнать, дѣлится ли все данное число на 4 безъ остатка, или нѣтъ. Останется затѣмъ объяснить этотъ выводъ. Для этого надо обратить вниманіе дѣтей на то, что одна сотня, а слѣд., и нѣсколько сотенъ и всѣ высшіе разряды всегда дѣлятся на 4 безъ остатка.

Замѣтимъ, что по мѣрѣ ознакомленія дѣтей съ признаками дѣлимости этотъ путь значительно сокращается. При хорошемъ составѣ класса, послѣ подобной разработки двухъ—трехъ признаковъ дѣлимости, дѣти сами устанавливаютъ остальные признаки дѣлимости.

284. Гораздо труднѣе даются признаки дѣлимости на 9 и на 3, такъ какъ изложенный выше пріемъ къ этимъ числамъ не примѣнимъ. Чтобы ознакомить дѣтей съ признакомъ дѣлимости на 9, надо прежде всего установить, что отъ единицы каждаго разряда, при дѣленіи на 9, остается одна простая единица; напр., отъ дѣленія 1 000 000 остается одна простая единица, потому что $1\ 000\ 000=999\ 999+1$, 999 999 дѣлится на 9 безъ остатка и даетъ въ частномъ 111 111, а 1 не можетъ быть раздѣлена и останется въ остаткѣ. Затѣмъ устанавливается, что отъ нѣсколькихъ единицъ каждаго разряда, при дѣленіи на 9, остается столько простыхъ единицъ, сколько было единицъ даннаго раз-

ряда; напр., отъ 5000 останется 5 простыхъ единицъ. Объясненіе дается приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Отъ дѣленія 1000 на 9 въ частномъ получимъ 111 и въ остаткѣ 1; а отъ дѣленія 5000, въ частномъ получимъ 5 разъ 111, т.-е. 555, и останется тоже 5 разъ по 1-цѣ, т.-е. 5 единицъ.

Послѣ этого дѣти пріучаются дѣлить число на 9 поразрядно, а именно слѣдующимъ образомъ:

5 2 7 1 3	9
5+2+7+1+3	5555+222+77+1+2= =5857
18	
0	

Отъ дѣленія одного десятка тысячъ въ частномъ получится 1111 и останется простая единица, отъ дѣленія 5 дес. тысячъ въ частномъ получится 5555 и останется 5 простыхъ единицъ. Отъ дѣленія одной тысячи въ частномъ получится 111 и останется одна простая единица, отъ дѣленія 2 тысячъ въ частномъ получится 222 и останется 2 простыхъ единицы; частное 222 надо прибавить къ частному 5555, а оставшіяся 2 единицы къ оставшимся 5 единицамъ. Отъ дѣленія одной сотни въ частномъ получится 11 и останется одна простая единица, отъ дѣленія 7 сотенъ въ частномъ получится 77 и останется 7 простыхъ единицъ; полученное частное надо прибавить къ ранѣе полученнымъ частнымъ, а оставшіяся 7 простыхъ единицъ къ ранѣе оставшимся простымъ единицамъ. Отъ дѣленія одного десятка получимъ въ частномъ 1, и останется 1 простая единица; частное прибавляемъ къ частнымъ, а оставшуюся единицу къ оставшимся единицамъ. Теперь остается раздѣлить простыя единицы; ихъ осталось 5, 2, 7 и 1, да въ данномъ числѣ заключается еще 3 единицы; слѣд. всего придется раздѣлить 5+2+7+1+3=18 простыхъ единицъ, отъ дѣленія которыхъ получимъ 2. Слѣд., всего въ частномъ получится 5555+222+77+1+2=5857.

Послѣ нѣсколькихъ упражненій въ такомъ дѣленіи, при чемъ берутся то числа кратныя 9-ти, то числа не кратныя 9-ти, дѣти въ состояніи будутъ, не производя дѣленія, опредѣлять, сколько простыхъ единицъ останется дѣлить отъ каждаго даннаго числа, послѣ того, какъ раздѣлятъ поразрядно всѣ разряды его, до десятковъ включительно. Тогда, познакомивъ дѣтей съ выраженіемъ сумма цыфръ числа, можно формулировать признакъ дѣлимости на 9.

Признакъ дѣлимости на 3 объясняется совершенно такъ же. Мы предпочитаемъ знакомить дѣтей сперва съ признакомъ дѣлимости на 9 на томъ основаніи, что при дѣленіи на 9 отъ каждаго разряда остается меньше 9-ти простыхъ единицъ; при дѣленіи же на 3 отъ дѣленія нѣкоторыхъ разрядовъ можетъ остаться больше 3-хъ простыхъ единицъ (напр., отъ дѣленія 7 сотенъ на 3 останется 7 простыхъ единицъ)—и это на первый разъ можетъ вести къ нѣкоторымъ недоразумѣніямъ.

285. Признаки дѣлимости мы предлагаемъ въ слѣдующей послѣдовательности: на 10, 100, 1000 и т. д., на 2 и на 5, на 4 и 25, на 8 и 125, на 9 и на 3.

Нѣкоторыя руководства даютъ еще признаки дѣлимости на 6, 12, 11, 7 и т. д. Хотя и въ нашемъ руководствѣ помѣщенъ признакъ дѣлимости на 6, но сообщать его дѣтямъ мы считаемъ совершенно излишнимъ, потому что объясненіе его довольно сложно и вмѣсто того, чтобы сокращать дробь на 6, ее можно послѣдовательно сократить на 2 и на 3. Что касается остальныхъ признаковъ дѣлимости, то объясненіе ихъ для дѣтей недоступно, и сами по себѣ они настолько сложны, что при сокращеніи дробей могутъ быть съ пользою замѣнены опредѣленіемъ общаго наибольшаго дѣлителя между числителемъ и знаменателемъ.

Каждый признакъ дѣлимости тотчасъ послѣ его усвоенія дѣтьми примѣняется къ сокращенію дробей. Кромѣ задачъ и примѣровъ на вычисленіе, можно давать и упражненія, спеціально относящіяся къ признакамъ дѣлимости, напр.:

251) Въ четырехзначномъ числѣ, кратномъ 9-ти, на мѣстѣ тысячъ стоитъ цыфра 8, на мѣстѣ сотенъ цыфра 3 и на мѣстѣ десятковъ цыфра 5. Какая цыфра стоитъ на мѣстѣ единицъ? На какія однозначныя числа дѣлится это число?

286. Общій наибольшій дѣлитель и примѣненіе его къ сокращенію дробей. Опредѣленіе общаго наибольшаго дѣлителя по способу послѣдовательнаго дѣленія представляетъ одно изъ самыхъ трудныхъ мѣстъ курса ариѳметики, потому что вводитъ дѣтей въ совершенно новую для нихъ область изслѣдованія, пріемы котораго трудно поддаются элементарной обработкѣ. Несмотря на это, усвоеніе этого способа даетъ въ руки дѣтямъ такое важное орудіе для послѣдующаго курса, что отказываться отъ него можно только въ самыхъ крайнихъ случаяхъ: или по недостатку времени, или по малому развитію дѣтей. Къ сожалѣнію, хотя въ практикѣ преподаванія и знакомятъ учениковъ съ опредѣленіемъ общаго наиб. дѣлителя послѣдовательнымъ дѣленіемъ, но въ бо́льшей части случаевъ оставляютъ этотъ пріемъ безъ всякаго примѣненія, или даютъ сравнительно очень мало примѣненій. Намъ случалось встрѣчать преподавателей, которые со своими учениками долго и много стараются какимъ-либо спо-

собомъ найти, на что можно сократить дробь, выраженную нѣсколько сложно, и все-таки не рѣшаются опредѣлить общаго наиб. дѣлителя для членовъ этой дроби. Въ послѣднее время даже замѣтно стремленіе замѣнить опредѣленіе общаго наиб. дѣлителя при сокращеніи дробей какими-либо иными пріемами. Всѣ эти пріемы, хотя и очень остроумные (напр., пріемы въ „Методикѣ“ А. И. Гольденберга), страдаютъ весьма важнымъ недостаткомъ—отсутствіемъ общности. Кромѣ того, многіе изъ нихъ нисколько не легче способа послѣдовательнаго дѣленія при отысканіи общ. наиб. дѣлителя.

287. Можно или непосредственно перейти къ способу послѣдовательнаго дѣленія, или предварительно сообщить дѣтямъ нѣсколько положеній о дѣлимости, на которыхъ этотъ способъ основанъ. Мы предпочитаемъ начинать съ этихъ положеній, потому что при ихъ помощи объясненіе способа послѣдовательнаго дѣленія гораздо легче и получаетъ болѣе законченный видъ; кромѣ того, при ихъ же помощи могутъ быть объяснены болѣе основательно ранѣе усвоенные дѣтьми признаки дѣлимости.

Изъ положеній о дѣлимости можно ограничиться слѣдующими:

Если каждое слагаемое дѣлится безъ остатка на какое-либо число, то и сумма дѣлится на то же число безъ остатка. Дѣйствительно, если каждое слагаемое дѣлится, напр., на 12, то каждое изъ нихъ состоитъ изъ полныхъ дюжинъ, и при сложеніи къ полнымъ дюжинамъ перваго слагаемаго прибавятся полныя же дюжины второго, затѣмъ полныя дюжины третьяго и т. д.; поэтому и сумма будетъ состоять изъ полныхъ дюжинъ, т.-е. будетъ дѣлиться на 12 безъ остатка.

Точный дѣлитель каждаго числа дѣлитъ безъ остатка и всѣ произведенія этого числа на другія числа, т.-е. всѣ кратныя этого числа.

Если одно изъ двухъ слагаемыхъ и ихъ сумма дѣлятся безъ остатка на какое-либо число, то и другое слагаемое дѣлится на то же число безъ остатка. Дѣйствительно, если сумма и одно изъ 2-хъ слагаемыхъ дѣлятся безъ остатка, напр., на 5, то для полученія другого слагаемаго придется отъ полныхъ пятковъ суммы откинуть полные же пятки перваго слагаемаго, а потому второе слагаемое должно состоять тоже изъ полныхъ пятковъ, т.-е должно дѣлиться на 5 безъ остатка.

Если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится на какое-либо число, а другое не дѣлится на это число, то сумма на это число не можетъ дѣлиться, потому

что если бы сумма раздѣлилась, то по предыдущему и другое слагаемое должно бы было дѣлиться.

Если два числа дѣлятся безъ остатка на одно и то же число, то и остатокъ отъ ихъ дѣленія раздѣлится на это число; напр., 75 и 20 оба дѣлятся на 5, и остатокъ отъ дѣленія 75 на 20 раздѣлится на 5. Дѣйствительно, дѣлимое 75 равно произведенію дѣлителя 20 на частное 3, сложенному съ остаткомъ 15. Здѣсь сумма 75 дѣлится на 5, одно слагаемое 20×3 тоже дѣлится на 5, потому что 20 дѣлится на 5; слѣд., и другое слагаемое—остатокъ 15 раздѣлится на 5.

Если дѣлитель и остатокъ дѣлятся на какое-либо число, то и дѣлимое раздѣлится на то же число, потому что дѣлимое представляетъ сумму двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ каждое дѣлится на это число.

288. Разъясненіе способа послѣдовательнаго дѣленія надо начать съ простѣйшаго случая, когда меньшее изъ данныхъ чиселъ есть общій наиб. дѣлитель, затѣмъ постепенно переходить къ случаямъ, когда общимъ наиб. дѣлителемъ будетъ первый, второй, третій и т. д. остатки. Послѣ этого можно вывести правило для опредѣленія общ. наиб. дѣлителя способомъ послѣдовательнаго дѣленія.

Объясненіе ведется приблизительно въ слѣдующемъ видѣ:

Общій наиб. дѣлитель двухъ чиселъ 1260 и 630 не можетъ быть больше меньшаго изъ нихъ 630-ти, потому что 630 не можетъ дѣлиться на число, бо́льшее самого себя; слѣд. общій наиб. дѣлитель 1260 и 630 или равенъ меньшему числу 630-ти, или меньше его. Чтобы узнать, не будетъ ли 630 общимъ наиб. дѣлителемъ, достаточно испытать, раздѣлится ли на него безъ остатка бо́льшее изъ данныхъ чиселъ 1260, ибо само на себя меньшее число несомнѣнно дѣлится безъ остатка. Такъ какъ 1260 на 630 дѣлится безъ остатка, то 630 и есть общій наиб. дѣлитель 1260-ти и 630-ти.

1260	630
0	2

Если бы мы взяли числа 1470 и 630, то, подвергнувъ ихъ такому же испытанію, т.-е. раздѣливъ 1470 на 630, нашли бы въ частномъ 2 и въ остаткѣ 210, и отсюда заключили бы, что меньшее число 630 не есть общій наиб. дѣлитель 1470-ти и 630-ти, и что, слѣд., ихъ общій наиб. дѣлитель меньше меньшаго изъ нихъ, т.-е. меньше 630-ти. Легко убѣдиться, что общій наиб. дѣлитель двухъ чиселъ 1470-ти и 630-ти не можетъ превышать остатка 210, который получается отъ дѣленія бо́льшаго изъ нихъ на меньшее; этотъ остатокъ при отысканіи общаго наиб. дѣлителя наз. первымъ остаткомъ. Дѣйствительно, и 1470, и 630 должны

1470	630
1260	2
210	

дѣлиться на искомаго общ. наиб. дѣлителя, а въ такомъ случаѣ, какъ мы видѣли, и остатокъ отъ дѣленія ихъ, т.-е. первый остатокъ 210, долженъ дѣлиться на искомаго общаго наиб. дѣлителя; слѣд. общій наиб. дѣлитель не можетъ быть больше 210-ти, и долженъ или равняться первому остатку 210, или быть меньше его. Чтобы узнать, не будетъ ли первый остатокъ 210 общимъ наиб. дѣлителемъ, достаточно испытать, раздѣлится ли на него безъ остатка меньшее изъ данныхъ чиселъ 630, потому что если 630 раздѣлится на 210, то и 1470 раздѣлится на 210, какъ дѣлимое въ такомъ дѣленіи, гдѣ

630	210
0	3

и дѣлитель 630, и остатокъ 210 дѣлятся на 210. Отъ дѣленія 630-ти на 210 получаемъ въ частномъ 3 и въ остаткѣ 0; отсюда заключаемъ, что 210 есть общій наиб. дѣлитель 1470 и 630.

Если бы вмѣсто 1470 было дано 1458, то, при испытаніи, не

1458	630
1260	2
198	

будетъ ли меньшее число общимъ наиб. дѣлителемъ, мы получили бы въ частномъ 2 и въ остаткѣ 198, и затѣмъ намъ слѣдовало бы испытать, не будетъ ли этотъ первый остатокъ 198 общимъ наиб. дѣлителемъ, для чего меньшее число 630 раздѣлить на 198. Отъ этого дѣленія получимъ частное

630	198
594	3
36	

3 и остатокъ 36, который наз. вторымъ остаткомъ. Отсюда заключимъ, что первый остатокъ 198 не есть общій наиб. дѣлитель 1458-ми и 630-ти и что, слѣд. общій наиб. дѣлитель меньше перваго остатка. Такъ же, какъ и относительно перваго остатка, можно показать, что общій наиб. дѣлитель не можетъ превышать второго остатка 36-ти. Дѣйствительно, искомый общій наиб. дѣлитель чиселъ 1458-ми и 630-ти долженъ дѣлить и остатокъ отъ ихъ дѣленія, т.-е. первый остатокъ 198, а если меньшее число 630 и первый остатокъ 198 дѣлятся на искомаго общаго наиб. дѣлителя, то и остатокъ отъ ихъ дѣленія, т.-е. второй остатокъ 36, долженъ дѣлиться на искомаго общаго наиб. дѣлителя. Отсюда заключаемъ, что общій наиб. дѣлитель двухъ чиселъ 1458 и 630 или равенъ второму остатку 36, или меньше его. Чтобы узнать, не будетъ ли второй остатокъ 36 общимъ наиб. дѣлителемъ, достаточно испытать, раздѣлится ли на него первый остатокъ 198. Въ самомъ дѣлѣ, если 198 раздѣлится на 36, то и меньшее число 630 раздѣлится на 36, какъ дѣлимое въ такомъ дѣленіи, гдѣ и дѣлитель 198 и остатокъ 36 дѣлятся на 36; если же меньшее число 630 и первый остатокъ 198 раздѣлятся на 36, то и бо́льшее число 1458 тоже раздѣлится на 36, какъ дѣлимое въ такомъ дѣленіи, гдѣ и дѣлитель 630 и остатокъ 198 дѣлятся на 36. Отъ дѣленія 198-ми на 36 получимъ частное 5 и третій остатокъ 18. Отсюда заключимъ, что 36 не есть общій наиб. дѣлитель 1458-ми

198	36
180	5
18	

и 630-ти, что общій наиб. дѣлитель ихъ меньше 36-ти. Такъ же, какъ и относительно второго остатка, убѣдимся, что общій наибольшій дѣлительне можетъ быть больше третьяго остатка 18-ти, и что, слѣд., онъ или долженъ равняться третьему остатку, или долженъ быть меньше его. Чтобы узнать, не будетъ ли третій остатокъ 18 общимъ наиб. дѣлителемъ, достаточно испытать, раздѣлится ли на него второй остатокъ 36. Дѣйствительно, если второй остатокъ 36 раздѣлится на 18, то и первый остатокъ 198 раздѣлится на 18, какъ дѣлимое въ такомъ дѣленіи, гдѣ и дѣлитель 36, и остатокъ 18 дѣлятся на 18; если же первый остатокъ раздѣлится на 18, то, какъ выше видѣли, оба данныхъ числа 630 и 1458 раздѣлятся на 18.

36	18
0	2

Отъ дѣленія 36-ти на 18 получимъ въ частномъ 2 и въ остаткѣ 0; слѣд. 18 есть общій наибольшій дѣлитель 1458-ми и 630-ти.

Легко сосчитать, не производя дѣленія, сколько разъ найденный общій наиб. дѣлитель 18 содержится въ каждомъ данномъ числѣ. Въ первомъ остаткѣ 198 второй остатокъ 36 содержится 5 разъ съ остаткомъ 18. Такъ какъ въ 36-ти 18 содержится 2 раза, то въ 5-ти такихъ числахъ 18 содержится 2. 5=10 разъ, да еще въ остаткѣ 18—одинъ разъ, слѣд., всего въ 198-ми 18 содержится 10+1=11 разъ. Первый же остатокъ 198 въ меньшемъ числѣ 630 содержится 3 раза съ остаткомъ 36. Такъ какъ въ 198-ми 18 содержится 11 разъ, то въ 3-хъ такихъ числахъ 18 содержится 11. 3=33 раза, да въ остаткѣ 36 еще 2 раза; слѣд., всего въ 630-ти 18 содержится 33+2=35 разъ. Меньшее же число 630 въ бо́льшемъ 1458 содержится 2 раза съ остаткомъ 198. Такъ какъ въ каждомъ 630-ти 18 содержится 35 разъ, то въ 2-хъ такихъ числахъ 18 содержится 35 . 2=70 разъ, да еще въ остаткѣ 198 оно содержится 11 разъ; слѣд., всего въ бо́льшемъ числѣ 18 содержится 70+11=81 разъ.

Вычисленіе располагается въ двухъ видахъ:

1 458	630	198	36	18;
198	36	18	0	

(3, 5, 2 — частныя)

1 458	630
630	198	2
198	36	3
36	18	5
0	2	

Здѣсь мы для сокращенія пересказа все время оставляли меньшее число безъ измѣненія. На практикѣ слѣдуетъ сперва дать нѣсколько примѣровъ, гдѣ общій наибольшій дѣлитель есть меньшее число, потомъ нѣсколько примѣровъ, гдѣ общій наиб. дѣлитель есть первый остатокъ и т. д. Послѣ ряда упражненій, можно вывести правило для опредѣленія общаго наиб. дѣлителя

по способу послѣдовательнаго дѣленія. Мы считаемъ нужнымъ предостеречь отъ нѣсколько спѣшнаго вывода этого правила не потому, чтобы самое правило было затруднительно, а въ тѣхъ цѣляхъ, чтобы правило было усвоено вполнѣ сознательно.

Въ нашемъ задачникѣ упражненія въ опредѣленіи общаго наибольш. дѣлителя расположены въ той самой послѣдовательности, которой мы держались здѣсь: № 284 заключаетъ примѣры, гдѣ общій наиб. дѣлитель есть меньшее изъ данныхъ чиселъ, № 285—примѣры, гдѣ общій наиб. дѣлитель есть первый остатокъ, № 286—примѣры, гдѣ общій наиб. дѣлитель есть второй остатокъ, и № 287—примѣры, гдѣ общій наиб. дѣлитель есть одинъ изъ слѣдующихъ остатковъ.

289. Какъ только дѣти освоятся съ опредѣленіемъ общаго наиб. дѣлителя по способу послѣдовательнаго дѣленія, они тотчасъ же прилагаютъ это умѣнье къ сокращенію дробей.

Замѣтимъ, что сокращеніе дробей при помощи общаго наиб. дѣлителя часто гораздо скорѣе ведетъ къ надлежащему результату даже и въ томъ случаѣ, когда дробь можетъ быть сокращена при помощи признаковъ дѣлимости.

Для примѣра приводимъ сокращеніе одной и той же дроби обоими способами.

Сократить дробь: $\frac{29376}{31104}$.

Помощію общ. наиб. дѣлителя:

	1	17		1728
31104	29376	1728;	29376	17
1728	12096		31104	18
	12096			
	0			

Послѣдовательное сокращеніе:

$$\frac{29376}{31104} = \frac{3264}{3456} = \frac{408}{432} = \frac{51}{54} = \frac{17}{18}.$$

(9, 8, 8, 3)

При первомъ пріемѣ намъ пришлось произвести всего два дѣленія; при второмъ—8 дѣленій, да кромѣ того нѣсколько испытаній дѣлимости на 9, на 8 и на 3. Во многихъ случаяхъ первый пріемъ значительно сократится, если общаго наиб. дѣлителя можно найти устно, напр. для дроби $^{144}/_{360}$.

Когда послѣдовательное сокращеніе приходится производить на числа, признаки дѣлимости для которыхъ неизвѣстны или очень сложны, то опредѣленіе общаго наиб. дѣлителя является ничѣмъ незамѣнимымъ средствомъ для сокращенія дроби, и при томъ—такимъ средствомъ, которое непремѣнно ведетъ къ цѣли; напр.

сокращеніе дроби $^{571428}/_{999999}$, полученной отъ обращенія $^{4}/_{7}$ въ періодическую дробь, выполняется при помощи трехъ очень простыхъ дѣленій:

	1	1	3		142857	
999999	571428	428571	142857;	571428		4
428571	142857	428571		999999	=	7
		0				

290. Познакомивъ съ опредѣленіемъ общаго наиб. дѣлителя посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія, надо дать дѣтямъ понятіе о числахъ взаимно—первыхъ, какъ о такихъ, общій наиб. дѣлитель которыхъ есть 1-ца; для этого можетъ послужить отысканіе общаго наиб. дѣлителя между двумя взаимно—первыми числами, напр. между 35 и 27. А затѣмъ надо показать, что частныя отъ дѣленія данныхъ чиселъ на ихъ общаго наиб. дѣлителя суть числа взаимно-первыя. Это положеніе въ примѣненіи къ числамъ, обозначеннымъ цыфрами, разъясняется довольно трудно, но обратить вниманіе дѣтей на него полезно.

291. Первоначальныя и составныя числа. Полное развитіе ученія о первонач. числахъ не доступно дѣтямъ въ томъ возрастѣ, въ которомъ они впервые проходятъ ариѳметику дробей, и, кромѣ того, требуетъ столько времени, сколько при правильной постановкѣ курса невозможно удѣлить безъ ущерба для другихъ сторонъ преподаванія. Поэтому, согласно общепринятому обычаю, основныя положенія этого отдѣла приходится сообщать дѣтямъ бездоказательно. Изъ нихъ надо указать слѣдующія: рядъ первоначальныхъ чиселъ безконеченъ, способъ узнавать, есть ли данное число первоначальное или составное, всякое составное число есть произведеніе первоначальныхъ множителей.

При выясненіи перваго положенія надо познакомить дѣтей со всѣми первоначальными числами первой сотни, а затѣмъ надо показать на примѣрахъ, что если первоначальное число выше 100, то всегда можно найти число первоначальное же, но выше взятаго. Въ связи съ этимъ разъясняется и способъ опредѣлять, есть ли данное число первоначальное или составное. Выбирая первоначальныя числа первой сотни, дѣти придутъ къ выводу, что для этого надо пробовать дѣлить взятое число на всѣ числа, которыя ниже его. При приложеніи этого пріема къ числамъ выше 100, преподаватель прежде всего разъясняетъ дѣтямъ практически на примѣрахъ, что нѣтъ надобности дѣлить взятое число на составныхъ дѣлителей. Напр., когда дѣти убѣдятся непосредственнымъ дѣленіемъ, что 323 не дѣлится на 7, то при испытаніи дѣлимости его на 14 преподаватель предлагаетъ дѣтямъ узнать, не

производя дѣленія, раздѣлится ли 323 на 14 или нѣтъ. Объясненіе дается приблизительно въ такой формѣ:

323 на 14 не можетъ раздѣлиться, потому что если бы это случилось, то 323 можно бы было раздѣлить и на 7, такъ какъ изъ 14 частей можно сдѣлать 7 частей, соединивъ 14-я части по двѣ и въ каждой части получилось бы цѣлое число.

То же самое можетъ быть разъяснено еще слѣдующимъ образомъ: 323 не можетъ дѣлиться на 14, 21, 28 и т. д., вообще ни на одно число, кратное 7-ми, потому что если 323 раздѣлится напр. на 21, то оно, какъ кратное 21, должно раздѣлиться и на 7.

Далѣе рядомъ примѣровъ дѣти убѣждаются, что если одно число дѣлится на другое безъ остатка, то первое число дѣлится тоже безъ остатка и на полученное частное; напр. если 30 дѣлится на 5 и даетъ въ частномъ 6, то оно раздѣлится и на 6, давъ въ частномъ 5, потому что изъ перваго дѣленія слѣдуетъ, что 30=6 . 5.

Пользуясь этимъ, можно разъяснить дѣтямъ, что испытаніе, есть ли данное число первоначальное или составное, надо продолжать только до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится число, меньшее дѣлителя. Напр., если взятое для испытанія число есть 109, то испытаніе можетъ быть закончено дѣленіемъ на 11, отъ котораго въ частномъ получается 9 и въ остаткѣ 10. Разъяснить это дѣтямъ можно при помощи слѣдующихъ вопросовъ:

На какое число послѣ 11 надо дѣлить 109?—Можетъ ли частное отъ дѣленія 109 на 13 равняться или быть больше 9-ти?—Почему?—Если 109 раздѣлится на 13 безъ остатка, то еще на какое число оно должно тоже раздѣлиться безъ остатка?—Какое число должно получиться въ частномъ отъ этого дѣленія?—Слѣд. можетъ ли 109 дѣлиться на 13 безъ остатка?—Далѣе, на какое число надо дѣлить 109?—Можетъ ли 109 раздѣлиться на 17 безъ остатка?—На 19?—Вообще на какое-либо число больше 11?—Слѣд. 109—первоначальное или составное?—До которыхъ же поръ надо было производить испытаніе 109-ти?

Послѣ нѣсколькихъ такихъ упражненій дѣти легко придутъ къ установленію общаго правила.

292. Разложеніе чиселъ на первоначальныхъ множителей. Прежде всего слѣдуетъ дать понятіе о томъ, что разложить число на слагаемыя значитъ представить его въ видѣ суммы нѣсколькихъ чиселъ, а разложить на множителей значитъ представить въ видѣ произведенія нѣсколькихъ чиселъ. Мы дѣлаемъ такое сопоставленіе съ тою цѣлью, чтобы дѣти не смѣшивали разложенія на слагаемыя съ разложеніемъ на множителей, что встрѣчается нерѣдко, если они знаютъ только о разложеніи числа на множителей.

Затѣмъ надо указать, что на слагаемыя можно разлагать и составныя, и первоначальныя числа, а на множителей, отличныхъ отъ единицы и самого числа,—только составныя числа.

Послѣ этого можно уже приступить къ разложенію чиселъ на первоначальныхъ множителей. Сначала взятое число, напр. 48, разлагается на два множителя, положимъ на 6 и 8. Найдя, что эти множители—числа составныя, дѣти разлагаютъ каждаго изъ нихъ опять на два множителя и такимъ образомъ представляютъ 48 въ видѣ произведенія 2 . 3 . 2 . 4. Найдя, что 4 есть также число составное, они замѣняютъ его произведеніемъ 2 . 2, и окончательно получаютъ, что 48 = 2 . 3 . 2 . 2 . 2. Послѣ нѣсколькихъ такихъ упражненій дѣти приходятъ къ выводу, что всякое составное число можетъ быть разложено на первоначальныхъ множителей.

Замѣтимъ, что приведенный пріемъ разложенія чиселъ на первонач. множителей хорошо прилагается и къ довольно большимъ числамъ, при чемъ можетъ легко выполняться устно, особенно, если дѣти будутъ твердо знать составъ нѣкоторыхъ чиселъ (8, 9 и т. п.) изъ первонач. множителей. Напр., 360 состоитъ изъ множителей 36 и 10, а 36 состоитъ изъ множителей 4 и 9; въ 4 входитъ 2 два раза, да въ 10—одинъ разъ, слѣд. въ 360 будетъ 2 входить 3 раза; затѣмъ 9 состоитъ изъ 3 . 3; слѣд. 360 = = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5. Слѣдуетъ, кромѣ того, показать дѣтямъ и общепринятое расположеніе чиселъ при разложеніи на первонач. множителей.

Разлагая одно и то же число на первонач. множителей различнымъ образомъ, дѣти легко приходятъ къ заключенію, что для всякаго числа существуетъ только одно разложеніе на первоначальныхъ множителей. На это положеніе необходимо обратить вниманіе дѣтей, хотя строгое его доказательство не можетъ быть введено въ начальный курсъ ариѳметики.

293. Точный дѣлитель даннаго числа. Опредѣленіе общаго наиб. дѣлителя чиселъ помощію разложенія на первонач. множителей. Прежде, чѣмъ воспользоваться разложеніемъ чиселъ на первоначальныхъ множителей для опредѣленія ихъ общаго наиб. дѣлителя и наим. кратнаго, слѣдуетъ познакомить дѣтей съ составомъ точныхъ дѣлителей числа изъ его первонач. множителей. Для этого напр. число 120 разлагается на первонач. множителей 2 . 2 . 3 . 2 . 5 и затѣмъ, пользуясь этимъ разложеніемъ, дѣти разлагаютъ 120 на два множителя различными способами и находятъ, что 120 на каждаго изъ этихъ множителей дѣлится безъ остатка. Работа ведется приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Перемножьте трехъ первыхъ первоначальн. множителей 120-и.—На что еще надо умножить 12, чтобы получить 120?—Слѣд. 120 на какихъ двухъ множителей можно разложить?—Если 120 состоитъ изъ 12 . 10, то на какія числа можно раздѣлить 120 безъ остатка? — Перемножьте трехъ послѣднихъ множителей 120-ти?—На что еще надо умножить 30, чтобы получить 120?—Слѣд. на какихъ еще двухъ множителей можно разложить 120? — Если 120 состоитъ изъ 30 . 4, то на какія числа можно его раздѣлить безъ остатка?—Какъ еще можно разложить 120 на двухъ множителей? — Не скажетъ ли кто, на какія еще числа можно раздѣлить 120 безъ остатка?—Какъ нашли эти числа?

Такимъ образомъ дѣти находятъ, что 120=2 . 60, 120=4 . 30, 120=8 . 15, 120=3 . 40, и т. д. и что слѣд. 120 дѣлится на 4 и на 30, на 8 и 15 и т. д. Пріемъ, которымъ найдены всѣ эти точные дѣлители, приводитъ къ заключенію, что они состоятъ изъ тѣхъ же первонач. множителей, которые входятъ и въ данное число. Чтобы дѣти пришли къ этому выводу, необходимо повторить работу съ нѣсколькими числами, напр. съ 210, съ 360.

Послѣ этого останется еще показать, что въ точный дѣлитель числа не могутъ входить первонач. множители, которыхъ нѣтъ въ данномъ числѣ, и что каждый первонач. множитель, заключающійся въ данномъ числѣ, въ точный дѣлитель можетъ входить самое бо́льшее столько разъ, сколько разъ онъ входитъ въ данное число. Напр., въ точный дѣлитель 120-ти первонач. множитель 2 не можетъ входить болѣе 3-хъ разъ, ибо если бы 2 входило 4 раза, то, умноживъ этого дѣлителя на частное, полученное отъ дѣленія на него 120-ти, мы нашли бы, что въ 120 множитель 2 входитъ по крайней мѣрѣ 4 раза и что такимъ образомъ для 120-ти существуетъ два разложенія на первонач. множителей—одно, гдѣ множитель 2 входитъ 3 раза, и другое, гдѣ множитель 2 входитъ не менѣе 4-хъ разъ. Подобнымъ же образомъ рѣшается вопросъ относительно первонач. множителей, которые совсѣмъ не входятъ въ данное число.

Если дѣти хорошо усвоятъ все сказанное выше о составѣ точнаго дѣлителя даннаго числа, то опредѣленіе общаго наиб. дѣлителя двухъ и нѣсколькихъ чиселъ помощію разложенія ихъ на первонач. множителей уже не можетъ встрѣтить никакихъ затрудненій.

Вычисленія располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

Данныя числа.	Частныя.
420=2 . 2 . 3 . 5 . 7	7
360=2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5	2 . 3=6
240=2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5	2 . 2=4
О. Н. Д.=2 . 2 . 3 . 5=60	

294. Отысканіе общаго наиб. дѣлителя двухъ чиселъ при помощи разложенія ихъ на первонач. множителей, располагаютъ иногда въ слѣдующемъ видѣ:

840=2 . 420=10 . 84=70 . 12
1750=2 . 875=10 . 175=70 . 25,

выдѣляя общихъ первонач. множителей изъ обоихъ данныхъ чиселъ и перемножая ихъ между собою. Такъ, замѣтивъ, что 840 и 1750 оба дѣлятся на 2, дѣлимъ ихъ на 2 и смотримъ, какого общаго первонач. дѣлителя имѣютъ полученныя частныя 420 и 875. Такимъ дѣлителемъ оказывается 5. Общихъ первонач. множителей 2 и 5 перемножаемъ, а 420 и 875 дѣлимъ на 5; получаемъ частныя 84 и 175, и такимъ образомъ первое число 840 разлагаемъ на множителей 10 и 84, а второе 1750 — на множителей 10 и 175. Частныя 84 и 175 имѣютъ общаго первонач. множителя 7. Раздѣливъ ихъ на этого множителя и перемноживъ 10 и 7, разложимъ первое число на множителей 70 и 12, а второе на множителей 70 и 25. Такъ какъ 12 и 25 болѣе не имѣютъ общихъ первонач. множителей, то отысканіе общаго наиб. дѣлителя окончено: общій наиб. дѣлитель есть 70, а частныя отъ дѣленія на него данныхъ чиселъ—12 и 25. Опредѣленіе общаго наиб. дѣлителя значительно сократится, если сразу выдѣлимъ изъ данныхъ чиселъ общаго составного множителя 10, котораго не трудно угадать по виду взятыхъ чиселъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ общаго наиб. дѣлителя двухъ чиселъ можно найти, выдѣляя изъ данныхъ чиселъ тѣхъ первоначальныхъ множителей, которыя входятъ только въ одно изъ нихъ; напр.

8883=3 . 2961=9 . 987=27 . 329
6580=2 . 3290=4 . 1645=20 . 329

Отсюда совершенно ясно, что общій наиб. дѣлитель данныхъ чиселъ есть 329.

295. Наименьшее кратное можетъ опредѣляться двумя способами: помощію разложенія данныхъ чиселъ на первонач. множителей и при помощи опредѣленія общаго наиб. дѣлителя послѣдовательнымъ дѣленіемъ. Къ сожалѣнію, второй способъ, во многихъ случаяхъ позволяющій значительно сокращать вычисленія, въ практикѣ почти не употребляется. По нашему мнѣнію, полезно ознакомить дѣтей и съ тѣмъ и съ другимъ способомъ.

Начать надо съ перваго способа, какъ болѣе легкаго. Для двухъ чиселъ можно предложить два расположенія вычисленій:

Данныя числа.	Частныя.
1260=2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7	2 . 5=10
1400=2 . 2 . 2 . 5 . 5 . 7	3 . 3= 9
Н. Кр.=1260 . 2 . 5=12600	

Данныя числа.
1260=2 . 630=4 . 315=20 . 63=140 . 9
1400=2 . 700=4 . 350=20 . 70=140 . 10
Н. Кр.=140 . 9 . 10=1260 . 10=12600

Наим. кратное составляется изъ первонач. множителей на основаніи того, что въ дѣлимое должны входить всѣ первонач. множители дѣлителя, и что каждый множитель дѣлителя долженъ входить въ дѣлимое по крайней мѣрѣ столько же разъ, сколько разъ онъ входитъ въ дѣлителя. Для составленія наим. кратнаго произведеніе всѣхъ первонач. множителей перваго числа, т.-е. само первое число 1260, надо умножить на произведеніе 2.5=10 тѣхъ первонач. множителей второго числа 1400, которые не входятъ въ первое. Легко разъяснить, что составленное такимъ образомъ число 12600 раздѣлится на каждое изъ данныхъ чиселъ и притомъ будетъ наименьшимъ изъ всѣхъ чиселъ, дѣлящихся на нихъ безъ остатка. Во второмъ способѣ расположенія вычисленій преподаватель разъясняетъ, что въ общій наиб. дѣлитель 140 входятъ всѣ общіе первонач. множители обоихъ данныхъ чиселъ, что въ 9 входятъ тѣ первонач. множители перваго числа, которыхъ нѣтъ въ общемъ наиб. дѣлителѣ и которые слѣд. не входятъ и во второе данное число, а въ 10 входятъ тѣ первонач. множители второго числа, которыхъ нѣтъ въ общемъ дѣлителѣ и которые слѣд. не входятъ въ первое число. Составленное такимъ образомъ число 140.9.10=12600 раздѣлится на первое данное число 1260, потому что часть первонач. множителей 1260-ти заключается въ общемъ наиб. дѣлителѣ 140, а остальные въ 9-ти; раздѣлится оно и на 1400, потому что часть первонач. множителей 1400 заключается въ 140, а остальные въ 10-ти. Не трудно такъ же разъяснить, что составленное такимъ образомъ число есть наим. кратное и что всякое другое кратное дѣлится на наименьшее кратное.

Изъ этой работы само собою вытекаетъ заключеніе, что наим. кратное двухъ чиселъ состоитъ изъ трехъ множителей: общаго наиб. дѣлителя данныхъ чиселъ и частныхъ отъ дѣленія ихъ на общаго наиб. дѣлителя. А такъ какъ произведеніе общаго наиб. дѣлителя на одно изъ этихъ частныхъ даетъ соотвѣтствующее данное число, то составъ наим. кратнаго двухъ чиселъ можетъ быть выраженъ еще слѣдующимъ образомъ: чтобы найти наим. кратное двухъ чиселъ, надо найти ихъ общаго наиб. дѣлителя, и раздѣливъ на него одно изъ данныхъ чиселъ, умножить на полученное частное другое данное число. Примѣняя сюда опредѣленіе общаго наиб. дѣлителя послѣдовательнымъ дѣленіемъ, дѣти научатся опредѣлять наим. кратное двухъ чиселъ, не разлагая ихъ на первонач. множителей. Вычисленія располагаются слѣдующимъ образомъ:

О. Н. Д. Н. Кр. Другое частное.

$$\begin{array}{r|l} 1400 \smile 1260 & 140 \\ 140 \quad 1260 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad 1400 \smile 9 \quad 140;\ 1400 \cdot 9 = 12600;\ 9+1=10$$

296. Когда дано больше двухъ чиселъ, напр. 420, 360 и 240, то находятъ сперва наим. кратное двухъ первыхъ, т.-е. 420 и 360-ти:

$$\begin{array}{l} 420 = 2 \cdot 210 = 4 \cdot 105 = 12 \cdot 35 = 60 \cdot 7 \\ 360 = 2 \cdot 180 = 4 \cdot \ 90 = 12 \cdot 30 = 60 \cdot 6 \\ \hline \text{Н. Кр.} = 60 \cdot 7 \cdot 6 = 420 \cdot 6 = 2520 \end{array}$$

Наим. кратное трехъ чиселъ 420, 360 и 240 должно дѣлиться на 420 и на 360 безъ остатка, т.-е. оно есть ихъ общее кратное, а потому должно дѣлиться безъ остатка на ихъ наим. кратное 2520. А такъ какъ оно должно дѣлиться безъ остатка и на третье число 240, то наименьшее кратное всѣхъ трехъ чиселъ должно быть общимъ кратнымъ 2520-ти и 240-ка, и мы найдемъ наим. кратное трехъ чиселъ 420, 360 и 240, если найдемъ наим. кратное для 2520-ти и 240-ка; получимъ:

$$\begin{array}{l} 2520 = 2 \cdot 1260 = 4 \cdot 630 = 8 \cdot 315 = 24 \cdot 105 = 120 \cdot 21 \\ \ \ 240 = 2 \cdot \ 120 = 4 \cdot \ 60 = 8 \cdot \ 30 = 24 \cdot \ 10 = 120 \cdot \ 2 \\ \hline \text{Н. Кр.} = 120 \cdot 21 \cdot 2 = 2520 \cdot 2 = 5040. \end{array}$$

Найденное число дѣлится безъ остатка на каждое данное число, какъ это очевидно изъ самаго способа его опредѣленія; оно есть наименьшее кратное данныхъ чиселъ, потому что есть наименьшее изъ кратныхъ 2520-ти и 240-ка, а мы видѣли сейчасъ, что наименьшее кратное чиселъ 420-ти, 360-ти и 240-ка должно дѣлиться и на 2520, и на 240.

Если бы были даны четыре числа, то точно такъ же можно показать, что наим. кратное ихъ должно дѣлиться на наим. кратное двухъ первыхъ и на наим. кратное первыхъ трехъ и слѣд. для отысканія наим. кратнаго четырехъ чиселъ надо найти наим. кратное первыхъ двухъ, затѣмъ найти наим. кратное для найденнаго наим. кратнаго и третьяго числа, при чемъ найденное число будетъ наим. кратнымъ трехъ первыхъ чиселъ, и наконецъ найти наим. кратное для наим. кратнаго первыхъ трехъ чиселъ и для четвертаго числа.

297. Когда при опредѣленіи наим. кратнаго нѣсколькихъ чиселъ пользуются разложеніемъ ихъ на первонач. множителей, то удобнѣе сперва всѣ данныя числа разложить на первонач. множителей; тогда сразу можно видѣть, изъ какихъ первонач. множителей слѣдуетъ составить наим. кратное, а также легко опредѣлить, изъ какихъ первонач. множителей должны состоять частныя отъ дѣленія наим. кратнаго на каждое данное число. Чтобы найти частное отъ дѣленія наименьшаго кратнаго на одно изъ данныхъ чиселъ, надо узнать, на какое число слѣдуетъ умножить это данное число, чтобы получить наим. кратное, а для этого надо перемножить тѣхъ

первоначальныхъ множителей наименьшаго кратнаго, которые не входятъ въ это данное число. Для чиселъ 220, 280, 350 и 300 вычисленіе можетъ быть расположено слѣдующимъ образомъ:

220=2 . 2 . 5 . 11	2 . 7 . 5 . 3=210
280=2 . 2 . 2 . 5 . 7	11 . 5 . 3=165
350=2 . 5 . 5 . 7	2 . 2 . 11 . 3=132
300=2 . 2 . 3 . 5 . 5	2 . 11 . 7=154

Н. Кр.=2 . 2 . 5 . 11 . 2 . 7 . 5 . 3=220 . 2 . 7 . 5 . 3=46 200.

Здѣсь справа отъ данныхъ чиселъ за чертою выписаны соотвѣтствующія частныя отъ дѣленія наим. кратнаго на данныя числа.

Когда при опредѣленіи наим. кратнаго пользуются способомъ послѣдовательнаго дѣленія, то вычисленіе можно расположить слѣдующимъ образомъ:

1	3	1	2	
280	220	60	40	20;
60	40	20	0	

220 : 20=11; *Н. Кр.*=280 . 11=3 080;
3 080 : 280=11 ; 3 080 : 220=14.

8	1	4	
3 080	350	280	70
280	70	0	

350 : 70=5; *Н. Кр.*=3080 . 5=15 400;
15 400 : 3080=5;
15 400 : 280=11 . 5=55;
15 400 : 220=14 . 5=70;
15 400 : 350=44.

5	3	
15 400	300	100;
400	0	
100		

300 : 100=3; *Н. Кр.*=15 400 . 3=46 200;
46 200 : 15 400=3;
46 200 : 280=55 . 3=165;
46 200 : 220=70 . 3=210;
46 200 : 350=44 . 3=132;
46 200 : 300=154.

298. При разложеніи чиселъ на первонач. множителей можетъ встрѣтиться число, относительно котораго признаки дѣлимости не даютъ возможности судить, есть ли оно первонач., или составное. Хотя таблица первонач. чиселъ и можетъ разрѣшить этотъ вопросъ, но она не всегда подъ руками, да и при ея помощи мы всё-таки не найдемъ первонач. числа, на которое встрѣтившееся число, если оно составное, дѣлится безъ остатка. Такое число приходится или принимать за первонач., или подвергать испытанію, дѣля его послѣдовательно на 2, 3, 5, 7 и т. д. Въ первомъ случаѣ мы можемъ сдѣлать ошибку, и тогда, если мы разлагали на первоначальн. множителей для опредѣленія общаго наиб. дѣлителя или наим. кратнаго, то, вмѣсто общаго наиб. дѣлителя, найдемъ только общаго дѣлителя, а вмѣсто наимен. кратнаго—общее кратное. Поэтому при опредѣленіи общаго наиб. дѣлителя и наим. кратнаго для чиселъ, которыя заключаютъ въ

себѣ достаточно большихъ первонач. множителей, лучше пользоваться способомъ послѣдовательнаго дѣленія. Чтобы нагляднѣе убѣдиться въ этомъ, возьмемъ числа 4 982 и 4 558 и найдемъ общаго наиб. дѣлителя и наим. кратное обоими способами.

4 982=2 . 2 491=106 . 47 | 43
4 558=2 . 2 279=106 . 43 | 47

О. Н. Д.=106
Н. Кр.=106.47.43=214 226.

Испытаніе 2491.

2 491 | 7 ; 2 491 | 11 ; 2 491 | 13 ;
39 | 355 ; 29 | 226 ; 1 19 | 191 ;
41 71 21
6 5 8

Испытаніе 2279.

2 279 | 7 ; 2 279 | 11 ; 2 279 | 13 ; 2 279 | 17 ;
17 | 325 ; 79 | 207 ; 97 | 175 ; 57 | 134 ;
39 2 69 69
4 4 1

2 491 | 17 ; 2 491 | 19 ; 2 491 | 23 ;
79 | 146 ; 59 | 131 ; 191 | 108 ;
111 21 7
9 2

2 279 | 19 ; 2 279 | 23 ; 2 279 | 29 ; 2 279 | 31 ;
37 | 119 ; 209 | 99 ; 249 | 78 ; 109 | 73 ;
189 2 17 16
18

2 491 | 29 ; 2 491 | 31 ; 2 491 | 37 ;
171 | 85 ; 11 | 80 ; 271 | 67 ;
26 12

2 279 | 37 ; 2 279 | 41 ; 2 279 | 43 ;
59 | 61 ; 229 | 55 ; 129 | 53 ;
22 24 0

2 491 | 41 ; 2 491 | 43 ; 2 491 | 47 ;
31 | 60 ; 341 | 57 ; 141 | 53 ;
40 0

1	10	1	3			
4982	4558	424	318	106;	4 558	106;
424	318	106	0		318	43
					0	

Н. Кр.=4982.43=214 226.

299. При отысканіи наим. кратнаго вычисленія значительно сокращаются, 1) когда одно изъ данныхъ чиселъ дѣлится безъ остатка на каждое изъ остальныхъ и 2) когда данныя числа совсѣмъ не имѣютъ общихъ первоначальныхъ множителей.

Въ первомъ случаѣ данное число, дѣлящееся на каждое изъ остальныхъ безъ остатка, очевидно и есть наименьшее кратное; для опредѣленія частныхъ придется дѣлить его на каждое изъ остальныхъ чиселъ. Напр., для чиселъ 1200, 400 и 300 наим. кратное есть 1200, потому что оно дѣлится безъ остатка и на 300, и на 400; частныя получимъ, раздѣливъ 1200 на 300 и на 400.

Когда данныя числа совсѣмъ не имѣютъ общихъ первонач. множителей, то наименьшее кратное равно произведенію ихъ, и для опредѣленія частнаго отъ дѣленія наименьшаго кратнаго на какое-либо изъ данныхъ чиселъ, надо перемножить остальныя данныя числа. Наприм., для опредѣленія наим. кратнаго 175, 88 и 117 надо перемножить данныя числа, потому что если бы мы ихъ разложили на первонач. множителей:

175=5 . 5 . 7, 88=2 . 2 . 2 . 11, 117=3 . 3 . 13,

то въ составъ наим. кратнаго пришлось бы взять не только всѣхъ множителей перваго числа, но и всѣхъ множителей второго и всѣхъ множителей третьяго числа, такъ что наим. кратное равнялось бы

$$5.5.7\times 2.2.2.11\times 3.3.13, \quad \text{т.-е. } 175.88.117.$$

Замѣтимъ, что эти два случая далеко не равносильны съ общимъ случаемъ, и поэтому совершенно неправильно, какъ опредѣленіе наим. кратнаго, такъ и связанное съ нимъ приведеніе дробей къ общему знаменателю подраздѣлять на три случая. Упомянутые частные случаи имѣютъ смыслъ только тогда, когда завѣдомо извѣстно, что данныя числа подходятъ подъ одинъ изъ нихъ. Кромѣ того, въ выдѣленіи этихъ частныхъ случаевъ совсѣмъ не встрѣтится надобности, если наим. кратное опредѣлять при помощи общаго наиб. дѣлителя, а этого послѣдняго—способомъ послѣдовательнаго дѣленія.

300. Сложеніе и вычитаніе дробей. По мѣрѣ того, какъ дѣти знакомятся съ опредѣленіемъ наим. кратнаго, они учатся примѣнять его къ приведенію дробей къ одному знаменателю при сложеніи и вычитаніи дробей. Вычисленія располагаются слѣдующимъ образомъ:

252) $\frac{7}{24}+\frac{25}{36}+\frac{29}{40}=$.

$$=\frac{7.15+25.10+29\,.\,9}{360}=$$

$$=\frac{105+250+261}{360}=$$

$$=\frac{616}{360}\overset{8}{=}\frac{77}{45}=1\frac{32}{45}.$$

$24=2.2.2.3 \mid 3.5=15$
$36=2.2.3.3 \mid 2.5=10$
$40=2.2.2.5 \mid 3.3=\ 9$

$2.2.2.3.3.5=360$

253) $10\frac{17}{80}-4\frac{13}{16}=10\frac{17}{80}-4\frac{65}{80}=9\frac{97}{80}-4\frac{65}{80}=5\frac{32}{80}\overset{16}{=}5\frac{2}{5}$;

$$25-12\frac{7}{15}=24\frac{15}{15}-12\frac{7}{15}=12\frac{8}{15}$$

254) $4\frac{8}{11}+3\frac{10}{17}-1\frac{127}{187}=6\frac{8.17+10.11-127}{187}=6\frac{136+110-127}{187}=$

$$=6\frac{246-127}{187}=6\frac{119}{187}\overset{17}{=}6\frac{7}{11}.$$

301. Въ очень многихъ случаяхъ для быстроты и удобства вычисленій полезно отступать отъ обычныхъ пріемовъ.

Во-первыхъ, можно привести къ одному знаменателю и сложить сперва двѣ изъ данныхъ дробей, затѣмъ полученную дробь сложить съ третьей дробью и т. д. до послѣдней дроби включительно. Вычисленіе можетъ упроститься вслѣдствіе того, что отъ сложенія двухъ дробей можетъ получиться дробь сократимая или неправильная; сокративъ полученный результатъ или исключивъ изъ него цѣлое число, мы можемъ значительно облегчить дальнѣйшее вычисленіе. Во-вторыхъ, можно сложить или вычесть сперва двѣ дроби, которыя нетрудно привести къ одному знаменателю, затѣмъ сложить двѣ другія и т. д. и наконецъ сложить полученныя суммы. Приведемъ нѣсколько примѣровъ:

255) $\frac{28}{57}+\frac{203}{760}+\frac{23}{40}=1\frac{1}{3}$.

$$\frac{203}{760}+\frac{23}{40}=\frac{203}{760}+\frac{23.19}{40.19}=\frac{203+437}{760}=\frac{640}{760}\overset{40}{=}\frac{16}{19};$$

$$\frac{28}{57}+\frac{16}{19}=\frac{28}{57}+\frac{16.3}{19.3}=\frac{28+48}{57}=\frac{76}{57}\overset{19}{=}\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};$$

256) $2\frac{21}{47}-1\frac{12}{19}+3\frac{31}{141}-3\frac{30}{133}=\frac{17}{21}$.

$$2\frac{21}{47}+3\frac{31}{141}=2\frac{21.3}{47.3}+3\frac{31}{141}=5\frac{63+31}{141}=5\frac{94}{141}\overset{47}{=}5\frac{2}{3};$$

$$1\frac{12}{19}+3\frac{30}{133}=1\frac{12.7}{19.7}+3\frac{30}{133}=4\frac{84+30}{133}=4\frac{114}{133}\overset{19}{=}4\frac{6}{7};$$

$$5\frac{2}{3}-4\frac{6}{7}=1\frac{2.7}{3.7}-\frac{6.3}{7.3}=1\frac{14}{21}-\frac{18}{21}=\frac{35-18}{21}=\frac{17}{21}.$$

302. Сумма и разность дробей сохраняютъ всѣ свойства суммы и разности цѣлыхъ чиселъ. Такъ, сумма не измѣняется отъ перестановки слагаемыхъ; каждое число, прибавленное къ одному изъ слагаемыхъ, прибавляется и къ суммѣ; каждое число, отнятое отъ одного изъ слагаемыхъ, отнимается и отъ суммы; чтобы прибавить или отнять какое-либо число отъ суммы, достаточно прибавить его къ одному изъ слагаемыхъ или отнять отъ одного изъ слагаемыхъ; чтобы къ какому-либо числу прибавить сумму, можно послѣдовательно придавать къ нему каждое слагаемое; чтобы изъ какого-либо числа отнять сумму, можно послѣдовательно отнимать отъ него каждое слагаемое. Все это надо разъяснить дѣтямъ на задачахъ и примѣрахъ.

303. Изъ упражненій, относящихся къ разсмотрѣннымъ отдѣламъ, отмѣтимъ задачи, разсмотрѣнныя нами въ I гл. этой книги подъ №№ 56, 62, 63 (стр. 83-я, 88-я и 89-я). Изъ остальныхъ можетъ встрѣтить нѣкоторое затрудненіе только слѣдующая задача:

257) Дробь $^7/_{480}$ умножить на 400 такъ, чтобы сразу получить несократимую дробь. Дробь $^{635}/_4$ такимъ же образомъ раздѣлить на 375.

Рѣшеніе. Найдемъ общаго наиб. дѣлителя 480 и 400, это будетъ 80 и 400=80 . 5; слѣд., чтобы умножить на 400, можно послѣдовательно умножить на 80 и на 5. Чтобы дробь $^{7}/_{480}$ умножить на 80, раздѣлимъ ея знаменателя на 80; получимъ $^{7}/_{6}$. А чтобы $^{7}/_{6}$ умножить на 5, умножимъ числителя на 5; окончательно получаемъ $^{35}/_{6}=5^{5}/_{6}$. Такъ же рѣшается и второй вопросъ.

304. Умноженіе дробей. Въ примѣненіи къ дроби, разсматриваемой какъ совокупность одинаковыхъ долей единицы, обыкновенно устанавливаютъ для дѣйствій такія новыя опредѣленія, которыя охватывали бы собою и цѣлыя числа. Таково опредѣленіе умноженія, принадлежащее Коши: умножить значитъ составить новое число изъ множимаго такъ же, какъ множитель составленъ изъ единицы, или видоизмѣненіе его: умножить значитъ надъ множимымъ произвести послѣдовательно всѣ дѣйствія, которыя послѣдовательно же слѣдуетъ произвести надъ единицей, чтобы получить множитель. При пониманіи дроби какъ символа частнаго, всѣ такія опредѣленія становятся излишними. Думается, что они мало приносятъ пользы и въ томъ случаѣ, когда дробь разсматривается, какъ совокупность одинаковыхъ долей единицы. Во всякомъ случаѣ сложность и искусственность этихъ опредѣленій дѣлаютъ ихъ совершенно неумѣстными въ начальномъ преподаваніи. Еще неумѣстнѣе давать эти опредѣленія, какъ это встрѣчается въ нѣкоторыхъ руководствахъ, въ цѣлыхъ числахъ. Въ преподаваніи гораздо лучше пользоваться самостоятельнымъ опредѣленіемъ умноженія на дробь, какъ дѣйствія, имѣющаго цѣлью опредѣленіе части множимаго; необходимо только указать, что при такомъ опредѣленіи умноженія оно подчиняется тѣмъ же законамъ, что и умноженіе на цѣлое число.

Иногда правило умноженія дробей выводятъ, перенося на умноженіе дробей нѣкоторыя свойства умноженія цѣлыхъ чиселъ. Такъ, умноживъ множимое на числителя множителя, говорятъ, что полученное произведеніе больше истиннаго во столько разъ, сколько единицъ въ знаменателѣ множителя, и что поэтому полученное произведеніе надо раздѣлить на знаменателя. Въ такой формѣ выводъ едва ли можно признать правильнымъ. Нѣкоторые исправляютъ его, говоря, что здѣсь на дробь распространяется правило объ умноженіи на частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ, когда это частное есть цѣлое число. Съ этимъ можно было бы согласиться, если бы все ученіе о дробяхъ было построено на пониманіи дроби, какъ частнаго отъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ. Замѣтимъ, что такой способъ постановки умноженія на дробь совершенно лишаетъ его всякаго конкретнаго значенія; и въ результатѣ дѣти, знакомыя съ умноженіемъ на дробь, никогда не примѣняютъ его къ рѣшенію задачъ, которыя приводятся къ умноженію на правильную дробь.

Поэтому мы даемъ умноженію на дробь самостоятельное опредѣленіе, какъ дѣйствію, при помощи котораго опредѣляется такая часть множимаго, какую показываетъ множитель и, пользуясь этимъ опредѣленіемъ, выводимъ всѣ правила умноженія.

305. Работа начинается съ упражненій въ опредѣленіи частей числа. Матеріаломъ могутъ служить примѣры:

258) Найти $^{3}/_{4}$ отъ 144-хъ, $^{3}/_{8}$ отъ 56-ти, $^{5}/_{9}$ отъ 75-ти, $^{3}/_{4}$ отъ $^{16}/_{27}$, $^{5}/_{7}$ отъ $^{14}/_{15}$, $^{7}/_{10}$ отъ $^{45}/_{49}$.

Рѣшеніе записывается на классной доскѣ въ слѣдующемъ видѣ:

$$(144:4)\times 3=36\times 3=108;\ (56:8)\times 3=21;$$

$$(75:9)\times 5=\frac{75}{9}\times 5=\frac{25}{3}\times 5=\frac{125}{3}=41^{2}/_{3};\left(\frac{16}{27}:4\right)\times 3=\frac{4}{27}\times 3=\frac{4}{9};$$

$$\left(\frac{14}{15}:7\right)\times 5=\frac{2}{15}\times 5=\frac{2}{3};\ \left(\frac{45}{49}:10\right)\times 7=\frac{45}{490}\times 7=\frac{45}{70}=\frac{9}{14}.$$

Изъ этихъ примѣровъ дѣлается выводъ: чтобы найти часть какого-либо числа, надо это число раздѣлить на знаменателя дроби, показывающей, какую часть даннаго числа требуется опредѣлить, и полученное частное умножить на числителя той же дроби. Дѣти должны указать, что дѣленіемъ даннаго числа на знаменателя они опредѣляютъ одну долю даннаго числа, а умноженіемъ полученнаго частнаго на числителя опредѣляютъ требуемое число долей.

Пользуясь этимъ выводомъ, преподаватель сообщаетъ, что опредѣленіе части числа считается умноженіемъ на дробь, что слѣд. въ приведенныхъ примѣрахъ 144 было умножено на $^{3}/_{4}$, $^{14}/_{15}$ было умножено на $^{5}/_{7}$ и т. д. Примѣнивъ это понятіе объ умноженіи на дробь къ новому ряду примѣровъ ($15\times{}^{2}/_{3}$, $^{15}/_{16}\times{}^{4}/_{5}$), дѣти уже будутъ въ состояніи отвѣтить на вопросъ, что значитъ умножить на дробь и составить общее правило для этого умноженія: чтобы умножить на дробь, надо множимое раздѣлить на знаменателя этой дроби (опредѣлить одну долю множимаго) и полученное частное умножить на ея числителя (найти требуемое число долей множимаго).

Чтобы дѣти хорошо усвоили и то, и другое, кромѣ упражненій въ рѣшеніи задачъ и примѣровъ, необходимо: 1) сопоставить умноженіе на цѣлое число, на дробь и на смѣшанное число; 2) выяснить, что показываетъ цѣлый множитель, дробный множитель и смѣшанный множитель; 3) выяснить, когда и почему произведеніе больше множимаго и меньше его; 4) изъ примѣненія общаго правила къ частнымъ случаямъ вывести правила умноженія цѣлаго числа на дробь, дроби на дробь и умноженія смѣшанныхъ чиселъ; 5) выяснить, что перестановка множителей не мѣняетъ произведенія и другіе законы умноженія; 6) упражнять дѣтей въ составленіи задачъ на различные случаи умноженія.

При выполненіи умноженія надо пріучать дѣтей сперва обозначать всѣ дѣйствія съ цѣлыми числами, входящія въ это умноженіе, затѣмъ въ этомъ обозначеніи производить возможныя сокращенія и уже послѣ этого производить дѣйствія; напр.

$$4\frac{4}{11}\times 2\frac{4}{9}=\frac{\overset{16}{\cancel{48}}\cdot\overset{2}{\cancel{22}}}{\underset{1}{\cancel{11}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

306. Если преподаватель пожелаетъ дать опредѣленіе Коши, которое убобнѣе выразить въ слѣдующей формѣ: умножить значитъ надъ первымъ даннымъ числомъ произвести послѣдовательно всѣ тѣ дѣйствія, которыя послѣдовательно же слѣдуетъ произвести надъ единицей, чтобы получить другое данное число, то можно начать съ слѣдующаго ряда упражненій:

259) Какія дѣйствія надо произвести надъ единицей, чтобы получить: 1) 12, 2) $^3/_4$, 3) $^5/_8$, 4) $3^1/_3$, 5) $5^5/_7$?

260) Надъ числами 6, $^5/_{12}$, $3^1/_2$ произвести тѣ же дѣйствія, какія произведены надъ единицей для составленія изъ нея числа 4.

261) Надъ тѣми же числами произвести дѣйствія, какія произведены надъ единицей для составленія изъ нея $^3/_5$.

262) Надъ числами 16, $1^3/_5$, $^8/_{15}$ произвести тѣ же дѣйствія, какія произведены надъ единицей для составленія изъ нея $3^3/_5$.

Затѣмъ слѣдуетъ выяснить дѣтямъ, что и при умноженіи на цѣлое число, и при умноженіи на дробь всѣ дѣйствія производятся надъ множимымъ, для чего стоитъ только сопоставить примѣры:

$16\times 5=16+16+16+16+16=80$; $16\times\frac{5}{8}=(16:8)\times 5=2\times 5=10$

и заставить дѣтей разсказать, надъ какимъ числомъ въ обоихъ примѣрахъ производятъ всѣ дѣйствія. Изъ рѣшенія вопроса, зачѣмъ въ умноженіи нуженъ множитель, дѣти выведутъ, что множитель показываетъ, какія именно дѣйствія слѣдуетъ производить надъ множимымъ. Наконецъ, изъ сопоставленія дѣйствій, производимыхъ надъ множимымъ, съ дѣйствіями, которыя слѣдуетъ произвести надъ единицей для составленія множителя, дѣти составятъ и вторую часть приведеннаго общаго опредѣленія.

Для примѣра приводимъ выводъ одного правила.

Чтобы $^3/_5$ умножить на $^4/_7$, надо надъ $^3/_5$ произвести тѣ же дѣйствія, что и надъ единицей для полученія изъ нея $^4/_7$; для полученія же $^4/_7$ надо единицу раздѣлить на 7 долей и одну

такую долю умножить на 4; поэтому и $^3/_5$ надо раздѣлить на 7 долей и полученную долю $\frac{3}{5.7}$ умножить на 4; получимъ $\frac{3.4}{5.7}$ и слѣд. $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{3.4}{5.7}$.

Отсюда слѣдуетъ правило: чтобы перемножить двѣ дроби, надо произведеніе ихъ числителей раздѣлить на произведеніе знаменателей.

Повторяемъ еще разъ, что мы всю эту работу считаемъ излишней.

307. Дѣленіе дробей. Если для умноженія дробей можно дать самостоятельное опредѣленіе, то построить такимъ же путемъ ученіе о дѣленіи дробей — значитъ не только ученіе о дробяхъ совершенно разобщить съ ученіемъ о цѣлыхъ числахъ, но и въ самомъ ученіи о дробяхъ нарушить тѣ соотношенія между дѣйствіями, которыя установлены между ними въ цѣлыхъ числахъ и сохраняются при всѣхъ обобщеніяхъ понятія о числѣ. Правильнѣе разсматривать дѣленіе, какъ дѣйствіе обратное умноженію. Всякій иной способъ представляетъ много неудобствъ. Весьма трудно выбрать такое самостоятельное опредѣленіе дѣленія, которое охватывало бы всѣ вопросы, рѣшаемые этимъ дѣйствіемъ. Сдѣланныя въ этомъ отношеніи попытки далеко нельзя признать удачными. Наиболѣе общее изъ самостоятельныхъ опредѣленій дѣленія представляетъ, такъ сказать, обращеніе опредѣленія умноженія и можетъ быть выражено въ слѣдующихъ словахъ: раздѣлить одно число на другое значитъ надъ дѣлимымъ произвести послѣдовательно тѣ дѣйствія, которыя слѣдуетъ послѣдовательно же произвести надъ дѣлителемъ, чтобы въ результатѣ получить единицу. На нашъ взглядъ опредѣленіе дѣленія, какъ дѣйствія обратнаго умноженію, гораздо понятнѣе для дѣтей и легче примѣняется къ выводу всѣхъ правилъ дѣленія. Иногда говорятъ, что раздѣлить значитъ найти такое число, изъ котораго дѣлимое составлено точно такъ же, какъ дѣлитель составленъ изъ единицы. Это опредѣленіе разсматриваетъ только одинъ случай дѣленія (опредѣленіе множимаго по произведенію и множителю), и потому должно быть дополнено, чтобы сдѣлаться равносильнымъ опредѣленію дѣленія, какъ дѣйствія обратнаго умноженію.

Наконецъ, многіе учебники разсматриваютъ дѣленіе на дробь, какъ дѣленіе на частное, хотя прямо этого и не выражаютъ. Какъ мы уже говорили выше, такой взглядъ на дѣйствія съ дробями умѣстенъ тогда, когда дробь разсматривается, какъ частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Какое бы самостоятельное опредѣленіе дѣленію дробей ни давали, необходимо изъ каждаго такого опредѣленія вывести, что дѣленіе представляетъ дѣйствіе обратное умноженію и подчиняется тѣмъ же законамъ, какъ и дѣленіе цѣлыхъ чиселъ. Слѣд., если бы и удалось составить, болѣе или менѣе легкое для дѣтей и охватывающее всѣ случаи, самостоятельное опредѣленіе дѣленія, мы все-таки не избѣгнемъ въ концѣ концовъ тѣхъ трудностей, которыя соединены съ разсмотрѣніемъ дѣленія, какъ дѣйствія обратнаго умноженію.

Опредѣленіе дѣленія, какъ дѣйствія обратнаго умноженію, можетъ быть дано въ слѣдующихъ выраженіяхъ: раздѣлить значитъ по произведенію и одному множителю найти другого множителя, или: раздѣлить значитъ, зная произведеніе и одного производителя, найти другого производителя. Вся трудность дѣленія заключается не въ усвоеніи дѣтьми этого опредѣленія, а въ выводѣ изъ него вопросовъ, которые могутъ рѣшаться дѣленіемъ, и правилъ этого дѣйствія.

308. Прежде всего слѣдуетъ разобрать съ дѣтьми вопросы, которые могутъ рѣшаться дѣленіемъ.

Приводимъ всѣ эти вопросы съ рѣшеніемъ наиболѣе трудныхъ изъ нихъ.

263) 1) Найти 24-ю долю 15-ти.—2) Какую часть 18 составляетъ отъ 45-ти?—3) Сколько разъ 6 содержится въ 20-ти?—4) Какую часть $^4/_7$ составляетъ отъ 8-ми?—5) Найти число, $^3/_5$ котораго составляютъ 12?—6) Найти число, $^3/_7$ котораго равны $^{15}/_{28}$?—7) Сколько разъ $^3/_4$ содержится въ 12-ти?—8) Сколько разъ $^3/_{100}$ содержится въ $^9/_{25}$?—9) Какую часть $^3/_{32}$ составляютъ отъ $^9/_{16}$?

Рѣшеніе. 2) Одна единица составляетъ $^1/_{45}$ отъ 45-ти, а 18 единицъ составляютъ $^{18}/_{45}$, или по сокращеніи $^2/_5$ отъ 45-ти.—4) Единица отъ 8-ми составляетъ $^1/_8$, $^1/_7$ отъ 8-ми составляетъ долю въ 7 разъ мельче, т.-е. $^1/_{56}$; а $^4/_7$ составляютъ долю въ 4 раза крупнѣе, т.-е. $^4/_{56}$ или $^1/_{14}$.—8) $^1/_{100}$ въ единицѣ содержится 100 разъ; въ $^1/_{25}$ она содержится въ 25 разъ меньше, т.-е. $100 : 25 = 4$ раза; въ $^9/_{25}$ она содержится въ 9 разъ больше, т.-е. $4 \times 9 = 36$ разъ; а $^3/_{100}$ въ $^9/_{25}$ содержится въ 3 раза меньше, т.-е. $36 : 3 = 12$ разъ.—9) $^1/_{32}$ отъ $^1/_{16}$ составляетъ $^1/_2$; $^1/_{32}$ отъ $^9/_{16}$ составляетъ долю въ 9 разъ мельче, т.-е. $^1/_2 : 9 = {}^1/_{18}$; а $^3/_{32}$ отъ $^9/_{16}$ составляютъ долю въ 3 раза крупнѣе, т.-е. $^1/_{18} \times 3 = {}^1/_6$.

Всѣ эти вопросы представляютъ частные случаи двухъ общихъ вопросовъ: 1) по произведенію и множителю найти множимое и 2) по произведенію и множимому найти множителя. Первый вопросъ для цѣлаго дѣлителя (даннаго множителя) равносиленъ опредѣленію одной изъ столькихъ равныхъ частей дѣлимаго, сколько единицъ въ дѣлителѣ, а для дробнаго—опредѣленію числа, часть котораго, выражаемая дѣлителемъ, равна дѣлимому. Второй вопросъ при цѣломъ частномъ (искомомъ множителѣ) равносиленъ вопросу, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, а при дробномъ частномъ—вопросу, какую часть дѣлимое составляетъ отъ дѣлителя. Дѣленіе отвлеченныхъ чиселъ всегда рѣшаетъ два вопроса, изъ которыхъ одинъ относится къ первой группѣ, а другой ко второй, потому что въ дѣленіи отвлеченныхъ чиселъ дѣлителя по произволу можно разсматривать или какъ данное множимое, или какъ даннаго множителя. Дѣленіе именованныхъ чиселъ рѣшаетъ одинъ вопросъ: когда дѣлитель—число отвлеченное, это будетъ одинъ изъ вопросовъ первой группы; когда дѣлитель—число именованное, это будетъ одинъ изъ вопросовъ второй группы.

309. Въ каждомъ случаѣ дѣленія надо установить, къ какимъ вопросамъ онъ сводится; а затѣмъ изъ рѣшенія этихъ вопросовъ можно вывести соотвѣтствующее правило.

Для дѣленія цѣлаго числа на цѣлое въ примѣненіи къ примѣру $4 : 6$ первый вопросъ можетъ быть выраженъ въ формѣ: какое число надо умножить на 6, чтобы получить 4, т.-е. $?\times 6 = 4$, иначе: какое число надо взять слагаемымъ 6 разъ, чтобы получить 4, что можно записать въ слѣдующемъ видѣ:

$$?+?+?+?+?+?=4.$$

Отсюда уже ясно, что требуется опредѣлить 6-ю часть 4-хъ, или вообще одну изъ столькихъ равныхъ частей дѣлимаго, сколько единицъ въ дѣлителѣ. Рѣшается вопросъ слѣдующимъ образомъ: 6-я доля единицы есть $^1/_6$, шестая доля другой единицы тоже $^1/_6$, шестая доля третьей единицы тоже $^1/_6$ и наконецъ 6-я доля четвертой единицы тоже $^1/_6$; слѣд. 6-я доля 4-хъ единицъ есть $^4/_6$. Рѣшеніе записывается въ слѣдующей формѣ:

$$4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Второй вопросъ для того же дѣленія можно выразить въ слѣдующихъ словахъ: на какое число надо умножить 6, чтобы получить 4, т.-е.

$$6 \times ? = 4$$

Такъ какъ отъ умноженія 6-ти на 1-цу получается 6, а намъ надо получить только 4, то 6 надо умножить на число, меньшее 1-цы, и слѣд. мы рѣшаемъ вопросъ: на какую дробь надо умножить 6, чтобы получить 4, т.-е. какую часть 4 составляетъ отъ 6-ти. Во-

просъ рѣшается слѣдующимъ путемъ: 1-ца отъ 6 составляетъ $^1/_6$, а 4 единицы составятъ $^4/_6$. Рѣшеніе записывается такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Изъ сопоставленія рѣшеній обоихъ вопросовъ выводится правило: частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ есть дробь, числитель которой—дѣлимое, а знаменатель—дѣлитель.

Тѣ же вопросы рѣшаетъ и дѣленіе дроби на цѣлое число; потому и разбирается оно совершенно такъ же.

Дѣленіе цѣлаго числа на дробь приводитъ къ рѣшенію вопросовъ: 1) опредѣлить число, часть котораго, указываемая дѣлителемъ, составляетъ дѣлимое и 2) сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ. При рѣшеніи перваго вопроса надо указать, что дѣленіемъ дѣлимаго на числителя опредѣляется одна доля искомаго числа, а умноженіемъ полученнаго частнаго на знаменателя опредѣляется все искомое число; что при рѣшеніи второго вопроса умноженіемъ дѣлимаго на знаменателя дѣлителя опредѣляется, сколько разъ одна доля, изъ которыхъ состоитъ дѣлитель, содержится въ дѣлимомъ, а дѣленіемъ полученнаго числа на числителя дѣлителя опредѣляется, сколько разъ весь дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.

Дѣленіе дроби на дробь не даетъ новыхъ вопросовъ сравнительно съ предыдущими случаями и разбирается тѣмъ же путемъ.

Разсмотрѣвши всѣ случаи дѣленія, полезно указать, что правило дѣленія на дробь можетъ быть выражено въ словахъ: чтобы раздѣлить на дробь, надо дѣлимое умножить на обращеннаго дѣлителя.

Въ заключеніе должно заставить дѣтей перечислить всѣ вопросы, которые могутъ рѣшаться дѣленіемъ, съ указаніемъ, какіе изъ нихъ рѣшаются дѣленіемъ на цѣлое число, какіе—дѣленіемъ на дробь и какіе—и дѣленіемъ на цѣлое число, и дѣленіемъ на дробь. Кромѣ того, необходимо упражнять дѣтей 1) въ правильной постановкѣ этихъ вопросовъ для каждаго случая дѣленія, 2) въ составленіи задачъ на каждый случай дѣленія, 3) въ опредѣленіи значенія дѣлителя и частнаго. Для всего этого читатель найдетъ упражненія въ соотвѣтствующемъ отдѣлѣ нашего задачника.

При дѣленіи на смѣшанное число надо указать, что здѣсь нельзя какъ въ умноженіи, отдѣльно раздѣлить дѣлимое на цѣлое число и на дробь.

При выполненіи дѣленія такъ же, какъ и при выполненіи умноженія, всѣ дѣйствія сперва обозначаются, потомъ производятся въ этихъ обозначеніяхъ возможныя сокращенія и только послѣ этого вычисленія выполняются.

310. За упражненіями въ дѣленіи дробей помѣщены въ нашемъ задачникѣ упражненія во всѣхъ дѣйствіяхъ съ дробями. Нѣтъ надобности всѣ эти упражненія непремѣнно продѣлывать съ дѣтьми. Количество упражненій и сравнительная ихъ трудность должны опредѣляться количествомъ имѣющагося въ распоряженіи преподавателя времени и степенью развитія дѣтей.

Приводимъ нѣкоторыя упражненія.

264) Какъ измѣнится частное, если къ дѣлимому прибавимъ $^3/_4$ дѣлимаго, а къ дѣлителю $2^1/_2$ дѣлителя?—если отъ дѣлимаго отнимемъ $^7/_{25}$ дѣлимаго, а къ дѣлителю прибавимъ $^{11}/_{25}$ дѣлителя?

Рѣшеніе. Чтобы къ дѣлимому прибавить $^3/_4$ дѣлимаго, можно дѣлимое умножить на $1^3/_4$, а отъ этого и частное умножится на $1^3/_4$; чтобы къ дѣлителю прибавить $2^1/_2$ дѣлителя, можно дѣлителя умножить на $3^1/_2$, а отъ этого частное раздѣлится на $3^1/_2$. Если же частное умножится на $1^3/_4$ и раздѣлится на $3^1/_2$, то на самомъ дѣлѣ оно раздѣлится на $3^1/_2 : 1^3/_4$, т.-е. на 2.—Когда отъ дѣлимаго отнимемъ $^7/_{25}$ дѣлимаго, то останется $^{18}/_{25}$ дѣлимаго, а чтобы получить $^{18}/_{25}$ дѣлимаго, надо его умножить на $^{18}/_{25}$; отъ этого и частное умножится на $^{18}/_{25}$. Чтобы къ дѣлителю прибавить $^{11}/_{25}$ дѣлителя, можно дѣлителя умножить на $1^{11}/_{25}$; отъ этого частное раздѣлится на $1^{11}/_{25}$. Если же частное умножится на $^{18}/_{25}$ и раздѣлится на $1^{11}/_{25}$, то на самомъ дѣлѣ оно умножится на $^{18}/_{25} : 1^{11}/_{25}$, т.-е. на $^1/_2$.

265) Частное отъ дѣленія двухъ чиселъ меньше дѣлимаго на $^7/_{25}$ дѣлимаго; найти дѣлителя.

Рѣшеніе. Если частное меньше дѣлимаго на $^7/_{25}$ дѣлимаго, то оно составляетъ $1-^7/_{25}=^{18}/_{25}$ дѣлимаго. Чтобы получить $^{18}/_{25}$ какого-либо числа, надо это число умножить на $^{18}/_{25}$, что равносильно дѣленію на обращеннаго множителя, т.-е. на $1 : ^{18}/_{25}=1^7/_{18}$; слѣд. дѣлитель есть $1^7/_{18}$.

266) Произведеніе двухъ чиселъ равно $11^1/_9$; если отъ одного изъ множителей отнимемъ $6^3/_4$, то произведеніе уменьшится въ $1^9/_{16}$ разъ. Найти оба числа.

Рѣшеніе. Послѣ измѣненія множителя произведеніе обратилось въ $11^1/_9 : 1^9/_{16}=7^1/_9$ и стало меньше первоначальнаго на $11^1/_9-7^1/_9=4$ единицы. А мы знаемъ, что если отъ одного изъ множителей отнимемъ $6^3/_4$, то отъ произведенія столько же разъ отнимется другой множитель; слѣд. этотъ множитель въ 4 содержится $6^3/_4$ разъ, и потому равенъ $4 : 6^3/_4=^{16}/_{27}$. Другой множитель равенъ $11^1/_9 : ^{16}/_{27}=18^3/_4$.

267) Какое число отъ дѣленія на $12^1/_2$ уменьшается на $6^9/_{10}$?—отъ дѣленія на $^6/_{11}$ увеличивается на $5^1/_3$?

Рѣшеніе. Дѣленіе искомаго числа на $12\frac{1}{2}$ равносильно умноженію его же на $\frac{2}{25}$; слѣд. $\frac{2}{25}$ иск. числа меньше самого искомаго числа на $6\frac{9}{10}$, и въ $6\frac{9}{10}$ заключается поэтому $1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$ иск. числа. Искомое число равно $6\frac{9}{10} : \frac{23}{25}=7\frac{1}{2}$.—При дѣленіи на $\frac{6}{11}$ дѣлимое составляетъ $\frac{6}{11}$ частнаго; по условію же задачи выходитъ, что частное больше $\frac{6}{11}$ его частей на $5\frac{1}{3}$ единицъ; слѣд. въ $5\frac{1}{3}$ заключается $1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$ частнаго; $\frac{1}{11}$ частнаго равна $5\frac{1}{3} : 5=\frac{16}{15}$, а $\frac{6}{11}$ частнаго, т.-е. дѣлимое, равно $\frac{16}{15}\times 6=6\frac{2}{5}$.

268) $\left[\left(1-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{21}\right)+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{31}\right)+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{41}\right)+\left(\frac{1}{41}-\frac{1}{51}\right)\right] : \frac{15}{17}=1\frac{1}{9}$.

Рѣшеніе. Легко видѣть, что вся сумма въ квадратныхъ скобкахъ равна $1-\frac{1}{51}$, т.-е. $\frac{50}{51}$. Остается $\frac{50}{51}$ раздѣлить на $\frac{15}{17}$; получимъ:

$$\frac{50}{51} : \frac{15}{17}=\frac{\overset{10}{\cancel{50}}\cdot\overset{1}{\cancel{17}}}{\underset{3}{\cancel{51}}\cdot\underset{3}{\cancel{15}}}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}.$$

269) $\left[\frac{12\frac{4}{5}\times 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11} : \frac{8}{33}}{2\frac{4}{7} : \frac{3}{35}} : \frac{28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7}+6\frac{3}{5}\times 1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{80} : 1\frac{7}{20}}\right]\times 1\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$.

Рѣшеніе.

1) $12\frac{4}{5}\times 3\frac{3}{4}=\frac{\overset{16}{\cancel{64}}\cdot\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\times\underset{1}{\cancel{4}}}=48$; 2) $4\frac{4}{11} : \frac{8}{33}=\frac{\overset{6}{\cancel{48}}\cdot\overset{3}{\cancel{33}}}{\underset{1}{\cancel{11}}\cdot\underset{1}{\cancel{8}}}=18$.

3) $48-18=30$; 4) $2\frac{4}{7} : \frac{3}{35}=\frac{\overset{6}{\cancel{18}}\cdot\overset{5}{\cancel{35}}}{\underset{1}{\cancel{7}}\times\underset{1}{\cancel{3}}}=30$; 5) $30 : 30=1$;

6) $28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7}=\frac{\overset{3}{\cancel{144}}\cdot 7}{5\cdot\underset{2}{\cancel{96}}}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10}$; $\begin{array}{c|c|c}144 & 96 & 48\\ \hline 48 & 0 & \end{array}$;

7) $6\frac{3}{5}\times 1\frac{1}{2}=\frac{33\times 3}{5\cdot 2}=\frac{99}{10}=9\frac{9}{10}$; 8) $2\frac{1}{10}+9\frac{9}{10}=12$;

9) $1\frac{1}{80} : 1\frac{7}{20}=\frac{\overset{3}{\cancel{81}}\cdot\overset{1}{\cancel{20}}}{\underset{4}{\cancel{80}}\cdot\underset{1}{\cancel{27}}}=\frac{3}{4}$; 10) $12 : \frac{3}{4}=16$;

11) $1 : 16=\frac{1}{16}$; 12) $\frac{1}{16}\times 1\frac{3}{5}=\frac{\overset{1}{\cancel{1}}\cdot\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{2}{\cancel{16}}\cdot 5}=\frac{1}{10}$.

270) $1-\left[\left(3\frac{5}{14}-\frac{1\frac{11}{49}}{?\times\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}}\right)\times\frac{12}{55}+1\frac{3}{85}\right] : 5\frac{14}{17}=\frac{5}{7}$.

Рѣшеніе.

1) $1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2}{7}\times 5\frac{14}{17}=\frac{2\times 99}{7\times 17}=\frac{198}{119}=1\frac{79}{119}$;

3) $1\frac{79}{119}-1\frac{3}{85}=\frac{395-21}{595}=\frac{374}{595}=\frac{\overset{17}{\cancel{374}}}{\underset{35}{\cancel{595}}}=\frac{22}{35}$; $\begin{array}{c|c|c|c|c|c}595 & 374 & 221 & 153 & 68 & 17\\ \hline 221 & 153 & 68 & 17 & 0 & \end{array}$;

4) $\frac{22}{35} : \frac{12}{55}=\frac{\overset{11}{\cancel{22}}\cdot\overset{11}{\cancel{55}}}{\underset{7}{\cancel{35}}\times\underset{6}{\cancel{12}}}=\frac{121}{42}=2\frac{37}{42}$;

5) $3\frac{5}{14}-2\frac{37}{42}=\frac{57-37}{42}=\frac{\overset{2}{\cancel{20}}}{42}=\frac{10}{21}$; 6) $1\frac{11}{49} : \frac{10}{21}=\frac{\overset{6}{\cancel{60}}\cdot\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{7}{\cancel{49}}\cdot\underset{1}{\cancel{10}}}=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$;

6) $2\frac{4}{7}+47\frac{3}{7}=50$; 8) $50 : \frac{25}{38}=76$.

271) Найти число, $\frac{3}{8}$ котораго вмѣстѣ съ $16\frac{2}{3}$ единицы даютъ столько же, сколько $\frac{7}{12}$ этого числа безъ $4\frac{1}{6}$ единицы.

Рѣшеніе. Чтобы сравнять $\frac{3}{8}$ и $\frac{7}{12}$ искомаго числа, надо не только къ $\frac{3}{8}$ его придать $16\frac{2}{3}$ единицы, но и отъ $\frac{7}{12}$ его отнять $4\frac{1}{6}$ единицы; поэтому $\frac{7}{12}$ иск. числа больше $\frac{3}{8}$ его на $16\frac{2}{3}+4\frac{1}{6}=20\frac{5}{6}$ единицы. А $\frac{7}{12}-\frac{3}{8}=\frac{5}{24}$; слѣд. въ $\frac{5}{24}$ иск. числа заключается $20\frac{5}{6}$ единицы и все иск. число равно $20\frac{5}{6} : \frac{5}{24}=100$.

272) Найти число, которое давало бы цѣлыя и первыя между собою частныя при дѣленіи на каждую изъ дробей: $\frac{77}{765}$, $\frac{55}{612}$ и $\frac{44}{459}$.

Рѣшеніе. Числитель иск. числа долженъ быть наим. кратнымъ числителей данныхъ дробей, а знаменатель—общимъ наиб. дѣлителемъ знаменателей. Искомое число есть $10\frac{10}{153}$.

273) Купецъ имѣлъ два одинаковыхъ куска сукна. Треть перваго куска онъ продалъ одному покупателю по $3\frac{1}{4}$ руб. за аршинъ, $\frac{13}{18}$ остатка другому по 3 руб. за аршинъ, а остальную часть третьему покупателю по $2\frac{11}{20}$ руб. за аршинъ. Весь же второй кусокъ продалъ по одной цѣнѣ и получилъ на немъ столько же прибыли, что и на первомъ. Почемъ купецъ продавалъ второй кусокъ?

ОГИЗ

Рѣшеніе. По 3 р. за аршинъ купецъ продалъ изъ перваго куска $^{2}/_{3}\times{}^{13}/_{18}={}^{13}/_{27}$, а по $2^{11}/_{20}$ руб. за аршинъ $^{2}/_{3}\times{}^{5}/_{18}={}^{5}/_{27}$ куска. На 1-мъ кускѣ купецъ получилъ бы точно такую же прибыль, если бы изъ каждаго арш. этого куска $^{1}/_{3}$ арш. продавалъ по $3^{1}/_{4}$ руб., $^{13}/_{27}$ арш. по 3 руб. и $^{5}/_{27}$ арш. по $2^{11}/_{20}$ руб. за аршинъ, т.-е. если бы бралъ за каждый арш. $3^{1}/_{4}\times{}^{1}/_{3}+3\times{}^{13}/_{27}+2^{11}/_{20}\times{}^{5}/_{27}=$ $=3$ руб. Такъ какъ во второмъ кускѣ столько же аршинъ, сколько и въ первомъ, и купленъ онъ по той же цѣнѣ, что и первый, то второй кусокъ купецъ продавалъ по 3 руб.

274) За двѣ корзины ягодъ, изъ которыхъ въ одной было на $10^{1}/_{8}$ фунта больше ягодъ, чѣмъ въ другой, торговка выручила поровну. Сколько ягодъ было въ каждой корзинѣ, если изъ первой корзины она продавала ягоды по 45 коп за 2 фунта, а изъ второй по 63 коп. за 4 фунта.

Рѣшеніе. Изъ корзины, въ которой было меньше ягодъ, торговка продавала ягоды по $45:2=22^{1}/_{2}$ коп., а изъ другой по $63:4=15^{3}/_{4}$ коп. за фунтъ. Если бы въ первой корзинѣ было столько же ягодъ, что и во второй, то за нее торговка выручила бы на $22^{1}/_{2}\times10^{1}/_{8}=2$ р. $27^{13}/_{16}$ коп. больше, чѣмъ за вторую. Эта разность произошла бы тогда отъ того, что изъ первой корзины торговка продавала ягоды на $22^{1}/_{2}-15^{3}/_{4}=6^{3}/_{4}$ коп. за фунтъ дороже, чѣмъ изъ второй; слѣд. тогда въ обѣихъ корзинахъ было бы по $227^{13}/_{16}:6^{3}/_{4}=33^{3}/_{4}$ фунт. Въ дѣйствительности же въ первой корзинѣ было $33^{3}/_{4}-10^{1}/_{8}=23^{5}/_{8}$ фунт.

275) Путешественникъ проѣхалъ 510 верстъ въ $22^{7}/_{15}$ часа. изъ которыхъ 16 ч. 40 м. ѣхалъ по желѣзной дорогѣ, а остальное время на пароходѣ. Сколько верстъ онъ проѣхалъ по желѣзной дорогѣ и сколько на пароходѣ, если пароходъ шелъ на $13^{3}/_{4}$ версты въ часъ медленнѣе поѣзда желѣзной дороги?

Рѣшеніе. Если бы путешественникъ всѣ $22^{7}/_{15}$ час. ѣхалъ на пароходѣ, то онъ проѣхалъ бы на $13^{3}/_{4}\times16^{2}/_{3}=229^{1}/_{6}$ версты меньше, чѣмъ въ дѣйствительности, т.-е. $510-229^{1}/_{6}=280^{5}/_{6}$ версты. Скорость парохода равна $280^{5}/_{6}:22^{7}/_{15}=12^{1}/_{2}$ версты въ часъ, а скорость поѣзда равна $12^{1}/_{2}+13^{3}/_{4}=26^{1}/_{4}$ версты въ часъ.

276) Чтобы доѣхать изъ своей деревни въ городъ, помѣщику надо проѣхать $243^{1}/_{2}$ версты, частію на лошадяхъ и частію по желѣзной дорогѣ. Выѣхавъ изъ дому въ $8^{3}/_{4}$ час. утра, онъ пріѣхалъ въ городъ въ половинѣ девятаго вечеромъ, при чемъ по желѣзной дорогѣ ѣхалъ въ теченіе 9 часовъ. Съ какой скоростью онъ ѣхалъ на лошадяхъ и съ какой по желѣзной дорогѣ, если первая скорость въ $2^{2}/_{3}$ раза меньше второй?

Рѣшеніе. Помѣщикъ провелъ въ дорогѣ $12-{}^{1}/_{4}=11^{3}/_{4}$ часа, при чемъ на лошадяхъ ѣхалъ въ теченіе $11^{3}/_{4}-9=2^{3}/_{4}$ часа. Чтобы проѣхать по желѣзной дорогѣ то разстояніе, которое помѣщикъ проѣхалъ на лошадяхъ въ $2^{3}/_{4}$ часа, времени потребовалось бы въ $2^{2}/_{3}$ раза меньше, т.-е. $2^{3}/_{4}:2^{2}/_{3}=1^{7}/_{48}$ час. Слѣдоват. всѣ $243^{1}/_{2}$ версты помѣщикъ могъ проѣхать по желѣзной дорогѣ въ $9+1^{7}/_{48}=10^{7}/_{48}$ часа. Скорость ѣзды по желѣзной дорогѣ равна $243^{1}/_{2}:10^{7}/_{48}=24$ верст. въ часъ, а на лошадяхъ $24:2^{2}/_{3}=10$ верст. въ часъ.

277) Чтобы окончить работу къ назначенному часу, нанято было 18 работниковъ; но семеро изъ нихъ не явились на работу, и потому остальнымъ пришлось работать на $8^{1}/_{6}$ час. дольше назначеннаго часа. Во сколько времени была бы окончена работа, если бы работали всѣ 18 человѣкъ?

Рѣшеніе. Къ назначенному часу явившіеся на работу $18-7=$ $=11$ работниковъ окончили $^{11}/_{18}$ работы; слѣд. въ $8^{1}/_{6}$ час. они исполнили $1-{}^{11}/_{18}={}^{7}/_{18}$ работы. Одинъ работникъ въ $8^{1}/_{6}$ час. исполнялъ $^{7}/_{18}:11={}^{7}/_{198}$ раб.; 18 работниковъ исполнили бы въ $8^{1}/_{6}$ час. $^{7}/_{198}\times18={}^{7}/_{11}$ работы, а всю работу могли бы исполнить въ $8^{1}/_{6}:{}^{7}/_{11}=12^{5}/_{6}$ час.

278) Между двумя городами проведена желѣзная дорога. Поѣздъ изъ перваго города выходитъ въ 3 час. 30 мин. пополудни и приходитъ во второй въ 10 час. 10 мин. вечера; изъ второго города поѣздъ выходитъ въ 1 часъ 10 мин. и приходитъ въ первый въ 6 ч. 30 мин. пополудни. Въ которомъ часу поѣзда встрѣчаются?

Рѣшеніе. Поѣздъ изъ перваго города проходитъ все разстояніе въ 10 ч. 10 м.—3 ч. 30 м.=6 ч. 40 м.=$6^{2}/_{3}$ час., а въ часъ дѣлаетъ $1:6^{2}/_{3}={}^{3}/_{20}$ всего разстоянія; поѣздъ изъ второго города все разстояніе проходитъ въ 6 ч. 30 м.—1 ч. 10 м.=5 ч. 20 м.= $=5^{1}/_{3}$ час., а въ часъ дѣлаетъ $1:5^{1}/_{3}={}^{3}/_{16}$ всего разстоянія. Поѣздъ изъ второго города вышелъ на 3 ч. 30 м.—1 ч. 10 м.=2 ч. 20 м.= $=2^{1}/_{3}$ час. раньше, чѣмъ изъ перваго, и успѣлъ до выхода перваго поѣзда пройти $^{3}/_{16}\times2^{1}/_{3}={}^{7}/_{16}$ всего разстоянія, слѣд. въ моментъ выхода перваго поѣзда оба поѣзда находились другъ отъ друга на $1-{}^{7}/_{16}={}^{9}/_{16}$ всего разстоянія между городами. Въ часъ поѣзда сближаются на $^{3}/_{20}+{}^{3}/_{16}={}^{27}/_{80}$ всего разстоянія, слѣд. они встрѣтились черезъ $^{9}/_{16}:{}^{27}/_{80}=1^{2}/_{3}$ час.=1 ч. 40 м. послѣ выхода перваго поѣзда, т.-е. въ 3 ч. 30 м.+1 ч. 40 м.=5 час. 10 мин. пополудни.

279) Между двумя городами 150 верстъ. Въ 9 час. утра изъ перваго города выѣхалъ курьеръ, а въ 10 час. 12 мин. того же утра, на встрѣчу ему, изъ другого города выѣхалъ

путешественникъ, который проѣзжалъ въ часъ на $2^1/_2$ версты меньше курьера и встрѣтился съ курьеромъ въ 3 часа пополудни. По скольку верстъ въ часъ проѣзжалъ курьеръ?—путешественникъ?—гдѣ они встрѣтились?

Рѣшеніе. Курьеръ до мѣста встрѣчи ѣхалъ 6 час., а путешественникъ 15 час.—10 час. 12 мин.$=4^4/_5$ час. Если бы курьеръ ѣхалъ съ тою же скоростью, что и путешественникъ, то онъ проѣхалъ бы на $2^1/_2 \times 6=15$ верстъ менѣе, чѣмъ въ дѣйствительности; тогда, чтобы курьеръ могъ встрѣтиться съ путешественникомъ въ то же самое время, что и въ дѣйствительности, разстояніе между городами должно быть 150—15=135 верстъ. Чтобы отъ мѣста встрѣчи доѣхать до другого города, путешественнику тогда потребовалось бы столько же времени, сколько и курьеру, чтобы доѣхать отъ своего города до мѣста встрѣчи, т.-е. 6 часовъ, а для проѣзда всѣхъ 135 верстъ ему нужно $6+4^4/_5=10^4/_5$ часа. Путешественникъ ѣхалъ со скоростью $135:10^4/_5=12^1/_2$ верстъ въ часъ, а курьеръ со скоростью $12^1/_2+2^1/_2=15$ верстъ въ часъ. Теперь легко рѣшить и второй вопросъ задачи.

280) Найти такое число, чтобы разность между нимъ и произведеніемъ его на $^5/_{12}$ была равна 35.—Чтобы разность между нимъ и частнымъ отъ дѣленія его на $^7/_{16}$ была равна $5^3/_8$.

Рѣшеніе. Произведеніе иск. числа на $^5/_{12}$ составляетъ $^5/_{12}$ этого числа; слѣд., въ разности 35 заключается $1-^5/_{12}=^7/_{12}$ иск. числа. Иск. число равно $35:^7/_{12}=60$. При дѣленіи на $^7/_{16}$ частное составляетъ $^{16}/_7$ дѣлимаго; слѣд., въ $5^3/_8$ заключается $^{16}/_7-1=^9/_7$ иск. числа. Иск. число равно $5^5/_8:^9/_7=4^3/_8$.

281) Разность двухъ чиселъ $6^2/_3$; если уменьшаемое раздѣлить на $^6/_7$, а вычитаемое оставить безъ перемѣны, то въ разности получится 10. Найти эти числа.

Рѣшеніе. Разность увеличилась на $10-6^2/_3=3^1/_3$ единицы, потому что къ уменьшаемому отъ дѣленія его на $^6/_7$ (равносильнаго умноженію на $^7/_6$) прибавилась $^1/_6$ уменьшаемаго. Слѣд., уменьшаемое равно $3^1/_3:^1/_6=20$, а вычитаемое $20-6^2/_3=13^1/_3$.

311. Десятичныя дроби. Какъ распредѣленіе курса десятичныхъ дробей, такъ и объясненія всѣхъ пріемовъ вычисленія съ ними не могутъ по существу своему много отличаться отъ изложенія этого курса въ учебникахъ. Поэтому здѣсь мы сдѣлаемъ очень немного замѣчаній относительно разработки курса десятичныхъ дробей.

Вычисленія съ десятичными числами представляютъ нѣкоторыя особенности только при письменномъ ихъ выполненіи; поэтому въ курсѣ десятичныхъ дробей по необходимости приходится на

первое мѣсто ставить пріемы письменнаго вычисленія. Какъ счисленіе десятичныхъ дробей, такъ и всѣ пріемы вычисленій съ ними, представляютъ распространеніе счисленія цѣлыхъ чиселъ и пріемовъ вычисленія съ ними; поэтому курсъ десятичныхъ дробей представляетъ прекрасное средство для повторенія всего курса ариѳметики цѣлыхъ чиселъ. Наконецъ, курсъ десятичныхъ дробей представляетъ наиболѣе удобный случай освоить учащихся съ метрической системой мѣръ.

312. Счисленіе десятичныхъ дробей должно быть начато съ установленія соотношеній между различными десятичными долями. Изъ сравненія этихъ соотношеній съ соотношеніями между единицами различныхъ разрядовъ въ цѣлыхъ числахъ дѣти легко подмѣтятъ, что десятичныя доли различныхъ разрядовъ подчиняются тѣмъ же законамъ, что и единицы различныхъ разрядовъ въ цѣлыхъ числахъ. Отсюда легко перейти къ письменному и устному выраженію десятичныхъ чиселъ. При этомъ необходимо установить соотношеніе между числомъ десятичныхъ знаковъ и числомъ нулей въ знаменателѣ и познакомить дѣтей со всѣми способами чтенія десятичныхъ чиселъ (см. „Рук. ариѳметики“).

Здѣсь же слѣдуетъ познакомить дѣтей съ преобразованіями десятичныхъ чиселъ и съ примѣненіемъ этихъ преобразованій къ сокращенію и приведенію десятичныхъ чиселъ къ одному знаменателю.

Въ бо́льшей части учебниковъ эти преобразованія даются послѣ разбора съ дѣтьми увеличенія и уменьшенія десятичныхъ дробей въ 10, 100, 1000 и т. д. разъ. Такая постановка представляетъ существенное неудобство, не позволяя правила этихъ дѣйствій прилагать ко всѣмъ десятичнымъ числамъ безъ различія, а между тѣмъ преобразованія десятичныхъ чиселъ могутъ быть разъяснены вполнѣ основательно, независимо отъ правилъ умноженія и дѣленія на 10, 100 и т. д.

313. Дѣйствія съ десятичными числами могутъ быть даны въ той же послѣдовательности, какъ и дѣйствія съ цѣлыми числами.

Сложеніе и вычитаніе едва ли требуютъ какихъ-либо замѣчаній.

Умноженіе и дѣленіе мы располагаемъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

1) умноженіе и дѣленіе на 10, 100 и т. д., на 0,1; 0,01 и т. д.; 2) умноженіе и дѣленіе на цѣлое число; 3) умноженіе и дѣленіе на десятичное число.

Первый случай умноженія и дѣленія основывается на томъ, что единица каждаго разряда отъ умноженія на 10 даетъ единицу

слѣдующаго высшаго разряда, а отъ дѣленія на 10 даетъ единицу слѣдующаго низшаго разряда.

Правило умноженія десятичныхъ чиселъ можно вывести или какъ слѣдствіе правила умноженія простыхъ дробей, или на основаніи положеній объ измѣненіяхъ произведенія при измѣненіи множителей. Полезно ознакомить дѣтей съ обоими выводами. Для выясненія второго пріема могутъ служить слѣдующія упражненія:

282) 315×18; $3{,}15 \times 18$; $3{,}15 \times 1{,}8$.

283) Имѣніе состоитъ изъ 54 дес. лѣсу, изъ столькихъ же десятинъ пахотной земли и изъ 5,4 дес. неудобной земли. За сколько оно продано, если лѣсъ пошелъ по 195 руб., пахотная земля по 19,5 руб. и неудобная по 1,95 руб. за десятину?

Правило удобнѣе формулировать въ выраженіяхъ: десятичныя числа перемножаютъ какъ цѣлыя, не обращая вниманія на запятыя, а затѣмъ въ полученномъ произведеніи отдѣляютъ запятою столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ въ обоихъ множителяхъ. Здѣсь совсѣмъ не упоминается объ обычномъ въ этомъ правилѣ откидываніи или зачеркиваніи запятыхъ во множителяхъ, которое ведетъ только къ лишнимъ помаркамъ въ записяхъ.

Дѣленіе десятичныхъ чиселъ удобнѣе всего приводить къ дѣленію на цѣлое число, для чего въ дѣлителѣ отбрасывается запятая, а въ дѣлимомъ она переносится вправо на столько знаковъ, сколько десятичныхъ знаковъ въ дѣлителѣ. Для выясненія этого пріема могутъ служить слѣдующія упражненія:

284) $2422{,}5 : 425$; $242{,}25 : 42{,}5$; $24{,}225 : 4{,}25$.

285) За остатокъ шерстяной матеріи, въ которомъ было 14 арш., и за остатокъ бархату, въ которомъ было 1,4 арш., заплачено по 4,9 руб. Что стоитъ аршинъ шерстяной матеріи?—что стоитъ арш. бархату?

Съ безконечнымъ дѣленіемъ и съ опредѣленіемъ въ этомъ случаѣ частнаго съ даннымъ приближеніемъ слѣдуетъ знакомить дѣтей при дѣленіи десятичнаго числа на цѣлое число.

314. Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя и конечныхъ десятичныхъ въ простыя. Обращеніе простой дроби, дающей конечную десятичную, сперва выполняется помощію умноженія числителя и знаменателя ея на первоначальныхъ множителей, которыхъ надо добавить въ разложеніе на первоначальныхъ множителей знаменателя простой дроби для того, чтобы въ это разложеніе множители 2 и 5 входили одинаковое число разъ.

Примѣняя этотъ способъ къ несократимымъ простымъ дробямъ знаменатели которыхъ, кромѣ 2 и 5, содержатъ иныхъ первоначальныхъ множителей, дѣти легко выведутъ правило о томъ, какія простыя дроби могутъ быть обращены въ конечныя десятичныя. Затѣмъ уже можно ознакомить дѣтей съ обращеніемъ простыхъ дробей въ десятичныя при помощи дѣленія числителя простой дроби на ея знаменателя.

Обращеніе конечныхъ десятичныхъ дробей въ простыя производится дѣтьми безъ всякихъ затрудненій.

315. Періодическія дроби и обращеніе ихъ въ простыя, безъ всякаго ущерба въ цѣльности курса, его основательности и въ развитіи учащихся, могутъ быть выпущены изъ начальнаго курса ариѳметики. Дѣйствительно, основательное построеніе ученія о періодическихъ дробяхъ требуетъ нѣкотораго знакомства съ ученіемъ о предѣлахъ, что дѣтямъ совершенно недоступно; практическое же знакомство съ періодическими дробями приноситъ весьма сомнительную пользу, потому что ни въ одной задачѣ, взятой изъ практической жизни или изъ научной области, не встрѣчаются данныя въ видѣ періодическихъ дробей. Если всѣ наши задачники снабжены достаточнымъ запасомъ задачъ съ періодическими дробями, то всѣ эти задачи составлены совершенно искусственно въ цѣляхъ дать упражненія въ обращеніи періодическихъ дробей въ простыя. По нашему мнѣнію было бы предпочтительнѣе ввести въ курсъ нѣкоторое знакомство съ приближенными вычисленіями.

Чтобы познакомить дѣтей съ періодическими дробями, преподаватель даетъ примѣры для обращенія въ десятичныя дроби такихъ простыхъ дробей, которыя обращаются въ періодическія. При этомъ пользуясь положеніемъ о составѣ точнаго дѣлителя изъ первоначальныхъ множителей, можно заставить дѣтей уяснить себѣ, когда простая дробь обращается въ конечную десятичную, когда—въ безконечную, и отъ чего получаемыя безконечныя дроби будутъ непремѣнно періодическими.

Изъ способовъ обращенія чистыхъ періодическихъ въ простыя мы предпочитаемъ приведеніе періодической дроби къ виду 0, (1); 0, (01); 0, (001) и т. д. При такомъ способѣ прежде всего надо показать, что эти періодическія дроби происходятъ отъ обращенія простыхъ дробей $^1/_9$, $^1/_{99}$, $^1/_{999}$ и т. д.

Обращеніе смѣшанной періодической дроби въ простую лучше всего производить сведеніемъ къ обращенію въ простую чистой періодической, для чего въ смѣшанной періодической дроби запятая переносится до періода.

Всѣ остальные способы сложнѣе, а научная ихъ цѣнность безъ введенія предѣловъ, нисколько не выше рекомендуемыхъ нами.

При совмѣстныхъ вычисленіяхъ съ простыми и конечными десятичными дробями можно или простыя дроби обращать въ десятичныя, если отъ этого обращенія получаются конечныя десятичныя дроби, или десятичныя дроби обращать въ простыя. Періодическія дроби всегда должно обращать въ простыя, потому что только этимъ путемъ можно избѣжать вычисленій надъ безконечными десятичными дробями.

Замѣтимъ въ заключеніе, что десятичныя дроби можно проходить параллельно съ простыми. Какъ на примѣръ такого распредѣленія, позволяемъ себѣ указать на составленную нами „Ариѳметику и Сборникъ задачъ для начальныхъ училищъ", изданіе 7-е, 1904 г.

316. Упражненія съ десятичными дробями въ нашемъ задачникѣ состоятъ изъ задачъ конкретнаго содержанія, примѣровъ на вычисленіе, ариѳметическихъ загадокъ, задачъ на измѣненія результатовъ дѣйствій при измѣненіи данныхъ, задачъ на повѣрку дѣйствій, задачъ на опредѣленіе вѣрныхъ результатовъ дѣйствій, когда даны измѣненія, сдѣланныя въ данныхъ и полученный послѣ этого результатъ или разность между полученнымъ и вѣрнымъ результатомъ, и, наконецъ, изъ задачъ на возстановленіе пропущенныхъ цифръ въ данныхъ дѣйствій и въ ихъ результатахъ. Часть упражненій относится исключительно къ десятичнымъ дробямъ, другая же часть къ совмѣстнымъ дѣйствіямъ съ простыми и десятичными дробями. Всѣ упражненія съ періодическими дробями выдѣлены въ особую группу.

Приводимъ нѣкоторыя упражненія.

286) Сумма двухъ чиселъ 13,5927; если въ бо́льшемъ числѣ переставимъ запятую влѣво на одну цифру, то получится меньшее число. Найти эти числа.

Рѣшеніе. Если меньшее число изъ бо́льшаго получается перестановкой запятой влѣво на одну цифру, то оно содержится въ бо́льшемъ числѣ 10 разъ, а слѣд., въ суммѣ 13,5927 этихъ чиселъ меньшее число содержится 10+1=11 разъ. Меньшее число равно 13,5927 : 11=1,2357, а бо́льшее 1,2357×10=12,357.

287) Найти частное отъ дѣленія суммы двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно въ 1,5 раза больше другого, на разность этихъ чиселъ.

Рѣшеніе. Въ суммѣ искомыхъ чиселъ меньшее изъ нихъ содержится 1+1,5=2,5 разъ, а въ разности 1,5—1=0,5 раза; слѣд., частное отъ дѣленія суммы на разность есть 2,5 : 0,5=5.

288) Какая ошибка произойдетъ, если въ смѣшанной періодической дроби 0,64545..., принять за начало періода цифру 5, а первую цифру періода 4 счесть непериодической?

Рѣшеніе. Никакой ошибки не произойдетъ, ибо, считая въ данной періодической дроби за начало періода, какъ и слѣдуетъ, цифру 4, мы при обращеніи въ простую должны будемъ умножить 0,64545.... и раздѣлить на 10, а считая за начало періода цифру 5, должны будемъ ту же дробь раздѣлить и умножить на 100; въ обоихъ случаяхъ величина дроби останется безъ перемѣны. И дѣйствительно, въ первомъ случаѣ мы получимъ простую дробь $\frac{645-6}{990}$, а во второмъ $\frac{6454-64}{9900}$, которая отъ первой отличается только тѣмъ, что числитель и знаменатель ея соотвѣтственно въ 10 разъ больше числителя и знаменателя второй.

289) Въ имѣніи 65,8(3) гектара земли подъ пашней и лѣсомъ. Когда срубили лѣсъ съ 1,041(6) гектар. и распахали эту землю, то подъ лѣсомъ осталось на 2,91(6) гектар. больше, чѣмъ подъ пашней. Сколько было пахотной земли?— сколько лѣсу?

Рѣшеніе. Сначала узнаемъ, сколько у помѣщика стало земли подъ лѣсомъ и подъ пашней послѣ того, какъ онъ срубилъ лѣсъ съ 1,041(6) гектар. и распахалъ эту землю; для этого надо 65,8(3) гектар. раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна была на 2,91(6) гектар. больше другой. Дальнѣйшее рѣшеніе нетрудно.

290) Мелочной лавочникъ подмочилъ керосиномъ голову сахару, стоившую ему 3 р. $25\frac{1}{2}$ коп., и потому 3,8(3) фунта изъ нея долженъ былъ выбросить, а 0,2(27) остального продать по своей цѣнѣ за 63 коп. Не смотря на это, отъ продажи всей головы онъ получилъ 1 коп. чистой прибыли. Почемъ онъ продавалъ остальную часть головы.

Рѣшеніе. Разсчитаемъ, сколько фунтовъ вѣсила вся голова. $0,2(27)=\frac{5}{22}$ проданнаго сахару стоили 63 коп., слѣд., весь проданный сахаръ стоилъ $63:\frac{5}{22}=\frac{63\cdot 22}{3}$ к. А такъ какъ вся голова стоила 3 р. $25\frac{1}{2}$ к., то проданный сахаръ составлялъ $\frac{63\cdot 22}{3}:325\frac{1}{2}=\frac{132}{133}$ головы, а испорченный сахаръ составлялъ $1-\frac{132}{133}=\frac{23}{133}$ головы, и вся голова вѣсила $3,8(3):\frac{23}{133}=3\frac{5}{6}:\frac{23}{133}=25\frac{5}{6}$ фунта. Въ продажу пошло $25\frac{5}{6}-3\frac{5}{6}=22$ фунта; за 63 коп. было продано $22\times\frac{5}{22}=5$ фунтовъ и осталось еще продавать 22—5=17 фунт. Эти 17 фунт. продали за $325\frac{1}{2}-63+1=263\frac{1}{2}$ коп., слѣд., каждый фунтъ изъ нихъ продавался по $263\frac{1}{2}:17=15\frac{1}{2}$ коп.

291) $\left[\left(11\frac{94}{1591}-6\frac{38}{1517}\right):8\frac{11}{43}+\left(10\frac{133}{2173}-5\frac{23}{1643}\right):41\frac{12}{31}\right]\times 6\frac{5}{6}=5.$

Рѣшеніе.

1) $11\frac{94}{1591}-6\frac{38}{1517}=5\frac{94.41-38.43}{37.41.43}=$

$=5\frac{3854-1634}{37.41.43}=5\frac{2220}{37.41.43}=5\frac{60}{1763}$

1591 | 74 | 21 | 37 | 1517 | 37 | 20 | 74 | 2 | 37 | 0

1; 2×20+1=41; 41+2=43;

Н. Кр.=37.41.43; 2220 | 37; 0 | 60

94	38	43
×41	×43	×41
94	114	43
376	152	172
3854	1634	1763

2) $5\frac{60}{1763}:8\frac{11}{43}=\frac{25.1}{\cancel{8875}.\cancel{43}}{\cancel{1763}.\cancel{355}}=\frac{25}{41}$

41 . 1

8875 | 355; 1775 | 25; 0

3) $10\frac{133}{2173}-5\frac{23}{1643}=5\frac{133.31-23.41}{53.31.41}=$

$=5\frac{4123-943}{53.31.41}=5\frac{3180}{53.31.41}=5\frac{60}{1271}$

2173 | 530 | 1 | 1643 | 53 | 3 | 530 | 0 | 10 | 53

10×3+1=31; 31+10=41;

Н. Кр.=53.31.41; 3180 | 53; 0 | 60

133	23	31
×31	×41	×41
133	23	31
399	92	124
4123	943	1271

4) $5\frac{60}{1271}:41\frac{12}{31}=\frac{5.1}{\cancel{6415}.\cancel{31}}{\cancel{1271}.\cancel{1283}}=\frac{5}{41}$

41 . 1

6415 | 1283; 0 | 5

5) $\frac{25}{41}+\frac{5}{41}=\frac{30}{41}$; 6) $\frac{30}{41}\times6\frac{5}{6}=\frac{5.1}{\cancel{30}.\cancel{41}}{\cancel{41}.\cancel{6}}=5$.

1 . 1

292) $\left\{\frac{8,8077}{20-28,2:(13,3333\times0,3+?)\times2,004}+4,9\right\}\times\frac{5}{32}=1$

Рѣшеніе.

1) $1:\frac{5}{32}=\frac{32}{5}=6,4$; 2) 6,4—4,9=1,5;

3) 8,8077 : 1,5 = 88,077 : 15 = 5,8718;

130

107

27

120

0

4) 20,0000 (точки над 0 и 0)

−5,8718

14,1282

5) 14,1282 : 2,004 = 14128,2 : 2004 = 7,05

100 20

0

6) 28.2 : 7,05 = 2820 : 705 = 4

0

7) 13,3333×0,3=3,99999 8) 4—3,99999=**0,00001.**

293) Купецъ купилъ чай по 1,8 руб. за фунтъ. При перевозкѣ $^2/_9$ всего чаю подмокло и не пошло въ продажу, а остальной былъ проданъ по 2,25 руб. за фунтъ. Сколько чаю было куплено, если отъ всей этой операціи купецъ понесъ 3,5 руб. убытку?

Рѣшеніе. Если $^2/_9$ всего чаю не пошло въ продажу, то вмѣсто каждаго купленнаго фунта чаю купецъ продавалъ $1-{}^2/_9={}^7/_9$ фунта и вмѣсто 1,8 руб., которые онъ самъ платилъ за фунтъ, получалъ только $2{,}25\times{}^7/_9=1{,}75$ руб., т.-е. на каждомъ купленномъ имъ фунтѣ несъ 1,8—1,75=0,05 руб. убытку; слѣд. купецъ купилъ 3,5 : 0,05=70 фунт. чаю.

294) Двое хотѣли купить домъ, но у одного не хватало $^{26}/_{45}$, а у другого $^5/_9$ той суммы, которую съ нихъ просили; когда же имъ уступили 1680 руб. изъ назначенной суммы, то они въ уплату за домъ отдали всѣ свои деньги. Сколько денегъ было у каждаго?

Рѣшеніе. Деньги перваго составляли $1-{}^{26}/_{45}={}^{19}/_{45}$, а деньги второго $1-{}^5/_9={}^4/_9$ суммы, которую просили за домъ; слѣд. они заплатили за домъ ${}^{19}/_{45}+{}^4/_9={}^{39}/_{45}$ той суммы, которую просили съ нихъ за домъ, и имъ уступили $1-{}^{39}/_{45}={}^6/_{45}$ этой суммы, что и составило 1680 руб. А потому $^1/_{45}$ этой суммы равна 1680 : 6 = =280 руб., у перваго было 280×19=5320 руб., а у второго 280×20=5600 руб.

295) Для учебнаго заведенія заготовили еловыхъ дровъ на 27,5 саж. больше, чѣмъ осиновыхъ, и на оба сорта дровъ израсходовали поровну. Сколько израсходовано на дрова, если осиновыя заготовляли по 4,8 р. за сажень, а еловыя по 3 р. 15 к.?

Рѣшеніе. Если бы еловыхъ дровъ заготовили столько же, сколько и осиновыхъ, то на нихъ израсходовали бы на 3,15× ×27,5=86,625 руб. больше, чѣмъ на осиновыя. Это произошло бы отъ того, что осиновыя дрова на 4,8—3,15=1,65 руб. за сажень дороже, чѣмъ еловыя; слѣд. осиновыхъ дровъ было заготовлено 86,625 : 1,65=52,5 саж., а еловыхъ 52,5+27,5=80 саж.; вся заготовка стоила 3,15×80×2=504 руб.

296) Имѣніе, состоявшее изъ 20,64 дес. пахотной земли и 4,36 дес. лѣсу, продано такъ, что десятина лѣсу пошла на 38,75 руб. дороже десятины пахотной земли. Что стоитъ имѣніе, если за пахотную землю получено на 177 руб. больше, чѣмъ за лѣсъ?

Рѣшеніе. Если бы лѣсъ продавали по той же цѣнѣ, что и пахотную землю, то за него выручили бы на 38,75×4,36=168,95

руб. меньше, и тогда за пахотную землю получили бы на 177+168,95=345,95 руб. больше, чѣмъ за лѣсъ. Эта разность тогда бы произошла единственно отъ разницы въ количествѣ лѣса и пахотной земли, слѣд. 345,95 руб. представляетъ стоимость 20,64 — 4,36=16,28 дес. пахотной земли. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

297) Въ магазинѣ было 100,8 фунт. чаю и кофе, на сумму 99,6 руб., при чемъ кофе было въ 5,3 раза больше, чѣмъ чаю; когда же продали столько чаю, что оставшійся чай составилъ только 0,1 кофе, то стоимость всего товара равнялась 82,68 руб. На какую сумму было въ магазинѣ чаю и на какую кофе?

Рѣшеніе. Въ началѣ въ магазинѣ было 100,8 : (5,3+1)=16 ф. чаю и 100,8—16=84,8 ф. кофе, а послѣ продажи чаю осталось 84,8×0,1=8,48 ф. Слѣд. 16 ф. чаю и 84,8 ф. кофе стоятъ 99,6 руб., а 8,48 ф. чаю и то же количество кофе стоятъ 82,68 руб. Отсюда уже нетрудно найти цѣну чаю и затѣмъ рѣшить всю задачу.

298) Найти два числа, которыя отъ вычитанія и отъ дѣленія даютъ въ результатѣ одно и то же число, именно 2,25.

Рѣшеніе. Меньшее число въ большемъ содержится 2,25, а въ разности этихъ чиселъ оно должно содержаться 2,25—1=1,25; слѣд. меньшее число есть 2,25 : 1,25=1,8, а бо́льшее 1,8×2,25=4,05.

VII.

Приложенія ариѳметики.

317. Подъ приложеніями ариѳметики обыкновенно разумѣютъ изложеніе пріемовъ рѣшенія задачъ, которыя группируются по правиламъ: тройное, процентовъ, учета векселей, пропорціональнаго дѣленія (товарищества), смѣшенія и перевода мѣръ (цѣпное). Всѣ эти задачи относятся къ пропоціональнымъ величинамъ и представляютъ видоизмѣненія двухъ основныхъ типовъ задачъ: 1) на правило тройное и 2) на правило пропорціональнаго дѣленія. При правильномъ веденіи курса ариѳметики, пріемы рѣшенія задачъ этихъ типовъ дѣти усвоиваютъ постепенно, по мѣрѣ накопленія ариѳметическихъ знаній, необходимыхъ для ихъ рѣшенія. и по мѣрѣ пріобрѣтенія навыка разбираться въ условіяхъ задачъ и прилагать пріемы рѣшенія, усвоенные на однихъ частныхъ случаяхъ, къ другимъ. Особый отдѣлъ курса, спеціально посвящаемый разработкѣ пріемовъ рѣшенія различнаго рода задачъ, можетъ имѣть смыслъ только какъ объединеніе и обобщеніе тѣхъ пріемовъ, которые дѣти постепенно усвоивали въ теченіе всего курса ариѳметики. Существеннымъ элементомъ при этомъ является ученіе объ отношеніяхъ и примѣненіе его къ рѣшенію задачъ. Что касается до пропорцій, то рѣшеніе задачъ при ихъ помощи нельзя считать ариѳметическимъ: пропорціи представляютъ частный случай уравненій и должны быть, по нашему мнѣнію, отнесены къ алгебрѣ.

Такъ какъ въ первой главѣ этой книги мы уже достаточно подробно разсмотрѣли всѣ главные пріемы ариѳметическаго рѣшенія задачъ, то здѣсь остановимся преимущественно на ученіи объ отношеніяхъ и на тѣхъ задачахъ, которыя по своему спеціальному характеру (напр. задачи на учетъ векселей) не встрѣчались въ предыдущихъ упражненіяхъ.

318. Отношенія. Разностное отношеніе почти во всѣхъ учебникахъ опредѣляется одинаково; что касается до отношенія кратнаго, то здѣсь мы встрѣчаемъ нѣкоторое разнообразіе. Одни руководства говорятъ, что опредѣлить кратное отношеніе между числами значитъ узнать, во сколько разъ одно изъ нихъ больше другого. Это опредѣленіе предполагаетъ, что всегда находится отношеніе бо́льшаго числа къ меньшему и совершенно исключаетъ обратный случай. Другія руководства, желая избѣжать указанной неполноты, говорятъ, что кратное отношеніе показываетъ, какъ одно число составлено изъ другого, или что кратное отношеніе есть число, которое такъ же составлено изъ единицы, какъ первое данное число составлено изъ второго. Въ обѣихъ редакціяхъ это опредѣленіе заключаетъ нѣкоторую неопредѣленность, которую можно уничтожить только соглашеніемъ, какъ слѣдуетъ понимать слово с о с т а в л е н о; кромѣ того, это опредѣленіе съ нѣкоторымъ трудомъ усвоивается и понимается дѣтьми. Наиболѣе правильное опредѣленіе отношенія можно дать въ такой формѣ: найти отношеніе между двумя числами значитъ найти, на какое третье число надо умножить одно изъ данныхъ чиселъ, чтобы получить другое данное число. Но это опредѣленіе носитъ слишкомъ отвлеченный характеръ. Мы предпочитаемъ давать понятіе о кратномъ отношеніи въ словахъ: опредѣлить кратное отношеніе между двумя числами значитъ узнать, во сколько разъ первое число больше второго, или какую часть первое число составляетъ отъ второго. Изъ этого опредѣленія, вполнѣ понятнаго и доступнаго дѣтямъ, легко вывести, что кратное отношеніе есть такое число, на которое надо помножить второе данное число, чтобы получить первое данное число.

Чтобы подойти къ опредѣленію отношеній, слѣдуетъ давать дѣтямъ примѣры для сравненія величинъ и чиселъ, при чемъ прежде всего надо выяснить, что сравненію подлежатъ только однородныя величины и числа. Послѣ вывода понятій о разностномъ и кратномъ отношеніяхъ необходимо разъяснить, что разность въ разностномъ отношеніи есть число, однородное съ членами отношенія, а знаменатель кратнаго отношенія есть число отвлеченное. Затѣмъ слѣдуетъ перейти къ изслѣдованію зависимости между членами отношенія, познакомить съ вычисленіемъ неизвѣстныхъ членовъ въ отношеніяхъ и прослѣдить измѣненія отношеній при измѣненіи ихъ членовъ.

319. Изъ измѣненій кратнаго отношенія остановимся на измѣненіяхъ, которыя происходятъ отъ прибавленія къ предыдущему члену и отъ вычитанія изъ него послѣдующаго члена, и на измѣненіяхъ, которыя происходятъ отъ прибавленія къ обоимъ членамъ отношенія и отъ вычитанія изъ нихъ одного и того же числа.

Чтобы въ отношеніи $5\frac{5}{6} : 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{3}$ получить предыдущій членъ $5\frac{5}{6}$, надо послѣдующій членъ $1\frac{3}{4}$ умножить на знаменателя отношенія $3\frac{1}{3}$; когда же мы къ предыдущему члену $5\frac{5}{6}$, прибавимъ послѣдующій $1\frac{3}{4}$, то намъ отъ умноженія послѣдующаго члена $1\frac{3}{4}$, кромѣ предыдущаго $5\frac{5}{6}$, надо получить еще послѣдующій, а для этого послѣдующій члена $1\frac{3}{4}$ надо умножить еще на 1-цу: слѣд. знаменатель новаго отношенія $(5\frac{5}{6} + 1\frac{3}{4}) : 1\frac{3}{4}$ будетъ состоять изъ прежняго знаменателя $3\frac{1}{4}$ и изъ единицы.

Разъясненіе измѣненія, которое произойдетъ въ кратномъ отношеніи $25 : 100 = \frac{1}{4}$, отъ прибавленія къ его членамъ по 50-ти можетъ быть дано приблизительно въ слѣдующей формѣ:

Знаменатель новаго отношенія $(25+50) : (100+50)$, какъ и знаменатель даннаго отношенія, меньше 1-цы, потому что предыдущій членъ новаго отношенія остался все-таки меньше послѣдующаго. Но знаменатель новаго отношенія больше знаменателя даннаго отношенія $\frac{1}{4}$, потому что отъ умноженія новаго послѣдующаго члена $100+50$ на $\frac{1}{4}$ получится меньше новаго предыдущаго члена $25+50$, такъ какъ отъ умноженія 100 на $\frac{1}{4}$ получается, какъ мы знаемъ, 25, а отъ умноженія 50-ти на $\frac{1}{4}$ получится только четверть 50-ти, а надо получить 50. Если же знаменатель новаго отношенія меньше 1-цы и больше знаменателя даннаго отношенія $\frac{1}{4}$, то знаменатель новаго отношенія ближе къ 1-цѣ. И дѣйствительно:

$$(25+50) : (100+50) = 75 : 150 = \frac{1}{2}.$$

Разъясненіе того же измѣненія, когда предыдущій членъ больше послѣдующаго, можно найти въ нашемъ руководствѣ ариѳметики.

Для замѣны отношенія дробныхъ чиселъ отношеніемъ цѣлыхъ, вмѣсто обычнаго приведенія членовъ отношенія къ одному знаменателю, можно прямо умножать оба члена отношенія на общаго знаменателя дробей, входящихъ въ члены отношенія; тогда отъ умноженія каждой дроби на число, кратное ея знаменателю, получается цѣлое число; напр.

$$5\frac{5}{6} : 1\frac{3}{4} = \left(5\frac{5}{6} \times 12\right) : \left(1\frac{3}{4} \times 12\right) = 70 : 21 = 10 : 3 = 3\frac{1}{3}.$$

Чтобы прійти къ этому правилу, можно начать съ такихъ случаевъ, гдѣ дробь входитъ только въ одинъ изъ членовъ отношенія.

Въ заключеніе слѣдуетъ дать понятіе объ обращеніи кратнаго отношенія и показать, что кратное отношеніе даетъ болѣе ясное представленіе объ относительной величинѣ чиселъ, сравнительно съ разностнымъ отношеніемъ.

320. Пропорціональность величинъ. Чтобы примѣнять отношенія къ рѣшенію задачъ, необходимо хорошо ознакомить дѣтей съ зависимостью между величинами, извѣстной подъ именемъ пропорціональности. Для этого прежде всего слѣдуетъ ознакомить дѣтей со смысломъ выраженія: величина измѣнилась въ отношеніи одного числа къ другому. Число примѣровъ должно быть значительно, такъ чтобы дѣти вполнѣ вникли въ смыслъ этого выраженія и научились свободно примѣнять его къ частнымъ случаямъ. Послѣ этого уже нетрудно дать опредѣленіе пропорціональности какъ такой зависимости между двумя величинами, при которой съ измѣненіемъ одной величины въ какомъ-либо отношеніи, другая измѣняется въ томъ же или въ обратномъ отношеніи; и подраздѣлить эту зависимость на прямую и обратную пропорціональность. Дѣти должны не только знать опредѣленіе пропорціональности, но и умѣть приводить достаточно разнообразные примѣры прямо-пропорціональныхъ и обратно-пропорціональныхъ величинъ.

321. Тройное правило. Новаго въ этихъ задачахъ будетъ только способъ пропорціональнаго измѣненія (см. гл. I этой книги). Относительно способа приведенія къ единицѣ здѣсь можно указать всѣ его видоизмѣненія, а равно познакомить съ тѣми несообразностями, къ которымъ иногда приводитъ примѣненіе этого способа въ томъ или другомъ его видоизмѣненіи, и съ пріемами, помощью которыхъ можно избѣгать этихъ несообразностей. Изъ задачъ на тройное правило, помѣщенныхъ въ нашемъ задачникѣ, обращаемъ вниманіе читателя на задачи, въ которыхъ требуется опредѣлить, возможно ли исполненіе работы при данныхъ условіяхъ. Несообраз-

ность получаемыхъ отвѣтовъ указываетъ невозможность этого исполненія. Приводимъ для образца одну задачу съ ея рѣшеніемъ.

299) 24 работника въ теченіе 15 дней приготовили полотно желѣзной дороги на разстояніи $^2/_3$ версты, работая ежедневно по $9^3/_8$ часа. По скольку часовъ ежедневно должны работать 18 работниковъ, чтобы приготовить полотно желѣзной дороги на протяженіи 250 саж. 2 аршинъ въ теченіе 12 дней?

Рѣшеніе. Опредѣляемъ, по скольку часовъ должны работать 18 работниковъ, чтобы выполнить ту же работу, какъ и 24 работника, и при всѣхъ тѣхъ же остальныхъ условіяхъ, при которыхъ работали 24 работника.

Такъ какъ число работниковъ и время работы обратно-пропорціональны, то для рѣшенія надо $9^3/_8$ умножить на отношеніе, обратное отношенію чиселъ 18 и 24. Находимъ это отношеніе и выполняемъ умноженіе:

$$18 : 24 = \frac{18}{24} \overset{6}{=} \frac{3}{4} \; ; \; 9\frac{3}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{75.4}{8.3} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

Пользуясь найденнымъ числомъ $12^1/_2$ час., составляемъ задачу, въ которой требуется опредѣлить, по скольку часовъ должны работать 18 работниковъ, чтобы приготовить полотно на томъ же протяженіи $^2/_3$ версты, какъ и 24 работника, но уже не въ теченіе 15 дней, а въ теченіе 12 дней.

Такъ какъ продолжительность всей работы находится въ обратномъ отношеніи съ продолжительностью ежедневной работы, то для опредѣленія искомаго числа часовъ надо $12^1/_2$ умножить на отношеніе, обратное отношенію чиселъ 12 и 15. Находимъ это отношеніе и выполняемъ требуемое умноженіе:

$$12 : 15 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \; ; \; 12\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{25.5}{2.4} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}.$$

Пользуясь найденнымъ числомъ $15^5/_8$, составляемъ послѣднюю задачу, въ которой ищется, по скольку часовъ ежедневно должны работать 18 работниковъ, чтобы въ теченіе 12 дней приготовить полотно желѣзной дороги на протяженіи 250 саж. 2 арш., т.-е. ищется искомое число данной задачи.

Такъ какъ время работы прямо-пропорціонально количеству работы, то для рѣшенія этой задачи надо $15^5/_8$ часа умножить на отношеніе чиселъ 250 саж. 2 арш. къ $^2/_3$ верст. Находимъ это отношеніе и выполняемъ требуемое умноженіе:

$$250 \text{ саж. } 2 \text{ арш.} : \frac{2}{3} \text{ верст.} = 250\frac{2}{3} \text{ саж.} : 333\frac{1}{3} \text{ саж.} = \frac{752.3}{3.1000} = \frac{94}{125};$$

$$15\frac{5}{8} \times \frac{94}{125} = \frac{125.94}{8.125} = 11\frac{3}{4}.$$

Слѣд. 18 работниковъ должны ежедневно работать по $11^3/_4$ часовъ, чтобы въ теченіе 12 дней приготовить полотно желѣзной дороги на протяженіи 250 саж. 2 арш.

Иначе. Если 24 работника исполняютъ работу, работая по $9^3/_8$ часа въ день, то вся работа требуетъ

$$9\frac{3}{8} \times 24 = \frac{75.24}{8}$$

рабочихъ часовъ ежедневно. Когда работу станутъ выполнять 18 человѣкъ, то каждому придется работать по

$$\frac{75.24}{8} : 18 = \frac{75.24}{8.18}$$

часовъ въ день. Такъ будетъ, когда работа продолжается въ теченіе 15 дней и когда слѣд. на каждаго работника приходится по

$$\frac{75.24}{8.18} \times 15 = \frac{75.24.15}{8.18}$$

рабочихъ часовъ во все время исполненія работы. Эти рабочіе часы должны быть распредѣлены на 12 дней; поэтому каждому работнику придется работать по

$$\frac{75.24.15}{8.18} : 12 = \frac{75.24.15}{8.18.12}$$

часовъ ежедневно. Столько часовъ въ день долженъ работать каждый изъ 18-ти работниковъ, чтобы устроить полотно желѣзной дороги на разстояніи $333^1/_3$ саж. ($^2/_3$ верст.); чтобы устроить то же полотно на протяженіи одной сажени, они должны работать по

$$\frac{75.24.15}{8.18.12} : 333\frac{1}{3} = \frac{75.24.15.3}{8.18.12.1000}$$

часовъ въ день. А чтобы устроить то же полотно на протяженіи $250^2/_3$ саж. (250 саж. 2 арш.), они должны работать по

$$\frac{75.24.15.3}{8.18.12.1000} \times 250\frac{2}{3} = \frac{75.24.15.3.752}{8.18.12.1000.3}$$

часовъ въ день. Произведя въ полученномъ обозначеніи возможныя сокращенія и выполнивъ затѣмъ дѣйствія, получимъ, какъ и прежде, въ отвѣтѣ $11^3/_4$ часа.

Иначе. 24 работника приготовляютъ полотно желѣзной дороги на разстояніи $333^1/_3$ саж.; при тѣхъ же условіяхъ, т.-е. въ теченіе 15 дней, работая ежедневно по $9^3/_8$ часа, одинъ работникъ приготовитъ полотно желѣзной дороги на протяженіи въ 24 раза меньшемъ, т.-е. на протяженіи

$$333\frac{1}{3} \text{ саж.} : 24 = \frac{1000}{3.24} \text{ саж.}$$

Одинъ работникъ въ 1 день, работая въ этотъ день $9^3/_8$ часа, приготовитъ полотно желѣзной дороги на протяженіи въ 15 разъ меньшемъ т.-е. на протяженіи

$$\frac{1000}{3.24} : 15 = \frac{1000}{3.24.15} \text{ саж.}$$

А въ 1 часъ онъ можетъ приготовить полотно на протяженіи

$$\frac{1000}{3.24.15} : 9\frac{3}{8} = \frac{1000.8}{3.24.15.75} \text{ саж.}$$

Но должны работать 18 человѣкъ; они въ часъ приготовятъ полотно на протяженіи

$$\frac{1000.8}{3.24.15.75} \times 18 = \frac{1000.8.18}{3.24.15.75} \text{ саж.}$$

А имъ нужно приготовить полотно желѣзной дороги на протяженіи $250^2/_3$ саж.; для этого они должны работать въ теченіе

$$250\frac{2}{3} : \frac{1000.8.18}{3.24.15.75} = \frac{752.3.24.15.75}{3.1000.8.18}$$

часовъ. Это количество часовъ должно быть распредѣлено на 12 дней; слѣд. ежедневно 18 работниковъ должны работать по

$$\frac{752.3.24.15.75}{3.1000.8.18} : 12 = \frac{752.3.24.15.75}{3.1000.8.18.12} = 11\frac{3}{4}$$

часовъ.

Иногда въ задачахъ сложнаго тройного правила, вмѣсто двухъ размѣровъ одной изъ пропорціональныхъ величинъ, дается прямо ихъ отношеніе; напр. въ нашей задачѣ можетъ быть прибавлено, что трудность работы на участкѣ въ 250 с. 2 арш. къ трудности работы на участкѣ въ $333^1/_3$ саж. относится какъ 5 : 4,7. При способѣ пропорціональнаго измѣненія тогда придется прямо умножить найденное выраженіе на это отношеніе или на обратное ему, смотря по тому, прямо или обратно пропорціональна эта величина искомой; въ нашей задачѣ придется найденное число часовъ работы $11^3/_4$ умножить на отношеніе 5 : 4,7 $= {}^{50}/_{47}$, получится $^{50}/_4 = 12^1/_2$. Рѣшая задачу способомъ приведенія къ единицѣ, скажемъ, что если 18 работниковъ могутъ приготовить въ часъ

$$\frac{1000.8.18}{3.24.15.75} \text{ саж.}$$

при той же трудности работы, какъ и на первомъ участкѣ, то если работа на новомъ участкѣ будетъ въ 4,7 раза легче, они будутъ въ состояніи приготовить въ часъ

$$\frac{1000.8.18}{3.24.15.75} \times 4{,}7 = \frac{1000.8.18.47}{3.24.15.75.10} \text{ саж.}$$

А если трудность работы возрастетъ въ 5 разъ, то они будутъ въ состояніи приготовить въ 1 часъ только

$$\frac{1000.8.18.47}{3.24.15.75.10} : 5 = \frac{1000.8.18.47}{3.24\ 15.75.10.5} \text{ саж.}$$

Далѣе рѣшеніе пойдетъ такъ же, какъ и прежде.

322. Пропорціональное дѣленіе. Пропорціональное дѣленіе, какъ мы уже имѣли случай замѣтить (см. гл. I этой книги), имѣетъ столь же широкое примѣненіе, какъ и способъ приведенія къ единицѣ; поэтому со всѣми пріемами пропорціональнаго дѣленія дѣти должны быть ознакомлены достаточно подробно. Пріемы эти можно дать въ слѣдующей послѣдовательности: 1) дѣленіе числа въ разностномъ отношеніи; 2) дѣленіе числа на части, пропорціональныя числамъ даннаго ряда; 3) дѣленіе числа на части въ кратномъ отношеніи, когда одной и той же части въ разныхъ отношеніяхъ соотвѣтствуютъ разныя числа (напр. число 415 разложить на три слагаемыхъ, такъ чтобы I : II = 3 : 8, а II : III = 12 : 25); 4) методъ подобія; 5) дѣленіе числа обратно-пропорціонально числамъ даннаго ряда; 6) дѣленіе числа на части, изъ которыхъ между одними дано разностное отношеніе, а между другими — кратное отношеніе; 7) приложеніе всѣхъ этихъ пріемовъ къ рѣшенію задачъ на простое и на сложное правило товарищества.

Приводимъ рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ.

300) Найти два числа, чтобы сумма ихъ равнялась $45^1/_6$ и частное отъ дѣленія перваго на $2^1/_7$ равнялась частному отъ дѣленія второго на $5^3/_5$.

Рѣшеніе. Раздѣлить на $2^1/_7$ все равно, что умножить на $1 : 2^1/_7 = {}^7/_{15}$; раздѣлить на $5^3/_5$ все равно, что умножить на $1 : 5^3/_5 = {}^5/_{28}$; поэтому $^7/_{15}$ перваго числа равны $^5/_{28}$ второго, и первое число относится ко второму $^5/_{28} : {}^7/_{15} = 75 : 196$. Раздѣливъ $45^1/_6$ пропорціально 75 и 196, найдемъ, что первое число равно $12^1/_2$, второе $32^2/_3$.

Иначе. Если $^7/_{15}$ перваго числа равны $^5/_{28}$ второго, то первое число равно $^5/_{28} : {}^7/_{15} = {}^{75}/_{196}$ второго; слѣд. въ суммѣ $45^1/_6$ заключается второе число и еще $^{75}/_{196}$ второго, т.-е. второе число въ $45^1/_6$ содержится $1^{75}/_{196}$ разъ и равно $45^1/_6 : 1^{75}/_{196} = 32^2/_3$; первое число равно $32^2/_3 \times {}^{75}/_{196} = 12^1/_2$.

301) Когда изъ одного кошелька истратили $^{11}/_{15}$, а изъ другого $^3/_{11}$ бывшихъ въ каждомъ изъ нихъ денегъ, то въ обоихъ осталось поровну. Сколько было въ каждомъ, если въ первомъ кошелькѣ лежало на $23^3/_4$ руб. больше, чѣмъ во второмъ?

Рѣшеніе. Въ первомъ кошелькѣ осталось $1 - {}^{11}/_{15} = {}^4/_{15}$ бывшихъ въ немъ денегъ, а во второмъ $1 - {}^3/_{11} = {}^8/_{11}$; слѣд. $^4/_{15}$ денегъ изъ

перваго кошелька составляютъ $^{8}/_{11}$ денегъ изъ второго. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

302) Хлѣбный торговецъ купилъ 539 пудовъ муки трехъ сортовъ, при чемъ за муку перваго сорта заплатилъ 467 руб. 50 коп., за муку второго сорта—495 руб. и за муку третьяго сорта—237 руб. 60 коп. Сколько муки каждаго сорта онъ купилъ, если 1 пудъ 5 ф. перваго сорта обошлись ему во столько же, во сколько 1 пуд. 10 фунт. второго, а 2 пуда второго сорта—во столько же, во сколько 2 пуда 20 фунт. третьяго?

Рѣшеніе. Количество покупаемаго товара прямо-пропорціонально суммѣ, на него затрачиваемой, и обратно-пропорціонально цѣнѣ товара. Слѣд. 539 пудовъ надо раздѣлить прямо пропорціонально суммамъ, затраченнымъ на муку каждаго сорта и обратно-пропорціонально цѣнамъ муки каждаго сорта. Суммы, затраченныя на муку каждаго сорта, намъ даны; найдемъ, въ какихъ отношеніяхъ находятся цѣны. Если 1 пудъ 5 ф. муки перваго сорта стоятъ столько же, сколько 1 пуд. 10 фунт. второго, то цѣна перваго сорта во столько разъ больше цѣны второго, во сколько 1 пуд. 10 ф. больше 1 пуда 5 ф., т.-е. цѣна 1-го сорта относится къ цѣнѣ второго, какъ

$$1 \text{ пуд. } 10 \text{ ф.} : 1 \text{ п. } 5 \text{ ф.} = 1^{1}/_{4} : 1^{1}/_{8} = 10 : 9.$$

Цѣна второго сорта относится къ цѣнѣ третьяго, какъ

$$2 \text{ п. } 20 \text{ ф.} : 2 \text{ п.} = 2^{1}/_{2} : 2 = 5 : 4$$

Умноживъ члены перваго отношенія на 5, а члены второго на 9, найдемъ, что цѣны всѣхъ трехъ сортовъ муки относятся между собою, какъ 50 : 45 : 36. Слѣд. 539 пуд. надо раздѣлить прямо-пропорціонально числамъ 467,5 ; 495 ; 237,6 и обратно-пропорціонально числамъ 50, 45, 36. Но такъ какъ обратно-пропорціональное дѣленіе приводится къ прямо-пропорціональному дѣленію обратнымъ величинамъ, то число 539 пуд. надо раздѣлить пропорціонально числамъ двухъ рядовъ:

$$467{,}5 : 445 : 237{,}6 \text{ и } {}^{1}/_{50} : {}^{1}/_{45} : {}^{1}/_{36}.$$

Для этого числа обоихъ рядовъ надо соотвѣтственно перемножить и раздѣлить 539 пропорціонально произведеніямъ: $647{,}5 \times {}^{1}/_{50}$, $495 \times {}^{1}/_{45}$, $237{,}6 \times {}^{1}/_{36}$. Находимъ отношеніе между этими числами и упрощаемъ его:

$$(467{,}5.{}^{1}/_{50}) : (495.{}^{1}/_{45}) : (237{,}6.{}^{1}/_{36}) = 9{,}35 : 11 : 6{,}6 =$$
$$= 935 : 1100 : 660 = 17 : 20 : 12;$$

а затѣмъ выполняемъ самое дѣленіе:

$$17 + 20 + 12 = 49; \quad 539 : 49 = 11;$$
$$\text{I} = 11 \times 17 = 187, \quad \text{II} = 11 \times 20 = 220, \quad \text{III} = 11 \times 12 = 132.$$

Для объясненія, почему 539 надо раздѣлить пропорціонально произведеніямъ 467,5. $^{1}/_{50}$, 495.$^{1}/_{45}$, и 237,6. $^{1}/_{36}$, слѣдуетъ замѣтить, что если цѣны всѣхъ трехъ сортовъ муки относятся между собою, какъ 50 : 45 : 36, то для уравненія цѣнъ всѣхъ трехъ сортовъ муки надо уменьшить цѣну перваго сорта въ 50 разъ, цѣну второго сорта въ 45 разъ и цѣну третьяго сорта въ 36 разъ; тогда тѣ же количества муки всѣхъ трехъ сортовъ соотвѣтственно будутъ стоить 467,5.$^{1}/_{50}$ руб., 495,5.$^{1}/_{45}$ руб. и 237,6.$^{1}/_{36}$ руб., и такъ какъ цѣны ихъ одинаковы, то для опредѣленія количества муки каждаго сорта надо 539 раздѣлить пропорціонально этимъ произведеніямъ.

Иначе. За первый сортъ муки уплачено 467,5 руб.; за такое же количество муки второго сорта придется заплатить въ $^{10}/_{9} = 1^{1}/_{9}$ раза меньше, такъ какъ мука второго сорта дешевле муки перваго сорта во столько разъ, во сколько 1 пуд. 10 ф. больше 1 пуд. 5 ф., т.-е. придется заплатить $467{,}5 : 1^{1}/_{9} = \frac{467{,}5.9}{10} = 420{,}75$ руб.

Если, вмѣсто муки 3-го сорта, будетъ куплено такое же количество муки 2-го сорта, то за него придется уплатить

$$237{,}6 \times \frac{5}{4} = \frac{237{,}6.5}{4} = 297 \text{ руб.}$$

Слѣд., если бы торговецъ купилъ всѣ 539 пудовъ муки одного второго сорта, то заплатилъ бы за нихъ

$$420{,}75 + 495 + 297 = 1212{,}75 \text{ руб.}$$

Одинъ пудъ муки второго сорта стоилъ $1212{,}75 : 539 = 2{,}25$ руб. и ея дѣйствительно куплено $495 : 2{,}25 = 49500 : 225 = 220$ пудовъ.

Муки перваго сорта куплено $420{,}75 : 2{,}25 = 187$ пуд.; муки третьяго сорта куплено $297 : 2{,}25 = 132$ пуда.

Иначе. Примемъ, что пудъ муки перваго сорта стоитъ 1 руб. Тогда 1 п. 5 ф. ея стоятъ $1 \times 1^{1}/_{8} = 1^{1}/_{8}$ руб. Столько же стоятъ 1 п. 10 ф. муки второго сорта, слѣд. пудъ ея стоитъ $1^{1}/_{8} : 1^{1}/_{4} = {}^{9}/_{8} : {}^{5}/_{4} = 0{,}9$ руб., а 2 пуда ея $0{,}9 \times 2 = 1{,}8$ руб. Столько же стоятъ 2 п. 20 ф. муки третьяго сорта, слѣд. пудъ ея стоитъ $1{,}8 : 2{,}5 = 18 : 25 = 0{,}72$ руб.

Если пудъ муки перваго сорта стоитъ 1 руб., то ея куплено $467{,}5 : 1 = 467{,}5$ пуд.; если пудъ муки второго сорта стоитъ 0,9 руб., то ея куплено $495 : 0{,}9 = 550$ пуд.; если пудъ муки третьяго сорта стоитъ 0,72 руб., то ея куплено $237{,}6 : 0{,}72 = 330$ пуд. Итакъ при

сдѣланномъ нами предположеніи всей муки было бы куплено 467,5 + 550 + 330 = 1347,5 пуд.; въ дѣйствительности же куплено 539 пуд., въ 1347,5 : 539 = 2,5 раза меньше; слѣд. и каждаго сорта въ дѣйствительности куплено въ 2,5 раза меньше, чѣмъ въ сдѣланномъ нами предположеніи, т.-е. муки перваго сорта куплено 467,5 : 2,5 = 187 пуд.; муки второго сорта 550 : 2,5 = 220 пуд.; муки третьяго сорта 330 : 2,5 = 132 пуда.

303) Одинъ торговецъ началъ нѣкоторое промышленное предпріятіе съ капиталомъ въ 12000 рублей; черезъ годъ для расширенія предпріятія онъ вступилъ въ компанію съ другимъ торговцемъ, который въ то же предпріятіе вложилъ капиталъ въ 15000 руб. По прошествіи двухъ лѣтъ со дня вступленія второго торговца, предпріятіе было окончено и дало въ результатѣ 3429 руб. прибыли. Какую сумму изъ этой прибыли слѣдуетъ получить каждому торговцу?

Рѣшеніе. Первый торговецъ въ теченіе 3 лѣтъ получилъ нѣкоторую прибыль съ капитала 12000 рублей, ту же прибыль онъ получитъ въ 1 годъ, если вложитъ въ предпріятіе 12000 руб. × 3, т.-е. 36000 рублей; ту же прибыль, какую второй получилъ въ 2 года съ капитала 15000 руб., онъ получитъ въ 1 годъ, если вложитъ въ предпріятіе 15000 руб. × 2, т.-е. 30000 руб.; слѣд. общая прибыль 3429 руб. должна быть распредѣлена между пайщиками пропорціонально 36000 и 30000. Произведя это пропорціональное дѣленіе точно до копеекъ, найдемъ, что первому пайщику слѣдуетъ получить изъ общей прибыли 1870 р. 36 коп., а второму—остальные 1558 руб. 64 коп.

Приведенное рѣшеніе имѣетъ нѣсколько произвольный характеръ. Въ немъ прибыль за всѣ три года распредѣлена между обоими пайщиками, тогда какъ второй не участвовалъ въ предпріятіи въ теченіе всего перваго года, и вся прибыль за этотъ годъ должна бы по всей справедливости принадлежать одному первому пайщику.

Для болѣе правильнаго рѣшенія задачи слѣдовало бы ежегодную прибыль, приходящуюся на долю каждаго пайщика, считать новыми вкладами въ предпріятіе, но для такого рѣшенія требуется предварительно опредѣлить, сколько процентовъ прибыли приноситъ предпріятіе ежегодно. Въ разсматриваемой задачѣ можно найти, что предпріятіе давало ежегодно 5% прибыли. По этому расчету за первый годъ первый пайщикъ долженъ получить прибыли 600 руб.; за второй годъ первый пайщикъ долженъ получить 630 руб. (съ капитала 12600 руб.), а второй—750 руб.; за третій годъ первый пайщикъ долженъ получить 661,5 руб. (съ капитала 13230), а второй—787,5 руб. (съ капитала 15750 руб.).

Слѣд. всего первому пайщику изъ общей прибыли придется получить 1891,5 руб., на 21 р. 14 коп. больше найденнаго нами въ приведенномъ выше рѣшеніи, а второму 1537,5 р., на 21 р. 14 коп. меньше найденнаго нами рѣшенія.

Опредѣленіе процента, приносимаго предпріятіемъ ежегодно, въ самыхъ простыхъ задачахъ этого рода приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія, а въ болѣе сложныхъ къ рѣшенію уравненій высшихъ степеней.

304) Сумма четырехъ дробей равна 2; числители ихъ относятся между собою какъ 2 : 4 : 8 : 1, а знаменатели какъ 1 : 3 : 5 : 15. Найти эти дроби.

Рѣшеніе. Если бы у дробей были одинаковые знаменатели, то онѣ относились бы между собою какъ числители, т.-е. какъ 2 : 4 : 8 : 1; если бы у дробей были одинаковые числители, то онѣ были бы обратно-пропорціональны знаменателямъ, т.-е. относились бы между собою какъ $1 : {}^1/_{35} : {}^1/_5 : {}^1/_1$, а такъ какъ у дробей и числители, и знаменатели различны, то онѣ относятся между собою какъ $(2 . 1) : (4 . {}^1/_3) : (8 . {}^1/_5) : (1 . {}^1/_{15}) = 2 : {}^4/_3 : {}^8/_5 : {}^1/_{15} = 30 : 20 : 24 : 1$. Раздѣливъ 2 пропорціонально этимъ числамъ, найдемъ, что первая дробь есть ${}^4/_5$, вторая—${}^8/_{15}$, третья—${}^{16}/_{25}$ и четвертая—${}^2/_{75}$.

323. Процентныя вычисленія. Процентомъ*) наз. сотая доля каждой величины и каждаго числа. Въ процентахъ принято опредѣлять возрастаніе, убываніе величинъ и составъ однѣхъ величинъ изъ другихъ. Такъ, если къ населенію какой-либо страны въ теченіе года прибавится 0,01 всего числа жителей, то говорятъ, что населеніе страны возросло въ этотъ годъ на 1 процентъ; если цѣна какого-либо товара уменьшится на 0,03 своей величины (напр. вмѣсто 2 р. за фунтъ станетъ 1 р. 94 к.), то говорятъ, что цѣна товара понизилась на 3 процента; если 0,75 всего населенія государства принадлежитъ къ господствующей національности, а остальныя 0,25—къ другимъ національностямъ, то говорятъ, что господствующая національность составляетъ 75 процентовъ, а остальныя національности—25 процентовъ всего населенія. А потому выраженія: „ежегодный приростъ лѣса составляетъ $4{}^1/_2$ процента“, „ежегодная добыча золота уменьшается на $2{}^3/_4$ процента“, „въ классѣ 85 процентовъ успѣшныхъ“ означаютъ, что количество матеріала въ лѣсу ежегодно возрастаетъ на $4{}^1/_2$ сотыхъ своей величины, что количество добываемаго золота уменьшается на $2{}^3/_4$ сотыхъ этого количества, что число успѣшныхъ учениковъ составляетъ 85 сотыхъ всего числа учениковъ въ классѣ.

*) Слово процентъ—латинское и состоитъ изъ двухъ словъ: pro, что значитъ за, centum, что значитъ сто.

Слово процентъ означаютъ знакомъ %, который ставятъ справа отъ числа, означающаго требуемое число процентовъ.

Когда данъ размѣръ величины и опредѣлено въ процентахъ ея измѣненіе, то нетрудно вычислить измѣненіе величины въ тѣхъ же единицахъ, въ которыхъ выраженъ ея размѣръ, а равно опредѣлить и размѣръ, который она приметъ послѣ своего измѣненія.

Данный размѣръ величины принято называть *начальной величиной*, а по отношенію къ деньгамъ — *начальнымъ капиталомъ*; измѣненіе начальной величины, выраженное въ тѣхъ же единицахъ, какъ и начальная величина, — *наращеніемъ* или *уменьшеніемъ* (смотря по тому, растетъ или убываетъ величина), а по отношенію къ деньгамъ—*процентными деньгами*; размѣръ, который принимаетъ величина послѣ своего измѣненія, соотвѣтственно *наращенной* или *уменьшенной величиной*, а по отношенію къ деньгамъ—*наращеннымъ* или *уменьшеннымъ капиталомъ*. Наращенная величина есть сумма начальной величины и наращенія; уменьшенная величина есть разность между начальной величиной и уменьшеніемъ.

Когда начальная величина содержитъ въ себѣ 100 единицъ, то каждый процентъ съ нея содержитъ въ себѣ одну такую единицу, и потому наращеніе и уменьшеніе величины содержитъ въ себѣ столько же единицъ, сколько процентовъ на нее нарастаетъ или изъ нея убываетъ. Такъ 7% со 100 единицъ составляютъ 7 единицъ, $12\frac{1}{2}$% со 100 единицъ составляютъ $12\frac{1}{2}$ единицъ и т. д. Поэтому выраженіямъ: „населеніе страны возросло на 15%“, „число успѣшныхъ въ учебномъ заведеніи составляетъ 78%“, „торговый оборотъ принесъ 8,25% убытку“ можно дать такое толкованіе: на каждыхъ 100 человѣкъ населенія прибавилось 15 человѣкъ, изъ каждыхъ ста учениковъ успѣшно учатся 78 человѣкъ, съ каждыхъ ста рублей капитала, пущеннаго въ оборотъ, получено 8,25 руб. убытку.

Бо́льшая часть величинъ измѣняется въ зависимости отъ времени, при чемъ измѣненіе многихъ изъ нихъ совершается пропорціонально времени. Опредѣляя въ процентахъ измѣненіе такихъ величинъ, необходимо указывать, въ теченіе какого времени это процентное измѣненіе совершилось. Единицей времени въ такихъ случаяхъ обыкновенно служитъ годъ, а иногда мѣсяцъ или сутки, при чемъ для простоты вычисленій принимается въ году 360 сутокъ и въ каждомъ мѣсяцѣ по 30 сутокъ. Если въ задачѣ не оговорено, въ теченіе какого промежутка времени совершилось данное или искомое процентное измѣненіе величины, то подразумѣвается, что это измѣненіе совершилось въ теченіе года.

Когда величина растетъ вмѣстѣ съ временемъ, то могутъ быть два случая: или наращеніе происходитъ только на начальную величину, или наращеніе происходитъ и на начальную величину, и на всѣ ея наращенія. Напр., при займѣ денегъ можно условиться начислять проценты только на начальный капиталъ, а на процентныя деньги не начислять; или можно условиться, чтобы начислялись проценты и на начальный капиталъ, и на наросшія процентныя деньги. Въ послѣднемъ случаѣ процентныя деньги за опредѣленный промежутокъ времени причисляются къ капиталу, и за слѣдующій такой же промежутокъ времени проценты начисляются на всю образовавшуюся сумму. Въ первомъ случаѣ проценты наз. простыми, во второмъ случаѣ—сложными.

324. Въ задачи на *простые* проценты могутъ входить пять величинъ. Для денежныхъ оборотовъ, которые мы и будемъ имѣть преимущественно въ виду, эти величины слѣдующія: начальный капиталъ, процентное измѣненіе капитала, время оборота капитала, процентныя деньги и наращенный или уменьшенный капиталъ. Изъ нихъ прямо-пропорціональны между собою: процентныя деньги и начальный капиталъ, процентныя деньги и процентное измѣненіе капитала, процентныя деньги и время оборота капитала; и обратно-пропорціональны: начальный капиталъ и процентное измѣненіе капитала, начальный капиталъ и время оборота капитала, процентное измѣненіе капитала и время оборота капитала. По тремъ изъ этихъ величинъ можно опредѣлить четвертую. Такимъ образомъ на правило простыхъ процентовъ могутъ быть задачи слѣдующихъ четырехъ типовъ: 1) опредѣлить процентныя деньги по начальному капиталу, процентному измѣненію капитала и времени оборота; 2) опредѣлить процентное измѣненіе (обыкновенно годовое) капитала по начальному капиталу, времени оборота и процентнымъ деньгамъ; 3) опредѣлить время оборота капитала по начальному капиталу, процентному измѣненію капитала и процентнымъ деньгамъ; 4) опредѣлить начальный капиталъ по процентному измѣненію капитала, времени оборота и процентнымъ деньгамъ.

Наращенный или уменьшенный капиталъ находится въ пропорціональной зависимости только отъ начальнаго капитала, съ остальными же величинами находится въ болѣе сложной зависимости. Но такъ какъ наращенный или уменьшенный капиталъ легко опредѣляется по начальному капиталу и процентнымъ деньгамъ (наращенный капиталъ есть сумма начальнаго капитала и процентныхъ денегъ, уменьшенный—разность между начальнымъ капиталомъ и процентными деньгами), то во всѣхъ приведенныхъ четырехъ задачахъ легко опредѣлить наращенный или уменьшенный капиталъ или непосредственно по даннымъ задачи (2-я и 3-я задачи), или послѣ рѣшенія ихъ (1-я и 4-я). Если во всѣхъ четырехъ задачахъ замѣнимъ

одно изъ данныхъ, начальный капиталъ или процентныя деньги, измѣненнымъ капиталомъ, то 2-я и 3-я задачи не потерпятъ существеннаго измѣненія, такъ какъ въ нихъ будутъ даны измѣненный капиталъ и начальный капиталъ или измѣненный капиталъ и процентныя деньги, а слѣд. легко будетъ найти третью изъ этихъ величинъ и такимъ образомъ привести задачу къ прежнему виду. Что касается 1-й и 4-й задачъ, то онѣ при такой замѣнѣ существенно измѣнятся и потребуютъ иныхъ пріемовъ рѣшенія. Но такъ какъ при данномъ измѣненномъ капиталѣ безразлично, искать ли процентныя деньги или начальный капиталъ, ибо, опредѣливъ одну изъ этихъ величинъ, легко уже найти другую, то обѣ задачи могутъ быть соединены въ одну, и къ перечисленнымъ четыремъ типамъ задачъ слѣдуетъ прибавить еще задачу пятаго типа: 5) опредѣлить начальный капиталъ или процентныя деньги по наращенному или уменьшенному капиталу, процентному измѣненію капитала и времени оборота.

Кромѣ этихъ задачъ, могутъ быть рѣшены еще слѣдующія двѣ: 6) по данному процентному измѣненію капитала опредѣлить время, потребное для кратнаго измѣненія (удвоенія, утроенія и т. д.) капитала; 7) по данному времени оборота капитала опредѣлить процентное измѣненіе, при которомъ капиталъ возрастаетъ въ данномъ кратномъ отношеніи.

Рѣшеніе всѣхъ этихъ задачъ читатели найдутъ въ нашемъ „Руководствѣ ариѳметики“.

Въ задачахъ на проценты самое существенное состоитъ въ полномъ выясненіи понятія о процентѣ. Разъ это понятіе усвоено дѣтьми, рѣшеніе задачъ на вычисленіе процентовъ уже не можетъ встрѣтить затрудненій. Приводимъ рядъ упражненій, при помощи которыхъ можно уяснить дѣтямъ это понятіе.

305) Какъ надо понимать выраженія: населеніе города увеличилось на 1%, цѣна сахара понизилась на 15%, 10% класса учится отлично, производительность почвы возросла на $12\frac{1}{2}\%$, порохъ содержитъ 75% селитры?—Сколько составитъ 1% населенія города въ 37500 человѣкъ?—104% отъ 23475 руб.?—$7\frac{1}{2}\%$ отъ 576 руб.?—$\frac{3}{4}\%$ отъ 200?—$0{,}01\%$ отъ 1-цы?—Какую часть величины составляютъ 75% ея?—$12\frac{1}{2}\%$ ея?—$33\frac{1}{3}\%$ ея?—250% ея?—Выразить въ процентахъ измѣненіе величины, если она возросла на $\frac{1}{4}$ своего первоначальнаго размѣра?—если она уменьшилась на $\frac{7}{20}$ своего размѣра?—если она возросла въ $3\frac{1}{2}$ раза?—Отъ какого числа 1,25 составляетъ 25%?—9 составляютъ $\frac{3}{4}\%$?—Сколько процентовъ составляютъ 360 отъ 7200?—38 отъ 576?—0,3 отъ 9?—96 отъ 24?

Приводимъ рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ на проценты, помѣщенныхъ въ нашемъ задачникѣ.

306) Бѣлый хлѣбъ въ 72 зол. продается за 5 коп. Сколько процентовъ наживаетъ при этомъ булочникъ, если муку покупаетъ по $6\frac{3}{4}$ коп. за фунтъ и получаетъ 35% припеку?

Рѣшеніе. На хлѣбъ идетъ $(72:135)\times100=\frac{160}{3}$ зол.$=\frac{5}{9}$ фунта муки, которая стоитъ булочнику $6\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}=3\frac{3}{4}$ коп.; слѣд. булочникъ на каждомъ хлѣбѣ получаетъ $5-3\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$ коп. прибыли, что составляетъ $1\frac{1}{4}:(3\frac{3}{4}:100)=33\frac{1}{3}\%$.

307) Торговецъ чаемъ разсчиталъ, что если онъ заготовленный чай будетъ продавать по 1 руб. 40 коп. за фунтъ, то понесетъ $6\frac{2}{3}\%$ убытку, а если тотъ же чай продастъ по 1 р. 65 к. за фунтъ, то получитъ 144 руб. прибыли. Сколько стоилъ торговцу заготовленный имъ чай?

Рѣшеніе. Въ 1 руб. 40 коп. заключается покупная цѣна чаю безъ $6\frac{2}{3}\%$ съ нея, т.-е. $100\% - 6\frac{2}{3}\% = 93\frac{1}{3}\%$ покупной цѣны; слѣд. торговецъ покупалъ чай по $(1$ р. 40 коп. $: 93\frac{1}{3})\times100=1$ р. 50 коп. за фунтъ. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

308) Книгопродавецъ купилъ у автора книгу съ уступкой $33\frac{1}{3}\%$ съ цѣны, назначенной на оберткѣ, а продаетъ ее съ уступкой 15% съ той же цѣны. Сколько процентовъ прибыли онъ получаетъ?

Рѣшеніе. Книгопродавецъ затрачиваетъ на покупку книги $100\%-33\frac{1}{3}\%=66\frac{2}{3}\%$, а продаетъ за $100\%-15\%=85\%$; слѣд. на $66\frac{2}{3}$ единицы наживаетъ $85-66\frac{2}{3}=18\frac{1}{3}$ такихъ же единицъ, а это составляетъ $18\frac{1}{3}:(66\frac{2}{3}:100)=27\frac{1}{2}\%$.

309) Прежде 4 фунта швейцарскаго сыру стоили столько же, сколько теперь стоятъ 3 фунта. На сколько $\%$ вздорожалъ сыръ?

Рѣшеніе. Прежняя цѣна фунта составляла $\frac{1}{4}$ стоимости 4-хъ фунтовъ, а теперешняя составляетъ $\frac{1}{3}$ той же стоимости; значитъ сыръ вздорожалъ на $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ этой стоимости, что составляетъ $\frac{1}{12}:(\frac{1}{4}:100)=33\frac{1}{3}\%$.

310) Кофе вздорожалъ на $14\frac{1}{6}\%$. Сколько фунтовъ его можно купить теперь на тѣ же деньги, на которыя прежде можно было купить 13,7 фунта?

Рѣшеніе. Новая цѣна составляетъ $1+(14\frac{1}{6}:100)=1\frac{17}{120}$ прежней; слѣд. на ту сумму, за которую прежде можно было купить 13,7 фунт., теперь можно купить $13{,}7:1\frac{17}{120}=12$ фунтовъ.

311) Изъ магазина $\frac{3}{8}$ куска сукна продали по 2 р. 40 к. за аршинъ, а остальную часть куска, попортившуюся отъ

долгаго лежанья, по 1 р. 60 к.; такимъ образомъ отъ продажи всего куска получили 4 рубля прибыли, что составило $5\frac{5}{9}\%$. Сколько аршинъ было въ кускѣ?

Рѣшеніе. За весь кусокъ сукна выручили бы ту же самую сумму, что и теперь, если бы изъ каждаго аршина его $\frac{3}{8}$ продали по 2 р. 40 коп. за аршинъ, а $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ по 1 р. 60 коп.; т.-е. если бы аршинъ продавали за 2 р. 40 коп.$\times\frac{3}{8}+1$ р. 60 коп.$\times$ $\times\frac{5}{8}=1$ р. 90 коп. Весь же кусокъ продали за $(4:5\frac{5}{9})\times 105\frac{5}{9}=$ $=76$ руб. Слѣд. въ кускѣ было 76 р.:1 р. 90 коп.$=40$ аршинъ.

325. Въ задачи на сложные проценты входятъ тѣ же величины, что и въ задачи на простые проценты. Задачи на сложные проценты рѣшаются по формулѣ:

$$A=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

гдѣ A наращенный капиталъ, a—начальный капиталъ, p—проценты за періодъ времени, по прошествіи котораго процентныя деньги присчитываются къ капиталу, и n—число такихъ періодовъ, заключающихся во времени оборота капитала. Изъ этой формулы видно, что помощью 4-хъ ариѳметическихъ дѣйствій могутъ быть опредѣлены только наращенный капиталъ и начальный капиталъ. Въ виду сложности вычисленій, при рѣшеніи задачъ на сложные проценты, часто пользуются таблицами наращенія 100 руб. по сложнымъ процентамъ. Въ нашемъ Руководствѣ читатели найдутъ образцы рѣшенія задачъ на сложные проценты.

326. Векселемъ наз. долговое обязательство, въ которомъ обозначены подлежащая уплатѣ сумма и срокъ платежа; размѣръ же процентнаго вознагражденія за заемъ и размѣръ занятой суммы не обозначены. Сумма, обозначенная въ векселѣ. наз. валютой или цѣной векселя.

Должникъ (векселедатель) обязывается произвести уплату по выданному имъ векселю въ назначенный въ этомъ векселѣ срокъ. Поэтому, когда владѣлецъ векселя (векселедержатель) встрѣтитъ надобность въ деньгахъ ранѣе наступленія срока платежа по векселю, то онъ или долженъ вступить въ соглашеніе съ должникомъ о досрочной уплатѣ по векселю, или долженъ продать вексель третьему лицу (для чего въ векселѣ и прибавляется формула: или кому онъ, т.-е. давшій деньги подъ вексель, прикажетъ). При этомъ съ валюты векселя дѣлается нѣкоторая скидка въ вознагражденіе лицу, принявшему вексель, за то, что оно не будетъ пользоваться затраченными деньгами въ теченіе всего времени, остающагося до

срока векселя. Новый владѣлецъ векселя или держитъ его у себя до назначеннаго срока платежа и тогда получаетъ съ векселедателя всю валюту векселя сполна, или передаетъ вексель въ другія руки, также съ соотвѣтствующей скидкой съ валюты. Эта скидка съ валюты векселя называется учетомъ, почему и самая операція перехода векселей изъ однѣхъ рукъ въ другія наз. учетомъ векселей. Размѣръ учета увеличивается вмѣстѣ съ временемъ, остающимся до срока платежа по векселю, и опредѣляется въ процентахъ по соглашенію лицъ, участвующихъ въ операціи. Проценты назначаются обыкновенно годовые, при чемъ принимается во вниманіе общее состояніе денежныхъ оборотовъ во время перехода векселя изъ однѣхъ рукъ въ другія, и состояніе торговыхъ дѣлъ векселедателя. Проценты эти наз. учетными процентами; лица, производящія учетъ векселей, наз. дисконтерами. Многіе банки въ числѣ другихъ своихъ операцій занимаются также и учетомъ векселей.

При краткосрочныхъ займахъ въ бо́льшей части случаевъ выдается не та сумма, которую проситъ занимающій, а съ нея сбрасываются процентныя деньги за все время займа; занимающій же долженъ возвратить всю сумму сполна. Такъ, занимая 1000 руб. на 3 мѣсяца по 8%, мы получимъ только 980 рублей, а 20 руб. будутъ удержаны заимодавцемъ, какъ процентныя деньги съ 1000 р. за 3 мѣс. по 8%; возвратить же мы должны будемъ ровно 1000 р. Если такой заемъ будетъ совершенъ подъ вексель, то валютой векселя будетъ 1000 руб., а получено подъ него только 980 руб.

При продажѣ такого векселя до срока, вполнѣ справедливо будетъ сбросить соотвѣтствующія процентныя деньги съ 1000 р., принимая эту сумму за начальный капиталъ. Такой способъ учета наз. коммерческимъ учетомъ векселей и практикуется почти повсюду въ виду его полнаго соотвѣтствія распространенному способу взиманія процентныхъ денегъ при краткосрочныхъ займахъ и сравнительной легкости вычисленій.

Но иногда занимающему выдается вся просимая имъ сумма; онъ же, по окончаніи срока займа, долженъ возвратить эту сумму съ наросшими на нее процентными деньгами. Занимая на такихъ условіяхъ 1000 руб. по 8% на 3 мѣсяца, мы при заключеніи займа получимъ 1000 руб., а возвратить должны будемъ 1020 руб., т.-е. занятые 1000 руб. и 20 руб. процентныхъ денегъ на нихъ за 3 мѣсяца по 8%. Если такой заемъ будетъ совершенъ подъ вексель, то валютой векселя будетъ 1020 руб. При учетѣ такого векселя до срока, будетъ болѣе справедливо разсматривать валюту его какъ наращенный капиталъ, при чемъ слѣдуетъ сбросить процентныя деньги за время, оставшееся до

срока векселя. Такой способъ учета наз. математическимъ учетомъ векселей.

Такимъ образомъ, при коммерческомъ учетѣ валюта векселя разсматривается какъ начальный капиталъ; учетъ представляетъ собою процентныя деньги съ этого капитала за время, оставшееся до срока векселя, а уплачиваемая за вексель сумма есть уменьшенный капиталъ. При математическомъ учетѣ валюта векселя разсматривается какъ наращенный капиталъ, уплачиваемая за вексель сумма какъ начальный капиталъ, а учетъ представляетъ процентныя деньги съ этого капитала за время, остающееся до срока векселя.

Математическій учетъ векселей пельзя считать правильнѣе коммерческаго, какъ это можно предполагать по ихъ названіямъ. Напротивъ, коммерческій учетъ, какъ мы уже замѣтили выше, вполнѣ соотвѣтствуетъ наиболѣе распространенному способу сдѣлокъ при краткосрочныхъ займахъ, и въ немъ, какъ при выдачѣ векселя, такъ и при всѣхъ его переходахъ изъ рукъ въ руки, проценты считаются съ одной и той же суммы; въ математическомъ же учетѣ при каждомъ переходѣ векселя изъ рукъ въ руки проценты считаются все съ новой суммы.

Оба способа учета представляютъ приближеніе болѣе точнаго учета по сложнымъ процентамъ. Точный учетъ долженъ быть прозводимъ по формулѣ $a=A:(1+{}^{p}/_{100})^{n}$, гдѣ A—валюта векселя, a—сумма, уплачиваемая за вексель, p—проценты за періодъ времени, по прошествіи котораго процентныя деньги присчитываются къ капиталу, и n—число такихъ періодовъ времени, остающихся до срока векселя. Если $(1+{}^{p}/_{100})^{n}$ разложимъ по формулѣ Ньютона и въ полученной формулѣ $a=A:[1+n\,{}^{p}/_{100}+\frac{n(n-1)}{1.2}({}^{p}/_{100})^{2}+\ldots]$ ограничимся двумя первыми членами, то получимъ формулу математическаго учета $a=A:(1+n\,.\,p/_{100})$, принадлежащую Гофману. Если формулу точнаго учета представимъ въ видѣ $a=A(1+{}^{p}/_{100})^{-n}$, разложимъ $(1+{}^{p}/_{100})^{-n}$ по формулѣ Ньютона и въ полученной формулѣ $a=A[1-n.{}^{p}/_{100}+\frac{n(n+1)}{1.2}({}^{p}/_{100})^{2}+\ldots]$ ограничимся тоже двумя первыми членами, то получимъ формулу коммерческаго учета $a=A(1-n.{}^{p}/_{100})$, принадлежащую Карпцову.

Для дисконтера коммерческій учетъ выгоднѣе математическаго, потому что въ коммерческомъ учетѣ проценты считаются со всей валюты, а при математическомъ съ меньшей суммы, такъ какъ валюта разсматривается какъ наращенный капиталъ.

Кромѣ этихъ двухъ способовъ учета векселей, предлагаются и другіе способы, но всѣ они представляютъ собою только видоизмѣненія этихъ двухъ, не имѣютъ никакихъ преимуществъ сравнительно съ ними и не вошли въ практику.

Изъ сказаннаго выше о коммерческомъ и математическомъ учетѣ векселей ясно, что задачи на учеть векселей представляютъ собою только особеннымъ образомъ выраженныя задачи на простые проценты. Такихъ задачъ на каждый родъ учета можетъ быть 5 типовъ: 1) опредѣленія учета и суммы, платимой за вексель, 2) опредѣленіе учетныхъ процентовъ, 3) опредѣленіе срока векселя, 4) опредѣленіе валюты по данному учету и 5) опредѣленіе валюты по суммѣ, уплаченной за вексель.

Рѣшеніе всѣхъ этихъ задачъ читатели найдутъ въ нашемъ „Руководствѣ ариѳметики“. Затрудненія при ихъ рѣшеніи происходятъ главнымъ образомъ отъ недостаточнаго пониманія дѣтьми всѣхъ условій задачъ, заслоненныхъ терминами: учетъ, дисконтеръ, векселедатель, валюта векселя и т. п., а отчасти и отъ ни на чемъ не основаннаго мнѣнія, будто задачи на учеть векселей представляютъ нѣчто отличное отъ задачъ на простые проценты. Приводимъ рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, помѣщенныхъ въ нашемъ задачникѣ.

312) Два векселя на одну и ту же сумму проданы за 8 мѣс. до срока, одинъ съ мат. учетомъ по $7{}^{1}/_{2}{}^{0}/_{0}$, а другой съ коммерческимъ. По скольку $^{0}/_{0}$ сдѣланъ комм. учетъ, если за оба векселя получено поровну?

Рѣшеніе. За 8 мѣс. учтено $7{}^{1}/_{2}{}^{0}/_{0}\times{}^{2}/_{3}=5{}^{0}/_{0}$. При математическомъ учетѣ учтенная сумма составляетъ $5:105={}^{1}/_{21}$ валюты. Такъ какъ оба векселя проданы за одну и ту же сумму, то и при коммерческомъ учетѣ учтенная сумма должна составлять ${}^{1}/_{21}$ валюты. При коммерческомъ учетѣ въ валютѣ считается $100{}^{0}/_{0}$; слѣд. ${}^{1}/_{21}$ ея составитъ $100\times{}^{1}/_{21}={}^{100}/_{21}{}^{0}/_{0}$. Это въ 8 мѣсяцевъ, а въ годъ ${}^{100}/_{21}:{}^{2}/_{3}=7{}^{1}/_{7}{}^{0}/_{0}$.

313) Два векселя на одну и ту же сумму проданы за $4{}^{1}/_{2}$ мѣс. до срока, одинъ съ комм. учетомъ по $6{}^{1}/_{4}{}^{0}/_{0}$, а другой съ математическимъ. По скольку $^{0}/_{0}$ сдѣланъ матем. учетъ, если за оба векселя выручено поровну?

Рѣшеніе. За $4{}^{1}/_{2}$ мѣс. до срока учтено $6{}^{1}/_{4}{}^{0}/_{0}\times{}^{3}/_{8}=2{}^{11}/_{32}{}^{0}/_{0}$; при коммерческ. учетѣ это составляетъ $2{}^{11}/_{32}:100={}^{3}/_{128}$ валюты. По условію задачи такая же часть валюты учтена и математически. При математическомъ учетѣ за начальный капиталъ принимается сумма, за которую вексель проданъ. Если учтено ${}^{3}/_{128}$ валюты, то вексель проданъ за $1-{}^{3}/_{128}={}^{125}/_{128}$ валюты. Одинъ про-

центъ съ этой суммы есть $^{125}/_{128} : 100 = {}^{5}/_{512}$ валюты; слѣд. математически учтено въ $4^1/_2$ мѣс. $^3/_{128} : {}^{5}/_{512} = {}^{12}/_{5}\,^0/_0$, а въ годъ $^{12}/_5 : {}^3/_8 = 6^2/_5\,^0/_0$.

314) Что выгоднѣе, продать ли вексель, подлежащій уплатѣ черезъ $2^1/_2$ мѣс., съ комм. учетомъ по $5^{25}/_{27}\,^0/_0$, или съ матем. по $6^0/_0$?

Рѣшеніе. Коммерчески по $5^{22}/_{27}\,^0/_0$ годовыхъ за $2^1/_2$ мѣс. слѣдуетъ учесть $5^{23}/_{27} \times {}^{5}/_{24} = {}^{100}/_{81}\,^0/_0$, что составляетъ $^{100}/_{81} : 100 = {}^{1}/_{81}$ валюты векселя. Математически по $6^0/_0$ годовыхъ за $2^1/_2$ мѣс. слѣдуетъ учесть $6 \times {}^{5}/_{24} = {}^{5}/_{4}\,^0/_0$, что составитъ $^5/_4 : (100 + {}^5/_4) = {}^1/_{81}$ валюты векселя. Слѣд. оба учета одинаково выгодны.

Въ заключеніе замѣтимъ, что учетъ векселей безъ ущерба какъ для развитія учащихся, такъ и для полноты курса можно выпустить изъ общеобразовательнаго курса ариѳметики. Мѣсто этого рода задачъ скорѣе въ коммерческой ариѳметикѣ. Рѣшеніе ихъ на столько условно, что до сихъ поръ предлагаются новые способы учета и продолжаютъ спорить объ относительной вѣрности различныхъ способовъ учета. Мы, какъ замѣчено выше, и коммерческій, и математическій учетъ считаемъ одинаково условными и соотвѣтствующими двумъ способамъ уплаты процентныхъ денегъ— по истеченіи срока займа и въ началѣ этого срока.

327. Къ задачамъ на процентныя вычисленія примыкаютъ задачи на вычисленіе сроковъ. Приводимъ нѣкоторыя изъ нихъ.

315) Купецъ обязался уплатить за купленный товаръ 2100 руб. черезъ $5^1/_2$ мѣсяц., 630 руб. черезъ 8 мѣс. и остальные 840 руб. черезъ 10 мѣс. Черезъ сколько мѣсяцевъ онъ можетъ уплатить всю сумму заразъ?

Рѣшеніе. 2100 р. въ $5^1/_2$ мѣсяц. принесутъ такую же прибыль, какъ 2100 руб.$\times 5^1/_2$ въ 1 мѣсяц., 630 руб. въ 8 мѣс. принесутъ столько же прибыли, сколько 630 руб.$\times 8$ въ 1 мѣс., и 840 руб. въ 10 мѣс. принесутъ столько же прибыли, сколько 840 руб.$\times 10$ въ 1 мѣсяцъ; слѣд. всѣ эти три капитала въ назначенные для нихъ сроки уплаты принесутъ купцу такую же прибыль, какую

$$2100 \,.\, 5^1/_2 + 630 \,.\, 8 + 840 \,.\, 10 = 11550 + 5040 + 8400 = 24990 \text{ руб.}$$

въ 1 мѣс. Чтобы купецъ ничего не потерялъ отъ перемѣны условій платежа, уплачиваемая заразъ сумма

$$2100 + 630 + 840 = 3570 \text{ руб.}$$

должна принести такую же прибыль, какую приносятъ всѣ ея составныя части въ назначенные для нихъ сроки, т.-е. такую же прибыль, какую 24990 руб. приносятъ въ 1 мѣс., а для этого

3570 руб. должны быть отданы черезъ столько мѣсяцевъ, сколько разъ 3750 руб. содержатся въ 24990 руб., т.-е. черезъ

$$24990 : 3570 = 7$$

мѣсяцевъ. Слѣд. всю сумму 3570 руб. купецъ можетъ уплатить черезъ 7 мѣсяц. послѣ покупки товара.

316) Нѣкто обязался заплатить по векселю 1750 р. черезъ 8 мѣс., но затѣмъ вошелъ съ кредиторомъ въ соглашеніе объ уплатѣ одной части этой суммы черезъ 5 мѣсяцевъ, а остальной части черезъ годъ. Сколько рублей онъ долженъ уплатить въ каждый изъ этихъ сроковъ?

Рѣшеніе. 1750 руб. въ 8 мѣс. принесутъ должнику такую же прибыль, какую $1750 \times 8 = 14000$ руб. въ 1 мѣс. Если бы онъ всю сумму 1750 руб. уплатилъ кредитору черезъ годъ, то она дала бы ему такую же прибыль, какая получится въ 1 мѣс. съ $1750 \times 12 = 21000$ руб., и такимъ образомъ онъ получилъ бы прибыли больше, чѣмъ слѣдуетъ, и на столько, сколько получается прибыли въ 1 мѣс. съ $21000 - 14000 = 7000$ руб. Чтобы эту прибыль возвратить кредитору, должникъ отдаетъ часть 1750 рублей на $12 - 5 = 7$ мѣс. раньше; слѣд. эта часть должна быть такова, чтобы въ 7 мѣсяц. могла принести такую же прибыль, какую 7000 руб. приносятъ въ 1 мѣс., т.-е. она должна равняться 7000 руб. : 7 = 1000 руб. Слѣд. черезъ 5 мѣс. должникъ долженъ уплатить кредитору 1000 руб., а черезъ годъ остальные 1750 руб.—1000 руб.=750 р.

317) Нѣкто отдалъ 3600 руб. въ одинъ банкъ по $3^1/_2\,^0/_0$, 2400 руб. въ другой банкъ по $4^0/_0$ и 4800 руб. въ третій банкъ по $5^1/_2\,^0/_0$. По скольку процентовъ онъ долженъ отдать всѣ эти деньги въ одинъ банкъ, чтобы получать столько же процентныхъ денегъ, сколько онъ получаетъ теперь?

Рѣшеніе. Съ 3600 руб. по $3^1/_2\,^0/_0$ онъ получитъ теперь столько же процентныхъ денегъ, сколько получится съ $3600 \times 3^1/_2 = 12600$ р., отданныхъ по $1^0/_0$; съ 2400 руб. по $4^0/_0$ онъ получаетъ столько же процентныхъ денегъ, сколько съ $2400 \times 4 = 9600$ руб., отданныхъ по $1^0/_0$; съ 4800 руб. по $5^1/_2\,^0/_0$ онъ получаетъ столько же процентныхъ денегъ, сколько съ $4800 \times 5^1/_2 = 26400$ руб., отданныхъ по $1^0/_0$; слѣд. со всей суммы

$$3600 + 2400 + 4800 = 10800 \text{ руб.}$$

онъ получаетъ теперь столько же процентныхъ денегъ, сколько съ

$$12600 + 9600 + 26400 = 48600 \text{ руб.,}$$

отданныхъ по $1^0/_0$. Чтобы получить такія же процентныя деньги съ 10800 руб., ихъ надо отдать по $48600 : 10800 = 4^1{}_2\,^0/_0$.

Эти $4^1/_2\,^0/_0$ наз. с р е д н и м ъ п р о ц е н т о м ъ.

318) Купецъ долженъ былъ уплатить за товаръ 3630 руб. черезъ 3 мѣс. вмѣстѣ съ процентными деньгами по $7\frac{1}{2}\%$ и 1815 руб. черезъ 7 мѣс. вмѣстѣ съ процентными деньгами по 5%. Черезъ сколько времени и по скольку % онъ можетъ уплатить весь этотъ долгъ заразъ?

Рѣшеніе. Вычисляемъ средній процентъ:

$$\frac{3630\times7\frac{1}{2}+1815\times5}{3630+1815}=\frac{27225+9075}{5445}=6\frac{2}{3}.$$

Итакъ всѣ 5445 руб. должны быть уплачены по $6\frac{2}{3}\%$. Эта уплата должна быть произведена черезъ такое время, въ какое 5445 руб. принесутъ столько же процентныхъ денегъ, сколько приносятъ 3630 руб. въ 3 мѣс. по $7\frac{1}{2}\%$ и 1815 руб. въ 7 мѣс. по 5%. Такимъ образомъ задача приводится къ правилу процентовъ. Но ее можно рѣшить и иначе: 3630 въ 3 мѣс. по $7\frac{1}{2}\%$ и 1815 руб. въ 7 мѣс. по 5% принесутъ столько же процентныхъ денегъ, сколько $3630.7\frac{1}{2}.3+1815.5.7=81675+63525=145200$ руб. въ 1 мѣс. по 1%, а 5445 руб. по $6\frac{2}{3}\%$ приносятъ ежемѣсячно столько же процентныхъ, сколько $5445\times6\frac{2}{3}=36300$ р. приносятъ ежемѣсячно по 1%; слѣд. 5445 руб. должны быть уплачены черезъ столько мѣсяцевъ, сколько разъ въ 145200 содержится 36300 р., т.-е. черезъ $145200:36300=4$ мѣс.

319) Купецъ обязался уплатить фабриканту 450 руб. тотчасъ послѣ доставки товара на мѣсто, а остальные 300 руб. черезъ 5 мѣс., но уплатилъ весь долгъ съ процентами, всего 753,75 руб., черезъ 3 мѣс. Сколько % получилъ фабрикантъ?

Рѣшеніе. На 300 руб. въ 5 мѣс. купецъ получилъ столько же процентныхъ денегъ, сколько въ 1 мѣс. получается съ $300.5=1500$ р.; поэтому всю сумму 750 руб. онъ могъ отдать заразъ черезъ $1500:750=2$ мѣс., а отдалъ ее черезъ 3 мѣс., т.-е. пользовался ею лишній мѣсяцъ. За этотъ мѣсяцъ онъ уплатилъ $753,75-750=3,75$ руб. процентныхъ денегъ, слѣд. въ годъ долженъ былъ бы уплатить $3,75\times12=45$ руб., что составитъ $45:7,5=6\%$.

328. Примѣненіе пропорціональнаго дѣленія къ задачамъ на смѣшеніе и всѣ пріемы рѣшенія задачъ этого рода читатель найдетъ въ нашемъ руководствѣ. Здѣсь покажемъ только примѣненіе метода подобія къ задачамъ на смѣшеніе.

320) По скольку надо взять золота 92-й и 56-й пробы, чтобы получить 1 ф. 4 лота золота 84-й пробы?

Рѣшеніе. Если мы возьмемъ 7 фунт. золота 92-й пробы, то въ немъ будетъ чистаго золота $92\times7=56_0$ зол. лишнихъ

противъ требуемыхъ 84-й пробы; чтобы закрыть этотъ лишекъ, надо къ 7 ф. золота 92-й пробы добавить $56:(84-56)=2$ ф. золота 56-й пробы; тогда получимъ $7+2=9$ ф. золота 84-й пробы. А намъ надо получить такого золота только 1 ф. 4 лота, т.-е. въ 9 ф.: 1 ф. 4 л.$=8$ разъ меньше; поэтому и золота каждой пробы надо взять въ 8 разъ меньше, т.-е. золота 92-й пробы надо взять $\frac{7}{8}$ фунта$=28$ лот., и золота 56 пробы $\frac{2}{8}$ ф.$=8$ лот.

329. Въ заключеніе приводимъ рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, не относящихся непосредственно къ какому-либо изъ разсмотрѣнныхъ правилъ и помѣщенныхъ въ нашемъ задачникѣ въ отдѣлѣ: „Задачи на всѣ дѣйствія и правила“.

321) $12{,}6:\left[5\frac{2}{15}+\left(5\frac{5}{9}-\frac{8\frac{3}{4}}{?:\frac{8}{21}-1\frac{2}{5}}\right)\times5\frac{68}{125}\right]-\frac{2}{11}=0{,}8$

Рѣшеніе.

$$1)\ 0{,}8+\frac{2}{11}=\frac{4}{5}+\frac{2}{11}=\frac{44+10}{55}=\frac{54}{55};$$

$$2)\ 12{,}6:\frac{54}{55}=12\frac{3}{5}:\frac{54}{55}=\frac{\overset{7}{\cancel{63}}\cdot\overset{11}{\cancel{55}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{6}{\cancel{54}}}=\frac{77}{6}=12\frac{5}{6};$$

$$3)\ 12\frac{5}{6}-5\frac{2}{15}=7\frac{25-4}{30}=7\frac{7}{10};\quad 4)\ 7\frac{7}{10}:5\frac{68}{125}=\frac{\overset{1}{\cancel{77}}\cdot\overset{25}{\cancel{125}}}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\underset{9}{\cancel{685}}}=\frac{25}{18}=1\frac{7}{18};$$

$$5)\ 5\frac{5}{9}-1\frac{7}{18}=4\frac{10-7}{18}=4\frac{1}{6};\quad 6)\ 8\frac{3}{4}:4\frac{1}{6}=\frac{\overset{7}{\cancel{35}}\cdot\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\cdot\underset{5}{\cancel{25}}}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10};$$

$$7)\ 2\frac{1}{10}+1\frac{2}{5}=3\frac{1+4}{10}=3\frac{1}{2};\quad 8)\ 3\frac{1}{2}\times\frac{8}{21}=\frac{\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{3}{\cancel{21}}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}.$$

322) Нѣкоторое число надо было вычесть изъ 100,2, разность умножить на 5,04 и произведеніе раздѣлить на 20,25. Для ускоренія вычисленія въ уменьшаемомъ откинули послѣднюю цыфру, къ вычитаемому прибавили 0,025, но, не исправивъ разности, сдѣлали еще ошибку, вставивъ во множителѣ послѣ запятой лишній нуль: результатъ получился на 0,1008 меньше вѣрнаго. Какой результатъ получили? Найти вѣрный результатъ.

Рѣшеніе. Частное получилось меньше требуемаго на 0,1008; слѣд. дѣлимое было меньше требуемаго на $0{,}1008\times20{,}25=2{,}0412$. Это дѣлимое было произведеніемъ и произведеніе получилось мень-

ше требуемаго отъ измѣненія множимаго и множителя. Узнаемъ, какое измѣненіе сдѣлано во множимомъ. Множимое есть разность; отъ уменьшаемаго 100,2 отнято 0,2, а къ неизвѣстному вычитаемому прибавлено 0,025; отъ этого разность уменьшилась на 0,2+ +0,025=0,225. Итакъ отъ множимаго отнято 0,225; отъ этого произведеніе уменьшилось на $0{,}225 \times 5{,}004 = 1{,}1259$. Всего же произведеніе, какъ мы нашли, получилось меньше требуемаго на 2,0412; слѣд. отъ измѣненія множителя произведеніе уменьшилось на 2,0412—1,1259=0,9153. Отъ множителя было отнято 5,04—5,004= =0,036; слѣд. отъ произведенія отнялось 0,036 множимаго, что составляетъ 0,9153; все множимое равно $0{,}9153 : 0{,}036 = 25{,}425$; вѣрный результатъ есть $25{,}425 \times 5{,}04 : 20{,}25 = 6{,}328$; невѣрный 6,328—0,1008=6,2272.

323) При сложеніи двухъ десятичныхъ чиселъ, сумма которыхъ 312,5, въ бо́льшемъ числѣ по ошибкѣ запятую поставили на 2 знака, а въ меньшемъ числѣ на 1 знакъ лѣвѣе, чѣмъ слѣдовало; въ суммѣ получилось 7,37525. Опредѣлить слагаемыя.

Рѣшеніе. Поставивъ въ бо́льшемъ числѣ запятую на 2 знака, а въ меньшемъ числѣ на одинъ знакъ лѣвѣе, мы беремъ 0,01 бо́льшаго числа и 0,1 меньшаго. Онѣ, какъ сказано въ задачѣ, даютъ вмѣстѣ 7,37525; изъ перваго же условія находимъ, что 0,1 бо́льшаго числа вмѣстѣ съ 0,1 меньшаго даютъ 31,25. Отсюда слѣдуетъ, что 0,09 бо́льшаго числа составляютъ 31,25 — 7,37525 = = 23,87475. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

324) Два брата купили вмѣстѣ имѣніе въ 19000 руб. и домъ въ 12000 руб. За имѣніе старшій братъ отдалъ $^3/_4$ своихъ денегъ и младшій $^2/_7$ своихъ, а за домъ старшій братъ отдалъ $^1/_5$ своихъ денегъ и младшій $^4/_7$ своихъ. Сколько денегъ осталось у каждаго брата?

Рѣшеніе. Если бы домъ стоилъ вдвое дешевле, т.-е. 12000 : 2= =6000 руб., то старшему брату пришлось бы за него заплатить $^1/_5 : 2 = {}^1/_{10}$ своихъ денегъ, а младшему $^4/_7 : 2 = {}^2/_7$ своихъ денегъ, т.-е. младшему брату за домъ пришлось бы заплатить столько же, сколько и за имѣніе; поэтому въ разности 19000—6000=13000 р. между цѣною имѣнія и половиною цѣны дома заключается $^3/_4 - {}^1/_{10} = {}^{13}/_{20}$ денегъ старшаго брата. Остальное рѣшеніе понятно.

325) Въ бассейнъ проведены три трубы: первая и вторая вмѣстѣ наполняютъ его въ 12 часовъ; вторая и третья въ 13 час. 20 мин., первая и третья въ $10^{10}/_{11}$ час. Во сколько времени каждая труба отдѣльно можетъ наполнить бассейнъ?

Рѣшеніе. Первая и вторая трубы наполняютъ въ часъ $1 : 12 = {}^1/_{12}$ бассейна, вторая и третья $1 : 13^1/_3 = {}^3/_{40}$, первая и третья $1 : 10^{10}/_{11} = {}^{11}/_{120}$ бассейна. Всѣ три трубы въ 2 часа наполняютъ $^1/_{12} + {}^3/_{40} + {}^{11}/_{120} = {}^1/_4$ бас., а въ 1 часъ $^1/_4 : 2 = {}^1/_8$ бассейна. Одна третья въ часъ наполняетъ $^1/_8 - {}^1/_{12} = {}^1/_{24}$ басс., а цѣлый бассейнъ наполнитъ въ $1 : {}^1/_{24} = 24$ часа. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

326) Офицеръ разсчиталъ, что онъ догонитъ свой отрядъ къ назначенному сроку, если будетъ ѣхать по 15 верстъ въ часъ. На самомъ же дѣлѣ онъ первые $1^1/_2$ часа ѣхалъ по $16^2/_3$ версты въ часъ, а затѣмъ по $15^3/_8$ верст.; вслѣдствіе этого онъ догналъ свой отрядъ $^1/_2$ час. раньше назначеннаго срока. Сколько времени офицеръ ѣхалъ, если отрядъ его проходилъ по $4^1/_4$ верст. въ часъ?

Рѣшеніе. Офицеру надо было наверстать все то разстояніе, которое отрядъ прошелъ до его выѣзда. Проѣзжая по $16^2/_3$ вер. въ часъ, онъ догонялъ отрядъ каждый часъ на $16^2/_3 - 4^1/_4 = 12^5/_{12}$ вер., въ $1^1/_2$ час. онъ догналъ его на $12^5/_{12} \times 1^1/_2 = 18^5/_8$ вер.; догоняя же отрядъ въ часъ на $15^3/_8 - 4^1/_4 = 11^1/_8$ верст., онъ то же самое разстояніе наверстаетъ въ $18^5/_8 : 11^1/_8 = 1^{60}/_{89}$ час. Слѣд. двигаясь все время со скоростью $15^3/_8$ вер. въ часъ, офицеръ выгадаетъ во времени только $^1/_2 - (1^{60}/_{89} - 1^1/_2) = {}^1/_2 - {}^{31}/_{178} = {}^{29}/_{89}$ час. Двигаясь со скоростью $15^3/_8$ вер. въ часъ, офицеръ, чтобы наверстать одну версту, затрачиваетъ $1 : 11^1/_8 = {}^8/_{89}$ час., а двигаясь со скоростью 15 вер. въ часъ, онъ на 1 вер. затрачиваетъ $1 : (15 - 4^1/_4) = 1 : 10^3/_4 = {}^4/_{43}$ часа. Такимъ образомъ, выигрывая на каждой верстѣ, которую ему нужно наверстать, $^4/_{43} - {}^8/_{89} = {}^{12}/_{3827}$ часа, онъ на всемъ разстояніи выигрываетъ $^{29}/_{89}$ часа, а потому все разстояніе, которое отрядъ прошелъ до выѣзда офицера и которое офицеру надо наверстать, заключаетъ въ себѣ $^{29}/_{89} : {}^{12}/_{3827} = 103^{11}/_{12}$ версты. Изъ нихъ онъ въ $1^1/_2$ часа наверсталъ $18^5/_8$ версты, слѣд. двигаясь со скоростью $15^3/_8$ в. въ часъ, ему пришлось наверстывать $103^{11}/_{12} - 18^5/_8 = 85^7/_{24}$ версты, на что потребовалось $85^7/_{24} : 11^1/_8 = 7^2/_3$ часа. Всего офицеръ догонялъ свой отрядъ въ теченіе $1^1/_2 + 7^2/_3 = 9^1/_6$ часа.

327) Банкиръ 120000 руб. помѣстилъ въ три предпріятія; первое давало $7^1/_2{}^0/_0$, второе $8^3/_4{}^0/_0$ и третье $6^7/_8{}^0/_0$. Сколько денегъ помѣстилъ банкиръ въ каждое предпріятіе, если съ перваго въ 1 г. 25 дн. онъ получилъ столько же прибыли, сколько со второго въ 7 мѣс. 10 дн. и сколько съ третьяго въ 5 м. 18 дн.?

Рѣшеніе. Если бы всѣ три предпріятія дали одинаковую прибыль за одно и то же время, то капиталы, вложенные въ нихъ,

были бы обратно-пропорціональны процентнымъ измѣненіямъ, т.-е. числамъ $7\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$, $6\frac{7}{8}$. Прибыли, полученныя съ трехъ предпріятій за одно и то же время, обратно-пропорціональны числамъ 1 г. 25 дн.$=$ $=12\frac{5}{6}$ мѣс., 7 м. 10 дн.$=7\frac{1}{3}$ мѣс. и 5 м. 18 дн.$=5\frac{3}{5}$ мѣс. Если бы такія прибыли были получены съ капиталовъ, приносящихъ одинаковый процентъ, то капиталы были бы прямо-пропорціональны этимъ прибылямъ. Отсюда заключаемъ, что капиталы, помѣщенные, въ три предпріятія, должны быть обратно-пропорціональны числамъ $7\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{4}$, $6\frac{7}{8}$, или прямо пропорціональны обращеннымъ числамъ $1 : 7\frac{1}{2} = \frac{2}{15}$, $1 : 8\frac{3}{4} = \frac{4}{35}$, $1 : 6\frac{7}{8} = \frac{8}{55}$, и обратно-пропорціональны числамъ $12\frac{5}{6}$, $7\frac{1}{3}$, $5\frac{3}{5}$, или прямо-пропорціональны числамъ $1 : 12\frac{5}{6} = \frac{6}{77}$, $1 : 7\frac{1}{3} = \frac{3}{22}$, $1 : 5\frac{3}{5} = \frac{3}{28}$. Слѣд. 120000 надо раздѣлить пропорціонально произведеніямъ:

$$\frac{2 \cdot 6}{15.77} : \frac{4 \cdot 3}{35.22} : \frac{8 \cdot 5}{55.28} = 2 : 3 : 5.$$

Найдемъ, что въ первое предпріятіе было помѣщено 24000, во второе 36000 и въ третье 60000 руб.

Иначе. Чтобы ту прибыль, которую первый капиталъ приноситъ въ 1 г. 25 дн. по $7\frac{1}{2}\%$, принести въ 1 годъ, капиталъ этотъ долженъ приносить $7\frac{1}{2} \times 1\frac{5}{72} = 8\frac{1}{48}\%$. Точно такъ же найдемъ, что второй капиталъ долженъ приносить $5\frac{25}{72}\%$ и третій $3\frac{5}{24}\%$, чтобы въ годъ дать такую же прибыль, которую второй даетъ въ 7 м. 10 дн. и третій въ 5 м. 18 дн. Итакъ, если бы всѣ три предпріятія давали одинаковую прибыль въ годъ, то капиталы, помѣщенные въ нихъ, приносили бы первый $8\frac{1}{48}\%$, второй $5\frac{25}{72}\%$ и третій $3\frac{5}{24}\%$; а потому эти капиталы должны быть обратно-пропорціональны числамъ $8\frac{1}{48}$, $5\frac{25}{72}$, $3\frac{5}{24}$. Слѣд. 120000 надо раздѣлить прямо-пропорціонально числамъ

$$(1 : 8\tfrac{1}{48}) : (1 : 5\tfrac{25}{72}) : (1 : 3\tfrac{5}{24}) = 2 : 3 : 5.$$

Иначе. Положимъ, что прибыль, приносимая первымъ предпріятіемъ въ 1 г. 25 дн., вторымъ въ 7 м. 10 дн. и третьимъ въ 5 м. 18 дн., равна 770 руб. Тогда въ первое предпріятіе былъ бы помѣщенъ капиталъ $(770 : 1\frac{5}{72} : 7\frac{1}{2}) \times 100 = 9600$ р., во второе $(770 : \frac{11}{18} : 8\frac{3}{4}) \times 100 = 14400$ руб., въ третье $(770 : \frac{7}{15} : 6\frac{7}{8}) \times 100 =$ $= 24000$ руб., а во всѣ три предпріятія было бы помѣщено $9600 + 14400 + 24000 = 48000$ руб. Въ задачѣ же сказано, что во всѣ три предпріятія помѣщено 120000, т.-е. въ $120000 : 48000 = 2\frac{1}{2}$ раза больше; слѣд. и въ каждое предпріятіе помѣщено въ $2\frac{1}{2}$ раза больше, т.-е. въ первое $9600 \times 2\frac{1}{2} = 24000$ руб., во второе $14400 \times 2\frac{1}{2} = 36000$ р. и въ третье $24000 \times 2\frac{1}{2} = 60000$ руб.

328) Въ училищѣ 2 класса; число учениковъ перваго класса относилось къ числу учениковъ второго какъ 9 : 8; когда же изъ второго класса вышло 10 человѣкъ, то это отношеніе измѣнилось въ 3 : 2. Сколько учениковъ было въ училищѣ?

Рѣшеніе. Число учениковъ второго класса составляло $\frac{8}{9}$ числа учениковъ перваго; когда же изъ второго класса вышло 10 человѣкъ, то оно стало составлять только $\frac{2}{3}$ числа учениковъ перваго. Такимъ образомъ, отнявъ отъ числа учениковъ второго класса 10, мы его уменьшили на $\frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ числа учениковъ перваго класса. Слѣд. $\frac{2}{9}$ числа учениковъ перваго класса равно 10, все число учениковъ перваго класса равно $10 : \frac{2}{9} = 45$, число учениковъ второго класса равно $45 \times \frac{8}{9} = 40$, а всего въ училищѣ было $45 + 40 = 85$ учениковъ.

329) Чтобы провести шоссе на разстояніи $4\frac{3}{4}$ версты, были наняты двѣ артели рабочихъ; первая, въ 60 человѣкъ, занимаясь ежедневно по $7\frac{1}{2}$ час., въ 12 дней устроила шоссе на разстояніи 2 в. 250 саж., а вторая, въ 40 человѣкъ, остальную часть шоссе устроила въ 8 дней, при чемъ 10 человѣкъ изъ нея работали только въ теченіе 3-хъ дней. По скольку часовъ въ день работала вторая артель, если 5 рабочихъ первой артели въ $2\frac{1}{2}$ часа могли устроить шоссе на такомъ же разстояніи, на какомъ 3 рабочихъ второй артели въ $1\frac{7}{8}$ часа?

Рѣшеніе. Вторая артель устроила $4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$ версты шоссе, при чемъ 30 человѣкъ изъ нея работали 8 дней, а 10 человѣкъ 3 дня. Работа 30 человѣкъ въ 8 дней равносильна работѣ $30.8 = 240$ человѣкъ въ одинъ день, а работа 10 человѣкъ въ 3 дня равносильна работѣ $10.3 = 30$ человѣкъ въ одинъ день; слѣд. работа всей второй артели равносильна работѣ $240 + 30 = 270$ человѣкъ въ одинъ день, а потому каждый рабочій второй артели устраивалъ шоссе въ одинъ день на протяженіи $2\frac{1}{4} : 270 = \frac{1}{120}$ версты, а 30 человѣкъ изъ нея въ теченіе 8-ми дней устроили шоссе на протяженіи $\frac{1}{120} \times 30 \times 8 = 2$ верстъ. Каждый рабочій первой артели устраивалъ шоссе въ одинъ часъ на протяженіи $2\frac{1}{2} : 60 : 12 : 7\frac{1}{2} =$ $= \frac{1}{2160}$ версты. Если 5 рабочихъ первой артели въ $2\frac{1}{2}$ часа устраивали шоссе на такомъ же протяженіи, на какомъ 3 рабочихъ второй въ $1\frac{7}{8}$ час., то въ $5 \times 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ час. одинъ рабочій первой артели устраивалъ шоссе на такомъ же протяженіи, на какомъ въ $3 \times 1\frac{7}{8} = 5\frac{3}{8}$ час. одинъ рабочій второй артели. Рабочій первой артели въ $12\frac{1}{2}$ час. устраивалъ шоссе на протяженіи $\frac{1}{2160} \times 12\frac{1}{2} =$ $= \frac{5}{864}$ версты; слѣд. рабочій второй артели устраивалъ шоссе въ 1 часъ на протяженіи $\frac{5}{864} : 5\frac{3}{8} = \frac{1}{972}$ версты, а 30 человѣкъ устраивали въ 1 часъ на протяженіи $\frac{1}{972} \times 30 = \frac{5}{162}$ версты. Всего же имъ надо было устроить 2 версты; слѣд. они работали въ теченіе $2 : \frac{5}{162} = 64\frac{4}{5}$ часовъ, а въ день по $64\frac{4}{5} : 8 = 8{,}1$ час.

330) За перевозку товара по желѣзной дорогѣ два купца заплатили 284 р. 90 коп. Первый перевезъ 6 ящиковъ чаю, по $1^1/_2$ пуда въ каждомъ, 12 ящиковъ кофе, по 2 пуда въ каждомъ, и 56 боченковъ винограду, по $2^1/_4$ пуда въ каждомъ, а второй 9 ящиковъ чаю, по $1^1/_3$ пуда въ каждомъ, 8 ящиковъ кофе, по $1^2/_3$ пуда въ каждомъ, и 60 боченковъ винограду, по $2^1/_3$ пуда въ каждомъ. Сколько денегъ долженъ заплатить каждый купецъ, если платы за одинаковыя количества чаю, кофе и винограду относятся между собою какъ $3^1/_3 : 2^1/_2 : {}^5/_6$?

Рѣшеніе. Чаю всего перевезено $1^1/_2 \times 6 + 1^1/_3 \times 9 = 21$ пудъ, кофе $2 \times 12 + 1^2/_3 \times 8 = 37^1/_3$ пуда, винограду $2^1/_4 \times 56 + 2^1/_3 \times 60 = 266$ пуд. Чтобы узнать, что стоитъ перевозка чаю, кофе и винограду въ отдѣльности, надо 284 р. 90 коп. раздѣлить пропорціонально произведеніямъ $21 . 3^1/_3, 37^1/_3 . 2^1/_2, 266 . {}^5/_6$. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

331) Смѣшано 9 фунтовъ орѣховъ одного сорта съ 11 фунт. другого и съ 7-ю фунт. третьяго сорта. Что стоитъ фунтъ каждаго сорта, если вся смѣсь стоитъ 6 р. 61 коп., и фунтъ перваго сорта дороже фунта второго на 15 коп., а фунтъ второго дороже фунта третьяго на 2 коп.?

Рѣшеніе. Замѣнимъ орѣхи перваго и третьяго сорта вторымъ; тогда стоимость смѣси понизиться на $15 . 9 - 2.7 = 1$ р. 21 коп. и она будетъ состоять изъ $9 + 11 + 7 = 27$ фунтовъ 2-го сорта, стоимостью въ 6 р. 61 коп.—1 р. 21 коп.=5 р. 40 коп.; слѣд., 1 фунтъ второго сорта стоитъ 5 р. 40 к. : 27=20 коп.; фунтъ перваго 20+ +15=35 коп. и фунтъ третьяго 20—2=18 к.

332) Два куска ситцу соятъ 7 р. 13 коп.; аршинъ ситцу перваго куска на 7 коп. дороже аршина второго куска, а во второмъ на 23 арш. больше, чѣмъ въ первомъ. Что стоитъ аршинъ каждаго куска, если въ обоихъ кускахъ 69 аршинъ?

Рѣшеніе. Во второмъ кускѣ было $(69 + 23) : 2 = 46$ аршинъ, а въ первомъ $69 - 46 = 23$ арш. Если бы вмѣсто перваго куска взяли такой же длины второй кусокъ, то вся покупка состояла бы изъ 69 аршинъ и стоила бы на $7 \times 23 = 161$ коп. дешевле, т.-е. стоила бы 713—161=552 коп. Аршинъ ситцу изъ второго куска стоитъ 552 : 69=8 коп., а изъ перваго 8+7=15 коп.

333) Купецъ купилъ 53,75 пуд. сахарнаго песку трехъ сортовъ, по 5 р. 90 коп., по 5 р. 50 коп. и по 4 р. 80 коп. за пудъ, и разсчиталъ, что если онъ весь первый сортъ смѣшаетъ со вторымъ и продастъ смѣсь по 5 руб. 4 коп. за пудъ, то получитъ $12^1/_2\,\%$ убытку, а если весь второй сортъ смѣшаетъ съ третьимъ и продастъ смѣсь по 5 р. 67 к. за пудъ, то получитъ $8\,\%$ прибыли. Сколько песку каждаго сорта было куплено?

Рѣшеніе. Смѣсь перваго сорта со вторымъ стоитъ по $[5 \text{ р. } 4 \text{ коп.} : (100 - 12^1/_2)] \times 100 = 5$ р. 76 к. за пудъ; слѣд., количество перваго сорта относится къ количеству второго, какъ (5 р. 76 к.—5 р. 50 к.) : (5 р. 90 к.—5 р. 76 к.) = 26 : 14 = 13 : 7.

Смѣсь второго сорта съ третьимъ стоитъ по $[5 \text{ руб. } 67 \text{ коп.} : (100 + 8)] \times 100 = 5$ руб. 25 коп. за пудъ; слѣд. количество второго сорта относится къ количеству третьяго, какъ

(5 р. 25 к.—4 р. 80 к.) : (5 р. 50 к.—5 р. 25 к.) = 45 : 25 = 9 : 5.

Умноживъ члены перваго отношенія на 9, а члены второго на 7, найдемъ, что количества всѣхъ трехъ сортовъ относятся между собою, какъ 117 : 63 : 35. Раздѣливъ пропорціонально этимъ числамъ 53,75 пуд., найдемъ, что перваго сорта было 29,25 пуд. второго 15,75 пуд. и третьяго 8,75 пуд.

334) Отцу 40 лѣтъ, сыну 6 лѣтъ; черезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ втрое старше сына?

Рѣшеніе. Чтобы рѣшить задачу, узнаемъ, сколько лѣтъ будетъ отцу и сыну, когда первый будетъ втрое старше второго. Разность между ихъ лѣтами все время остается постоянной и равна 40—6=34 годамъ, а отношеніе между лѣтами будетъ равно 3 : 1; слѣд., для рѣшенія задачи надо найти два числа, разность которыхъ есть 34, а отношеніе 3 : 1. Въ первомъ числѣ 3 доли, во второмъ 1 доля, въ разности 2 доли. Одна доля равна 34 : 2=17, слѣд., сыну будетъ 17 лѣтъ, а отцу $17 \times 3 = 51$ годъ. Отецъ будетъ втрое старше сына черезъ 17—6=11 лѣтъ.

335) Въ одномъ закромѣ 208 мѣръ ржи, въ другомъ 10 мѣръ; сколько разъ надо всыпать въ каждый закромъ по 7 мѣръ, чтобы въ первомъ стало въ 4 раза больше, чѣмъ во второмъ?

Рѣшеніе. Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, опредѣляемъ, сколько мѣръ будетъ въ каждомъ закромѣ, когда въ первомъ будетъ въ 4 раза больше второго. Задача приводится къ отысканію двухъ чиселъ, разность которыхъ равна 208—10=198, а отношеніе=4. Числа эти 264 и 66. Въ первый закромъ надо всыпать всего 264—208=56 мѣръ, и слѣд., по 7 мѣръ надо всыпать 56 : 7=8 разъ.

336) Яблоко дороже сливы на 9 коп., а 3 яблока дешевле 10 сливъ на 1 коп. Что стоитъ яблоко?—что стоитъ слива?

Рѣшеніе. Если одно яблоко дороже сливы на 9 коп., то за 3 яблока придется заплатить на 9.3=27 к. больше, чѣмъ за 3 сливы. Слѣд., если 10 сливъ оказываются на 1 коп. дороже 3 яблокъ, то это происходитъ отъ того, что стоимость остальныхъ 10—3=7 сливъ не только покрываетъ эти 27 коп., но и даетъ еще 1 коп. лишку, а потому 7 сливъ стоятъ 27+1=28 к., одна слива стоитъ 28:7=4 к., а одно яблоко 4+9=13 коп.

337) Пароходъ отправился изъ Саратова внизъ по теченію и плылъ 10 часовъ безъ остановокъ; затѣмъ онъ повернулъ вверхъ и черезъ 7 час. былъ въ разстояніи 237 верстъ отъ Саратова. Съ какой скоростью плылъ пароходъ, если скорость теченія Волги равна 9 верст. въ часъ?

Рѣшеніе. Если бы при движеніи внизъ, теченіе Волги не увеличивало скорости парохода, то въ 10 часовъ онъ отплылъ бы отъ Саратова на 9.10=90 верстъ меньше, чѣмъ на самомъ дѣлѣ, и слѣд., при движеніи вверхъ ему пришлось бы итти до Саратова на 90 верстъ меньше. Если бы и при движеніи вверхъ теченіе Волги не уменьшало скорости парохода, то въ 7 час. онъ прошелъ бы на 9.7=63 версты больше, чѣмъ въ дѣйствительности, и на такое разстояніе былъ бы дальше отъ Саратова. Поэтому, если бы Волга не имѣла теченія, то послѣ 10-ти-часового хода внизъ и 7-ми-часового хода вверхъ, пароходу оставалось бы пройти до Саратова 237—(90+63) верстъ, т.-е. 84 версты. А такъ какъ тогда движеніе вверхъ и внизъ по Волгѣ совершалось бы съ одинаковой скоростью, то оставшіяся до Саратова 84 версты пароходъ долженъ былъ бы сдѣлать въ 10—7, т.-е. въ 3 часа, слѣд., скорость парохода равна 84:3=28 верстамъ въ часъ.

338) Товарный поѣздъ, отходящій изъ Москвы въ 6 часовъ утра, встрѣчаетъ въ Твери въ 2 часа пополудни петербургскій поѣздъ, приходящій въ Москву въ 6 часовъ вечера. Однажды этотъ товарный поѣздъ вышелъ изъ Москвы часомъ позже и вслѣдствіе этого встрѣтилъ петербургскій поѣздъ въ 13 верстахъ отъ Твери. Сколько верстъ отъ Москвы до Твери?

Рѣшеніе. Московскій поѣздъ проходитъ все разстояніе отъ Москвы до Твери въ 12+2—6=8 часовъ, а петербургскій въ 6—2=4 часа. Когда московскій поѣздъ вышелъ изъ Москвы часомъ позже, то въ 2 часа пополудни петербургскій поѣздъ уже находился въ Твери, а московскому оставалось еще итти до Твери 1 часъ, и онъ находился отъ Твери на $\frac{1}{8}$ всего разстоянія между этими городами. Такъ какъ московскій поѣздъ въ часъ проходитъ $\frac{1}{8}$, а петербургскій $\frac{1}{4}$ разстоянія отъ Москвы до Твери,

то $\frac{1}{8}$ этого разстоянія надо раздѣлить въ отношеніи $\frac{1}{4}$ къ $\frac{1}{8}$ для того, чтобы опредѣлить, сколько каждый изъ нихъ прошелъ до встрѣчи послѣ 2 часовъ. Найдемъ, что петербургскій поѣздъ прошелъ $\frac{1}{12}$ всего разстоянія, а такъ какъ изъ задачи видно, что онъ отъ Твери до мѣста встрѣчи прошелъ 13 верстъ, то $\frac{1}{12}$ всего разстоянія отъ Москвы до Твери равна 13 верстамъ, а все разстояніе равно 13×12=156 верстамъ.

339) 20 мая 1887 года нѣкто помѣстилъ свой капиталъ въ банкъ по $8\frac{1}{3}\%$; 26 августа того же года онъ помѣстилъ капиталъ, который былъ на 1200 р. меньше перваго, въ другой банкъ по $7\frac{1}{2}$; 26 апрѣля 1889 года съ обоихъ капиталовъ онъ получилъ всего 880 руб. процентныхъ денегъ. Какой капиталъ былъ помѣщенъ въ оба банка?

Рѣшеніе. Съ 26 августа 1887 года по 26 апрѣля 1889 г. прошло 1 г. 8 м.=$1\frac{2}{3}$ года; въ это время съ 1200 руб. по $7\frac{1}{2}\%$ наросло бы (1200:100)×$7\frac{1}{2}$×$\frac{5}{3}$=150 руб. процентныхъ денегъ. Слѣд., если бы второй капиталъ былъ одинаковъ съ первымъ, то владѣлецъ капиталовъ 26 апрѣля 1889 года получилъ бы 880+150=1030 руб. процентныхъ денегъ. Первый капиталъ, отданный по $8\frac{1}{3}\%$, съ 20 мая 1887 года по 26 апр. 1889, т.-е. въ теченіе 1 г. 11 м. 6 дн., далъ $8\frac{1}{3}\times\frac{29}{15}=\frac{145}{9}\%$, и такой же капиталъ, отданный по $7\frac{1}{2}\%$, съ 26 августа 1887 года по 26-е апрѣля 1889 года, далъ $7\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{25}{2}\%$; слѣд. въ 1030 руб. заключается $\frac{145}{9}+\frac{25}{2}=\frac{515}{18}\%$ съ перваго капитала; слѣд. первый капиталъ равенъ $(1030:\frac{515}{18})\times 100=3600$ руб., а второй 3600—1200=2400 руб.

340) Два брата имѣли вмѣстѣ 30000 руб.; эти деньги они помѣстили въ банкъ, старшій по $4\frac{1}{2}\%$, а младшій, спустя $2\frac{1}{2}$ мѣс. послѣ старшаго, по $4\frac{4}{5}\%$; черезъ 2 г. 8 мѣс. послѣ вклада старшаго оба вмѣстѣ получили изъ банка 33575 руб. Сколько денегъ было у каждаго брата?

Рѣшеніе. На деньги старшаго брата наросло $4\frac{1}{2}\times 2\frac{2}{3}=12\%$, и слѣд. онъ изъ банка получилъ 112% своего капитала; на деньги младшаго брата въ 2 г. 8 мѣс.—$2\frac{1}{2}$ мѣс.=2 г. $5\frac{1}{2}$ мѣс. наросло $4\frac{4}{5}\times 2\frac{11}{24}=11\frac{4}{5}\%$, и онъ изъ банка получилъ $111\frac{4}{5}\%$ своего капитала. Такимъ образомъ, мы знаемъ, что 100% капитала старшаго брата и 100% капитала младшаго составляютъ 30000 р., а 112% перваго и $111\frac{4}{5}\%$ второго составляютъ 33576 руб. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

341) Банкиръ 120000 руб. помѣстилъ въ три предпріятія, изъ которыхъ первое давало $7\frac{1}{2}\%$, второе $8\frac{3}{4}\%$ и третье $6\frac{7}{8}\%$. По истеченіи 1 г. 4 м. 24 дн. онъ получилъ со второго предпріятія на 1890 руб., а съ третьяго на 3255 руб.

больше прибыли, чѣмъ съ перваго. Сколько денегъ банкиръ помѣстилъ въ каждое предпріятіе?

Рѣшеніе. Первое предпріятіе принесло въ 1 годъ 4 мѣс. 24 дня $7^1/_2 \times 1^2/_5 = {}^{21}/_2\,{}^0/_0$, т.-е. ${}^{21}/_2 : 100 = {}^{21}/_{200}$ капитала, на него затраченнаго; второе $8^3/_4 \times 1^2/_5 = {}^{49}/_4\,{}^0/_0$, или ${}^{49}/_{400}$ капитала на него затраченнаго; третье $6^7/_8 \times 1^2/_5 = {}^{77}/_8\,{}^0/_0$, или ${}^{77}/_{800}$ капитала на него затраченнаго. Такимъ образомъ имѣемъ: сумма трехъ капиталовъ = 120000 р., и ${}^{49}/_{400}$ второго капитала равны ${}^{21}/_{200}$ перваго, вмѣстѣ съ 1890 р., а ${}^{77}/_{800}$ третьяго равны ${}^{21}/_{200}$ перваго вмѣстѣ съ 3255 руб. Весь второй капиталъ равенъ ${}^{21}/_{200} : {}^{49}/_{400} = {}^6/_7$ перваго вмѣстѣ съ $1890 : {}^{49}/_{400} = 1542{}^8/_7$ р.; весь третій капиталъ равенъ ${}^{21}/_{200} : {}^{77}/_{800} = {}^{12}/_{11}$ перваго вмѣстѣ съ $3255 : {}^{77}/_{800} = 3381{}^8/_{11}$ р. Слѣд., въ 120000 руб. содержится первый капиталъ, ${}^6/_7$ этого капитала, ${}^{12}/_{11}$ этого капитала и $1542{}^8/_7 + 3381{}^8/_{11}$ руб. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

342) Сумма двухъ чиселъ 150; если отъ бо́льшаго числа взять ${}^7/_{32}$ его и прибавить ихъ къ меньшему, то оба числа сдѣлаются равными. Найти эти числа.

Рѣшеніе. Бо́льшее число́ превышаетъ меньшее на ${}^7/_{32} + {}^7/_{32} = {}^7/_{16}$ бо́льшаго, слѣд. меньшее составляетъ $1 - {}^7/_{16} = {}^9/_{16}$ бо́льшаго, и въ 150 бо́льшее число содержится $1 + {}^9/_{16} = 1{}^9/_{16}$ разъ. Оно равно $150 : 1{}^9/_{16} = 96$, а меньшее равно $150 - 96 = 54$.

343) Если вмѣсто множителя въ нѣкоторомъ произведеніи вставить $3{}^{29}/_{32}$, то произведеніе уменьшится на $97^1/_2$; если же вмѣсто множителя вставить число $69{}^4/_9$, то въ произведеніи получится на 280 больше, чѣмъ въ первоначальномъ. Найти оба множителя.

Рѣшеніе. Отъ увеличенія множителя на $69{}^4/_9 - 3{}^{29}/_{32} = 65{}^{133}/_{288}$ единицы, къ произведенію прибавляется $97^1/_2 + 280 = 377^1/_2$ единицъ; слѣд., множимое равно $377^1/_2 : 65{}^{133}/_{288} = 5{}^{19}/_{23}$. Истинное произведеніе равно $5{}^{19}/_{23} \times 3{}^{29}/_{32} + 97^1/_2 = 120$; слѣд., множитель равенъ $120 : 5{}^{19}/_{23} = 20{}^5/_6$.

344) Если учесть по $7^1/_2\,{}^0/_0$ одинъ и тотъ же вексель за 2 мѣс. 12 дн. до срока, сперва математически, а потомъ коммерчески, то одинъ учетъ будетъ меньше другого на 1,8 руб. За сколько времени до срока проданъ этотъ вексель, если за него получено 8018 руб. 50 коп. съ комм. учетомъ по $6^1/_4\,{}^0/_0$?

Рѣшеніе. За 2 м. 12 дн. по $7^1/_2\,{}^0/_0$ годовыхъ слѣдуетъ учесть $7^1/_2 \times {}^1/_5 = 1^1/_2\,{}^0/_0$. При математическомъ учетѣ это составитъ $1^1/_2 : (100 + 1^1/_2) = {}^3/_{203}$ валюты, при коммерческомъ $1^1/_2 : 100 = {}^3/_{200}$ валюты; слѣд., ${}^3/_{200} - {}^3/_{203} = {}^9/_{40600}$ валюты составляютъ 1,8 р. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

345) Проданы два векселя—одинъ за 4 мѣс. до срока съ мат. учетомъ по $9\,{}^0/_0$, другой за 8 мѣс. до срока съ комм. учетомъ по $6\,{}^0/_0$; за второй получено на 477 р. 60 коп. больше, чѣмъ за первый. На какую сумму былъ написанъ каждый вексель, если валюта второго составляла 1,333... валюты перваго?

Рѣшеніе. Съ перваго векселя учли $9 \times {}^1/_3 = 3\,{}^0/_0$ и получили за него ${}^{100}/_{103}$ его валюты; со второго учли $6 \times {}^2/_3 = 4\,{}^0/_0$ и получили ${}^{96}/_{100} = {}^{24}/_{25}$ его валюты. А ${}^{24}/_{25}$ валюты второго составляютъ ${}^{24}/_{25} \times 1^1/_3 = {}^{32}/_{25}$ валюты перваго; слѣд., ${}^{32}/_{25} - {}^{100}/_{103} = {}^{796}/_{2575}$ валюты перваго составляютъ 477 р. 60 к. Дальнѣйшее рѣшеніе понятно.

ЗАП.-СИБ. КРАЕВАЯ НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА № 84922

© ГПНТБ СО РАН

СОДЕРЖАНІЕ.

Стр.

ВВЕДЕНІЕ. . . . . 3—33

Образовательное значеніе ариѳметики.—Счетъ.—Число.—Дѣйствіе. — Системы счисленія. — Основныя ариѳметическія таблицы.—Дѣйствія съ многозначными числами.—Мѣсто первоначальныхъ пріемовъ вычисленія въ начальномъ курсѣ ариѳметики.—Мѣсто системы счисленія.—Необходимость совмѣстнаго разсмотрѣнія дѣйствій.—Распредѣленіе курса.—Величина. — Измѣреніе величинъ. — Составныя именованныя и дробныя числа.—Формальное ученіе о дробяхъ.—Распредѣленіе преобразованій и дѣйствій съ составными именованными числами.—Распредѣленіе дѣйствій съ дробными числами.

Глава I. Задачи и другія упражненія на урокахъ ариѳметики. . . . . 34—105

Задачи.—Простыя задачи.—Сложныя задачи.—Синтетическій пріемъ рѣшенія задачъ.—Аналитическій пріемъ рѣшенія задачъ.—Алгебраическое и ариѳметическое рѣшеніе задачъ.—Попытки классифицировать ариѳметическія задачи.—Ариѳметическіе пріемы рѣшенія задачъ.—Работы при рѣшеніи задачъ съ дѣтьми. — Требованія отъ дѣтей при рѣшеніи простыхъ задачъ. — Требованія отъ дѣтей при рѣшеніи сложныхъ задачъ.—Устное рѣшеніе сложныхъ задачъ.—Письменныя работы при рѣшеніи задачъ. — Запись рѣшенія.—Письменное рѣшеніе задачъ. — Ознакомленіе дѣтей съ новыми пріемами рѣшенія задачъ.—Повѣрка рѣшенія.—Примѣры на вычисленія. — Обозначеніе ряда дѣйствій.—Устныя вычисленія. — Письменныя упражненія въ вычисленіяхъ. — Внѣклассныя работы.—Ариѳметическія загадки.

Глава II. Счетъ единицами отъ 1 до 10. . . . . 105—130

Программа отдѣла и общій ходъ упражненій. — Значеніе наглядныхъ упражненій въ преподаваніи ариѳметики.—Простой прямой счетъ.—Обратный счетъ.—Цыфры и знаки дѣйствій.—Письменныя упражненія въ предѣлѣ перваго десятка.—Сложеніе и вычитаніе. — Умноженіе и дѣленіе. — Разностное и кратное сравненіе чиселъ.

Глава III. Счетъ десятками отъ 10 до 100. . . . . 130—134

Прямой счетъ.—Сложеніе и вычитаніе.—Умноженіе и дѣленіе.

Стр.

Глава IV. Счетъ единицами и десятками отъ 1 до 100. 134—158

Программа отдѣла.—Составленіе чиселъ первой сотни изъ десятковъ и единицъ.—Сложеніе и вычитаніе.—Умноженіе и дѣленіе.—Дѣйствія съ простѣйшими дробями.

Глава V. Ариѳметика цѣлыхъ чиселъ любой величины. 158—262

Особенности устнаго вычисленія. — Особенности письменнаго вычисленія.—Вычисленіе на русскихъ счетахъ.—Простѣйшіе случаи дѣйствій надъ многозначными числами.—Программа отдѣла. — Число. — Раздѣленіе чиселъ на отвлеченныя и именованныя.—Десятичная система счисленія.—Основныя понятія о дѣйствіяхъ.—Скобки.—Соотношенія между дѣйствіями.—Зависимость между числами въ каждомъ дѣйствіи.—Повѣрка дѣйствій.—Именованныя числа.—Письменные пріемы сложенія и вычитанія. — Сложеніе и вычитаніе на русскихъ счетахъ. — Сложеніе и вычитаніе составныхъ именованныхъ чиселъ.—Письменные пріемы умноженія и дѣленія.—Умноженіе многозначнаго числа на однозначное.—Дѣленіе многозначнаго числа на однозначное. — Умноженіе и дѣленіе на счетахъ.—Умноженіе и дѣленіе именованныхъ чиселъ.—Умноженіе и дѣленіе на 10, 100, 1000 и т. д.—Дѣйствія съ числами, выраженными въ метрическихъ мѣрахъ. — Измѣненія суммы. — Измѣненія разности. — Измѣненія произведенія.—Измѣненія частнаго.—Умноженіе и дѣленіе на числа, обозначаемыя значащей цыфрой съ нулями.—Умноженіе на многозначное число.—Дѣленіе на многозначное число.—Однозначное частное. — Частное многозначное.—Составныя именованныя числа. — Мѣры поверхностей и объемовъ. — Раздробленіе и превращеніе. — Дѣйствія съ составными именованными числами.

Глава VI. Ариѳметика дробей. . . . . 263—316

Программа курса простыхъ дробей.—Выясненіе понятія о долѣ единицы и дроби.—Устное и письменное вычисленіе съ дробными числами. — Исключеніе изъ неправильной дроби цѣлаго числа и обратное преобразованіе. — Измѣненія дроби отъ измѣненія числителя. — Измѣненія дроби отъ измѣненія знаменателя.—Умноженіе и дѣленіе дроби на цѣлое число.—Измѣненіе вида дробей. — Сокращеніе дробей. — Приведеніе дробей къ одному знаменателю. — Признаки дѣлимости.—Общій наибольшій дѣлитель. — Первоначальныя и составныя числа.—Разложеніе чиселъ на первоначальныхъ множителей.—Составъ точнаго дѣлителя.—Опредѣленіе общаго наиб. дѣлителя помощію разложенія на первонач. множителей.—Наименьшее кратное. — Сложеніе и вычитаніе дробей. — Умноженіе дробей. — Дѣленіе дробей. — Десятичныя дроби.—Счисленіе десятичныхъ дробей. — Дѣйствія съ десятичными числами.—Обращеніе простыхъ дробей въ десятичныя. — Періодическія дроби.

Глава VII. Приложенія ариѳметики. . . . . 316—349

Отношенія.—Пропорціональность величинъ.—Тройное правило.—Пропорціональное дѣленіе.—Процентныя вычисленія.