

521  
С.89

М. Ф. СУББОТИН

КУРС  
НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

2

СНТИ 1937

В дом не выдается

Обяз. экз. № 11

М. Ф. СУББОТИН

# КУРС НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Том 2

Цена 5 руб. 75 коп., переплет 1 руб. 50 коп.

~~Проверено 1933 г.~~



ОНТИ НКТП • ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
ЛЕНИНГРАД • 1937 • МОСКВА

1792

T-63-5-2  
ТКК № 83

ПРОВЕРКА  
VII ГНБ 1949

Государственная  
научная  
библиотека  
Л.Б.Т.Б.

521  
С 89.

1938  
ПРОВЕРЕНО

1701/9

37  
Сверено  
1994 г.

Настоящий второй том „Курса небесной механики“ является непосредственным продолжением первого тома.

В нем изложена общая теория возмущенного движения, методы вычисления возмущений планет и комет, основы теории движения Луны.

Книга является учебником для студентов и аспирантов университетов. Она предназначается также и для научных работников, так как представляет достаточно полную монографию по указанным отделам Небесной механики.

СВЕРЕНО  
2007

### ПРЕДИСЛОВИЕ.

В то время как первый том этого курса был посвящен исключительно проблеме двух тел и методам определения орбит, во втором томе я перехожу к Небесной механике в тесном смысле слова, а именно к теории возмущений.

Моя задача заключалась в том, чтобы дать книгу, которая позволяла бы вполне ориентироваться в современной Небесной механике, давала возможность непосредственно перейти к чтению специальных мемуаров и в то же время служила исчерпывающим практическим руководством при решении тех проблем, с которыми астроному приходится встречаться особенно часто.

В основу положены те общие и специальные курсы, которые я читал в течение последних шести лет в Ленинградском университете.

Книга делится на четыре части, из которых первая посвящена изучению общих свойств движения материальных точек, притягивающих друг друга по закону Ньютона, и, в частности, изучению важнейших свойств возмущенного движения. Эта часть является как бы введением к следующим, в которых рассматриваются способы фактического определения возмущенных координат.

Во второй части изучаются способы нахождения возмущенных координат, основанные на употреблении численного интегрирования дифференциальных уравнений. Здесь, так же как и в I томе, я стремился дать исчерпывающее полное практическое руководство к действительному выполнению всех операций.

В конце I тома, не имея возможности дать подробное изложение теории численного интегрирования уравнений, я поместил маленькое добавление, содержащее конспективное изложение этого важного отдела. Я стремился возможно скорее пополнить этим способом один из наиболее существенных пробелов нашей литературы.

Развивая во II томе соответствующий отдел до нужной полноты и давая столь необходимые здесь примеры, я не мог затруднять читателя непрерывными ссылками на это добавление. Вот почему я предпочел изложить всю теорию численного интегрирования полностью, хотя при этом и пришлось воспроизвести несколько страниц. Таким образом оказалось возможным исключить из подготовленного сейчас нового издания I тома указанное добавление.

Изложив с должными подробностями методы численного интегрирования уравнений и научив, при помощи примеров, применять эти методы, я останавливаюсь еще на приложениях численного интегрирования к изучению невозмущенного движения.

Только после такой подготовки я перехожу к применению рассматриваемых методов к вычислению возмущений и на этот раз уже могу обойтись без пояснительных примеров. Читатель, внимательно изучивший две предыдущие главы, в таких примерах нуждаться не будет.

Третья и четвертая части книги посвящены аналитическим методам вычисления возмущений. Здесь, в отличие от второй части, я не всегда стремился дать исчерпывающее изложение рассматриваемых методов, так как это является делом специальных монографий. Но, не стараясь заменить эти монографии, я стремился дать полное представление о сущности каждого из важнейших методов.

Много места уделено теории движения Луны, которая является не только одним из совершеннейших отделов Небесной механики, но и не менее актуальна, нежели теория движения планет. В самом деле, не говоря уже о том, что классическая теория движения Луны используется в звездной астрономии при изучении движения кратных звезд, не следует забывать, что работы Хилла явились одним из важнейших источников прогресса Небесной механики в последние десятилетия.

Таким образом II том посвящен, в основном, изучению методов Небесной механики. Подробное изложение достигнутых результатов, иначе говоря, сравнение теории с наблюдениями, найдет свое место в III томе. Там же будут рассмотрены некоторые более специальные методы (периодические орбиты, методы Гюльдена, Бренделя), а также теория вращения светил.

Что касается до характера изложения, то я стремился к возможной элементарности, к возможно большей пригодности книги для самостоятельного изучения предмета, и потому избегал пользования сколько-нибудь сложным математическим аппаратом.

При этом я старался дать книгу, из которой легко было бы выделять как преподавателю, так и читателю курсы разной степени полноты и подробности.

Принятая мною система обозначений тех величин, для которых не установлены стандартные обозначения (и едва ли должны быть установлены в настоящее время), тщательно продумана. Нужно однако заметить, что введение здесь полного единообразия не только трудно, но и не всегда целесообразно; так, например, я сознательно пользовался разными обозначениями в теории движения планет и в теории движения Луны, так как это не создает никаких неудобств и в то же время облегчает чтение специальной литературы.

Что касается до литературных указаний, то они отнюдь не претендуют на полноту и систематичность, так как более подробные сведения в этом отношении легко могут быть почерпнуты из общеизвестных библиографических указателей.

В заключение отмечу, что главы, посвященные определению орбит из многих наблюдений, которые первоначально предполагалось включить во II том, вошли в новое издание I тома; это обстоятельство позволило сделать настоящий том более однородным по своему содержанию.

М. Субботин.

## ГЛАВА I

ПРОБЛЕМА  $n$  ТЕЛ.§ 1. Интегралы проблемы  $n$  тел.

Рассмотрим  $n$  материальных точек с массами, равными соответственно  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ . Через  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  обозначим координаты точки  $m_i$  относительно произвольной неподвижной системы осей. Пусть  $\Delta_{ij}$  есть расстояние между точками  $m_i$  и  $m_j$ , так что

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2.$$

Притяжение, испытываемое точкой  $m_i$  со стороны точки  $m_j$ , будет равно  $k^2 m_i m_j \Delta_{ij}^{-2}$ , где через  $k^2$  обозначен коэффициент притяжения (т. I, §§ 3 и 16); компоненты этой силы по осям координат будут

$$k^2 m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}, \quad k^2 m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}^3}, \quad k^2 m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3}.$$

Поэтому уравнения движения точки  $m_i$  напишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= k^2 \sum_j m_j m_i \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_j m_j m_i \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}^3} \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} &= k^2 \sum_j m_j m_i \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем при суммировании в правых частях значение  $j=i$  должно быть пропущено.

Уравнения (1) при  $i=0, 1, \dots, n-1$  образуют систему порядка  $6n$ , к интегрированию которой и приводится проблема  $n$  тел.

Легко видеть, что уравнения (1) могут быть написаны так:

$$m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \quad (2)$$

если, следуя Лагранжу, ввести функцию сил

$$U = \frac{1}{2} k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (i \neq j). \quad (3)$$

Так как мы здесь имеем систему, на которую не действуют никакие внешние силы, то общие теоремы Механики сразу дают нам 6 интегралов движения центра инерции системы и 3 интеграла площадей. Эти интегралы очень легко получаются непосредственно из уравнений (1).

Прежде всего, суммируя каждое из уравнений (1) по  $i$  от  $i=0$  до  $i=n-1$ , получим

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i = 0, \quad \sum_i m_i \ddot{y}_i = 0, \quad \sum_i m_i \ddot{z}_i = 0,$$

где дифференцирование по времени обозначено точками.

Отсюда

$$\sum_i m_i \dot{x}_i = \alpha_1, \quad \sum_i m_i \dot{y}_i = \beta_1, \quad \sum_i m_i \dot{z}_i = \gamma_1 \quad (4)$$

$$\sum_i m_i x_i = \alpha_1 t + \alpha_2, \quad \sum_i m_i y_i = \beta_1 t + \beta_2, \quad \sum_i m_i z_i = \gamma_1 t + \gamma_2, \quad (5)$$

где  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  — произвольные постоянные.

Равенства (4) и (5) показывают, что центр инерции системы движется прямолинейно и равномерно. Они носят название интегралов движения центра инерции.

Для вывода интегралов площадей обращаемся к следующим легко проверяемым следствиям уравнений (1):

$$\sum_i m_i (\eta_i \dot{z}_i - \zeta_i \dot{y}_i) = 0$$

$$\sum_i m_i (\zeta_i \dot{x}_i - \xi_i \dot{z}_i) = 0$$

$$\sum_i m_i (\xi_i \dot{y}_i - \eta_i \dot{x}_i) = 0.$$

Интегрируя эти равенства и обозначая через  $C_1, C_2, C_3$  новые произвольные постоянные, получим интегралы площадей

$$\sum_i m_i (\eta_i \dot{z}_i - \zeta_i \dot{y}_i) = C_1$$

$$\sum_i m_i (\zeta_i \dot{x}_i - \xi_i \dot{z}_i) = C_2 \quad (6)$$

$$\sum_i m_i (\xi_i \dot{y}_i - \eta_i \dot{x}_i) = C_3.$$

Левые части уравнений (6) представляют собою проекции момента количества движения системы (который равняется сумме моментов количеств движения всех точек) на оси координат. Таким образом, равенства (6) показывают, что *момент количества движения системы остается постоянным как по величине, так и по направлению.*

Плоскость, перпендикулярная к моменту количества движения системы и, следовательно, имеющая уравнение

$$C_1(\xi - \xi^0) + C_2(\eta - \eta^0) + C_3(\zeta - \zeta^0) = 0, \quad (7)$$

называется неизменной плоскостью Лапласа.

Каждый член сумм, стоящих в левых частях равенств (6), можно еще интерпретировать как умноженную на массу проекцию удвоенной секториальной скорости точки  $m_i$  на соответствующую координатную плоскость. Короче говоря, левая часть каждого из этих равенств есть

сумма взвешенных проекций секториальных скоростей всех точек системы на координатную плоскость.

Если сумму взвешенных секториальных скоростей спроектировать на произвольно взятую плоскость, то проекция будет очевидно равна:

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} \cdot \cos \beta,$$

где  $\beta$  — угол между нормалью к рассматриваемой плоскости и моментом количества движения системы. Отсюда ясно, что неизменная плоскость может быть определена как такая плоскость, для которой сумма взвешенных проекций секториальных скоростей всех точек наибольшая.

Перейдем теперь к последнему из общих интегралов, существование которого обусловлено тем обстоятельством, что функция сил (3) не содержит явно время.

Умножим уравнения (2) соответственно на  $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$  и сложим их почленно; это даст:

$$\sum_i m_i (\dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \ddot{\zeta}_i) = \frac{dU}{dt},$$

откуда непосредственно вытекает интеграл живых сил

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + h, \quad (8)$$

где  $h$  — новая постоянная.

Так как величина

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2)$$

представляет собою кинетическую энергию системы, а потенциальная энергия рассматриваемой системы равна очевидно  $-U$ , то полная энергия будет равна

$$H = T - U.$$

Следовательно, интеграл (8), дающий  $H = h$ , выражает для изучаемой нами замкнутой системы закон сохранения энергии.

Итак, общие теоремы Механики дают для проблемы  $n$  тел десять интегралов. Многочисленные попытки найти дальнейшие интегралы остались безуспешными. В 1887 г. Брунс доказал, что даже в случае проблемы трех тел всякий первый интеграл, алгебраический относительно координат  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  и их производных  $\dot{\xi}_i, \dot{\eta}_i, \dot{\zeta}_i$ , является следствием указанных десяти интегралов. В 1889 г. Пуанкаре обнаружил (также для проблемы трех тел) отсутствие первых интегралов, определенным образом выражающихся при помощи однозначных аналитических функций.

Эти теоремы, на доказательстве которых мы не будем останавливаться, показывают, что вопрос о нахождении новых интегралов, сверх десяти известных, не представляет интереса для Небесной механики, так как эти интегралы были бы слишком сложны для того, чтобы иметь какое-либо применение.

## § 2. Проблема $n$ тел приводится к интегрированию системы 6 $n$ —12 порядка и двум квадратурам.

Найденные в предыдущем параграфе 6 интегралов движения центра инерции, 3 интеграла площадей и интеграл живых сил позволяют понизить порядок системы (1) на 10 единиц.

Воспользовавшись тем, что силы не зависят от времени, мы можем понизить порядок системы еще на одну единицу: для этого надо исключить из уравнений  $dt$ . Когда полученная таким образом система будет проинтегрирована, время определится при помощи одной квадратуры. Таким образом, задача будет приведена к решению системы порядка  $6n-11$  и выполнению квадратуры.

Понижение порядка системы еще на одну единицу основывается на полном использовании того обстоятельства, что силы зависят исключительно от взаимных расстояний движущихся точек.

Чтобы удобнее использовать указанное свойство нашей системы, перейдем к обобщенным координатам, причем одну из координат выберем следующим образом. Через какую-либо точку системы, например  $m_0$ , проведем неподвижную прямую, а через эту прямую — плоскость, проходящую через какую-нибудь другую точку системы. Азимут этой плоскости, отсчитываемый от произвольного неподвижного направления, обозначим через  $\varphi$  и примем за одну из обобщенных координат.

Движение всей системы будет, следовательно, определяться координатой  $\varphi$  и координатами, фиксирующими положение системы относительно движущейся плоскости, имеющей азимут  $\varphi$ .

Покажем, что координата  $\varphi$  является циклической, т. е. что уравнения Лагранжа заключают только производную  $\dot{\varphi}$ , но не  $\varphi$ .

Неподвижную прямую, проведенную нами через точку  $m_0$ , примем за ось  $z$ -ов; ось  $x$ -ов расположим во вращающейся плоскости. Если через  $x_k, y_k, z_k$  обозначить координаты точки  $m_k$  в этой вращающейся системе осей, то компоненты скорости точки  $m_k$  будут

$$\dot{x}_k - y_k \dot{\varphi}, \quad \dot{y}_k + x_k \dot{\varphi}, \quad \dot{z}_k.$$

Следовательно, живая сила системы, определяемая равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k [(\dot{x}_k - y_k \dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_k + x_k \dot{\varphi})^2 + \dot{z}_k^2],$$

будет зависеть только от  $\dot{\varphi}$ , но не от  $\varphi$ , точно так же, как и кинетический потенциал

$$L = T + U.$$

Поэтому соответствующее  $\varphi$  уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

дает

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.}$$

Это равенство позволяет исключить  $\varphi$  из остальных уравнений движения. После того, как полученная таким образом система уравнений будет проинтегрирована и будет известно движение наших материальных точек относительно вращающейся плоскости, останется найти угол  $\varphi$ , дающий положение этой плоскости. Так как последнее равенство дает  $\dot{\varphi}$  в функции остальных координат, то угол  $\varphi$  определится при помощи одной квадратуры.

Рассмотренная нами операция исключения из уравнений движения азимута  $\varphi$  была названа Якоби — для частного случая задачи трех тел — исключением узлов.

Итак, интегрирование уравнений (1) действительно приводится к интегрированию системы порядка  $6n-12$  и двум квадратурам.

Фактическое выполнение указанных приведений мы производить не будем, так как оно несколько не облегчает полное решение задачи. Ограничимся лишь имеющим практическое значение понижением порядка системы на 6 единиц при помощи интегралов (4) и (5). Это приведение будет выполнено в следующих параграфах.<sup>1</sup>

### § 3. Уравнения относительного движения.

Вернемся к уравнениям (1), определяющим движение  $n$  тел относительно неподвижной системы осей. Найденные нами интегралы (4) и (5) позволяют исключить из уравнений (1) три какие-либо координаты, например  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  и их производные.

Положим, с этой целью,

$$\xi_i = \xi_0 + x_i, \quad \eta_i = \eta_0 + y_i, \quad \zeta_i = \zeta_0 + z_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

так что  $x_i, y_i, z_i$  являются координатами точки  $m_i$  относительно осей, параллельных предыдущим, но имеющих начало в точке  $m_0$ .

Из уравнений (1) следует, принимая во внимание, что  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= k^2 \sum_{j \neq i} m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} = \\ &= k^2 \left( m_0 \frac{x_0 - x_i}{\Delta_{0i}^3} + m_1 \frac{x_1 - x_i}{\Delta_{1i}^3} + \dots + m_{n-1} \frac{x_{n-1} - x_i}{\Delta_{n-1,i}^3} \right) = \\ &= -k^2 m_0 \frac{x_i}{\Delta_{0i}^3} + k^2 \sum' m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} \\ \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= k^2 \sum_{j \neq 0} m_j \frac{\xi_j - \xi_0}{\Delta_{0j}^3} = k^2 m_i \frac{x_i}{\Delta_{0i}^3} + k^2 \sum' m_j \frac{x_j}{\Delta_{0j}^3}, \end{aligned}$$

где через  $\sum'$  обозначено суммирование по  $j$  с пропуском значений  $j = i$  и  $j = 0$ .

Поэтому, делая  $\Delta_{0j} = r_j$ , получим следующие уравнения, определяющие движение  $m_i$  относительно  $m_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} + k^2 \sum' m_j \left( \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right) \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} + k^2 \sum' m_j \left( \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right) \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} + k^2 \sum' m_j \left( \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$(i = 1, 2, \dots, n-1).$

<sup>1</sup> Подробные литературные указания относительно различных способов действительного выполнения указанных в этом параграфе понижений порядка системы дифференциальных уравнений для случая задачи трех тел можно найти в статье: E. T. Whittaker, Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen, Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. VI<sub>2</sub>, 512—556, а также в известном учебнике Аналитической динамики того же автора, где этому вопросу посвящена специальная глава.

Фактическое приведение к системе порядка  $6n-12$  для задачи  $n$  тел выполнил T. L. Bennett (Messenger of Math. (2), 44, 1904).

причем

$$\Delta_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2.$$

Положим

$$R_i = k^2 \sum_j m_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right). \quad (10)$$

Это позволит написать уравнения (9) в такой форме:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + k^2 (m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + k^2 (m_0 + m_i) \frac{y_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial y_i} \quad (11)$$

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} + k^2 (m_0 + m_i) \frac{z_i}{r_i^3} = \frac{\partial R_i}{\partial z_i}.$$

Предположим, что массы всех тел, за исключением  $m_0$  и  $m_p$ , равны нулю. В таком случае  $R_i = 0$  и уравнения (11) обращаются в известные уравнения задачи двух тел (т. I, гл. II). Так как в Астрономии издавна установился обычай называть кеплерово движение, соответствующее задаче двух тел, невозмущенным движением, а всякое отклонение от него возмущением, то и функция  $R_i$  получила название пертурбационной функции. Производные этой функции по координатам  $m_i$  дают компоненты относительного ускорения, испытываемого телом  $m_i$  со стороны всех остальных тел системы, за исключением, конечно, центрального тела  $m_0$ .

После того как система (11) порядка  $6n-6$  разрешена и движение всех тел относительно  $m_0$  известно, легко может быть получено абсолютное движение всех тел. Действительно, уравнения (5) дают:

$$M \xi_0 + \sum_1^{n-1} m_i x_i = \alpha_1 t + \alpha_2$$

$$M \eta_0 + \sum_1^{n-1} m_i y_i = \beta_1 t + \beta_2 \quad (12)$$

$$M \zeta_0 + \sum_1^{n-1} m_i z_i = \gamma_1 t + \gamma_2,$$

где

$$M = m_0 + \sum_1^{n-1} m_i,$$

откуда найдем  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ .

Для системы (11) мы имеем четыре интеграла, соответствующие интегралам (6) и (8) уравнений абсолютного движения.

Первое из равенств (6) дает:

$$\sum_1^{n-1} m_i [(\eta_0 + y_i)(\zeta_0 + z_i) - (\zeta_0 + z_i)(\eta_0 + y_i)] + m_0 (\eta_0 \zeta_0 - \zeta_0 \eta_0) = C_1$$

или

$$M(\eta_0 \zeta_0 - \zeta_0 \eta_0) + \zeta_0 \sum m_i y_i - \zeta_0 \sum m_i y_i +$$

$$+ \eta_0 \sum m_i z_i - \eta_0 \sum m_i z_i + \sum m_i (y_i z_i - z_i y_i) = C_1.$$

Определяя  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  из (12) и подставляя сюда, окончательно получим следующие интегралы уравнений (11):

$$M \sum m_i (y_i z_i - z_i y_i) + \sum m_i z_i \sum m_i y_i - \sum m_i y_i \sum m_i z_i = C'_1$$

$$M \sum m_i (z_i x_i - x_i z_i) + \sum m_i x_i \sum m_i z_i - \sum m_i z_i \sum m_i x_i = C'_2 \quad (13)$$

$$M \sum m_i (x_i y_i - y_i x_i) + \sum m_i y_i \sum m_i x_i - \sum m_i x_i \sum m_i y_i = C'_3,$$

где

$$C'_1 = MC_1 + \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1$$

$$C'_2 = MC_2 + \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1$$

$$C'_3 = MC_3 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1.$$

Выполнив аналогичные преобразования в интеграле живых сил (8), получим еще один интеграл уравнений относительного движения.

Уравнения (11) широко применяются в Небесной механике, особенно при изучении движения планет и комет. В этом случае за центральное тело  $m_0$ , к которому относят движение всех остальных, принимают Солнце. При таком выборе каждый член пертурбационной функции (10) имеет множителем планетную массу  $m_j$ ; поэтому правые части уравнений (11) будут весьма малы и их влияние действительно можно рассматривать как возмущение.

#### § 4. Вторая форма уравнений относительного движения.

Указанная в предыдущем параграфе форма уравнений относительного движения в некоторых случаях неудобна тем, что содержит особую для каждого тела пертурбационную функцию  $R_i$ . Поэтому иногда пользуются другой формой, основанной на следующем выборе относительных координат:

1) через первую точку  $m_0$  проводим оси координат, параллельные неподвижным осям, и положение  $m_1$  определяем в этой системе координатами  $x_1, y_1, z_1$ ;

2) через центр инерции  $G_1$  точек  $m_0$  и  $m_1$  проводим оси, параллельные предыдущим, и положение  $m_2$  определяем относительно этих осей координатами  $x_2, y_2, z_2$ ;

3) положение  $m_3$  определяем координатами  $x_3, y_3, z_3$  относительно системы осей, параллельных предыдущим и имеющих начало в центре инерции  $G_2$  точек  $m_0, m_1, m_2$ ; и т. д.

Таким образом, каждая последующая точка  $m_{i+1}$  относится к центру инерции  $G_i$  всех предыдущих точек  $m_0, m_1, \dots, m_i$ .

Обозначим через  $X_p, Y_p, Z_p$  координаты точки  $G_p$ , так что

$$M_i X_i = m_0 \xi_0 + m_1 \xi_1 + \dots + m_i \xi_i,$$

где

$$M_i = m_0 + m_1 + \dots + m_i.$$

По определению

$$x_i = \xi_i - X_{i-1},$$

откуда

$$\begin{aligned} M_{i-1}x_i &= M_{i-1}\xi_i - (m_0\xi_0 + m_1\xi_1 + \dots + m_{i-1}\xi_{i-1}) = \\ &= m_0(\xi_i - \xi_0) + m_1(\xi_i - \xi_1) + \dots + m_{i-1}(\xi_i - \xi_{i-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы выразить старые координаты ( $\xi, \eta, \zeta$ ) через новые ( $x, y, z$ ), заметим прежде всего, что

$$M_i X_i - M_{i-1} X_{i-1} = m_i \xi_i$$

или

$$M_i X_i - M_{i-1} X_{i-1} = (M_i - M_{i-1}) \xi_i. \quad (15)$$

Следовательно

$$(M_i - M_{i-1}) \xi_i = M_i (\xi_{i+1} - x_{i+1}) - M_{i-1} (\xi_i - x_i),$$

откуда

$$\xi_{i+1} - \xi_i = x_{i+1} - M_{i-1} M_i^{-1} x_i.$$

Складывая почленно эти равенства для последовательных значений индекса, получим

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_0 &= x_1, \\ \xi_{i+1} - \xi_0 &= x_{i+1} + \frac{m_i x_i}{M_i} + \frac{m_{i-1} x_{i-1}}{M_{i-1}} + \dots + \frac{m_1 x_1}{M_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Перейдем теперь к составлению дифференциальных уравнений движения в новых координатах.

Дифференцируя дважды равенство (14) и пользуясь уравнениями (2), получим:

$$M_{i-1} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{M_{i-1}}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \frac{\partial U}{\partial \xi_0} - \frac{\partial U}{\partial \xi_1} - \dots - \frac{\partial U}{\partial \xi_{i-1}}.$$

С другой стороны, имеем, на основании соотношений (14),

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi_0} &= -\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_0}{M_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{m_0}{M_2} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \dots - \frac{m_0}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_1} &= -\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{m_1}{M_1} \frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{m_1}{M_2} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \dots - \frac{m_1}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= -\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{m_2}{M_2} \frac{\partial U}{\partial x_3} - \dots - \frac{m_2}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\ &\dots \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_{n-1}} &= -\frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{M_{i-1}}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} &= \frac{M_{i-1}}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{M_{i-1}}{M_i} \frac{\partial U}{\partial x_{i+1}} - \dots - \frac{M_{i-1}}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \\ \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\partial U}{\partial \xi_k} &= -\frac{M_{i-1}}{M_{i-1}} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{M_{i-1}}{M_i} \frac{\partial U}{\partial x_{i+1}} - \dots - \frac{M_{i-1}}{M_{n-2}} \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \end{aligned}$$

так что окончательно будем иметь следующие дифференциальные уравнения относительного движения:

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (17)$$

где

$$\mu_i = \frac{m_i M_{i-1}}{M_i}.$$

Равенства (16) позволяют выразить функцию сил  $U$  через новые координаты.

Уравнения (17) с успехом применяются в теории движения спутников и при изучении движений в системах кратных звезд.

Например при изучении движения Луны удобно за точку  $m_0$  принять Землю, за  $m_1$  — Луну и за  $m_2$  — Солнце. Обозначая через  $x_1, y_1, z_1$  координаты Луны относительно Земли, через  $x_2, y_2, z_2$  — координаты Солнца относительно центра инерции Земли и Луны, и полагая

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2},$$

получим такие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_1}; & \mu_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \mu_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_1}; & \mu_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_2} \\ \mu_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_1}; & \mu_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_2} \end{aligned} \quad (18)$$

причем

$$U = k^2 \left( \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} \right).$$

Как уже было отмечено (т. I, § 7), движение Солнца относительно центра инерции системы Земля — Луна мы можем считать эллиптическим, следовательно нахождение  $x_2, y_2, z_2$  сводится к решению задачи двух тел, чем существенно упрощается решение системы (18).

В заключение покажем, каким образом живая сила системы  $T$  выражается через новые координаты.

В равенстве (15) заменим  $\xi_i$  через  $x_i + X_{i-1}$ . Это даст

$$(M_i - M_{i-1}) x_i = M_i (X_i - X_{i-1}).$$

Возводя в квадрат как это равенство, так и (15), получим

$$\begin{aligned} (M_i - M_{i-1})^2 x_i^2 &= M_i^2 (X_i - X_{i-1})^2 \\ (M_i - M_{i-1})^2 \xi_i^2 &= (M_i X_i - M_{i-1} X_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Откуда, исключив произведение  $X_i X_{i-1}$ , найдем:

$$m_i \left( \xi_i^2 - \frac{M_{i-1} x_i^2}{M_i} \right) = M_i X_i^2 - M_{i-1} X_{i-1}^2.$$

Это равенство просуммируем от  $i=1$  до  $i=n-1$ . Получим:

$$\sum_1^{n-1} m_i \ddot{\xi}_i^2 = \sum_1^{n-1} \frac{m_i M_{i-1}}{M_i} x_i^2 + M_{n-1} X_{n-1}^2 - M_0 X_0^2,$$

или, так как  $M_0 = m_0$ ,  $X_0 = \xi_0$ ,

$$\sum_0^{n-1} m_i \ddot{\xi}_i^2 = \sum_1^{n-1} \mu_i x_i^2 + M_{n-1} X_{n-1}^2.$$

Складывая почленно это равенство с аналогичными, написанными для других координат, получим:

$$\sum_0^{n-1} m_i (\ddot{\xi}_i^2 + \ddot{\eta}_i^2 + \ddot{\zeta}_i^2) = \sum_1^{n-1} \mu_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + M_{n-1} (X_{n-1}^2 + Y_{n-1}^2 + Z_{n-1}^2).$$

Но это соотношение выведено нами из линейных однородных зависимостей между координатами  $\xi, \eta, \zeta$  и  $x, y, z$ . Поэтому такое же соотношение будет иметь место и между производными этих координат.

Следовательно

$$2T = \sum_1^{n-1} \mu_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + M_{n-1} (\dot{X}_{n-1}^2 + \dot{Y}_{n-1}^2 + \dot{Z}_{n-1}^2).$$

Примечание. Уравнения (17) имеют ту же форму, что и уравнения (2). Поэтому для уравнений (17) интегралы площадей и живых сил могут быть получены из указанных выше интегралов для абсолютного движения заменой масс  $m_i$  множителями  $\mu_i$ .

Для случая проблемы трех тел наиболее общее линейное преобразование координат, при котором сохраняется форма интегралов, площадей и живых сил, нашел Хопфнер.<sup>1</sup>

### § 5. Формула Якоби.

Для проблемы  $n$  тел функция сил  $U$ , определяемая формулой (3), является однородной функцией координат. Пользуясь этим обстоятельством, можно, как показал Якоби, из интеграла живых сил вывести еще одну весьма интересную формулу.

Так как  $U$  есть однородная функция  $(-1)$ -го порядка от  $\xi, \eta, \zeta$ , то

$$\sum_0^{n-1} \left( \xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) = -U.$$

Поэтому, умножая уравнения (2) соответственно на  $\xi, \eta, \zeta$  и складывая, получим:

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i) = -U.$$

Сложим это равенство с интегралом живых сил (8), умноженным на 2. Это даст

$$\sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \ddot{\xi}_i + \eta_i \ddot{\eta}_i + \zeta_i \ddot{\zeta}_i + \dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + 2h,$$

<sup>1</sup> F. Hopfner, Über eine Verallgemeinerung der relativen kanonischen Koordinaten von Jacobi, Astr. Nachr., 195, 1913, 257 — 262.

или

$$\frac{d}{dt} \sum_0^{n-1} m_i (\xi_i \dot{\xi}_i + \eta_i \dot{\eta}_i + \zeta_i \dot{\zeta}_i) = U + 2h,$$

или, наконец,

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_0^{n-1} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = 2U + 4h. \quad (19)$$

Стоящая здесь сумма

$$J = \sum_0^{n-1} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2)$$

представляет полярный момент инерции нашей системы относительно начала координат.

Как известно,  $J$  можно выразить через величину

$$J_0 = M(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

где  $M$  — сумма всех масс  $m_i$ , а  $X, Y, Z$  — координаты центра инерции системы, и через квадраты взаимных расстояний точек системы.

В самом деле, обратимся к следующему легко проверяемому тождеству:

$$\sum_i m_i \sum_j m_j \xi_i^2 - (\sum_i m_i \xi_i)^2 = \sum_{ij} m_i m_j (\xi_i^2 + \xi_j^2 - 2\xi_i \xi_j),$$

в правой части которого каждая комбинация значков  $i$  и  $j$  должна быть взята только один раз.

Сложив это тождество с двумя аналогичными для координат  $\eta$  и  $\zeta$  и учитывая, что

$$MX = \sum m_i \xi_i, \quad MY = \sum m_i \eta_i, \quad MZ = \sum m_i \zeta_i, \quad (20)$$

получим

$$MJ - MJ_0 = \sum_{i,j} m_i m_j \Delta_{ij}^2.$$

Или, пользуясь интегралами (5), определяющими движение центра инерции системы,

$$MJ = (\alpha_1 t + \alpha_2)^2 + (\beta_1 t + \beta_2)^2 + (\gamma_1 t + \gamma_2)^2 + \sum_{i,j} m_i m_j \Delta_{ij}^2.$$

Подставив это выражение для  $J$  в равенство (19) и обозначив через  $h'$  новую постоянную, будем иметь:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2U + 4h', \quad (21)$$

где

$$R = \frac{1}{M} \sum_{i,j} m_i m_j \Delta_{ij}^2.$$

Эта формула носит название *формулы Якоби*. Частный случай ее, соответствующий проблеме трех тел, был указан Лагранжем (1772). В общем виде формула была дана Якоби в 1842 г.

Отметим некоторые интересные следствия соотношения (21), указанные Якоби, которые можно рассматривать как едва ли не первый пример применения качественных методов в Небесной механике.

Интегрируя равенство (21) в пределах от 0 до  $t$ , получим:

$$\frac{dR}{dt} - R'_0 > (2\alpha + 4h')t,$$

где через  $R'_0$  обозначена величина  $\frac{dR}{dt}$  при  $t=0$ , а через  $\alpha$  — нижняя граница значений функции  $U$ . Очевидно можно считать, что  $\alpha > 0$ .

Еще одно интегрирование в тех же пределах дает:

$$R > R_0 + R'_0 t + (\alpha + 2h')t^2.$$

Это неравенство показывает, что движение может быть устойчивым лишь при условии  $h' < 0$ . Действительно, если  $h' \geq 0$ , то  $\alpha + 2h' > 0$ , и потому правая часть этого неравенства будет неограниченно возрастать при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, хотя бы одно из взаимных расстояний  $\Delta_{ij}$  должно стремиться к бесконечности.

Для случая двух тел формула (21) обращается в соотношение

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2k^2 (m_1 + m_2) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (22)$$

где  $r$  — взаимное расстояние рассматриваемых тел,  $a$  — большая полуось относительной орбиты. Если  $a < 0$ , то относительное движение происходит по гиперболе, так что действительно  $r \rightarrow \infty$ , когда  $t \rightarrow \infty$ .

### § 6. Неизменная плоскость Лапласа.

Если  $n$  материальных точек движутся исключительно под влиянием взаимного притяжения, то существует, как мы видели (§ 1), плоскость, сохраняющая неизменное направление в пространстве. Эта плоскость определяется уравнением (7), коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  которого даются формулами (6).

Для действительного вычисления положения неизменной плоскости, например в случае нашей солнечной системы, формулы (6) непригодны, так как они требуют знания абсолютного движения всех точек системы.

Непригодны для этой цели и интегралы площадей относительного движения в форме (13), так как эти интегралы содержат величины  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots$ , характеризующие абсолютное движение центра инерции.

Покажем, что направление неизменной плоскости может быть найдено при помощи одних только относительных координат и скоростей точек системы. Объясняется это весьма просто: формулы (6) или (13) дают  $C_1, C_2, C_3$ ; но для определения положения неизменной плоскости нет надобности знать  $C_1, C_2, C_3$ , достаточно иметь отношения  $C_1 : C_2 : C_3$ .

Введем новую координатную систему с началом в центре инерции точек  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  и с осями, сохраняющими постоянное направление в пространстве. Координаты точки  $m_i$  в этой системе обозначим через  $x_i, y_i, z_i$ , а абсолютные координаты центра инерции попрежнему через  $X, Y, Z$ .

Так как, на основании (5) и (17):

$$MX = \alpha_1 t + \alpha_2, \quad MY = \beta_1 t + \beta_2, \quad MZ = \gamma_1 t + \gamma_2,$$

то

$$\ddot{X} = \ddot{Y} = \ddot{Z} = 0.$$

Поэтому, подставляя выражения

$$\xi_i = X + x_i, \quad \eta_i = Y + y_i, \quad \zeta_i = Z + z_i$$

старых координат через новые в уравнения (1), получим для определения движения относительно центра инерции такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= k^2 m_i \sum_j m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} \\ m_i \ddot{y}_i &= k^2 m_i \sum_j m_j \frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} \\ m_i \ddot{z}_i &= k^2 m_i \sum_j m_j \frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Так как эти уравнения имеют тот же вид, что и уравнения (1), то мы можем сразу написать для них интегралы площадей

$$\sum m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = C'_1$$

$$\sum m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = C'_2$$

$$\sum m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = C'_3.$$

Постоянные  $C'_1, C'_2, C'_3$  фиксируют для каждой точки  $x^0, y^0, z^0$  положение плоскости Лапласа

$$C'_1(x - x^0) + C'_2(y - y^0) + C'_3(z - z^0) = 0,$$

проходящей через эту точку.

Таким образом, для определения положения этой плоскости достаточно вычислить для какого-либо момента времени координаты  $x_i, y_i, z_i$  и компоненты скоростей  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$  всех точек системы относительно центра инерции.

При изучении движений тел солнечной системы употребление неизменной плоскости в качестве основной является более естественным, чем употребление эклиптики определенной эпохи (1750.0, или 1850.0, или 1900.0), обычно применяемой для этой цели.

Однако употребление плоскости Лапласа в качестве действительно неизменной координатной плоскости наталкивается на затруднения прежде всего практического характера. Дело в том, что положение этой плоскости зависит от планетных масс; поскольку эти последние известны лишь приближенно, и положение плоскости Лапласа в каждый данный момент может быть определено только приближенно. Таким образом, при всяком новом более точном определении планетных масс нам пришлось бы менять положение основной плоскости, что было бы весьма неудобно.

Другая причина, уже принципиального характера, отнимающая у определенной вышеуказанным способом плоскости Лапласа ее абсолютный характер, заключается в том, что Солнце и планеты не являются материальными точками. Благодаря этому момент количества движения, определяемый величинами  $C'_1, C'_2, C'_3$ , может изменяться, например вслед-

ствие приливных явлений, за счет моментов количества движения, присущих отдельным телам системы.

Относительно эклиптики и равноденствия 1850.0 положение неизменной плоскости определяется элементами

$$\Omega = 106^\circ 14', \quad i = 1^\circ 35' 19''.$$

Как и следовало ожидать, эта плоскость мало отличается от плоскости орбиты Юпитера и расположена между этой последней и плоскостью орбиты Сатурна.

## ГЛАВА II.

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

#### § 7. Уравнения движения в цилиндрических координатах.

Как известно, для определения положения светил наряду с прямоугольными координатами применяются различные полярные системы координат. Выведем соответствующие уравнения движения, причем начнем с простейшего случая цилиндрической неподвижной системы координат.

Наша задача заключается в изучении движения одной материальной точки  $P$ , которую мы для удобства будем называть планетой, относительно другой точки  $S$ , которую назовем Солнцем.

Начало координат поместим в точку  $S$ , причем плоскость  $xu$  в дальнейшем будем называть эклиптикой. Через  $r$  и  $\rho$  обозначим соответственно радиус-вектор точки  $P$  и его проекцию на плоскость  $xu$ ; через  $v$  обозначим долготу  $P$ , считаемую в этой плоскости от оси  $x$ -ов. В таком случае:

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \\ r^2 = \rho^2 + z^2.$$

Чтобы написать уравнения движения точки  $P$  в цилиндрических координатах  $\rho, v, z$ , проще всего воспользоваться уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k.$$

Положим  $q_1 = \rho, q_2 = v, q_3 = z$  и заметим, что живая сила точки  $P$  выражается через эти координаты следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{v}^2 + \dot{z}^2),$$

где через  $m$  обозначена масса  $P$ .

Обозначая через  $P, T$  и  $Z$  компоненты ускорения точки  $P$  по направлению проекции радиуса-вектора на плоскость  $xu$ , по направлению перпендикуляра к этой проекции в плоскости  $xu$  и по направлению оси  $z$ , получим:

$$Q_1 = mP, \quad Q_2 = m\rho T, \quad Q_3 = mZ.$$

Таким образом уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 &= P \\ \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{dv}{dt} \right) &= \rho T \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z. \end{aligned} \quad (1)$$

В том случае, когда существует функция сил  $mU$ , эти уравнения можно написать так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{dv}{dt} \right) &= \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения (1) употреблялись некоторыми авторами в теории движения Луны. В этом случае вместо координаты  $z$  обычно вводят величину

$$s = \frac{z}{\rho},$$

представляющую тангенс широты Луны.

Если рассматривается возмущенное движение  $P$ , то

$$U = \frac{k^2}{r} + R, \quad (3)$$

где первый член соответствует притяжению Солнца, а второй представляет пертурбационную функцию. Заметим, что коэффициент  $k^2$  должен быть заменен в этом равенстве через  $k^2(1+m)$ , если массой  $m$  тела  $P$  нельзя пренебречь по сравнению с массой Солнца, принятой за единицу.

Подстановка выражения (3) в уравнения (2) дает:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + k^2 \frac{\rho}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial \rho} \\ \frac{d}{dt} \left( \rho^2 \frac{dv}{dt} \right) &= \frac{\partial R}{\partial v} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned} \quad (4)$$

Эти уравнения применяются при вычислении возмущений планет и комет помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений.

### § 8. Уравнения Клеро-Лапласа.

Если пертурбационная функция  $R$ , входящая в уравнения (4), равна нулю, то мы имеем случай невозмущенного движения, совершающегося в неизменной плоскости, проходящей через  $S$ .

Приняв эту плоскость за плоскость  $xu$ , будем иметь  $z=0$ ,  $\rho=r$ , так что рассматриваемые уравнения обратятся в такие:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + k^2 r^{-2} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{dv}{dt} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4')$$

Общее решение этих уравнений дается (т. I, гл. II) хорошо известными формулами:

$$\begin{aligned} E - e \sin E &= ka^{\frac{3}{2}}(t-t_0) \\ \operatorname{tg} \frac{v-v_0}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \\ r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(v-v_0)}, \end{aligned}$$

где  $a$ ,  $e$ ,  $v_0$  и  $t_0$  — произвольные постоянные.

Рассматривая эти формулы, мы видим, что выражения  $r$  и  $t$  в функции  $v$  проще, чем выражения  $r$  и  $v$  в функции  $t$ .

Отсюда ясно, что в уравнениях движения (2) или (4) целесообразно за независимую переменную принять не время  $t$ , а долготу  $v$ . Действительно, возмущенное движение мы предполагаем мало отличающимся от невозмущенного, поэтому естественно ожидать, что такая замена будет способствовать большей простоте решения и в случае возмущенного движения.

С другой стороны, в то время как радиус-вектор, рассматриваемый как функция  $v$ , удовлетворяет довольно сложному уравнению, получаемому из (4') исключением  $t$ , обратная величина

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)} [1 + e \cos(v-v_0)]$$

удовлетворяет весьма простому уравнению

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + u = \frac{1}{a(1-e^2)}.$$

Принимая все это во внимание, преобразуем уравнения движения, данные в предыдущем параграфе, принимая за искомые величины

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad s = \frac{z}{\rho}$$

и время  $t$ , а за независимую переменную — долготу  $v$ .

Полагая

$$\rho^2 \frac{dv}{dt} = H,$$

откуда

$$\frac{dv}{dt} = Hu^2,$$

легко заменить производные по  $t$  производными по  $v$ . Так как

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\rho}{dt} \right) = Hu^2 \frac{d}{dv} \left( Hu^2 \frac{d\rho}{dv} \right) = \\ &= -Hu^2 \frac{d}{dv} \left( H \frac{du}{dv} \right) = \\ &= -H^2 u^2 \frac{d^2 u}{dv^2} - Hu^2 \frac{dH}{dv} \frac{du}{dv}, \end{aligned}$$

то первое из уравнений (1) напомним так:

$$H^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) + H \frac{dH}{dv} u^2 \frac{du}{dv} = -P. \quad (4'')$$

Второе из этих уравнений дает:

$$H \frac{dH}{dv} = u^{-3} T. \quad (5)$$

Наконец, полагая в третьем уравнении  $z = su^{-1}$  и замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (su^{-1})}{dt^2} &= Hu^2 \frac{d}{dv} \left( Hu^2 \frac{d(su^{-1})}{dv} \right) = \\ &= H^2 u^2 \left( u \frac{d^2 s}{dv^2} - s \frac{d^2 u}{dv^2} \right) + H \frac{dH}{dv} u^2 \left( u \frac{ds}{dv} - s \frac{du}{dv} \right), \end{aligned}$$

получим:

$$H^2 u^2 \left( \frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) + H \frac{dH}{dv} u^3 \frac{ds}{dv} = Z - Ps,$$

причем вторая производная  $u$  исключена при помощи равенства (4'').

Пользуясь, далее, равенством (5) для исключения производной  $H$ , окончательно будем иметь уравнения движения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dv^2} + u &= H^{-2} u^{-2} \left( -P - Tu^{-1} \frac{du}{dv} \right) \\ \frac{d^2 s}{dv^2} + s &= H^{-2} u^{-2} \left( -Ps - T \frac{ds}{dv} + Z \right) \\ H \frac{dH}{dv} &= Tu^{-3} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

После того как интегрирование этих уравнений даст  $u$ ,  $s$  и  $H$  в функции  $v$ , нужно еще определить время при помощи равенства:

$$\frac{dt}{dv} = H^{-1} u^{-2}. \quad (7)$$

Из полученных уравнений можно легко исключить вспомогательную величину  $H$ . В самом деле, из (5) следует:

$$H^2 = h^2 + 2 \int Tu^{-3} dv,$$

где  $h$  — постоянная, введенная интегрированием.

Поэтому уравнения (6) и (7) могут быть заменены такими:

$$\left. \begin{aligned} (h^2 + 2 \int Tu^{-3} dv) \left( \frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) &= u^{-2} \left( -P - Tu^{-1} \frac{du}{dv} \right) \\ (h^2 + 2 \int Tu^{-3} dv) \left( \frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) &= u^{-2} \left( -Ps - T \frac{ds}{dv} + Z \right) \\ \frac{dt}{dv} &= u^{-2} (h^2 + 2 \int Tu^{-3} dv)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В заключение напомним эти уравнения для того случая, когда существует функция сил  $U$ . В этом случае

$$P = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial v}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

а так как из равенства

$$U(u, v, s) = U\left(\frac{1}{\rho}, v, \frac{z}{\rho}\right)$$

следует

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -u^2 \frac{\partial U}{\partial u} - su \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = u \frac{\partial U}{\partial s},$$

то окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \left( h^2 + 2 \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv \right) \left( \frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) &= \frac{\partial U}{\partial u} - u^{-2} \frac{du}{dv} \frac{\partial U}{\partial v} + su^{-1} \frac{\partial U}{\partial s} \\ \left( h^2 + 2 \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv \right) \left( \frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) &= su^{-1} \frac{\partial U}{\partial u} - u^2 \frac{ds}{dv} \frac{\partial U}{\partial v} + u^{-2} (1 + s^2) \frac{\partial U}{\partial s} \\ \frac{dt}{dv} &= u^{-2} \left( h^2 + 2 \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В таком виде эти уравнения были впервые даны Лапласом, но основная идея — употребление долготы в качестве независимой переменной и величины  $u$  вместо  $\rho$  — принадлежит Клеро. Клеро вывел уравнения (9) для случая  $s=0$  и воспользовался ими для изучения возмущений в движении Луны, производимых Солнцем, в предположении, что Луна движется в плоскости эклиптики.

Уравнения (6) были широко использованы Адамсом в его работах по теории движения Луны.

### § 9. Применение уравнений Клеро-Лапласа к изучению движения в сопротивляющейся среде.

Предположим, что движущаяся вокруг Солнца планета испытывает сопротивление, величина которого равна  $\alpha m V r^{-2}$ , где  $m$  — масса планеты,  $V$  — ее скорость,  $r$  — расстояние от Солнца, а  $\alpha$  — весьма малый постоянный коэффициент. Это сопротивление мы будем предполагать направленным по касательной в сторону, противоположную движению планеты.

Воспользуемся уравнениями (6), которые в этом случае могут быть взяты в форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dv^2} + u &= H^{-2} u^{-2} \left( -P - Tu^{-1} \frac{du}{dv} \right), \\ H \frac{dH}{dv} &= Tu^{-3}, \quad \frac{dv}{dt} = Hu^2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

так как за плоскость  $xu$  мы можем принять плоскость орбиты, поскольку изучаемое движение будет, очевидно, плоское. При этом

$$r = u^{-1}.$$

Вычислим компоненты ускорения, вызываемого сопротивлением среды, по направлению радиуса-вектора и по перпендикуляру к нему в плоскости орбиты. Известно, что косинусы углов, образованных положительным направлением касательной к орбите с этими направлениями, равны соответственно

$$rV^{-1} \text{ и } r\dot{v}V^{-1},$$

причем

$$V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2}.$$

Поэтому искомые компоненты ускорения будут равны:

$$-\alpha r^{-2}\dot{r} = +\alpha Hu^2 \frac{du}{dv}$$

и

$$-\alpha r^{-1}\dot{v} = -\alpha Hu^3.$$

Следовательно

$$P = -k^2(1+m)u^2 + \alpha Hu^2 \frac{du}{dv}$$

$$T = -\alpha Hu^3.$$

Подставляя эти значения в уравнения (10), мы прежде всего получим:

$$\frac{dH}{dv} = -\alpha,$$

откуда

$$H = h - \alpha v, \quad (11)$$

где  $h$  — постоянная интегрирования.

Далее, первое из уравнений (10) дает:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = k^2(1+m)H^{-2},$$

или, ограничиваясь тем случаем, когда коэффициент  $\alpha$  настолько мал, что величины порядка  $\alpha^2$  нечувствительны:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = k^2 h^{-2} (1 + 2\alpha h^{-1}v).$$

Мы опустили для краткости множитель  $1+m$ , который всегда можно считать включенным в  $k^2$ .

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$u = k^2 h^{-2} [1 + 2\alpha h^{-1}v + \varepsilon \cos(v - \omega)], \quad (12)$$

где  $\varepsilon$  и  $\omega$  — произвольные постоянные.

Сравним действительную орбиту, представляемую этим уравнением, с эллиптической орбитой

$$u = p_0^{-1} [1 + e_0 \cos(v - \pi_0)], \quad (13)$$

которую описывала бы планета при отсутствии сопротивляющейся среды.

Очевидно мы можем вместо постоянных элементов  $p_0, e_0, \pi_0$  подставить в уравнение (13) такие функции  $v$ , что это уравнение станет

тождественным с уравнением (12). Это можно сделать, например, следующим образом.

Пусть в момент  $t=t_0$  координаты и их производные имеют значения  $u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0$ . При помощи этих значений мы можем вычислить элементы эллиптического движения (т. I, гл. IV). Очевидно, это будет то движение, которое имела бы планета, если бы в момент  $t_0$  сопротивляющаяся среда исчезла. Такое движение называется оскулирующим (т. е. соприкасающимся) по отношению к рассматриваемому движению, а элементы  $p_0, e_0, \pi_0$  соответствующей орбиты (являющиеся функциями  $t_0$ ) носят название оскулирующих элементов для момента  $t_0$ .

Найдем выражения оскулирующих элементов как функций  $v_0$ . Для этого заметим, что для момента  $t_0$  величины

$$H = r^2\dot{v} \text{ и } \frac{du}{dv} = \dot{u}\dot{v}^{-1}$$

должны иметь одни и те же значения для действительного и для оскулирующего движений.

Но для оскулирующего (эллиптического) движения мы имеем, на основании хорошо известной формулы,

$$H = k\sqrt{p_0},$$

тогда как для движения в сопротивляющейся среде  $H$  имеет значение (11).

Поэтому

$$k^2 p_0 = (h - \alpha v_0)^2,$$

откуда, в пределах принятой точности,

$$k^2 h^{-2} = p_0^{-1} (1 - 2\alpha h^{-1}v_0). \quad (14)$$

Приравняем теперь значения  $u$  и  $\frac{du}{dv}$ , даваемые формулами (12) и (13) при  $v = v_0$ . Это даст:

$$k^2 h^{-2} [1 + 2\alpha h^{-1}v_0 + \varepsilon \cos(v_0 - \omega)] = p_0^{-1} [1 + e_0 \cos(v_0 - \pi_0)]$$

$$k^2 h^{-2} [2\alpha h^{-1}v_0 - \varepsilon \sin(v_0 - \omega)] = p_0^{-1} [-e_0 \sin(v_0 - \pi_0)].$$

Отсюда, учитывая равенство (14) и ограничиваясь первыми степенями  $\alpha$ :

$$e_0 \cos(v_0 - \pi_0) = (1 - 2\alpha h^{-1}v_0)\varepsilon \cos(v_0 - \omega)$$

$$e_0 \sin(v_0 - \pi_0) = (1 - 2\alpha h^{-1}v_0)\varepsilon \sin(v_0 - \omega) - 2\alpha h^{-1}.$$

Комбинируя обычным способом эти равенства, окончательно будем иметь:

$$e_0 \cos(\pi_0 - \omega) = \varepsilon - 2\alpha h^{-1}v_0\varepsilon - 2\alpha h^{-1} \sin(v_0 - \omega)$$

$$e_0 \sin(\pi_0 - \omega) = 2\alpha h^{-1}\varepsilon \cos(v_0 - \omega).$$

При  $\alpha = 0$  эти соотношения дают

$$e_0 = \varepsilon, \quad \pi_0 = \omega,$$

поэтому, в пределах принятой точности, их можно заменить такими:

$$e_0 = \varepsilon - 2\alpha h^{-1}[\varepsilon v_0 + \sin(v_0 - \omega)]$$

$$\pi_0 = \omega + 2\alpha h^{-1}\varepsilon \cos(v_0 - \omega).$$

Эти формулы показывают, что долгота перигелия  $\pi_0$  оскулирующей орбиты является периодической функцией  $v_0$ , а следовательно и  $t_0$ . Что же касается до  $e_0$ , то этот элемент будет подвержен не только периодическим изменениям, но и вековым, вследствие наличия члена, пропорционального  $v_0$ .

При увеличении  $v_0$  на  $2\pi$  эксцентриситет  $e_0$  получает приращение

$$\Delta e = -4\pi a h^{-1} e = -4\pi a h^{-1} e_0. \quad (15)$$

Иначе говоря, при наличии сопротивляющейся среды, действующей по указанному выше закону, эксцентриситет будет убывать при каждом обороте планеты на часть своей величины, равную  $4\pi a h^{-1}$ .

Точно так же из равенства (14), дающего,

$$p_0 = k^{-2} h^2 (1 - 2ah^{-1} v_0),$$

следует, что при каждом обороте планеты параметр орбиты  $p_0$  будет меняться на

$$\Delta p = -4\pi a k^{-2} h.$$

Так как

$$p_0 = a_0 (1 - e_0^2),$$

то, рассматривая эти приращения как бесконечно малые, имеем

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta a}{a_0} - \frac{2e_0 \Delta e}{1 - e_0^2},$$

откуда

$$\frac{\Delta a}{a_0} = -\frac{4\pi a}{h} \frac{1 + e_0^2}{1 - e_0^2}.$$

В заключение найдем соответствующее изменение среднего суточного движения, определяемого, как известно, равенством

$$n_0 = k a_0^{-\frac{3}{2}}.$$

Получим

$$\frac{\Delta n}{n_0} = -\frac{3}{2} \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{6\pi a}{h} \frac{1 + e_0^2}{1 - e_0^2}. \quad (16)$$

Итак, если планета или комета движется в среде, оказывающей сопротивление, прямо пропорциональное скорости и обратно пропорциональное квадрату расстояния от Солнца, то эксцентриситет оскулирующей орбиты будет уменьшаться, а среднее суточное движение возрастать. Размеры этих изменений в первом приближении даются формулами (15) и (16).

### ГЛАВА III.

#### МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ.

##### § 10. Оскулирующие элементы.

Обозначим через  $x, y, z$  гелиоцентрические эклиптические координаты планеты (или кометы)  $P$ , имеющей массу  $m$ .

Если на эту планету не действуют никакие иные силы, кроме притяжения Солнца (масса которого принята за единицу), то уравнения движения напишутся, как известно (§ 3), следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k^2(1+m)xr^{-3} &= 0 \\ \ddot{y} + k^2(1+m)yr^{-3} &= 0 \\ \ddot{z} + k^2(1+m)zr^{-3} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В дальнейшем мы будем вместо  $k^2(1+m)$  писать, ради краткости, просто  $k^2$ , так как множитель  $1+m$ , всегда сопровождающий  $k^2$ , легко может быть восстановлен в нужный момент.

Если, кроме притяжения Солнца, на планету действует еще некоторая сила  $mF$ , имеющая компоненты  $mF_x, mF_y, mF_z$ , то вместо уравнений (1) мы будем иметь такие уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k^2xr^{-3} &= F_x \\ \ddot{y} + k^2yr^{-3} &= F_y \\ \ddot{z} + k^2zr^{-3} &= F_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Движение, определяемое уравнениями (1), называется невозмущенным или кеплеровым, тогда как движение, соответствующее уравнениям (2), — возмущенным. Так как в теории возмущений рассматривается чаще всего движение по орбитам, близким к эллипсу, то невозмущенное движение иногда называют эллиптическим.

Полное решение уравнений (1) нам известно. Ограничиваясь сначала, для большей определенности, случаем движения по эллипсу, мы можем выразить это решение следующими формулами:

$$M = n(t - t_0) + M_0 \quad (3)$$

$$n = k a^{-\frac{3}{2}} \quad (4)$$

$$E - e \sin E = M \quad (5)$$

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (7)$$

$$u = v + \omega$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

которые дают искомые координаты  $x, y, z$  в зависимости от времени и шести постоянных интегрирования  $a, e, M_0, \omega, \Omega, i$ .

Для уравнений возмущенного движения (2) подобное интегрирование в конечном виде при помощи известных функций не выполнимо, а потому решать эти уравнения приходится иными методами. Так как в большинстве встречающихся на практике случаев возмущающее ускорение  $F$  весьма мало по сравнению с ускорением, зависящим от притяжения Солнца, то возмущенное движение чаще всего изучают при помощи способа последовательных приближений: за первое приближение принимают невозмущенное движение, затем придают к нему поправки („возмущения“ или „неравенства“), все более и более сближающие его с действительным движением.

Применение этого способа существенно облегчается надлежащим выбором функций времени, определяющих движение. Очень часто бывает выгодно принять за искомые функции вместо  $x, y, z$  какие-либо другие величины, могущие определить положение планеты. В частности, для этой цели могут быть употреблены оскулирующие элементы орбиты, к рассмотрению которых мы сейчас перейдем.

Только-что указанные формулы (3)—(8), которые дают

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, a, e, M_0, \omega, \Omega, i) \\ y &= f_2(t, a, e, M_0, \omega, \Omega, i) \\ z &= f_3(t, a, e, M_0, \omega, \Omega, i), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

представляют эллиптическое движение, если под  $a, e, \dots, i$  разуметь постоянные числа. Но эти же самые формулы могут представить какое угодно движение, в частности изучаемое нами возмущенное движение, если  $a, e, \dots, i$  считать надлежаще выбранными функциями времени.

Функции  $a(t), e(t), \dots$ , представляющие при помощи уравнений (9) возмущенное движение, носят название мгновенных элементов. Совокупность этих элементов определяет мгновенную орбиту планеты  $P$ . Таким образом, знание мгновенной орбиты дает возможность вычислять координаты  $P$  для любого момента по формулам эллиптического движения.

Поскольку мы имеем только три условия (9) для определения шести функций  $a(t), e(t), \dots$ , мы можем эти функции подчинить еще трем дополнительным условиям.

Воспользуемся теперь остающимся произволом в выборе мгновенных элементов и наложим на них следующее условие: потребуем, чтобы не только координаты  $x, y, z$ , но и их производные  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  выражались через мгновенные элементы по формулам эллиптического движения.

Эти формулы, легко выводимые из соотношений (3)—(8), таковы:

$$\dot{r} = \frac{ke \sin v}{\sqrt{p}} \quad (10)$$

$$\dot{v} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} r^{-1} x + \dot{v} r (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) \\ \dot{y} &= \dot{r} r^{-1} y + \dot{v} r (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) \\ \dot{z} &= \dot{r} r^{-1} z + \dot{v} r \cos u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$u = v + \omega, \quad p = a(1 - e^2).$$

Функции времени  $a(t), e(t), \dots$ , однозначно определенные шестью уравнениями (9) и (12), называются оскулирующими элементами, а соответствующая им эллиптическая орбита (непрерывно изменяющая свое положение и свою форму) — оскулирующей орбитой.

Решение уравнений (9) и (12) относительно элементов было уже нами выполнено (т. I, гл. IV), причем мы убедились, что эти уравнения действительно имеют всегда одно и только одно решение.

Итак, оскулирующие элементы для любого момента  $t$  вычисляются по формулам невозмущенного движения при помощи значений  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  для этого момента. Поэтому оскулирующие элементы можно определить как элементы того невозмущенного движения, которое имела бы планета  $P$ , если бы в момент  $t$  возмущающее ускорение  $F$  исчезло.

В заключение этого параграфа напомним формулы, по которым производится решение уравнений (9) и (12) относительно элементов орбиты.

Прежде всего, из уравнений

$$\left. \begin{aligned} k\sqrt{p} \sin i \sin \Omega &= y\dot{z} - z\dot{y} \\ k\sqrt{p} \sin i \cos \Omega &= x\dot{z} - z\dot{x} \\ k\sqrt{p} \cos i &= x\dot{y} - y\dot{x} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

находим параметр  $p$ , долготу узла  $\Omega$  и наклонность орбиты  $i$ .

Интеграл живых сил

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = k^2 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (14)$$

дает большую полуось  $a$ , что позволяет найти, при помощи соотношения

$$p = a(1 - e^2), \quad (15)$$

эксцентриситет  $e$ .

Определив истинную аномалию  $v$  из (10), мы можем найти расстояние перигелия от узла  $\omega$  при помощи равенств

$$\left. \begin{aligned} r \sin(v + \omega) &= z \operatorname{cosec} i \\ r \cos(v + \omega) &= x \cos \Omega + y \sin \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

легко выводимых из (8).

Наконец, для определения средней аномалии эпохи  $M_0$  надо воспользоваться соотношениями (7), (5) и (3).

### § 11. Дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы.

В предыдущем параграфе мы видели, что для изучения движения планеты  $P$  можно вместо координат  $x, y, z$  определить шесть оскулирующих элементов  $a, e, M_0, \omega, \Omega, i$ . Такая замена переменных выгодна в том отношении, что элементы, остающиеся постоянными в невозмущен-

ном движении, в возмущенном движении меняются весьма медленно, по крайней мере, если возмущающее ускорение невелико по сравнению с ускорением, производимым Солнцем. Вследствие этого определение элементов  $a, e, \dots$  способом последовательных приближений выполняется удобнее, чем определение координат  $x, y, z$ .

Наша ближайшая задача заключается в выводе дифференциальных уравнений, определяющих  $a, e, \dots, i$ .

Чтобы получить нужные нам уравнения, можно в уравнения возмущенного движения (2), которые мы теперь напомним так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -k^2 x r^{-3} + F_x \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= -k^2 y r^{-3} + F_y \\ \frac{d\dot{z}}{dt} &= -k^2 z r^{-3} + F_z \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

подставить выражения (9) и (12), дающие  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  в функции новых неизвестных  $a, e, M_0, \omega, \Omega, i$ .

Однако прямая подстановка требует слишком сложных вычислений, поэтому мы выберем обходный путь, значительно легче приводящий к цели.

Пусть имеем какое-либо соотношение вида

$$\Psi(a, e, \dots, i, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0, \quad (18)$$

являющееся следствием основных уравнений (3)–(8), (10), (11), (12).

Дифференцирование этого соотношения по  $t$  дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial a} \frac{da}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \dots + \\ + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим теперь невозмущенное движение, которое получается, если в момент  $t$  уничтожить возмущающее ускорение  $F$ . Соответствующие координаты и компоненты скорости обозначим через  $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ . Дифференциальные уравнения (1), определяющие это движение, можно написать, аналогично уравнениям (17), так:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \dot{\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \dot{\zeta}, \\ \frac{d\dot{\xi}}{dt} &= -k^2 \xi r^{-3}, \quad \frac{d\dot{\eta}}{dt} = -k^2 \eta r^{-3}, \quad \frac{d\dot{\zeta}}{dt} = -k^2 \zeta r^{-3}, \end{aligned}$$

где

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Для рассматриваемого момента  $t$  мы имеем:

$$\begin{aligned} x &= \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \\ \dot{x} &= \dot{\xi}, \quad \dot{y} = \dot{\eta}, \quad \dot{z} = \dot{\zeta}, \end{aligned}$$

а потому

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{d\dot{\xi}}{dt} + F_x, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{\eta}}{dt} + F_y, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{\zeta}}{dt} + F_z. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Вернемся теперь к соотношению (18), которое очевидно имеет место и для невозмущенного движения. Дифференцируя его в этом предположении, получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{d\xi}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{\xi}}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

Вычитая почленно это равенство из (19) и учитывая соотношения (20), окончательно будем иметь:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a} \frac{da}{dt} + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} F_x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} F_y + \frac{\partial \Psi}{\partial z} F_z = 0. \quad (21)$$

Приходим к следующему, важному для дальнейшего, результату:

Всякое соотношение (18) между элементами, координатами и компонентами скорости дает соотношение вида (21) между производными элементов и компонентами возмущающего ускорения.

Переход от (18) к (21) для краткости будем называть основной операцией.

*Параметр, долготы узла и наклонность.*

Применим основную операцию к равенствам (13). Полагая, для сокращения письма,

$$\frac{1}{k\sqrt{p}} F_x = F'_x, \quad \frac{1}{k\sqrt{p}} F_y = F'_y, \quad \frac{1}{k\sqrt{p}} F_z = F'_z,$$

получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p^{-1} \sin i \sin \Omega \frac{dp}{dt} + \sin i \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \cos i \sin \Omega \frac{di}{dt} &= yF'_z - zF'_y \\ \frac{1}{2} p^{-1} \sin i \cos \Omega \frac{dp}{dt} - \sin i \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \cos i \cos \Omega \frac{di}{dt} &= xF'_z - zF'_x \\ \frac{1}{2} p^{-1} \cos i \frac{dp}{dt} - \sin i \frac{di}{dt} &= xF'_y - yF'_x. \end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание выражения (8):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2pr [F'_x (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) + \\ &+ F'_y (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) + F'_z \cos u \sin i] \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u [F'_x \sin \Omega \sin i - F'_y \cos \Omega \sin i + F'_z \cos i] \\ \frac{di}{dt} &= r \cos u [F'_x \sin \Omega \sin i - F'_y \cos \Omega \sin i + F'_z \cos i]. \end{aligned}$$

Чтобы написать эти формулы проще, введем в рассмотрение компоненты возмущающего ускорения по радиусу-вектору по направлению, перпендикулярному к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты и по нормали к плоскости орбиты. Обозначая эти компоненты соответственно через  $S$ ,  $T$ ,  $W$  и полагая, подобно предыдущему,

$$\frac{1}{k\sqrt{p}}S = S', \quad \frac{1}{k\sqrt{p}}T = T', \quad \frac{1}{k\sqrt{p}}W = W',$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} S' &= F'_x(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) + \\ &+ F'_y(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + F'_z \sin u \sin i \\ T' &= F'_x(-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) + \\ &+ F'_y(-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) + F'_z \cos u \sin i \\ W' &= F'_x \sin \Omega \sin i - F'_y \cos \Omega \sin i + F'_z \cos i, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В самом деле, коэффициенты  $F'_x$ ,  $F'_y$ ,  $F'_z$  в выражении  $S'$  равняются очевидно  $xr^{-1}$ ,  $yr^{-1}$ ,  $zr^{-1}$ ; что же касается до соответственных коэффициентов в выражении  $T'$ , то они получаются из предыдущих заменой  $u$  через  $u + 90^\circ$ .

Таким образом окончательно имеем

$$\frac{dp}{dt} = 2pr T' \quad (23)$$

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = r \sin u W' \quad (24)$$

$$\frac{di}{dt} = r \cos u W'. \quad (25)$$

#### Большая полуось и эксцентриситет.

Применяя основную операцию к интегралу живых сил (14), получим

$$k^2 a^{-2} \frac{da}{dt} = 2\dot{x} F_x + 2\dot{y} F_y + 2\dot{z} F_z,$$

откуда, учитывая соотношения (10), (11), (12) и (22):

$$\frac{da}{dt} = 2a^2 e \sin v S' + 2a^2 pr^{-1} T'. \quad (26)$$

Обратимся теперь к равенству (15), которое дает:

$$2ae \frac{de}{dt} = (1 - e^2) \frac{da}{dt} - \frac{dp}{dt}.$$

Отсюда, принимая во внимание (6), а также равенство

$$pr^{-1} = 1 + e \cos v, \quad (27)$$

вытекающее из уравнения орбиты, получим:

$$\frac{de}{dt} = p \sin v S' + p (\cos v + \cos E) T'. \quad (28)$$

#### Расстояние перигелия от узла.

Возьмем теперь второе из равенств (16). Результат применения к нему основной операции может быть записан так:

$$-r \sin u \left[ \left( \frac{dv}{dt} \right) + \frac{d\omega}{dt} \right] = (-x \sin \Omega + y \cos \Omega) \frac{d\Omega}{dt},$$

где через  $\left( \frac{dv}{dt} \right)$  обозначена производная, соответствующая зависимости  $v$  от времени только через посредство оскулирующих элементов.<sup>1</sup>

Подставив сюда вместо  $x$  и  $y$  их выражения (8), будем иметь:

$$\frac{d\omega}{dt} = - \left( \frac{dv}{dt} \right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt}.$$

Чтобы найти  $\left( \frac{dv}{dt} \right)$ , обратимся к равенству (10). Для исключения из этого равенства эксцентриситета, мы напишем его так:

$$\dot{r} \operatorname{ctg} v = \frac{k}{\sqrt{p}} e \cos v,$$

или, пользуясь соотношением (27),

$$\dot{r} \operatorname{ctg} v = \frac{k\sqrt{p}}{r} - \frac{k}{\sqrt{p}} e.$$

К этому равенству применим основную операцию, учитывая, что  $r$  определяется равенством

$$rr = xx + yy + zz.$$

Получим

$$S \operatorname{ctg} v - \frac{\dot{r}}{\sin^2 v} \left( \frac{dv}{dt} \right) = \frac{k}{2\sqrt{pr}} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \frac{dp}{dt},$$

откуда, при помощи (23):

$$e \left( \frac{dv}{dt} \right) = p \cos v S' - (r + p) \sin v T'.$$

Следовательно

$$e \frac{d\omega}{dt} = -p \cos v S' + (r + p) \sin v T' - e \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \quad (29)$$

#### Средняя аномалия эпохи.

Применим основную операцию к соотношениям (5) и (6). Это даст:

$$\left( \frac{dM}{dt} \right) = (1 - e \cos E) \left( \frac{dE}{dt} \right) - \sin E \frac{de}{dt}$$

$$\frac{r}{a} \frac{da}{dt} - a \cos E \frac{de}{dt} + ae \sin E \left( \frac{dE}{dt} \right) = 0.$$

<sup>1</sup> Необходимо иметь в виду, что истинная аномалия  $v$ , в отличие от радиуса-вектора  $r$ , не может здесь рассматриваться как „координата“. В самом деле,  $v$  зависит не только от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , но и от  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ .

Подобно предыдущему, здесь через  $\left(\frac{dM}{dt}\right)$  и  $\left(\frac{dE}{dt}\right)$  обозначены производные, соответствующие только той части изменения  $M$  и  $E$ , которая зависит от изменения оскулирующих элементов.

Исключаем  $\left(\frac{dE}{dt}\right)$  и в полученное равенство

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{dM}{dt}\right) = \text{ctg } v \frac{de}{dt} - \frac{r}{a^2 \sin v} \frac{da}{dt}$$

подставляем уже найденные значения производных эксцентриситета и большой полуоси. Это дает:

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{dM}{dt}\right) = (p \cos v - 2er) S' + \frac{p}{\sin v} (\cos^2 v + \cos v \cos E - 2) T'.$$

Упростим коэффициент  $T'$ . Для этого воспользуемся формулами:

$$\begin{aligned} r \sin v &= a \sqrt{1-e^2} \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - e). \end{aligned} \quad (30)$$

Вторая из них дает, при помощи (6),

$$r \cos v \cos E = a \cos^2 E - ae \cos E = r - a \sin^2 E.$$

Исключив теперь  $\sin E$  при помощи первой из формул (30), будем иметь:

$$\cos v \cos E = 1 - \frac{r}{p} \sin^2 v.$$

Пользуясь этим соотношением, окончательно получаем:

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{dM}{dt}\right) = (p \cos v - 2er) S' - (r+p) \sin v T'.$$

Обратимся теперь к равенству (3). Применение к нему нашей основной операции дает

$$\left(\frac{dM}{dt}\right) = \frac{dM_0}{dt} + (t-t_0) \frac{dn}{dt}, \quad (31)$$

тогда как в результате полного дифференцирования этого равенства имеем:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM_0}{dt} + (t-t_0) \frac{dn}{dt} + n,$$

поэтому

$$\frac{dM}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right) + n.$$

Интегрируя это равенство от  $t_0$  до  $t$ , получим

$$M(t) = M_0(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{dM}{dt}\right) dt + \int_{t_0}^t n dt,$$

или

$$M(t) = \bar{M}_0(t) + \int_{t_0}^t n dt, \quad (32)$$

где

$$\bar{M}_0(t) = M_0(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\frac{dM}{dt}\right) dt. \quad (33)$$

Оскулирующие элементы  $M_0(t)$  и  $n(t)$  являются функциями времени, поэтому мы употребили обозначение  $M_0(t_0)$ , чтобы подчеркнуть, что имеется в виду величина  $M_0(t)$ , соответствующая эпохе оскуляции  $t_0$ .

Вычисляя положение планеты для какого-либо момента  $t$ , мы можем соответствующую среднюю аномалию  $M(t)$  найти по обычной формуле эллиптического движения:

$$M(t) = M_0(t) + n(t)(t-t_0). \quad (34)$$

На основании равенства (31) производная оскулирующего элемента  $M_0(t)$  дается формулой:

$$\frac{dM_0}{dt} = \left(\frac{dM}{dt}\right) - (t-t_0) \frac{dn}{dt},$$

причем, в силу соотношения (4),

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{k}{a^2 \sqrt{a}} \frac{da}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt}$$

или

$$\frac{dn}{dt} = -3nae \sin v S' - 3napr^{-1} T'.$$

Таким образом, производная элемента  $M_0(t)$  содержит члены, пропорциональные времени, и потому этот элемент будет быстро изменяться, несмотря на малость множителей  $S'$  и  $T'$ . Это обстоятельство, влекущее большие неудобства при вычислении возмущений, заставило отказаться от употребления формулы (34) для вычисления возмущенной средней аномалии и заменить ее формулой (32). Стоящая в этой формуле функция  $\bar{M}_0$  определяется, на основании (33), таким уравнением:

$$\frac{d\bar{M}_0}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} (p \cos v - 2er) S' - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} (r+p) \sin v T'. \quad (35)$$

Так как на практике всегда пользуются формулами (32) и (35), то можно, поскольку это не вызывает недоразумений, обозначать  $\bar{M}_0$  просто через  $M_0$ , условившись раз навсегда употреблять для вычисления средней аномалии формулу (32).

## § 12. Сопоставление формул.

В большинстве встречающихся на практике случаев наклонность орбиты  $i$  невелика, а потому некоторые из выведенных в предыдущем параграфе формул целесообразно заменить другими.

Вместо расстояния перигелия от узла введем долготу перигелия  $\pi$ , определяемую равенством

$$\pi = \Omega + \omega.$$

Формула (29) дает:

$$e \frac{d\pi}{dt} = 2e \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} - p \cos v S' + (r+p) \sin v T'.$$

Так как первый член правой части равен, на основании (24):

$$2r \sin u \frac{\sin^2 \frac{i}{2}}{\sin i} W' = r \sin u \operatorname{tg} \frac{i}{2} W',$$

то малые значения  $i$  будут только способствовать уменьшению этого члена, тогда как в формуле (29) соответствующий член будет велик.

Введем, далее, среднюю долготу в орбите:

$$\lambda = \pi + M = \Omega + \omega + M,$$

которую в дальнейшем будем называть просто средней долготой.

Значение средней долготы, соответствующее начальной эпохе  $t_0$ , обозначим через  $\lambda_0$ , так что

$$\lambda_0 = \pi + M_0, \\ \lambda = \lambda_0 + n(t - t_0).$$

Наконец, учитывая формулу (32), положим:

$$\lambda = \varepsilon + \int_{t_0}^t n dt, \quad (36)$$

где

$$\varepsilon = \pi + \bar{M}_0(t),$$

а потому

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\pi}{dt} + \frac{d\bar{M}_0}{dt}.$$

Величину  $\varepsilon$  также называют, поскольку это не может вызвать недоразумения, средней долготой эпохи.

Сопоставим теперь вместе все дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 2a^2 e \sin v S' + 2a^2 pr^{-1} T' \\ \frac{de}{dt} &= p \sin v S' + p (\cos v + \cos E) T' \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u W' \\ \frac{di}{dt} &= r \cos u W' \\ e \frac{d\pi}{dt} &= 2e \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} - p \cos v S' + (r+p) \sin v T' \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= 2 \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt} - 2r \sqrt{1-e^2} S' + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} [-p \cos v S' + \\ &\quad + (r+p) \sin v T'], \end{aligned} \right\} (37)$$

где

$$S' = \frac{1}{k\sqrt{p}} S, \quad T' = \frac{1}{k\sqrt{p}} T, \quad W' = \frac{1}{k\sqrt{p}} W,$$

причем через  $S, T, W$  обозначены компоненты возмущающего ускорения.

Так как средняя долгота вычисляется по формуле (36), то к этим уравнениям надо прибавить еще такое:

$$\frac{dn}{dt} = -3nae \sin v S' - 3napr^{-1} T'. \quad (38)$$

После того как интегрирование этой системы дифференциальных уравнений даст значение оскулирующих элементов для момента  $t$ , положение планеты для этого момента вычисляется по обычным формулам. Сначала при помощи соотношений (36) и

$$\left. \begin{aligned} E - e \sin E &= \lambda - \pi \\ r &= a(1 - e \cos E) \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \\ u &= v + \pi - \Omega \end{aligned} \right\} (39)$$

находим  $r$  и  $u$ , после чего равенства (8) дадут  $x, y, z$ .

### § 13. Уравнения Лагранжа.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на возмущающее ускорение  $F$ . Предположим теперь, что это ускорение вызывается силой, имеющей потенциал. Иначе говоря, допустим существование такой функции  $R$ , что

$$F_x = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Примером такого случая могут служить возмущения, испытываемые каждой планетой со стороны других, так как здесь за такую функцию можно взять пертурбационную функцию, что видно из уравнений (11) гл. I.

Преобразуем основные уравнения (37) так, чтобы в них входили, вместо компонентов возмущающего ускорения  $S, T, W$ , частные производные функции  $R$  по элементам.

Для любого элемента имеет место равенство вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = \\ &= F_x \frac{\partial x}{\partial a} + F_y \frac{\partial y}{\partial a} + F_z \frac{\partial z}{\partial a}, \end{aligned}$$

причем для выражения  $F_x, F_y, F_z$  через  $S, T, W$  можно воспользоваться равенствами (22), которые дают

$$\begin{aligned} F_x &= S (\cos u \cos \Omega - \sin u \cos \Omega \cos i) + \\ &\quad + T (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i) + W \sin \Omega \sin i \\ F_y &= S (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) + \\ &\quad + T (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i) - W \cos \Omega \sin i \\ F_z &= S \sin u \sin i + T \cos u \sin i + W \cos i. \end{aligned}$$

Что касается до вычисления производных от координат по элементам  $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \dots, \frac{\partial x}{\partial e}, \dots$ , то оно не представляет затруднений: сначала находятся производные  $r$  и  $u$ , а именно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}; & \frac{du}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos v; & \frac{du}{\partial e} &= \frac{2+e \cos v}{1-e^2} \sin v = \frac{a \sin v}{r} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \\ \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} &= \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin v; & \frac{du}{\partial \varepsilon} &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}, \end{aligned} \right\} (40)$$

затем выражения (8) дифференцируются по элементам. При этом надо иметь в виду, что  $\Omega$  входит в каждую координату как явно, так и через посредство  $u = v + \pi - \Omega$ . Точно так же, при дифференцировании по  $\pi$  надо учитывать, что  $u$  зависит от  $\pi$  явно и через посредство  $v$ , поскольку  $v$  есть функция

$$M = \int_0^t n dt + \varepsilon - \pi;$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \pi} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = nar \sqrt{1-e^2} S'$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = na^2 [-p \cos v S' + (r+p) \sin v T']$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = na^2 \sqrt{1-e^2} r \sin u W'$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -2kr \sqrt{p} \sin^2 \frac{i}{2} T' - na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i r \cos u W''$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = na^3 (e \sin v S' + pr^{-1} T')$$

$$\frac{\partial R}{\partial \pi} = -\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + kr \sqrt{p} T'.$$

Остается значения  $S', T', W'$ , даваемые этими равенствами, подставить в уравнения (37). Для этого мы выделим следующие комбинации, встречающиеся в уравнениях (37):

$$r \sqrt{1-e^2} S' = \frac{1}{na} \frac{\partial R}{\partial a}$$

$$kr \sqrt{p} T' = \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

$$r \sin u W' = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$r \cos u W'' = \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} -p \cos v S' + (r+p) \sin v T' &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e} \\ a^2 e \sin v S' + a^2 pr^{-1} T' &= \frac{1}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнения (37) и (38), после всех упрощений получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e \sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \right\} (41)$$

Второе из этих уравнений проще всего получим, комбинируя первое с уравнением

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \quad (42)$$

вытекающим из (23).

Уравнения (41) будем в дальнейшем называть уравнениями Лагранжа.

Важно отметить, что при вычислении производной  $\frac{\partial R}{\partial a}$ , входящей в предпоследнее из уравнений (41), следует учитывать только явную зависимость  $R$  от  $a$  и не считаться с наличием соотношения (4): так именно были получены формулы (40), лежащие в основе всего вывода. После того как интегрирование уравнений (41) даст оскулирующие элементы, положение планеты для любого момента времени  $t$  вычисляется по формулам (36), (39) и (8).

В заключение отметим, что, рассматривая уравнения Лагранжа, легко заметить следующие свойства этих уравнений:

1. В уравнения Лагранжа время входит только через посредство производных пертурбационной функции  $R$ .

2. Элементы орбиты разделяются на две группы: в одну входят  $a, e, i$ , в другую  $\Omega, \pi, \varepsilon$ . Дифференциальные уравнения, определяющие

элементы одной группы, заключают частные производные  $R$  только по элементам другой группы.

3. Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  два элемента, принадлежащие различным группам. Если  $\frac{d\alpha}{dt}$  содержит  $\frac{\partial R}{\partial \beta}$ , то  $\frac{d\beta}{dt}$  содержит  $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$ , причем коэффициенты  $\frac{\partial R}{\partial \alpha}$  и  $\frac{\partial R}{\partial \beta}$  равны и противоположны по знаку.

§ 14. Другой вывод уравнений Лагранжа.

Дифференциальные уравнения (41), или несколько более общие уравнения (37), являются одним из краеугольных камней Небесной механики. Интересно поэтому всестороннее изучение этих уравнений. Только-что указанный вывод уравнений Лагранжа отличается своей элементарностью и относительной простотой выкладки.<sup>1</sup>

Однако Лагранж, которому принадлежит заслуга систематического развития метода вариации произвольных постоянных, предпочел вывести уравнения (41) другим способом, интересным своей общностью.

В этом параграфе мы вкратце укажем, в чем заключается вывод Лагранжа, но не будем проводить полностью все вычисления, так как конечные уравнения нами уже получены.

Следуя Лагранжу и сохраняя его обозначения, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial x'} - X' &= 0, & \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} + X &= 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial y'} - Y' &= 0, & \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \tag{43}$$

Число этих уравнений, равное числу пар сопряженных переменных  $x, x'; y, y'; \dots$ , обозначим через  $2h$ . Под  $\Omega, X, X', Y, Y', \dots$  разумеются функции от  $t, x, x', y, y', \dots$ .

Предположим, что нам удалось проинтегрировать уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial x'} &= 0; & \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial \Omega}{\partial y'} &= 0; & \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{44}$$

получающиеся из (43) путем замены всех дополнительных функций  $X, X', Y, Y', \dots$  нулями.

Пусть общее решение уравнений (44) дается формулами

$$x = \varphi_1(t, a, b, \dots, g), \quad x' = \psi_1(t, a, b, \dots, g) \tag{45}$$

закрывающими  $2h$  произвольных постоянных  $a, b, \dots, g$ .

<sup>1</sup> Выводы этих уравнений, имеющие геометрический характер, можно найти в статьях: С. А. Казакон, Способ вариации произвольных постоянных, Ученые записки Московского университета, 1905; А. Н. Крылов, Sur la variation des éléments des orbites elliptiques des planètes, Известия Академии наук, 1915. (Собрание трудов, т. VI).

В этой последней работе показывается, между прочим, что имеются все основания думать, что именно таким путем рассматриваемые уравнения были получены еще Ньютоном. Ньютон опубликовал, однако, лишь несколько теорем, являющихся прямым следствием уравнений (37).

Очевидно, мы можем выражениями (45) удовлетворить и уравнениям (43), если только за  $a, b, \dots, g$  взять надлежаще выбранные функции  $t$ . Найдем дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять эти функции.

Подставив производные

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots \\ \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial x'}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots \end{aligned}$$

в уравнения (43) и учтя наличие равенств (44), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots - X' &= 0 \\ \frac{\partial y}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots - Y' &= 0 \\ \dots & \\ \frac{\partial x'}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + X &= 0 \\ \frac{\partial y'}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial y'}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + Y &= 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Таковы искомые дифференциальные уравнения. Раньше чем разрешать их относительно производных  $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots$ , Лагранж заменяет написанную систему другой, значительно более простой.

Введем так называемые скобки Лагранжа  $[a, a], [a, b], \dots$ , определяемые равенствами вида

$$[a, b] = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial x'}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y'}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial y'}{\partial a} + \dots$$

Очевидно

$$[a, a] = [b, b] = \dots = [g, g] = 0 \tag{47}$$

$$[a, b] + [b, a] = 0. \tag{48}$$

Положим, кроме того:

$$R_a = X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + \dots + X' \frac{\partial x'}{\partial a} + Y' \frac{\partial y'}{\partial a} + \dots$$

Легко видеть, что систему (46) можно заменить такой:

$$\left. \begin{aligned} [a, a] \frac{da}{dt} + [a, b] \frac{db}{dt} + \dots + [a, g] \frac{dg}{dt} + R_a &= 0 \\ [b, a] \frac{da}{dt} + [b, b] \frac{db}{dt} + \dots + [b, g] \frac{dg}{dt} + R_b &= 0 \\ \dots & \\ [g, a] \frac{da}{dt} + [g, b] \frac{db}{dt} + \dots + [g, g] \frac{dg}{dt} + R_g &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

В самом деле, для получения первого из этих уравнений нужно уравнения (46) умножить по порядку на  $-\frac{\partial x'}{\partial a}, -\frac{\partial y'}{\partial a}, \dots, +\frac{\partial x}{\partial a}, +\frac{\partial y}{\partial a}, \dots$  и сложить. Остальные уравнения находятся аналогичным путем.

Уравнения (49) проще, чем (46), уже в силу соотношений (47) и (48). Но особенно способствует простоте уравнений (49) третье свойство скобок Лагранжа, заключающееся в том, что в каждой такой скобке, после подстановки выражений (45), независимое переменное  $t$  сокращается, иначе говоря:

$$\frac{\partial}{\partial t} [a, b] = 0. \tag{50}$$

Для доказательства этого соотношения дифференцируем почленно  $[a, b]$ . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [a, b] &= \frac{\partial^2 x}{\partial a \partial t} \frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial^2 x'}{\partial b \partial t} - \frac{\partial^2 x}{\partial b \partial t} \frac{\partial x'}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial^2 x'}{\partial a \partial t} + \dots = \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial b} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial b} \right) - \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial a} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \dots \end{aligned}$$

Или, принимая во внимание равенства (44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [a, b] &= \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial b} + \dots \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial a} + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial t} [a, b] = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b \partial a} = 0.$$

Равенство (50) показывает, что при вычислении скобок Лагранжа можно дать  $t$  какое-либо частное значение с тем, чтобы по возможности упростить выкладки.

Отметим, что применение указанного метода особенно просто в том случае, когда за постоянные  $a, b, \dots, g$  приняты начальные значения  $x_0, y_0, \dots, x'_0, y'_0, \dots$ , соответствующие значению  $t_0$  независимого переменного. Действительно, в этом случае скобки Лагранжа находятся сразу, если воспользоваться только что доказанным свойством и положить  $t = t_0$ .

Получим:

$$[x_0, x'_0] = \frac{\partial x_0}{\partial x_0} \frac{\partial x'_0}{\partial x'_0} - \frac{\partial x_0}{\partial x'_0} \frac{\partial x'_0}{\partial x_0} + \frac{\partial y_0}{\partial x_0} \frac{\partial y'_0}{\partial x'_0} - \frac{\partial y_0}{\partial x'_0} \frac{\partial y'_0}{\partial x_0} + \dots = 1$$

$$[x_0, y_0] = [x_0, y'_0] = \dots = 0.$$

Точно так же:

$$[y_0, y'_0] = 1, [y_0, x_0] = [y_0, x'_0] = \dots = 0,$$

и т. д. Таким образом, уравнения (49) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= +R_{x'_0}; & \frac{dx'_0}{dt} &= -R_{x_0} \\ \frac{dy_0}{dt} &= +R_{y'_0}; & \frac{dy'_0}{dt} &= -R_{y_0} \\ &\dots & \dots & \end{aligned}$$

Однако, этими весьма простыми уравнениями в Небесной механике не пользуются, так как при указанном выборе постоянных интегрирования выражения (45) слишком сложны.

Рассмотрим определитель

$$F = \begin{vmatrix} [a, a], [a, b], \dots, [a, g] \\ [b, a], [b, b], \dots, [b, g] \\ \dots \\ [g, a], [g, b], \dots, [g, g] \end{vmatrix}$$

и составим дополнительный определитель  $F'$ , элементами которого являются алгебраические дополнения соответствующих элементов  $F$ , деленные на  $F$ . Этот определитель напомним так:

$$F' = \begin{vmatrix} (a, a), (a, b), \dots, (a, g) \\ (b, a), (b, b), \dots, (b, g) \\ \dots \\ (g, a), (g, b), \dots, (g, g) \end{vmatrix}$$

Его элементы носят название скобок Пуассона. Очевидно

$$F F' = 1.$$

При помощи скобок Пуассона мы можем уравнения (49) написать следующим образом:

$$\frac{da}{dt} + (a, a)R_a + (a, b)R_b + \dots + (a, g)R_g = 0$$

$$\frac{db}{dt} + (b, a)R_a + (b, b)R_b + \dots + (b, g)R_g = 0$$

$$\dots$$

$$\frac{dg}{dt} + (g, a)R_a + (g, b)R_b + \dots + (g, g)R_g = 0.$$

Применим теперь изложенную общую теорию метода вариации произвольных постоянных к интересующему нас случаю возмущенного движения планеты, которое определяется уравнениями (17). Эти уравнения напомним так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', & \frac{dx'}{dt} &= -k^2 \frac{x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} &= y', & \frac{dy'}{dt} &= -k^2 \frac{y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{dz}{dt} &= z', & \frac{dz'}{dt} &= -k^2 \frac{z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned} \right\} \tag{51}$$

Сравнивая их с (43), мы видим, что здесь

$$\Omega = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{k^2}{r}$$

$$X = -\frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial R}{\partial z},$$

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0,$$

и следовательно

$$R_a = -\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial R}{\partial a} \tag{52}$$

При  $R=0$  мы получим из (51) систему, соответствующую (44) и определяющую невозмущенное движение. При решении этой последней системы за постоянные интегрирования примем обычные эллиптические элементы  $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$ .

Путем довольно длинного, хотя и не представляющего никаких трудностей вычисления получаются соответствующие скобки Лагранжа:

$$[\omega, \Omega] = 0, \quad [\omega, i] = 0, \quad [\omega, M_0] = 0$$

$$[\Omega, i] = -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i, \quad [\Omega, M_0] = 0,$$

$$[\Omega, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2} \cos i, \quad [i, M_0] = 0,$$

$$[i, a] = 0, \quad [\omega, a] = \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2}, \quad [M_0, a] = \frac{1}{2} na$$

$$[\omega, e] = \frac{-na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}, \quad [a, e] = 0, \quad [M_0, e] = 0$$

$$[\Omega, e] = \frac{-na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i, \quad [i, e] = 0.$$

Вычисление соответствующих скобок Пуассона выполняется в данном случае очень просто, путем непосредственного решения системы (49). Принимая во внимание (52), окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M_0} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \sin i \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \sin i \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\text{ctg } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{dM_0}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \end{aligned} \right\} \tag{53}$$

Чтобы получить уравнения Лагранжа в форме (41), достаточно переменные  $\omega$  и  $M_0$  заменить через  $\pi$  и  $\epsilon$  при помощи соотношений:

$$\omega = \pi - \Omega, \quad M_0 = \epsilon - \pi.$$

§ 15. Возмущения элементов.

Уравнения Лагранжа, определяющие оскулирующие элементы, настолько сложны, что решать их можно только способом последовательных приближений. Нашей ближайшей задачей является посмотреть, в какой форме получится в этом случае решение.

Для сокращения письма предположим, что имеются только две планеты с массами, равными  $m$  и  $m'$ . Элементы этих планет обозначим соответственно через  $a, e, \dots$  и  $a', e', \dots$ .

На основании результатов предыдущих параграфов мы можем считать, что движение этих планет относительно Солнца определяется двенадцатью уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\text{cosec } i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da'}{dt} &= \frac{2}{n'a'} \frac{\partial R'}{\partial \epsilon'} \\ \frac{d\Omega'}{dt} &= \frac{\text{cosec } i'}{n'a'^2 \sqrt{1-e'^2}} \frac{\partial R'}{\partial i'} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{54'}$$

в которых (§ 3):

$$R = \kappa^2 m' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right) \tag{55}$$

$$R' = \kappa^2 m \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right), \tag{55'}$$

если через  $x, y, z, r$  и  $x', y', z', r'$  обозначить координаты и радиусы-векторы планет, а через  $\Delta$  — их взаимное расстояние.

Легко видеть, что  $R$  и  $R'$  зависят только от взаимного расположения орбит, но не от их положения относительно эклиптики. В самом деле, если через  $H$  обозначить угол между радиусами-векторами  $r$  и  $r'$ , то этим функциям можно придать такую форму:

$$R = \kappa^2 m' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right), \quad R' = \kappa^2 m \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r' \cos H}{r^2} \right),$$

откуда ясно, что они зависят только от  $r, r'$  и  $H$ , так как

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H.$$

Метод последовательных приближений, основанный на малости масс  $m$  и  $m'$ , позволяет получить искомые величины в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \dots \\ e &= e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e + \dots \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} a' &= a'_0 + \delta_1 a' + \delta_2 a' + \dots \\ e' &= e'_0 + \delta_1 e' + \delta_2 e' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (56')$$

расположенных по целым положительным степеням  $m$  и  $m'$ . Здесь через  $a_0, e_0, \dots, a'_0, e'_0, \dots$  обозначены постоянные числа — значения оскулирующих элементов для начального момента времени; через  $\delta_1 a, \delta_1 e, \dots$  — функции времени, имеющие множителем  $m'$ , а через  $\delta_1 a', \delta_1 e', \dots$  — функции времени, имеющие множителем  $m$ ; вообще через  $\delta_n a, \delta_n e, \dots, \delta_n a', \delta_n e', \dots$  обозначены члены  $n$ -ой степени относительно масс  $m$  и  $m'$ .

Выражения  $\delta_n a, \delta_n e, \dots, \delta_n a', \delta_n e', \dots$  носят название возмущений  $n$ -го порядка.

Делая в уравнениях (54), (54')

$$m = 0, \quad m' = 0,$$

получим

$$a = a_0, \quad e = e_0, \dots, \quad a' = a'_0, \dots$$

Эти значения подставляем в правые части уравнений. Так как  $R$  и  $R'$  являются очевидно функциями  $t$  и  $a, e, \dots, a', e', \dots$ , то уравнения (54) и (54') примут вид:

$$\frac{da}{dt} = m' f(t, a_0, e_0, \dots, a'_0, \dots)$$

$$\frac{da'}{dt} = m f_1(t, a_0, e_0, \dots, a'_0, \dots)$$

Интегрирование этих равенств даст

$$a = a_0 + m' \int_{t_0}^t f(t, a_0, e_0, \dots) dt = a_0 + \delta_1 a, \quad (57)$$

т. е. позволяет определить возмущения первого порядка.

Для вычисления возмущений второго порядка только что найденные значения элементов  $a_0 + \delta_1 a, e_0 + \delta_1 e, \dots, a'_0 + \delta_1 a', \dots$  надо подставить в правые части уравнений (54) и (54'). Это даст:

$$\frac{da}{dt} = m' f(t, a_0, \dots) + m' \frac{\partial f}{\partial a_0} \delta_1 a + \dots + m' \frac{\partial f}{\partial a'_0} \delta_1 a' + \dots,$$

откуда после интегрирования получим

$$a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a$$

уже с точностью до вторых порядков масс. Продолжая таким образом дальше, мы можем получить любое число членов в разложениях элементов по степеням масс.

Посмотрим теперь, какова будет аналитическая форма разложений (56), (56'). Так как координаты каждой планеты являются периодическими функциями соответствующей средней аномалии  $M$  или  $M'$ , то пертурбационные функции  $R$  и  $R'$  являются периодическими функциями  $M$  и  $M'$ , а потому могут быть разложены в двойные ряды Фурье вида:

$$R = \sum N \cos(jM + j'M + B)$$

$$R' = \sum N' \cos(jM + j'M' + B'),$$

где  $j, j'$  — целые числа, принимающие все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Величины  $N, N', B, B'$  являются функциями элементов.

Из формул (55), (55') и из выражений координат в эллиптическом движении (§§ 77—82) видно, что функции  $R$  и  $R'$ , а следовательно и коэффициенты  $N$  и  $N'$ , могут быть разложены по целым положительным степеням эксцентриситетов  $e, e'$  и взаимной наклонности орбит  $J$  (как было отмечено,  $R$  и  $R'$  зависят только от взаимной наклонности орбит). Таким образом, учитывая еще, что

$$M = nt + \varepsilon - \pi, \quad M' = n't + \varepsilon' - \pi',$$

окончательно будем иметь каждую из функций  $R$  и  $R'$  в виде суммы

$$\sum A e^{\alpha} e'^{\alpha'} J^{\beta} \cos D, \quad (58)$$

где

$$D = j(nt + \varepsilon) + j'(n't + \varepsilon') + C.$$

Подставляя эти выражения для  $R$  и  $R'$  в основные уравнения (54), (54'), мы получим в правых частях этих уравнений суммы такого же вида.

Равенства (57) показывают, что для вычисления возмущений второго порядка надо в правых частях уравнений (54), (54') заменить все элементы  $a, e, \dots$  их начальными значениями  $a_0, e_0, \dots$  и выполнить интегрирование полученных тригонометрических рядов. Таким образом возмущения первого порядка получатся в виде членов одного из следующих двух типов, а именно:

$$A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} J_0^{\beta} \frac{\sin D_0}{jn_0 + j'n'_0},$$

если  $jn_0 + j'n'_0 \neq 0$ , и

$$t A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} J_0^{\beta} \cos C,$$

если  $jn_0 + j'n'_0 = 0$ .

Легко видеть, что, вычисляя указанным выше способом возмущения второго, третьего,  $\dots$  порядков, мы всегда будем получать члены вида

$$\frac{t^p A_0 e_0^{\alpha} e_0'^{\alpha'} J_0^{\beta} \cos(vt + C)}{(j_1 n_0 + j'_1 n'_0)^{k_1} (j_2 n_0 + j'_2 n'_0)^{k_2} \dots}, \quad (59)$$

где

$$v = j n_0 + j' n'_0.$$

Если  $p=0$ , то такой член носит название периодического возмущения. В случае  $p \geq 1$  мы имеем вековое возмущение. Если  $v=0$ , и смешанное, если  $v \neq 0$ . Иногда пользуются несколько

иной терминологией и говорят о чисто вековых членах (если  $\nu = 0$ ) и смешанных вековых членах (если  $\nu \neq 0$ ).

Сумма

$$\alpha + \alpha' + \beta$$

носит название степени возмущения. Чем выше степень, тем меньше возмущение данного порядка.

Среди множителей, стоящих в знаменателе выражения (59), особого внимания заслуживают те, которые очень малы. Благодаря этим множителям, так называемым малым делителям, величина возмущения увеличивается. Сумму степеней  $k_\lambda, k_\mu, \dots$  всех малых делителей рассматриваемого члена (59) обозначим через  $q$ . Чем больше  $q$ , тем больше, при прочих равных условиях, соответствующее возмущение.

Пуанкаре назвал для возмущения  $n$ -го порядка разность  $n - p$  рангом, а разность  $n - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q$  классом.

Зная порядок, степень, ранг и класс какого-либо возмущения, мы можем судить об общем характере этого возмущения. Для не очень больших промежутков времени важнейшими являются возмущения наиболее низких порядков, прежде всего первого порядка. Напротив, для значительных интервалов времени значение возмущения определяется прежде всего его классом. Наконец, для очень больших интервалов времени влияние возмущения лучше всего характеризуется его рангом.

### § 16. Долгопериодические возмущения.

Среди периодических возмущений (59) особого рассмотрения заслуживают те, у которых коэффициент  $\nu$  в аргументе тригонометрической функции очень мал. Так как период выражения (59) равен  $\frac{360^\circ}{\nu}$ , то периоды таких возмущений будут весьма велики по сравнению с периодами обращения рассматриваемых планет, почему эти возмущения и называются долгопериодическими.

Долгопериодические возмущения играют в теории движения планет большую роль потому, что среди них встречаются возмущения с весьма значительными амплитудами, даже при сравнительно высокой степени.

В самом деле, рассмотрим возмущения первого порядка. Если член

$$A_0 e_0^\alpha e_0^{\alpha'} J_0^\beta \frac{\sin [(j n_0 + j' n'_0) t + C]}{j n_0 + j' n'_0}$$

дает долгопериодическое возмущение, то величина  $j n_0 + j' n'_0$ , стоящая в знаменателе, мала, поэтому амплитуда будет значительно больше, чем можно было бы ожидать при данной степени.

Особенно большое влияние долгопериодические возмущения имеют в средней долготе планеты. Действительно, средняя долгота вычисляется по формуле (§ 13)

$$\lambda = \varepsilon + \rho,$$

где

$$\rho = \int_0^t n dt,$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

Следовательно, для получения  $p$  каждый член правой части последнего равенства приходится проинтегрировать два раза, а это дает возмущения вида

$$A_0 e_0^\alpha e_0^{\alpha'} J_0^\beta \frac{\cos [(j n_0 + j' n'_0) t + C]}{(j n_0 + j' n'_0)^2}.$$

Таким образом, в средней долготе долгопериодические неравенства дают члены первого порядка относительно масс, имеющие малый делитель в квадрате, иначе говоря члены, класс которых равен нулю.

Подробная теория разложения пертурбационной функции в ряд, которой мы займемся в одной из дальнейших глав, показывает, что всегда

$$\alpha + \alpha' + \beta = |j + j'| + \text{четное число.}$$

Таким образом, долгопериодический член только в том случае может иметь заметную амплитуду, когда  $j$  и  $j'$  — небольшие по абсолютной величине числа.

Чтобы найти те значения  $j$  и  $j'$ , для которых возмущение становится долгопериодическим, проще всего воспользоваться разложением отношения  $n_0/n'_0$  в непрерывную дробь.

Например для Юпитера и Сатурна мы имеем (принимая за начальный момент 1.0 января 1900 г.)

$$n_0 = 299''.1283,$$

$$n'_0 = 120''.4547.$$

Следовательно

$$\frac{n_0}{n'_0} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{14 + \dots}}$$

и потому подходящие дроби будут:

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{72}{29} \dots$$

Если взять  $j = 1$ ,  $j' = -2$ , то

$$j n_0 + j' n'_0 = 58''.6736,$$

что составляет приблизительно  $\frac{1}{5} n_0$  или  $\frac{1}{2} n'_0$ . Такой делитель еще не приходится считать малым.

Напротив, для  $j = 2$ ,  $j' = -5$  получим:

$$j n_0 + j' n'_0 = -4''.0169,$$

т. е. величину порядка  $\frac{1}{74} n_0$  или  $\frac{1}{30} n'_0$ . Соответствующее долгопериодическое неравенство, имеющее период около 900 лет, в долготе Сатурна имеет амплитуду порядка  $50'$ .

Наконец, если взять следующую подходящую дробь, то будем иметь:

$$j n_0 + j' n'_0 = 29 n_0 - 72 n'_0 = 1''.9823.$$

Но соответствующее неравенство, степень которого не меньше чем  $|29 - 72| = 43$ , совершенно нечувствительно.

Большое неравенство в движении Юпитера и Сатурна, зависящее от делителя  $2n - 5n'$ , было открыто эмпирически. Эйлер и Лагранж, после ряда безуспешных попыток объяснить его, стали склоняться к мнению, что это неравенство указывает на действие какой-то силы, отличной от притяжения Солнца и известных планет. Истинная причина была открыта в 1784 г., когда Лаплас предпринял вычисление всех неравенств первого порядка в движении Юпитера и Сатурна до третьей степени включительно.

Примечание. При изучении движения двух планет никогда не приходится на практике принимать во внимание более чем один малый делитель. Действительно, если разложение отношения средних суточных движений в непрерывную дробь

$$\frac{n_0}{n'_0} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}$$

таково, что первая подходящая дробь, дающая малый делитель, есть

$$\frac{P_k}{Q_k} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \frac{1}{\alpha_{k-1}}},$$

то следующее неполное частное  $\alpha_k$  будет большим числом. Таким образом, следующая подходящая дробь

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_k \alpha_k + P_{k-1}}{Q_k \alpha_k + Q_{k-1}}$$

будет иметь очень большие числитель и знаменатель. Соответствующие ей (так же, как и всем дальнейшим подходящим дробям) возмущения будут поэтому нечувствительны.

### § 17. Вековые возмущения.

Как уже было отмечено, вековые возмущения получаются от тех членов пертурбационной функции, в которых аргумент тригонометрической функции не зависит от времени. Совокупность этих членов носит название вековой части пертурбационной функции.

Так как каждый член пертурбационной функции может зависеть от  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  только через посредство средних аномалий  $M$  и  $M'$ , то члены (58), в которых  $j = j' = 0$ , от  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  зависеть не будут. Поэтому, обозначая через  $R_0$  вековую часть пертурбационной функции, получим:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Обращаясь к первому из уравнений (41), мы видим, что выражение  $\frac{da}{dt}$  не будет заключать постоянных членов; иначе говоря,  $a$  не имеет вековых возмущений первого порядка.

Последнее из уравнений (41) показывает, что и среднее суточное движение не имеет вековых возмущений первого порядка.

Полученный результат, без изменения распространяющийся на взаимные возмущения какого угодно числа планет, дает следующую фундаментальную теорему:

Большие полуоси планетных орбит и средние суточные движения не имеют вековых возмущений первого порядка относительно масс.

Эта теорема была доказана Лапласом (1773) для членов не выше второй степени относительно эксцентриситетов. Во всей общности ее доказал Лагранж (1776).

В 1809 г. Пуассон показал, что в возмущениях большой полуоси и среди членов второго порядка отсутствуют чисто вековые члены,<sup>1</sup> но имеются смешанные члены вида  $Mt \cos(vt + C)$ . Наконец, Spigru C. Haretu обнаружил (1878) наличие чисто вековых членов третьего порядка.

Все остальные элементы  $e, i, \Omega, \dots$  имеют вековые возмущения. Так, например, для Юпитера мы имеем, согласно вычислениям Леверрье,

$$e = 0.048\ 335\ 08 + 0.000\ 166\ 19\ T - 0.000\ 000\ 467\ T^2 - 0.000\ 000\ 0019\ T^3$$

$$i = 1^\circ 18' 31''.11 - 20''.506\ T + 0''.014\ T^2$$

$$\Omega = 99^\circ 26' 35''.59 + 3637''.908\ T + 1''.2680\ T^2 - 0''.03064\ T^3$$

$$\pi = 12^\circ 43' 14''.39 + 5793''.928\ T + 3''.5936\ T^2 - 0''.01732\ T^3.$$

Через  $T$  обозначено время, считаемое в столетиях (по 36 525 суток) от среднего парижского полдня 1 января 1900 г.

Вопрос о вековых возмущениях до сравнительно недавнего времени связывали с вопросом об устойчивости солнечной системы. Нужно, однако, заметить, что даже в том случае, если бы была доказана сходимость рядов (56) для любых значений  $t$ , присутствие вековых членов в возмущениях различных порядков было бы недостаточно для того, чтобы можно было утверждать, что солнечная система неустойчива.

В самом деле, периодическая функция времени может при разложении по степеням масс дать бесконечное число вековых членов. Возьмем, например, функцию  $\sin(mat)$ , где  $m$  — масса возмущающей планеты,  $a$  — какой-нибудь числовой коэффициент. Разлагая эту функцию в ряд по степеням  $m$ , получим

$$\sin(mat) = mat - \frac{1}{6} m^3 a^3 t^3 + \dots$$

Таким образом, всякий способ интегрирования уравнений (54), (54'), основанный на разложении решения по степеням возмущающих масс, может дать вековые члены даже в том случае, когда решение выражается через периодические функции времени.

### § 18. Способ Пуассона.

В этом случае, когда вековые возмущения угловых элементов  $\Omega, \pi$  и  $\varepsilon$ , определяющих положение орбиты в пространстве очень велики, применение способа интегрирования, указанного в § 15, встречает затруднения, происходящие от крайне медленной сходимости последовательных приближений.

Такой случай мы встречаем, например, в теории движения Луны, где вековые возмущения производят изменения долготы перигелия и долготы узла, указываемые формулами:<sup>2</sup>

$$\pi = 334^\circ 26' 16''.52 + 14\ 648\ 509''.18\ T - 37''.16\ T^2 - 0''.0455\ T^3$$

$$\Omega = 259^\circ 7' 52''.79 - 6\ 962\ 911''.94\ T + 7''.48\ T^2 + 0''.0077\ T^3$$

<sup>1</sup> Этот результат известен под именем теоремы Пуассона.

<sup>2</sup> Числовые значения коэффициентов этих формул заимствованы из таблиц Радо (см. § 117). Таблицы Ганзена дают:

$$\pi = 334^\circ 26' 16''.75 + 14\ 648\ 510''.08\ T - 36.244\ T^2 - 0''.036\ 600\ T^3$$

$$\Omega = 259^\circ 7' 40''.97 - 6\ 962\ 923''.21\ T + 8''.210\ T^2 + 0''.007\ 159\ T^3.$$

(через  $T$  обозначено время, считаемое в столетиях от 1.0 января 1900 г. среднего парижского астрономического времени).

Пуассон предложил (1835) особый метод интегрирования уравнений, позволяющий уже в первом приближении учесть влияние вековых возмущений угловых элементов на периодические неравенства и тем значительно повысить точность первого приближения. Обозначая опять средние долготы светил через

$$\lambda = \varepsilon + \rho, \quad \lambda' = \varepsilon' + \rho',$$

$$\rho = \int_0^t n dt, \quad \rho' = \int_0^t n' dt,$$

где

мы можем уравнения (54) и (54') написать в следующей общей форме:

$$\frac{d\Omega}{dt} = m' \Theta(\varepsilon + \rho, \Omega, \pi, \dots; \varepsilon' + \rho', \Omega', \dots)$$

$$\frac{d\pi}{dt} = m' \Phi(\varepsilon + \rho, \Omega, \pi, \dots; \varepsilon' + \rho', \Omega', \dots)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = m' \Psi(\varepsilon + \rho, \Omega, \pi, \dots; \varepsilon' + \rho', \Omega', \dots)$$

$$\frac{da}{dt} = m' F(\varepsilon + \rho, \Omega, \pi, \dots; \varepsilon' + \rho', \Omega', \dots)$$

Положим

$$\Omega = \theta + \alpha m' t, \quad \pi = \pi_1 + \beta m' t, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \gamma m' t,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — неопределенные коэффициенты, а  $\theta, \pi_1, \varepsilon_1$  — новые неизвестные.

После подстановки этих выражений в предыдущие уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -m'\alpha + m' \Theta(\varepsilon_1 + \rho + \gamma m' t, \theta + \alpha m' t, \dots) \\ \frac{d\pi_1}{dt} &= -m'\beta + m' \Phi(\varepsilon_1 + \rho + \gamma m' t, \theta + \alpha m' t, \dots) \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

В этих уравнениях мы положим, так же как и в § 15,

$$\theta = \Omega_0 + \delta_1 \theta + \delta_2 \theta + \dots$$

$$\pi_1 = \pi_0 + \delta_1 \pi + \delta_2 \pi + \dots$$

причем значком  $\delta_n$  обозначены члены степени  $n$  относительно масс  $m, m', \dots$ . Делая подстановку этих выражений в уравнения (60), будем разлагать функции  $\Theta, \Phi, \dots$  в ряды следующим образом:

$$\Theta = \Theta(\varepsilon_0 + \rho + \gamma m' t, \Omega_0 + \alpha m' t, \pi_0 + \beta m' t, \dots) +$$

$$+ \frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon} (\delta_1 \varepsilon + \delta_2 \varepsilon + \dots) + \frac{\partial \Theta}{\partial \Omega} (\delta_1 \theta + \delta_2 \theta + \dots) + \dots$$

т. е. будем считать за приращения аргументов только периодические члены  $\delta_1 \varepsilon, \delta_2 \varepsilon, \dots, \delta_1 \theta, \dots$ , а не вековые  $\gamma m' t, \beta m' t, \alpha m' t$ , так что в первом приближении получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -m'\alpha + m' \Theta(\varepsilon_0 + \rho + \gamma m' t, \Omega_0 + \alpha m' t, \dots) \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

После интегрирования этих уравнений приравняем нулю вековые возмущения  $\theta, \pi_1, \varepsilon_1$ , что даст три уравнения для определения  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

Заметим, что интегрирование уравнений (60) выполняется столь же просто, как и в обычной форме способа последовательных приближений, вследствие того, что элементы  $\varepsilon, \Omega$  и  $\pi$  фигурируют в разложении пертурбационной функции лишь в аргументах тригонометрических функций. Действительно, поскольку пертурбационная функция является, очевидно, периодической функцией не только от  $\lambda$  и  $\lambda'$ , но и от  $\Omega, \Omega', \pi, \pi'$ , ее разложение имеет вид:

$$R = \Sigma N \cos(j\lambda + j'\lambda' + h\Omega + h'\Omega' + k\pi + k'\pi').$$

Применяя способ Пуассона, мы уже отступаем от строгого проведения принципа разложения возмущений по степеням возмущающих масс, так как в аргументы периодических возмущений, вычисленных по этому способу, входят члены  $\alpha m' t, \beta m' t, \dots$ , имеющие множителем массу. Иначе говоря, уже в первом приближении мы учитываем часть членов второго порядка.

## ГЛАВА IV.

## КАНОНИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ.

## § 19. Канонические уравнения.

Рассмотрим движение системы  $n$  материальных точек, массы которых мы обозначим через  $m_i$ , а координаты через  $x_i, y_i, z_i$ .

Если существует функция сил  $U$ , то уравнения движения этой системы имеют вид:

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (1)$$

$$(i=0, 1, \dots, n-1)$$

Эти  $3n$  уравнений второго порядка можно различными способами заменить  $6n$  уравнениями первого порядка. Нижеследующий способ имеет особо важное значение.

Положим

$$\dot{x}_i = m_i \dot{x}_i, \quad \dot{y}_i = m_i \dot{y}_i, \quad \dot{z}_i = m_i \dot{z}_i$$

и введем в рассмотрение живую силу системы

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_i} (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2).$$

Легко видеть, что уравнения (1) эквивалентны таким:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i'}, \quad \frac{dx_i'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i'}, \quad \frac{dy_i'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$$

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z_i'}, \quad \frac{dz_i'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_i}$$

где

$$H = T - U,$$

есть не что иное, как полная энергия системы, ибо потенциальная энергия равна функции сил, взятой с обратным знаком.

Уравнения, имеющие такой вид, носят название канонических уравнений, а соответствующая функция  $H$  называется функцией Гамильтона.

Обратимся теперь к более общему случаю, когда положение точек системы (на которую могут быть наложены какие угодно голономные связи) определяется помощью  $s$  параметров  $q_1, q_2, \dots, q_s$ . Эти параметры называются обобщенными координатами, а число  $s$  дает число степеней свободы рассматриваемой системы.

В этом случае уравнения движения (1) преобразуются, как известно из Механики, в уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (2)$$

в которых через

$$L = T + U$$

обозначен кинетический потенциал системы.

Заметим, что после замены прямоугольных координат их выражениями через обобщенные координаты (эти выражения могут заключать время, если связи, наложенные на систему, зависят от времени) живая сила примет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_h A_h \dot{q}_h + A, \quad (3)$$

где  $A_{ik}, A_h, A$  являются функциями от  $q_1, q_2, \dots, q_s$  и  $t$ . Суммирование по всем индексам производится от 1 до  $s$ .

Покажем, что уравнения (2) также могут быть заменены уравнениями первого порядка, имеющими каноническую форму. Для этого за вспомогательные неизвестные примем так называемые обобщенные импульсы, определяемые равенствами

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

или, так как  $U$  не включает производных  $\dot{q}_i$ ,

$$p_i = \sum_k A_{ik} \dot{q}_k + A_i. \quad (4)$$

Уравнения (2) заменяются такими:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (5)$$

Чтобы исключить отсюда  $\dot{q}_i$ , воспользуемся соотношениями (4). Легко видеть, что эти равенства могут быть разрешены относительно  $\dot{q}_k$ , так как определитель, составленный из коэффициентов  $A_{ik}$ , не может равняться нулю.

В этом очень легко убедиться, если ограничиться тем, единственно нам нужным, случаем, когда связи не зависят от времени, а потому в формуле (3)  $A_h = 0, A = 0$ . Действительно, если бы определитель,

составленный из  $A_{ik}$ , был равен нулю, то можно было бы найти такие неравные нулю значения  $q_k$ , для которых<sup>1</sup>

$$\sum A_{ik} q_k = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

а потому  $T=0$ , что очевидно невозможно.

Введем теперь в рассмотрение величину

$$H = \sum p_k \dot{q}_k - L,$$

являющуюся функцией  $p_k$ ,  $q_k$  и  $t$ , так как, согласно только что сказанному,  $q_i$  можно считать выраженными через  $p_i$ .

Таким образом, варьируя  $p_k$  и  $q_k$ , будем иметь, с одной стороны:

$$\delta H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} \delta q_k,$$

с другой стороны:

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta \sum p_k \dot{q}_k - \delta L = \\ &= \sum \dot{q}_k \delta p_k + \sum p_k \delta \dot{q}_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \end{aligned}$$

или, учитывая второе из равенств (5),

$$\delta H = \sum q_k \delta p_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k.$$

Сравнение двух полученных для  $\delta H$  выражений дает:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Принимая во внимание первое из равенств (5), окончательно получим уравнения движения в канонической форме:

$$\begin{aligned} \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ (k = 1, 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (6)$$

Если кинетический потенциал  $L$ , а следовательно и функция  $H$ , не содержит явно  $t$ , то уравнения (6) имеют первый интеграл

$$H = \text{const},$$

являющийся нечем иным, как интегралом живых сил. В самом деле, это равенство можно написать так:

$$\sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{const},$$

<sup>1</sup> Для упрощения формул можно не обозначать пределы суммирования, если, как это имеет место здесь, все индексы пробегают одни и те же значения  $1, 2, \dots, s$ . Но можно также опустить указание того индекса, по которому ведется суммирование, если ввести „правило немых индексов“: суммирование всегда выполняется по тому индексу, который по крайней мере дважды встречается в выражении, стоящем под знаком суммы. Например

$$\sum a_{ik} b_{kh} = a_{i1} b_{1h} + a_{i2} b_{2h} + \dots + a_{is} b_{sh}.$$

Такой индекс называется *немым*, так как он исчезает после суммирования.

или

$$\sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{const}.$$

В рассматриваемом случае  $T$  есть однородная функция второго порядка от  $\dot{q}_k$ , поэтому

$$\sum \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

и, следовательно, принимая во внимание, что  $L = T + U$ , мы можем полученный интеграл написать так:

$$T - U = \text{const},$$

а это есть не что иное, как закон сохранения энергии.

Канонические уравнения обладают многими весьма замечательными свойствами. Нужные нам наиболее элементарные свойства этих уравнений легко выводятся из следующей теоремы.

**Теорема I.** Если общее решение уравнений (6) дается равенствами

$$q_k = \varphi_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2s}), \quad p_k = \psi_k(t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2s}), \quad 7$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2s}$  — постоянные интегрирования, то уравнения (6) эквивалентны таким:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_i} \\ (i = 1, 2, \dots, 2s) \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем сначала, что уравнения (8) являются следствием уравнений (6). Действительно, очевидное тождество

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = \sum \frac{\partial p_k}{\partial t} \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} \frac{\partial q_k}{\partial t} \quad (9)$$

дает, при наличии соотношений (6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial t} = -\sum \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i}, \quad (10)$$

что равносильно уравнениям (8).

Обратно, представив уравнения (8) в форме (10) и пользуясь тождеством (9), мы можем заменить их такими:

$$\sum \left( \frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum \left( \frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 2s)$$

Рассматривая эти равенства как систему  $2s$  линейных уравнений с неизвестными

$$\left( \frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_k} \right), \quad -\left( \frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right)$$

и замечая, что определитель этой системы не равен нулю (так как уравнения (7) разрешимы относительно  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2s}$ ), убеждаемся в равен-

стве нулю только что написанных выражений, т. е. в существовании соотношений (6).

Примечание. Так как канонические уравнения (6) не меняются, если  $p_k$  и  $q_k$  поменять местами, а  $t$  заменить через  $-t$ , то из каждого свойства канонических систем указанной заменой может быть получено другое свойство. Например, делая эту замену в теореме I, мы убеждаемся в том, что уравнения (6) эквивалентны также и таким уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum q_k \frac{\partial p_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum q_k \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \gamma_i}.$$

### § 20. Канонические преобразования.

В канонических уравнениях

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (6)$$

заменяем переменные  $q_k, p_k$  новыми переменными  $Q_k, P_k$ , определяемыми равенствами

$$\begin{aligned} Q_k &= \Phi_k(t, q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) \\ P_k &= \Psi_k(t, q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) \end{aligned} \quad (11)$$

Нижеследующая теорема дает условие, при выполнении которого преобразованная система будет также иметь каноническую форму. Соответствующие преобразования носят название канонических преобразований.

**Теорема II.** Если зависимость между новыми переменными и старыми такова, что выражение

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = dW \quad (12)$$

есть полный дифференциал некоторой функции  $W$ , то после преобразования уравнения (6) могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad (13)$$

где

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t},$$

причем, конечно, предполагается, что  $H$  и  $W$  выражены через новые переменные  $Q_k, P_k$ .

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что соотношения (11) и (7) позволяют выразить  $Q_k, P_k$ , а следовательно и функцию  $W$ , через  $t, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2s}$ .

Так как в равенстве (12) под  $dW$  разумеется полный дифференциал  $W$  только по переменным  $Q_k, P_k$  (если считать, что  $q_k, p_k$  выражены через  $Q_k, P_k$ ), хотя  $W$  может содержать еще и  $t$ , то из этого равенства следует:

$$\left. \begin{aligned} \sum p_k \frac{dq_k}{dt} - \sum P_k \frac{dQ_k}{dt} &= \frac{dW}{dt} - \frac{\partial W}{\partial t} \\ \sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ибо

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial t} + \sum \left( \frac{\partial W}{\partial Q_k} \frac{dQ_k}{dt} + \frac{\partial W}{\partial P_k} \frac{dP_k}{dt} \right) \\ \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} &= \sum \left( \frac{\partial W}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial W}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial \gamma_i} \right). \end{aligned}$$

Но, если  $W$  считать выраженным через  $t, \gamma_1, \dots, \gamma_{2s}$ , то

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left( \frac{dW}{dt} \right).$$

Поэтому, дифференцируя первое из равенств (14) по  $\gamma_i$ , второе — по  $t$  и вычитая их почленно, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum P_k \frac{\partial q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum P_k \frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right) &= \\ = \frac{d}{dt} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum P_k \frac{dQ_k}{dt}. \end{aligned}$$

Применим теперь в левой части этого равенства теорему I и заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \gamma_i} &= \sum \frac{\partial H}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} + \sum \frac{\partial H}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial \gamma_i}, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right) &= \sum \frac{\partial^2 W}{\partial Q_k \partial t} \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} + \sum \frac{\partial^2 W}{\partial P_k \partial t} \frac{\partial P_k}{\partial \gamma_i}, \end{aligned}$$

получим:

$$\frac{d}{dt} \sum P_k \frac{\partial Q_k}{\partial \gamma_i} - \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \sum P_k \frac{dQ_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \gamma_i},$$

где

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

На основании теоремы I из этих равенств следует

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k},$$

что и требовалось доказать.

Примечание I. Если соотношения между  $q_k, p_k$  и  $Q_k, P_k$  таковы, что

$$\sum q_k dp_k - \sum Q_k dP_k = dW',$$

то после преобразования уравнений (6) получим уравнения

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K'}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K'}{\partial Q_k},$$

где

$$K' = H - \frac{\partial W'}{\partial t}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно использовать подстановку, указанную в конце предыдущего параграфа.

Примечание II. Условия теоремы II очень часто выражают несколько иначе.

Очевидное равенство

$$\sum Q_k dP_k + \sum P_k dQ_k = \sum d(P_k Q_k)$$

сложим почленно с равенством (12). Это даст

$$\sum p_k dq_k + \sum Q_k dP_k = dS,$$

где

$$S = W + \sum P_k Q_k,$$

или

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}. \quad (*)$$

Таким образом, взяв любую функцию

$$S(t, q_1, \dots, q_s, P_1, \dots, P_s),$$

мы получим, при помощи равенств (\*), каноническое преобразование.

В заключение дадим несколько примеров применения теоремы II.

**Пример I.** Пусть

$$q_1 = \sqrt{2Q_1} \cos P_1, \quad p_1 = \sqrt{2Q_1} \sin P_1$$

$$q_i = Q_i, \quad p_i = P_i, \quad (i=2, 3, \dots, s).$$

Так как

$$q_1 dp_1 = 2Q_1 \cos^2 P_1 dP_1 + \cos P_1 \sin P_1 dQ_1,$$

то

$$q_1 dp_1 - Q_1 dP_1 = Q_1 \cos 2P_1 dP_1 + \frac{1}{2} \sin 2P_1 dQ_1 = d\left(\frac{1}{2} Q_1 \sin 2P_1\right).$$

Таким образом, условия теоремы II здесь выполняются, и каноническая система, получающаяся в результате замены переменных, может быть написана сразу.

**Пример II.** В начале предыдущего параграфа мы видели, что уравнения движения в прямоугольных координатах (1) могут быть представлены в канонической форме. Теорема II позволяет легко показать, что при переходе от прямоугольных к любым криволинейным координатам каноническая форма уравнений может быть сохранена. Так как этот результат уже был нами получен в предыдущем параграфе другим методом, то доказательство его с помощью теоремы II предоставляем провести читателю.

**Пример III.** В том, часто встречающемся на практике случае, когда  $P_k$  являются линейными функциями  $p_k$ , а  $Q_k$  — линейными функциями  $q_k$ , условием, достаточным для того, чтобы преобразование было каноническим, может служить равенство

$$\sum P_k Q_k = \sum p_k q_k.$$

В самом деле, так как  $dQ_k$  связаны с  $dq_k$  теми же соотношениями, какие имеют место между  $Q_k$  и  $q_k$ , то из этого равенства следует

$$\sum P_k dQ_k - \sum p_k dq_k = 0.$$

## § 21. Способ Якоби для решения канонических систем.

Рассмотрим каноническую систему

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (15)$$

Введя новые переменные  $Q_k, P_k$ , связанные со старыми такими соотношениями, что

$$\sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k = dW, \quad (16)$$

мы получим, на основании теоремы II, для новых переменных уравнения:

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_k}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_k}, \quad (17)$$

где

$$K = \frac{\partial W}{\partial t} + H.$$

Система (15) будет решена, если нам удастся найти такую функцию  $W$ , для которой  $K=0$ . В самом деле, уравнения (17) дадут

$$Q_k = \alpha_k, \quad P_k = -\beta_k,$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — постоянные интегрирования. С другой стороны, из условия (16) имеем:

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial W}{\partial Q_k},$$

причем мы можем считать, что  $W$  выражено, при помощи равенств (11), через  $q_k$  и  $Q_k$ . Заменяя в  $W$  величины  $Q_k$  через  $\alpha_k$ , мы получим функцию  $W(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \quad (18)$$

которые дают возможность выразить  $p_k$  и  $q_k$  через  $t$  и  $2s$  произвольных постоянных  $\alpha_k, \beta_k$ , т. е. дают общее решение системы (15).

Так как нам известно выражение функции  $H$  через  $p_k, q_k$ , пусть  $H(t, q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s)$ , то уравнение  $K=0$ , определяющее  $W$ , мы можем написать следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = 0. \quad (19)$$

Итак,  $W$ , рассматриваемое как функция  $s+1$  независимых переменных  $t, q_1, q_2, \dots, q_s$ , удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка. Всякое решение такого уравнения, заключающее  $s+1$  независимых произвольных постоянных, называется полным интегралом.

В настоящем случае неизвестная функция  $W$  входит в уравнение (19) только через посредство своих производных, поэтому, если удастся найти решение этого уравнения, заключающее  $s$  произвольных постоянных, из

которых ни одна не является аддитивной, то полный интеграл получится весьма просто прибавлением  $(s+1)$ -ой аддитивной постоянной и будет иметь вид:

$$W(t, q_1, q_2, \dots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + \alpha_{s+1}. \quad (20)$$

Мы приходим, таким образом, к следующему результату, представляющему знаменитую теорему Якоби:

**Теорема III.** Для решения канонической системы (15) достаточно найти какой-нибудь полный интеграл (20) уравнения (19). Общее решение системы (15) получим, определяя  $q_k, p_k$  из равенств

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \quad \frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k,$$

где через  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  обозначены новые произвольные постоянные.

В применении этой теоремы заключается метод Якоби интегрирования канонических систем. Произвольные постоянные  $\alpha_k, \beta_k$ , которые вводятся при интегрировании по этому методу, носят название канонических постоянных или канонических элементов.

Примечание. В том случае, когда функция  $H$  не содержит  $t$ , нахождение полного интеграла уравнения (19) упрощается. В самом деле, полагая в этом уравнении

$$W = -\alpha t + W', \quad (21)$$

получим для определения новой неизвестной функции  $W'$  такое уравнение:

$$H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_s}\right) = \alpha.$$

Если найдено решение этого уравнения (где  $\alpha$  — произвольный параметр), заключающее  $s-1$  произвольных постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ , среди которых нет аддитивных, то равенство (21) даст решение уравнения (19), содержащее  $s$  постоянных  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ . Поэтому, обозначая через  $\beta, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$  новые постоянные, общее решение канонической системы (15) получим в следующем виде:

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha} = t + \beta, \quad \frac{\partial W'}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \quad \frac{\partial W'}{\partial q_k} = p_k. \quad (22)$$

$(k = 1, 2, \dots, s-1).$

Получающееся таким образом упрощение интегрирования системы (15) является следствием наличия, в рассматриваемом случае, первого интеграла

$$H = \text{const.}$$

## § 22. Применение метода вариации произвольных постоянных к каноническим элементам.

Пусть каноническая система

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (15)$$

решена по способу Якоби. Это решение

$$\begin{aligned} q_k &= \varphi_k(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \\ p_k &= \psi_k(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \end{aligned} \quad (23)$$

получается, как мы только что видели, из равенств (18), т. е.

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \quad (24)$$

где  $W$  — полный интеграл уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_s, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_s}\right) = 0. \quad (25)$$

Предположим теперь, что требуется решить новую каноническую систему

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial(H-R)}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial(H-R)}{\partial q_k}, \quad (26)$$

где  $R$  — функция  $t, q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$ .

Применяя метод вариации произвольных постоянных, попробуем удовлетворить этим уравнениям теми же выражениями (23), но считая  $\alpha_k, \beta_k$  уже не постоянными, а функциями  $t$ . Для этого надо преобразовать уравнения (15), введя в них вместо переменных  $q_k, p_k$  новые переменные  $\alpha_k, \beta_k$ , определяемые равенствами (23). Так как, на основании (24):

$$\begin{aligned} \sum p_k dq_k - \sum \alpha_k d\beta_k &= \sum p_k dq_k + \sum \beta_k d\alpha_k - \sum d(\alpha_k \beta_k) = \\ &= \sum \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} d\alpha_k - \sum d(\alpha_k \beta_k) = d\left(W - \sum \alpha_k \beta_k\right), \end{aligned}$$

то по теореме II преобразованные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k}, \quad (27)$$

ибо в данном случае, учитывая равенство (25), имеем:

$$K = (H-R) + \frac{\partial W}{\partial t} = -R.$$

Таким образом, при применении метода вариации произвольных постоянных к каноническим элементам, дифференциальные уравнения, определяющие эти элементы, могут быть написаны сразу и притом в весьма простой форме.

## § 23. Канонические элементы эллиптического движения.

Применим метод Якоби к решению задачи двух тел. Обозначим через  $x, y, z$  координаты планеты в гелиоцентрической системе координат, через  $m$  — ее массу.

Чтобы уравнения движения планеты

$$\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

где

$$U = \frac{k^2(1+m)}{r},$$

представить в канонической форме, достаточно положить

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k^2(1+m)}{r}.$$

Перейдем к сферическим координатам при помощи формул

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \cos \varphi \sin \theta, \quad z = r \sin \varphi$$

и условимся писать  $k^2$  вместо  $k^2(1+m)$ . Функция Гамильтона примет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}(r^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\theta}^2) - k^2 r^{-1}.$$

Переходя к обобщенным импульсам, легко найдем, что уравнение Гамильтона-Якоби в настоящем случае будет:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + r^{-2} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 + r^{-2} \sec^2 \varphi \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right\} - k^2 r^{-1} = 0.$$

Это уравнение не содержит явно ни  $t$ , ни  $\theta$ , поэтому мы можем положить (ср. § 21):

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_2 \theta + W_1.$$

Подстановка этого выражения в предыдущее уравнение дает

$$\left( \frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + r^{-2} \left( \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right)^2 + r^{-2} \sec^2 \varphi \cdot \alpha_2^2 = 2k^2 r^{-1} + 2\alpha_1.$$

Для нас достаточно найти какое-нибудь решение этого уравнения, заключающее одну произвольную постоянную. Поэтому положим

$$\left( \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} \right)^2 + \alpha_2^2 \sec^2 \varphi = \alpha_3^2,$$

вследствие чего предыдущее уравнение обращается в такое:

$$\left( \frac{\partial W_1}{\partial r} \right)^2 + \alpha_3^2 r^{-2} = 2k^2 r^{-1} + 2\alpha_1$$

и переменные  $r$  и  $\varphi$  оказываются разделенными. Иначе говоря, мы можем положить

$$W_1 = W' + W'',$$

где  $W'$  — функция только  $\varphi$ , а  $W''$  — функция только  $r$ . Эти функции находятся из только-что написанных уравнений при помощи квадратур.

Окончательно получим:

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_2 \theta + \int_0^\varphi \sqrt{\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi} d\varphi + \int_{r_0}^r \sqrt{2\alpha_1 + 2k^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2}} dr.$$

Чтобы не вводить ненужных произвольных постоянных, фиксируем нижние пределы интегралов: у первого интеграла за нижний предел

берем  $\varphi=0$ , у второго — меньший из двух корней подкоренного выражения.

Согласно теореме III, общее решение уравнений дается равенствами

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3,$$

которые в настоящем случае имеют такой вид:

$$\beta_1 = -t + \int_{r_0}^r (2\alpha_1 + 2k^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr \quad (28)$$

$$\beta_2 = \theta - \alpha_2 \int_0^\varphi \sec^2 \varphi (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad (29)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 \int_0^\varphi (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi - \alpha_3 \int_{r_0}^r r^{-2} (2\alpha_1 + 2k^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (30)$$

Эти соотношения позволяют определить координаты  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  в функции  $t$  и шести произвольных постоянных  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ , являющихся каноническими элементами эллиптического движения.

Посмотрим, каким образом канонические элементы связаны с обычными элементами.

Равенство (28) показывает, что  $r$  должно заключаться в интервале

$$r_0 \leq r \leq r_1,$$

где через  $r_0$  и  $r_1$  обозначены корни уравнения

$$2\alpha_1 r^2 + 2k^2 r - \alpha_3^2 = 0.$$

Так как в эллиптическом движении пределы радиуса-вектора равны  $a(1-e)$  и  $a(1+e)$ , то отсюда следует, что

$$2a = r_0 + r_1 = -\frac{k^2}{\alpha_1}, \quad a^2(1-e^2) = r_0 r_1 = -\frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1}.$$

Поэтому

$$\alpha_1 = -\frac{k^2}{2a}, \quad \alpha_3 = k\sqrt{a(1-e^2)} = k\sqrt{p}.$$

С другой стороны, обозначая через  $T$  момент прохождения через перигелий, из того же равенства (28) получим:

$$\beta_1 = -T,$$

так как в момент прохождения через перигелий  $r = r_0$ .

Равенство (29) показывает, что

$$\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi \geq 0,$$

или

$$\cos \varphi \geq \frac{\alpha_2}{k\sqrt{p}}.$$

Поэтому, замечая, что наименьшей величины  $\cos \varphi$  достигает для  $\varphi = \pm i$ , где  $i$  — наклонность орбиты, получим:

$$\alpha_2 = k\sqrt{p} \cos i.$$

Если  $\varphi = 0$ , то планета находится в одном из узлов своей орбиты. Следовательно, на основании равенства (29), мы можем считать, что

$$\beta_2 = \Omega.$$

Обратимся теперь к равенству (30). Введем вместо широты  $\varphi$  аргумент широты  $u$ . Так как

$$\sin \varphi = \sin i \sin u,$$

то, после подстановки найденных значений  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , будем иметь:

$$\alpha_3 \int_0^{\varphi} (\alpha_3^2 - \alpha_2^2 \sec^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi = \int_0^u (1 - \cos^2 i \sec^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \sec \varphi \sin i \cos u du = u.$$

Следовательно:

$$u - \beta_3 = \alpha_3 \int_{r_0}^r r^{-2} (2\alpha_1 + 2k^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}} dr.$$

Для момента прохождения через перигелий  $u = \omega$ ,  $r = r_0$ , так что

$$\beta_3 = \omega = \pi - \Omega.$$

Итак, мы получили следующую систему канонических элементов:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{k^2}{2a}; & \beta_1 &= -T \\ \alpha_2 &= k\sqrt{p} \cos i; & \beta_2 &= \Omega \\ \alpha_3 &= k\sqrt{p}; & \beta_3 &= \pi - \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Условимся среднюю долготу вычислять как для возмущенного, так и для невозмущенного движения по формуле (§ 12):

$$\lambda = \varepsilon + \int_0^t n dt,$$

Но, с другой стороны, для невозмущенного движения мы имеем

$$\lambda = \pi + n(t - T) = \varepsilon + nt,$$

поэтому

$$\beta_1 = -T = \frac{\varepsilon - \pi}{n}$$

или

$$\beta_1 = \frac{\varepsilon - \pi}{k} a^{\frac{3}{2}}. \quad (32)$$

В заключение выразим эллиптические элементы через канонические. Получим:

$$\left. \begin{aligned} a &= -\frac{k^2}{2\alpha_1}; & \Omega &= \beta_2 \\ e^2 &= 1 + \frac{2\alpha_1 \alpha_3^2}{k^4}; & \pi &= \beta_2 + \beta_3 \\ \cos i &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3}; & \varepsilon &= \beta_2 + \beta_3 + \beta_1 k^{-2} (-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

### § 24. Применение канонических элементов к выводу уравнений Лагранжа.

Канонические элементы имеют то преимущество перед обыкновенными, что уравнения, определяющие изменения этих элементов в возмущенном движении, имеют очень простой вид (§ 22):

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \beta_k}, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (34)$$

Но для действительного вычисления положений планеты употребляются обыкновенные элементы. Поэтому от уравнений (34) целесообразно перейти к уравнениям, дающим производные эллиптических элементов. Дифференцируя с этой целью равенства (33) и учитывая (34), получим:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= + \frac{2a^2}{k^2} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{a(1-e^2)}{k^2 e} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} - \frac{na\sqrt{1-e^2}}{k^2 e} \frac{\partial R}{\partial \beta_3} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{k\sqrt{a(1-e^2)}} \left( \cos i \frac{\partial R}{\partial \beta_3} - \frac{\partial R}{\partial \beta_2} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \\ \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} - n \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} - \frac{3a}{k^2} (\varepsilon - \pi) \frac{\partial R}{\partial \beta_1}. \end{aligned}$$

Формулы (31) позволяют выразить производные пертурбационной функции по каноническим элементам через производные по эллиптическим элементам. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \beta_1} &= n \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial R}{\partial \beta_2} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial R}{\partial \beta_3} &= \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} &= \frac{2a^2}{k^2} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{a(1-e^2)}{k^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{3a}{k^2} (\varepsilon - \pi) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} &= -\operatorname{cosec} i \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} &= -\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{kae} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{ctg} i}{k\sqrt{a(1-e^2)}} \frac{\partial R}{\partial i}. \end{aligned}$$

Таким образом окончательно получим следующие уравнения, уже найденные нами другими методами в главе III:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right\} (35)$$

Напомним, что в этих формулах  $ka^{-\frac{3}{2}}$  для краткости обозначено через  $n$ .

Заметим еще, что последнюю из только-что написанных формул можно понимать двояко. Если средняя долгота планеты вычисляется по формуле

$$\lambda = \varepsilon + n(t-t_0) = \varepsilon + ka^{-\frac{3}{2}}(t-t_0), \quad (36)$$

то  $R$  будет зависеть от  $a$  и непосредственно и через посредство  $\lambda$ , поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial a} = \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \frac{\partial n}{\partial a} (t-t_0),$$

где слева стоит производная, соответствующая полному изменению  $a$ , тогда как через  $\left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)$  обозначена производная, взятая при неизменном  $\lambda$ .

С другой стороны, если среднюю долготу вычислять по формуле

$$\lambda = \varepsilon + \int_{t_0}^t n dt, \quad (37)$$

где через  $n$  обозначена функция  $t$ , определяемая уравнением

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad (38)$$

то в последней из формул (35) надо вычислять производную  $R$  по  $a$  при неизменном  $\lambda$ , т. е. вместо  $\frac{\partial R}{\partial a}$  взять  $\left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)$ . Таким образом в этом случае мы избегаем появления в правой части последнего из уравнений (35) члена, растущего пропорционально времени.

### § 25. Канонические элементы Делоне и Пуанкаре.

Канонические элементы, определяемые равенствами (31), имеют один недостаток, который находится в тесной связи с тем, что мы видели в конце предыдущего параграфа.

В самом деле, элемент  $\alpha_1$  входит в пертурбационную функцию  $R$  как через посредство  $a$ , так и через посредство  $n$ . Поэтому в правой части уравнения

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}$$

мы будем иметь член, пропорциональный времени.

Если пытаться устранить этот недостаток так, как мы это сделали в предыдущем параграфе (т. е. заменой элемента  $\varepsilon$ , определяемого равенством (36), элементом  $\varepsilon$ , определяемым равенством (37), то будет потеряна каноническая форма уравнений.

Делоне предложил ввести вместо  $\alpha_1, \beta_1$  новые элементы:

$$L = k\sqrt{a} = k^2(-2\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$l = n(t-T) = ka^{-\frac{3}{2}}(t+\beta_1) = k^{-2}(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}(t+\beta_1).$$

Так как разность

$$\beta_1 d\alpha_1 - l dL = -t d\alpha_1$$

есть полный дифференциал функции  $W = -t\alpha_1$ , то, на основании теоремы II (§ 20), после преобразования снова получим каноническую систему.

Сделав следующую замену обозначений:

$$\alpha_2 = H, \quad \alpha_3 = G, \quad \beta_2 = h, \quad \beta_3 = g,$$

окончательно будем иметь уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial G} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial H} \end{aligned} \right\} (39)$$

где

$$R' = R - \alpha_1 = R + \frac{k^4}{2L^2}.$$

Напомним выражения элементов Делоне через эллиптические:

$$\left. \begin{aligned} L &= k\sqrt{a}, & G &= k\sqrt{a(1-e^2)}, & H &= k\sqrt{a(1-e^2)} \cos i \\ l &= n(t-T), & g &= \pi - \Omega, & h &= \Omega. \end{aligned} \right\} (40)$$

Таким образом в этой системе за один из элементов взята средняя аномалия  $l$ .

Интересно отметить однородность элементов (40): элементы  $L, G$  и  $H$  все имеют размерность секториальной скорости, тогда как все элементы  $l, g$  и  $h$  являются углами.

Можно указать иные системы канонических элементов, также обладающие однородностью, но имеющие некоторые преимущества перед элементами Делоне в других отношениях.

Прежде всего, следуя Пуанкаре, рассмотрим такую систему элементов:

$$\left. \begin{aligned} L &= k\sqrt{a}; & \lambda &= l + \pi = nt + \varepsilon \\ \rho_1 &= k\sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}); & \omega_1 &= -\pi \\ \rho_2 &= k\sqrt{a}(1 - e^2)(1 - \cos i); & \omega_2 &= -\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где через  $\lambda$  обозначена средняя долгота.

Эта система имеет то преимущество, что при малых эксцентриситетах и наклонностях элементы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  будут малы.

Чтобы убедиться в том, что при переходе к элементам (41) дифференциальные уравнения (39) сохраняют каноническую форму, рассмотрим выражение

$$l dL + g dG + h dH - \lambda dL - \omega_1 d\rho_1 - \omega_2 d\rho_2,$$

которое, очевидно, равно

$$l dL + g dG + h dH - (l + g + h) dL + (g + h)(dL - dG) + h(dG - dH) = 0,$$

так что условия теоремы II выполняются.

Наряду с системой (41) Пуанкаре ввел еще следующую:

$$\left. \begin{aligned} L &= k\sqrt{a}; & \lambda &= l + \pi \\ \xi_1 &= \sqrt{2\rho_1} \cos \omega_1; & \eta_1 &= \sqrt{2\rho_1} \sin \omega_1, \\ \xi_2 &= \sqrt{2\rho_2} \cos \omega_2; & \eta_2 &= \sqrt{2\rho_2} \sin \omega_2, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

которая также является канонической на основании сказанного в § 20 (пример 1).

Элементы  $\xi_1, \eta_1$  имеют величину порядка эксцентриситета, тогда как  $\xi_2, \eta_2$  — того же порядка, что и наклонность орбиты.

Характерной особенностью канонических элементов (40), (41) и (42) является употребление средней аномалии, или средней долготы, в качестве одной из переменных.

Леви-Чивита и Хилл указали такие системы канонических элементов, в которых одним из элементов является эксцентрическая или истинная аномалия. Де Ситтер и Андуйе дали общий прием для получения таких систем элементов.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> T. Levi-Civita, Nuovo sistema canonico di elementi ellittici, Annali di Matematica, Ser. III, 20 (1913), 153.

G. W. Hill, Motion of a system of material points under the action of gravitation, Astron. Journal, 27 (1913), 171.

W. de Sitter, On canonical elements, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 16 (1913), 279.

H. Andoyer, Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques du mouvement elliptique, d'après M. M. T. Levi-Civita et G.-W. Hill, Bull. astr., 30, 1913.

## ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ К ИЗУЧЕНИЮ ВОЗМУЩЕНИЙ.

### § 26. Каноническая форма уравнений относительного движения.

В § 19 было показано, каким образом уравнения движения системы, в случае существования силовой функции, могут быть приведены к канонической форме. Рассмотрим уравнения относительно движения в их обычной форме, когда движение точек  $m_1(x_1, y_1, z_1), \dots, m_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$  отнесены к точке  $m_0(0, 0, 0)$ , принятой за начало координат, т. е. уравнения (§ 3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + k^2(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),

где через  $R_i$  обозначена пертурбационная функция, соответствующая точке  $m_i$ .

Так как в этом случае для каждой точки  $m_i$  мы имеем свою силовую функцию

$$U_i = \frac{k^2(m_0 + m_i)}{r_i} + R_i,$$

то уравнения (1) могут быть приведены только к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H_i}{\partial x'_i}, & \frac{dx'_i}{dt} &= -\frac{\partial H_i}{\partial x_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial H_i}{\partial y'_i}, & \frac{dy'_i}{dt} &= -\frac{\partial H_i}{\partial y_i} \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial H_i}{\partial z'_i}, & \frac{dz'_i}{dt} &= -\frac{\partial H_i}{\partial z_i} \end{aligned} \right\}$$

где

$$H_i = T - U_i,$$

причем через  $T$  обозначена, как всегда, живая сила системы.

Полученные уравнения, не являющиеся каноническими, поскольку функции  $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$  различны, Пуанкаре предложил назвать полуканоническими.

Для получения уравнений относительного движения в канонической форме, что представляет большой интерес с точки зрения изучения общих свойств движения, необходимо иначе выбрать относительные координаты. Такой выбор может быть сделан различно, но наиболее удобными, со многих точек зрения, относительными координатами, удовлетворяющими поставленному условию, являются координаты, указанные в § 4.

В этих координатах уравнения движения имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_i} \\ \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\mu_i = \frac{m_i(m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1})}{m_0 + m_1 + \dots + m_i},$$

$$U = \frac{1}{2} k^2 \sum_i \sum_j \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}.$$

Так как эти уравнения имеют ту же структуру, что и уравнения абсолютного движения системы в случае наличия функции сил, то они могут быть приведены к каноническому виду обычным способом (§ 19). Полагая

$$T = \frac{1}{2} \sum \mu_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

$$H = T - U$$

$$x_i' = \mu_i x_i, \quad y_i' = \mu_i y_i, \quad z_i' = \mu_i z_i,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x_i'}, & \frac{dx_i'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_i'}, & \frac{dy_i'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z_i'}, & \frac{dz_i'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z_i} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В том случае, когда массы  $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$  очень малы по сравнению с  $m_0$ , так что взаимным притяжением этих масс можно пренебречь, мы можем взять вместо  $U$  функцию

$$U_0 = k^2 \sum_1^{n-1} \frac{m_0 m_i}{r_i},$$

где

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

вследствие чего уравнения движения распадутся на  $n-1$  отдельных систем. Например уравнения (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + k^2 m_0 \frac{m_0 + m_1 + \dots + m_i}{m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}} \frac{x_i}{r_i^3} &= 0. \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, в первом приближении координаты  $x_i, y_i, z_i$  получаются путем решения задачи двух тел и могут быть выражены через время и шесть постоянных элементов орбиты.

Вторые канонические элементы Пуанкаре (§ 25), которые мы изберем для этой цели, обозначим (для точки  $m_i$ ) через

$$L_i, \lambda_i, \xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \eta_{i,1}, \eta_{i,2}.$$

Но там, где целесообразно избегать употребления двойных индексов, мы будем полагать

$$\xi_{i,1} = \xi_{2i-1}, \quad \xi_{i,2} = \xi_{2i},$$

$$\eta_{i,1} = \eta_{2i-1}, \quad \eta_{i,2} = \eta_{2i}.$$

Итак, в первом приближении будем иметь:

$$x_i = f(t, L_i, \lambda_i, \xi_{2i-1}, \xi_{2i}, \eta_{2i-1}, \eta_{2i})$$

$$y_i = \varphi(t, L_i, \dots \dots \dots)$$

$$z_i = \psi(t, L_i, \dots \dots \dots)$$

и аналогичные выражения для  $x_i', y_i', z_i'$ .

Чтобы получить решение уравнений (3) в общем случае, мы воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, т. е. заменим переменные  $x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i'$  переменными  $L_i, \lambda_i, \xi_j, \eta_j$  при помощи только что указанных выражений.

За пертурбационную функцию примем

$$R = U - U_0,$$

так как тогда

$$H = T - U_0 - R.$$

Это дает преобразованные уравнения в следующем виде (§ 22):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \lambda_i}, & \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L_i} \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \eta_j}, & \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial \xi_j} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, 2n-2),$$

где (§ 25)

$$R' = R + \sum_1^{n-1} k^4 m_0^2 \left( \frac{m_0 + m_1 + \dots + m_i}{m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}} \right)^2 \frac{1}{2L_i^2},$$

так как в настоящем случае  $k^2$  для точки  $m_i$  должно быть заменено через

$$k^2 m_0 \frac{m_0 + m_1 + \dots + m_i}{m_0 + m_1 + \dots + m_{i-1}}.$$

Полезно напомнить, что замена  $R$  через  $R'$  связана с употреблением средней долготы  $\lambda_i$  в качестве одной из переменных.

В заключение применим уравнения (4) к случаю, когда рассматривается движение только трех тел  $m_0, m_1, m_2$ .

В этом случае

$$R' = R + k^4 m_0^2 \left[ \frac{(m_0 + m_1)^2}{2m_0^2 L_1^2} + \frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{2(m_0 + m_1)^2 L_2^2} \right],$$

причем

$$R = U - U_0 = k^2 m_0 m_1 \left( \frac{1}{\Delta_{10}} - \frac{1}{r_1} \right) + k^2 m_0 m_2 \left( \frac{1}{\Delta_{20}} - \frac{1}{r_2} \right) + k^2 m_1 m_2 \frac{1}{\Delta_{12}}.$$

Формула (16) на стр. 12 дает:

$$\Delta_{10}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2$$

$$\Delta_{20}^2 = \left( x_2 + \frac{m_1 x_1}{m_0 + m_1} \right)^2 + \left( y_2 + \frac{m_1 y_1}{m_0 + m_1} \right)^2 + \left( z_2 + \frac{m_1 z_1}{m_0 + m_1} \right)^2$$

$$\Delta_{12}^2 = \left( x_2 - \frac{m_0 x_1}{m_0 + m_1} \right)^2 + \left( y_2 - \frac{m_0 y_1}{m_0 + m_1} \right)^2 + \left( z_2 - \frac{m_0 z_1}{m_0 + m_1} \right)^2.$$

Таким образом, окончательно:

$$R = k^2 m_0 m_2 \left( \frac{1}{\Delta_{20}} - \frac{1}{r_2} \right) + k^2 m_1 m_2 \frac{1}{\Delta_{12}}. \quad (5)$$

### § 27. Интегралы площадей.

В § 4 было отмечено, что уравнения (2), имеющие ту же форму, что и уравнения абсолютного движения в случае проблемы  $n$  тел, имеют интегралы площадей того же вида. Таким образом, для случая трех тел ( $i=1, 2$ ) уравнения (2) будут иметь следующие интегралы, соответствующие интегралам (6) в § 1:

$$\mu_1 (y_1 \dot{z}_1 - z_1 \dot{y}_1) + \mu_2 (y_2 \dot{z}_2 - z_2 \dot{y}_2) = C_1$$

$$\mu_1 (z_1 \dot{x}_1 - x_1 \dot{z}_1) + \mu_2 (z_2 \dot{x}_2 - x_2 \dot{z}_2) = C_2$$

$$\mu_1 (x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) + \mu_2 (x_2 \dot{y}_2 - y_2 \dot{x}_2) = C_3,$$

где

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{m_1 (m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

Для того чтобы выразить эти интегралы через канонические элементы, воспользуемся, в качестве промежуточного звена, эллиптическими элементами.

В случае невозмущенного движения мы имеем следующие выражения компонентов секториальной скорости через элементы

$$y\dot{z} - z\dot{y} = + G \sin i \sin \Omega$$

$$z\dot{x} - x\dot{z} = - G \sin i \cos \Omega$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = + G \cos i,$$

где

$$G = k \sqrt{a(1-e^2)}.$$

Эти соотношения остаются справедливыми и для возмущенного движения, поскольку мы пользуемся оскулирующими элементами.

Соотношения между эллиптическими и каноническими элементами (§ 25) дают:

$$G = L - \rho_1, \quad G \cos i = L - \rho_1 - \rho_2,$$

откуда

$$G \sin i = \sqrt{2\rho_2(L - \rho_1) - \rho_2^2},$$

и следовательно

$$G \sin i \sin \Omega = G \sin i \frac{-\eta_2}{\sqrt{2\rho_2}} = -\eta_2 \sqrt{L - \rho_1 - \frac{1}{2}\rho_2}$$

$$G \sin i \cos \Omega = G \sin i \frac{+\xi_2}{\sqrt{2\rho_2}} = +\xi_2 \sqrt{L - \rho_1 - \frac{1}{2}\rho_2}.$$

Таким образом интегралы площадей в канонических переменных можно написать в следующем виде:

$$-\mu_1 \eta_{1,2} \sqrt{L_1 - \rho_{1,1} - \frac{1}{2}\rho_{1,2}} - \mu_2 \eta_{2,2} \sqrt{L_2 - \rho_{2,1} - \frac{1}{2}\rho_{2,2}} = C_1$$

$$+\mu_1 \xi_{1,2} \sqrt{L_1 - \rho_{1,1} - \frac{1}{2}\rho_{1,2}} + \mu_2 \xi_{2,2} \sqrt{L_2 - \rho_{2,1} - \frac{1}{2}\rho_{2,2}} = C_2$$

$$\mu_1 (L_1 - \rho_{1,1} - \rho_{1,2}) + \mu_2 (L_2 - \rho_{2,1} - \rho_{2,2}) = C_3.$$

Предположим теперь, что за плоскость  $xu$  взята неизменная плоскость, так что  $C_1 = C_2 = 0$ . В этом случае первые два равенства дают

$$\frac{\eta_{1,2}}{\xi_{1,2}} = \frac{\eta_{2,2}}{\xi_{2,2}}$$

или (стр. 70)

$$\operatorname{tg} \Omega_1 = \operatorname{tg} \Omega_2.$$

Иначе говоря, линия пересечения двух относительных оскулирующих орбит параллельна неизменной плоскости.

Это свойство позволяет вместо двух узлов находить только один, почему оно и было названо Якоби *исключением узлов*.

Как было указано в § 2, исключение узлов является частным случаем более общего свойства динамических систем.

### § 28. Выражение прямоугольных координат через канонические элементы.

Для того чтобы приступить к интегрированию уравнений (4), нужно пертурбационную функцию  $R$  выразить через канонические элементы. Так как пертурбационная функция весьма просто выражается через прямоугольные координаты, то нужно прежде всего прямоугольные координаты  $x_p, y_p, z_p$  каждой точки выразить через элементы  $L_p, \lambda_p, \dots$  этой точки.

Напомним прежде всего формулы, связывающие канонические элементы Пуанкаре с эллиптическими элементами (§ 25). Введя угол эксцентриситета  $\varphi$ , мы можем написать их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} L &= k\sqrt{M} \sqrt{a}, & n &= k^4 M^2 L^{-3} \\ \lambda &= nt + \epsilon \\ \rho_1 &= 2L \sin^2 \frac{\varphi}{2}; & \omega_1 &= -\pi \\ \rho_2 &= 2L \cos \varphi \sin^2 \frac{i}{2}; & \omega_2 &= -\Omega \\ \xi_1 &= 2\sqrt{L} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \pi; & \eta_1 &= -2\sqrt{L} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \pi \\ \xi_2 &= 2\sqrt{L} \cos \varphi \sin \frac{i}{2} \cos \Omega; & \eta_2 &= -2\sqrt{L} \cos \varphi \sin \frac{i}{2} \sin \Omega. \end{aligned} \right\} (6)$$

С другой стороны, хорошо известные формулы, служащие для выражения прямоугольных координат через эллиптические элементы, дают:

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i \\ y &= r \cos u \sin \Omega + r \sin u \cos \Omega \cos i \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned}$$

где

$$u = v + \pi - \Omega$$

есть аргумент широты. Эти формулы могут быть представлены в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= X \left[ \cos^2 \frac{i}{2} \cos \lambda + \sin^2 \frac{i}{2} \cos (\lambda - 2\Omega) \right] - \\ &\quad - Y \left[ \cos^2 \frac{i}{2} \sin \lambda + \sin^2 \frac{i}{2} \sin (\lambda - 2\Omega) \right] \\ y &= X \left[ \cos^2 \frac{i}{2} \sin \lambda - \sin^2 \frac{i}{2} \sin (\lambda - 2\Omega) \right] + \\ &\quad + Y \left[ \cos^2 \frac{i}{2} \cos \lambda - \sin^2 \frac{i}{2} \cos (\lambda - 2\Omega) \right] \\ z &= X \sin i \sin (\lambda - \Omega) + Y \sin i \cos (\lambda - \Omega), \end{aligned} \right\} (7)$$

если положить

$$X = r \cos (v - M), \quad Y = r \sin (v - M),$$

где через  $M = \lambda - \pi$  обозначена средняя аномалия.

Результат, который мы имеем в виду получить, может быть выражен следующим образом:

**Теорема.** Каждая из прямоугольных координат  $x, y, z$  разлагается в ряд вида

$$\sum A \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \cos (k\lambda + H), \quad (8)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, k$  принимают целые положительные или равные нулю значения,  $H$  — постоянные числа, а коэффициенты  $A$  зависят от  $L$ .

Покажем, прежде всего, что координаты  $x, y, z$  могут быть разложены в ряды, расположенные по целым положительным степеням  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ , причем коэффициенты этих рядов содержат  $L$  и являются периодическими функциями  $\lambda$ .

В самом деле, коэффициенты  $X$  и  $Y$  в равенствах (7) состоят из произведений  $\sin \lambda$  и  $\cos \lambda$  на величины

$$\cos^2 \frac{i}{2}, \quad \sin^2 \frac{i}{2} \cos 2\Omega, \quad \sin i \frac{\cos \Omega}{\sin \Omega}. \quad (9)$$

Но, на основании выражений (6'):

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = 4L \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 = 4L \cos \varphi \sin^2 \frac{i}{2};$$

следовательно

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{i}{2} &= \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4L \left( 1 - \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2L} \right)} = \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}, \\ \cos^2 \frac{i}{2} &= \frac{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \xi_2^2 - \eta_2^2}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда ясна разложимость  $\sin^2 \frac{i}{2}$  и  $\cos^2 \frac{i}{2}$  в ряды требуемого вида.

Кроме того, имеем:

$$\sin i = 2\sqrt{\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{\xi_1^2 + \eta_1^2}} \frac{\sqrt{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \xi_2^2 - \eta_2^2}}{4L - 2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}.$$

С другой стороны:

$$\operatorname{tg} \Omega = -\frac{\eta_2}{\xi_2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sin \Omega &= \frac{-\eta_2}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}}, & \cos \Omega &= \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2}} \\ \sin 2\Omega &= \frac{-2\eta_2 \xi_2}{\xi_2^2 + \eta_2^2}, & \cos 2\Omega &= \frac{\xi_2^2 - \eta_2^2}{\xi_2^2 + \eta_2^2}. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти выражения с только-что указанными, мы видим, что все пять величин (9) разлагаются в ряды, расположенные по целым положительным степеням  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ .

Рассмотрим теперь  $X$  и  $Y$ . Так как

$$r \cos v = a (\cos E - e), \quad r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} X &= -e \cos M + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \cos (E - M) + \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} e^2 \cos (E + M) \\ \frac{1}{a} Y &= +e \sin M + \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2} \sin (E - M) - \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2} e^2 \sin (E + M). \end{aligned}$$

Покажем, что каждая из величин

$$\frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{2e^2},$$

$$\frac{\cos (E - M)}{\sin (E - M)}, \quad \frac{e^2 \cos (E + M)}{\sin (E + M)}$$

разлагается в ряд по целым положительным степеням  $e \sin M$  и  $e \cos M$ .

Для двух первых величин, разлагающихся по степеням  $e^2$ , это очевидно. С другой стороны, уравнение Кеплера

$$M = E - e \sin E$$

дает

$$E - M - e \sin M \cos (E - M) - e \cos M \sin (E - M) = 0. \quad (10)$$

Полагая

$$w = E - M, \quad z_1 = e \sin M, \quad z_2 = e \cos M,$$

это уравнение мы напишем так:

$$f(w, z_1, z_2) = 0,$$

где левая часть есть голоморфная функция  $w, z_1, z_2$  в точке  $w = z_1 = z_2 = 0$ . Согласно известной теореме о неявных функциях, если

$$\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0 \text{ для } w = z_1 = z_2 = 0,$$

то уравнение имеет одно и только одно решение  $w = \varphi(z_1, z_2)$ , голоморфное в области точки  $z_1 = 0, z_2 = 0$ .

В данном случае указанное условие выполняется, так как очевидно

$$\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_0 = 1.$$

Поэтому из уравнения (10) мы получим  $w = E - M$  в виде ряда, расположенного по целым положительным степеням  $z_1$  и  $z_2$ . Отсюда следует, что  $\sin(E - M)$  и  $\cos(E - M)$  также разложимы в ряды такого вида.

Наконец, равенства

$$\begin{aligned} e^2 \cos(E + M) &= e^2 \cos 2M \cos(E - M) - e^2 \sin 2M \sin(E - M) \\ e^2 \sin(E + M) &= e^2 \cos 2M \sin(E - M) + e^2 \sin 2M \cos(E - M) \\ e^2 \cos 2M &= (e \cos M)^2 - (e \sin M)^2 \\ e^2 \sin 2M &= 2(e \sin M)(e \cos M) \end{aligned}$$

показывают, что и выражения

$$e^2 \frac{\cos}{\sin}(E + M)$$

обладают требуемым свойством.

Таким образом нами доказана возможность разложения  $X$  и  $Y$  по целым положительным степеням  $e \sin M$  и  $e \cos M$ .

Так как  $M = \lambda - \pi$ , то

$$\begin{aligned} e \sin M &= e \cos \pi \sin \lambda - e \sin \pi \cos \lambda \\ e \cos M &= e \cos \pi \cos \lambda + e \sin \pi \sin \lambda \end{aligned}$$

поэтому  $X$  и  $Y$  могут быть разложены по целым положительным степеням  $e \cos \pi$  и  $e \sin \pi$ , причем коэффициенты будут периодическими функциями от  $\lambda$ .

Теорема будет доказана целиком, если убедимся в возможности разложения  $e \cos \pi$ ,  $e \sin \pi$  по целым и положительным степеням  $\xi_1$  и  $\eta_1$ .

Прежде всего, из формул (6') следует:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = 4L \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2L(1 - \cos \varphi) = 2L(1 - \sqrt{1 - e^2}).$$

откуда

$$e^2 = \frac{1}{L}(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \frac{1}{4L^2}(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2.$$

Следовательно

$$e = \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{1}{4L}(\xi_1^2 + \eta_1^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, те же формулы (6') дают:

$$\frac{e \cos \pi}{\xi_1} = \frac{e \sin \pi}{-\eta_1} = \frac{e}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} e \cos \pi &= \frac{\xi_1}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{1}{4L}(\xi_1^2 + \eta_1^2)\right]^{\frac{1}{2}} \\ e \sin \pi &= \frac{-\eta_1}{\sqrt{L}} \left[1 - \frac{1}{4L}(\xi_1^2 + \eta_1^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Итак, нами доказана возможность представления каждой из координат  $x, y, z$  рядом вида

$$\sum B \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \Psi(\lambda),$$

где  $B$  — функция от  $L$ , а  $\Psi(\lambda)$  — функция  $\lambda$ , имеющая период  $2\pi$  и потому разлагающаяся в ряд

$$\Psi(\lambda) = \sum (C_k \cos k\lambda + D_k \sin k\lambda).$$

Так как

$$\sin k\lambda = \cos\left(k\lambda + \frac{\pi}{2}\right),$$

то отсюда следует справедливость нашей теоремы.

Полученные таким образом ряды (8) сходятся для достаточно малых значений  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ . Более точным определением области сходимости мы сейчас заниматься не будем.

### § 29. Выражение пертурбационной функции через канонические переменные.

Пертурбационная функция  $R$ , к изучению которой мы теперь переходим, равна (§ 26) разности  $U - U_0$ . Следовательно

$$R = \frac{1}{2} k^2 \sum_0^{n-1} \sum_0^{n-1} \frac{m_k m_l}{\Delta_{kl}} - k^2 \sum_1^{n-1} \frac{m_0 m_l}{r_l} \quad (11)$$

$(k \neq l),$

где

$$\begin{aligned} r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ \Delta_{kl}^2 &= (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2. \end{aligned}$$

Если ни одна из величин  $r_i, \Delta_{kl}$  никогда не равна нулю для

$$\xi_j = 0, \quad \eta_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, 2n - 2),$$

то каждая из них, а следовательно и  $R$ , будет голоморфной функцией  $\xi_j, \eta_j$  вблизи точки  $\xi_j = 0, \eta_j = 0$ .

Таким образом в области этой точки функция  $R$  может быть разложена в ряд по целым положительным степеням  $\xi_j$  и  $\eta_j$ , причем коэффициенты этого разложения (остающиеся конечными и непрерывными для всех значений  $t$ ) будут периодические функции  $\lambda_j$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому эти коэффициенты разложатся в кратные ряды Фурье вида:

$$\Sigma \{C \cos(\Sigma k_i \lambda_i) + D \sin(\Sigma k_i \lambda_i)\},$$

где суммирование ведется по индексам  $k_i$ , принимающим все целые (как положительные, так и отрицательные) значения.

Полученный результат может быть выражен следующим образом.

**Теорема I.** Если точки  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  движутся таким образом, что ни их взаимные расстояния  $\Delta_{kl}$ , ни радиусы-векторы  $r_i$  не обращаются в нуль, то функция  $R$  может быть разложена в ряд

$$R = \Sigma A \mathfrak{M} \cos(\Sigma k_i \lambda_i + H), \quad (12)$$

где  $H$  — постоянные числа, коэффициенты  $A$  зависят только от  $L_i$ , а через  $\mathfrak{M}$  обозначено произведение целых неотрицательных степеней  $\xi_j, \eta_j$ , т. е.  $\mathfrak{M} = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots$

Суммирование ведется по  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$  и по  $k_i$ , которые принимают все целые, как положительные, так и отрицательные значения.

Ряд (12) сходится для достаточно малых значений  $\xi_j, \eta_j$ .

Посмотрим теперь, каким образом функция  $R$  выражается через переменные  $\rho_j$  и  $\omega_j$ , связанные с  $\xi_j, \eta_j$  соотношениями

$$\xi_j = \sqrt{2\rho_j} \cos \omega_j, \quad \eta_j = \sqrt{2\rho_j} \sin \omega_j. \quad (13)$$

Докажем следующую теорему.

**Теорема II.** При тех же условиях, как и в теореме I, функция  $R$  может быть разложена в ряд

$$R = \Sigma A \rho_1^{q_1} \rho_2^{q_2} \dots \cos(\Sigma k_i \lambda_i + \Sigma p_j \omega_j + H), \quad (14)$$

сходящийся при достаточно малых значениях  $\rho_j$ .

Каждое из чисел  $2q_j$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots$ , тогда как индексы  $k_j$  и  $p_j$  пробегает все целые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом для каждого члена выполняются условия:

$$2q_j \geq |p_j|; \quad 2q_j \equiv p_j \pmod{2}. \quad (15)$$

Коэффициенты  $A$  зависят от  $L_i$ , тогда как  $H$  — постоянные числа.

Для доказательства этой теоремы будем преобразовывать каждый член ряда (12), вводя вместо переменных  $\xi, \eta$  новые переменные  $\rho, \omega$  при помощи равенства (13).

Начнем с членов ряда (12), для которых  $\mathfrak{M} = 1$ . Эти члены, остающиеся очевидно без изменения, имеют вид

$$A \cos(\Sigma k_i \lambda_i + H), \quad (16)$$

а потому удовлетворяют условиям теоремы.

Покажем теперь, что всякое выражение

$$\Phi = A \rho_1^{q_1} \rho_2^{q_2} \dots \cos(\Sigma k_i \lambda_i + \Sigma p_j \omega_j + B),$$

где  $q$  и  $p$  удовлетворяют условиям теоремы, после умножения на  $\xi_h$  или  $\eta_h$  даст сумму членов того же вида. Для этого нам надо рассмотреть выражения

$$\Phi \xi_h = \Phi \sqrt{2\rho_h} \cos \omega_h \quad \text{и} \quad \Phi \eta_h = \Phi \sqrt{2\rho_h} \cos \left( \omega_h - \frac{\pi}{2} \right).$$

Возьмем сразу более общее выражение

$$\Phi \sqrt{2\rho_h} \cos(\omega_h + B'),$$

которое очевидно равно

$$\frac{1}{\sqrt{2}} A \rho_1^{q_1} \rho_2^{q_2} \dots \sqrt{\rho_h} [\cos(\Sigma k_i \lambda_i + \Sigma p_j \omega_j + \omega_h + B + B') + \cos(\Sigma k_i \lambda_i + \Sigma p_j \omega_j - \omega_h + B - B')].$$

Пусть, например,  $h = 3$ . В таком случае  $2q_1, 2q_2, 2q_4, \dots$  и  $p_1, p_2, p_4, \dots$  останутся без изменения, а потому будут удовлетворять условиям (15); показатель  $2q_3$  заменяется через  $2q_3 + 1$ , а коэффициент  $p_3$  — через  $p_3 + 1$  и  $p_3 - 1$ . Но, по условию,

$$2q_3 \equiv p_3 \pmod{2}, \quad 2q_3 \geq |p_3|,$$

откуда

$$2q_3 + 1 \equiv p_3 \pm 1 \pmod{2}$$

$$2q_3 + 1 \geq |p_3 + 1|, \quad 2q_3 + 1 \geq |p_3 - 1|.$$

Таким образом, начиная с членов вида (16) и переходя последовательно, путем умножения на  $\xi$  и  $\eta$ , к остальным членам разложения (12), мы будем получать исключительно члены, удовлетворяющие условиям (15).

### § 30. Теорема Пуанкаре о ранге.

В предыдущих параграфах мы познакомились с формой разложения пертурбационной функции  $R$ . Вернемся теперь к интегрированию уравнений (4), которые, при сделанных нами переменных в обозначениях, напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \lambda_i}, & \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial L_i} \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial R'}{\partial \eta_j}, & \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial R'}{\partial \xi_j} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$(i = 1, 2, \dots, n-1; \quad j = 1, 2, \dots, n-2),$

причем

$$R' = R_0 + R,$$

где

$$R_0 = k^4 m_0^2 \left[ \frac{(m_0 + m_1)^2}{2 m_0^2 L_1^2} + \frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{2 (m_0 + m_1)^2 L_2^2} + \dots \right],$$

а  $R$  выражается формулой (5) и потому, на основании теоремы I (§ 29), разлагается в ряд вида

$$R = \Sigma A \mathfrak{M} \cos(\Sigma k_i \lambda_i + H),$$

где через  $\mathfrak{M}$  обозначено произведение целых неотрицательных степеней  $\xi_j, \eta_j$ .

Напомним, что коэффициенты  $A$  могут зависеть только от элементов  $L_i$  и имеют множителем одну из масс  $m_i$ , — как это видно из формулы (11).

Таким образом, в первом приближении, т. е. при  $m_i = 0$ , получим (обозначая нуликами постоянные значения):

$$L_i = L_i^0, \quad \xi = \xi^0, \quad \eta_j = \eta_j^0, \quad \lambda_j = n_j t + \lambda_j^0, \quad (18)$$

где

$$n_i = -\frac{\partial R_0}{\partial L_i^0} = k^4 M_i^2 (L_i^0)^{-3},$$

причем

$$M_1 = m_0 + m_1, \quad M_2 = m_0 \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1} \dots$$

В правых частях уравнений (17) получим после подстановки значений (18) выражения вида

$$\Sigma B \cos(\nu t + H'), \quad (19)$$

где

$$\nu = \Sigma k_i n_i.$$

Поэтому во втором приближении мы будем иметь для элементов выражения

$$\left. \begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta_1 L_i, & \lambda_j &= n_j t + \lambda_j^0 + \delta_1 \lambda_j \\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta_1 \xi_j, & \eta_j &= \eta_j^0 + \delta_1 \eta_j \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

в которых через  $\delta_1 L_i, \dots, \delta_1 \eta_j$  обозначены суммы вида

$$B_0 t + \Sigma \frac{B}{\nu} \sin(\nu t + H').$$

Вековые члены  $B_0 t$  получаются от интегрирования тех членов рядов (19), у которых  $\nu = 0$ .

Легко видеть, что  $\delta_1 L_i$  вековых членов не имеют — результат, эквивалентный теореме Лапласа-Лагранжа о неизменности больших полуосей орбит (§ 17).

Подстановка выражений (20) в правые части уравнений (17) даст возможность получить третье приближение и т. д. Таким образом после произвольного числа приближений будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} L_i &= L_i^0 + \delta L_i, & \lambda_j &= n_j t + \lambda_j^0 + \delta \lambda_j \\ \xi_j &= \xi_j^0 + \delta \xi_j, & \eta_j &= \eta_j^0 + \delta \eta_j \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

причем каждая из величин  $\delta L_i, \dots, \delta \eta_j$  будет представлена рядом вида

$$\Sigma A t^p M \cos(\nu t + H'),$$

где  $M$  обозначает произведение целых неотрицательных степеней  $\xi_j^0, \eta_j^0$ .

Коэффициент  $A$  зависит только от  $L_i^0$  и имеет множителем  $m_1^{m'} m_2^{m''} \dots$ , где  $m', m'', \dots$  — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$m' \geq 0, \quad m'' \geq 0, \dots, \quad m' + m'' + \dots > 0.$$

Напомним, что сумма  $m' + m'' + \dots$  называется порядком соответствующего члена, а выражение  $m' + m'' + \dots = p$  его рангом.

Пуанкаре доказал следующую теорему:

**Теорема.** Если средние движения планет  $p_i$  таковы, что равенство

$$\nu = \Sigma k_i p_i = 0,$$

где  $k_i$  — целые числа, не может иметь места, то:

- 1) ранг каждого из членов в разложениях  $\delta L_i, \delta \lambda_i, \delta \xi_j, \delta \eta_j$  больше или равен нулю;
- 2) ранг каждого смешанного члена равен по крайней мере единице;
- 3) разложение  $\delta L_i$  не содержит членов нулевого ранга.

Мы только что видели, что эта теорема справедлива для членов первого порядка: в самом деле,  $\delta_1 L_i, \delta_1 \lambda_i, \delta_1 \xi_j, \delta_1 \eta_j$  не содержат вовсе смешанных членов; эти выражения могут содержать вековые члены лишь вида  $At$ , т. е. имеющие ранг  $\geq 0$ ; наконец, в  $\delta_1 L_i$  вековые члены отсутствуют.

Предположим, что теорема справедлива для всех членов, порядок которых  $\leq m$ , и покажем, что она будет справедлива в этом случае и для членов  $(m+1)$ -го порядка. Доказательство разделим на три части.

Прежде всего дадим формулы для вычисления членов  $(m+1)$ -го порядка. С этой целью выражения (21), в которых под  $\delta L_i, \dots, \delta \eta_j$  будем понимать совокупности всех членов, имеющих порядок  $\leq m$ , подставим в правые части уравнения (17), причем эти уравнения напишем предварительно так:

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \lambda_i}, & \frac{d\lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial L_i} - \frac{\partial R_0}{\partial L_i} \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial \eta_j}, & \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial \xi_j}. \end{aligned}$$

Интегрирование трех уравнений, не содержащих  $R_0$ , дает

$$\delta L_i = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} dt, \quad \delta \xi_j = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \eta_j} dt, \quad \delta \eta_j = -\int_0^t \frac{\partial R}{\partial \xi_j} dt. \quad (22)$$

Так как  $R$  — величина первого порядка относительно масс  $m_1, m_2, \dots$ , то подстановка в правые части этих равенств выражений (21), имеющих ошибку  $(m+1)$ -го порядка, даст правые части с ошибкой  $(m+2)$ -го порядка, а следовательно позволяет вычислить в  $\delta L_i, \delta \xi_j, \delta \eta_j$  все члены  $(m+1)$ -го порядка.

Чтобы найти члены  $(m+1)$ -го порядка в средних долготы  $\lambda_i$ , рассмотрим разложение  $\frac{\partial R_0}{\partial L_i}$ . Так как

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0(L_1^0 + \delta L_1, L_2^0 + \delta L_2, \dots) = \\ &= R_0(L_1^0, L_2^0, \dots) + \sum_i \frac{\partial R_0}{\partial L_i^0} \delta L_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik} \delta L_i \delta L_k + \Phi, \end{aligned}$$

где

$$C_{ik} = \frac{\partial^2 R_0}{\partial L_i^0 \partial L_k^0},$$

а через  $\Phi$  обозначена совокупность членов третьего и высших порядков относительно  $\delta L_i$ , то

$$\frac{\partial R_0}{\partial L_i} = \frac{\partial R_0}{\partial (\delta L_i)} = \frac{\partial R_0}{\partial L_i^0} + \sum_k C_{ik} \delta L_k + \frac{\partial \Phi}{\partial L_i}.$$

Поэтому, замечая, что

$$-\frac{\partial R_0}{\partial L_i^0} = n_i, \quad \delta L_k = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt,$$

после интегрирования получим

$$\delta \lambda_i = - \sum_k C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt - \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_i} dt. \quad (23)$$

Нам надо убедиться, что при подстановке выражений (21) в правую часть этого равенства мы найдем эту правую часть с ошибкой порядка  $m+2$  относительно масс.

В отношении первого и последнего членов это очевидно, поскольку  $R$  есть величина первого порядка. Остается рассмотреть второй член.

Заметим прежде всего, что производная  $\frac{\partial \Phi}{\partial L_i}$  есть сумма членов по меньшей мере второго порядка относительно возмущений  $\delta L_k$ , каждое из которых первого порядка относительно масс.

Предположим теперь, что вместо  $\delta L_k$  подставлены их приближенные значения  $\delta' L_k$ , имеющие ошибки порядка  $m+1$ . Тожества вида

$$\begin{aligned} AB - A'B' &= A(B-B') + B'(A-A'), \\ ABC - A'B'C' &= AB(C-C') + AC'(B-B') + B'C'(A-A'), \\ \dots \end{aligned}$$

показывают, что эта замена даст  $\frac{\partial \Phi}{\partial L_i}$  с ошибкой порядка  $m+2$ .

Итак, при замене в правых частях равенств (22) и (23) возмущений их величинами, точными до членов  $m$ -го порядка включительно, мы получим в левых частях все члены  $(m+1)$ -го порядка.

Теперь докажем нашу теорему в отношении  $\delta L_p, \delta \xi_j, \delta \eta_j$ . С этой целью заметим, прежде всего, что при перемножении двух членов, ранги которых положительны, мы получим сумму членов с положительными рангами. Точно так же, при перемножении членов, имеющих неотрицательные ранги, получим члены, ранги которых неотрицательны.

Таким образом, подставляя в правые части уравнений (22) выражения (21), состоящие, согласно сделанному нами предположению, из членов неотрицательных рангов, мы должны получить под знаком интеграла суммы членов неотрицательных рангов; более того, поскольку каждый член  $R$  умножается на  $m_1$ , или  $m_2, \dots$ , ранги всех этих членов будут  $\geq 1$ .

При интегрировании вековых членов ранг понижается, как показывает формула

$$\int_0^t A t^p dt = \frac{A t^{p+1}}{p+1},$$

на единицу. Следовательно, окончательно выражения (22) будут состоять из членов, ранги которых  $\geq 0$ .

Так как указанное понижение ранга происходит только в чисто вековых членах, то выражения (22) не могут содержать смешанных членов нулевого ранга.

Остается показать, что выражение

$$\delta L_i = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} dt$$

не включает членов нулевого ранга.

Подставляя в производную  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$  выражения (21) и разлагая эту производную в ряд, получим:

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_i} = \sum D_0 \mathfrak{N}, \quad (24)$$

где через  $D_0$  обозначены частные производные  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$  по элементам, в которых эти элементы заменены начальными значениями

$$L_p^0, p_i t + \lambda_p^0, \xi_j^0, \eta_j^0,$$

через  $\mathfrak{N}$  обозначено произведение целых неотрицательных степеней  $\delta L_p, \delta \lambda_p, \delta \xi_j, \delta \eta_j$ .

На основании теоремы I (§ 29), каждая частная производная  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$  разлагается в ряд вида

$$\sum A \mathfrak{M} \cos(\sum k_i \lambda_i + H),$$

где, очевидно, мы можем считать  $k_i$  отличным от нуля.

Заменяя элементы их только-что указанными начальными значениями получим:

$$D_0 = \sum A_0 \mathfrak{M}_0 \cos(vt + H'),$$

где

$$v = \sum k_i p_i.$$

Так как  $v$  не может равняться нулю (ибо  $k_i$  не равно нулю), то  $D_0$  будет состоять исключительно из периодических членов. Ранг каждого из этих членов будет  $\geq 1$ , так как  $R$  — величина первого порядка относительно масс.

С другой стороны, рассматривая  $\mathfrak{N}$ , легко видеть, что каждый член нулевого ранга в этом выражении может получиться лишь от перемножения членов нулевого ранга в  $\delta L_p, \delta \lambda_p, \delta \xi_j, \delta \eta_j$ . Но, согласно сделанному нами предположению, эти величины могут иметь лишь вековые члены нулевого ранга. Поэтому всякий член нулевого ранга в  $\mathfrak{N}$  будет обязательно вековой.

Итак, при перемножении  $D_0$  на  $\mathfrak{N}$  мы можем получить лишь члены, ранг которых  $\geq 1$ , причем члены первого ранга будут либо периодические, либо смешанные вековые. И в том и в другом случае интегрирование не понижает ранг, как это показывает хорошо известная формула

$$\int A t^p \cos(vt + H') dt = \frac{A}{v} t^p \sin(vt + H') + p \frac{A}{v^2} t^{p-1} \cos(vt + H') - \dots$$

Теорема, таким образом, полностью доказана для  $\delta L_i$ ,  $\delta \xi_j$ ,  $\delta \eta_j$ . Остается рассмотреть разложение выражения  $\delta \lambda_i$ , даваемого формулой (23). Это выражение состоит из трех членов, которые мы и рассмотрим последовательно.

Что касается до последнего из членов выражения (23), то к нему полностью применимо все, что было только-что сказано относительно равенств (22). Таким образом, этот член не может дать ни членов отрицательного ранга, ни смешанных членов нулевого ранга.

Рассмотрим теперь второй член

$$\int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt.$$

Мы уже видели, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial L_i}$  состоит из членов по меньшей мере второй степени относительно  $\delta L$ . Так как  $\delta L$  равняется сумме членов, ранг которых, как уже было показано,  $\geq 1$ , то ранг каждого члена  $\frac{\partial \Phi}{\partial L_i}$  будет  $\geq 2$ . Интегрирование может уменьшить ранг на единицу, но он все же будет  $\geq 1$ , что соответствует требованиям теоремы.

Остается рассмотреть первый член

$$\sum_k C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt.$$

На основании предыдущего члены нулевого ранга в  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_k}$  отсутствуют вовсе; все члены первого ранга будут либо периодические, либо смешанные. И в том и в другом случае ранг не изменится при двойном интегрировании. Что же касается до остальных членов, то они после интегрирования могут дать либо периодические (или смешанные) члены, имеющие ранг  $\geq 2$ , либо вековые члены с рангом  $\geq 0$ .

Итак, среди членов  $(m+1)$ -го порядка в разложении  $\delta \lambda_i$  мы также не можем встретить члены отрицательного ранга или смешанные члены нулевого ранга.

Теорема полностью доказана.

### § 31. Теорема Пуассона.

Доказанная в предыдущем параграфе теорема Пуанкаре является обобщением знаменитой теоремы Лапласа-Лагранжа об отсутствии вековых возмущений в больших полуосях орбит. Теорема Пуассона, упомянутая в § 17, дает обобщение этой теоремы в другом направлении.

Большая полуось орбиты  $a_i$  связана с элементом  $L_i$  соотношением (§ 25)

$$a_i = k^{-2} M_i^{-1} L_i^2,$$

где  $M_i$  — множитель, зависящий от масс и мало отличающийся от единицы, если за единицу принять массу Солнца.

Поэтому, обозначая через  $\delta_m a_i$ ,  $\delta_m L_i$  возмущения  $m$ -го порядка, а через  $a_i^0$ ,  $L_i^0$  — оскулирующие значения для момента  $t=0$ , получим

$$a_i^0 + \delta_1 a_i + \delta_2 a_i + \dots = k^{-2} M_i^{-1} (L_i^0 + \delta_1 L_i + \delta_2 L_i + \dots)^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta_1 a_i &= 2k^{-2} M_i^{-1} L_i^0 \delta_1 L_i \\ \delta_2 a_i &= k^{-2} M_i^{-1} [(\delta_1 L_i)^2 + 2L_i^0 \delta_2 L_i]. \end{aligned}$$

Так как, согласно предыдущему,  $\delta_1 L_i$  состоит только из периодических членов, то вековые члены в  $\delta_2 a_i$  могли бы быть только в том случае, если бы они были в  $\delta_2 L_i$ . Поэтому теорему Пуассона можно формулировать следующим образом:

**Теорема Пуассона.** Если средние движения планет  $n_i$  таковы, что равенство

$$v = \sum k_i n_i = 0$$

не может иметь место ни при каких целых значениях  $k_i$ , то среди членов  $\delta L_i$  второго порядка относительно масс отсутствуют вековые члены.

Для доказательства обратимся к равенствам (22), которые дают

$$\frac{d}{dt} (\delta L_i) = \frac{\partial R}{\partial \lambda_i}.$$

Полагая в правой части

$$L_k = L_k^0 + \delta_1 L_k, \quad \lambda_k = n_k t + \lambda_k^0 + \delta_1 \lambda_k, \quad \xi_j = \xi_j^0 + \delta_1 \xi_j, \quad \eta_j = \eta_j^0 + \delta_1 \eta_j,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} &= \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} \right)_0 + \sum \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial L_k} \right)_0 \delta_1 L_k + \sum \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \right)_0 \delta_1 \lambda_k + \sum \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \xi_j} \right)_0 \delta_1 \xi_j + \\ &+ \sum \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \eta_j} \right)_0 \delta_1 \eta_j. \end{aligned}$$

Возмущения первого порядка  $\delta_1 L_k$ ,  $\delta_1 \xi_j$ ,  $\delta_1 \eta_j$  равны, на основании (22),

$$\delta_1 L_k = - \int_0^t \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} \right)_0 dt, \quad \delta_1 \xi_j = \int_0^t \left( \frac{\partial R}{\partial \xi_j} \right)_0 dt, \quad \delta_1 \eta_j = - \int_0^t \left( \frac{\partial R}{\partial \eta_j} \right)_0 dt.$$

Что же касается до  $\delta_1 \lambda_k$ , то разобьем его, учитывая (23), на две части:

$$\delta_1 \lambda_k = \delta_1' \lambda_k + \delta_1'' \lambda_k,$$

где

$$\delta_1' \lambda_k = - \int_0^t \left( \frac{\partial R}{\partial L_i} \right)_0 dt, \quad \delta_1'' \lambda_k = - \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} \right)_0 dt.$$

Последний член выражения (23) дает возмущения не ниже второго порядка, а потому в данном случае может быть оставлен без внимания. Таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\delta_2 L_i) &= \sum \left\{ \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial L_k} \right)_0 \delta_1 L_k + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \right)_0 \delta_1' \lambda_k \right\} + \\ &+ \sum \left\{ \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \xi_j} \right)_0 \delta_1 \xi_j + \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \eta_j} \right)_0 \delta_1 \eta_j \right\} + \\ &+ \sum \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \right)_0 \delta_1'' \lambda_k \end{aligned} \quad (25)$$

Как уже было отмечено в предыдущем параграфе, каждая из вторых производных, стоящих в этом выражении, разлагается в ряд вида

$$\Sigma A_0 \mathfrak{M}_0 \cos(\nu t + H),$$

где  $\nu = \Sigma k_i n_i$  не может равняться нулю, так как иначе соответствующий член был бы уничтожен дифференцированием по  $\lambda_i$ .

Вековые члены в  $\delta_2 L_i$  могут получиться лишь при наличии постоянных членов в выражении (25).

Легко видеть, что первая из сумм, стоящих в выражении (25), не может дать постоянного члена. Действительно, каждый член

$$\Psi = A \mathfrak{M} \cos(\Sigma k_i \lambda_i + H)$$

ряда (12), в который разлагается  $R$ , дает такую часть этой суммы:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda_i \partial L_h} \right)_0 \int_0^t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_h} \right) dt - \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda_i \partial L_h} \right)_0 \int_0^t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial L_h} \right) dt = \\ & = k_i \frac{\partial A_0}{\partial L_h} \mathfrak{M}_0 \sin(\Sigma k_i \lambda_i + H) \frac{k_h A_0 \mathfrak{M}_0}{\nu} [\cos(\Sigma k_i \lambda_i + H) - \\ & - \cos(\Sigma k_i \lambda_i^0 + H)] - k_i k_h A_0 \mathfrak{M}_0 \cos(\Sigma k_i \lambda_i + H) \frac{1}{\nu} \frac{\partial A_0}{\partial L_h} \mathfrak{M}_0 [\sin(\Sigma k_i \lambda_i + H) - \\ & - \sin(\Sigma k_i \lambda_i^0 + H)]. \end{aligned}$$

Но это выражение равно сумме периодических членов, ни один из которых не равен постоянному числу.

Совершенно так же убеждаемся, что ни один член разложения  $R$  не может дать постоянного члена во второй сумме выражения (25).

Что касается третьей суммы выражения (25), то она может дать только периодические и смешанные члены, так как

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_h} \right)_0 \int_0^t dt \int_0^t \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_h} \right) dt = \\ & = A_0^2 \mathfrak{M}_0^2 \frac{k_i k_h^2}{\nu^2} \cos(\Sigma k_i \lambda_i + H) \{ -\sin(\Sigma k_i \lambda_i + H) + \sin(\Sigma k_i \lambda_i^0 + H) + \\ & + \nu t \cos(\Sigma k_i \lambda_i^0 + H) \} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \cos(\Sigma k \lambda + H) \sin(\Sigma k \lambda + H) &= \frac{1}{2} \sin 2(\Sigma k \lambda + H) \\ \cos(\Sigma k \lambda + H) \cos(\Sigma k \lambda^0 + H) &= \frac{1}{2} \cos(\Sigma k \lambda - \Sigma k \lambda^0) + \\ & + \frac{1}{2} \cos(\Sigma k \lambda + \Sigma k \lambda^0) + 2H. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема Пуассона полностью доказана. Заметим, что третья сумма выражения (25) дает в  $\delta_2 L_i$  смешанные члены первого ранга.

Пуанкаре обобщил теорему Пуассона, доказав, что  $\delta L$  не может заключать вековых членов не только нулевого (§ 29), но и первого ранга.<sup>1</sup>

### § 32. Теорема Пуанкаре о классе.

В § 30 мы начали изучение выражений возмущений  $\delta L_p$ ,  $\delta \lambda_p$ ,  $\delta \xi_j$ ,  $\delta \eta_j$ , получаемых в результате применения метода последовательных приближений к уравнениям (17). Каждая из этих величин получается в виде ряда членов следующей формы:

$$\frac{A_0 \mathfrak{M}_0}{\nu_1^{\alpha_1} \nu_2^{\alpha_2} \dots} t^p \cos(\Sigma k_i \lambda_i + H),$$

где

$$\nu_\alpha = \Sigma k_i^2 n_i \quad (\alpha = 1, 2, \dots)$$

множители, введенные интегрированием.

Если коэффициент  $A_0$  порядка  $m$  относительно возмущающих масс, то (§ 15)

$$m - \frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q_\alpha$$

называется *классом* рассматриваемого члена относительно соответствующего делителя  $\nu_\alpha$ .

**Теорема.** Если средние движения  $n_i$  таковы, что для любых целых чисел  $k_i$

$$\Sigma k_i n_i \neq 0,$$

то класс каждого члена в разложениях  $\delta L_p$ ,  $\delta \xi_j$ ,  $\delta \eta_j$  относительно любого делителя не менее  $\frac{1}{2}$ ; в разложении  $\delta \lambda_i$  класс каждого члена  $\geq 0$ .

Для доказательства этой теоремы заметим, прежде всего, что она очевидно имеет место для возмущений первого порядка, так как в этом случае  $m=1$ ,  $p+q \leq 1$  для разложений  $\delta_1 L_p$ ,  $\delta_1 \xi_j$ ,  $\delta_1 \eta_j$ , и  $m=1$ ,  $p=0$ ,  $q \leq 2$  для разложения  $\delta_1 \lambda_i$ .

Допустим поэтому, что теорема справедлива для всех возмущений до  $m$ -го порядка включительно, и покажем, что она будет тогда справедлива и для возмущений  $(m+1)$ -го порядка.

С этой целью обратимся к формулам (22) и (23), позволяющим найти возмущения  $(m+1)$ -го порядка, если известны возмущения  $m$ -го порядка.

Прежде всего имеем

$$\delta L_i = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} dt, \quad \delta \xi_j = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \eta_j} dt, \quad \delta \eta_j = - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \xi_j} dt. \quad (26)$$

Каждую из стоящих здесь производных функции  $R$  мы можем разложить в ряд вида (24)

$$\Sigma D_0 \mathfrak{M}, \quad (27)$$

<sup>1</sup> Н. Poincaré, Leçons de Mécanique Céleste, t. I, Paris 1905, 294—310.

где через  $D_0$  обозначены вторые, третьи, . . . производные, в которых элементы заменены своими начальными значениями

$$L_p^0, \quad p_t + \lambda_p^0, \quad \xi_p^0, \quad \eta_j^0.$$

Как уже было отмечено (§ 30),  $D_0$  разлагается в ряд, состоящий исключительно из периодических членов, для которых очевидно  $m=1$ ,  $p=0$ ,  $q=0$ , так как эти члены получены без интегрирования.

Иначе говоря, класс каждого члена разложения  $D_0$  равен единице.

С другой стороны,  $\mathcal{N}$  есть произведение целых положительных степеней  $\delta L_p, \delta \lambda_p, \delta \xi_p, \delta \eta_j$ , вычисленных до членов  $m$ -го порядка включительно относительно масс.

Так как произведение двух членов может дать только члены, классы которых равны сумме классов умножаемых членов, то, в силу сделанного допущения, разложение каждой из производных

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi_i}$$

может заключать только члены, классы которых  $\geq 1$ .

При интегрировании степень члена относительно масс не меняется, но один из показателей  $p$  или  $q$  может увеличиться на единицу. Таким образом, класс членов выражений (26) будет  $\geq \frac{1}{2}$ , т. е. теорема будет иметь место и для членов порядка  $m+1$ .

Посмотрим теперь, каков будет класс членов порядка  $m+1$  в разложении

$$\delta \lambda_i = - \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_i} dt - \int_0^t \frac{\partial \Phi}{\partial L_i} dt. \quad (28)$$

В двух первых членах подынтегральная функция разлагается в ряд только что рассмотренного вида. Принимая во внимание, что двойное интегрирование может увеличить сумму  $p+q$  на две единицы, убеждаемся, что эти два члена могут дать лишь члены, класс которых  $\geq 0$ .

Что касается до последнего интеграла в выражении (27), то напомним, прежде всего, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial L_i}$  состоит из членов по крайней мере второго порядка относительно  $\delta L_i$ . Но произведение двух и более величин  $\delta L_i$  состоит из членов, имеющих класс  $\geq 1$ , так как согласно нашему предположению в  $\delta L_i$ , вычисленных до членов  $m$ -го порядка включительно, класс каждого члена  $\geq \frac{1}{2}$ .

Интегрирование может увеличить сумму  $p+q$  на единицу, но все же члены разложения последнего интеграла будут иметь класс  $\geq \frac{1}{2}$ .

Теорема доказана. Заметим, что члены наименьшего класса в  $\delta \lambda_i$  дает двукратный интеграл.

### § 33. Возмущения наименьшего класса.

Посмотрим теперь, какую форму имеют члены наименьшего класса относительно некоторого определенного делителя

$$\nu_0 = \sum k_i n_i.$$

Покажем, что все члены класса  $\frac{1}{2}$  в разложениях  $\delta L, \delta \xi, \delta \eta$ , так же как члены нулевого класса в разложении  $\delta \lambda$ , имеют форму:

$$A t^p \cos(\beta \nu_0 t + H), \quad (29)$$

где  $\beta$  — целое число.

Допустим, что это имеет место для возмущений, вычисленных до членов  $m$ -го порядка включительно, и убедимся, что та же форма сохранится и для членов наименьшего класса  $(m+1)$ -го порядка.

Обратимся сначала к формулам (26) и посмотрим, при каких обстоятельствах в правых частях могут получиться члены класса  $\frac{1}{2}$ .

Для этого прежде всего необходимо, чтобы рассматриваемый член

$$A' t^p \cos(\nu t + H')$$

в соответствующей производной  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}, \frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \frac{\partial R}{\partial \xi_i}$  имел класс, равный единице.

Действительно, каждая из производных разлагается в ряд вида (27), причем множитель  $D_0$  состоит, как мы видели, из членов, класс которых равен единице. Таким образом, класс члена (30) не может быть меньше единицы.

Далее, необходимо, чтобы интегрирование члена (30) понизило его класс на  $\frac{1}{2}$ . Но это может иметь место только в двух случаях: 1) если  $\nu=0$ , то интегрирование увеличит на единицу показатель  $p$ ; 2) если  $\nu = \beta \nu_0$ , где  $\beta$  — целое число, то после интегрирования показатель  $q$  делителя  $\nu_0$  увеличится на единицу.

Итак, все члены класса  $\frac{1}{2}$  в возмущениях  $\delta L_p, \delta \xi_p, \delta \eta_j$  необходимо имеют форму (29).

Покажем теперь, что для получения всех членов класса  $\frac{1}{2}$  в  $\delta L_i, \delta \xi_p, \delta \eta_j$  достаточно в функции  $R$  рассматривать лишь члены, аргументы которых кратны

$$\theta = \sum k_i \lambda_i.$$

Для этого обратимся еще раз к разложению (27). Через  $D_0$  обозначены частные производные функции  $R$ , в которых  $L_p, \lambda_p, \xi_p, \eta_j$  заменены начальными значениями  $L_p^0, \lambda_p^0 + p_t, \xi_p^0, \eta_j^0$ , поэтому  $D_0$  состоит из членов вида

$$B_0 \cos(\nu t + H_0), \quad (31)$$

где

$$\nu = \sum k_i n_i,$$

где  $H_0$  — постоянные числа, а  $B_0$  зависят от  $L_p^0, \xi_p^0, \eta_j^0$ .

Такой член получается, путем дифференцирования и указанной подстановки начальных значений, из члена

$$B \cos(\sum k_i \lambda_i + H) \quad (32)$$

в разложении функции  $R$ .

Множитель  $\mathfrak{N}$  в разложении (27) представляет собою произведение целых неотрицательных степеней  $\delta L_p, \delta \lambda_p, \delta \xi_j, \delta \eta_j$ , вычисленных до членов  $m$ -го порядка включительно относительно масс. Следовательно, согласно сделанному допущению, члены  $\mathfrak{N}$ , имеющие наименьший класс (нулевой), будут вида (29), так как они получаются от перемножения членов наименьшего класса в разложениях  $\delta L_p, \delta \lambda_p, \dots$

Итак, члены наименьшего класса (первого) в производных  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial \xi_j}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial \eta_j}$  получаются от перемножения выражений (29) и (31), а потому их аргументы имеют вид

$$(\beta v_0 \pm v) t + \text{const.}$$

Но мы уже видели, что для получения, после интегрирования, члена класса  $1/2$  каждый такой аргумент должен иметь форму

$$\gamma v_0 t + \text{const.}$$

Следовательно,

$$v = \pm (\gamma - \beta) v_0$$

или

$$v = \sigma v_0,$$

где  $\sigma$  — целое число.

Таким образом

$$k_i = \sigma k_i^0,$$

и потому члены (32) функции  $R$ , дающие возмущения наименьшего класса, будут иметь аргументы вида

$$\Sigma k_i \lambda_i + H = \sigma \theta + H,$$

т. е. кратные  $\theta$ , что и требовалось доказать.

Теперь нам остается рассмотреть структуру членов наименьшего класса в разложении  $\delta \lambda_p$ , а также простейший путь для получения этих членов.

Обратимся к формуле (28). В предыдущем параграфе мы видели, что члены наименьшего класса (нулевого) в  $\delta \lambda_i$  может дать только первый член формулы (28), так что при нахождении этих членов мы можем взять

$$\delta \lambda_i = - \sum C_{ik} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_k} dt,$$

или, на основании (26):

$$\delta \lambda_i = - \sum C_{ik} \int_0^t \delta L_k dt. \quad (33)$$

Для производной  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_k}$  мы снова можем взять разложение (27). То же самое рассуждение, как и выше, показывает, что наименьший возможный класс членов этой производной равен единице. Поэтому для получения членов нулевого класса в  $\delta \lambda_i$  нужно, чтобы двукратное интегрирование повысило сумму  $p+q$  на две единицы. Но это возможно только в том случае, когда аргумент члена имеет форму  $\beta v_0 t + H$ .

В заключение составим дифференциальные уравнения, определяющие члены наименьшего класса в  $\delta L$ ,  $\delta \xi$ ,  $\delta \eta$  и  $\delta \lambda$ . Начнем с  $\delta \lambda$ .

Для вычисления членов нулевого класса в  $\delta \lambda_i$  обратимся к формуле (33), из которой следует

$$\frac{d\delta \lambda_i}{dt} = - \sum C_{ik} \delta L_k = - \sum C_{ik} (L_k - L_k^0),$$

или, замечая, что  $\lambda_i = n_i t + \lambda_i^0 + \delta \lambda_i$ ,

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = n_i - \sum C_{ik} (L_k - L_k^0).$$

Положив (ср. § 30)

$$\Phi_0 = C_0 - \sum n_i (L_i - L_i^0) + \frac{1}{2} \sum \sum C_{ik} (L_i - L_i^0) (L_k - L_k^0), \quad (34)$$

где  $C_0$  — некоторое постоянное число, будем иметь

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i}. \quad (35)$$

Это уравнение даст одни только члены нулевого класса, если в функции  $\Phi_0$  под разностями  $L - L^0$  разумеать лишь совокупность членов класса  $1/2$ .

Мы уже видели, что для получения членов класса  $1/2$  в  $\delta L$ ,  $\delta \xi$ ,  $\delta \eta$  достаточно в функции  $R$  сохранить лишь члены с аргументами вида  $\sigma \theta$ . Поэтому, обозначая совокупность указанных членов через  $\Psi$ , из равенств (26) получим для определения членов класса  $1/2$  такие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{d\delta L_i}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \\ \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{d\delta \xi_j}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j} \\ \frac{d\eta_j}{dt} &= \frac{d\delta \eta_j}{dt} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} \end{aligned}$$

Правые части этих уравнений могут быть еще более упрощены. В самом деле, для получения членов класса  $1/2$  нужно, как мы видели выше, в разложениях (27) производных  $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}, \dots$  брать в  $\mathfrak{N}$  только члены нулевого класса. Но члены нулевого класса в  $\mathfrak{N}$  можно получить, лишь взяв вместо  $\delta \lambda_i$  члены нулевого класса и положив

$$\delta L_i = 0, \quad \delta \xi_j = 0, \quad \delta \eta_j = 0,$$

т. е.

$$L_i = L_i^0, \quad \xi_j = \xi_j^0, \quad \eta_j = \eta_j^0.$$

Так как в  $D_0$  уже сделана такая подстановка, то, обозначая через

$$\Psi_0, \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j} \right)_0$$

результат этой подстановки соответственно в

$$\Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j},$$

получим

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j} \right)_0, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} \right)_0.$$

Замечая, наконец, что

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial L_i} = 0,$$

окончательно будем иметь следующую теорему.

**Теорема.** Для получения возмущений, имеющих наименьший класс, нужно проинтегрировать уравнения:

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial(\Phi_0 + \Psi_0)}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{dt} = - \frac{\partial(\Phi_0 + \Psi_0)}{\partial L_i} \quad (36)$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j} \right)_0, \quad \frac{d\eta_j}{dt} = - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} \right)_0. \quad (37)$$

### § 34. Метод Делоне-Хилла для вычисления долгопериодических возмущений.

Предположим, что средние движения  $n_i$  в рассматриваемой системе материальных точек таковы, что величина

$$\nu_0 = \sum k_i^0 n_i$$

мала. В таком случае возмущения наименьшего класса относительно делителя  $\nu_0$  будут представлять особый интерес, так как амплитуды этих возмущений будут сравнительно велики. Теорема предыдущего параграфа позволяет определить эти возмущения независимо от прочих.

Положим опять

$$\theta = \sum k_i^0 \lambda_i.$$

Так как через  $\Psi$  мы обозначили совокупность членов разложения  $R$ , аргументы которых кратны  $\theta$ , то  $\Psi$  зависит только от  $\theta$ ,  $L_i$ ,  $\xi_j$ ,  $\eta_j$ . Следовательно,

$$\Psi_0, \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_j} \right)_0$$

являются функциями только  $\theta$ . Это обстоятельство позволяет получить решение системы (36), (37), определяющей члены наименьшего класса при помощи квадратур.

Первое из уравнений (36) дает

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta} k_i^0,$$

откуда, вводя вспомогательное переменное  $U$ , определяемое равенством

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta},$$

получим

$$\frac{dL_i}{dt} - k_i^0 \frac{dU}{dt} = 0.$$

Пусть  $U=0$  для  $t=0$ ; тогда интегрирование этого равенства от  $t=0$  до  $t=t$  даст

$$L_i = k_i^0 U + L_i^0. \quad (38)$$

Подставив эти значения  $L_i$  в формулу (34), получим:

$$\Phi_0 = C' - 2BU - AU^2,$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные коэффициенты.

С другой стороны, уравнения (36) имеют очевидный интеграл

$$\Phi_0 + \Psi_0 = \text{const},$$

дающий зависимость между  $U$  и  $\theta$  в конечной форме. Этот интеграл может быть представлен следующим образом:

$$C + \Psi_0 = 2BU + AU^2.$$

Откуда, выражая  $U$  через  $\theta$ ,

$$AU + B = \sqrt{B^2 + AC + A\Psi_0}. \quad (39)$$

Так как

$$\frac{d\theta}{dt} = \sum k_i^0 \frac{d\lambda_i}{dt} = - \sum k_i^0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i} = - \sum \frac{dL_i}{dU} \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i} = - \frac{\partial \Phi_0}{\partial U},$$

или

$$\frac{d\theta}{dt} = 2B + 2AU = 2\sqrt{A\Psi_0 + B^2 + AC},$$

то получаем следующую зависимость между  $\theta$  и  $t$ :

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{2\sqrt{A\Psi_0 + B^2 + AC}}. \quad (40)$$

После этого обратимся ко второму из уравнений (36), которое дает

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{dt} &= - \frac{\partial \Phi_0}{\partial L_i} = n_i - \sum C_{ik} (L_k - L_k^0) = \\ &= n_i - U \sum k_k^0 C_{ik}. \end{aligned} \quad (41)$$

Заменяя здесь  $U$  его значением на основании равенства (39) и интегрируя, получим  $\lambda_i$  в виде функции  $\theta$ .

Точно так же, интегрирование уравнений (37) дает  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  в виде функции  $\theta$ .

Соотношение (40) позволяет выразить  $\lambda_i$ ,  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  через время  $t$ , что и дает полное решение стоявшей перед нами задачи.

Таким образом, для получения возмущений наименьшего класса относительно аргумента  $\theta$ , нужно в пертурбационной функции  $R$  отобрать все члены, аргументы которых кратны  $\theta$ , и в полученной этим путем функции  $\Psi$  заменить  $L_i$ ,  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  начальными значениями  $L_i^0$ ,  $\xi_j^0$ ,  $\eta_j^0$ , что даст функцию  $\Psi_0$ .

Соотношения (38) и (39) дают возможность выразить  $L_i$  через аргумент  $\theta$ ; точно так же интегрирование равенств (41) и (37) дает  $\lambda_i$ ,  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  в функции  $\theta$ .

Наконец, соотношение (40) устанавливает зависимость между  $\theta$  и  $t$ . Делоне первый обратил внимание на возможность последовательного получения всех периодических возмущений при помощи интегрирования уравнений движения, в которых вместо пертурбационной функции берутся ее отдельные члены. Этот метод был им использован для построения наиболее полной алгебраической теории движения Луны.<sup>1</sup>

Тиссеран значительно упростил метод Делоне, связав его с общей теорией канонических преобразований.<sup>2</sup> С другой стороны, Хилл существенно обобщил этот метод, показав, каким образом могут быть учитываемы все члены пертурбационной функции с аргументами, кратными некоторого избранного аргумента.<sup>3</sup> Получившийся таким образом метод известен под именем метода Делоне-Хилла.

Наконец работы Пуанкаре<sup>4</sup> содействовали выяснению математической сущности этого метода.

<sup>1</sup> C. Delaunay, Théorie du mouvement de la Lune, Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 28 (1860), 29 (1867).

<sup>2</sup> F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, 3, Ch. XI, 1894.

<sup>3</sup> G. W. Hill, On the Extension of Delaunay's Method in the Lunar Theory to the General Problem of Planetary Motion, Transactions of the American Mathem. Soc., 1, 1900, 205—242 = The Collected Mathem. Works, 4, 1907.

<sup>4</sup> H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 2, Ch. XIX, Paris 1893. H. Poincaré, Leçons de Mécanique Céleste, 1, Ch. XIII, Paris 1907.

## ГЛАВА VI.

### НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРОБЛЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ.

#### § 35. Введение.

В 1772 г. Лагранж представил в Парижскую академию на соискание премии свой знаменитый мемуар *Essai sur le problème des trois corps* (*Oeuvres*, 6, 229—324), заключающий, как говорит в предисловии сам Лагранж, метод для решения проблемы трех тел, отличный от всех ранее предложенных. Этот метод состоит в следующем.

Лагранж показывает, что определение относительных координат трех тел (требующее интегрирования системы 12-го порядка) приводится к определению сторон треугольника, образованного тремя телами, что требует интегрирования системы 7-го порядка, состоящей из двух уравнений 2-го порядка и одного уравнения 3-го порядка. Так как эти уравнения уже содержат две произвольные постоянные, введенные интегралом живых сил и интегралом площадей, то, в конечном счете, взаимные расстояния трех тел зависят от 9 произвольных постоянных. Когда взаимные расстояния известны, то нахождение относительных координат, вводящее еще 3 произвольные постоянные, не представляет затруднений.

Исключая из упомянутой системы 7-го порядка время, окончательно сведем решение задачи к интегрированию системы 6-го порядка. По существу, приведение, выполненное Лагранжем, тождественно с тем, которое было указано в § 2. Но та специальная форма, в которой Лагранж получил уравнения, позволила ему поставить и решить следующую задачу: определить все те движения в проблеме трех тел, когда взаимные расстояния между телами сохраняют постоянные отношения.

Такие движения будем для краткости называть лагранжевыми. Мы скоро увидим, что лагранжево движение необходимо является плоским.

Если при изучении лагранжевых движений следовать пути, указанному самим Лагранжем, то нужно предварительно вывести дифференциальные уравнения, определяющие взаимные расстояния трех тел. Однако уже сам Лагранж отметил (*loc. cit.*, стр. 292), что рассматриваемые частные случаи могут быть получены много проще, если сделать заранее предположение, что три тела движутся в неподвижной плоскости. Действительно, ограничив проблему таким дополнительным условием, Лаплас дал очень простой вывод уравнений, определяющих лагранжевы движения.<sup>1</sup>

Лагранж полагал, что решение задачи во всей общности, т. е. без ограничения ее рассмотрением одних только плоских движений, неиз-

<sup>1</sup> Laplace, Mécanique céleste, Seconde partie, Livre X, Ch. VI. (*Oeuvres*, 4). Метод Лапласа излагает Charlier, Die Mechanik des Himmels, 2, 89—102, 1907.

Простой геометрический способ получения результатов Лапласа дал С. Д. Черный в статье Geometrische Lösung zweier spezieller Fälle des Problems der drei Körper, Astr. Nachr., 171, 1906, 129—136.

бежно сопряжено с большими трудностями. Что это не так, было показано Андуайе и Каратеодори,<sup>1</sup> давшими простой способ для получения общего решения задачи, поставленной Лагранжем. Этот способ, излагаемый нами в следующих параграфах, интересен еще и потому, что он без всяких затруднений обобщается на случай проблемы  $n$  тел.

Этим именно путем легко может быть показано, что и для  $n$  тел лагранжевы движения могут иметь место только в неподвижной плоскости, если не считать некоторых почти очевидных случаев, когда движение происходит по прямым, проходящим через общий центр инерции.

### § 36. Уравнения, определяющие лагранжевы движения. Случай неколлинеарного движения.

Составим уравнения относительного движения трех тел, исходя из предположения, что отношения взаимных расстояний этих тел остаются постоянными.

Обозначим через  $m_1, m_2, m_3$  массы точек  $P_1, P_2, P_3$ , а через  $x_i, y_i, z_i$  координаты точки  $P_i$ . Начало координат поместим в центр инерции  $O$  системы, а за плоскость  $xu$  примем плоскость треугольника  $P_1P_2P_3$ .

Так как расстояния от центра инерции до вершин  $P_1, P_2, P_3$  пропорциональны размерам треугольника, то для случая лагранжева движения мы можем положить, пользуясь, если нужно, вращающейся системой координат,

$$x_i = a_i \rho, \quad y_i = b_i \rho, \quad z_i = 0 \quad (1)$$

$(i = 1, 2, 3),$

где  $\rho = \rho(t)$  — подлежащая определению функция времени, а  $a_i$  и  $b_i$  — постоянные числа.

Обозначим через  $p, q, r$  компоненты вращения нашей подвижной координатной системы соответственно по осям  $x, y, z$ . Компоненты скорости точки, имеющей координаты  $x, y, z$ , как известно, равны

$$\dot{x} - yr + zq, \quad \dot{y} - zp + xr, \quad \dot{z} - xq + yp.$$

Сообразно с этим, компоненты ускорения могут быть представлены так:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} - yr + zq) - r(\dot{y} - zp + xr) + q(\dot{z} - xq + yp)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{y} - zp + xr) - p(\dot{z} - xq + yp) + r(\dot{x} - yr + zq)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{z} - xq + yp) - q(\dot{x} - yr + zq) + p(\dot{y} - zp + xr).$$

Подставляя в эти выражения значения координат (1) рассматриваемых точек и замечая, что компоненты ускорения точки  $P_i$ , вызываемого притяжением двух других точек, равны

$$A_i \rho^{-2}, \quad B_i \rho^{-2}, \quad 0,$$

<sup>1</sup> H. Andoyer. Sur l'équilibre relatif de  $n$  corps, Bulletin astr., 23, 50—59, 1906.  
C. Carathéodory, Über die strenge Lösungen des Dreikörperproblems, Sitzungsberichte der math. naturwiss. Abteilung der Bayerischen Akademie der Wiss. zu München, 1933, 257—267.

где  $A_i, B_i$  — некоторые постоянные множители (зависящие от  $a_1, a_2, \dots, b_3, m_1, m_2, m_3$  и коэффициента притяжения), получим следующие уравнения движения точки:

$$a_i [\rho - (q^2 + r^2) \rho] - b_i [2r\dot{\rho} + (\dot{r} - pq) \rho] = A_i \rho^{-2} \quad (2)$$

$$a_i [2r\dot{\rho} + (\dot{r} + pq) \rho] - b_i [\dot{\rho} - (p^2 + r^2) \rho] = B_i \rho^{-2} \quad (3)$$

$$-a_i [2q\dot{\rho} + (\dot{q} - pr) \rho] + b_i [2p\dot{\rho} + (\dot{p} + qr) \rho] = 0. \quad (4)$$

Случай коллинеарного движения, когда точки  $P_1, P_2, P_3$  все время остаются на одной прямой, иначе говоря, когда

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

мы сейчас исключим из рассмотрения. Поэтому уравнения (2), (3) и (4) дают возможность написать следующие равенства:

$$\ddot{\rho} - (q^2 + r^2) \rho = A' \rho^{-2}; \quad 2r\dot{\rho} + (\dot{r} - pq) \rho = B' \rho^{-2} \quad (2')$$

$$\ddot{\rho} - (p^2 + r^2) \rho = A'' \rho^{-2}; \quad 2r\dot{\rho} + (\dot{r} + pq) \rho = B'' \rho^{-2} \quad (3')$$

$$2q\dot{\rho} + (\dot{q} - pr) \rho = 0; \quad 2p\dot{\rho} + (\dot{p} + qr) \rho = 0, \quad (4')$$

где  $A', A'', B', B''$  — новые постоянные, выражающиеся через  $A_i, B_i$  и  $a_i, b_i$ .

Почленное вычитание равенств (2') и (3') дает

$$\rho^2 - q^2 = A \rho^{-3}, \quad pq = B \rho^{-3},$$

откуда

$$p = \alpha \rho^{-\frac{3}{2}}, \quad q = \beta \rho^{-\frac{3}{2}}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные множители.

Подставив эти выражения в (4'), получим:

$$\beta \dot{\rho} - 2\alpha r \rho = 0, \quad \alpha \dot{\rho} + 2\beta r \rho = 0, \quad (6)$$

откуда

$$(\alpha^2 + \beta^2) \dot{\rho} = 0. \quad (7)$$

Теперь легко доказать, что движение происходит в неподвижной плоскости. Для этого покажем, что при надлежащем выборе осей  $Ox$  и  $Oy$  будем иметь  $p = q = 0$ .

Если  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , то  $\alpha = \beta = 0$ , а потому соотношения (5) дают

$$p = q = 0,$$

что и доказывает неподвижность плоскости  $P_1 P_2 P_3$ .

Посмотрим теперь, может ли сумма  $\alpha^2 + \beta^2$  быть неравной нулю. Если это имеет место, то из равенства (7) заключаем, что  $\dot{\rho} = 0$ , а так как  $\rho \neq 0$ , то соотношения (6) дают  $r = 0$ . С другой стороны, раз  $\rho = 0$  и  $r = 0$ , то из равенств (4') следует

$$p = \text{const}, \quad q = \text{const}.$$

Сложим векторы  $p$  и  $q$ , направленные по осям  $x$  и  $y$ , и направление полученного вектора примем за ось  $x$ . В таком случае, в новой координатной системе мы будем иметь  $q = 0$ , а потому уравнения (2) дадут

$A_i = 0$ . Иначе говоря, проекции всех сил на ось  $Ox$  будут равны нулю, т. е. силы будут параллельны оси  $Oy$ .

Но это невозможно, так как мы условились рассматривать только тот случай, когда три тела не находятся на одной прямой.

Неподвижную плоскость, в которой мы только-что доказали, происходит движение, примем за координатную плоскость  $Oxy$  неподвижной системы координат, а перпендикулярную к ней ось  $Oz$  проведем через центр инерции системы.

Движение точек  $P_i$  в рассматриваемом случае состоит из вращения треугольника  $P_1P_2P_3$  как целого вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\gamma$  и из движения каждой точки  $P_i$  вдоль луча  $OP_i$ . Поэтому секториальная скорость точки  $P_i$  будет отличаться лишь постоянным множителем от  $\gamma r^2$ , так что интеграл площадей для оси  $Oz$  дает

$$\gamma r^2 = \text{const},$$

откуда

$$2\gamma r + \dot{r} = 0.$$

Таким образом, уравнения (2) и (3) обращаются в

$$a_i [\ddot{\rho} - \gamma^2 \rho] = A_i \rho^{-2}, \quad b_i [\ddot{\rho} - \gamma^2 \rho] = B_i \rho^{-2},$$

что дает

$$\frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \frac{A_3}{a_3} = \frac{B_1}{b_1} = \frac{B_2}{b_2} = \frac{B_3}{b_3}. \quad (8)$$

Но эти равенства показывают, что *равнодействующая всех сил, действующих на каждую из точек  $P_i$ , проходит через центр инерции системы.*

Теперь уже нетрудно определить форму треугольника  $P_1P_2P_3$  (рис. 1).

Обозначая, как и раньше, стороны этого треугольника через

$$P_1P_2 = \Delta_{12}, \quad P_1P_3 = \Delta_{13}, \\ P_2P_3 = \Delta_{23},$$

мы получим следующие выражения для тех ускорений, которые точки  $P_2$  и  $P_3$  сообщают точке  $P_1$ :

$$\vec{P}_1A = k^2 m_2 \Delta_{12}^{-2},$$

$$\vec{P}_1B = k^2 m_3 \Delta_{13}^{-2}.$$

Определим угол  $\alpha$ , образуемый геометрической суммой этих ускорений  $P_1R$  с прямой  $P_1P_2$ . Для этого ускорение  $P_1B$  разложим по осям  $P_1\xi$  и  $P_1\eta$  на составляющие

$$\vec{P}_1K = \vec{P}_1B \cos \varphi_1, \quad \vec{P}_1L = \vec{P}_1B \sin \varphi_1,$$

где через  $\varphi_1$  обозначен угол  $P_2P_1P_3$ .

Итак

$$\text{tg } \alpha = \frac{RM}{P_1M} = \frac{P_1L}{P_1K + P_1A} = \frac{m_3 \Delta_{13}^{-2} \sin \varphi_1}{m_2 \Delta_{12}^{-2} + m_3 \Delta_{13}^{-2} \cos \varphi_1}.$$

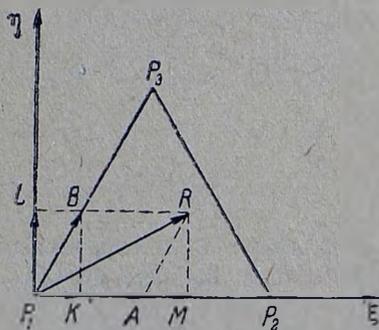


Рис. 1.

С другой стороны, обозначая через  $\xi_0, \eta_0$  координаты точки  $O$ , центра инерции системы, получим

$$\xi_0 = \frac{m_2 \Delta_{12} + m_3 \Delta_{13} \cos \varphi_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \eta_0 = \frac{m_3 \Delta_{13} \sin \varphi_1}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Так как прямая  $P_1R$  проходит, в силу равенств (8), через точку  $O$  то имеем, очевидно, такое равенство:

$$\frac{m_3 \Delta_{13}^{-2} \sin \varphi_1}{m_2 \Delta_{12}^{-2} + m_3 \Delta_{13}^{-2} \cos \varphi_1} = \frac{m_3 \Delta_{13} \sin \varphi_1}{m_2 \Delta_{12} + m_3 \Delta_{13} \cos \varphi_1},$$

из которого легко получить, принимая во внимание, что  $m_2 \neq 0, m_3 \neq 0, \sin \varphi_1 \neq 0$ ,

$$\Delta_{12}^3 = \Delta_{13}^3$$

или

$$\Delta_{12} = \Delta_{13}.$$

Если  $m_1 \neq 0$ , то таким же образом докажем равенство двух других сторон треугольника и окончательно будем иметь

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23}.$$

Случай, когда две из масс  $m_1, m_2, m_3$  бесконечно малы, мы не рассматриваем как тривиальный.

Остается поэтому рассмотреть только тот случай, когда одна из масс, пусть  $m_1$ , бесконечно мала. В этом случае только-что указанное рассуждение не может быть применено к вершинам  $P_2$  и  $P_3$ : мы можем только утверждать, что стороны  $\Delta_{12}$  и  $\Delta_{13}$  будут равны.

Нетрудно, однако, убедиться, что и в этом случае треугольник  $P_1P_2P_3$  будет равносторонний.

Итак, пусть  $m_1 = 0$ . Расположим оси координат как указано на рис. 2, учитывая, что центр инерции  $O$  находится в этом случае на прямой  $P_2P_3$ .

Координаты точек  $P_1, P_2$  и  $P_3$  будут соответственно равны

$$(a_1 \rho, b_1 \rho), \quad (a_2 \rho, 0) \quad \text{и} \quad (a_3 \rho, 0).$$

Так как начало координат находится в центре инерции, то

$$-a_2 = \frac{m_3}{m_2} a_3.$$

С другой стороны, вследствие равенства расстояний  $P_1P_2$  и  $P_1P_3$ ,

$$2a_1 = a_2 + a_3.$$

Поэтому, обозначая через  $\varphi$  каждый из углов при основании треугольника, легко найдем, что

$$b_1 = (a_1 - a_2) \text{tg } \varphi = -a_2 \frac{m_2 + m_3}{2m_3} \text{tg } \varphi.$$

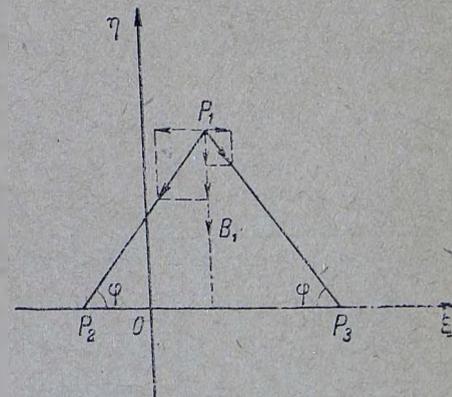


Рис. 2.

Обратимся теперь к равенствам (8), которые между прочим дают

$$\frac{A_2}{a_2} = \frac{B_1}{b_1}.$$

Но в настоящем случае, как легко усмотреть из рис. 2:

$$A_2 = +k^2 m_3 \Delta_{23}^{-2}, \quad B_1 = -k^2 (m_2 + m_3) \Delta_{12}^{-2} \sin \varphi,$$

следовательно

$$\frac{1}{2} \Delta_{12}^{-2} \cos \varphi = \Delta_{23}^{-2}.$$

Так как

$$\Delta_{23} = 2\Delta_{12} \cos \varphi,$$

то окончательно получим

$$\cos^3 \varphi = \frac{1}{8}, \quad \varphi = 60^\circ.$$

Итак, если три материальные точки движутся под влиянием взаимного притяжения таким образом, что расстояния между ними сохраняют постоянные отношения, причем эти точки не лежат на одной прямой, то они всегда образуют равносторонний треугольник. Плоскость этого треугольника сохраняет неизменное положение в пространстве.

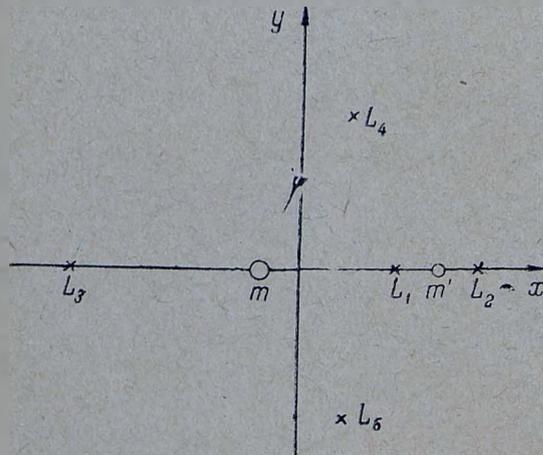


Рис. 3.

Предположим, что начальное положение двух точек, например  $P_1$  и  $P_2$ , фиксировано, так же как и плоскость, в которой должно происходить движение. В таком случае для возможности движения указанного типа третью материальную точку необходимо поместить в третью вершину одного из двух равносторонних треугольников, построенных на стороне  $P_1 P_2$ , т. е. в одну из точек  $L_4$  и  $L_5$  (рис. 3; точки  $P_1$  и  $P_2$  обозначены через  $m$  и  $m'$ ). Эти точки назовем треугольными точками либрации.<sup>1</sup>

В заключение покажем, что в рассматриваемом случае движение каждой из точек  $P_i$  относительно общего центра инерции  $O$  происходит так, как если бы каждая из этих точек притягивалась массой, равной сумме масс двух других точек, помещенной в  $O$ , иначе говоря, по обобщенным законам Кеплера.

Обратимся к уравнениям (23), в § 6, определяющим движение относительно центра инерции. Обозначая через  $\Delta$  общую величину равных в данном случае расстояний  $\Delta_i$  и учитывая, что

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0,$$

<sup>1</sup> Их называют также эквilateralными точками либрации. Гюльден называл как эти точки, так и те, о которых будет речь дальше, центрами либрации.

получим такие уравнения движения точки  $P_i$ :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i + k^2 (m_1 + m_2 + m_3) x_i \Delta^{-3} &= 0 \\ \ddot{y}_i + k^2 (m_1 + m_2 + m_3) y_i \Delta^{-3} &= 0 \\ \ddot{z}_i + k^2 (m_1 + m_2 + m_3) z_i \Delta^{-3} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\Delta^2 = c_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

причем  $c_i$  — некоторая постоянная величина.

Эти уравнения тождественны по форме с уравнениями движения в задаче двух тел, откуда и вытекает справедливость нашего утверждения.

### § 37. Случай коллинеарного лагранжева движения.

Рассмотрим теперь случай, когда три тела  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  остаются все время на одной прямой. Приняв эту прямую за ось  $Ox$ , получим для координат  $P_i$  такие выражения:

$$x_i = a_i \rho(t), \quad y_i = 0, \quad z_i = 0.$$

Так что задача приводится к определению функции  $\rho(t)$  и постоянных  $a_1, a_2, a_3$ .

Поскольку все силы направлены по оси  $Ox$ , мы можем выбрать координатную систему, не имеющую вращения вокруг этой оси, т. е. считать  $p = 0$ .

Принимая еще во внимание, что в настоящем случае  $b_i = 0, B_i = 0$ , из уравнений (3) и (4) получим:

$$2r\rho + r\rho = 0, \quad 2q\rho + q\rho = 0. \quad (9)$$

Предположим, что  $q \neq 0$ . Умножая эти равенства на  $q$  и  $r$  и вычитая их почленно одно из другого, найдем:

$$rq - qr = 0.$$

Следовательно:

$$r = Aq,$$

где  $A$  — постоянное число.

Таким образом, приняв направление геометрической суммы векторов  $r$  и  $q$  за новую ось  $Oz$ , мы будем иметь  $q = 0$ .

Итак, всегда можно считать, выбирая надлежаще оси  $Oy$  и  $Oz$ , что  $q = 0$ . Следовательно движение прямой  $P_1 P_2 P_3$  в пространстве будет заключаться во вращении этой прямой около оси  $Oz$  с угловой скоростью  $r$ .

Интегрирование первого из соотношений (9) дает теорему площадей

$$r\rho^2 = \text{const}. \quad (10)$$

Обратимся теперь к уравнениям (2), которые в настоящем случае обращаются в

$$\ddot{\rho} - r^2 \rho = \frac{A_i}{a_i} \rho^{-2}, \quad (10')$$

а потому дают

$$\frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \frac{A_3}{a_3}.$$

Предполагая для определенности, что

$$a_1 < a_2 < a_3,$$

и делая

$$z = \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1},$$

отсюда легко получить следующие равенства:

$$\frac{m_2 + m_3(1+z)^{-2}}{a_1} = \frac{-m_1 + m_3 z^{-2}}{a_2} = \frac{-m_1(1+z)^{-2} - m_2 z^{-2}}{a_3}, \quad (11)$$

так как

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= +k^2 m_2 (a_2 - a_1)^{-2} + k^2 m_3 (a_3 - a_1)^{-2} \\ A_2 &= -k^2 m_1 (a_2 - a_1)^{-2} + k^2 m_3 (a_3 - a_2)^{-2} \\ A_3 &= -k^2 m_1 (a_3 - a_1)^{-2} - k^2 m_2 (a_3 - a_2)^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Начало координат мы поместили в центр инерции системы, поэтому

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3 = 0.$$

Заменяя здесь  $a_1, a_2, a_3$  пропорциональными величинами на основании соотношений (11), получим следующее уравнение для определения  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2)z^5 + (3m_1 + 2m_2)z^4 + (3m_1 + m_2)z^3 - \\ - (m_2 + 3m_3)z^2 - (2m_1 + 3m_3)z - (m_2 + m_3) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Это уравнение имеет по крайней мере один положительный корень, так как левая часть уравнения имеет разные знаки для  $z=0$  и  $z=+\infty$ . С другой стороны, уравнение (13) не может иметь, по теореме Декарта, более одного положительного корня, так как коэффициенты дают только одну переменную знака.

Таким образом, при каких угодно массах мы получаем для  $z$  одно и только одно положительное значение. Равенства (11) дают возможность определить отношения  $a_1 : a_2 : a_3$ , соответствующие найденному  $z$ .

Три различные массы можно расположить на прямой тремя разными способами, что даст три коллинеарных лагранжевых движения.

Имея в виду астрономические приложения, обозначим массы трех тел через  $m, m', m''$ , и будем считать массу  $m$  очень большой (Солнце), массу  $m'$  — малой (большая планета), массу  $m''$  — очень малой (планетоид, комета, метеорит и т. д.).

Делая в уравнении (13)  $m_1 = m, m_2 = m'$  и  $m_3 = m''$ , получим уравнение, положительный корень которого весьма мал. Поэтому, сохраняя в этом уравнении только наиболее значительные члены, будем иметь:

$$(3m + m')z^3 - (m' + m'') = 0,$$

откуда

$$z = \left( \frac{m' + m''}{3m + m'} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Таким образом, обозначив через  $r$  расстояние планеты от Солнца, а через  $r'$  — расстояние планетоида от планеты, получим

$$r' = r \left( \frac{m' + m''}{3m + m'} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (14)$$

В том случае, когда  $m_1 = m, m_2 = m'', m_3 = m'$ , т. е. когда планетоид находится между Солнцем и планетой, таким же путем найдем:

$$r' = r \left( \frac{m' + m''}{3m + m''} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (15)$$

Наконец, если планета и планетоид находятся по разные стороны Солнца, так что  $m_1 = m', m_2 = m, m_3 = m''$ , то уравнение (13) напишем следующим образом:

$$f(z) = 0,$$

где

$$f(z) = m(z^5 + 2z^4 + z^3 - z^2 - 2z - 1) + m'(z^5 + 3z^4 + 3z^3) + m''(3z^2 - 3z - 1).$$

Очевидно, положительный корень этого уравнения мало отличается от единицы, поэтому за приближенную величину нужного нам корня можно принять

$$z = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{7m' - m''}{12m + 26m' + 3m''}.$$

Следовательно

$$r'' = r \left( 1 - \frac{7m' - m''}{12m + 26m' + 3m''} \right), \quad (16)$$

где через  $r''$  обозначено расстояние планетоида от Солнца.

Каждое из тех трех положений, которые может занимать третья масса  $m''$  на прямой, соединяющей две массы  $m$  и  $m'$ , мы будем называть коллинеарными точками либрации и обозначать через  $L_1, L_2$  и  $L_3$ , как это показано на рис. 3.

В том случае, когда размеры масс удовлетворяют указанным выше условиям, положение коллинеарных точек либрации приближенно определяется формулами (14), (15) и (16). Если масса  $m''$  исчезающе мала по сравнению с двумя другими, то положение всех пяти точек либрации может быть в первом приближении определено равенствами:

$$\begin{aligned} \text{для } L_1 \quad r'' &= r - r \left( \frac{m'}{3m} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{„ } L_2 \quad r'' &= r + r \left( \frac{m'}{3m + m'} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{„ } L_3 \quad r'' &= r - r \frac{7m'}{12m + 26m'} \\ \text{„ } L_4 \text{ и } L_5 \quad r'' &= r' = r. \end{aligned} \quad (17)$$

Нижеследующая таблица дает положение трех первых либрационных точек для различных планет солнечной системы. В таблице указано расстояние  $r''$  точки либрации от Солнца, выраженное в частях радиуса-вектора планеты.

	$L_1$	$L_2$	$L_3$
Меркурий . . . . .	0.9566	1.0034	1 — 0.000 000 07
Венера . . . . .	0.9907	1.0093	1 — 0.000 001 43
Земля . . . . .	0.9899	1.0101	1 — 0.000 001 78
Марс . . . . .	0.9952	1.0048	1 — 0.000 000 19
Юпитер . . . . .	0.9332	1.0698	1 — 0.000 557
Сатурн . . . . .	0.9550	1.0464	1 — 0.000 167
Уран . . . . .	0.9758	1.0246	1 — 0.000 026
Нептун . . . . .	0.9743	1.0261	1 — 0.000 030

Можно отметить, что у всех планет спутники находятся значительно ближе от планеты, чем точки  $L_1$  и  $L_2$ . Например расстояние от Земли до Луны приблизительно в четыре раза меньше, чем до этих точек.

После того как величина  $z$  определена и из равенств (11) найдены соответствующие ей отношения  $a_1 : a_2 : a_3$ , можно перейти к изучению движения точек  $P_i$ , для чего можно воспользоваться уравнениями (10) и (10').

Чтобы вполне определить функцию  $\rho(t)$ , дадим одной из величин  $a_i$  произвольное, неравное нулю значение. Например положим  $a_1 = 1$ . Тогда указанные уравнения дадут

$$r\rho^2 = C, \quad \rho^2 \ddot{\rho} - r^2 \dot{\rho}^3 = A_1,$$

где  $C$  — произвольная постоянная, а  $A_1$  вычислено по формулам (12).

Обозначим через  $u$  угол, образуемый прямой  $P_1 P_2 P_3$  с каким-либо неподвижным направлением в плоскости  $xOy$ . Так как  $r$  равняется  $\frac{du}{dt}$ , то уравнения движения напишутся окончательно так:

$$\rho^2 \frac{du}{dt} = C, \quad \rho^2 \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \rho^3 = A_1,$$

откуда

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = C^2 \rho^{-3} + A_1 \rho^{-2},$$

или, после умножения на  $2 \frac{d\rho}{dt}$  и интегрирования,

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = h - 2A_1 \rho^{-1} - C^2 \rho^{-2},$$

где  $h$  — новая постоянная.

Для получения уравнения, определяющего орбиту, исключим  $dt$  при помощи интеграла площадей. Получим:

$$\frac{C^2}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = h + \frac{A_1^2}{C^2} - \left(\frac{C}{\rho} + \frac{A_1}{C}\right)^2$$

или

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = h + \frac{A_1^2}{C^2} - s^2,$$

где

$$s = \frac{C}{\rho} + \frac{A_1}{C}.$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)},$$

где

$$e = \sqrt{1 + h C^2 A_1^{-1}}, \quad p = -A_1^{-1} C^2,$$

а через  $\omega$  обозначена новая произвольная постоянная.

Итак, движение каждой из точек  $P_i$  вокруг общего центра инерции происходит по коническому сечению, причем соблюдается закон площадей; иначе говоря, это движение происходит по законам Кеплера.

## ГЛАВА VII.

### ОГРАНИЧЕННАЯ ПРОБЛЕМА ТРЕХ ТЕЛ.

#### § 38. Уравнения движения. Интеграл Якоби.

Среди тех частных случаев проблемы трех тел, которые удалось изучить сравнительно глубоко и которые, в то же время, представляют несомненный интерес для Астрономии, весьма важное место занимает так называемая ограниченная проблема трех тел, заключающаяся в следующем:

*Требуется найти движение тела  $P$  с бесконечно малой массой, притягиваемого двумя телами  $S$  и  $J$ , имеющими конечные массы и описывающими круговые орбиты вокруг общего центра инерции.*

С такого рода проблемой мы встречаемся, например, когда изучаем движение планетоида или кометы под влиянием притяжения Солнца и Юпитера, причем орбиту Юпитера считаем, в первом приближении, круговой.

Точно так же движение Луны можно в первом приближении рассматривать как частный случай ограниченной проблемы. Но при этом приходится пренебрегать не только эксцентриситетом земной орбиты и притяжением всех других планет, но и массой Луны, т. е. тем притяжением, которое она производит на Землю и Солнце.

Обозначим через  $m$  и  $m'$  массы тел  $S$  и  $J$ . Не ограничивая общности, мы можем всегда считать, что  $m \geq m'$ .

За начало координат примем общий центр инерции  $O$ ; плоскость, в которой происходит движение тел  $S$  и  $J$ , возьмем за плоскость  $xu$ ; наконец, прямую  $SOJ$  возьмем за ось  $Ox$ . Координаты точек  $S$  и  $J$  в такой системе координат мы можем, очевидно, обозначить через  $(-a_1, 0, 0)$  и  $(a_2, 0, 0)$ , где  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ .

Обозначим, далее, через  $n$  постоянную угловую скорость, с которой прямая  $SOJ$  вращается вокруг точки  $O$ . По третьему закону Кеплера

$$k^2 (m_1 + m_2) = n^2 (a_1 + a_2)^3, \quad (1)$$

так как  $a_1 + a_2$  есть большая полуось орбиты, описываемой одним из тел  $S$  и  $J$  относительно другого под влиянием взаимного притяжения.

Положительное направление оси  $Ou$  выберем так, чтобы  $n$  было положительным числом.

Пусть  $x, y, z$  будут координаты точки  $P$ . Так как координатная система вращается с угловой скоростью  $n$  вокруг оси  $z$ , то компоненты абсолютной скорости этой точки равны

$$\dot{x} - ny, \quad \dot{y} + nx, \quad \dot{z}.$$

Поэтому, обозначая через  $m_0$  массу точки  $P$ , для живой силы этой точки будем иметь следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2} m_0 \left[ (\dot{x} - ny)^2 + (\dot{y} + nx)^2 + \dot{z}^2 \right].$$

Уравнения Лагранжа (§ 19) в применении к этому случаю дают

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned}$$

где через  $U$  обозначена функция сил, действующих на точку  $P$ , разделенная на  $m_0$ .

В рассматриваемом нами случае, когда точка  $P$  движется под влиянием притяжения точек  $S$  и  $J$ , имеем:

$$U = \frac{k^2 m_1}{r_1} + \frac{k^2 m_2}{r_2}.$$

Поэтому, полагая

$$\Omega = \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) + k^2 \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right), \quad (2)$$

окончательно уравнения движения в ограниченной проблеме трех тел напомним следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Умножая эти уравнения на  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ , складывая их и интегрируя, получим соотношение

$$x^2 + y^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega - C, \quad (4)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, известное под именем интеграла Якоби. Постоянную  $C$  будем называть постоянной Якоби.

Интеграл Якоби позволяет сделать ряд важных заключений относительно характера движения точки  $P$ , чем мы сейчас и займемся.

### § 39. Поверхности нулевой скорости.

Если через  $v$  обозначить скорость точки  $P$  относительно нашей подвижной координатной системы, то интеграл Якоби (4) можно написать так:

$$v^2 = 2\Omega - C.$$

Это соотношение дает, следовательно, возможность определить величину относительной скорости  $v$  в каждой точке нашего вращающегося пространства для всех движений, характеризуемых данной величиной  $C$ .

Обратно, если  $C$  и  $v$  заданы, то это равенство определяет геометрическое место тех точек вращающегося пространства, в которых может находиться тело  $P$ .

Рассмотрим всю совокупность движений тела  $P$ , совместных с некоторой фиксированной величиной постоянной  $C$ . Очевидно эти движения возможны только в тех местах пространства, в которых  $2\Omega - C \geq 0$ , так как относительная скорость  $v$  не может быть мнимой. Поэтому поверхность

$$2\Omega - C = 0 \quad (5)$$

является границей, отделяющей те области пространства, в которых движения, соответствующие выбранному значению  $C$ , возможны, от областей, где такие движения невозможны.

Эта поверхность получила название поверхности нулевой скорости, так как во всех ее точках  $v = 0$ .

Нашей ближайшей задачей является изучение формы поверхности нулевой скорости при различных значениях  $C$ .

Прежде всего условимся выбрать единицы длины и времени так, чтобы было

$$SJ = a_1 + a_2 = 1, \quad k = 1$$

и следовательно, на основании (1),

$$n^2 = m_1 + m_2.$$

В таком случае, учитывая выражение (2), мы можем уравнение (5) написать следующим образом:

$$m_1 \left( x^2 + y^2 + \frac{2}{r_1} \right) + m_2 \left( x^2 + y^2 + \frac{2}{r_2} \right) = C, \quad (6)$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x + a_1)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + y^2 + z^2}.$$

Поверхность, представляемая уравнением (6), лежит, очевидно, внутри цилиндра

$$(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) = C$$

и приближается к нему асимптотически при возрастании  $|z|$  до бесконечности.

Посмотрим, какой вид имеет кривая, получающаяся при пересечении поверхности (6) плоскостью  $xOy$ . Уравнение этой кривой получим, делая  $z = 0$  в уравнении (6), что дает

$$(m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + \frac{2m_1}{\sqrt{(x + a_1)^2 + y^2}} + \frac{2m_2}{\sqrt{(x - a_2)^2 + y^2}} = C. \quad (7)$$

Очевидно эта кривая симметрична относительно оси  $Ox$ .

Предположим сначала, что  $C$  очень большое число. В таком случае уравнению (7) удовлетворяют точки трех родов:

1. Точки, для которых  $x^2 + y^2$  — большая величина. Для этих точек второй и третий члены уравнения (7) очень малы, так что это уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = \frac{C - \epsilon_0}{m_1 + m_2}, \quad (8)$$

где  $\epsilon_0$  — малая положительная величина.

2. Точки, для которых радиус-вектор

$$r_1 = \sqrt{(x+a_1)^2 + y^2}$$

очень малая величина. Так как для таких точек первый и третий члены будут малы по сравнению со вторым, то уравнению (7) можно придать форму

$$(x+a_1)^2 + y^2 = \left(\frac{2m_1}{C-\epsilon_1}\right)^2, \quad (9)$$

где  $\epsilon_1$  — малая положительная величина.

3. Наконец, уравнению (7) будут удовлетворять точки, для которых расстояние от  $J$ , т. е.

$$r_2 = \sqrt{(x-a_2)^2 + y^2},$$

достаточно малая величина. Для этих точек уравнение (7) может быть написано так:

$$(x-a_2)^2 + y^2 = \left(\frac{2m_2}{C-\epsilon_2}\right)^2. \quad (10)$$

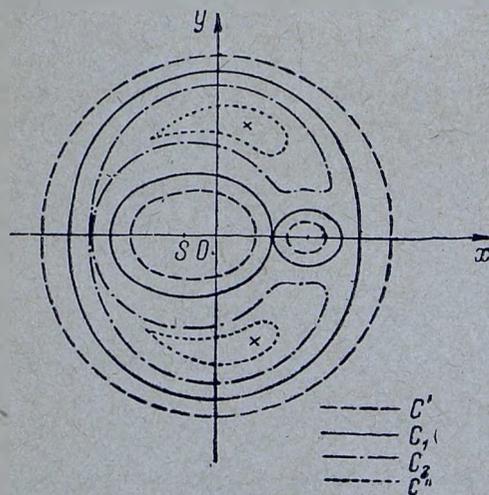


Рис. 4.

Итак, для очень больших значений  $C$  кривая (7) состоит из трех отдельных замкнутых частей, каждая из которых имеет форму, мало отличающуюся от окружности.

Чем больше масс  $m_1$  по сравнению с  $m_2$ , тем больше будут размеры кривой (9) по сравнению с кривой (10).

По мере убывания  $C$  размеры кривых (9) и (10) будут увеличиваться, и эти кривые, как нетрудно видеть, будут все больше и больше вытягиваться вдоль оси  $Ox$ . При некотором значении  $C=C_1$  эти кривые коснутся, а при еще меньших значениях  $C$  мы будем иметь уже не

два отдельных овала, а одну кривую, охватывающую точки  $S$  и  $J$  (рис. 4).

С другой стороны, при убывании  $C$  размеры кривой (8) будут уменьшаться и при некоторых значениях  $C=C_2$  и  $C=C_3$  эта кривая будет иметь касание с только-что рассмотренными внутренними кривыми, после чего произойдет слияние и этих кривых.

Область плоскости  $xOy$ , в которой движение тела  $P$  невозможно, при больших значениях  $C$ , состоит из точек внешних по отношению к кривым (9) и (10) и внутренних по отношению к кривой (8). При небольших значениях  $C$  эта область будет состоять лишь из точек, лежащих внутри кривых  $C''$  (рис. 4), которые будут делаться все меньше и меньше по мере уменьшения  $C$ ; обратятся при некотором значении  $C=C_4$  в точки  $L_4$  и  $L_5$ ; и, наконец, совсем исчезнут. Таким образом при достаточно малых  $C$  тело  $P$  получает возможность двигаться во всей плоскости  $xOy$ .

Рис. 4 дает схематическое изображение этих кривых для убывающих значений  $C$ , а именно  $C' > C_1 > C_2 > C_3 > C''$ .

Совершенно таким же путем можно составить представление о форме кривой, получаемой при пересечении поверхности (6) плоскостью  $xOz$ . Уравнение этой кривой получим, делая  $y=0$  в равенстве (6), что дает:

$$(m_1 + m_2)x^2 + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2} = C, \quad (11)$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x+a_1)^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-a_2)^2 + z^2}.$$

Для очень больших значений  $C$  этому уравнению можно удовлетворить тремя различными способами: либо делая  $x^2$  очень большим, либо делая одну из величин  $r_1$  и  $r_2$  очень малой. Сообразно с этим, кривая (11) будет состоять из трех различных частей, определяемых соответственно уравнениями:

$$(m_1 + m_2)x^2 = C - \epsilon$$

$$r_1 = \frac{2m_1}{C - \epsilon'}$$

$$r_2 = \frac{2m_2}{C - \epsilon''}.$$

Такой случай изображает кривая  $C'$  на рис. 5. При уменьшении  $C$  мы опять будем переходить через критические значения  $C_1, C_2, C_3$ , при

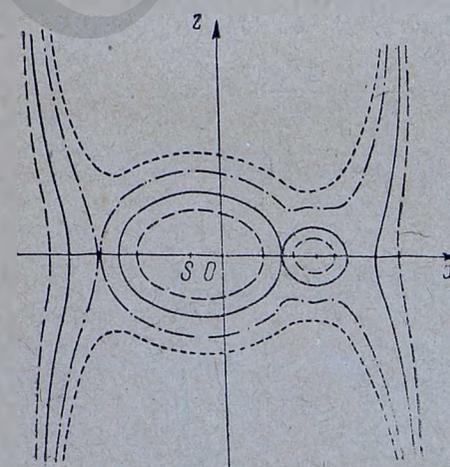


Рис. 5.

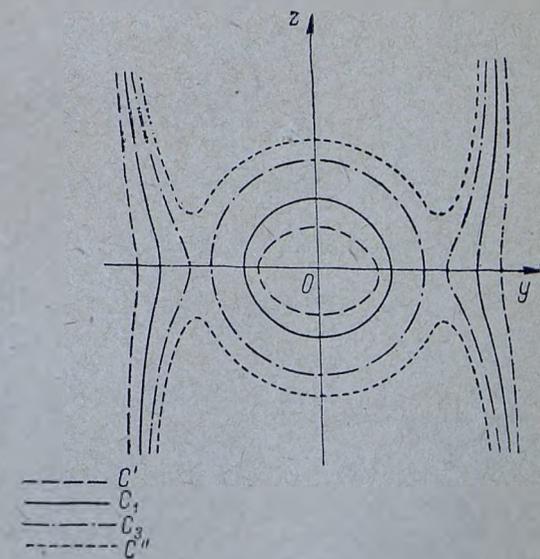


Рис. 6.

которых происходит касание различных частей кривой (11). Наконец, при достаточно малых значениях  $C=C''$  постоянной Якоби, кривая (11) уже не будет пересекать ось  $Ox$ .

Пересечение поверхности (6) с плоскостью  $yOz$  определяется уравнением

$$(m_1 + m_2)y^2 + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2} = C, \quad (12)$$

где

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 + y^2 + z^2}.$$

Соответствующие кривые изображены для различных значений  $C$  на рис. 6. Указанная форма кривых предполагает, что масса  $m_1$  значительно превосходит массу  $m_2$ .

Сопоставление сечений поверхности (6), изображенных на рис. 4, 5 и 6, позволяет составить представление о форме этой поверхности при различных значениях  $C$ .

После такого чисто качественного изучения поверхностей (6) мы перейдем к изучению особых точек этих поверхностей.

#### § 40. Особые точки поверхностей нулевой скорости.

Особые точки поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

определяются, как известно, уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

которые должны быть решены совместно с уравнением поверхности.

Для поверхности нулевой скорости, уравнение которых имеет вид:

$$2\Omega - C = 0, \quad (13)$$

где

$$2\Omega = (m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + \frac{2m_1}{r_1} + \frac{2m_2}{r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x + a_1)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - a_2)^2 + y^2 + z^2},$$

особые точки даются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= (m_1 + m_2)x - \frac{m_1(x + a_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(x - a_2)}{r_2^3} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= (m_1 + m_2)y - \frac{m_1 y}{r_1^3} - \frac{m_2 y}{r_2^3} = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= -\frac{m_1 z}{r_1^3} - \frac{m_2 z}{r_2^3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

После того как из уравнений (14) будут определены координаты особых точек, равенство (13) даст возможность вычислить соответствующие значения  $C$ .

Легко видеть, какой механический смысл имеют особые точки поверхности нулевой скорости. Обращаясь к уравнениям (3) движения тела  $P$  и сопоставляя их с равенствами (14), мы видим, что в каждой такой точке не только

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0,$$

но и

$$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0.$$

Поэтому тело  $P$ , очутившись в особой точке и имея соответствующее значение постоянной Якоби, будет иметь и скорость и ускорение равными нулю, а потому навсегда останется в этой точке.

Итак, особые точки поверхности (13) являются положениями относительного равновесия тела  $P$ : в этих точках тело может находиться в равновесии относительно нашей вращающейся системы координат.

При нахождении тела  $P$  в особой точке расстояния между тремя телами  $S$ ,  $J$  и  $P$  сохраняют, очевидно, постоянные отношения. Поэтому рассматриваемые особые точки являются не чем иным, как точками либрации, изученными в предыдущей главе.

Обратимся теперь к определению координат точек либрации и вычислению соответствующих значений постоянной Якоби.

Последнее из уравнений (14) дает  $z = 0$ , откуда следует, что все точки либрации лежат в плоскости  $xOy$ , а потому могут быть найдены как особые точки кривой (7). Этим обстоятельством мы и воспользуемся для действительного вычисления координат точек либрации.

Заметим прежде всего, что при  $z = 0$

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = (m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2,$$

ибо начало координат взято в центре инерции, и потому

$$-m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0.$$

Следовательно уравнение (7) можно написать так:

$$m_1(r_1^2 + 2r_1^{-1}) + m_2(r_2^2 + 2r_2^{-1}) = C', \quad (15)$$

где

$$C' = C + m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = C + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (16)$$

так как, очевидно,

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Написав уравнение кривой (15) в форме

$$f(x, y) = 0,$$

для определения ее особых точек будем иметь уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

В настоящем случае эти уравнения могут быть представлены так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Следовательно удовлетворить им можно только двумя способами: либо делая

$$\frac{\partial f}{\partial r_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r_2} = 0,$$

что очевидно дает

$$r_1^3 = 1, \quad r_2^3 = 1$$

либо делая

$$\frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r_1 r_2} \begin{vmatrix} x + a_1 & x - a_2 \\ y & y \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

откуда  $y = 0$ .

В первом случае получим точки либрации  $L_4, L_5$  (рис. 3), образующие с точками  $S$  и  $J$  равносторонние треугольники. Из предыдущего ясно, что  $L_4$  и  $L_5$  являются изолированными точками кривой (15), т. е., иначе говоря, двойными точками с комплексными касательными. Соответствующее значение  $C = C_4$  легко находим из равенств (15) и (16), которые дают

$$C_4 = 3(m_1 + m_2) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (19)$$

Обратимся теперь к изучению второй возможности получить двойные точки, характеризуемой выполнением условия (18). В этом случае двойные точки лежат на оси  $Ox$ , поэтому в зависимости от расположения двойной точки относительно  $S$  и  $J$  мы должны иметь одно из равенств:

- 1)  $r_1 + r_2 = 1$ ,
- 2)  $r_1 = 1 + r_2$ ,
- 3)  $r_1 = r_2 - 1$ .

Рассмотрим последовательно каждый из этих случаев.

**Первый случай.** Пусть  $r_1 + r_2 = 1$ , тогда

$$\begin{aligned} r_1 &= x + a_1, & r_2 &= -x + a_2, \\ \frac{\partial r_1}{\partial x} &= +1, & \frac{\partial r_2}{\partial x} &= -1, \end{aligned}$$

вследствие чего первое из уравнений (14) даст

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{r_1 - r_1^{-2}}{r_2 - r_2^{-2}} = \frac{r_2^3(3 - 3r_2 + r_2^2)}{(1 - r_2^3)(1 - r_2)^2} \quad (20)$$

или

$$(m_1 + m_2)r_2^5 - (3m_1 + 2m_2)r_2^4 + (3m_1 + m_2)r_2^3 - m_2r_2^2 + 2m_2r_2 - m_2 = 0. \quad (20')$$

Если отношение  $\frac{m_2}{m_1}$  — малая величина, то нужный нам положительный корень легко получить в виде ряда. Действительно, разлагая правую часть уравнения (20) в ряд, найдем:

$$\frac{m_2}{m_1} = 3r_2^3 \left( 1 + r_2 + \frac{4}{3}r_2^2 + \dots \right),$$

откуда, извлекая из обеих частей кубический корень и делая для краткости

$$v = \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}},$$

получим

$$v = r_2 \left( 1 + \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{3}r_2^2 + \dots \right),$$

следовательно

$$r_2 = v - \frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{9}v^3 - \dots \quad (21)$$

Обращаясь к уравнению (15), найдем соответствующее значение постоянной Якоби:

$$\begin{aligned} C_1 &= m_1(3 + 9v^2 + 2v^3 + \dots) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \\ &= m_1(3 + 9v^2 - v^3 + \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

Если нужно более точное значение, чем то, которое может дать ряд (21), то проще всего прибегнуть к численному решению уравнения (20).

**Второй случай.** Пусть  $r_1 = 1 + r_2$  и, следовательно,  $r_1 = x + a_1$ ,  $r_2 = x - a_2$ , тогда

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial r_2}{\partial x} = 1.$$

Поэтому первое из уравнений (17) дает

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{r_1 - r_1^{-2}}{r_2 - r_2^{-2}} = \frac{r_2^3(3 + 3r_2 + r_2^2)}{(1 - r_2^3)(1 + r_2)^2} \quad (23)$$

или

$$(m_1 + m_2)r_2^5 + (3m_1 + 2m_2)r_2^4 + (3m_1 + m_2)r_2^3 - m_2r_2^2 - 2m_2r_2 - m_2 = 0. \quad (23')$$

Это уравнение тождественно с уравнением (14) § 37, если в этом последнем положить  $m_3 = 0$ , а потому, как мы видели, имеет один и только один положительный корень.

Выведем разложение этого корня в ряд. Уравнение (23) дает, если правую часть разложить по степеням  $r_2$ ,

$$v^3 = r_2^3 \left( 1 - r_2 + \frac{4}{3}r_2^2 - \dots \right),$$

или, после возведения в степень  $\frac{1}{3}$ ,

$$v = r_2 \left( 1 - \frac{1}{3}r_2 + \frac{1}{3}r_2^2 + \dots \right),$$

откуда

$$r_2 = v + \frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{9}v^3 + \dots \quad (24)$$

Соответствующее значение постоянной Якоби таково:

$$C_2 = m_1(3 + 9v^2 - 5v^3 + \dots) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (25)$$

**Третий случай.** Пусть, наконец,  $r_1 = r_2 - 1$ , так что  $r_1 = -x - a_1$ ,  $r_2 = -x + a_2$  и, следовательно,

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial r_2}{\partial x} = -1.$$

Это дает, как и в предыдущем случае:

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{r_1 - r_1^{-2}}{r_2 - r_2^{-2}}. \quad (26)$$

Так как очевидно  $r_2 > 1$ , то отсюда следует, что  $r_1 < 1$ . Поэтому положим

$$r_1 = 1 - \alpha, \quad r_2 = 2 - \alpha;$$

тогда для определения  $\alpha$  будем иметь такое уравнение:

$$3v^2 = \frac{(2-\alpha)^2(3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3)}{(1-\alpha)^2(7 - 12\alpha + 6\alpha^2 - \alpha^3)},$$

или

$$3v^2 = \alpha \frac{12 - 24\alpha + 19\alpha^2 - 7\alpha^3 + \alpha^4}{7 - 26\alpha + 37\alpha^2 - 25\alpha^3 + 8\alpha^4 - \alpha^5},$$

откуда

$$\alpha = v^3 \left( \frac{7}{4} - 3\alpha + \dots \right).$$

Решение этого уравнения последовательными приближениями дает

$$\alpha = \frac{7}{4}v^3 - \frac{21}{4}v^6 + \dots \quad (27)$$

Остается вычислить постоянную Якоби:

$$C_3 = m_1(3 + 3\alpha^2 + \dots) + m_2(5 - \frac{7}{2}\alpha + \frac{5}{4}\alpha^2 + \dots) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (28)$$

или

$$C_3 = m_1 \left( 3 + 12v^3 - \frac{3}{16}\alpha^6 + \dots \right)$$

Если сумму масс  $m_1$  и  $m_2$  принять за единицу и положить

$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu,$$

то все рассматриваемые величины будут функциями одной переменной  $\mu$ , которую достаточно изменять от 0 до  $\frac{1}{2}$ , чтобы охватить все возможные случаи.<sup>1</sup>

На рис. 7 изображены кривые, соответствующие критическим значениям постоянной Якоби, для случая

$$m_1 = 10, \quad m_2 = 1.$$

Эти критические значения, так же, как биполярные координаты точек либрации, указаны в следующей табличке:

$L_1$ :	$r_1 = 0.7175,$	$r_2 = 0.2825,$	$C_1 = 39.273$
$L_2$ :	1.3470,	0.3470,	$C_2 = 37.967$
$L_3$ :	0.9469,	1.9469,	$C_3 = 33.996$
$L_4$ и $L_5$ :	1.0000,	1.0000,	$C_4 = 32.091$

<sup>1</sup> Координаты точек либрации как функции  $\mu$ , а также соответствующие значения  $C_1(\mu), C_2(\mu), \dots$ , изучаются в статье:

M. Martin, On the libration points of the restricted problem of three bodies, American Journal of Mathematics, 53, 1931, 167—177.

Поправки и дополнения к этой статье даны А. А. Марковым (Успехи астрон. наук, 3, 1933, 75—77).

Таблицы абсцисс точек  $L_1, L_2, L_3$  даны в статье: J. Rosenthal, Table for the libration points of the restricted problem of three bodies, Astr. Nachr., 244, 1931, 169.

Для случая

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1$$

соответствующие числа таковы:

$L_1$ :	$r_1 = 0.5000$	$r_2 = 0.5000$	$C_1 = 8.000$
$L_2$ :	1.6984	0.6984	$C_2 = 6.912$
$L_3$ :	0.6984	1.6984	$C_3 = 6.912$
$L_4$ и $L_5$ :	1.0000	1.0000	$C_4 = 5.500$

Кривые, получающиеся при этих значениях постоянной Якоби, показаны на рис. 8.



#### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
116	16 сверху	$\alpha^6$	$v^6$	автора

#### § 41. Периодические решения ограниченной проблемы трех тел.

Изученные в предыдущей главе лагранжевы движения, при которых три тела в один и тот же интервал времени описывают эллиптические орбиты, явились первым примером периодических орбит в задаче трех тел, т. е. таких движений, когда координаты всех тел выражаются периодическими функциями времени, имеющими одинаковый период.

Другой пример периодической орбиты, тоже весьма частного характера, был дан Хиллом в связи с созданным им методом независимого определения некоторых неравенств движения Луны, вызываемых притяжением Солнца (глава XVIII). Вслед за тем Пуанкаре создал методы для нахождения и изучения обширных классов периодических решений проблемы трех тел. Периодические решения явились, таким образом, первой брешью, пробитой в проблеме трех тел, до тех пор недоступной для аналитического изучения. Опираясь на периодические решения, оказалось возможным приступить к изучению некоторых других классов решений, также представляющих значительный интерес, каковы, например, асимптотические решения.

Изучение периодических решений только еще начинается; даже в том частном, сравнительно простом случае, который представляет собой ограниченная проблема, удалось изучить более или менее полно лишь весьма немногие группы периодических орбит.

Наиболее изученными являются плоские периодические орбиты, близкие к точкам либрации  $L_1, \dots, L_5$ ; орбиты, охватывающие планету

Так как очевидно  $r_2 > 1$ , то отсюда следует, что  $r_1 < 1$ . Поэтому положим

$$r_1 = 1 - \alpha, \quad r_2 = 2 - \alpha;$$

тогда для определения  $\alpha$  будем иметь такое уравнение:

$$3v^2 = \frac{(2-\alpha)^2(3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3)}{(1-\alpha)^2(7 - 12\alpha + 6\alpha^2 - \alpha^3)},$$

или

$$3v^2 = \alpha \frac{12 - 24\alpha + 19\alpha^2 - 7\alpha^3 + \alpha^4}{7 - 26\alpha + 37\alpha^2 - 25\alpha^3 + 8\alpha^4 - \alpha^5},$$

откуда

$$\alpha = v^3 \left( \frac{7}{4} - 3\alpha + \dots \right).$$

$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu,$$

то все рассматриваемые величины будут функциями одной переменной  $\mu$ , которую достаточно изменять от 0 до  $\frac{1}{2}$ , чтобы охватить все возможные случаи.<sup>1</sup>

На рис. 7 изображены кривые, соответствующие критическим значениям постоянной Якоби, для случая

$$m_1 = 10, \quad m_2 = 1.$$

Эти критические значения, так же, как биполярные координаты точек либрации, указаны в следующей табличке:

$L_1$ :	$r_1 = 0.7175,$	$r_2 = 0.2825,$	$C_1 = 39.273$
$L_2$ :	1.3470,	0.3470,	$C_2 = 37.967$
$L_3$ :	0.9469,	1.9469,	$C_3 = 33.996$
$L_4$ и $L_5$ :	1.0000,	1.0000,	$C_4 = 32.091$

<sup>1</sup> Координаты точек либрации как функции  $\mu$ , а также соответствующие значения  $C_1(\mu), C_2(\mu), \dots$ , изучаются в статье:

M. Martin, On the libration points of the restricted problem of three bodies, American Journal of Mathematics, 53, 1931, 167—177.

Поправки и дополнения к этой статье даны А. А. Марковым (Успехи астрон. наук, 3, 1933, 75—77).

Таблицы абсцисс точек  $L_1, L_2, L_3$  даны в статье: J. Rosenthal, Table for the libration points of the restricted problem of three bodies, Astr. Nachr., 244, 1931, 169.

Для случая

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1$$

соответствующие числа таковы:

$L_1$ :	$r_1 = 0.5000$	$r_2 = 0.5000$	$C_1 = 8.000$
$L_2$ :	1.6984	0.6984	$C_2 = 6.912$
$L_3$ :	0.6984	1.6984	$C_3 = 6.912$
$L_4$ и $L_5$ :	1.0000	1.0000	$C_4 = 5.500$

Кривые, получающиеся при этих значениях постоянной Якоби, показаны на рис. 8.

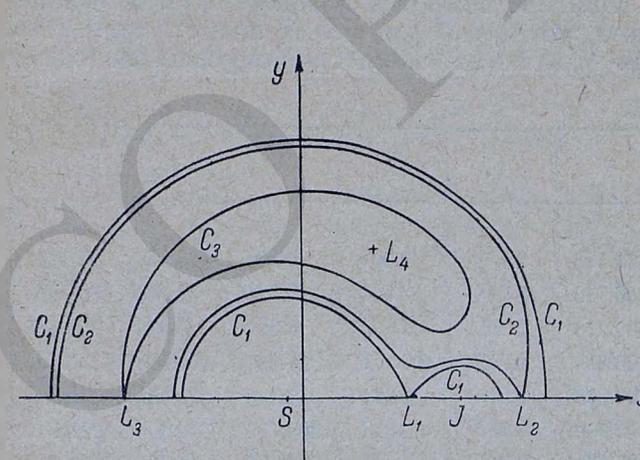


Рис. 7.

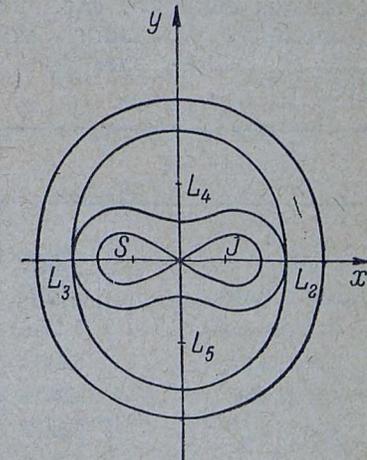


Рис. 8.

§ 41. Периодические решения ограниченной проблемы трех тел.

Изученные в предыдущей главе лагранжевы движения, при которых три тела в один и тот же интервал времени описывают эллиптические орбиты, явились первым примером периодических орбит в задаче трех тел, т. е. таких движений, когда координаты всех тел выражаются периодическими функциями времени, имеющими одинаковый период.

Другой пример периодической орбиты, тоже весьма частного характера, был дан Хиллом в связи с созданным им методом независимого определения некоторых неравенств движения Луны, вызываемых притяжением Солнца (глава XVIII). Вслед за тем Пуанкаре создал методы для нахождения и изучения обширных классов периодических решений проблемы трех тел. Периодические решения явились, таким образом, первой брешью, пробитой в проблеме трех тел, до тех пор недоступной для аналитического изучения. Опираясь на периодические решения, оказалось возможным приступить к изучению некоторых других классов решений, также представляющих значительный интерес, каковы, например, асимптотические решения.

Изучение периодических решений только еще начинается; даже в том частном, сравнительно простом случае, который представляет собой ограниченная проблема, удалось изучить более или менее полно лишь весьма немногие группы периодических орбит.

Наиболее изученными являются плоские периодические орбиты, близкие к точкам либрации  $L_1, \dots, L_5$ ; орбиты, охватывающие планету

$J$ , но не заключающие внутри  $S$ ; и, наконец, орбиты, охватывающие Солнце  $S$  на таком расстоянии, что время обращения по ним находится в простом отношении (например 1:2, 1:3, 2:3 и т. д.) ко времени обращения планеты  $J$ .

Орбиты первого типа проливают свет на особенности движения так называемых „троянец“, т. е. малых планет, движущихся приблизительно по орбите Юпитера.

Элементы орбит известных в настоящее время „троянец“ приведены в нижеследующей таблице, куда для сравнения включены также элементы Юпитера. Элементы отнесены к эклиптике и равноденствию 1925.0; средняя долгота эпохи дана для момента 1925 январь 1.0 Т. У. Заметим еще, что элементы Юпитера являются средними элементами для только-что указанного момента, тогда как для малых планет приведены оскулирующие элементы для различных эпох, группирующихся около 1935 г.

Название	$a$	$n$	$\varphi$	$i$	$\Omega$	$\pi$	$\varepsilon$
Юпитер . . . . .	5.2026	299.128	2.773	1.307	99.696	13.123	277.142
588 Achilles . . . . .	5.2267	296.940	8.544	10.309	315.778	82.790	335.322
617 Patroclus . . . . .	5.1944	299.715	7.965	22.091	43.584	346.976	221.077
624 Hector . . . . .	5.1473	303.839	1.532	18.261	341.836	161.524	319.207
659 Nestor . . . . .	5.2142	298.005	6.270	4.524	350.188	322.382	350.260
884 Priamus . . . . .	5.2472	295.198	6.832	8.882	300.729	270.525	211.177
911 Agamemnon . . . . .	5.1328	305.123	3.711	21.939	336.937	55.383	325.226
1143 Odysseus . . . . .	5.1660	302.185	5.302	3.152	220.344	93.999	340.097
1172 Aneas . . . . .	5.2190	297.592	5.765	16.676	246.447	291.486	208.153
1173 Anchises . . . . .	5.1037	307.733	7.853	6.971	283.793	313.889	200.177
1208 Troilus . . . . .	5.2608	294.061	4.061	33.619	47.455	348.228	217.096

Последний столбец этой таблицы показывает, что планеты 588, 624, 659, 911, 1143 находятся вблизи точки либрации  $L_4$ , тогда как остальные группируются вблизи  $L_5$ .

Теория орбит второго типа, охватывающих на небольшом расстоянии планету  $J$ , тесно связана с теорией спутников.

Наконец орбиты третьего типа важны потому, что они открывают возможность построения теорий движения малых планет, средние движения которых соизмеримы со средним движением Юпитера. Такие периодические орбиты могут быть гораздо более выгодны в качестве первого приближения, чем кеплеров эллипс, например для планет типа Гекубы, у которых среднее суточное движение приблизительно равно  $600''$ , или типа Гестии, у которых оно близко к  $900''$ , и т. д.

Периодические орбиты ограниченной проблемы трех тел Пуанкаре разделил на три сорта. К первому и ко второму он отнес орбиты, лежащие в плоскости  $xOy$ , в которой движутся тела  $S$  и  $J$ , к третьему — все остальные орбиты. Разница между периодическими орбитами первого и второго сорта заключается в следующем: если масса  $\mu$  тела  $J$  стремится к нулю, то периодические орбиты в пределе обратятся в кеплеровы эллипсы; к первому сорту относятся те орбиты, для которых эксцентриситет такого предельного эллипса равен нулю. Иначе говоря,

орбиты первого сорта при малых значениях  $\mu$  мало отличаются от окружностей, тогда как решения второго сорта близки к эллиптическим орбитам.

Не имея возможности останавливаться здесь на свойствах периодических орбит, мы ограничимся лишь изучением в следующих параграфах бесконечно малых орбит вблизи точек либрации <sup>1</sup>.

Наряду с аналитическими методами, применимость которых все еще остается очень ограниченной, для отыскания периодических решений был употреблен, по инициативе Дарвина и Тиле, метод численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Численное интегрирование уравнений движения имеет то преимущество перед аналитическим, что в каждом конкретном случае очень просто, при помощи самых элементарных вычислений, дает решение. Но зато оно годится лишь для того интервала времени, на который было продолжено вычисление. Этот основной недостаток численного метода как раз не имеет значения в случае периодического решения, так как здесь достаточно провести вычисление в течение одного периода, чтобы иметь полную картину движения, соответствующего взятым начальным условиям.

В то время как аналитические методы в настоящее время применимы для изучения периодических орбит лишь в том случае, когда масса  $J$  очень мала по сравнению с массой  $S$ , численный метод применяется одинаково легко, каково бы ни было отношение масс.

Дарвин нашел, применяя этот метод, несколько периодических орбит для случая, когда масса  $J$  равна  $\frac{1}{10}$  массы  $S$ .

Элис Стрёмгрен положил в основу своих вычислений, так же как и Тиле, случай, когда массы  $J$  и  $S$  равны. Эти работы, начатые Виггау еще в 1900 г., с 1913 г. ведутся систематически сотрудником Копенгагенской обсерватории под общим руководством Элиса Стрёмгрена. Они дали возможность не только найти большое количество периодических орбит, но и проследить процесс перехода одних классов этих орбит в другие, а также процесс исчезновения определенных классов периодических орбит при изменении начальных условий, чем несомненно облегчается аналитическая разработка этих вопросов. <sup>2</sup>

#### § 42. Движение вблизи коллинеарных точек либрации.

Возьмем какую-либо точку  $(a, b, c)$  нашего равномерно вращающегося пространства  $Sxyz$  и посмотрим, могут ли среди движений, определяемых уравнениями (§ 38):

$$\ddot{x} - 2n^2y = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

<sup>1</sup> По теории периодических орбит помимо классического сочинения Н. Роисагэ, Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, t. I, II, III, Paris 1892—1899, укажем еще F. R. Moulton, Periodic Orbits, Washington, 1920. Подробные библиографические указания содержит статья E. T. Whittaker, Prinzipien der Störungstheorie und allgemeine Theorie der Bahnkurven in dynamischen Problemen, Encyclopädie der math. Wissenschaften, Bd. VI, 2, (1912), 512—556.

<sup>2</sup> Результаты Дарвина можно найти в его классическом мемуаре. G. Darwin, Periodic Orbits, Acta Math., 21, 1897, 99—216. Некоторые дополнения даны в Math. Ann., 51, 1899. Результаты, полученные на Копенгагенской обсерватории, опубликованы в целом ряде номеров Publikationer og mindre Meddelelser fra Kobenhavns Observatorium. Подводящая итоги статья: Elis Strömgrén, Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps, помещена в № 100 (1936) этого издания. Эта статья, заключающая полную библиографию работ копенгагенской школы, напечатана также в Bull. astr., 2-e série, 9, 1936.

$$\ddot{y} + 2n^2 x = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}, \quad (29)$$

существовать такие, при которых тело  $P$  будет всегда находиться сколь угодно близко к точке  $(a, b, c)$ .

Оставляя в стороне более трудный случай, когда рассматриваемая точка  $(a, b, c)$  совпадает с одним из тел  $S$  или  $J$ , мы можем считать, что функция  $\Omega$  голоморфна в области точки  $(a, b, c)$ . Поэтому, полагая

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta, \quad z = c + \zeta,$$

разлагая правые части уравнений движения по степеням малых величин  $\xi, \eta, \zeta$  и ограничиваясь первыми степенями этих величин, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n^2 \eta &= \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} + \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial c} \\ \ddot{\eta} + 2n^2 \xi &= \frac{\partial \Omega}{\partial b} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} + \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b \partial c} \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial c} + \xi \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial c} + \eta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b \partial c} + \zeta \frac{\partial^2 \Omega}{\partial c^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как  $\xi, \eta, \zeta$  — сколь угодно малы, то интересующие нас движения могут, очевидно, существовать только в области такой точки, координаты которой удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} = \frac{\partial \Omega}{\partial b} = \frac{\partial \Omega}{\partial c} = 0,$$

т. е. в области точек либрации, поскольку эти уравнения тождественны с уравнениями (14).

В этом параграфе мы рассмотрим случай движений, бесконечно близких к коллинеарным точкам либрации, и потому положим

$$a = x_k, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

где через  $x_k$  обозначена абсцисса точки  $L_k$  ( $k=1, 2, 3$ ). Чтобы найти вторые производные функции  $\Omega$ , входящие в уравнения (30), дифференцируем выражение (29) и заменяем  $x, y, z$  только-что указанными координатами точки  $L_k$ . Таким образом получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} &= n^2 + \frac{2m_1}{r_1^3} + \frac{2m_2}{r_2^3}; & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} &= n^2 - \frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3}; & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial c} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial c^2} &= -\frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3}; & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b \partial c} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$r_1 = |x_k + a_1|, \quad r_2 = |x_k - a_2|.$$

Полагая для краткости

$$A_k = \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3},$$

окончательно напишем уравнения (30) так:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} - 2n^2 \eta &= (n^2 + 2A_k) \xi \\ \ddot{\eta} + 2n^2 \xi &= (n^2 - A_k) \eta \\ \ddot{\zeta} &= -A_k \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Последнее из этих уравнений, независимое от двух первых, тотчас же дает:

$$\zeta = c_1 \sin \sqrt{A_k} t + c_2 \cos \sqrt{A_k} t, \quad (32)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования.

Решение первых двух уравнений ищем в форме

$$\xi = G e^{\lambda t}, \quad \eta = H e^{\lambda t}.$$

Подстановка этих выражений в уравнения (31) дает следующие соотношения для определения постоянных  $G, H$  и  $\lambda$ :

$$\left. \begin{aligned} [\lambda^2 - (n^2 + 2A_k)] G - 2n^2 \lambda H &= 0 \\ 2n^2 \lambda G + [\lambda^2 - (n^2 - A_k)] H &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Корни характеристического уравнения

$$[\lambda^2 - (n^2 + 2A_k)] [\lambda^2 - (n^2 - A_k)] + 4n^4 \lambda^2 = 0$$

или

$$\lambda^4 + (4n^4 - A_k - 2) \lambda^2 + (n^2 - A_k)(n^2 + 2A_k) = 0 \quad (34)$$

обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , а через  $q_1, q_2, q_3, q_4$  обозначим соответствующие этим корням значения отношения  $H : G$ , определяемые уравнениями (33).

В таком случае равенства

$$\left. \begin{aligned} \xi &= G_1 e^{\lambda_1 t} + G_2 e^{\lambda_2 t} + G_3 e^{\lambda_3 t} + G_4 e^{\lambda_4 t} \\ \eta &= G_1 q_1 e^{\lambda_1 t} + G_2 q_2 e^{\lambda_2 t} + G_3 q_3 e^{\lambda_3 t} + G_4 q_4 e^{\lambda_4 t}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где  $G_1, G_2, G_3, G_4$  — произвольные постоянные, совместно с (32) дадут общее решение системы (31).

Характер движения тела  $P$  с бесконечно малой массой будет зависеть, очевидно, от характера корней уравнения (34). Легко убедиться, что для каждой из точек  $L_1, L_2, L_3$  это уравнение имеет два действительных и два мнимых корня.

В самом деле, покажем, что величина

$$n^2 - A_k = m_1 + m_2 - \frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3} \quad (36)$$

отрицательна для  $k=1, 2, 3$ . Отсюда будет вытекать наличие у уравнения (34), рассматриваемого как квадратное уравнение относительно  $\lambda^2$ , двух вещественных корней, имеющих разные знаки.

Для точки  $L_1$  выражение (36) очевидно отрицательно, так как в этом случае

$$r_1 < 1, \quad r_2 < 1.$$

Что касается до точек  $L_2$  и  $L_3$ , то для них равенства (23) и (26) дают:

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{r_1 - r_1^{-2}}{r_2 - r_2^{-2}}.$$

Поэтому, исключая  $m_2$  из (36), найдем:

$$n^2 - A_k = m_1 \left(1 - \frac{1}{r_1^3}\right) \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right).$$

Так как для точки  $L_2$

$$r_1 > 1, \quad r_2 < 1,$$

а для точки  $L_3$

$$r_1 < 1, \quad r_2 > 1,$$

то ясно, что и для этих точек выражение (36) отрицательно.

Итак, действительно: два корня характеристического уравнения — чисто мнимые сопряженные числа, два другие — вещественные числа, имеющие противоположные знаки. Отсюда прежде всего вытекает, что точки либрации  $L_1, L_2, L_3$  являются неустойчивыми положениями относительного равновесия. Иначе говоря, тело  $P$ , смещенное из одной из этих точек на сколь угодно малую величину и получившее сколь угодно малую скорость, может, при некоторых начальных условиях, уйти совсем из области рассматриваемой точки либрации.

Обозначим действительные корни уравнения (34) через  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$ . Если начальные условия движения выбрать так, чтобы было  $G_3 = G_4 = 0$ , то получим движение, при котором тело  $P$  будет всегда оставаться в области соответствующей точки либрации, так как координаты  $\xi, \eta, \zeta$  относительно этой точки будут ограничены для всех значений  $t$ .

Наличие орбит, сколь угодно близких к точкам  $L_1, L_2, L_3$ , является необходимым, но, конечно, не достаточным условием для существования периодических орбит в области этих точек.

Если ограничиться той точностью, какую могут дать приближенные уравнения движения (31), то легко получить периодические орбиты, выбирая надлежащим образом начальные координаты  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  и начальные компоненты скорости  $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$  тела  $P$ .

Прежде всего дадим  $\zeta_0$  и  $\dot{\zeta}_0$  значения, равные нулю; в формуле (32) будет  $c_1 = c_2 = 0$ , т. е. движение  $P$  будет плоским. Определим далее  $\xi_0$  и  $\eta_0$  условиями  $G_3 = 0, G_4 = 0$ . Формулы (35) дадут:

$$\xi = G_1 e^{\beta t i} + G_2 e^{-\beta t i}, \quad \eta = G_1 q_1 e^{\beta t i} + G_2 q_2 e^{-\beta t i},$$

так как  $\lambda_1 = \beta i, \lambda_2 = -\beta i$ , где  $\beta$  — действительное число.

Кроме того, на основании (33)

$$q_1 = q i, \quad q_2 = -q i,$$

где

$$q = \frac{\beta^2 + n^2 + 2A_k}{2n^2\beta}. \quad (37)$$

Поэтому окончательно будем иметь, выразив экспоненциальные функции через тригонометрические:

$$\xi = G' \cos \beta t + G'' \sin \beta t, \quad \eta = G'' q \cos \beta t - G' q \sin \beta t, \quad \zeta = 0,$$

где

$$G' = G_1 + G_2, \quad G'' = i(G_1 - G_2).$$

Определяя из этих равенств  $\cos \beta t$  и  $\sin \beta t$ , возводя найденные выражения в квадрат и складывая, получим уравнение траектории:

$$(G' q \xi + G'' \eta)^2 + (G'' q \xi - G' \eta)^2 = q^2 (G'^2 + G''^2)$$

или

$$q^2 \xi^2 + \eta^2 = q^2 (G'^2 + G''^2). \quad (38)$$

Таким образом, движение происходит по эллипсу, оси которого совпадают с координатными осями.

Обозначив полуоси, направленные по прямым  $L_k \xi$  и  $L_k \eta$ , соответственно через  $a$  и  $b$ , будем иметь

$$\frac{b}{a} = q.$$

Легко показать, что для всех трех коллинеарных точек либрации  $q > 1$ , поэтому эксцентриситет полученных эллиптических орбит равен

$$e = \frac{\sqrt{q^2 - 1}}{q}.$$

Следовательно, форма этих орбит не зависит от начального положения  $(\xi_0, \eta_0)$  точки  $P$ , которое влияет только на размеры орбиты.

Значения  $q$  и  $e$ , соответствующие трем значениям отношения масс  $S$  и  $J$ , даны в нижеследующей таблице. Первые два значения отношения масс лежат в основе упомянутых в § 41 работ Стрёмгрена и Дарвина, третье значение имеет место в системе Земля—Солнце.

$m_2 : m_1$	$\mu$	$L_1$		$L_2$		$L_3$	
		$q$	$e$	$q$	$e$	$q$	$e$
1	0.5	4.387	0.974	2.221	0.893	2.221	0.893
0.1	0.090 909	3.988	0.968	2.659	0.929	2.015	0.869
1 : 320 000	0.000 003	3.227	0.951	3.187	0.951	2.000	0.867

Нами получены, таким образом, три семейства бесконечно малых периодических орбит, каждое из которых зависит от двух параметров.

Наличие этих орбит, конечно, еще не позволяет утверждать, что вблизи либрационных точек  $L_1, L_2, L_3$  существуют периодические орбиты конечного размера. Можно показать, что такие периодические орбиты действительно существуют.<sup>1</sup>

В заключение упомянем о применении, которое Гюльден и Мультион сделали из только-что развитой теории для объяснения явления противояния. Выдвинутая ими гипотеза заключается в предположении, что либрационная точка  $L_2$  для Земли служит центром скопления метеоров,

<sup>1</sup> F. R. Moulton, Periodic Orbits, глава V. Там же подробно указана литература этого вопроса.

заполняющих межпланетное пространство. В самом деле, метеоры, для которых  $G_3 = G_4 = 0$ , навсегда остаются в области этой точки, а те, для которых  $G_3$  и  $G_4$  малы, надолго задерживаются вблизи соответствующей точки либрации. Солнечный свет, отраженный образовавшимся таким образом скоплением метеоров, мы и наблюдаем в виде противостояния.

Расстояние точки  $L_2$  от Земли, выраженное в астрономических единицах, равно 0.0101 (стр. 105), что составляет около 1 490 000 км. Отсюда легко заключить, что в случае справедливости указанной гипотезы противостояние должно иметь параллакс порядка 15". К сожалению, противостояние представляет слишком расплывчатый объект, чтобы можно было надеяться обнаружить такой параллакс и тем подтвердить эту гипотезу.

### § 43. Движение вблизи треугольных точек либрации.

Обратимся теперь к изучению движения тела  $P$  вблизи точек либрации  $L_4$  и  $L_5$ .

Положим

$$m_1 = 1 - \mu, \quad m_2 = \mu,$$

откуда  $m^2 = m_1 + m_2 = 1$ , и будем в дальнейшем считать, что

$$0 < \mu \leq \frac{1}{2}.$$

Координаты тел  $S$  и  $J$  равны очевидно

$$-a_1 = -\mu, \quad a_2 = 1 - \mu,$$

поэтому координаты точки  $L_4$  таковы:

$$a = \frac{1}{2}(1 - 2\mu), \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad c = 0.$$

Координаты точки  $L_5$  получаются из координат  $L_4$  путем изменения знака  $\sqrt{3}$ . Вследствие этого, изучив движение вблизи точки  $L_4$ , мы можем сразу получить соответствующие результаты для точки  $L_5$  путем указанной перемены знака.

Дифференцируя функцию  $\Omega$  и заменяя  $x, y, z$  только-что указанными координатами точки  $L_4$ , получим уравнения движения (30) в таком виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\ddot{\eta} &= \frac{3}{4}\xi + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\eta \\ \ddot{\eta} + 2\ddot{\xi} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\xi + \frac{9}{4}\eta \\ \ddot{\zeta} &= -\zeta. \end{aligned} \quad (39)$$

Общий интеграл последнего уравнения

$$\zeta = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad (40)$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные, показывает, что проекция точки  $P$  на ось  $Oz$  совершает периодические колебания около проекции на ту же ось точки либрации. Период этого колебания равен  $2\pi$ , т. е. он совпадает с периодом обращения конечных масс  $S$  и  $J$  вокруг центра инерции. Не следует только забывать, что этот результат имеет силу лишь для линейных колебаний около положения относительного равновесия, т. е. для таких движений, для которых мы действительно можем в урав-

нениях (30) пренебречь членами, заключающими вторые и высшие степени величин  $\xi, \eta, \zeta$ .

Обратимся теперь к решению двух первых уравнений системы (39), которые можно написать так:

$$\ddot{\xi} - 2\ddot{\eta} = R\xi + S\eta; \quad \ddot{\eta} + 2\ddot{\xi} = S\xi + T\eta, \quad (41)$$

если положить

$$R = \frac{3}{4}, \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu), \quad T = \frac{9}{4}.$$

Делая, согласно общему правилу,

$$\xi = Ge^{\lambda t}, \quad \eta = He^{\lambda t},$$

для определения постоянных получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 - R)G - (2\lambda + S)H &= 0 \\ (2\lambda - S)G + (\lambda^2 - T)H &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

которые прежде всего дают

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0. \quad (43)$$

Обозначив через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  корни этого уравнения, решение системы (41) получим в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= G_1 e^{\lambda_1 t} + G_2 e^{\lambda_2 t} + G_3 e^{\lambda_3 t} + G_4 e^{\lambda_4 t} \\ \eta &= H_1 e^{\lambda_1 t} + H_2 e^{\lambda_2 t} + H_3 e^{\lambda_3 t} + H_4 e^{\lambda_4 t}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где  $G_1, G_2, G_3, G_4$  можно принять за произвольные постоянные, а соответствующие значения  $H_1, H_2, H_3, H_4$  определяются равенствами (42).

Характер движения, представляемого формулами (44), будет зависеть в первую очередь от характера корней уравнения (43). Эти корни даются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = -\lambda_2 &= \sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{M}} \\ \lambda_3 = -\lambda_4 &= \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{M}}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где

$$M = 1 - 27\mu(1 - \mu).$$

При изменении  $\mu$  от 0 до  $\frac{1}{2}$  величина  $M$  сначала положительна, затем при  $\mu = \mu_0$ , где

$$\mu_0 = 0.038\,520\,896 \dots \approx \frac{1}{26},$$

обращается в нуль, после чего  $M$  остается отрицательной величиной вплоть до  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Отсюда следует, что при значениях  $\mu$ , лежащих в интервале

$$0 < \mu < \mu_0,$$

уравнение (43) имеет различные, чисто мнимые корни. Следовательно общее решение (44) может быть представлено в форме:

$$\begin{aligned} \xi &= G' \cos \beta t + G'' \sin \beta t + G''' \cos \gamma t + G'''' \sin \gamma t \\ \eta &= H' \cos \beta t + H'' \sin \beta t + H''' \cos \gamma t + H'''' \sin \gamma t, \end{aligned}$$

где

$$\beta = -i\lambda_1, \quad \gamma = -i\lambda_3;$$

через  $G', G'', G''', G''''$  обозначены новые произвольные постоянные, а коэффициенты  $H', H'', \dots$  выражаются через  $G', G'', \dots$  при помощи тех соотношений, которые существовали между  $G_1, G_2, \dots$  и  $H_1, H_2, \dots$ .

Отсюда прежде всего ясно, что в рассматриваемом случае точки либрации  $L_4$  и  $L_5$  являются положениями устойчивого относительного равновесия для тела  $P$ , имеющего бесконечно малую массу. В самом деле, для того, чтобы  $\xi$  и  $\eta$  оставались всегда по абсолютной величине меньше произвольно малого заданного числа, нужно только, чтобы начальные значения  $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$  были достаточно малы.

Каковы бы ни были начальные условия, движение тела  $P$  (в проекции на плоскость  $\xi\eta$ ) можно рассматривать как наложение двух эллиптических движений, представляемых формулами:

$$\xi = G' \cos \beta t + G'' \sin \beta t, \quad \eta = H' \cos \beta t + H'' \sin \beta t \quad (46)$$

и

$$\xi = G''' \cos \gamma t + G'''' \sin \gamma t, \quad \eta = H''' \cos \gamma t + H'''' \sin \gamma t. \quad (47)$$

Если начальные условия выбрать так, чтобы постоянные  $c_1$  и  $c_2$  в формуле (40) были равны нулю, а с другой стороны, чтобы было либо  $G''' = G'''' = 0$ , либо  $G' = G'' = 0$ , то получим периодические орбиты, имеющие период  $2\pi/\beta$  в первом случае и  $2\pi/\gamma$  — во втором. Каждая из этих периодических орбит зависит от двух произвольных постоянных.

Мы рассмотрели случай, когда  $0 < \mu < \mu_0$ . Если  $\mu > \mu_0$ , то  $M < 0$ , вследствие чего все корни  $\lambda_1, \dots$  будут комплексные числа с вещественной частью, не равной нулю, а потому общее решение (44) можно написать так:

$$\begin{aligned} \xi &= e^{\sigma t} (G' \cos \beta t + G'' \sin \beta t) + e^{\tau t} (G''' \cos \gamma t + G'''' \sin \gamma t) \\ \eta &= e^{\sigma t} (H' \cos \beta t + H'' \sin \beta t) + e^{\tau t} (H''' \cos \gamma t + H'''' \sin \gamma t), \end{aligned}$$

где  $\sigma, \tau, \beta, \gamma$  — вещественные числа, не равные нулю.

Очевидно в этом случае  $L_4$  и  $L_5$  являются для тела  $P$  положениями неустойчивого относительного равновесия.

Что касается до промежуточного случая, когда  $\mu = \mu_0$ , то он будет рассмотрен в следующем параграфе.

#### § 44. Применение нормальных координат.

Эллиптические движения (46) и (47), на которые мы разложили движения бесконечно близкие к либрационным точкам  $L_4$  и  $L_5$ , происходят по орбитам, оси которых наклонены к осям координат. Для того, чтобы проще изучить форму этих орбит, приведем уравнения движения (41) к тому виду, который имеют первые два из уравнений (31).

Уравнения (41) можно написать так:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

где

$$F = R\xi^2 + 2S\xi\eta + T\eta^2.$$

Отсюда ясно, что эти уравнения имеют интеграл

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = F - C.$$

Таким образом, кривые нулевой скорости, определяемые уравнением

$$R\xi^2 + 2S\xi\eta + T\eta^2 = C, \quad (48)$$

конические сечения с центром в либрационной точке  $L_4$ .

Чтобы привести уравнение (48) к каноническому виду:

$$A\xi_1^2 + B\eta_1^2 = C,$$

нужно, как известно, повернуть оси координат на угол  $\theta$ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2S}{R-T} = -\sqrt{3}(1-2\mu).$$

Новые координаты выразятся при этом через старые при помощи соотношений

$$\xi_1 = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta, \quad \eta_1 = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta,$$

а коэффициенты  $A$  и  $B$  найдутся как корни векового уравнения

$$\begin{vmatrix} R-\omega & S \\ S & T-\omega \end{vmatrix} = 0$$

или, в развернутом виде,

$$\omega^2 - 3\omega + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0.$$

Следовательно

$$A = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{1-3\mu(1-\mu)}, \quad B = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{1-3\mu(1-\mu)}.$$

Таким образом, после указанного преобразования уравнения (41) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 - 2\dot{\eta}_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} = A\xi_1 \\ \ddot{\eta}_1 + 2\dot{\xi}_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \eta_1} = B\eta_1. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Полагая опять

$$\xi_1 = Ee^{\lambda t}, \quad \eta_1 = Fe^{\lambda t},$$

получим

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - A)E - 2\lambda F &= 0 \\ 2\lambda E + (\lambda^2 - B)F &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда для  $\lambda$  найдем прежние значения (45), но соответствующие отношения  $F:E$  будут уже иные.

Для  $\lambda_1 = \beta i$  и  $\lambda_2 = -\beta i$  соответственно найдем

$$F = pEi \quad \text{и} \quad F = -pEi,$$

где

$$p = \frac{\beta^2 + A}{2\beta} = \frac{2\beta}{\beta^2 + B}.$$

Точно так же для  $\lambda_3 = \gamma i$  и  $\lambda_4 = -\gamma i$  получим соответственно

$$F = qEi \text{ и } F = -qEi,$$

где

$$q = \frac{\gamma^2 + A}{2\gamma} = \frac{2\gamma}{\gamma^2 + B}.$$

Сообразно с этим формулы (46) и (47) заменятся такими:

$$\xi_1 = E' \cos \beta t + E'' \sin \beta t, \quad \eta_1 = E'' p \cos \beta t - E' p \sin \beta t \quad (50)$$

и

$$\xi_1 = E''' \cos \gamma t + E'''' \sin \gamma t, \quad \eta_1 = E'''' q \cos \gamma t - E''' q \sin \gamma t. \quad (51)$$

Первая пара формул представляет движение по эллипсу

$$p^2 \xi_1^2 + \eta_1^2 = p^2 (E'^2 + E''^2);$$

для движения, представляемого второй парой формул, уравнение траектории таково:

$$q^2 \xi_1^2 + \eta_1^2 = q^2 (E'''^2 + E''''^2).$$

Отсюда ясно, что отношения полуосей этих эллипсов, равные соответственно  $p$  и  $q$ , а следовательно и их эксцентриситеты, не зависят от постоянных  $E', E'', \dots$ , т. е. от начальных условий движения.

Прилагаемая табличка заключает величины, характеризующие движение вблизи точек либрации  $L_4$  и  $L_5$ .

$\mu$	$-\theta$	$A$	$B$	$\beta$	$\gamma$
0.000	30° 0' 0"	0.0000	3.0000	1.000 00	0.000 00
0.004	29 54 1	0.0090	2.9910	0.986 07	0.166 30
0.008	29 47 57	0.0180	2.9820	0.971 19	0.238 31
0.012	29 41 49	0.0269	2.9731	0.955 13	0.296 18
0.016	29 35 36	0.0359	2.9641	0.937 61	0.347 69
0.020	29 29 19	0.0448	2.9552	0.918 19	0.396 14
0.024	29 22 57	0.0537	2.9463	0.896 18	0.443 70
0.028	29 16 20	0.0635	2.9375	0.870 33	0.492 47
0.032	29 9 59	0.0714	2.9286	0.838 01	0.545 65
0.036	29 3 22	0.0802	2.9198	0.790 88	0.611 97

На рис. 9 изображены, в сильно увеличенном виде, эллиптические орбиты, приблизительно соответствующие случаю  $\mu = 0.01$ . Как показывает приведенная таблица, чем меньше  $\mu$ , тем более точно большая ось рассматриваемых эллипсов совпадает с касательной той орбиты, которую точка  $J$  описывает вокруг  $S$ .

Обратимся теперь к случаю, когда

$$\mu = \mu_0 = 0.038 5.$$

и следовательно

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = -\frac{i}{\sqrt{2}},$$

$$\theta = -28^\circ 59' 10'', \quad A = 0.085 786 44, \quad B = 2.914 213 56.$$

В этом случае наряду с движением по эллипсу, представляемым формулами (50) или (51), которые становятся тождественными, мы будем еще иметь, как легко проверить, частное решение уравнений (49) вида:

$$\xi_1 = K(t-t_0) \sin \frac{t-t_0}{\sqrt{2}}$$

$$\eta_1 = K(\sqrt{2}-1) \left[ (t-t_0) \cos \frac{t-t_0}{\sqrt{2}} + \sin \frac{t-t_0}{\sqrt{2}} \right],$$

закрывающее произвольные постоянные  $K$  и  $t_0$ .

Отсюда ясно, что уже при  $\mu = \mu_0$  движение становится неустойчивым.

§ 45. Критерий Тиссерана.

Заканчивая эту главу, остановимся еще на одном применении интеграла Якоби, указанном Тиссераном.

Известно, что элементы орбиты кометы, прошедшей вблизи планеты, могут измениться очень сильно, вследствие чего отождествить две кометы только на основании их элементов часто бывает весьма затруднительно, тем более что внешний вид и даже яркость комет очень изменчивы. Конечно, вопрос всегда может быть решен путем вычисления возмущений одной из рассматриваемых комет от времени ее появления до времени появления другой кометы. Однако такое вычисление требует немало труда, так что производить его имеет смысл, лишь имея шансы на успешное отождествление.

Большие изменения элементов, придающие орбите заметно другой характер, происходят только тогда, когда комета проходит очень близко от планеты, в особенности от такой планеты, как Юпитер. Вследствие большой массы Юпитера и значительного удаления его от Солнца, для кометы, расстояние которой от Юпитера меньше чем примерно 0.3, притяжение Юпитера оказывается более сильным, чем притяжение Солнца (§ 72).

Именно, за короткое сравнительно время таких близких прохождений и происходят те большие изменения элементов, по сравнению с которыми обычные возмущения, производимые остальными планетами, не имеют почти никакого значения. Поэтому в первом приближении рассматриваемый случай можно уподобить ограниченной проблеме, тем более, что эксцентриситет орбиты Юпитера мал и, кроме того, комета остается в сфере его влияния лишь короткое время, в течение которого отклонение движения Юпитера от кругового весьма незначительно.

Таким образом, сохраняя обозначения, введенные в § 38, мы видим, что координаты  $(x, y, z)$  кометы должны удовлетворять равенству (4), т. е.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 (x^2 + y^2) + 2k^2 \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - C \quad (52)$$

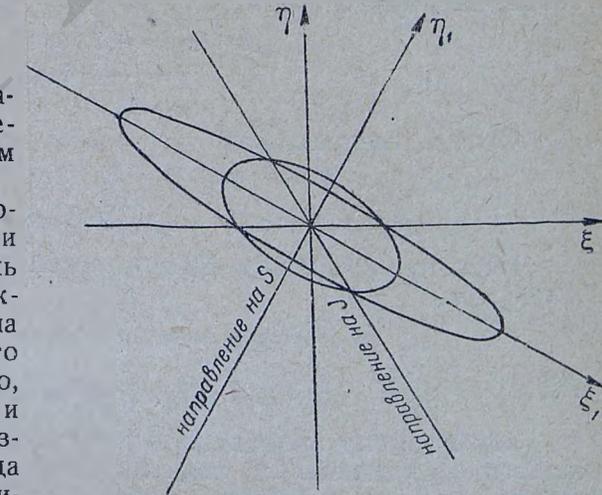


Рис. 9.

Это соотношение дает, очевидно, следующее необходимое условие тождественности двух комет: *две кометы могут оказаться тождественными только в том случае, если постоянная Якоби  $C$  у них одинакова.*

Чтобы применить найденное условие, нужно вычислить для каждой кометы относительные координаты  $x, y, z$  и компоненты относительной скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ , после чего равенство (52) даст соответствующее этой комете значение  $C$ .

С целью упрощения применения этого критерия перейдем к неподвижной гелиоцентрической системе координат  $S\xi\eta\zeta$ , у которой ось  $S\xi$  параллельна оси  $Oz$ .

Условившись считать время от того момента, когда оси  $Sx$  и  $Oz$  совпадают, будем иметь

$$\begin{aligned} x + a_1 &= +\xi \cos nt + \eta \sin nt \\ y &= -\xi \sin nt + \eta \cos nt \\ z &= \zeta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \xi^2 + \eta^2 - 2a_1(\xi \cos nt + \eta \sin nt) + a_1^2 \\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + n^2(\xi^2 + \eta^2) - 2n(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}). \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (52) в новой координатной системе примет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2n(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) &= 2k^2 \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - \\ &- 2n^2 a_1 (\xi \cos nt + \eta \sin nt) + n^2 a_1^2 - C. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Эту формулу применяют для вычисления  $C$  тогда, когда комета находится уже далеко от возмущающей планеты и потому ее движение происходит почти исключительно под влиянием притяжения Солнца. Пользуясь этим обстоятельством, формулу можно существенно упростить.

Обозначим через  $a, e, i, \dots$  элементы кометы в ее движении вокруг Солнца. Принимая массу Солнца за единицу, положим  $m_1 = 1$ . В таком случае интеграл площадей и интеграл живой силы проблемы двух тел позволят нам написать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} &= k\sqrt{p} \cos i \\ \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 &= k^2 \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \end{aligned}$$

где через  $r = r_1$  обозначен радиус-вектор кометы.

Следовательно, равенство (53) можно заменить таким:

$$a^{-1} + 2n'k^{-1}\sqrt{p} \cos i = C_0 + \delta,$$

где среднее суточное движение Юпитера  $n$  заменено через  $n'$  для отличия от элементов кометы и кроме того положено

$$\begin{aligned} C_0 &= Ck^{-2} \\ \delta &= 2n'^2 k^{-2} a_1 (\xi \cos n't + \eta \sin n't) - n'^2 k^{-2} a_1^2 - 2m_2 r_2^{-1}. \end{aligned}$$

В тех случаях, с которыми приходится иметь дело на практике, координаты  $\xi$  и  $\eta$  невелики. Так как  $a_1$  и  $m_2$  величины очень малые (порядка 0.001) и, кроме того,

$$n'k^{-1} = 0.0843045,$$

то  $\delta$  можно отбросить.

Мы видим, таким образом, что после прохождения кометы через сферу влияния Юпитера выражение

$$a^{-1} + 2n'k^{-1}\sqrt{a(1-e^2)} \cos i = C_0 \quad (54)$$

должно сохранить свою величину.

Это равенство и представляет критерий Тиссерана, дающий необходимое (но, конечно, недостаточное) условие тождественности двух комет.

Заметим, что соотношение (54) может быть несколько уточнено, если, с одной стороны, принять во внимание поправочный член  $\delta$ , а с другой — среднее суточное движение Юпитера заменить его угловой гелиоцентрической скоростью

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{k\sqrt{p'}}{r'^2},$$

или, пренебрегая квадратом эксцентриситета Юпитера,

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{k\sqrt{a'}}{r'^2}.$$

Таким образом, более точная формула имеет вид:

$$a^{-1} + 2\sqrt{a'a}(1-e^2)r'^{-2} \cos i - \delta = C_0. \quad (55)$$

Радиус-вектор Юпитера  $r'$  лучше всего взять для момента предполагаемого приближения кометы к Юпитеру.

В качестве иллюстрации к изложенной теории рассмотрим приближение кометы Вольфа к Юпитеру в 1922 году, изученное М. Каменским.<sup>1</sup>

Оскулирующие элементы этой кометы до входа в сферу действия Юпитера и после выхода из этой сферы таковы:

	1922 Июль 8.0	1922 Дек. 15.0	
$M_0$	= 191°8' 55".2	234°44'28".7	
$\varphi$	= 34 44 48.9	24 49 59.7	
$n$	= 528".4530	432".1289	
$\Omega$	= 205°38'57".3	205°7' 22".2	} 1925.0
$\pi$	= 18 49 38.8	5 24 9.4	
$i$	= 27 39 9.7	29 3 0.0	
$a$	... 0.55133	0.60960	
$\sqrt{p}$	... 0.19037	0.26266	
$\cos i$	... 9.94732	9.94161	

Такое большое изменение элементов объясняется тем, что минимальное расстояние между кометой и Юпитером дошло 27 сентября 1922 г. до  $\Delta = 0.1247$ .

Принимая  $\lg a' = 0.71624$ ,  $\lg r' = 0.73604$  и пренебрегая в формуле (55) малой величиной  $\delta$ , получим для двух указанных моментов такие значения:

$$C_0 = 0.49221 \text{ и } 0.49193.$$

Мы видим, таким образом, как мало меняется величина  $C_0$  даже при больших изменениях элементов.

<sup>1</sup> Приводимые нами числа заимствованы из работы: M. Kamiński, Recherches sur le mouvement de la comète périodique de Wolf, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A, 1925.

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ СВЕТИЛ**

ГЛАВА VIII.

**ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.**

**§ 46. Введение.**

Все проблемы Небесной механики приводятся в конечном счете к решению тех или иных дифференциальных уравнений. Поэтому прогресс Небесной механики всегда был неразрывно связан с развитием методов решения дифференциальных уравнений.

Только в самых простых случаях, как например в задаче двух тел, дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы в конечном виде. Вообще же решение не может быть выражено при помощи известных функций, и потому приходится прибегать к другим методам решения дифференциальных уравнений. Наиболее общими и в то же время наиболее мощными из таких методов являются два: 1) метод интегрирования при помощи рядов и 2) метод численного интегрирования.

В этой главе мы изучим со всеми подробностями численное интегрирование дифференциальных уравнений.

Впервые численные методы были применены, и притом с большим успехом, Клэро (1713—1765) при вычислении возмущений кометы Галлея. Употребленный им способ интегрирования был усовершенствован Даламбером, Эйлером и особенно Лапласом, но окончательную свою форму он получил в руках Гаусса<sup>1</sup> в виде так называемого метода квадратур.

Метод квадратур был создан для решения определенной задачи: вычисления возмущений комет и малых планет. Этим объясняется, что до недавнего времени этот метод обычно рассматривался не как общий способ интегрирования какого угодно уравнения, а как способ вычисления возмущений, т. е. вычисления небольших поправок к решению, уже приближенно известному.

В астрономических вопросах такое исходное приближенное решение дается невозмущенным движением по законам Кеплера.

<sup>1</sup> C. F. Gauss, Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires (Nachlass), Werke, 7, 1906, 439—472.

Формулы Гаусса впервые были опубликованы Энке (J. F. Encke, Über mechanische Quadratur, Berliner Astr. Jahrbuch für 1837, Berlin 1835. Перепечатано в Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen, Berlin 1888, 21—60).

Употреблявшееся ранее наименование „механические“ квадратуры не только утратило сейчас свой смысл, но и может дать повод к недоразумениям.

Поэтому, когда в 1908 г. был открыт восьмой спутник Юпитера, движение которого весьма мало похоже на движение по законам Кеплера, и когда, таким образом, пришлось встретиться с динамической задачей общего характера, Коуэлл не обратился к „механическим квадратурам“, а создал особый метод численного интегрирования уравнений. Таково происхождение метода Коуэлла, привлечшего к себе внимание в особенности после блестящего применения к предвычислению возвращения кометы Галлея в 1910 г.<sup>1</sup>

Заканчивая работу о движении кометы Галлея, Коуэлл сделал весьма важный вывод из своего обширного опыта применения численного интегрирования;<sup>2</sup> вывод, который долго не обращал на себя внимания,<sup>3</sup> хотя теоретически он почти очевиден. Этот вывод заключается в том, что метод Коуэлла может быть существенно улучшен, но после этого улучшения он становится совершенно идентичен с методом квадратур в той форме, какую ему придал Гаусс.

За последние десятилетия численное интегрирование уравнений стало применяться и за пределами Небесной механики. В связи с этим, Адамсом, Штёрмером, Рунге и другими было предложено еще несколько методов. Но все эти методы гораздо менее совершенны, нежели метод квадратур, и потому в Небесной механике широкого применения найти не могут.<sup>4</sup>

Тем не менее мы не будем ограничиваться в дальнейшем выводом формул метода квадратур, но рассмотрим и другие методы: это позволит выяснить преимущества метода квадратур.

**§ 47. Выражение производных через разности.**

Значения каждой функции мы будем рассматривать для значений независимого переменного  $t$ , образующих арифметическую прогрессию

$$\dots t_0 - 2w, t_0 - w, t_0, t_0 + w, t_0 + 2w, \dots$$

причем значения, например, функции  $f(t)$  будем обозначать через

$$f_k = f(t_k),$$

где

$$t_k = t_0 + kw.$$

Прилагаемая схема (стр. 134) наглядно показывает ту систему обозначений разностей, которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Таким образом

$$f_{k+\frac{1}{2}}^1 = f_{k+1} - f_k$$

$$f_k^2 = f_{k+\frac{1}{2}}^1 - f_{k-\frac{1}{2}}^1$$

при любом целом значении  $k$ .

<sup>1</sup> P. H. Cowell and A. D. Crommelin, The Orbit of Jupiter's Eighth Satellite, Monthly Notices, 68, 577—581.

P. H. Cowell and A. D. Crommelin, Essay on the return of Halley's Comet, Publikation der Astron. Gesellschaft, 23, 1910.

<sup>2</sup> Appendix to the Volume of Greenwich Observations for the 1909, 84.

<sup>3</sup> J. Jackson, Note on the numerical integration of  $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t)$ , Monthly Notices, 84, 1924, 602.

<sup>4</sup> Относительно этих методов, представляющих большой интерес для техники, см. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, 3-е изд., 1935.

	Суммы 2-го порядка	Суммы 1-го порядка	Значения функций	Разности 1-го порядка	Разности 2-го порядка	Разности 3-го порядка	...
-2	$f_{-2}^{-2}$		$f_{-2}$		...		...
		$f_{-3/2}^{-1}$		$f_{-1/2}^1$		...	
-1	$f_{-1}^{-2}$		$f_{-1}$		$f_{-1}^2$		...
		$f_{-1/2}^{-1}$		$f_{-1/2}^1$		$f_{-1/2}^3$	
0	$f_0^{-2}$		$f_0$		$f_0^2$		...
		$f_{1/2}^{-1}$		$f_{1/2}^1$		$f_{1/2}^3$	
1	$f_1^{-2}$		$f_1$		$f_1^2$		...
		$f_{3/2}^{-1}$		$f_{3/2}^1$		...	
2	$f_2^{-2}$		$f_2$		...		...
...	...	...	...	...	...	...	...

Одно из значений столбца сумм первого порядка может быть взято произвольно. Остальные вычисляются по формуле

$$f_{k+1/2}^{-1} = f_{k-1/2}^{-1} + f_k \quad (1)$$

Точно так же, взяв произвольно одно из значений вторых сумм, например  $f_0^{-2}$ , мы получим все остальные числа этого столбца по формуле:

$$f_{k+1}^{-2} = f_k^{-2} + f_{k+1/2}^{-1} \quad (2)$$

делая  $k=0, 1, 2, \dots$  и  $k=-1, -2, -3, \dots$

Вышеуказанная разностная схема часто пополняется еще полусуммами двух соседних величин одного и того же столбца. Для этих полусумм применяются следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f_{k+1/2} &= \frac{1}{2}(f_k + f_{k+1}), & f_k^1 &= \frac{1}{2}(f_{k-1/2}^1 + f_{k+1/2}^1), \dots \\ f_k^{-1} &= \frac{1}{2}(f_{k-1/2}^{-1} + f_{k+1/2}^{-1}), & f_{k+1/2}^{-2} &= \frac{1}{2}(f_k^{-2} + f_{k+1}^{-2}), \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Обратимся теперь к выражению производных через разности. Возьмем сначала интерполяционную формулу Стирлинга

$$f(t_k + zw) = f_k + zf_k^1 + \frac{z^2}{2!} f_k^2 + \frac{z(z^2-1^2)}{3!} f_k^3 + \frac{z^2(z^2-1^2)}{4!} f_k^4 + \dots$$

Дифференцируя это равенство по  $z$  и делая затем  $z=0$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} w \left( \frac{df}{dt} \right)_k &= f_k^1 - \frac{1}{6} f_k^3 + \frac{1}{30} f_k^5 - \frac{1}{140} f_k^7 + \dots \\ w^2 \left( \frac{d^2f}{dt^2} \right)_k &= f_k^2 - \frac{1}{12} f_k^4 + \frac{1}{90} f_k^6 - \frac{1}{560} f_k^8 + \dots \\ w^3 \left( \frac{d^3f}{dt^3} \right)_k &= f_k^3 - \frac{1}{4} f_k^5 + \frac{7}{120} f_k^7 - \dots \\ \dots \left( \frac{d^4f}{dt^4} \right)_k &= f_k^4 - \frac{1}{1} f_k^6 + \frac{7}{7} f_k^8 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
134	6 сверху	$\frac{3}{1/2}$	$f_{1/2}^3$	типографии

позволяет выразить значения производных  $f(t)$  при  $t=t_k$  через разности строки  $n = k + \frac{1}{2}$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} w \left( \frac{df}{dt} \right)_k &= f_{k+1/2}^1 - \frac{1}{2} f_{k+1/2}^3 + \frac{1}{12} f_{k+1/2}^5 - \frac{1}{120} f_{k+1/2}^7 + \dots \\ w^2 \left( \frac{d^2f}{dt^2} \right)_k &= f_{k+1/2}^2 - \frac{1}{2} f_{k+1/2}^4 + \frac{1}{12} f_{k+1/2}^6 - \frac{1}{24} f_{k+1/2}^8 + \dots \\ w^3 \left( \frac{d^3f}{dt^3} \right)_k &= f_{k+1/2}^3 - \frac{1}{2} f_{k+1/2}^5 + * + \dots \\ w^4 \left( \frac{d^4f}{dt^4} \right)_k &= f_{k+1/2}^4 - \frac{1}{2} f_{k+1/2}^6 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В способах численного интегрирования уравнений, предложенных Адамсом и Штёрмером, находят применение еще следующие формулы, выражающие рассматриваемые производные через разности, расположенные по восходящей диагонали:

$$\left. \begin{aligned} w \left( \frac{df}{dt} \right)_k &= f_{k-1/2}^1 + \frac{1}{2} f_{k-1}^2 + \frac{1}{3} f_{k-3/2}^3 + \frac{1}{4} f_{k-2}^4 + \frac{1}{5} f_{k-5/2}^5 + \dots \\ w^2 \left( \frac{d^2f}{dt^2} \right)_k &= f_{k-1}^2 + f_{k-3/2}^3 + \frac{11}{12} f_{k-2}^4 + \frac{5}{6} f_{k-5/2}^5 + \dots \\ w^3 \left( \frac{d^3f}{dt^3} \right)_k &= f_{k-3/2}^3 + \frac{3}{2} f_{k-2}^4 + \frac{7}{4} f_{k-5/2}^5 + \dots \\ w^4 \left( \frac{d^4f}{dt^4} \right)_k &= f_{k-2}^4 + \frac{11}{5} f_{k-5/2}^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

	Суммы 2-го порядка	Суммы 1-го порядка	Значения функций	Разности 1-го порядка	Разности 2-го порядка	Разности 3-го порядка	...
-2	$f_{-2}^{-2}$		$f_{-2}$		...		...
-1	$f_{-1}^{-2}$	$f_{-1}^{-1}$	$f_{-1}$	$f_{-1/2}^1$	$f_{-1}^2$		...

произвольно. Остальные вычисляются по формуле

$$f_{k+\frac{1}{2}}^{-1} = f_{k-\frac{1}{2}}^{-1} + f_k \quad (1)$$

Точно так же, взяв произвольно одно из значений вторых сумм, например  $f_0^{-2}$ , мы получим все остальные числа этого столбца по формуле:

$$f_{k+1}^{-2} = f_k^{-2} + f_{k+\frac{1}{2}}^{-1}, \quad (2)$$

делая  $k=0, 1, 2, \dots$  и  $k=-1, -2, -3, \dots$

Вышеуказанная разностная схема часто пополняется еще полусуммами двух соседних величин одного и того же столбца. Для этих полусумм применяются следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} f_{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(f_k + f_{k+1}), & f_k^1 &= \frac{1}{2}(f_{k-\frac{1}{2}}^1 + f_{k+\frac{1}{2}}^1), \dots \\ f_k^{-1} &= \frac{1}{2}(f_{k-\frac{1}{2}}^{-1} + f_{k+\frac{1}{2}}^{-1}), & f_{k+\frac{1}{2}}^{-2} &= \frac{1}{2}(f_k^{-2} + f_{k+1}^{-2}), \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Обратимся теперь к выражению производных через разности. Возьмем сначала интерполяционную формулу Стирлинга

$$f(t_k + zw) = f_k + zf_k^1 + \frac{z^2}{2!} f_k^2 + \frac{z(z^2-1^2)}{3!} f_k^3 + \frac{z^2(z^2-1^2)}{4!} f_k^4 + \dots$$

Дифференцируя это равенство по  $z$  и делая затем  $z=0$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} w \left( \frac{df}{dt} \right)_k &= f_k^1 - \frac{1}{6} f_k^3 + \frac{1}{30} f_k^5 - \frac{1}{140} f_k^7 + \dots \\ w^2 \left( \frac{d^2f}{dt^2} \right)_k &= f_k^2 - \frac{1}{12} f_k^4 + \frac{1}{90} f_k^6 - \frac{1}{560} f_k^8 + \dots \\ w^3 \left( \frac{d^3f}{dt^3} \right)_k &= f_k^3 - \frac{1}{4} f_k^5 + \frac{7}{120} f_k^7 - \dots \\ w^4 \left( \frac{d^4f}{dt^4} \right)_k &= f_k^4 - \frac{1}{6} f_k^6 + \frac{7}{240} f_k^8 - \dots \\ w^5 \left( \frac{d^5f}{dt^5} \right)_k &= f_k^5 - \frac{1}{3} f_k^7 + \dots \\ w^6 \left( \frac{d^6f}{dt^6} \right)_k &= f_k^6 - \frac{1}{4} f_k^8 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Совершенно так же формула Бесселя

$$f(t_k + zw) = f_k + zf_{k+\frac{1}{2}}^1 + \frac{z(z-1)}{2!} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{z(z-1)(z-\frac{1}{2})}{3!} f_{k+\frac{1}{2}}^3 + \dots + \frac{(z+1)z(z-1)(z-2)}{4!} f_{k+\frac{1}{2}}^4 + \frac{(z+1)z(z-1)(z-2)(z-\frac{1}{2})}{5!} f_{k+\frac{1}{2}}^5 + \dots$$

позволяет выразить значения производных  $f(t)$  при  $t=t_k$  через разности строки  $n = k + \frac{1}{2}$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} w \left( \frac{df}{dt} \right)_k &= f_{k+\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^3 + \frac{1}{12} f_{k+\frac{1}{2}}^5 - \frac{1}{12} f_{k+\frac{1}{2}}^7 + \frac{1}{120} f_{k+\frac{1}{2}}^9 - \dots \\ w^2 \left( \frac{d^2f}{dt^2} \right)_k &= f_{k+\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^4 + \frac{1}{12} f_{k+\frac{1}{2}}^6 - \frac{1}{24} f_{k+\frac{1}{2}}^8 + \dots \\ w^3 \left( \frac{d^3f}{dt^3} \right)_k &= f_{k+\frac{1}{2}}^3 - \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^5 + \dots \\ w^4 \left( \frac{d^4f}{dt^4} \right)_k &= f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В способах численного интегрирования уравнений, предложенных Адамсом и Штёрмером, находят применение еще следующие формулы, выражающие рассматриваемые производные через разности, расположенные по восходящей диагонали:

$$\left. \begin{aligned} w \left( \frac{df}{dt} \right)_k &= f_{k-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2} f_{k-1}^2 + \frac{1}{3} f_{k-\frac{3}{2}}^3 + \frac{1}{4} f_{k-2}^4 + \frac{1}{5} f_{k-\frac{5}{2}}^5 + \dots \\ w^2 \left( \frac{d^2f}{dt^2} \right)_k &= f_{k-1}^2 + f_{k-\frac{3}{2}}^3 + \frac{11}{12} f_{k-2}^4 + \frac{5}{6} f_{k-\frac{5}{2}}^5 + \dots \\ w^3 \left( \frac{d^3f}{dt^3} \right)_k &= f_{k-\frac{3}{2}}^3 + \frac{3}{2} f_{k-2}^4 + \frac{7}{4} f_{k-\frac{5}{2}}^5 + \dots \\ w^4 \left( \frac{d^4f}{dt^4} \right)_k &= f_{k-2}^4 + \frac{11}{5} f_{k-\frac{5}{2}}^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти соотношения получаются тем же приемом из интерполяционной формулы Ньютона:

$$f(t_k + zw) = f_k + zf_{k-\frac{1}{2}}^1 + \frac{z(z+1)}{2!} f_{k-1}^2 + \frac{z(z+1)(z+2)}{3!} f_{k-\frac{3}{2}}^3 + \dots$$

Примечание. Для обозначения разностей, кроме вышеуказанных, употребляются еще и другие символы. Величину  $f_n^i$ , где  $i$  — целое число, а  $n$  — половина целого числа (четного или нечетного), обозначают через  $f^i(n)$  или  $f_i(n)$ , или через  $f^i(t_0 + nw)$ , или, наконец, через  $\Delta_n^i$ .

#### § 48. Интегрирование уравнений первого порядка. Разностные методы.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \quad (7)$$

Требуется вычислить таблицу значений функции  $x(t)$ , удовлетворяющей этому уравнению и начальному условию

$$x(t_0) = x_0,$$

где  $t_0$  и  $x_0$  — заданные числа.

Полагая, как всегда,  $x(t_0 + kw) = x_k$ , займемся вычислением  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Наша задача будет решена, если мы дадим средство для вычисления разностей

$$x_{k+1} - x_k = \Delta_{k+\frac{1}{2}}, \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Так как

$$x_{k+1} = x(t_k + w) = x_k + \frac{w}{1!} \left(\frac{dx}{dt}\right)_k + \frac{w^2}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_k + \dots$$

то

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = \frac{w}{1!} \left(\frac{dx}{dt}\right)_k + \frac{w^2}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_k + \dots$$

Полагая

$$wF(x, t) = f(t), \quad wF(x_k, t_k) = f_k$$

и принимая во внимание уравнение (7), получим:

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_k + \frac{w}{2} \left(\frac{df}{dt}\right)_k + \frac{w^2}{6} \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k + \frac{w^3}{24} \left(\frac{d^3f}{dt^3}\right)_k + \dots \quad (8)$$

Эта формула в сущности решает поставленную задачу. Однако ее применение<sup>1</sup> весьма неудобно, так как требует вычисления производных

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_k, \quad \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k, \dots$$

<sup>1</sup> Метод интегрирования уравнения (7), основанный на употреблении формулы (8), носит название метода Эйлера. Этот метод применяется только в том случае, когда в формуле (8) можно ограничиться двумя-тремя членами, т. е. когда интервал  $w$  очень мал, или же когда требуется небольшая точность.

Выразим поэтому стоящие здесь производные через разности. Пользуясь соотношениями (6), получим формулу:

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_k + \frac{1}{2} f_{k-\frac{1}{2}}^1 + \frac{5}{12} f_{k-1}^2 + \frac{3}{8} f_{k-\frac{3}{2}}^3 + \frac{251}{720} f_{k-2}^4 + \frac{95}{288} f_{k-\frac{5}{2}}^5 + \dots, \quad (9)$$

представляющую метод Адамса. Соотношения (5) дают формулу

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_k + \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{12} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{11}{720} f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \dots$$

которую можно написать так:

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{11}{720} f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \frac{191}{60480} f_{k+\frac{1}{2}}^6 + \frac{2497}{3628800} f_{k+\frac{1}{2}}^8 - \dots, \quad (10)$$

ибо

$$f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_k + f_{k+1}) = \frac{1}{2} (f_k + f_k + f_{k+\frac{1}{2}}^1) = f_k + \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^1.$$

Эта формула дает метод интегрирования, который можно назвать методом Коуэлла (так как аналогичный метод для уравнений второго порядка был предложен Коуэллом).

Когда  $x_1, x_2, \dots, x_k$  уже вычислены, то формула (9) сразу дает  $x_{k+1}$ . Что же касается формулы Коуэлла (10), то она выражает искомую разность  $x_{k+1} - x_k$  через такие разности  $f^2, f^4, \dots$ , которые зависят от  $f_{k+1}, f_{k+2}, \dots$ , а следовательно и от  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ . Эти разности  $f_{k+\frac{1}{2}}^2, f_{k+\frac{1}{2}}^4, \dots$  в первом приближении находят экстраполированием; затем, после того как найдены соответствующие  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ , их вычисляют обычным порядком и, если нужно, повторяют вычисление  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ . Благодаря скорости, с которой убывают коэффициенты в формуле (10), этот процесс сходится настолько быстро, что второе приближение оказывается излишним, если только интервал  $w$  взят не слишком большой.

В тех случаях, которые встречаются в Небесной механике, а именно при вычислении возмущений элементов орбиты, правая часть уравнения (7) изменяется медленно при изменении переменной  $x$ , которая в свою очередь меняется мало. Благодаря этому применение формулы (10) особенно упрощается, так как значения функции  $f$  и все ее разности могут быть вычислены наперед для нескольких интервалов при помощи приближенных значений  $x$ .

Формулы (9) и (10) могут быть применены только тогда, когда уже найдено несколько первых значений  $x_1, x_2, x_3, \dots$  искомой функции, необходимых для вычисления разностей  $f^1, f^2, \dots$ , входящих в эти формулы.

Значения  $x_1, x_2, \dots$  (а также  $x_{-1}, x_{-2}, \dots$ ) обычно вычисляются при помощи разложения интеграла в ряд

$$x(t) = x_0 + x_0'(t-t_0) + \frac{1}{2!} x_0''(t-t_0)^2 + \dots$$

Коэффициенты этого ряда найдем, продифференцировав несколько раз уравнение (7) и положив затем  $t=t_0$ .

Иногда эти начальные значения  $x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \dots$  определяют последовательными приближениями (§ 57). Пример такого приема будет дан в § 55.

Отметим также возможность нахождения нескольких первых значений  $x_1, x_2, x_3, \dots$  методом Эйлера.

#### § 49. Метод квадратур для уравнений первого порядка.

Недостатком разностных методов, рассмотренных в предыдущем параграфе, является накопление ошибок при вычислении  $x_1, x_2, \dots$  по их разностям  $\Delta$ .

Действительно, для определения  $x_n$  мы имеем равенства

$$x_1 - x_0 = \Delta_1, \quad x_2 - x_1 = \Delta_2, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1} = \Delta_{n-1}.$$

Складывая их почленно, получим:

$$x_n - x_0 = \sum_0^{n-1} \Delta_{k+\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Если погрешность каждой из разностей  $\Delta$  заключена в пределах от  $-\varepsilon$  до  $+\varepsilon$ , то наибольшая возможная погрешность  $x_n$  будет  $\pm \varepsilon n$ . Как известно, достижение погрешностью этой предельной величины чрезвычайно мало вероятно, однако все же при больших значениях  $n$  приходится серьезно считаться с прогрессивным понижением точности.

Чтобы лучше показать, каким образом может быть ослаблено накопление ошибки, возьмем, например, формулу (10), имеющую вид

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+\frac{1}{2}} + \text{Red},$$

где через Red обозначена поправка, которая должна быть придана к значению функции  $f$  для получения искомой разности  $\Delta$ ; допустим, для простоты, что значения функции совершенно точны в пределах употребляемого числа знаков. В этом случае поправка Red будет все же иметь некоторую ошибку, зависящую как от округления, так и от отбрасывания членов в формуле (10).

Итак, накопление ошибки в  $x_n$  при употреблении формулы (12) происходит от двух причин: от употребления ограниченного числа знаков при вычислении функции  $f$  и от неизбежной ошибки, которую мы делаем при нахождении поправки Red благодаря округлению и отбрасыванию членов.

Суммирование ошибок первого рода является неизбежным, но не имеет вредных последствий, поскольку точность вычисления  $f$  находится под нашим непосредственным контролем. Что же касается до суммирования ошибок в поправках Red, более вредного, поскольку эти ошибки труднее контролируемы, то его можно избежать целесообразным изменением метода.

Подставим с этой целью выражение (10) в равенство (11).

Это даст

$$x_n - x_0 = \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{11}{720} \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \dots \quad (12)$$

Из соотношений (1) и (3) получаем:

$$f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f_k + f_{k+1}) = \frac{1}{2} (f_{k+\frac{1}{2}}^{-1} - f_{k+\frac{1}{2}}^{-1} + f_{k+\frac{3}{2}}^{-1} - f_{k+\frac{1}{2}}^{-1}).$$

Но, на основании (3),

$$f_{k+1}^{-1} = \frac{1}{2} (f_{k+\frac{3}{2}}^{-1} + f_{k+\frac{1}{2}}^{-1}), \quad f_k^{-1} = \frac{1}{2} (f_{k+\frac{1}{2}}^{-1} + f_{k-\frac{1}{2}}^{-1}),$$

поэтому

$$f_{k+\frac{1}{2}} = f_{k+1}^{-1} - f_k^{-1}.$$

Аналогично

$$f_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_{k+1}^1 - f_k^1, \quad f_{k+\frac{1}{2}}^4 = f_{k+1}^3 - f_k^3, \dots$$

Пользуясь этими равенствами, легко убедиться, что

$$\sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}} = f_n^{-1} - f_0^{-1}, \quad \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_n^1 - f_0^1, \dots$$

Следовательно формуле (12) можно придать такой вид:

$$x_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 + \dots \\ + x_0 - f_0^{-1} + \frac{1}{12} f_0^1 - \frac{11}{720} f_0^3 + \frac{191}{60480} f_0^5 - \dots$$

Так как один член столбца первых сумм может быть выбран произвольно, то обычно определяют  $f_0^{-1}$  из условия

$$x_0 = f_0^{-1} - \frac{1}{12} f_0^1 + \frac{11}{720} f_0^3 - \dots \quad (13)$$

тогда

$$x_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \dots \quad (14)$$

Вычисление по этой формуле свободно от указанного выше недостатка накопления ошибок, ибо ошибка  $x_n$ , зависящая от округлений и отбрасывания членов в поправке

$$\text{Red} = -\frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \dots,$$

при надлежащем выборе интервала  $w$ , не отражается на величине  $f_n = w F(x_n, t_n)$ , а потому не влияет на последующие значения  $x$ .

Метод интегрирования уравнения (7), основанный на употреблении формулы вида (14), мы назовем методом квадратур, так как в случае, когда правая часть уравнения (7) не содержит  $x$ , такая формула обращается в формулу квадратур (§ 56).

Разностному методу Адамса, основанному на формуле (9), соответствует, как легко видеть, метод квадратур, заключающийся в применении формулы:

$$x_n = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-\frac{3}{2}}^1 + \frac{3}{8} f_{n-2}^2 + \dots, \quad (15)$$

причем начальное значение столбца сумм определяется равенством

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = x_0 - \frac{1}{2} f_{-1} - \frac{5}{12} f_{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{8} f_{-2} - \dots$$

Этот метод можно назвать, в отличие от предыдущего, известного еще Гауссу, методом квадратур Адамса.

§ 50. Вторая форма метода квадратур для уравнений первого порядка.

Рассмотрим теперь такую проблему: интеграл уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

определен заданием величины

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right);$$

требуется вычислить таблицу значений этого интеграла для значений аргумента

$$t_k = t_0 + kw,$$

где  $k$ —любое целое число.

Прежде всего покажем, каким образом может быть вычислена искомая функция  $x(t)$  для значений аргумента вида

$$t = t_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right) w = t_k + \frac{1}{2} w.$$

Определим разность

$$\delta_k = x\left[t_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right) w\right] - x\left[t_0 + \left(k - \frac{1}{2}\right) w\right].$$

Применяя опять разложение в ряд Тэйлора, найдем:

$$\delta_k = x\left(t_k + \frac{w}{2}\right) - x\left(t_k - \frac{w}{2}\right) = w \left(\frac{dx}{dt}\right)_k + \frac{w^3}{24} \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_k + \frac{w^5}{1920} \left(\frac{d^5x}{dt^5}\right)_k + \dots$$

Воспользуемся уравнением (7) и применим формулы (4). Это даст:

$$\delta_k = f_k + \frac{1}{24} f_k^3 - \frac{17}{5760} f_k^5 + \frac{367}{967680} f_k^7 - \dots \quad (16)$$

Полученная формула удобнее формулы (10) в том отношении, что содержит только разности, тогда как формула (10) требует вычисления полусумм разностей.

Начальные значения определяемой функции, например

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right), \quad x\left(t_0 + \frac{w}{2}\right), \quad x\left(t_0 + \frac{3w}{2}\right), \dots$$

находят или при помощи разложения  $x(t)$  в ряд или способом последовательных приближений.

Таким образом, формула (11) дает метод интегрирования, аналогичный методу Коуэлла. Соответствующий ей вариант метода квадратур получим, просуммировав равенство (16) от  $k=0$  до  $k=n-1$ . Это даст

$$x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots \\ + x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) - f_{-\frac{1}{2}}^{-1} - \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots$$

Если  $f_{-\frac{1}{2}}^{-1}$  определить условием

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) = f_{-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots,$$

то будем иметь более простую формулу:

$$x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots \quad (17)$$

Методы, основанные на употреблении формул (16) или (17), не могут иметь широкого распространения потому, что эти формулы дают  $x\left(t_k \pm \frac{w}{2}\right)$ , в то время как для вычисления правых частей этих формул нужно знать  $x(t_k)$ . Таким образом, применяя эти формулы, нужно все время интерполированием в середину находить  $x(t_k)$ .

Только в тех случаях, когда вторыми разностями  $x(t_k)$  можно пренебрегать, применение формул (16) или (17) может быть выгодно.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
141	2 снизу	$\varphi_{n+1}^2$	$\varphi_{n+\frac{1}{2}}^2$	автора

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x\left(t_n + \frac{w}{2}\right) + \frac{1}{2} x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) = \\ = f_n^{-1} + \frac{1}{24} f_n^1 - \frac{17}{5760} f_n^3 + \dots$$

а потому

$$\varphi_{n+1}^2 = f_n^1 + \frac{1}{24} f_n^3 - \frac{17}{5760} f_n^5 + \dots$$

причем начальное значение столбца сумм определяется равенством

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = x_0 - \frac{1}{2} f_{-1} - \frac{5}{12} f_{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{8} f_{-2} - \dots$$

Этот метод можно назвать, в отличие от предыдущего, известного еще Гауссу, методом квадратур Адамса.

### § 50. Вторая форма метода квадратур для уравнений первого порядка.

Рассмотрим теперь такую проблему: интеграл уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

определен заданием величины

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right);$$

требуется вычислить таблицу значений этого интеграла для значений аргумента

$$t_k = t_0 + kw,$$

где  $k$ —любое целое число.

Прежде всего покажем, каким образом может быть вычислена искомая функция  $x(t)$  для значений аргумента вида

$$t = t_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right)w = t_k + \frac{1}{2}w.$$

Определим разности

Эта формула удобнее формулы (10) в том отношении, что содержит только разности, тогда как формула (10) требует вычисления полусумм разностей.

Начальные значения определяемой функции, например

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right), \quad x\left(t_0 + \frac{w}{2}\right), \quad x\left(t_0 + \frac{3w}{2}\right), \dots$$

находят или при помощи разложения  $x(t)$  в ряд или способом последовательных приближений.

Таким образом, формула (11) дает метод интегрирования, аналогичный методу Коуэлла. Соответствующий ей вариант метода квадратур получим, просуммировав равенство (16) от  $k=0$  до  $k=n-1$ . Это даст

$$\begin{aligned} x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) &= f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots \\ &+ x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) - f_{-\frac{1}{2}}^{-1} - \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \end{aligned}$$

Если  $f_{-\frac{1}{2}}^{-1}$  определить условием

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) = f_{-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots,$$

то будем иметь более простую формулу:

$$x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots \quad (17)$$

Методы, основанные на употреблении формул (16) или (17), не могут иметь широкого распространения потому, что эти формулы дают  $x\left(t_k \pm \frac{w}{2}\right)$ , в то время как для вычисления правых частей этих формул нужно знать  $x(t_k)$ . Таким образом, применяя эти формулы, нужно все время интерполированием в середину находить  $x(t_k)$ .

Только в тех случаях, когда вторыми разностями  $x(t_k)$  можно пренебрегать, применение формул (16) или (17) может быть выгодно.

Для того чтобы устранить указанное неудобство, выведем из (17) формулу, дающую  $x_n = x(t_n)$ . Для этого обратимся к хорошо известной формуле интегрирования в середину

$$\varphi\left(\tau_n + \frac{w}{2}\right) = \varphi_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \varphi_{n+\frac{1}{2}}^2 + \frac{3}{128} \varphi_{n+\frac{1}{2}}^4 - \frac{5}{1024} \varphi_{n+\frac{1}{2}}^6 + \dots$$

которая получается из формулы Бесселя (приведенной на стр. 135) при  $z = \frac{1}{2}$ .

Полагая в этой формуле

$$\varphi(\tau_n) = x\left(t_n - \frac{w}{2}\right)$$

и замечая, что

$$\begin{aligned} \varphi_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} x\left(t_n + \frac{w}{2}\right) + \frac{1}{2} x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) = \\ &= f_n^{-1} + \frac{1}{24} f_n^1 - \frac{17}{5760} f_n^3 + \dots, \end{aligned}$$

а потому

$$\varphi_{n+1}^2 = f_n^1 + \frac{1}{24} f_n^3 - \frac{17}{5760} f_n^5 + \dots$$

получим

$$x_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12}f_n^1 + \frac{11}{720}f_n^3 - \frac{191}{60480}f_n^5 + \dots \quad (17bis)$$

Таким образом вычисление  $x_n$  будет происходить, как и следовало ожидать, по формуле, тождественной с формулой (14). Но начальный член столбца сумм будет в рассматриваемом случае определяться равенством

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) - \frac{1}{24}f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{5760}f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{367}{967680}f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots \quad (18)$$

Примечание I. Изложенные способы численного интегрирования уравнения (7) без изменения распространяются на системы уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = H(x, y, z, t).$$

В этом случае интегрирование ведется параллельно на трех отдельных листах.

Примечание II. При употреблении указанных формул выгодно пользоваться следующими приближенными равенствами:

$$\begin{aligned} 11 : 720 &= 1 : 65 - 0.000107 \\ 191 : 60480 &= 1 : 317 + 0.000004 \\ 2497 : 3628800 &= 1 : 1453 - 0.000000 \\ 17 : 5760 &= 1 : 339 + 0.000001 \\ 367 : 967680 &= 1 : 2637 + 0.000000 \end{aligned}$$

### § 51. Пример интегрирования уравнения первого порядка.

Вычислим таблицу значений интеграла уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}xt,$$

определяемого начальными значениями  $t_0 = 0, x_0 = 1$ .

Взяв интервал  $w = 0.1$ , получим

$$f(t) = 0.05xt. \quad (*)$$

Для определения первых значений интеграла, в этом случае лучше всего воспользоваться разложением в ряд. Дифференцируя данное уравнение и полагая  $t = 0$ , получим:

$$x_0^I = 0, \quad x_0^{II} = \frac{1}{2}, \quad x_0^{III} = 0, \quad x_0^{IV} = \frac{3}{4}, \dots$$

Следовательно,

$$x = 1 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{32}t^4 + \dots$$

Этот ряд дает возможность найти пятизначные величины  $x$  для  $t = \pm 0.1, \pm 0.2$ .

Дальнейшие вычисления ведем по нижеследующей схеме, в которой жирным шрифтом отмечены значения  $x$ , полученные при помощи ряда, а также соответствующие значения  $f, f^1, \dots$ . Полусуммы значений  $f, f^1, \dots$  вписываются между соответствующими строками.

Таблица А.

$t$	$f^{-1}$		$f^1$	$f^2$	$f^3$	Red	$x$
-0.2		-0.010 100					1.010 05
-0.1		-0.005 013	+ 5 087				1.002 50
0.0	1.000 417	0.000 000	+ 5 013	0	+ 74	- 417	1.000 00
0.1	1.002 923	0.005 013	+ 5 050	+ 37	+ 74	- 420	1.002 50
0.2	1.010 479	0.010 100	+ 5 087	+ 111		- 429	1.010 05
0.3	1.023 196	0.012 717	+ 5 161	+ 185		- 444	1.022 75
0.4	1.041 259	0.018 063	+ 5 346	+ 259		- 466	1.040 79

В таблице А вписаны исходные данные и, кроме того, проведено первое приближение для получения  $x_3 = x(0.3)$  и  $x_4 = x(0.4)$ .

Прежде всего, для строки  $t = 0.0$  вычисляем

$$\text{Red} = -\frac{1}{12}f_n^1 + \frac{1}{65}f_n^3 - \dots \quad (**)$$

и полученную величину  $\text{Red} = -417$  (выраженную в единицах 6-го знака, как и все величины  $f, f^1, \dots$ ) вписываем в соответствующий столбец. Затем находим основной член столбца сумм

$$f_0^{-1} = x_0 - \text{Red} = 1.000417.$$

Чтобы найти следующие члены столбца сумм, составляем полусуммы в столбце  $f$  и пользуемся соотношениями

$$f_1^{-1} = f_0^{-1} + f_{\frac{1}{2}}, \quad f_2^{-1} = f_1^{-1} + f_{\frac{3}{2}} \dots$$

После этого переходим к экстраполированию величин, нужных для вычисления  $x_3$  и  $x_4$ .

Исходя из допущения, что четвертая разность равна нулю, получаем

$$f_1^3 = f_2^3 = f_3^3 = f_4^3 = +74.$$

Затем последовательным сложением находим

$$f_{\frac{1}{2}}^2 = +111, \quad f_{\frac{3}{2}}^2 = +185$$

и т. д., пока не получим  $f_3^{-1}, f_4^{-1}$ .

Наконец по формуле (\*\*) вычисляем Red, что дает значения  $x(t)$ , указанные в последнем столбце. На этом заканчивается первое приближение.

Для второго приближения вычисляем, по формуле (\*),  $f_3$  и  $f_4$ . Затем с новыми, более точными значениями разностей повторяем вычисление  $x_3$  и  $x_4$ .

Окончательные результаты показаны для большей ясности отдельно, в таблице В. На практике первое приближение часто делается карандашом, а второе чернилами. В таблице В величины, полученные экстраполированием и еще не исправленные вторым приближением, набраны курсивом.

Таблица В.

$t$	$f^{-1}$	$f$	$f^1$	$f^2$	$f^3$	$f^4$	Red	$x$
0.0	1.000 417	0.000 000	+ 5 013		+ 74		- 417	1.000 00
		0.002 506		+ 37		+ 3		
0.1	1.002 923	0.005 013	+ 5 050		+ 77		- 420	1.002 50
		0.007 556		+ 114		+ 3		
0.2	1.010 479	0.010 100	+ 5 164		+ 80		- 429	1.010 05
		0.012 720		+ 194		+ 3		
0.3	1.023 199	0.015 341	+ 5 358		+ 83		- 445	1.022 75
		0.018 078		+ 277		+ 3		
0.4	1.041 277	0.020 816	+ 5 635		+ 86		- 469	1.040 81
		0.023 713		+ 363				
0.5	1.064 990		+ 5 998				- 502	1.064 49
		0.029 711						
0.6	1.094 701						- 545	1.094 16

После того как получено несколько значений Red, порядок вычисления целесообразно несколько изменить. А именно, вместо того чтобы находить экстраполированием разности, нужные для вычисления Red, лучше экстраполировать непосредственно эту величину. Такое экстраполирование показано в таблице С, в которой экстраполированные значения даны курсивом.

Таблица С.

Red	$\Delta$	$\Delta^2$
- 417		
- 420	- 3	- 6
- 429	- 9	- 7
- 445	- 16	- 8
- 469	- 24	- 9
- 502	- 33	- 10
- 545	- 43	

Этим путем в таблице В найдены  $x_5$  и  $x_6$ , первое из которых получилось совершенно точно, а второе ошибочно только на одну единицу. Во всяком случае, значения  $f_5$  и  $f_6$ , вычисленные с этими  $x_5$  и  $x_6$ , будут окончательные и их перевычислять не придется.

В заключение покажем, каким образом та же самая задача решается методом Адамса (разностным).

В этом случае вычисление ведется по формуле (9), которой мы придадим такой вид:

$$\text{Red} = \frac{1}{2}f'_{n-\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}f''_{n-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}f'''_{n-\frac{3}{2}} + \frac{251}{720}f^{(4)}_{n-\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}f^{(5)}_{n-\frac{5}{2}}$$

$$\Delta_{n+\frac{1}{2}} = f_n + \text{Red}$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta_{n+\frac{1}{2}}$$

Результаты вычисления приведены в таблице D. Жирным шрифтом напечатаны точные значения, с которых мы начинаем вести численное интегрирование. Функция  $f$ , ее разности и поправка Red вычислены с шестью знаками.

Таблица D.

$t$	$x$	$\Delta$	$f$	$f^1$	$f^2$	$f^3$	$f^4$	$f^5$	Red
- 0.2	1.010 05		- 0.010 100						
				+ 5 087					
- 0.1	1.002 50		- 0.005 013		- 74				
				+ 5 013	+ 74				
0.0	1.000 00		0.000 000		0	0			
				+ 5 013	+ 74	+ 6			
0.1	1.002 50		0.005 013		+ 74	+ 6			
				+ 5 087	+ 80	- 6			
0.2	1.010 05		0.010 100		+ 154	0			+ 2 602
		+ 12 70		+ 5 241	+ 80	+ 7			+ 2 719
0.3	1.022 75		0.015 341		+ 234	+ 7			+ 2 863
		+ 18 06		+ 5 475	+ 87	+ 2			+ 2 863
0.4	1.040 81		0.020 816		+ 321	+ 9			+ 3 069
		+ 23 68		+ 5 796	+ 96	+ 1			+ 3 069
0.5	1.064 49		0.026 612		+ 417	+ 10			+ 3 320
		+ 28 68		+ 6 213	+ 106				+ 3 320
0.6	1.094 17		0.032 825		+ 523				+ 3 629
		+ 36 15		+ 6 736					+ 3 629
0.7	1.130 32		0.039 561						
		+ 43 19							
0.8	1.173 51								

Все вычисленные значения  $x$  вполне точны. Только при продолжении интегрирования значительно дальше (или при употреблении

большого интервала  $w$ ) становится ощутимой разница в точности между методом Адамса и методом квадратур, особенно если вычислять, как это делалось в настоящем примере, функцию  $f$  с одним запасным знаком.

### § 52. Интегрирование уравнений второго порядка. Вычисление интеграла, заданного двумя значениями.

Перейдем теперь к изучению методов численного интегрирования уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t).$$

Каждый интеграл  $x(t)$  уравнения второго порядка может быть задан либо своими значениями в двух точках, например значениями

$$x_{-1} = x(t_0 - w), \quad x_0 = x(t_0),$$

либо значениями

$$x_0 = x(t_0), \quad x'_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0},$$

которые принимает этот интеграл и его производная в начальной точке  $t_0$ .

В этом параграфе мы рассмотрим первый случай: будем считать  $x_1$  и  $x_0$  заданными величинами. По этим данным требуется вычислить остальные значения  $x_1, x_2, \dots$  искомой функции.

Наряду с первыми разностями

$$\Delta_{k-\frac{1}{2}} = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta_{k+\frac{1}{2}} = x_{k+1} - x_k$$

введем в рассмотрение вторую разность

$$\Delta_k^2 = \Delta_{k+\frac{1}{2}} - \Delta_{k-\frac{1}{2}} = x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}.$$

Разлагая  $x_{k+1} = x(t_k + w)$  и  $x_{k-1} = x(t_k - w)$  по степеням  $w$ , получим:

$$\Delta_k^2 = \frac{2}{2!} w^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_k + \frac{2}{4!} w^4 \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)_k + \dots$$

Положим

$$w^2 F(x, t) = f(t), \quad w^2 F(x_n, t_n) = f_n,$$

тогда

$$\Delta_k^2 = f_k + \frac{1}{12} w^2 \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k + \frac{1}{360} w^4 \left(\frac{d^4f}{dt^4}\right)_k + \dots$$

Подставив сюда выражения производных через разности, даваемые равенствами (4), получим формулу:

$$\Delta_k^2 = f_k + \frac{1}{12} f_k^2 - \frac{1}{240} f_k^4 + \frac{31}{60480} f_k^6 - \frac{289}{3628800} f_k^8 + \dots, \quad (19)$$

представляющую метод Коуэлла.

Применение соотношений (6) дает основную формулу метода Штермера (аналогичного методу Адамса):

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 = & f_k + \frac{1}{12} f_{k-1}^2 + \frac{1}{12} f_{k-\frac{3}{2}}^2 + \frac{19}{240} f_{k-2}^2 + \\ & + \frac{3}{40} f_{k-\frac{5}{2}}^2 + \frac{863}{12096} f_{k-3}^2 + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнение коэффициентов двух последних формул сразу показывает преимущество метода Коуэлла: если значения  $f_k$  вычисляются с ошибкой  $\pm \epsilon$ , то разности 1-го, 2-го, 3-го, ... порядков имеют ошибки, заключающиеся в границах  $\pm 2\epsilon, \pm 4\epsilon, \pm 8\epsilon, \dots$ , поэтому в формуле (20), в которой все коэффициенты близки к  $\frac{1}{12}$ , ошибки разностей высших порядков будут чувствительно искажать значение  $\Delta_k^2$ . Формула (19) благодаря быстрому убыванию коэффициентов свободна от этого недостатка.

Вычисление по методу Коуэлла ведется следующим образом.

Зная  $x_{-1}$  и  $x_0$ , мы можем вычислить

$$\Delta_{-\frac{1}{2}} = x_0 - x_{-1};$$

после чего, отбрасывая пока в формуле (19) все неизвестные члены находим приближенную величину:

#### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
146	16 снизу	$x_1$	$x_{-1}$	автора

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2 - \frac{1}{240} f_0^4$$

и т. д., пока не получим окончательное значение этой величины, а следовательно и  $x_1$ .

Когда таким образом найдено несколько значений  $x_1, x_2, \dots$ , то для вычисления  $\Delta_k^2$  неизвестные разности  $f_k^2, f_k^4, \dots$  определяются при помощи экстраполирования. Если интервал  $w$  не чересчур велик, то это делается настолько хорошо, что почти никогда не приходится подправлять найденное таким путем  $\Delta_k^2$ .

Вместо того чтобы находить  $x_{k+1}$  по  $\Delta_k^2$  при помощи двойного суммирования:

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = \Delta_{k-\frac{1}{2}} + \Delta_k^2, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta_{k+\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

большого интервала  $w$ ) становится ощутимой разница в точности между методом Адамса и методом квадратур, особенно если вычислять, как это делалось в настоящем примере, функцию  $f$  с одним запасным знаком.

### § 52. Интегрирование уравнений второго порядка. Вычисление интеграла, заданного двумя значениями.

Перейдем теперь к изучению методов численного интегрирования уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t).$$

Каждый интеграл  $x(t)$  уравнения второго порядка может быть задан либо своими значениями в двух точках, например значениями

$$x_{-1} = x(t_0 - w), \quad x_0 = x(t_0),$$

либо значениями

$$x_0 = x(t_0), \quad x'_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0},$$

которые принимает этот интеграл и его производная в начальной точке  $t_0$ .

В этом параграфе мы рассмотрим первый случай: будем считать

$$w^2 F(x, t) = f(t), \quad w^2 F(x_n, t_n) = f_n,$$

тогда

$$\Delta_k^2 = f_k + \frac{1}{12} w^2 \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k + \frac{1}{360} w^4 \left(\frac{d^4f}{dt^4}\right)_k + \dots$$

Подставив сюда выражения производных через разности, даваемые равенствами (4), получим формулу:

$$\Delta_k^2 = f_k + \frac{1}{12} f_k^2 - \frac{1}{240} f_k^4 + \frac{31}{60480} f_k^6 - \frac{289}{3628800} f_k^8 + \dots, \quad (19)$$

представляющую метод Коуэлла.

Применение соотношений (6) дает основную формулу метода Штёрмера (аналогичного методу Адамса):

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 = & f_k + \frac{1}{12} f_{k-1}^2 + \frac{1}{12} f_{k-2}^3 + \frac{19}{240} f_{k-2}^4 + \\ & + \frac{3}{40} f_{k-2}^5 + \frac{863}{12096} f_{k-3}^6 + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнение коэффициентов двух последних формул сразу показывает преимущество метода Коуэлла: если значения  $f_k$  вычисляются с ошибкой  $\pm \epsilon$ , то разности 1-го, 2-го, 3-го, . . . порядков имеют ошибки, заключающиеся в границах  $\pm 2\epsilon, \pm 4\epsilon, \pm 8\epsilon, \dots$ , поэтому в формуле (20), в которой все коэффициенты близки к  $\frac{1}{12}$ , ошибки разностей высших порядков будут чувствительно искажать значение  $\Delta_k^2$ . Формула (19) благодаря быстрому убыванию коэффициентов свободна от этого недостатка.

Вычисление по методу Коуэлла ведется следующим образом.

Зная  $x_{-1}$  и  $x_0$ , мы можем вычислить

$$\Delta_{-\frac{1}{2}} = x_0 - x_{-1};$$

после чего, отбрасывая пока в формуле (19) все неизвестные члены находим приближенную величину:

$$\Delta_0^2 = f_0.$$

Это дает

$$\Delta_{\frac{1}{2}} = \Delta_{-\frac{1}{2}} + \Delta_0^2$$

$$x_1 = x_0 + \Delta_{\frac{1}{2}}.$$

Имея теперь  $f_{-1}, f_0, f_1$ , мы можем определить  $f_0^2$ , а следовательно и более точную величину

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2,$$

с которой повторяем вычисление  $x_1$ . Точно так же находится  $x_{-2}$ . После этого мы можем уже найти  $f_0^3$  и взять еще более точное значение

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2 - \frac{1}{240} f_0^4$$

и т. д., пока не получим окончательное значение этой величины, а следовательно и  $x_1$ .

Когда таким образом найдено несколько значений  $x_1, x_2, \dots$ , то для вычисления  $\Delta_k^2$  неизвестные разности  $f_k^2, f_k^3, \dots$  определяются при помощи экстраполирования. Если интервал  $w$  не чересчур велик, то это делается настолько хорошо, что почти никогда не приходится подправлять найденное таким путем  $\Delta_k^2$ .

Вместо того чтобы находить  $x_{k+1}$  по  $\Delta_k^2$  при помощи двойного суммирования:

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = \Delta_{k-\frac{1}{2}} + \Delta_k^2, \quad x_{k+1} = x_k + \Delta_{k+\frac{1}{2}}, \quad (21)$$

можно вести вычисление по формуле

$$x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1} + \Delta_k^2, \quad (22)$$

что несколько проще при употреблении арифмометра.

Но такое избегание выписывания разностей, не давая заметной экономии, в то же время лишает вычислителя одной из возможностей контроля.

Двойное суммирование, производимое явно по формулам (21) или фигурирующее неявно в формуле (22), влечет еще большее накопление погрешности, чем однократное суммирование при применении метода Коуэлла к уравнениям первого порядка. Отсюда ясно, что для уравнений второго порядка еще более важно (в особенности при сколько-нибудь продолжительном вычислении) заменить метод Коуэлла соответствующим методом квадратур.

Суммируя равенства (21) от  $k=0$  до  $k=n-1$ , получим

$$\Delta_{n-\frac{1}{2}} = \Delta_{-\frac{1}{2}} + \sum_0^{n-1} \Delta_k^2, \quad x_n = x_0 + \sum_0^{n-1} \Delta_{k+\frac{1}{2}} \quad (23)$$

Формула (19) дает:

$$\sum_0^{n-1} \Delta_k^2 = \sum_0^{n-1} f_k + \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f_k^2 - \frac{1}{240} \sum_0^{n-1} f_k^4 + \dots$$

Так как, согласно нашим обозначениям:

$$\begin{aligned} f_0^m &= f_{\frac{1}{2}}^{m-1} - f_{-\frac{1}{2}}^{m-1} \\ f_1^m &= f_{\frac{3}{2}}^{m-1} - f_{\frac{1}{2}}^{m-1} \\ &\dots \\ f_{n-1}^m &= f_{n-\frac{1}{2}}^{m-1} - f_{n-\frac{3}{2}}^{m-1} \end{aligned}$$

то, сложив эти равенства, получим:

$$\sum_0^{n-1} f_k^m = f_{n-\frac{1}{2}}^{m-1} - f_{-\frac{1}{2}}^{m-1}.$$

Принимая все это во внимание, первое из равенств (23) напомним следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{n-\frac{1}{2}} &= f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{12} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{240} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots \\ + \Delta_{-\frac{1}{2}} &- f_{-\frac{1}{2}}^{-1} - \frac{1}{12} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{240} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \end{aligned}$$

Произвольный начальный член столбца первых сумм выберем так, чтобы вторая строка этого равенства была равна нулю, т. е. положим

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \Delta_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{240} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{31}{60480} f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots \quad (24)$$

Окончательно будем иметь

$$\Delta_{n-\frac{1}{2}} = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{12} f_{n-\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{240} f_{n-\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

Заменим здесь  $n$  через  $k+1$  и просуммируем от  $k=0$  до  $k=n-1$ . Тогда второе из равенств (23) можно будет написать следующим образом:

$$x_n = x_0 + \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{12} \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{240} \sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

Но

$$\sum_0^{n-1} f_{k+\frac{1}{2}}^m = f_n^{m-1} - f_0^{m-1},$$

следовательно

$$\begin{aligned} x_n &= f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \\ + x_0 &- f_0^{-2} - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^4 + \dots \end{aligned}$$

Начальный член столбца вторых сумм положим равным

$$f_0^{-2} = x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^4 + \dots, \quad (25)$$

тогда последняя формула напишется так:

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \frac{289}{3628800} f_n^6 + \dots \quad (26)$$

При употреблении этих формул следует иметь в виду, что

$$\begin{aligned} \frac{31}{60480} &= \frac{1}{1951} + 0.0000000 \\ \frac{289}{3628800} &= \frac{1}{12557} + 0.0000000. \end{aligned}$$

Формула (26), дополняемая равенствами (24) и (25), и представляет собою метод квадратур. Вычисление по ней ведется так же, как и по способу Коуэлла: сначала последовательными приближениями находят (исходя из заданных  $x_0$  и  $\Delta_{-\frac{1}{2}} = x_0 - x_{-1}$ ) несколько смежных значений  $x_1, x_{-2}, x_2, \dots$  искомой функции; затем нужные для формулы (26) разности  $f_n^2, f_n^4, \dots$  определяют экстраполированием и подправляют если это нужно, вторым приближением.

В то время как в методе Коуэлла вычисление ведется по формулам (19) и (21), имеющим вид:

$$\begin{aligned} \Delta_k^2 &= f_k + \text{Red} \\ \Delta_{h+\frac{1}{2}} &= x_0 - x_{-1} + \sum_0^h \Delta_k^2 \\ x_n &= x_0 + \sum_0^{n-1} \Delta_{h+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

так что поправка Red подвергается двойному суммированию, в методе квадратур вычисление ведется по формуле вида

$$x_n = f_n^{-2} + \text{Red},$$

вследствие чего ошибки, допущенные при вычислении Red, суммированием не увеличиваются.

Метод квадратур, соответствующий методу Штёрмера, заключается в употреблении формулы

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12}f_{n-1} + \frac{1}{12}f_{n-\frac{3}{2}}^1 + \frac{19}{240}f_{n-2}^2 + \frac{3}{40}f_{n-\frac{5}{2}}^3 + \dots$$

Для определения начальных членов столбцов сумм полагаем в этой формуле  $n=0$  и  $n=-1$ . Получим:

$$f_0^{-2} = x_0 - \frac{1}{12}f_{-1} - \frac{1}{12}f_{-\frac{3}{2}}^1 - \frac{19}{240}f_{-2}^2 - \dots$$

$$f_{-1}^{-2} = x_{-1} - \frac{1}{12}f_{-2} - \frac{1}{12}f_{-\frac{5}{2}}^1 - \frac{19}{240}f_{-3}^2 - \dots$$

после чего для столбца первых сумм имеем:

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = f_0^{-2} - f_{-1}^{-2}.$$

Формулу Штёрмера выгодно применять в следующем виде:

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} \left( f_{n-1} + f_{n-\frac{3}{2}}^1 + f_{n-2}^2 \right) - \frac{1}{240}f_{n-2}^2 + \dots,$$

причем табличный интервал  $w$  берется настолько малым, чтобы третьими разностями можно было пренебречь.

Примечание. Все методы численного интегрирования уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t)$$

без всяких изменений применяются к системам вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, y, z, t), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = G(x, y, z, t), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = H(x, y, z, t).$$

Интегрирование уравнений, связанных в систему, производится, конечно, параллельно.

### § 53. Другой случай вычисления интеграла уравнения второго порядка, заданного двумя значениями.

Для уравнений второго порядка, так же, как и для уравнений первого порядка, метод квадратур может быть представлен в двух формах—смотря по тому, желаем ли мы вычислять значения  $x_n = x(t_0 + nw)$  или же значения этой функции для середин интервалов, т. е.

$x(t_0 + (n + \frac{1}{2})w)$ . Первый случай был рассмотрен в предыдущем параграфе; выведем теперь необходимые формулы для второго случая. Положим

$$\delta_k = x\left(t_k + \frac{w}{2}\right) - x\left(t_k - \frac{w}{2}\right)$$

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = \delta_{k+1} - \delta_k.$$

Формула Тэйлора дает

$$\begin{aligned} \delta_{k+\frac{1}{2}}^2 &= x\left(t_k + \frac{3w}{2}\right) - 2x\left(t_k + \frac{w}{2}\right) + x\left(t_k - \frac{w}{2}\right) = \\ &= w^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_k + \frac{1}{2}w^3 \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_k + \frac{5}{24}w^4 \left(\frac{d^4x}{dt^4}\right)_k + \frac{1}{16}w^5 \left(\frac{d^5x}{dt^5}\right)_k + \dots \end{aligned}$$

Следовательно

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_k + \frac{1}{2}w \left(\frac{df}{dt}\right)_k + \frac{5}{24}w^2 \left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k + \frac{1}{16}w^3 \left(\frac{d^3f}{dt^3}\right)_k + \dots,$$

или, пользуясь (5):

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_k + \frac{1}{2}f_{k+\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{24}f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{17}{1920}f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \dots,$$

или, наконец, учитывая формулу

$$f_{k+\frac{1}{2}} = f_k + \frac{1}{2}f_{k+\frac{1}{2}}^1,$$

которой мы уже пользовались в § 48,

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}^2 = f_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}f_{k+\frac{1}{2}}^2 + \frac{17}{1920}f_{k+\frac{1}{2}}^4 - \frac{367}{193536}f_{k+\frac{1}{2}}^6 + \dots$$

Эта формула дает метод интегрирования, аналогичный методу Коуэлла. Просуммировав ее в пределах от  $k=0$  до  $k=n-1$ , получим

$$\begin{aligned} \delta_n - \delta_0 &= f_n^{-1} - \frac{1}{24}f_n^1 + \frac{17}{1920}f_n^3 - \dots \\ &= f_0^{-1} + \frac{1}{24}f_0^1 - \frac{17}{1920}f_0^3 + \dots \end{aligned}$$

Положим

$$f_0^{-1} = \delta_0 + \frac{1}{24}f_0^1 - \frac{17}{1920}f_0^3 + \dots, \quad (27)$$

тогда

$$\delta_n = f_n^{-1} - \frac{1}{24}f_n^1 + \frac{17}{1920}f_n^3 - \dots$$

Заменим в этом равенстве  $n$  через  $k$  и просуммируем его от  $k=0$  до  $k=n-1$ . Это даст:

$$\begin{aligned} x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) - x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) &= f_{n-\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24}f_{n-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{1920}f_{n-\frac{1}{2}}^2 - \dots \\ &= f_{-\frac{1}{2}}^{-2} + \frac{1}{24}f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{1920}f_{-\frac{1}{2}}^2 + \dots \end{aligned}$$

Полагая

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-2} = x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) + \frac{1}{24}f_{-\frac{1}{2}} - \frac{17}{1920}f_{-\frac{1}{2}}^2 + \dots, \quad (28)$$

получим окончательно

$$x\left(t_n - \frac{w}{2}\right) = f_{n-\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24}f_{n-\frac{1}{2}} + \frac{17}{1920}f_{n-\frac{1}{2}}^2 - \dots \quad (29)$$

Когда заданы начальные значения  $x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right)$  и  $x\left(t_0 + \frac{w}{2}\right)$ , определяющие рассматриваемый интеграл уравнения (18), то формула (29), совместно с (27) и (28), позволяет последовательно найти значения  $x(t)$  для  $t = t_n - \frac{w}{2}$ , где  $n = 2, 3, 4, \dots$

Формулу (28) целесообразно представить в несколько ином виде. Так как

$$\begin{aligned} f_{-\frac{1}{2}}^{-2} &= \frac{1}{2} \left( f_0^{-2} + f_{-\frac{1}{2}}^{-2} \right) = f_0^{-2} - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} \\ f_{-\frac{1}{2}} &= f_0 - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^1 \dots \end{aligned}$$

то ее можно заменить такой:

$$\begin{aligned} f_0^{-2} &= x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) + \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} \left( f_0 - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^1 \right) - \\ &\quad - \frac{17}{1920} \left( f_0^2 - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^3 \right) + \dots \end{aligned} \quad (28bis)$$

Точно так же мы заменим формулу (27) следующей, более удобной:

$$f_{\frac{1}{2}}^{-1} = \delta_0 + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{24} f_0^1 - \frac{17}{1920} f_0^3 + \dots \quad (27bis)$$

Так как для вычисления правой части формулы (29) надо иметь значения  $x(t_n)$  то применение этой формулы осложняется необходимостью нахождения  $x(t_n)$  при помощи интерполирования в середину.

Чтобы получить формулу, дающую непосредственно  $x(t_n)$ , применим формулу интерполирования в середину (§ 50) к функции  $x\left(t_n - \frac{w}{2}\right)$ , определяемой формулой (29). Полагая опять

$$\varphi(\tau_n) = x\left(t_n - \frac{w}{2}\right),$$

получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+\frac{1}{2}} &= f_n^{-2} - \frac{1}{24}f_n + \frac{17}{1920}f_n^2 - \dots \\ \varphi_{n+\frac{1}{2}}^2 &= f_n - \frac{1}{24}f_n^2 + \frac{17}{1920}f_n^4 - \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

откуда

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12}f_n - \frac{1}{240}f_n^2 + \frac{31}{60480}f_n^4 - \dots,$$

причем начальные значения столбцов сумм определяются формулами (27) и (28) или (27bis) и (28bis).

#### § 54. Вычисление интеграла, определенного начальной точкой и начальной скоростью.

До сих пор мы рассматривали вычисление интеграла уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t),$$

определенного своими значениями для двух значений независимой переменной; например, задавали  $x(t)$  для  $t = t_0$  и  $t = t_0 - w$  или для  $t = t_0 - \frac{w}{2}$  и  $t = t_0 + \frac{w}{2}$ .

Теперь обратимся к решению другой проблемы, представляющей не меньший интерес для Небесной механики, а именно к вычислению интеграла, определенного заданием  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$  в некоторой точке. Тут также рассмотрим два случая.

**Первый случай.** Пусть искомым интеграл  $x(t)$  задан начальными значениями

$$x(t_0) = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = x'_0. \quad (30)$$

Посмотрим, каким образом могут быть найдены значения  $x_1, x_2, \dots$

При этом, ради краткости, мы ограничимся лишь методом квадратур.

Обратимся к формулам (26), (24) и (25), лежащим в основе метода квадратур, и посмотрим, нельзя ли распорядиться произвольными постоянными  $f_{-\frac{1}{2}}^{-1}$  и  $f_0^{-2}$  так, чтобы формула (26) давала функцию, удовлетворяющую начальным условиям (30).

Ясно прежде всего, что  $f_0^{-2}$  следует оставить таким, каким его дает равенство (25) — первое из условий (30) будет удовлетворено. Далее, обозначая через  $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \dots$  последовательные разности функции  $x$ , будем иметь, на основании (4):

$$w \left(\frac{dx}{dt}\right)_n = \Delta_n^1 - \frac{1}{6}\Delta_n^3 + \frac{1}{30}\Delta_n^5 - \frac{1}{140}\Delta_n^7 + \dots$$

Формула (26) дает:

$$\Delta_n^m = f_n^{m-2} + \frac{1}{12}f_n^m - \frac{1}{240}f_n^{m+2} + \dots$$

следовательно

$$w \left(\frac{dx}{dt}\right)_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12}f_n^1 + \frac{11}{720}f_n^3 - \frac{191}{60480}f_n^5 + \dots$$

Замечая, что

$$f_n^{-1} = \frac{1}{2}(f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + f_{n-\frac{1}{2}}^{-1}) = f_{n-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{2}f_n^{-1}$$

и полагая  $n=0$ , окончательно получим:

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \omega x'_0 - \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{12}f_0^1 - \frac{11}{720}f_0^3 + \frac{191}{60480}f_0^5 - \dots \quad (31)$$

Таким образом, достаточно вычислить начальные значения столбцов сумм по формулам (31) и (25) для того, чтобы формула (26) давала значения интеграла, удовлетворяющего начальным условиям (30).

**Второй случай.** Рассмотрим теперь случай, когда интеграл задан начальными условиями

$$x\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) = X_0, \quad x'\left(t_0 - \frac{w}{2}\right) = X'_0 \quad (32)$$

и требуется вычислить  $x_n = x(t_0 + nw)$ .

Начнем с вычисления  $x\left(t_n + \frac{w}{2}\right)$ . Для решения этой задачи можно было бы применить только-что употребленный прием к формуле (29). Ради разнообразия покажем другой путь, столь же быстро ведущий к цели.

Заменим уравнение (18) системой:

$$\frac{dx'}{dt} = F(x, t), \quad \frac{dx}{dt} = x' \quad (33)$$

и будем интегрировать первое из этих уравнений при помощи формулы (17). Так как, в наших теперешних обозначениях,

$$\omega F(x, t) = \frac{1}{w}f(t),$$

то получим:

$$\omega x'\left(t_n + \frac{w}{2}\right) = f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24}f_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{1920}f_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots, \quad (34)$$

причем первые суммы  $f^-$  определяются условием (16):

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \omega X'_0 - \frac{1}{24}f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{5760}f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \quad (35)$$

Обратимся теперь ко второму из уравнений (33). Полагая

$$\omega x'(t) = h(t),$$

при помощи той же формулы (17) найдем

$$x\left(t_n + \frac{w}{2}\right) = h_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24}h_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760}h_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots \quad (36)$$

Чтобы вычислить стоящее справа выражение, надо знать величины

$$h_n = h(t_0 + nw) = \omega x'(t_0 + nw),$$

тогда как формула (34) дает нам значения  $x'(t)$  для точек  $t_n + \frac{w}{2}$ , лежащих в серединах наших интервалов. Поэтому обратимся к формуле интерполирования в середину (стр. 141):

$$\varphi\left(\tau_n + \frac{w}{2}\right) = \varphi_{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\varphi_{n+\frac{1}{2}}^2 + \frac{3}{128}\varphi_{n+\frac{1}{2}}^4 - \dots$$

Делая в этой формуле

$$\tau_n = t_n - \frac{w}{2}$$

$$\varphi(\tau_n) = \varphi_n = h\left(t_n - \frac{w}{2}\right)$$

и учитывая, что на основании (34):

$$\begin{aligned} \varphi_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\varphi_n + \varphi_{n+1}) = \frac{w}{2} \left[ x'\left(t_n - \frac{w}{2}\right) + x'\left(t_n + \frac{w}{2}\right) \right] = \\ &= f_n^{-1} + \frac{1}{24}f_n^1 - \frac{17}{5760}f_n^3 + \dots \end{aligned}$$

и следовательно

$$\varphi_{n+\frac{1}{2}}^2 = f_n^1 + \frac{1}{24}f_n^3 - \frac{17}{5760}f_n^5 + \dots$$

Окончательно получим:

$$h_n = \varphi\left(\tau_n + \frac{w}{2}\right) = f_n^{-1} - \frac{1}{12}f_n^1 + \frac{11}{720}f_n^3 - \frac{191}{60480}f_n^5 + \dots$$

Найденное значение  $h_n$  подставим в формулу (36). Это даст:

$$x\left(t_n + \frac{w}{2}\right) = f_{n+\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24}f_{n+\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{1920}f_{n+\frac{1}{2}}^2 - \frac{367}{193536}f_{n+\frac{1}{2}}^4 - \dots \quad (37)$$

Делая  $n=-1$ , получим формулу:

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-2} = X_0 + \frac{1}{24}f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{1920}f_{-\frac{1}{2}}^2 + \dots \quad (38)$$

определяющую начальный член столбца вторых сумм.

Совокупность формул (37), (35) и (38) решает подставленную задачу. Формулу (38) можно заменить другой, дающей  $f_0^{-2}$ , что несколько удобнее.

Так как

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-2} = \frac{1}{2}(f_0^{-2} + f_{-1}^{-2}) = f_0^{-2} - \frac{1}{2}f_{-\frac{1}{2}}^{-1},$$

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = f_0 - \frac{1}{2}f_{-\frac{1}{2}}^1, \dots$$

то равенство (38) может быть представлено следующим образом:

$$f_0^{-2} = X_0 + \frac{1}{2}f_{-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24}f_0 - \frac{1}{48}f_{-\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{1920}f_0^2 + \frac{17}{3840}f_{-\frac{1}{2}}^3 + \dots$$

Складывая почленно это равенство с равенством (35), умноженным на  $\frac{1}{2}$ , получим:

$$f_0^{-2} = X_0 + \frac{w}{2} X'_0 + \frac{1}{24} (f_0 - f_{-\frac{1}{2}}^1) - \frac{17}{5760} (3f_0^2 - 2f_{-\frac{1}{2}}^3) + \dots$$

или окончательно:

$$f_0^{-2} = X_0 + \frac{w}{2} X'_0 + \frac{1}{24} f_{-1} - \frac{17}{5760} (2f_{-1}^2 + f_0^2) + \frac{367}{967680} (3f_{-1}^4 + 2f_0^4) - \dots \quad (39)$$

Теперь нам остается только заменить формулу (37) формулой, дающей  $x(t_n)$ , но это уже было сделано в предыдущем параграфе.

Итак, в обоих случаях вычисление значений интеграла производится по формуле

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots, \quad (37bis)$$

но в первом случае начальные члены столбцов сумм находятся по формулам (31) и (25), а во втором — по формулам (35) и (39).

§ 55. Пример численного интегрирования уравнения второго порядка.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} t^2 \right) x. \quad (*)$$

Вычислим таблицу значений интеграла, определяемого условиями  $x(-0.05) = x(+0.05) = 1.0006252$ .

Эта задача может быть решена либо при помощи формул, данных в § 52, либо по формулам § 53. В первом случае получим таблицу для аргументов  $t = -0.05, 0.05, 0.15; \dots$ . Во втором случае аргументами таблицы будут служить значения  $t = 0.0, 0.1, 0.2, \dots$ .

Изберем второй путь и, сообразно с этим, положим

$$t_0 - \frac{w}{2} = -0.05, \quad t_0 + \frac{w}{2} = +0.05$$

$$t_0 = 0.0, \quad w = 0.1$$

$$f = 0.005 \left( 1 + \frac{1}{2} t^2 \right) x.$$

Вычисление будет выполняться по формулам (см. § 53):

$$x_n = f_n^{-2} + \text{Red},$$

$$\text{Red} = \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{1}{1951} f_n^4 - \dots$$

$$f_{\frac{1}{2}}^{-1} = x \left( t_0 + \frac{w}{2} \right) - x \left( t_0 - \frac{w}{2} \right) + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{24} f_0^1 - \frac{1}{113} f_0^3 + \dots$$

$$f_0^{-2} = x \left( t_0 - \frac{w}{2} \right) + \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} \left( f_0 - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^1 \right) - \frac{1}{113} \left( f_0^2 - \frac{1}{2} f_{-\frac{1}{2}}^3 \right) + \dots$$

Начальные значения  $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$  найдем последовательными приближениями.

Для первого приближения возьмем

$$x_{-1} = x_0 = x_1 = 1.00063$$

и вычислим соответствующие значения  $f$ , указанные в таблице А.

Таблица А.

$t$	$f^{-2}$	$f^{-1}$	$f$	$f^1$	$f^2$	Red	$x$
-0.1	1.00209	-0.00250	0.00503	-3		+42	1.00251
0.0	0.99959	+0.00250	0.00500	+3	+6	+42	1.00001
0.1	1.00209		0.00503			+42	1.00251

Затем по только-что приведенным формулам находим

$$f_{\frac{1}{2}}^{-1} = 0.00250, \quad f_0^{-2} = 0.99959$$

и последовательным сложением заполняем столбцы сумм.

Остается вычислить поправку Red, чтобы получить новые, более точные значения  $x$ .

С этими значениями проводим второе приближение, указанное в таблице В:

Таблица В.

$t$	$f^{-2}$	$f^{-1}$	$f$	$f^1$	$f^2$	Red	$x$
-0.2	1.009622		0.005152		+76	+427	1.01005
-0.1	1.002084	-0.007538	0.005038	-114	+76	+418	1.00250
0.0	0.999584	-0.002500	0.005000	-38	+76	+416	1.00000
0.1	1.002084	+0.002500	0.005038	+38	+76	+418	1.00250
0.2	1.009622	+0.007538	0.005152	+114	+76	+427	1.01005
0.3	1.022312	+0.012690	0.005342	+190	+76	+445	1.02276
0.4	1.040344	+0.018032				+468	1.04081

В этой таблице значения функции  $x_{-2}, x_2$  и  $x_3$  получены при помощи экстраполированных значений  $f_{-2}, f_2$  и  $f_3$  (показанных, как и вообще все экстраполированные величины, курсивом). Наконец  $x_4$  вычислено при помощи экстраполированного значения Red (ср. § 51).

Таблица С.

t	f <sup>-2</sup>	f <sup>-1</sup>	f	f <sup>1</sup>	f <sup>2</sup>	f <sup>3</sup>	Red	Δ Δ <sup>2</sup>	x
0.0	0.999 584		0.005 000				+ 416		1.000 00
		0.002 500		+ 38				2	
0.1	1.002 084		0.005 038		+ 75		+ 418	7	1.002 50
		0.007 538		+ 113		+ 5		9	
0.2	1.009 622		0.005 151		+ 80		+ 427	7	1.010 05
		0.012 689		+ 193		+ 3		16	
0.3	1.022 311		0.005 344		+ 83		+ 455	7	1.022 76
		0.018 033		+ 276		+ 4		23	
0.4	1.040 344		0.005 620		+ 87		+ 468	7	1.040 81
		0.023 653		+ 363		+ 4		30	
0.5	1.063 997		0,005 983		+ 91		+ 498	8	1.064 49
		0,029 636		+ 454				38	
0.6	1,093 633		0,006 437				+ 536	8	1.094 17
		0,036 073						46	
0.7	1.129 706						+ 582		1.130 29

Третье приближение, воспроизведенное в таблице С, показывает, что все значения x, полученные во втором приближении, являются окончательными.

В третьем приближении экстраполирование проведено еще на три интервала вперед; причем значения x<sub>5</sub> и x<sub>6</sub> получились совершенно точно, а x<sub>7</sub> получилось с ошибкой в две единицы пятого знака.

Если желательно избежать последовательных приближений при нахождении дальнейших значений x<sub>5</sub>, x<sub>6</sub>, x<sub>7</sub>, . . . то можно воспользоваться формулой Штёрмера

$$x_n = f_n^{-2} + \text{Red}$$

$$\text{Red} = \frac{1}{12} (f_{n-1} + f_{n-\frac{3}{2}}^1 + f_{n-2}^2) - \frac{1}{240} f_{n-2}^3 + \dots \quad (**)$$

вычисление по которой в том случае, когда третьими разностями можно пренебречь, почти столь же просто, как и по обычной формуле

$$\text{Red} = \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^3 + \dots \quad (***)$$

Если значения x<sub>n</sub>, получаемые по формуле (\*\*), время от времени подправлять по более точной формуле (\*\*\*), то будут соединены преимущества обоих методов.

В том случае, когда вычисляемый интеграл задан начальным значением и начальной скоростью, вычисления ведутся совершенно так же. Отличие заключается лишь в том, что начальные члены столбцов сумм вычисляются по другим формулам.

Если бы, например, нужно было вычислить таблицу значений интеграла уравнения (\*), определенного условиями

$$x(-0.05) = 1.000\ 6252, \quad x'(-0.05) = -0.025\ 0156$$

для t = 0.0, 0.1, 0.2, . . . , то начальные члены столбцов сумм нужно было бы вычислять по формулам (35) и (39), которые можно написать так:

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = w x' \left( t_0 - \frac{w}{2} \right) - \frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{339} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{1}{2637} f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots$$

$$f_0^{-2} = x \left( t_0 - \frac{w}{2} \right) + \frac{w}{2} x' \left( t_0 - \frac{w}{2} \right) + \frac{1}{24} f_{-1} - \frac{1}{339} (2f_{-1}^2 + f_0^2) + \frac{1}{2637} (3f_{-1}^4 + 2f_0^4) - \dots$$

В заключение отметим, что функция

$$x(t) = e^{\frac{1}{4}t^2},$$

вычислявшаяся в этом параграфе, тождественна с той, вычисление которой было рассмотрено в § 51. Сравнение этих двух примеров показывает, что численное интегрирование уравнения 2-го порядка, при прочих равных условиях, несколько не труднее, если не легче, численного интегрирования уравнения 1-го порядка.

§ 56. Формулы квадратур.

Применим формулы, выведенные в §§ 49 и 50, к интегрированию уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(t). \quad (40)$$

Решение этого уравнения, определяемое начальными условиями t = t<sub>0</sub>, x = 0, выражается интегралом

$$x = \int_{t_0}^t F(t) dt.$$

С другой стороны, частное значение этой функции при t = t<sub>n</sub> дается формулой (14). Поэтому

$$\int_{t_0}^{t_n} F(t) dt = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \dots \quad (41)$$

где

$$f(t) = w F(t),$$

а первый член столбца сумм определяется равенством

$$f_0^{-1} = \frac{1}{12} f_0^1 - \frac{11}{720} f_0^3 + \dots \quad (42)$$

Точно так же, применяя к вычислению интеграла уравнения (40), определяемого начальными условиями t = t<sub>0</sub> - w/2, x = 0, формулы (17) и

(17bis), получим:

$$\int_{t_0 - \frac{w}{2}}^{t_n + \frac{w}{2}} F(t) dt = f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots \quad (43)$$

$$\int_{t_0 - \frac{w}{2}}^{t_n} F(t) dt = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \dots \quad (44)$$

причем в этом случае начальный член столбца сумм равен

$$f_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \quad (45)$$

Еще одну формулу квадратур получим, если в равенствах (43) и (44) подчиним начальный член столбца сумм условию (42) и, сделав во втором из этих равенств  $n=0$ , вычтем второе из первого. Это даст

$$\int_{t_0}^{t_n + \frac{w}{2}} F(t) dt = f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n+\frac{1}{2}}^3 + \dots \quad (46)$$

Для получения формул квадратур, дающих двукратный интеграл, рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(t). \quad (47)$$

Решение этого уравнения, определяемое условиями  $x(t_0) = 0$ ,  $x'(t_0) = 0$ , с одной стороны, выражается формулой

$$x = \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t F(t) dt,$$

с другой—может быть вычислено по формуле (26). Это дает

$$\int_{t_0}^{t_n} dt \int_{t_0}^t F(t) dt = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n^{-1} - \frac{1}{240} f_n^2 + \dots \quad (48)$$

причем начальные члены столбцов сумм определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} &= -\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^1 - \frac{11}{720} f_0^3 + \frac{191}{60480} f_0^5 - \dots \\ f_0^{-2} &= -\frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^2 - \frac{31}{60480} f_0^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Рассматривая решение уравнения (47), удовлетворяющее условиям  $x(t_0 - \frac{w}{2}) = 0$ ,  $x'(t_0 - \frac{w}{2}) = 0$ , и пользуясь формулами (37) и (37bis), получим

$$\int_{t_0 - \frac{w}{2}}^{t_n + \frac{w}{2}} dt \int_{t_0 - \frac{w}{2}}^t F(t) dt = f_{n+\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{17}{1920} f_{n+\frac{1}{2}}^2 - \dots \quad (50)$$

$$\int_{t_0 - \frac{w}{2}}^{t_n} dt \int_{t_0 - \frac{w}{2}}^t F(t) dt = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n^{-1} - \frac{1}{240} f_n^2 + \dots \quad (51)$$

причем на этот раз имеем

$$\left. \begin{aligned} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} &= -\frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{367}{967680} f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots \\ f_0^{-2} &= \frac{1}{24} f_{-1} - \frac{17}{5760} (2f_{-1}^2 + f_0^2) + \frac{367}{967680} (3f_{-1}^4 + 2f_0^4) - \dots \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Применив тот же прием, какой мы употребили для получения формулы (46), из соотношений (50) и (51) получим еще одну формулу:

$$\int_{t_0}^{t_n + \frac{w}{2}} \int_{t_0}^t F(t) dt = f_{n+\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{17}{1920} f_{n+\frac{1}{2}}^2 - \dots \quad (53)$$

где столбцы сумм определяются условиями (49).

Все полученные нами формулы можно объединить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{w} \int_A^{t_n} f(t) dt &= f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 + \dots \\ \frac{1}{w} \int_A^{t_n + \frac{w}{2}} f(t) dt &= f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^1 - \frac{17}{5760} f_{n+\frac{1}{2}}^3 + \frac{367}{967680} f_{n+\frac{1}{2}}^5 - \dots \\ \frac{1}{w^2} \int_A^{t_n} dt \int_A^t f(t) dt &= f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n^{-1} - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \\ \frac{1}{w^2} \int_A^{t_n + \frac{w}{2}} dt \int_A^t f(t) dt &= f_{n+\frac{1}{2}}^{-2} - \frac{1}{24} f_{n+\frac{1}{2}}^{-1} + \\ &+ \frac{17}{1920} f_{n+\frac{1}{2}}^2 - \frac{367}{193536} f_{n+\frac{1}{2}}^4 + \dots \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(I) \\ &(II) \end{aligned}$$

причем для  $A=t_0$  начальные члены столбцов сумм вычисляются по формулам (42) или (49), а для  $A=t_0 - \frac{w}{2}$  их надо вычислять по формулам (45) или (52). Для всякого иного значения  $A$  эти начальные члены должны быть определены по общим формулам, указанным в §§ 49, 50 и 51.

Полезно отметить, что равенство (42) эквивалентно первому из равенств (49).

Примечание. На простых уравнениях (40) и (47) особенно удобно продемонстрировать следующее явление, с возможностью которого приходится считаться при всяком применении интерполяционных формул, в частности при численном интегрировании:

Для всякого интервала  $w$  существуют функции  $F(t)$ , для которых формулы (I) или (II) дадут результат, сколь угодно много отличающийся от истинного, хотя все члены в правых частях этих формул, влияющие на результат, будут приняты во внимание.

В самом деле, возьмем функцию

$$\varphi(t) = A \sin^2 \frac{2\pi(t-t_0)}{w},$$

все значения которой для  $t = t_0 + nw$  равны нулю. Формулы (41) и (42) дадут для интеграла

$$\int_{t_0}^{t_0+nw} \varphi(t) dt$$

значение, также равное нулю.

Между тем этот интеграл очевидно не равен нулю и при соответствующем выборе  $A$  будет равен сколь угодно большому числу.

Таким образом, интегралы функций  $F(t)$  и  $F(t) + \varphi(t)$  будут отличаться сколь угодно много, хотя формулы численного интегрирования будут для этих интегралов давать одно и то же значение.

Этот пример показывает, что при численном интегрировании (как и при других интерполяционных процессах) не достаточно иметь таблицу значений функции, а надо еще знать ее аналитический характер.

### § 57. Обоснование способа последовательных приближений.

Возьмем уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

и рассмотрим вычисление интеграла, определенного начальными значениями  $t_0, x_0$ .

Искомый частный интеграл удовлетворяет, очевидно, интегральному уравнению

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t F(x, t) dt. \quad (54)$$

Обратно: функция, удовлетворяющая уравнению (54), удовлетворяет как данному дифференциальному уравнению, так и поставленным начальным условиям.

Таким образом, нахождение нужного нам частного решения дифференциального уравнения эквивалентно разрешению интегрального уравнения (54).

Возьмем какую-нибудь функцию  $\xi_0(t)$ , удовлетворяющую условию  $\xi_0(t_0) = x_0$ , и вычислим новую функцию  $\xi_1(t)$  при помощи формулы

$$\xi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\xi_0(t), t) dt.$$

Новая функция также будет удовлетворять условию  $\xi_1(t_0) = x_0$ . Продолжая этот процесс, получим вереницу функций

$$\xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \dots,$$

связанных общим соотношением

$$\xi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\xi_n(t), t) dt. \quad (55)$$

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(t) = x(t).$$

Для этого вычтем почленно равенство (55) из (54) и рассмотрим разность

$$x - \xi_{n+1} = \int_{t_0}^t |F(x, t) - F(\xi_n, t)| dt.$$

Теорема о конечном приращении дает

$$|F(x, t) - F(\xi_n, t)| < M|x - \xi_n|,$$

где через  $M$  обозначена верхняя граница значений частной производной  $F'_t(x, t)$  для рассматриваемой области изменения  $x$  и  $t$ .

Следовательно:

$$|x - \xi_{n+1}| < M|t - t_0| \cdot |x - \xi_n|.$$

Подчиним интервал  $t - t_0$  условию

$$M|t - t_0| < q, \quad (56)$$

где через  $q$  обозначена правильная дробь, так что  $0 < q < 1$ ; тогда

$$|x - \xi_{n+1}| < q|x - \xi_n|.$$

Применив это неравенство для  $n = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ,  $n$  и перемножив почленно все полученные неравенства, получим:

$$|x - \xi_{n+1}| < q^n |x - \xi_0|.$$

Отсюда ясно, что при условии (56) функция  $\xi_n(t)$  действительно стремится к искомой функции  $x(t)$  при возрастании  $n$  до бесконечности.

Таким образом, взяв произвольную функцию  $\xi_0(t)$  и применив формулу (55) достаточное число раз, получим  $x(t)$  с любой точностью. Нужная точность будет достигнута тем скорее, чем меньше число  $q$ , т. е. чем меньше интервал  $t - t_0$ , а также чем лучше исходное приближение  $\xi_0(t)$ .

В примере, приведенном в § 51, мы взяли за  $\xi_0(t)$  постоянное число  $x_0$  и после двух приближений нашли  $x(t)$  для значений  $t$ , близких к  $t_0$ .

После того как несколько значений  $x(t)$  уже найдено, нецелесообразно пользоваться прежней функцией  $\xi_0(t)$  — лучше при помощи экстраполирования построить табличку значений некоторой новой, более близкой к  $x(t)$  функции, и к этой функции применить формулу (55), т. е. поступать так, как мы делали выше, применяя метод квадратур.

Аналогичным образом может быть обосновано применение последовательных приближений в методе квадратур для уравнений второго порядка и для систем уравнений.

### § 58. Различные приемы для уменьшения числа последовательных приближений.

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, рассмотренные в предыдущих параграфах, распадаются на две группы: к первой можно отнести методы Адамса, Штёрмера и соответствующие

им квадратурные методы; ко второй отнесем метод Коуэлла и обычный метод квадратур.

В методах первой группы используются разности, расположенные по восходящей диагонали, так что каждое значение искомой функции вычисляется при помощи только предыдущих ее значений. Эти методы поэтому могли бы быть названы экстраполяционными. Напротив, в методах второй группы употребляются разности, стоящие на горизонтальной прямой, вследствие чего при вычислении каждого значения функции одинаково участвуют как предыдущие значения функции, так и последующие. Поэтому методы второй группы заслуживают названия интерполяционных.

Интерполяционные методы дают естественно большую точность, но зато вычисление по этим методам приходится вести последовательными приближениями.

Если число приближений не превышает двух, то это обстоятельство отнюдь не может рассматриваться как недостаток, поскольку последовательные приближения существенно способствуют безошибочности вычислений. Однако вести вычисление с большим числом приближений невыгодно. Посмотрим, поэтому, каким образом число приближений может быть уменьшено.

**Первый способ.** Самый простой и в то же время едва ли не всегда самый удобный путь для уменьшения числа приближений заключается в соответствующем уменьшении интервала  $w$ . Этот интервал берут таких размеров, чтобы экстраполированное значение искомой функции было достаточно точно для получения окончательного значения функции  $f$ . При этом условии второе приближение будет менять только разности и суммы первого приближения и будет являться окончательным.

Такой авторитет в астрономических вычислениях, как Комри, в своем наставлении для применения численного интегрирования к проблемам Небесной механики <sup>1</sup> указывает только этот способ, причем особенно предостерегает вычислителя от попытки употребления широкого интервала интегрирования: „The computer should be warned against attempting to use too large an interval, the result of which is that checking by differencing, which is essential in these methods, becomes ineffective. A safe guide is that the sixth difference should not exceed two figures“.

Комри предлагает, таким образом, руководствоваться правилом: *интервал должен быть такой, чтобы шестая разность была бы не больше чем двузначное число.*

**Второй способ.** Если в обычной формуле квадратур

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \quad (57)$$

выразить величины  $f_n, f_n^2, \dots$  (присутствие которых и делает необходимыми последовательные приближения) через величины, находящиеся на восходящей диагонали, то в результате получим квадратурную формулу метода Штёрмера:

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_{n-1} + \frac{1}{12} f_{n-\frac{3}{2}}^1 + \frac{19}{240} f_{n-2}^2 + \dots \quad (58)$$

Формула (58) уже не требует последовательных приближений, но зато дает несколько меньшую точность (см. § 52), чем формула (57).

<sup>1</sup> Planetary Co-ordinates for the years 1800—1940 referred to the Equinox of 1950.0, London, 1933.

Для того, чтобы соединить выгоды, представляемые этими двумя формулами, остановимся в переходе от (57) к (58) на полдороге. Имеем

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-\frac{1}{2}}^1 = \\ &= f_{n-1} + f_{n-\frac{3}{2}}^1 + f_{n-1}^2 = \\ &= f_{n-1} + f_{n-\frac{3}{2}}^1 + f_{n-2}^2 + f_{n-\frac{3}{2}}^3 = \\ &\dots \end{aligned}$$

Поэтому, останавливаясь, например, на втором из этих выражений, получим

$$x_n = \bar{x}_n + \sigma_n,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &= f_n^{-2} + \frac{1}{12} (f_{n-1} + f_{n-\frac{3}{2}}^1 + f_{n-2}^2) - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \\ \sigma_n &= \frac{1}{12} f_{n-\frac{3}{2}}^3. \end{aligned}$$

Для  $\bar{x}_n$  мы получим сразу окончательное значение, ибо ошибки экстраполированных значений  $f_n^1, f_n^2, \dots$  вследствие малости коэффициентов чувствительного влияния на  $\bar{x}_n$  не окажут. При последовательных приближениях будет меняться лишь поправка  $\sigma_n$ . Но эта поправка мала, и вычисление ее проводится весьма удобно.

**Способ Титьена.** Титьен <sup>1</sup> обратил внимание на то, что необходимость в последовательных приближениях возникает вследствие наличия в правой части формулы (58) члена  $\frac{1}{12} f_n$ , так как остальные члены находятся и при помощи экстраполирования практически вполне точно.

Поэтому он, учитывая, что

$$f_n = w^2 F(x_n, t_n),$$

заменял формулу (57) таким равенством:

$$x_n - \frac{w^2}{12} F(x_n, t_n) = S_n, \quad (59)$$

где

$$S_n = f_n^{-2} - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \quad (60)$$

Для  $S_n$  сразу получаем окончательное значение, после чего решение уравнения (59) дает искомое значение  $x_n$ .

Таким образом, при последовательных приближениях будут меняться лишь разности  $f_n^2, f_n^4, \dots$ .

Этот способ может иметь практическое значение лишь в том случае, когда решение уравнения (59) относительно  $x_n$  достаточно просто.

<sup>1</sup> F. Tietjen, Specielle Störungen in Bezug auf Polarcoordinaten, Berl. Astr. Jahrbuch für 1877; М. Ф. Субботин, О численном интегрировании дифференциальных уравнений, Известия Академии Наук СССР, 1933, № 7, стр. 895—902.

**Способ Нумерова.** То же самое, что сделал Титъен для метода квадратур, Б. В. Нумеров сделал для метода Коуэлла.<sup>1</sup>

Обратимся к основной формуле Коуэлла

$$\Delta_k^2 = f_k^2 + \frac{1}{12} f_k^3 - \frac{1}{240} f_k^4 + \frac{31}{60480} f_k^5 - \dots, \quad (61)$$

которая совместно с равенством

$$\bar{x}_{k+1} = 2\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1} + \Delta_k^2$$

позволяет последовательно находить  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$

Введем новую переменную  $\bar{x}$ , полагая

$$\bar{x} = x - \frac{1}{12} f,$$

так что при  $t = t_k$  будем иметь

$$\bar{x}_k = x_k - \frac{1}{12} f_k. \quad (62)$$

Обозначая через  $\bar{\Delta}, \bar{\Delta}^2, \dots$  разности  $\bar{x}$ , получим, как очевидное следствие (62):

$$\bar{\Delta}_k^2 = \Delta_k^2 - \frac{1}{12} f_k^2.$$

Таким образом, для новой переменной имеем

$$\bar{\Delta}_k^2 = f_k^2 - \frac{1}{240} f_k^3 + \frac{31}{60480} f_k^4 - \dots$$

и, как для всякой функции,

$$\bar{x}_{k+1} = 2\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1} + \bar{\Delta}_k^2.$$

Эти два равенства очевидно вполне эквивалентны (60).

Для вычисления  $f_k = w^2 F(x_k, t_k)$  требуется знать  $x_k$ . Поэтому от каждой найденной „специальной координаты“  $\bar{x}_k$  надо перейти к обыкновенной координате  $x_k$ . Для этого надо решить уравнение (62), которое мы можем написать так:

$$x_k = \bar{x}_k - \frac{w^2}{12} F(x_k, t_k) \quad (63)$$

и которое соответствует уравнению (59) в способе Титъена.

Предположим, что интервал  $w$  выбран так, что членами

$$-\frac{1}{240} f_k^3 + \frac{31}{60480} f_k^4 + \dots = -\frac{1}{240} w^6 \left( \frac{d^3 F}{dt^3} \right)_k + \dots \quad (64)$$

можно пренебречь. В этом случае для последовательного вычисления „специальной координаты“  $\bar{x}$  получаем весьма простую формулу

$$\bar{x}_{k+1} = 2\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1} + f_k, \quad (65)$$

<sup>1</sup> Б. Нумеров, Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémérides en tenant compte des perturbations, Труды Гл. Российской Астрофиз. Обсерватории, т. II, 1923.

эквивалентную равенству (60), написанному так:

$$S_n = f_n^{-2}.$$

В применении этой формулы заключается так называемый способ Нумерова, или способ экстраполирования.<sup>1</sup>

В способе Нумерова разности величин  $f_k$  не составляются (ибо, если бы они были составлены, то было бы проще вычислять по формуле (61), нежели переходить к „специальной координате“), поэтому работа лишается обычного контроля и необходимая гарантия от ошибок может быть получена лишь при помощи тех или иных специально-контрольных вычислений.

Таким образом, рассматриваемая модификация метода Коуэлла может применяться при соблюдении двух условий: 1) можно заранее гарантировать нечувствительность членов (64) во время всего процесса интегрирования (в методе Коуэлла и в методе квадратур по ходу разностей всегда видно, какими членами можно и какими нельзя пренебречь); 2) решение уравнения (63) относительно  $x_k$  выполняется достаточно просто. Недостатки метода Коуэлла при этом усугубляются (§ 52).

Если идти дальше по пути уничтожения членов формулы (61) и взять, наконец, за новую переменную

$$z = x - \frac{1}{12} f + \frac{1}{240} f^2 - \frac{31}{60480} f^3 + \dots,$$

то мы будем иметь совершенно точные равенства:

$$\begin{aligned} \Delta^2 z_k &= f_k, \\ z_{k+1} &= 2z_k - z_{k-1} + f_k, \end{aligned}$$

но в этом случае максимального „усовершенствования“ метода Коуэлла мы получим, как показывает равенство (57),

$$z_k = f_k^{-2},$$

т. е., иначе говоря, метод квадратур.

### § 59. О формуле квадратур Лапласа и связанных с нею методах численного интегрирования уравнений.

Методы численного интегрирования, изученные в предыдущих параграфах, допускают много разнообразных модификаций.

Обратимся к способам, указанным в § 48 для интегрирования уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \quad (66)$$

Эти способы основаны на вычислении разности

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = x_{k+1} - x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k)$$

<sup>1</sup> Это последнее название следует признать неудачным, поскольку слово экстраполирование имеет общепринятое, гораздо более широкое значение.

при помощи последовательных разностей функции

$$f(t) = wF(x, t).$$

Представим эту разность в следующем виде:

$$\Delta_{k+\frac{1}{2}} = x(t_{k+1}) - x(t_{k+1} - w) = w \left( \frac{dx}{dt} \right)_{k+\frac{1}{2}} - \frac{w^2}{2} \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right)_{k+\frac{1}{2}} + \dots$$

или, пользуясь опять соотношениями (6):

$$\begin{aligned} \Delta_{k+\frac{1}{2}} = & f_{k+1} - \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12} f_k^2 - \frac{1}{24} f_{k-\frac{1}{2}}^3 - \frac{19}{720} f_{k-1}^4 - \\ & - \frac{3}{160} f_{k-\frac{3}{2}}^5 - \frac{863}{60480} f_{k-2}^6 - \dots \end{aligned} \quad (67)$$

Эта формула дает метод интегрирования, напоминающий метод Коуэлла в том отношении, что тут также приходится прибегать к экстраполяции для получения  $f_{k+1}$ .

Суммирование равенства (67) от  $k=0$  до  $k=n-1$  дает:

$$\begin{aligned} x_n - x_0 = & f_{n+\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (f_n - f_0) - \frac{1}{12} (f_{n-\frac{1}{2}}^2 - f_{-\frac{1}{2}}^2) - \\ & - \frac{1}{24} (f_{n-1}^3 - f_{-1}^3) - \frac{19}{720} (f_{n-\frac{3}{2}}^4 - f_{-\frac{3}{2}}^4) - \dots \end{aligned}$$

Применим эту формулу к тому случаю, когда правая часть уравнения (66) не зависит от  $x$ . В этом случае

$$x_n - x_0 = \int_{t_0}^{t_n} F(t) dt = \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_n} f(t) dt.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_n} f(t) dt = & \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n - \\ & - \frac{1}{12} (f_{n-\frac{1}{2}}^2 - f_{-\frac{1}{2}}^2) - \frac{1}{24} (f_{n-1}^3 - f_{-1}^3) - \dots \end{aligned}$$

Полученная формула может иногда представлять то неудобство, что она выражает интеграл не только через значения функции  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$ , но и через значения  $f_{-1}, f_{-2}, \dots$ , аргументы которых лежат вне пределов интегрирования. Это неудобство может быть избегнуто, если воспользоваться такими, легко проверяемыми соотношениями:

$$\begin{aligned} f_{-\frac{1}{2}}^1 &= f_{\frac{1}{2}}^1 - f_1^2 + f_{\frac{3}{2}}^3 - f_2^4 + \dots \\ f_{-1}^2 &= f_1^2 - 2f_{\frac{3}{2}}^3 + 3f_2^4 - 4f_{\frac{5}{2}}^5 + \dots \\ f_{-\frac{3}{2}}^3 &= f_{\frac{3}{2}}^3 - 3f_2^4 + 6f_{\frac{5}{2}}^5 - 10f_{\frac{7}{2}}^6 + \dots \\ f_{-2}^4 &= f_2^4 - 4f_{\frac{5}{2}}^5 + 10f_{\frac{7}{2}}^6 - 20f_{\frac{9}{2}}^7 + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим следующую формулу квадратур:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t_n} f(t) dt = & \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n - \\ & - \frac{1}{12} (f_{n-\frac{1}{2}}^2 - f_{\frac{1}{2}}^2) - \frac{1}{24} (f_{n-1}^3 + f_1^3) - \\ & - \frac{19}{720} (f_{n-\frac{3}{2}}^4 - f_{\frac{3}{2}}^4) - \frac{3}{160} (f_{n-2}^5 + f_2^5) - \dots \end{aligned}$$

найденную Лапласом. Эта формула широко применялась до 40-х годов XIX столетия при вычислении возмущений, но затем была вытеснена указанными в § 56 формулами Гаусса.

§ 60. О коэффициентах формул численного интегрирования.

В заключение покажем еще один путь для вычисления коэффициентов в формулах, служащих для численного интегрирования уравнений. После того как вид такой формулы установлен, ее коэффициенты могут быть получены путем применения этой формулы к частному случаю, выбранному надлежащим образом.

Возьмем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

и к решению этого уравнения  $x = e^t$  применим например формулу (10).

Составим разности функций  $\varphi = e^t$ , приняв  $t_0 = 0$ . Получим

$$\begin{aligned} \varphi_{k+\frac{1}{2}}^1 &= e^{(k+\frac{1}{2})w} - e^{kw} = e^{kw} (e^w - 1) \\ \varphi_k^2 &= [e^{kw} - e^{(k-1)w}] (e^w - 1) = e^{(k-1)w} (e^w - 1)^2 \\ \varphi_{k+\frac{1}{2}}^3 &= e^{(k-1)w} (e^w - 1)^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

или, полагая

$$u = e^{\frac{w}{2}} - e^{-\frac{w}{2}},$$

будем иметь такие выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_{k+\frac{1}{2}}^1 &= e^{(k+\frac{1}{2})w} u \\ \varphi_k^2 &= e^{kw} u^2 \\ \varphi_{k+\frac{1}{2}}^3 &= e^{(k+\frac{1}{2})w} u^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно, для функции  $f = we^t$  будем иметь

$$f_{k+\frac{1}{2}} = \frac{w}{2} (e^{(k+1)w} + e^{kw}) = we^{(k+\frac{1}{2})w} \operatorname{ch} \frac{w}{2}$$

$$f_{k+\frac{1}{2}}^2 = wu^2 e^{(k+\frac{1}{2})w} \operatorname{ch} \frac{w}{2}$$

$$f_{k+\frac{1}{2}}^4 = wu^4 e^{(k+\frac{1}{2})w} \operatorname{ch} \frac{w}{2},$$

где

$$\operatorname{ch} \frac{w}{2} = \frac{1}{2} (e^{\frac{w}{2}} + e^{-\frac{w}{2}}) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2}.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (10), окончательно получим такое тождество:

$$\frac{u}{w \operatorname{ch} \frac{w}{2}} = 1 - \frac{1}{12}u^2 + \frac{11}{720}u^4 - \frac{191}{60480}u^6 + \dots$$

Так как

$$w = 2 \ln \left( \frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \right),$$

то это тождество можно написать следующим образом:

$$\frac{u}{2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \cdot \ln \left( \frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \right)} = 1 - \frac{1}{12}u^2 + \frac{11}{720}u^4 - \dots$$

Итак, для получения коэффициентов формулы (10) достаточно стоящую слева функцию разложить в степенной ряд.

Аналогичным образом, коэффициенты формул (11), (19) и (29) найдутся при помощи тождеств

$$\frac{u}{w} = 1 + \frac{1}{24}u^2 - \frac{17}{5760}u^4 + \frac{367}{967680}u^6 - \dots$$

$$\frac{u^2}{w^2} = 1 + \frac{1}{12}u^2 - \frac{1}{240}u^4 + \frac{31}{60480}u^6 - \dots$$

$$\frac{u^2}{w^2 \operatorname{ch} \frac{w}{2}} = 1 - \frac{1}{24}u^2 + \frac{17}{1920}u^4 - \frac{367}{193536}u^6 + \dots$$

доказательство которых не представляет никакого труда.

ГЛАВА IX.

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ.

§ 61. Введение.

В начале предыдущей главы уже было отмечено, что численное интегрирование дифференциальных уравнений до последнего времени рассматривалось исключительно как метод вычисления возмущений и потому совершенно не применялось для вычисления невозмущенных координат. Небольшое исключение представляет лишь прием, предложенный Крюгером для нахождения истинной аномалии (§ 62).

Только после того, как по инициативе Коуэлла численное интегрирование было применено к вычислению возмущенных координат (а не возмущений), была более широко использована возможность определения этим методом и невозмущенных координат.

В этой главе мы рассмотрим вычисление при помощи численного интегрирования как орбитальных координат  $r$  и  $v$  (или  $\xi$  и  $\eta$ ), так и экваториальных гелиоцентрических координат  $x, y, z$ , служащих для вычисления эфемериды.

При вычислении более или менее длинной эфемериды излагаемые в этой главе методы часто заслуживают предпочтения перед вычислением координат светила по обычным формулам, изученным в первом томе.

§ 62. Вычисление координат, определяющих положение светила в орбите.

Для одновременного вычисления истинной аномалии  $v$  и радиуса-вектора  $r$  проще всего воспользоваться формулами

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2} \tag{1}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}. \tag{2}$$

Чтобы получить таблицу значений  $r$  и  $v$  для моментов  $t_0, t_0 + w, t_0 + 2w, \dots$  достаточно вычислить эти величины по обычным формулам (том I, глава III) для момента  $t_0$ . После этого численное интегрирование уравнения (1), в котором  $r$  определяется равенством (2), даст все остальные значения  $r$  и  $v$ .

Вместо уравнения (1) иногда может оказаться выгодным интегрировать уравнение

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{2k^2e \sin v}{r^3},$$

легко выводимое из (1) и (2).

Крюгер<sup>1</sup> предложил следующий весьма удобный распорядок вычисления. Прежде всего, по формулам кеплерова движения нужно найти  $v$  и  $r$  для трех первых моментов. Затем при помощи экстраполирования составляется таблица приближенных значения  $r$ , что дает возможность вычислить правую часть уравнения (1) и, после интегрирования, найти  $v$ . С этими значениями  $v$  вычисляем снова  $r$  и повторяем интегрирование: получим более точные значения  $v$ , и т. д. (ср. § 57).

Так как радиус-вектор меняется очень плавно и поэтому экстраполируется с большою точностью, то второе приближение даст всегда окончательные значения  $v$ , если только при экстраполировании не брать сразу слишком много интервалов.

Если нужно вычислить только один радиус-вектор, то можно воспользоваться формулой Лагранжа (§ 5)

$$\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2k^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (3)$$

После того как интегрирование этого уравнения даст таблицу значений  $r$ , определение  $v$  из уравнения (1) выполнится при помощи простой квадратуры. Конечно, зная  $r$ , можно найти  $v$  и при помощи равенства (2), однако вычисление истинной аномалии интегрированием уравнения (1) даст более точный результат и потребует меньше работы, так что этот путь следует, вообще говоря, предпочесть.

Для того чтобы начать интегрирование уравнения (3), можно вычислить значения  $r$  для двух моментов, например  $t_0 - w$  и  $t_0$ , или  $t_0 - \frac{w}{2}$  и  $t_0 + \frac{w}{2}$ . Но можно ограничиться вычислением  $r$  только для одного момента, но для этого же момента найти производную

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ke \sin v}{\sqrt{p}} = \frac{k \operatorname{tg} \varphi \sin v}{\sqrt{a}}. \quad (4)$$

Указанный путь для вычисления  $r$  и  $v$  для ряда равноотстоящих моментов особенно выгоден в тех случаях, когда вычисление этих величин по обычным формулам сложно, т. е. прежде всего для орбит, эксцентриситеты которых мало отличаются от единицы.

Для вычисления прямоугольных орбитальных координат  $\xi$  и  $\eta$  можно воспользоваться дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k^2 \xi r^{-3}, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -k^2 \eta r^{-3}$$

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Проще, однако, выразить  $\xi$  и  $\eta$  через величину  $\sigma$  (т. I, § 23), определяемую уравнением

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{k}{\sqrt{2}} q^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{1-\varepsilon\sigma^2}}{1+\varepsilon\sigma^2}, \quad (5)$$

где

$$q = a(1-e), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(1-e),$$

и условием, что  $\sigma = 0$  в момент прохождения через перигелий. Для вычисления  $\xi$  и  $\eta$  служат формулы (loc. cit.)

$$\xi = q(1-\sigma^2), \quad \eta = 2q\sigma \sqrt{1-\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon\sigma^2}.$$

<sup>1</sup> A. Kruiger, Die Wiederkehr des Olbers'schen Cometen 1887 . . . , Astr. Nachr., 117, 1887.

В заключение отметим, что численное интегрирование уравнения (1) или (3) может быть применено для уточнения или проверки уже найденных значений  $v$  или  $r$ .

Например, взяв за первое приближение значения  $v$ , даваемые таблицей XV (т. I) с точностью до  $0^{\circ}.00005$ , и интегрируя уравнение (1), получим  $v$  с большим числом десятичных знаков (§ 57).

### § 63. Пример вычисления орбитальных координат при помощи численного интегрирования.

Пусть кометная орбита определена элементами

$$e = 0.96764567, \quad \lg q = 9.7656500;$$

требуется вычислить  $r$  и  $v$  для моментов  $t_0 + kw$ , где

$$t_0 = 65^d.54400, \quad w = 2^d,$$

причем время считается от момента прохождения через перигелий.

Эта задача может быть решена несколькими способами.

**Способ Крюгера.** Прежде всего вычисляем, по обычным формулам (т. I, § 23), следующие значения  $v$  и  $r$ :

$t = t_0 - w$	$v = 100^{\circ}.00000$	$r = 1.37876$
$t_0$	101.08251	1.40932
$t_0 + w$	102.12697	1.43977.

Для уравнения (1) функция

$$f = wk^2 \sqrt{p} r^{-2}$$

может быть представлена так:

$$f = 2.111215 r^{-2} = [0.3245324] r^{-2},$$

так как гауссова постоянная, выраженная в градусах, равна

$$k^{\circ} = 0^{\circ}.9856075, \quad \lg k^{\circ} = 9.9937040_{-10};$$

кроме того, в настоящем случае  $w = 2$  и

$$\sqrt{p} = \sqrt{q(1+e)} = [0.0297984].$$

Вычисление функции  $f$  для указанных значений  $r$  и для двух экстраполированных (курсив) представлено в следующей таблице.

Таблица А.

$t$	$r$	Разности	$r^{-1}$	$r^{-2}$	$f$
$t_{-2}$	<i>1.34809</i>		0.741790	0.550252	1.16170
$t_{-1}$	1.37876	+ 3067	0.725289	0.526044	1.11059
$t_0$	1.40932	- 11	0.709562	0.503478	1.06295
$t_1$	1.43977	+ 3045	0.694555	0.482407	1.01846
$t_2$	<i>1.47011</i>	- 11	0.680221	0.462701	0.97686

Так как интегрирование уравнения (1) мы будем производить по формуле

$$v_n = f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \dots,$$

то в следующую таблицу В вписываем сразу средние арифметические значений  $f$ , полученных в вышеприведенной таблице А.

Таблица В.

$t$	$f^{-1}$	$f$	$f^1$	$f^2$	$f^3$	Red	$v$
$t_{-2}$	98.859 77		- 5294		- 27	+ 441	98.864 18
		1.136 14		+ 357			
$t_{-1}$	99.995 91		- 4937		- 27	+ 411	100.000 02
		1.086 77		+ 330			
$t_0$	101.082 68		- 4607		- 27	+ 383	101.086 51
		1.040 70		+ 303			
$t_1$	102.123 38		- 4304		- 25	+ 358	102.126 96
		0.997 66		+ 278			
$t_2$	103.121 04		- 4026			+ 335	103.124 39
		0.957 40					
$t_3$	104.078 44					+ 314	104.081 58

Таблица С.

$t$	$1 + e \cos v$	$r$	Разности	$r^{-1}$	$r^{-2}$	$f$
$t_0$		1.409 32	- 11			
			+ 3045			
$t_1$		1.439 77	- 12			1.018 46
			+ 3033			
$t_2$	0.780 281	1.470 10	- 13	0.680 226	0.462 707	0.976 87
			+ 3020			
$t_3$		1.500 30		0.666 533	0.444 266	0.937 94

Начальное значение столбца сумм определяется из условия

$$v_0 = f_0^{-1} - \frac{1}{12} f_0^1 + \frac{11}{720} f_0^3 - \dots = f_0^{-1} + \text{Red},$$

которое в данном случае дает

$$f_0^{-1} = 101^{\circ}.082\ 68.$$

Дальнейшие вычисления ведутся параллельно в таблицах В и С следующим образом.

1. Пользуясь экстраполированным значением  $\text{Red} = + 335$ , находим  $v_2 = 103^{\circ}.124\ 39$ .

2. С этим значением  $v_2$  вычисляем  $r_2$  по формуле (2); в настоящем случае  $p = 1.147\ 088$ .

3. Найденное  $r_2$  позволяет найти окончательное значение  $f_2 = 0.976\ 87$ , показывающее, что значение  $f_2^3 = 0.997\ 66$ , принятое при интегрировании, можно не менять.

4. Экстраполированием находим  $r_3$  и вычисляем  $f_3$ .

5. Вписываем в таблицу В соответствующее значение  $f_2^3 = 0.957\ 40$  и, взяв экстраполированную поправку  $\text{Red} = + 314$ , находим  $v_3$ .

В заключение заметим, что принятая при вычислении  $r$  точность не вполне обеспечивает пятый десятичный знак в истинной аномалии: для этого нужно было бы определять  $r$  с семью значущими цифрами. Впрочем такая точность едва ли когда-нибудь является действительно необходимой.

**Второй способ.** Интегрируем прежде всего уравнение (5), пользуясь, например, такими начальными значениями:

$$t_0 = 65.544\ 00, \quad \sigma_0 = 1.210\ 3123.$$

Так как  $\sigma$  меняется очень плавно, то интервал  $w$  можно увеличить и взять  $w = 4^d$ .

После этого можно либо вычислить  $\xi$  и  $\eta$ , либо найти  $r$  и  $v$  по формулам:

$$r = q(1 + e\sigma^2), \quad \text{tg } \frac{v}{2} = \sigma \sqrt{\frac{1 - e}{1 - e\sigma^2}}.$$

Можно, наконец, вычислив сначала  $r$  по первой из этих формул, найти  $v$  интегрированием уравнения (1), что потребует выполнения квадратуры (§ 56), так как правая часть этого уравнения уже будет известна для всех рассматриваемых моментов времени.

**Третий способ.** С начальными значениями

$$t_0 - \frac{w}{2} = 63.544\ 00, \quad r = 1.378\ 762, \quad \frac{dr}{dt} = 0.015\ 305\ 62$$

интегрируем уравнение (3), причем берем  $w = 4^d$ . Истинную аномалию находим так же, как и в предыдущем способе.

#### § 64. Вычисление эфемериды при помощи численного интегрирования уравнения движения.

Необходимые для вычисления эфемериды прямоугольные координаты светила  $x, y, z$  могут быть получены при помощи численного интегрирования уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2y}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} = 0. \quad (6)$$

Чтобы начать интегрирование, надо вычислить либо координаты

$$(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), \quad (x_0, y_0, z_0)$$

для моментов  $t_{-1} = t_0 - w$  и  $t_0$ , либо величины

$$(x_0, y_0, z_0), \quad (x'_0, y'_0, z'_0),$$

определяющие положение и скорость светила для момента  $t_0$ . Для этого служат обычные формулы кеплерова движения; например, если движение происходит по эллипсу с умеренным эксцентриситетом, то можно взять такие формулы (т. I):

$$\left. \begin{aligned} x &= aP_x (\cos E - e) + bQ_x \sin E \\ y &= aP_y (\cos E - e) + bQ_y \sin E \\ z &= aP_z (\cos E - e) + bQ_z \sin E \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-aP_x \sin E + bQ_x \cos E) \\ y' &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-aP_y \sin E + bQ_y \cos E) \\ z' &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-aP_z \sin E + bQ_z \cos E) \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

причем эксцентрическая аномалия  $E$  определяется из уравнения

$$E - e \sin E = M.$$

Для контроля могут служить равенства

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a(1 - e \cos E),$$

$$ke\sqrt{a} \sin E = xx' + yy' + zz'.$$

Вычисление невозмущенной эфемериды производится обычно на небольшой промежуток времени, причем начальный момент  $t_0$  берут в середине этого промежутка. При таких условиях метод квадратур не имеет особых преимуществ перед методом Коуэлла (так как число проходимых при интегрировании интегралов невелико), и оба эти метода могут быть одинаково рекомендованы.

Интегрирование уравнений (6) требует вычисления функций

$$f = -\omega^2 k^2 r^{-3} x, \quad -\omega^2 k^2 r^{-3} y, \quad -\omega^2 k^2 r^{-3} z.$$

Для этого удобно пользоваться специальной таблицей, дающей  $\omega^2 k^2 r^{-3}$  по аргументу  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Такая таблица помещена в томе I.

При пользовании более подробной таблицей Комри (Comrie, Planetary Co-ordinates for the years 1800—1940, London 1933) надо иметь в виду, что

для $\omega = 2^d$ ,	$10^7 \omega^2 k^2 = 11\,836.49$
" $= 4^d$ ,	$= 47\,345.95$
" $= 8^d$ ,	$= 189\,383.81$

Пример вычисления гелиоцентрической эфемериды планеты при помощи этого способа был уже дан в томе I.

В заключение заметим, что на практике предпочитают вычислить по формулам (7) не одно или два положения планеты, необходимые и достаточные для определения решения системы (6), а несколько положений, так как это не только облегчает начало интегрирования, но и дает очень хороший контроль.

### § 65. Другие способы для вычисления эфемериды при помощи численного интегрирования.

Предположим, что для момента  $t_0$  нам известны координаты светила  $x_0, y_0, z_0$  и компоненты скорости  $x'_0, y'_0, z'_0$ . В томе I было показано, что координаты светила  $x, y, z$  для любого момента времени выражаются через указанные величины следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= Fx_0 + Gx'_0 \\ y &= Fy_0 + Gy'_0 \\ z &= Fz_0 + Gz'_0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

причем функции  $F$  и  $G$  разлагаются в ряды:

$$\left. \begin{aligned} F &= 1 - \frac{1}{2} \theta^2 r_0^{-3} + \frac{1}{2} \theta^3 r_0^{-4} r'_0 - \dots \\ G &= \theta - \frac{1}{6} \theta^3 r_0^{-3} + \frac{1}{4} \theta^4 r_0^{-4} r'_0 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $\theta = k(t - t_0)$ , а  $r_0$  и  $r'_0$  вычисляются по известным формулам

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \quad r_0 r'_0 = x_0 x'_0 + y_0 y'_0 + z_0 z'_0.$$

Заметим, что штрихами мы обозначаем здесь производные по  $\theta = k(t - t_0)$ , так что

$$x' = \frac{1}{k} \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{1}{k} \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{1}{k} \frac{dz}{dt}, \quad r' = \frac{1}{k} \frac{dr}{dt}.$$

Вычисление гелиоцентрических координат  $x, y, z$ , нужных для получения эфемериды, можно производить по формулам (8). Для нескольких близких моментов  $t$  функции  $F$  и  $G$  могут быть удобно вычислены при помощи рядов (9). Для более далеких моментов можно прибегнуть к численному интегрированию вместо того, чтобы пользоваться конечными выражениями этих функций, указанными в томе I.

В самом деле, дважды дифференцируя равенства (8) и замечая, что

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x r^{-3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y r^{-3}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -k^2 z r^{-3},$$

получим

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = -k^2 r^{-3} F, \quad \frac{d^2 G}{dt^2} = -k^2 r^{-3} G, \quad (10)$$

причем

$$r^2 = r_0^2 F^2 + r_0'^2 G^2 + 2r_0 r_0' FG. \quad (11)$$

Система уравнений (10), где  $r$  определяется равенством (11), легко интегрируется способами, изученными в предыдущей главе.

Равенства (9) показывают, что

$$F_0 = 1, \quad \left(\frac{dF}{dt}\right)_0 = 0, \quad G_0 = 0, \quad \left(\frac{dG}{dt}\right)_0 = k;$$

поэтому здесь особенно удобно определять интегральную кривую начальной точкой и начальной скоростью.

Еще один способ вычисления прямоугольных гелиоцентрических координат мы получим, взяв формулы

$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2, \quad y = n_1 y_1 + n_2 y_2, \quad z = n_1 z_1 + n_2 z_2, \quad (12)$$

выражающие условие нахождения трех положений светила в одной плоскости, проходящей через центр Солнца, и рассматривая в них  $(x_1, y_1, z_1)$   $(x_2, y_2, z_2)$  как заданные координаты светила для моментов  $t_1$  и  $t_2$ , а  $(x, y, z)$  как искомые координаты, соответствующие моменту  $t$ .

В этом случае  $n_1$  и  $n_2$ , рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют, очевидно, уравнениям:<sup>1</sup>

$$\frac{d^2 n_1}{dt^2} = -k^2 n_1 r^{-3}, \quad \frac{d^2 n_2}{dt^2} = -k^2 n_2 r^{-3}, \quad (13)$$

причем

$$r^2 = r_1^2 n_1^2 + r_2^2 n_2^2 + 2r_1 r_2 n_1 n_2. \quad (14)$$

За начальные значения функций  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  удобно взять такие:

$$\begin{aligned} n_1(t_1) &= 1, & n_1(t_2) &= 0, \\ n_2(t_1) &= 0, & n_2(t_2) &= 1. \end{aligned}$$

Интегрирование системы (10) или (13) проще, чем непосредственное интегрирование уравнений движения, рассмотренное в предыдущем параграфе, поскольку каждая из этих систем включает два уравнения, а не три. Однако это упрощение в значительной степени компенсируется сложностью формул (11) и (14), а также необходимостью обращаться в заключение к равенствам (8) или (12) для получения искомого координат.

Моменты  $t_1$  и  $t_2$  целесообразно выбрать недалеко от середины эфемериды.

<sup>1</sup> На существование этих уравнений указал Т. Банахович (T. Banachiewicz, Sur quelques points fondamentaux de la théorie des orbites, Acta astronomica, Ser., a, 3, 1933).

## ГЛАВА X.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ.

#### § 66. Общие соображения.

Дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы в наиболее общем случае какого угодно возмущающего ускорения, были уже даны в § 12. Оставляя пока в стороне орбиты, имеющие эксцентриситеты, близкие к единице, введем вместо эксцентриситета угол  $\varphi = \arcsin e$ , как это обычно делается в вычислительной практике. Уравнения (37) и (38) (см. § 12) дадут:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dt} &= r \cos u W' \\ \frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u \operatorname{cosec} i W' \\ \frac{d\varphi}{dt} &= a \cos \varphi \sin v S' + a \cos \varphi (\cos v + \cos E) T' \\ \frac{d\pi}{dt} &= -p \operatorname{cosec} \varphi \cos v S' + \operatorname{cosec} \varphi (r+p) \sin v T' + \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W' \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{3k}{\sqrt{a}} \sin \varphi \sin v S' - \frac{3k}{\sqrt{a}} \frac{p}{r} T' \\ \frac{de}{dt} &= -\left(2 \cos \varphi r - p \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos v\right) S' + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (r+p) \sin v T' + \\ &\quad + \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W'. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения представляют систему совокупных уравнений первого порядка, численное интегрирование которой весьма просто выполняется любым из способов, изученных в главе VI. В астрономической практике всегда применяется метод квадратур, подробно рассмотренный в §§ 49—51. Здесь применение этого метода особенно облегчается тем обстоятельством, что правые части уравнений (1), имеющие множителями возмущающие массы, очень малы, а поэтому могут вычисляться со всей нужной точностью при помощи приближенных значений искомого элементов  $i, \Omega, \varphi, \pi, n, e$ .

Момент, для которого известны значения оскулирующих элементов  $i_0, \Omega_0, \varphi_0, \pi_0, n_0, e_0, a_0$ , иначе говоря, эпоху оскуляции, обозначим через  $t_0$ .

Положим

$$i = i_0 + \Delta i, \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega, \dots$$

в таком случае  $\Delta i, \Delta \Omega, \dots$  будут определяться дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta i}{dt} &= r \cos u W' \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и начальными условиями  $\Delta i = 0, \Delta \Omega = 0, \dots$  для  $t = \tau_0$ .

Выберем определенный интервал интегрирования  $w$  и, обозначив эпоху оскуляции  $\tau_0$  через  $t_0 - \frac{w}{2}$ , поставим себе задачей найти  $\Delta i, \Delta \Omega, \dots$ , а следовательно и оскулирующие элементы для моментов

$$t_k = t_0 + kw,$$

где  $k$  — целое число.

Так как, с одной стороны, при интегрировании уравнений (1') приходится вычислять произведения правых частей уравнений (1') на  $w$ , а с другой стороны —  $\Delta i, \Delta \Omega, \Delta \varphi, \dots$  удобно получить сразу в дуговой мере, то положим

$$\left. \begin{aligned} \delta i &= r \cos u W \\ \delta \Omega &= r \sin u \operatorname{cosec} i W \\ \delta \varphi &= a \cos \varphi \sin v S + a \cos \varphi (\cos v + \cos E) T \\ \delta \pi &= -p \operatorname{cosec} \varphi \cos v S + \operatorname{cosec} \varphi (r+p) \sin v T + \\ &\quad + \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W \\ w \delta n &= -\frac{3kw}{\sqrt{a}} \sin \varphi \sin v S - \frac{3kw}{\sqrt{a}} \frac{p}{r} T \\ \delta \varepsilon &= -\left(2 \cos \varphi r - p \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos v\right) S + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (r+p) \sin v T + \\ &\quad + \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где, учитывая значения  $S', T', W'$ , указанные в § 11, имеем:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{w}{\operatorname{arc} 1''} S' = \frac{w}{k\sqrt{p} \operatorname{arc} 1''} S, \\ T &= \frac{w}{k\sqrt{p} \operatorname{arc} 1''} T, \quad W = \frac{w}{k\sqrt{p} \operatorname{arc} 1''} W, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

причем через  $k$  обозначена гауссова постоянная, выраженная в секундах дуги.

Обратимся теперь к методу квадратур, подробно изученному в § 50, и воспользуемся, в частности, формулами (17bis) и (18). Принимая за  $f$  каждую из функций  $\delta i, \delta \Omega, \dots$ , мы будем иметь такие рабочие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \frac{11}{720} f_n^3 - \frac{191}{60480} f_n^5 + \dots \\ f_{-\frac{1}{2}}^{-1} &= -\frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{367}{967680} f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где через  $x_n$  обозначены соответственно значения  $\Delta i, \Delta \Omega, \dots$  для момента  $t = t_0 + nw$ .

Так как средняя долгота вычисляется по формуле (§ 12)

$$\lambda = \varepsilon + \int_{t_0}^t n dt,$$

причем ее невозмущенное значение равно  $\varepsilon_0 + n_0(t - \tau_0)$ , то возмущение средней долготы можно представить так:

$$\Delta \lambda = \lambda - [\varepsilon_0 + n_0(t - \tau_0)] = \Delta \varepsilon + \int_{\tau_0}^t (n - n_0) dt.$$

Следовательно, вычисление  $\Delta \lambda$  приводится к нахождению величины

$$\Delta' \lambda = \int_{\tau_0}^t (n - n_0) dt,$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \Delta' \lambda}{dt^2} = \frac{dn}{dt} \quad (5)$$

и начальным условиям:

$$\Delta' \lambda = 0, \quad \frac{d \Delta' \lambda}{dt} = 0$$

для  $t = \tau_0$ .

Для интегрирования уравнения (5), правая часть которого определяется предпоследним из равенств (1), положим  $f = w \delta n$  и воспользуемся формулами (37bis), (36) и (39), выведенными в главе VI. Это даст следующие рабочие формулы:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{31}{60480} f_n^4 - \dots \\ f_{-\frac{1}{2}}^{-1} &= -\frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{17}{5760} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{367}{967680} f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots \\ f_0^{-2} &= +\frac{1}{24} f_{-1} - \frac{17}{5760} (2f_{-1}^2 + f_0^2) + \frac{367}{967680} (3f_{-1}^4 + 2f_0^4) - \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где через  $x_n$  обозначена величина  $\Delta' \lambda$  для момента  $t = t_0 + nw$ .

После того как  $\Delta' \lambda$  найдено, вычисление возмущенной средней долготы  $\lambda$  для момента  $t$  производится по формуле

$$\lambda = \varepsilon_0 + n_0(t - \tau_0) + \Delta \varepsilon + \Delta' \lambda. \quad (7)$$

Имея возмущенные значения

$$i = i_0 + \Delta i, \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega, \dots$$

всех элементов для этого момента времени, мы можем вычислить положение светила по обычным формулам эллиптического движения:

$$\left. \begin{aligned} E - e \sin E &= \lambda - \pi \\ r \sin v &= a \cos \varphi \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - \sin \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

причем большая полуось  $a$  находится при помощи соотношения

$$a = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (9)$$

где надо взять

$$\lg k'' = 3.550\ 0066,$$

если  $n$  выражено в секундах дуги, и

$$\lg k^{\circ} = 9.993\ 7041,$$

если  $n$  выражено в долях градуса.

Вычисление прямоугольных экваториальных координат (нужных в том случае, когда возмущенное положение светила сравнивается с наблюдениями) выполняется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A' + v) \\ y &= r \sin b \sin (B' + v) \\ z &= r \sin c \sin (C' + v), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

причем постоянные Гаусса  $a, b, c$  и

$$A' = A + \omega, \quad B' = B + \omega, \quad C' = C + \omega$$

определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega \\ \sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \epsilon \\ \sin b \cos B &= \cos i \cos \Omega \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \epsilon \\ \sin c \cos C &= \cos i \cos \Omega \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

в которых через  $\epsilon$  обозначена наклонность эклиптики к экватору.

Итак, вычисление возмущенных значений элементов приводится, если не считать весьма просто выполняемого интегрирования, к вычислению функций (2), зависящих, с одной стороны, от компонентов возмущающего ускорения  $S, T, W$ , с другой — от координат  $r$  и  $v$  возмущаемого тела. Так как вычисление этих последних, выполняемое по формулам (7), (8), (9), нами рассмотрено, то остается лишь указать наиболее удобные способы для определения величин  $S, T$  и  $W$ , зависящих от компонентов возмущающего ускорения.

### § 67. Вычисление компонентов возмущающего ускорения.

Введем следующую вспомогательную координатную систему: направим ось  $\xi$  по радиусу-вектору возмущающего тела в сторону увеличения  $r$ , ось  $\eta$  — по перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости орбиты в сторону возрастания истинной аномалии, наконец ось  $\zeta$  — по перпендикуляру к плоскости орбиты таким образом, чтобы рассматриваемая система координат была правой.

Через  $S, T, W$  мы обозначим компоненты возмущающего ускорения по осям  $\xi, \eta, \zeta$ . Для вычисления этих величин могут быть употреблены различные приемы. Наиболее употребительным является следующий.

Обозначим через  $m_1$  и  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  массу и координаты одной из возмущающих планет. Так как координаты возмущаемой планеты равны, оче-

видно,  $r, 0, 0$ , то общее выражение для компонента возмущающего ускорения по любой оси, а именно (§ 3):

$$k^2 m_1 \left( \frac{x_1 - x}{\Delta_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right),$$

дает в рассматриваемом случае

$$S_1 = k^2 m_1 \left( \frac{\xi_1 - r}{\Delta_1^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right)$$

$$T_1 = k^2 m_1 \left( \frac{\eta_1}{\Delta_1^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right)$$

$$W_1 = k^2 m_1 \left( \frac{\zeta_1}{\Delta_1^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right),$$

где

$$\Delta_1^2 = (\xi_1 - r)^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

а через  $r_1$  обозначен радиус-вектор возмущающей планеты.

Таким образом, учитывая равенства (3) и полагая

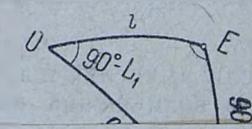
$$K_1 = \frac{wk'' m_1}{\sqrt{p}} \left( \frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \quad (12)$$

получим

$$S_1 = K_1 \xi_1 - \frac{wk'' m_1}{\sqrt{p}} \frac{r}{\Delta_1^3}, \quad T_1 = K_1 \eta_1, \quad W_1 = K_1 \zeta_1. \quad (13)$$

Если рассматриваются возмущения, производимые другими планетами с массами  $m_2, \dots$  и координатами  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots$ , то вычисляем по формулам, аналогичным (12) и (13), соответствующие компоненты  $(S_2, T_2, W_2), \dots$  и полагаем в уравнениях (2):

$$S = S_1 + S_2 + \dots$$



### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
182	10 снизу	возмущающего	возмущаемого	автора

неты, причем долготу  $L_1$  будем считать от восходящего узла  $\Omega$  этой орбиты (рис. 10).

В сферическом треугольнике, образованном положением планеты  $P_1$ , полюсом эклиптики  $E$  и полюсом орбиты  $O$ , углы при вершинах  $O$  и  $E$  равны соответственно  $90^\circ - L_1$  и  $90^\circ + l_1 - \Omega$ .

причем большая полуось  $a$  находится при помощи соотношения

$$a = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{9}$$

где надо взять

$$\lg k'' = 3.550\ 0066,$$

если  $n$  выражено в секундах дуги, и

$$\lg k^{\circ} = 9.993\ 7041,$$

если  $n$  выражено в долях градуса.

Вычисление прямоугольных экваториальных координат (нужных в том случае, когда возмущенное положение светила сравнивается с наблюдениями) выполняется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin a \sin (A' + v) \\ y &= r \sin b \sin (B' + v) \\ z &= r \sin c \sin (C' + v), \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

причем постоянные Гаусса  $a, b, c$  и

$$A' = A + \omega, \quad B' = B + \omega, \quad C' = C + \omega$$

определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \Omega \\ \sin a \cos A &= -\cos i \sin \Omega \\ \sin b \sin B &= \sin \Omega \cos \epsilon \\ \sin b \cos B &= \cos i \cos \Omega \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon \\ \sin c \sin C &= \sin \Omega \sin \epsilon \\ \sin c \cos C &= \cos i \cos \Omega \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon, \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

в которых через  $\epsilon$  обозначена наклонность эклиптики к экватору.

Итак, вычисление возмущенных значений элементов приводится, если не считать весьма просто выполняемого интегрирования, к вычислению функций (2), зависящих, с одной стороны, от компонентов возмущающего ускорения  $S, T, W$ , с другой — от элементов орбиты возмущаемой планеты.

Таким образом, по формулам (9) и (11) вычисляются возмущения  $S, T, W$ .

вид осей ронок кос

по раз

... наиболее употребительным является следующий.

Обозначим через  $m_1$  и  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  массу и координаты одной из возмущающих планет. Так как координаты возмущаемой планеты равны, оче-

видно,  $r, 0, 0$ , то общее выражение для компонента возмущающего ускорения по любой оси, а именно (§ 3):

$$k^2 m_1 \left( \frac{x_1 - x}{\Delta_1^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right),$$

дает в рассматриваемом случае

$$S_1 = k^2 m_1 \left( \frac{\xi_1 - r}{\Delta_1^3} - \frac{\xi_1}{r_1^3} \right)$$

$$T_1 = k^2 m_1 \left( \frac{\eta_1}{\Delta_1^3} - \frac{\eta_1}{r_1^3} \right)$$

$$W_1 = k^2 m_1 \left( \frac{\zeta_1}{\Delta_1^3} - \frac{\zeta_1}{r_1^3} \right),$$

где

$$\Delta_1^2 = (\xi_1 - r)^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

а через  $r_1$  обозначен радиус-вектор возмущающей планеты.

Таким образом, учитывая равенства (3) и полагая

$$K_1 = \frac{wk' m_1}{\sqrt{p}} \left( \frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r_1^3} \right), \tag{12}$$

получим

$$S_1 = K_1 \xi_1 - \frac{wk' m_1}{\sqrt{p}} \frac{r}{\Delta_1^3}, \quad T_1 = K_1 \eta_1, \quad W_1 = K_1 \zeta_1. \tag{13}$$

Если рассматриваются возмущения, производимые другими планетами с массами  $m_2, \dots$  и координатами  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \dots$ , то вычисляем по формулам, аналогичным (12) и (13), соответствующие компоненты ( $S_2, T_2, W_2$ ),  $\dots$  и полагаем в уравнениях (2):

$$S = S_1 + S_2 + \dots$$

$$T = T_1 + T_2 + \dots$$

$$W = W_1 + W_2 + \dots$$

Остается показать, каким образом могут быть найдены координаты  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \dots$  возмущающих планет. Астрономические ежегодники дают для каждой из больших планет эклиптические гелиоцентрические координаты, а именно: радиус-вектор  $r_1$ , долготу  $l_1$  и широту  $b_1$ . Эти же величины даются со всей нужной в обычно встречающихся случаях точностью таблицами Комри.

Обозначим через  $L_1$  и  $B_1$  долготу и широту рассматриваемой возмущающей планеты относительно плоскости орбиты возмущаемой планеты, причем долготу  $L_1$  будем считать от восходящего узла  $\Omega$  этой орбиты (рис. 10).

В сферическом треугольнике, образованном положением планеты  $P_1$ , полюсом эклиптики  $E$  и полюсом орбиты  $O$ , углы при вершинах  $O$  и  $E$  равны соответственно  $90^\circ - L_1$  и  $90^\circ + l_1 - \Omega$ .

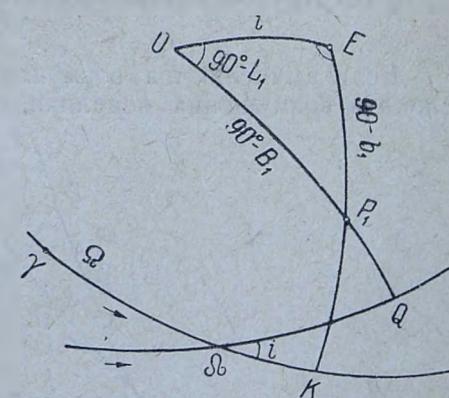


Рис. 10.

Поэтому для вычисления  $L_1$  и  $B_1$  могут служить формулы:

$$\left. \begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos (l_1 - \Omega) \cos b_1 \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin i \sin b_1 + \cos i \cos b_1 \sin (l_1 - \Omega) \\ \sin B_1 &= \cos i \sin b_1 - \sin i \cos b_1 \sin (l_1 - \Omega). \end{aligned} \right\} (14)$$

Обозначим, как и раньше, через  $u$  аргумент широты возмущаемой планеты, тогда  $L_1 - u$  и  $B_1$  будут сферические координаты рассматриваемой возмущающей планеты, соответствующие координатной системе  $\xi, \eta, \zeta$ ; поэтому

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - u) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - u) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1. \end{aligned} \right\} (15)$$

Формулы (14) и (15) полностью решают вопрос о вычислении  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  по данным  $r_1, l_1, b_1$ .

В прежнее время, когда арифмометры были мало распространены, для вычисления взаимного расстояния планет  $\Delta_1$  рекомендовалось употреблять, вместо формулы

$$\Delta_1^2 = (\xi_1 - r)^2 - \eta_1^2 + \zeta_1^2 = r_1^2 + r^2 - 2r\xi_1,$$

равенства

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 \cos q_1 \cos Q_1 &= \xi_1 - r \\ \Delta_1 \cos q_1 \sin Q_1 &= \eta_1 \\ \Delta_1 \sin q_1 &= \zeta_1, \end{aligned} \right\}$$

где  $q_1$  и  $Q_1$  — некоторые вспомогательные величины, ненужные для дальнейшего.

### § 68. Другой способ вычисления компонентов возмущающего ускорения.

Если вычисляются возмущения для нескольких оборотов светила и если эти возмущения невелики, то можно вычисление координат возмущающей планеты (которую для краткости можно назвать Юпитером) провести иначе.

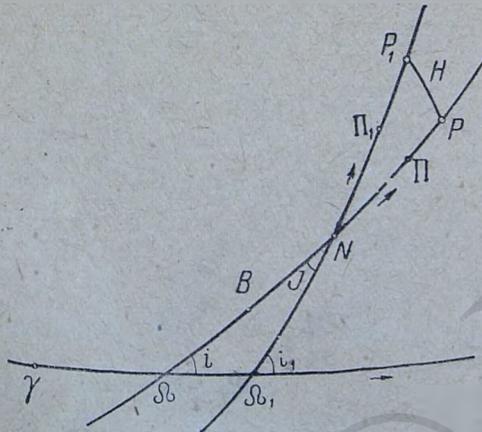


Рис. 11.

Будем считать движение Юпитера и движение возмущаемого светила происходящими в неизменных плоскостях, определяемых соответственно элементам  $i_1, \Omega_1$  и  $i, \Omega$ .

Обратимся к сферическому треугольнику  $\Omega\Omega_1N$  (рис. 11), образованному восходящими узлами  $\Omega$  и  $\Omega_1$  рассматриваемых орбит относительно эклиптики и восходящим узлом  $N$  орбиты Юпитера относительно орбиты возмущаемого тела. Для вычисления угла  $J$  между плоскостями орбит и дуг  $\Omega N, \Omega_1 N$ , которые мы обозначим через  $N$  и  $N_1$ , могут служить

следующие формулы, легко получаемые из рассматриваемого треугольника:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (N + N_1) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i_1 + i) \\ \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (N + N_1) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i_1 - i) \\ \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (N - N_1) &= \sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i_1 - i) \\ \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (N - N_1) &= \cos \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i_1 - i). \end{aligned} \right\} (16)$$

Рассмотрим теперь, наряду с прежней координатной системой  $\xi, \eta, \zeta$ , новую систему  $\xi', \eta', \zeta'$ , отличающуюся тем, что ось  $\xi'$  направлена в точку орбиты  $B$ , отстоящую от узла на угол  $\Omega B = \beta$ , а ось  $\eta'$  — в точку, расстояние которой от узла равно  $\beta + 90^\circ$ .

Координаты Юпитера в новой системе мы можем вычислить по обычным формулам (формулы (8) в § 10), принимая в них долготу узла равной

$$BN = N - \beta,$$

а аргумент широты равным

$$NP_1 = \lambda_1 - N_1 - \Omega_1,$$

где через  $\lambda_1$  обозначена долгота Юпитера в орбите.

Получим

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= r_1 \{ \cos (\lambda_1 - N_1 - \Omega_1) \cos (N - \beta) - \sin (\lambda_1 - N_1 - \Omega_1) \sin (N - \beta) \cos J \} \\ \eta'_1 &= r_1 \{ \cos (\lambda_1 - N_1 - \Omega_1) \sin (N - \beta) - \sin (\lambda_1 - N_1 - \Omega_1) \cos (N - \beta) \cos J \} \\ \zeta'_1 &= r_1 \sin (\lambda_1 - N_1 - \Omega_1) \sin J. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, вводя величины, аналогичные постоянным Гаусса, при помощи равенств

$$\left. \begin{aligned} A \sin A'' &= \cos (N - \beta) \\ A \cos A'' &= -\sin (N - \beta) \cos J \\ A' &= A'' - N_1 - \Omega_1 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} B \sin B'' &= \sin (N - \beta) \\ B \cos B'' &= \cos (N - \beta) \cos J \\ B' &= B'' - N_1 - \Omega_1 \end{aligned} \right\} (17)$$

$$C = \sin J, \quad C' = -N_1 - \Omega_1,$$

окончательно будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \xi'_1 &= r_1 A \sin (A' + \lambda_1) \\ \eta'_1 &= r_1 B \sin (B' + \lambda_1) \\ \zeta'_1 &= r_1 C \sin (C' + \lambda_1) \end{aligned} \right\} (18)$$

Чтобы получить нужные нам координаты  $\xi$  и  $\eta$ , остается сделать поворот вокруг оси  $\zeta$  на угол  $u - \beta$ , что дает:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi'_1 \cos (u - \beta) + \eta'_1 \sin (u - \beta) \\ \eta_1 &= -\xi'_1 \sin (u - \beta) + \eta'_1 \cos (u - \beta) \end{aligned} \right\} (19)$$

Вычисление по формулам (18) и (19) можно упростить надлежащим выбором произвольного угла  $\beta$ . Наиболее простые формулы<sup>1</sup> получаются

<sup>1</sup> Эти формулы для случая  $\beta = u$  даны Мертоном: G. Merton, The periodic comet Grigg (1902 II) = Skjellerup (1922 I) (1902 to 1927), Memoirs of the R. Astr. Society, 64, Part III, 1927. Формулы, соответствующие случаю  $\beta = \omega$ , применены в работе Н. И. Идельсона: La comète d'Encke en 1924—1934, Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове, т. XV, I, 1935.

в следующих случаях:

- 1)  $\beta = N$  или  $\beta = N + 90^\circ$
- 2)  $\beta = u$
- 3)  $\beta = \omega$ .

Так как во втором случае угол  $\beta = u$  зависит от положения возмущаемого светила, то и постоянные  $A, A', \dots$  будут зависеть от координат возмущаемого светила. Таким образом, формулы, соответствующие этому случаю, целесообразно применять лишь тогда, когда функции (2), подлежащие интегрированию, вычисляются лишь для немногих, всегда одних и тех же точек орбиты (см. § 69).

Применение формул (18) и (19) только тогда может иметь преимущество перед обычными формулами (14) и (15), когда элементы  $i, \Omega, i_1, \Omega_1$ , служащие для вычисления постоянных по формулам (16) и (17), могут считаться неизменными в течение значительного промежутка времени и, кроме того, долготы в орбите  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  возмущающих планет имеются в готовом виде.

Влияние небольших изменений  $di, d\Omega, \dots$  на постоянные  $A, A', \dots$  можно, конечно, учитывать дифференциально, но на выводе соответствующих формул мы останавливаться не будем.

### § 69. Табулирование коэффициентов.

Вычисление выражений (2) приводится, с одной стороны, к вычислению величин  $S, T, W$ , которое было подробно рассмотрено в двух предыдущих параграфах, с другой — к вычислению коэффициентов, на которые умножаются эти величины.

Если выделить множители, зависящие от  $a, i$  и  $\omega$ , вычисление которых выполняется весьма просто, то нахождение этих коэффициентов сведется к вычислению величин:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{r}{a} \sin v; & B &= \frac{r}{a} \cos v \\ C &= \cos \varphi \sin v; & D &= \cos \varphi (\cos v + \cos E) \\ E &= \operatorname{ctg} \varphi \cos \varphi \cos v; & F &= \operatorname{cosec} \varphi \left( \frac{r}{a} + \cos^2 \varphi \right) \sin v \\ G &= \sin \varphi \sin v & H &= 2 \frac{r}{a} \cos \varphi - \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos v \end{aligned} \right\} (20)$$

являющихся функциями только  $\varphi$  и  $M$ .

Таким образом, вычислительная работа может быть существенно облегчена построением соответствующих таблиц. Чтобы сократить объем этих таблиц, выгодно преобразовать уравнения (1), введя вместо  $t$  независимую переменную  $M$  при помощи равенства

$$\frac{d}{dM} = ka^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dt}.$$

В этом случае можно ограничиться вычислением величин (20) для немногих круглых значений  $M$ , так что вместо таблиц с двумя аргументами  $\varphi$  и  $M$  будем иметь ряд таблиц с одним аргументом  $\varphi$ .

Подобные таблицы построены Кроммелином<sup>1</sup> для значений аргумента  $e = \sin \varphi$ , меняющихся от 0.37 до 0.84 через 0.01, т. е. соответствующих орбитам короткопериодических комет. Первая таблица дает значения коэффициентов (несколько отличающихся по форме от указанных выше  $A, B, \dots$ ) для  $M = 0^\circ, 7.5^\circ, 15^\circ, 22.5^\circ, \dots$  с пятью знаками; вторая таблица дает логарифмы тех же коэффициентов с четырьмя знаками для  $M = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, \dots, 25^\circ, 26^\circ$ .

Первая таблица предназначена для вычисления возмущений от Юпитера и Сатурна, вторая — для вычисления возмущений от четырех внутренних планет, которые производят заметное действие лишь во время нахождения кометы вблизи перигелия.

В некоторых случаях может быть выгодно принять за независимую переменную не среднюю аномалию, а эксцентрическую, для чего уравнения (1) надо преобразовать при помощи соотношения

$$\frac{d}{dE} = \frac{r\sqrt{a}}{k} \frac{d}{dt}.$$

Точки, соответствующие равноотстоящим значениям  $E$ , расположены по орбите более равномерно, чем точки, соответствующие равноотстоящим значениям  $M$ , что особенно чувствительно при больших значениях эксцентриситета. Действительно, разложения в ряды, которые мы будем изучать в главе XII, показывают, что

$$\begin{aligned} v &= M + 2e \sin M + \dots \\ v &= E + e \sin E + \dots, \end{aligned}$$

если ограничиться первыми степенями эксцентриситета. Таким образом, равноотстоящие значения  $E$  дают более равноотстоящие, если можно так выразиться, значения  $v$ , чем те, которые получаются при равноотстоящих значениях  $M$ .

Еще более убедительно доказывает этот факт (поскольку только что указанные ряды расходятся для  $e > 0.66 \dots$ ) следующая табличка, дающая соответствующие значения трех аномалий в случае  $e = 0.85$ , т. е. для круглой величины эксцентриситета кометы Энке:

$v = 0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$	$180^\circ$
$E = 0^{\circ}0$	$5^{\circ}7$	$11^{\circ}8$	$18^{\circ}7$	$26^{\circ}9$	$37^{\circ}5$	$52^{\circ}5$	$76^{\circ}1$	$116^{\circ}5$	$180^{\circ}0$
$M = 0^{\circ}0$	$0^{\circ}9$	$1^{\circ}8$	$3^{\circ}1$	$4^{\circ}9$	$7^{\circ}9$	$13^{\circ}9$	$28^{\circ}8$	$72^{\circ}9$	$180^{\circ}0$

Наиболее равномерное распределение положений возмущаемого светила по орбите получим, взяв за независимую переменную, по которой производится интегрирование, истинную аномалию. Это легко сделать, воспользовавшись соотношением:

$$\frac{d}{dv} = \frac{\sec \varphi}{n} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \frac{d}{dt}.$$

Нужно однако заметить, что употребление эксцентрической или истинной аномалии в качестве независимой переменной значительно усложняет вычисление координат возмущающих планет.

<sup>1</sup> A. C. D. Crommelin, Tables for facilitating the computation of the perturbations of periodic comets by the planets, Memoirs of the R. Astr. Society, 64, Part V, 1929.

## § 70. Сопоставление формул.

Как общее правило, возмущения элементов вычисляются с точностью до 0''0001 для среднего суточного движения и до 0'001 для всех остальных элементов. Для достижения такой точности в случае малой планеты берется интервал  $w = 40^d$  и вычисление ведется с пятью знаками. В случае кометы величину интервала целесообразно изменять в зависимости от близости кометы к возмущающей планете и от близости к перигелию.

Следует позаботиться о том, чтобы элементы возмущаемого светила, а следовательно и получаемые по ним координаты, были отнесены к тому же экватору и равноденствию, как и координаты возмущающих планет.

Чтобы избежать ненужного интерполирования, следует моменты  $t_0 + kw$  выбрать так, чтобы иметь для них координаты возмущающих планет в готовом виде.

Пусть имеем оскулирующую систему элементов  $a, e, i, \dots$  для эпохи  $\tau_0$ . Выбрав интервал  $w$ , определяем из равенства

$$t_0 - \frac{w}{2} = \tau_0$$

начальный момент  $t_0$ . Затем, для моментов  $t_0 - 2w, t_0 - w, t_0, t_0 + w$  при помощи данных (т. е. невозмущенных) элементов вычисляем  $r, v, u, p$  по формулам:

$$\begin{aligned} E - e \sin E &= M \\ r \sin v &= a \cos \varphi \sin E \\ r \cos v &= a (\cos E - \sin \varphi) \\ u &= v + \omega, \quad p = a \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (I)$$

После этого берем из ежегодника (или таблиц Комри) координаты  $(r_1, l_1, b_1), (r_2, l_2, b_2), \dots$  возмущающих планет и вычисляем соответствующие орбитальные координаты, для чего служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} \cos B_1 \cos L_1 &= \cos (l_1 - \Omega) \cos b_1 \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin i \sin b_1 + \cos i \cos b_1 \sin (l_1 - \Omega) \\ \sin B_1 &= \cos i \sin b_1 - \sin i \cos b_1 \sin (l_1 - \Omega) \end{aligned} \right\} (II)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - u) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - u) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1. \end{aligned} \right\} (III)$$

Определив расстояние между возмущаемым телом и рассматриваемой планетой:

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= (\xi_1 - r)^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \\ &= r_1^2 + r^2 - 2r\xi_1, \end{aligned} \quad (IV)$$

переходим к вычислению компонентов возмущающего ускорения:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{wk'm_1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \\ S_1 &= K_1 \xi_1 - \frac{wk'm_1}{\sqrt{p}} \frac{r}{\Delta_1^3}, \quad T_1 = K_1 \eta_1, \quad W_1 = K_1 \zeta_1 \end{aligned} \right\} (V)$$

Значения  $wk'm_1$  могут быть взяты из таблицы IV (стр. 400).

Затем суммируем компоненты ускорения, вызываемого действием различных возмущающих планет:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \dots \\ T &= T_1 + T_2 + \dots \\ W &= W_1 + W_2 + \dots \end{aligned} \quad (VI)$$

Переходим к вычислению функций, подлежащих интегрированию, для чего служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} \delta i &= r \cos u W \\ \delta \Omega &= r \sin u \operatorname{cosec} i W \\ \delta \varphi_I &= a \cos \varphi \sin v S \\ \delta \varphi_{II} &= a \cos \varphi (\cos v + \cos E) T \end{aligned} \right\} \delta \varphi = \delta \varphi_I + \delta \varphi_{II}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \pi_I &= -p \operatorname{cosec} \varphi \cos v S \\ \delta \pi_{II} &= \operatorname{cosec} \varphi (r + p) \sin v T \\ \delta \pi_{III} &= \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W \end{aligned} \right\} \delta \pi = \delta \pi_I + \delta \pi_{II} + \delta \pi_{III} \quad (VII)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_I &= - \left( 2 \cos \varphi r - p \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos v \right) S \\ \delta \varepsilon_{II} &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} (r + p) \sin v T \\ \delta \varepsilon_{III} &= \operatorname{tg} \frac{i}{2} r \sin u W \end{aligned} \right\} \delta \varepsilon = \delta \varepsilon_I + \delta \varepsilon_{II} + \delta \varepsilon_{III}$$

$$\left. \begin{aligned} w \delta n_I &= - \frac{3kw}{\sqrt{a}} \sin \varphi \sin v S \\ w \delta n_{II} &= - \frac{3kw}{\sqrt{a}} \frac{p}{r} T \end{aligned} \right\} w \delta n = w \delta n_I + w \delta n_{II}$$

Для  $w = 20^d$ ,  $\lg 3kw = 0.013733$ .

"  $w = 40^d$ ,  $\lg 3kw = 0.314763$ .

Интегрирование для первых пяти элементов производится по формулам

$$\left. \begin{aligned} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} &= -\frac{1}{24} f_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{339} f_{-\frac{1}{2}}^3 - \frac{1}{2637} f_{-\frac{1}{2}}^5 + \dots \\ x_n &= f_n^{-1} - \frac{1}{12} f_n^1 + \left( \frac{1}{65} - 0.00011 \right) f_n^3 - \frac{1}{317} f_n^5 + \dots \end{aligned} \right\} (VIII)$$

Для  $w \delta n$  составляется также столбец вторых сумм, для чего берется начальный член

$$f_0^{-2} = +\frac{1}{24} f_{-1}^{-1} - \frac{1}{339} (2f_{-1}^2 + f_0^2) + \frac{1}{2637} (3f_{-1}^4 + 2f_0^4) - \dots$$

и, кроме первого интегрирования, дающего  $w \delta n$ , производится по формуле

$$x_n = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n^{-1} - \frac{1}{240} f_n^2 + \frac{1}{1951} f_n^4 - \dots \quad (IX)$$

еще второе интегрирование, дающее  $\Delta \lambda$ .

При всех этих интегрированиях недостающие разности находятся экстраполированием.

Закончив интегрирование, получим возмущения элементов  $\Delta i$ ,  $\Delta \Omega$ ,  $\Delta \varphi$ ,  $\Delta \pi$ ,  $\Delta \epsilon$ ,  $w \Delta n$ ,  $\Delta \lambda$  для четырех указанных выше моментов; придав их к исходным оскулирующим элементам, получим возмущенные элементы для этих моментов. Возмущение большой полуоси можно найти при помощи дифференциального соотношения

$$\Delta \lg a = -\frac{2}{3} \text{Mod} \frac{w \Delta n}{wn}$$

$$\frac{2}{3} \text{Mod} = 0.289 5297, \quad \lg \frac{2}{3} \text{Mod} = 9.461 6932.$$

С возмущенными значениями элементов надо повторить все указанные вычисления, чтобы получить более точные величины  $\delta i$ ,  $\delta \Omega$ , . . . и снова выполнить интегрирование. Для этого служат те же самые формулы, с тем только отличием, что средняя аномалия находится при помощи равенств

$$\lambda = \epsilon_0 + n_0(t - \tau_0) + \Delta \epsilon + \Delta \lambda$$

$$M = \lambda - \pi,$$

где через  $\epsilon_0$  и  $n_0$  обозначены исходные значения элементов  $\epsilon$  и  $n$ , соответствующие эпохе  $\tau_0$ .

Такое повторное вычисление возмущенных элементов производится до тех пор, пока процесс не установится. При надлежащем выборе интервала  $w$  уже второе приближение можно считать окончательным и переходить к вычислению возмущений для следующих моментов  $t_0 + 2w$ ,  $t_0 + 3w$ , . . . (или  $t_0 - 3w$ ,  $t_0 - 4w$ , . . . — смотря по тому, в какую сторону от начальной эпохи надо идти).

Если возмущения велики и окончательные значения разностей функций  $\delta i$ , . . . чувствительно отличаются от первоначально принятых, то можно повторить еще раз вычисление возмущений для моментов  $t_0 - 2w$ ,  $t_0 - w$ ,  $t_0$ ,  $t_0 + w$ .

Продолжение вычисления не представляет никаких трудностей, так как, вследствие медленности изменения оскулирующих элементов, экстраполирование дает настолько точные значения возмущений, что повторять вычисление  $\delta i$ ,  $\delta \Omega$ , . . . никогда не приходится, если интервал  $w$  выбран надлежащим образом.

Вычисление ведется на нескольких отдельных листах. На первом листе находятся  $r$ ,  $v$ , . . .  $\delta i$ , . . . ,  $w \delta n$ ; на втором, вспомогательном по отношению к первому, вычисляются координаты возмущающих планет  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$ , . . . , соответствующие компоненты  $S_1$ ,  $T_1$ , . . . , и, наконец,  $S$ ,  $T$ ,  $W$ . На этих двух листах вычисления, соответствующие определенному моменту, располагаются вертикальными столбцами. Наконец, интегрирование каждой из функций  $\delta i$ ,  $\delta \Omega$ , . . . выполняется на отдельном листе по схемам, указанным в главе VIII.

### § 71. Особые случаи вычисления возмущений элементов малых планет.

При применении метода, изученного в предыдущих параграфах, к малым планетам могут встретиться затруднения двух родов.

1. Если наклонность орбиты очень мала, то вычисление величины

$$\delta \Omega = \frac{r \sin u}{\sin i} W$$

### § 71. Особые случаи вычисления возмущений элементов малых планет 191

сопровождается большой потерей точности, что влечет неточность в определении долготы узла.

2. Если эксцентриситет орбиты мал, то аналогичное затруднение возникает при нахождении долготы перигелия, требующем вычисления

$$\delta \pi = -\frac{p \cos v}{\sin \varphi} S + \frac{(r+p) \sin v}{\sin \varphi} T + \text{tg} \frac{i}{2} r \sin u W.$$

В первом случае проще всего изменить основную плоскость: элементы  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\pi$ ,  $\epsilon$ , отнесенные к плоскости эклиптики, преобразовать в элементы  $i'$ ,  $\Omega'$ ,  $\pi'$ ,  $\epsilon'$  (вместо двух последних можно взять  $\omega'$  и  $M_0$ ), отнесенные к плоскости экватора.

В тех случаях, когда имеется в виду лишь приближенное вычисление возмущений, с точностью до первых степеней масс, вместо  $i$  и  $\Omega$  вводят вспомогательные переменные  $p$  и  $q$ , определяемые равенствами

$$dp = \sin \omega \sin i d\Omega + \cos \omega di$$

$$dq = \cos \omega \sin i d\Omega - \sin \omega di.$$

Для вычисления возмущений  $\Delta p$ ,  $\Delta q$  этих переменных служат формулы:

$$\delta p = r \cos v W, \quad \delta q = r \sin v W,$$

легко получаемые из формул (2).

Возмущения  $i$  и  $\Omega$  с точностью до величин 1-го порядка найдем из соотношений

$$\Delta i = \cos \omega \cdot \Delta p - \sin \omega \cdot \Delta q$$

$$\sin i \Delta \Omega = \sin \omega \cdot \Delta p + \cos \omega \cdot \Delta q.$$

Обратимся теперь к тому случаю, когда эксцентриситет орбиты близок к нулю.

Введем вместо  $e$  и  $\pi$  новые элементы

$$h = e \sin \pi, \quad l = e \cos \pi. \quad (21)$$

Так как

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} \sin \pi + l \frac{d\pi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \sin \pi + l \frac{d\pi}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{de}{dt} \cos \pi - h \frac{d\pi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi \cos \pi - h \frac{d\pi}{dt},$$

то при помощи формул (2) легко найдем:

$$\delta h = -p \cos \lambda S + (p+r) \sin \lambda T + rhT + l \text{tg} \frac{i}{2} r \sin u W,$$

$$\delta l = +p \sin \lambda S + (p+r) \cos \lambda T + rIT - h \text{tg} \frac{i}{2} r \sin u W,$$

где

$$\lambda = \pi + v.$$

После того как интегрирование этих равенств даст возмущенные значения  $h$  и  $l$ , соотношения (21) позволят вычислить соответствующие значения  $e$  и  $\pi$ .

### § 72. Некоторые особенности вычисления возмущений элементов кометных орбит.

Для короткопериодических комет, у которых эксцентриситет не настолько велик, чтобы нельзя было пользоваться эксцентрической аномалией, вычисление возмущений в элементах выполняется по формулам, указанным в § 70.

Для комет, эксцентриситет которых близок к единице или равен единице, эти формулы должны быть частично преобразованы таким образом, чтобы вместо возмущений элементов  $\varphi$ ,  $p$  и  $\varepsilon$  можно было находить возмущения элементов  $e$ ,  $q$  и  $\tau$  (время прохождения через перигелий).

Мы не будем останавливаться на этом преобразовании, так как в настоящее время, после работы Коуэлла и Кроммелина о комете Галлея, возмущения для комет этого типа всегда вычисляются не в элементах, а в прямоугольных координатах способами, которые будут рассмотрены в следующей главе.

Комета может подойти настолько близко к одной из больших планет, что притяжение планеты станет более сильным, чем притяжение Солнца. В таком случае целесообразно, как отметил еще Лаплас (*Mécanique Céleste*, t. 4, Livre IX, Chap. II), принять планету за центральное тело, а Солнце за возмущающее.

Обозначим через  $x, y, z$  гелиоцентрические координаты кометы, через  $x_1, y_1, z_1$  — гелиоцентрические координаты планеты, а через  $m_1$  — ее массу. Напишем дифференциальные уравнения движения кометы под влиянием притяжения Солнца и планеты:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2 \frac{x}{r^3} &= k^2 m_1 \left( \frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2 \frac{y}{r^3} &= k^2 m_1 \left( \frac{y_1 - y}{\Delta^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2 \frac{z}{r^3} &= k^2 m_1 \left( \frac{z_1 - z}{\Delta^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

и уравнения невозмущенного движения планеты:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2(1+m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= 0 \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + k^2(1+m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= 0 \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} + k^2(1+m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Если принять центр планеты за начало координатной системы, оси которой параллельны осям рассматриваемой гелиоцентрической системы, и соответствующие координаты кометы обозначить через  $\xi, \eta, \zeta$ , то будем иметь соотношения

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta.$$

Следовательно, на основании (22) и (23):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\xi}{\Delta^3} &= k^2 \left( \frac{x_1 - x}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right) \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\eta}{\Delta^3} &= k^2 \left( \frac{y_1 - y}{r_1^3} - \frac{y}{r^3} \right) \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + k^2 m_1 \frac{\zeta}{\Delta^3} &= k^2 \left( \frac{z_1 - z}{r_1^3} - \frac{z}{r^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\Delta^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

В том случае, когда за центральное тело принимается Солнце, через  $R$  обозначим ускорение, сообщаемое им комете, а через  $F$  возмущающее ускорение, обусловленное притяжением планеты. Уравнения (22) показывают, что

$$R = \frac{k^2}{r^3}, \quad F = k^2 m_1 \left[ \left( \frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2}}.$$

С другой стороны, если, приняв за центральное тело планету, мы обозначим ускорение, сообщаемое ею комете, через  $R_1$ , а возмущающее ускорение, вызываемое Солнцем, через  $F_1$ , то будем иметь, как показывают уравнения (24):

$$R_1 = \frac{k^2 m_1}{\Delta^2}, \quad F_1 = k^2 \left[ \left( \frac{x_1 - x}{r_1^3} - \frac{x}{r^3} \right)^2 + \dots \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Область пространства, в которой выгоднее за центральное тело принять Солнце, отделена от области, в которой выгоднее считать планету центральным телом, точками, удовлетворяющими равенству

$$\frac{F}{R} = \frac{F_1}{R_1}.$$

Таким образом поверхность, разграничивающая указанные области, определяется уравнением

$$m_1 r^2 \left[ \frac{1}{\Delta^4} + \frac{1}{r_1^4} + 2 \frac{x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta}{\Delta^3 r_1^3} \right]^{\frac{1}{2}} = \Delta^2 \left[ \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r_1^4} - 2 \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r^3 r_1^3} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$\frac{x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta}{\Delta r_1} = \cos \theta, \quad \frac{\Delta}{r_1} = u,$$

тогда

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = x_1 (x_1 + \xi) + y_1 (y_1 + \eta) + z_1 (z_1 + \zeta) = r_1^2 (1 + u \cos \theta)$$

$$r^2 = (x_1 + \xi)^2 + (y_1 + \eta)^2 + (z_1 + \zeta)^2 = r_1^2 (1 + 2u \cos \theta + u^2).$$

Подставив эти выражения в предыдущее уравнение, получим:

$$m_1^2 = u^4 \frac{(1 + 2u^2 \cos \theta + u^4)^{\frac{1}{2}}}{(1 + 2u \cos \theta + u^2)^2} - \left[ 1 + (1 + 2u \cos \theta + u^2)^2 - 2(1 + u \cos \theta)(1 + 2u \cos \theta + u^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Правую часть разложим в ряд по степеням малой величины  $u$ . Это даст

$$m_1^2 = u^5 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \left[ 1 - 2u \cos \theta \frac{1 + 6 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} + \dots \right].$$

С достаточной для наших целей точностью мы можем ограничиться первым членом этого разложения, что дает

$$\Delta = r_1 \left( \frac{m_1^2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}} \right)^{\frac{1}{5}}. \tag{25}$$

Таково приближенное уравнение рассматриваемой поверхности в полярной системе координат. Поверхность (25) является, очевидно, поверхностью вращения вокруг полярной оси, т. е. вокруг радиуса-вектора планеты. Эта поверхность очень мало отличается от сферы, ибо отношение наибольшего и наименьшего значений величины  $\Delta$  равно

$$2^{\frac{1}{5}} = 1.15.$$

Сферу, описанную из центра планеты радиусом, равным

$$\Delta_0 = r_1 m_1^{\frac{2}{5}},$$

назовем сферой действия этой планеты (sphère d'activité). Радиусы сфер действия различных планет даны в следующей табличке:

Меркурий . . . . .	0.001	Юпитер . . . . .	0.322
Венера . . . . .	0.004	Сатурн . . . . .	0.363
Земля . . . . .	0.006	Уран . . . . .	0.339
Марс . . . . .	0.004	Нептун . . . . .	0.576

Вне сферы действия  $F:R > F_1:R_1$ , внутри этой сферы  $F:R < F_1:R_1$ , и потому выгоднее считать планету за центральное тело.

Интересно оценить величину отношения  $F:R$  возмущающей силы к силе притяжения Солнца для точек, расположенных на поверхности сферы действия. Легко видеть, что для таких точек

$$\frac{F}{R} = m_1 \frac{r^2}{\Delta^2} \sqrt{1 + \frac{2\Delta^2}{r^2} \cos \theta + \frac{\Delta^4}{r^4}} = m_1 \left( \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{m_1^2} \right)^{\frac{2}{5}}.$$

Таким образом для Юпитера это отношение меняется в пределах от  $\sqrt[5]{m_1} = 0.25$  до  $\sqrt[5]{16 m_1} = 0.43$ .

Особенно часто приходится иметь дело с прохождением комет через сферу действия Юпитера, что объясняется прежде всего тем, что афелии большинства короткопериодических комет группируются вблизи орбиты Юпитера. Для того чтобы в этом случае перейти от гелиоцентрического движения кометы к ивицентрическому, в котором за центральное тело принимается Юпитер, надо для некоторого момента  $t_0$ , для которого расстояние  $\Delta$  уменьшилось приблизительно до 0.3, найти ивицентрические координаты

$$\xi_0 = x - x_1, \quad \eta_0 = y - y_1, \quad \zeta_0 = z - z_1$$

и их производные

$$\dot{\xi}_0 = \dot{x} - \dot{x}_1, \quad \dot{\eta}_0 = \dot{y} - \dot{y}_1, \quad \dot{\zeta}_0 = \dot{z} - \dot{z}_1,$$

после чего известные формулы (т. I, глава IV) позволят найти ивицентрические элементы кометы. Возмущения этих элементов вычисляются по обычным формулам, причем почти всегда можно считать Солнце единственным возмущающим телом. Некоторую особенность представляет только то обстоятельство, что ивицентрическая орбита кометы является, как правило, гиперболой с большим эксцентриситетом. Поэтому в формулах § 70 эксцентрическая аномалия становится мнимой (т. I, § 15), вследствие чего их следует преобразовать, полагая

$$E = H \sqrt{-1}.$$

Мы не будем, однако, останавливаться на этих несложных преобразованиях, так как в рассматриваемом случае, когда комета находится внутри сферы действия планеты (или даже близко от этой сферы), представляется более удобным заменить вычисление возмущений в элементах вычислением возмущений в координатах по способу Коуэлла, который будет рассмотрен в следующей главе. Чтобы перейти на способ Коуэлла, достаточно при помощи оскулирующих элементов найти для момента  $t_0$  координаты кометы  $x_0, y_0, z_0$  и их производные  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  (см. § 74).

Примером вычисления возмущений ивицентрических координат может служить исследование движения кометы Вольфа при ее приближении к Юпитеру в 1922 г., выполненное М. Каменским.<sup>1</sup> В этом случае эксцентриситет ивицентрической орбиты кометы менялся от  $e = 6.457$  до  $e = 6.480$ , а большая полуось от  $a = -0.022800$  до  $a = -0.022912$ .

В тех случаях, когда комета особенно близко подходит к Юпитеру, приходится также принимать во внимание возмущения, вызываемые сжатием Юпитера. Такое приближение имело, например, место в 1886 г. для кометы Брукса (Brooks, 1889 V), когда наименьшее расстояние между поверхностью Юпитера и кометой было равно 1.14 радиуса Юпитера (около 80 000 км). В этом случае интервал  $\omega$ , через который ведется интегрирование, пришлось уменьшить, около времени прохождения через перииовий, до 0.25 часа.

Не останавливаясь здесь на методах учета влияния сжатия Юпитера на движение кометы, ограничимся указанием литературы.<sup>2</sup>

§ 73. Приближенное вычисление возмущений малых планет.

Точное вычисление возмущенных координат малой планеты методами численного интегрирования требует значительной работы независимо от того, в какой форме применяются эти методы: вычисляются ли возмущения в элементах или же вычисляются непосредственно возмущенные координаты (§§ 74—75). Поэтому такого рода вычисления производятся лишь для немногих планет, особо интересных в каком-либо отношении. Еще меньше число тех малых планет, для которых построены аналитические теории движения, аналогичные тем, которые Леверрье и Ньюком построили для больших планет.

С другой стороны, совсем не вычислять возмущения малой планеты нельзя, так как иначе, по прошествии немногих лет, ее действительное

<sup>1</sup> M. Kamiński, Recherches sur le mouvement de la comète périodique de Wolf (IX Partie), Publications of the Astr. Obs. of the Warsaw University, 2, 1926.

<sup>2</sup> G. Deutschland, Der Einfluss der Abplattung auf die Attraction der Himmelskörper nach der Theorie der speziellen Störungen, mit Anwendung auf den Kometen 1889 V (Brooks) bei seiner Jupiternähe im Jahre 1886 (Diss.) Berlin 1909.

Результаты частично приведены в Astr. Nachr., 181, 1909, 1—8.

движение настолько разойдется с невозмущенным, что ее нельзя будет найти; планета будет потеряна.

Весьма важно поэтому иметь по возможности простой способ для вычисления возмущений с такой точностью, которая позволяла бы уверенно находить и отождествлять малую планету. Среди способов, предложенных для достижения этой цели, широкое распространение получили две нижеследующие упрощенные формы точного метода, изложенного в §§ 66—71, данные Штраке.<sup>1</sup>

Прежде всего отметим, что в случае приближенного вычисления возмущений, имеющего целью лишь обеспечить продолжение наблюдений планеты, достаточно принимать во внимание возмущения от одного Юпитера.

Ограничиваясь точностью до  $0^{\circ}.0001$  в возмущениях  $n$  и до  $0^{\circ}.0001$  в возмущениях всех остальных элементов, мы можем вести все вычисления с тремя десятичными знаками. Далее, интервал  $w$  можно всегда взять равным  $80^d$ ; в тех же случаях, когда планета находится далеко от Юпитера (например гелиоцентрическое угловое расстояние между ними не менее  $60^{\circ}$ ), берется интервал  $w = 160^d$ . Впрочем выгодно все постоянные множители брать всегда для интервала  $80^d$  и недостающие, при  $w = 160^d$ , числа восполнять интерполированием в середину.

При этих условиях в формулах § 70 можно сделать следующие упрощения. Вычисление по формулам (I) целесообразно заменить нахождением  $r$  и  $v$  по специальным таблицам (т. I, глава III).

В формулах (II) всегда можно положить  $\cos b_1 = 1$ . Если наклонность  $i$  мала ( $i < 8^{\circ}$ ), то можно положить

$$\cos B_1 = 1, \quad \sin B_1 = \cos i \sin b_1 - \sin i \sin (l_1 - \Omega), \quad L_1 = l_1 - \Omega.$$

В формулах (V) постоянный коэффициент  $wk''m_1$  надо заменить, через  $80 k^{\circ}m_1$ , где  $k^{\circ}$  — гауссова постоянная, выраженная в градусах. Для Юпитера

$$\lg (80 k^{\circ}m_1) = 1.877.$$

Далее, при вычислении по формулам (VII) мы должны принять

$$\lg (3 kw) = 1.616$$

— это даст нам  $\delta n$  в единицах, равных  $0^{\circ}.0001$ , тогда как приращения всех остальных элементов будут выражены в тысячных долях градуса.

При употреблении формул (VIII) и (IX) разностями можно, вообще говоря, пренебречь, так что интегрирование сводится к простому суммированию. Заметим, наконец, что возмущенное значение  $n$  нам не нужно, так как средняя долгота вычисляется по формуле

$$\lambda = \varepsilon + n_0(t - t_0) + \Delta\lambda,$$

где через  $n_0$  обозначено невозмущенное значение  $n$ . Но величина  $w \Delta n = 80 \Delta n$  нужна для вычисления возмущения большой полуоси. Для этой цели может служить формула

$$\Delta \lg a = - \frac{13.03}{n_0} 80 \Delta n,$$

где  $n_0$  выражено в секундах дуги.

<sup>1</sup> G. Stracke, Genäherte Störungsrechnung und Bahnverbesserung, Veröff. des Astr. Recheninstituts, Nr. 44, 1924 Berlin.

Tafeln zur genäherten speziellen Störungsrechnung, Veröff. des Astr. Recheninstituts, Nr. 48, 1930, Berlin.

В 1930 г. Штраке дал другой вариант этого способа, правда, требующий вспомогательных таблиц, но зато при наличии таких таблиц значительно сокращающий работу.<sup>1</sup> Здесь за независимую переменную принимается средняя аномалия  $M$ . Коэффициенты формул (VII), § 70, являющиеся функциями  $\varphi$  и  $M$ , даются в готовом виде по аргументу  $\varphi$  для значений  $M = 0^{\circ}, 12^{\circ}, 24^{\circ}, \dots, 348^{\circ}$ . Кроме того, вычисление компонентов возмущающего ускорения облегчается особыми таблицами. На подробностях устройства этих таблиц здесь нет надобности останавливаться.

В заключение упомянем еще способ приближенного вычисления возмущений в элементах, предложенный Б. Стрёмгреном.<sup>2</sup> Этот способ, так же как только-что указанный второй способ Штраке, рассчитан на применение арифмометра. Б. Стрёмгрен преобразует формулы так, чтобы иметь возможность быстро и удобно находить возмущенные значения направляющих косинусов  $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$ .

<sup>1</sup> Эти таблицы указаны в сноске на предыдущей странице.

<sup>2</sup> B. Strömgen, Formeln zur genäherten Störungsrechnung in Bahnelementen, Publikationer og mindre Meddelelser fra Kobenhavns Observatorium, Nr. 65, 1929.

## ГЛАВА XI.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В КООРДИНАТАХ.

## § 74. Прямое вычисление возмущенных координат (метод Коуэлла).

Обозначим через  $m$  и  $x, y, z$  массу и гелиоцентрические координаты светила, движение которого изучается. Через  $m_i, x_i, y_i, z_i$  будем обозначать массы и координаты возмущающих планет.

Уравнения относительно движения, выведенные в § 3, дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + F_x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{y}{r^3} + F_y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{z}{r^3} + F_z, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$F_x = k^2 \sum_i m_i \left( \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right), \dots \quad (2)$$

причем суммирование распространяется на все возмущающие тела, а  $r, r_i, \Delta_i$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, & r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \\ \Delta_i^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2. \end{aligned}$$

В том случае, когда нужны численные значения координат  $x, y, z$  для сравнительно небольшого интервала времени (порядка нескольких десятков лет), проще всего их получить при помощи численного интегрирования уравнений (1).

Применение любого из указанных в главе VIII методов численного интегрирования уравнений дает возможность получить  $x, y, z$  с любой точностью. Вычисления, которые для этого требуются, носят вполне элементарный характер, что особенно важно при массовой работе, так как позволяет широко пользоваться помощью вычислителей.

Другим достоинством этого способа получения возмущенных значений координат является его универсальность. Аналитические методы определения возмущений применимы лишь в том случае, когда возмущения малы. Численное вычисление возмущений в элементах, изученное в предыдущей главе, хотя и применимо при любой величине возмущений, целесообразно употреблять лишь в тех случаях, когда возмущения не слишком велики.

Напротив, при численном интегрировании уравнений (1) совершенно не возникает вопрос о величине возмущений. Поэтому рассматриваемый метод одинаково удобно применяется как для малых планет, испытываю-

щих небольшие возмущения, так и для таких, которые близко подходят к Юпитеру и возмущения которых особенно велики. Точно так же для этого метода нет никакой разницы между движением кометы вдали от планет или прохождением ее через сферу действия планеты. Наконец, метод численного интегрирования позволяет без малейших трудностей вычислять положение таких тел, как VIII спутник Юпитера, для которых возмущения становятся сравнимыми с действием центральной силы.

Более того, мы видели в § 41, что численное интегрирование уравнений движения позволяет изучать наиболее сложные случаи движения и было широко использовано для этой цели Дарвином, Тиле, Буррау, Стрёмгреном задолго до того, как оно было применено Коуэллом для решения чисто астрономических задач.

Но если прямое численное интегрирование уравнений движения применялось до Коуэлла, если первоначально введенный им способ интегрирования уступает способу квадратур Гаусса, употреблявшемуся Тиле и другими только-что указанными авторами, вследствие чего мы снова вернулись к этому последнему, тем не менее Коуэллу принадлежит инициатива введения этого метода — прямого численного интегрирования уравнений (1) — в астрономическую практику, как средства для сравнительно быстрого и удобного получения возмущенной эфемериды.

Учитывая это обстоятельство, а также ради удобства, целесообразно метод получения возмущенных координат светила при помощи численного интегрирования уравнений (1) назвать методом Коуэлла.

Мы уже указали достоинства метода Коуэлла, делающие его во многих случаях наиболее удобным средством для получения эфемериды светила с учетом возмущений. Можно еще отметить, что в этом методе совершенно устраняются тригонометрические вычисления, и единственная вспомогательная таблица, употребляемая при этих вычислениях, это таблица, дающая  $r^{-3}$  по аргументу  $r^2$ .

К недостаткам метода Коуэлла надо прежде всего отнести то, что в этом методе все вычисление должно производиться с тем числом знаков, какое требуется в окончательном результате (не считая запасных, гарантирующих от накопления ошибок). Если, например, надо связать два появления кометы, разделенные большим интервалом времени, то возмущенные координаты кометы должны быть вычислены для всего этого интервала, если мы употребляем метод Коуэлла, с семью знаками. Если же употребляется метод, изученный в предыдущей главе, то достаточно найти возмущения элементов за рассматриваемый интервал, что требует вычислений с тремя—пятью знаками.

Если светило близко подходит к Солнцу, как это имеет место для большинства комет вблизи перигелия, то применять метод Коуэлла нецелесообразно, так как интервал интегрирования приходится брать очень малым и вычислительная работа становится более значительной, нежели, например, в методе Энке (§ 76).

Следует еще отметить, что метод Коуэлла удобно применяется, по крайней мере при точных вычислениях, только в том случае, если вычисления ведутся при помощи арифмометра.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Интегрирование уравнений (1) может, конечно, производиться любым методом численного интегрирования дифференциальных уравнений. В частности, если вместо обычно применяемого метода квадратур взять метод Коуэлла (§ 52) в соединении со способом Нумерова для уменьшения числа последовательных приближений (§ 58), то получим „метод Нумерова“ или „метод экстраполирования“. Подробное изложение этого метода и пример его применения можно найти в Бюллетене Астрономического института № 12, 1926.

Наилучшим методом интегрирования уравнений (1) как с точки зрения точности результатов, так и с точки зрения простоты вычислений является метод квадратур (§§ 52—54, 58).

## § 75. Сопоставление формул для применения метода Коуэлла.

Обозначим через  $w$  интервал, выбранный для интегрирования уравнений (1). Как уже было отмечено (§ 58), отнюдь не следует стремиться брать слишком большие интервалы, так как в этом случае уменьшается возможность контроля при помощи разностей и, кроме того, вычисление становится менее удобным.

В особенности начинать вычисление следует с малым значением  $w$ . Если обнаружится, что четвертые разности не влияют на вычисляемые значения координат, то интервал следует удвоить.

Для малых планет обычная величина интервала 20—40—80 дней, в зависимости от того, какая нужна точность. Для комет вблизи Солнца приходится брать меньшие интервалы: в 5—10 дней. Если нужно дальнейшее уменьшение интервала, то целесообразно метод Коуэлла на некоторое время заменить методом Энке (§ 76).

Пусть для момента  $t_0$  нам известны оскулирующие элементы светила  $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$ .

Чтобы найти решение уравнений (1), представляющее движение этого светила, надо вычислить значение координат  $x_0, y_0, z_0$  и их производных  $x'_0, y'_0, z'_0$  для момента  $t_0$ .

Для этого служат формулы (т. I):

$$\left. \begin{aligned} x &= a P_x (\cos E - e) + b Q_x \sin E \\ y &= a P_y (\cos E - e) + b Q_y \sin E \\ z &= a P_z (\cos E - e) + b Q_z \sin E \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-a P_x \sin E + b Q_x \cos E) \\ y' &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-a P_y \sin E + b Q_y \cos E) \\ z' &= \frac{k}{r\sqrt{a}} (-a P_z \sin E + b Q_z \cos E) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

в которых

$$b = a \cos \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a(1 - e \cos E),$$

причем  $E$  определяется равенством

$$E - e \sin E = M.$$

Для контроля может служить соотношение

$$ke\sqrt{a} \sin E = xx' + yy' + zz'.$$

Что же касается до направляющих косинусов осей орбиты,  $P_x, P_y, \dots, Q_z$ , то они могут быть вычислены (т. I, § 25) при помощи формул

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos \Omega; & A_2 &= -\cos i \sin \Omega \\ B_1 &= \sin \Omega \cos \epsilon; & B_2 &= \cos i \cos \Omega \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon \\ C_1 &= \sin \Omega \sin \epsilon; & C_2 &= \cos i \cos \Omega \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon. \\ P_x &= A_1 \cos \omega + A_2 \sin \omega; & Q_x &= A_2 \cos \omega - A_1 \sin \omega \\ P_y &= B_1 \cos \omega + B_2 \sin \omega; & Q_y &= B_2 \cos \omega - B_1 \sin \omega \\ P_z &= C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega; & Q_z &= C_2 \cos \omega - C_1 \sin \omega, \end{aligned}$$

где через  $\epsilon$  обозначена наклонность эклиптики к экватору.

Для контроля пользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} aP_x \cdot bQ_x + aP_y \cdot bQ_y + aP_z \cdot bQ_z &= 0 \\ (aP_x)^2 + (aP_y)^2 + (aP_z)^2 &= a^2 \\ (bQ_x)^2 + (bQ_y)^2 + (bQ_z)^2 &= b^2 \end{aligned}$$

После того как исходные величины  $x_0, y_0, \dots, z'_0$  вычислены, переходим к интегрированию уравнений (1). Для этого нужно, прежде всего, иметь возможность вычислять для каждого из рассматриваемых моментов  $t_n = t_0 + nw$  функции:

$$\left. \begin{aligned} f &= w^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = -w^2 k^2 \frac{x}{r^3} + X \\ g &= w^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = -w^2 k^2 \frac{y}{r^3} + Y \\ h &= w^2 \frac{d^2 z}{dt^2} = -w^2 k^2 \frac{z}{r^3} + Z \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \sum_i \left( w^2 k^2 m_i \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - X^i \right) \\ Y &= \sum_i \left( w^2 k^2 m_i \frac{y_i - y}{\Delta_i^3} - Y^i \right) \\ Z &= \sum_i \left( w^2 k^2 m_i \frac{z_i - z}{\Delta_i^3} - Z^i \right), \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

где особо выделены величины

$$X^i = -w^2 k^2 m_i \frac{x_i}{r_i^3}, \quad Y^i = -w^2 k^2 m_i \frac{y_i}{r_i^3}, \quad Z^i = -w^2 k^2 m_i \frac{z_i}{r_i^3},$$

зависящие исключительно от координат и массы возмущающей планеты.

Незаменимым пособием при этих вычислениях являются уже неоднократно упоминавшиеся таблицы Комри, *Planetary Co-ordinates for the years 1800—1940*, продолжение которых, охватывающее период 1940—1960, должно скоро появиться.

Эти таблицы дают, помимо прямоугольных координат  $x_i, y_i, z_i$  всех больших планет (кроме Меркурия и Плутона), также соответствующие величины  $X^i, Y^i, Z^i$ . Тут же находятся различные вспомогательные таблицы, среди которых особо можно отметить таблицу, дающую  $r^{-3}$  по аргументу  $r^2$ .

При отсутствии таблиц Комри прямоугольные координаты возмущающих планет могут быть вычислены по их эклиптическим координатам, даваемым ежегодниками. Для этого служат формулы:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= r_i \cos b_i \cos l_i \\ y_i &= r_i \cos b_i (\sin l_i \cos \epsilon - \operatorname{tg} b_i \sin \epsilon) \\ z_i &= r_i \cos b_i (\sin l_i \sin \epsilon + \operatorname{tg} b_i \cos \epsilon), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где через  $r_i, l_i, b_i$  обозначены радиус-вектор, долгота и широта планеты.

Постоянные коэффициенты, встречающиеся в  $f, g$  и  $h$ , указаны в таблице IV (стр. 400).

Для интегрирования служит формула

$$x(t_0 + n\omega) = f_n^{-2} + \frac{1}{12} f_n - \frac{1}{240} f_n^3 + \frac{1}{1951} f_n^5 - \frac{1}{12557} f_n^7 + \dots \quad (V)$$

и две аналогичные для значений  $y$  и  $z$ , соответствующих моменту  $t_0 + n\omega$ . Начальные члены столбцов сумм определяем по формулам (§ 54):

$$\begin{aligned} f_{-\frac{1}{2}}^{-1} &= \omega x'_0 - \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^3 - \frac{11}{720} f_0^5 + \frac{1}{317} f_0^7 - \dots \\ f_0^{-2} &= x_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^3 - \frac{1}{1951} f_0^5 + \frac{1}{12557} f_0^7 - \dots \end{aligned} \quad (VI)$$

Для того чтобы избежать нескольких последовательных приближений в самом начале вычислений (ср. § 55), проще всего определить по формулам (I) значения невозмущенных координат для нескольких моментов  $t_{-2}, t_{-1}, t_1, t_2, t_3, \dots$ , близких к начальному моменту  $t_0$ . Тогда достаточно будет одного приближения для получения окончательных (возмущенных) значений координат для этих моментов.

Можно также воспользоваться для указанной цели разложениями в ряд Тейлора вида

$$x(t_0 + n\omega) = x_0 + x'_0(t_n - t_0) + \frac{1}{2} f_0 \omega^{-2}(t_n - t_0)^2 + \dots$$

После того как несколько начальных значений координат будут окончательно уточнены и получатся окончательные значения величин (VI), дальнейшее интегрирование будет выполняться, при помощи формул (V), крайне просто.

Примечание I. В том случае, когда известны постоянные Гаусса  $a, A, b, B, \dots$ , соответствующие исходным оскулирующим элементам, формулы (I) и (II) целесообразно заменить такими:

$$\begin{cases} x = r \sin a \sin(A + u) \\ y = r \sin b \sin(B + u) \\ z = r \sin c \sin(C + u) \end{cases} \quad (I')$$

$$\begin{cases} x' = r^{-1} [xr' + k\sqrt{p} \sin a \cos(A + u)] \\ y' = r^{-1} [yr' + k\sqrt{p} \sin b \cos(B + u)] \\ z' = r^{-1} [zr' + k\sqrt{p} \sin c \cos(C + u)] \end{cases} \quad (II')$$

где  $p = a \cos^2 \varphi$ ; величины  $r, r'$  и  $u$  вычисляются при помощи соотношений

$$r = a(1 - e \cos E), \quad rr' = ke \sqrt{a} \sin E,$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad u = v + \omega,$$

причем для контроля можно воспользоваться равенством

$$rr' = xx' + yy' + zz'.$$

Примечание II. Если светило, движение которого изучается, находится достаточно далеко от Солнца, то возмущения, производимые в его движении Меркурием, Венерой,  $\dots$ , либо совсем нечувствительны, либо крайне малы. В подобных случаях достаточно учесть лишь веко-

вую часть этих возмущений, что может быть сделано весьма просто путем соответствующего увеличения массы Солнца.

Множитель  $1 + m$ , стоящий в уравнениях (1), мы заменили в формулах (III) единицей, так как массу  $m$  малой планеты или кометы всегда можно считать равной нулю. Если мы будем к массе Солнца, равной единице, придавать массы возмущающих планет, то формулы (III) придется заменить такими:

$$\left. \begin{aligned} f &= -\omega^2 k^2 M x r^{-3} + X \\ g &= -\omega^2 k^2 M y r^{-3} + Y \\ h &= -\omega^2 k^2 M z r^{-3} + Z, \end{aligned} \right\} \quad (III')$$

где множитель  $M$  имеет одно из следующих значений:

$M = 1.000\,000\,14$	(сумма масс Солнца и Меркурия)
$= 1.000\,002\,60$	( " " Солнца, Меркурия и Венеры)
$= 1.000\,005\,64$	( " " Солнца, Меркурия, Венеры и Земли)
$= 1.000\,005\,96$	( " " Солнца, Меркурия, Венеры, Земли и Марса).

### § 76. Метод Энке.

Вместо того чтобы находить при помощи интегрирования уравнений (1) возмущенные координаты светила, можно вычислять разности

$$\xi = x - \bar{x}, \quad \eta = y - \bar{y}, \quad \zeta = z - \bar{z}$$

между возмущенными координатами  $(x, y, z)$  и невозмущенными  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

Так как невозмущенные координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= -k^2 (1 + m) \bar{x} r^{-3} \\ \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} &= -k^2 (1 + m) \bar{y} r^{-3} \\ \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} &= -k^2 (1 + m) \bar{z} r^{-3}, \end{aligned}$$

то, вычитая эти уравнения почленно из уравнений (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= F_x + k^2 (1 + m) \left( \frac{\bar{x}}{r^3} - \frac{x}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= F_y + k^2 (1 + m) \left( \frac{\bar{y}}{r^3} - \frac{y}{r^3} \right) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= F_z + k^2 (1 + m) \left( \frac{\bar{z}}{r^3} - \frac{z}{r^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом вычисление разностей  $\xi, \eta, \zeta$ , представляющих не что иное, как возмущения прямоугольных координат, приводится к интегрированию уравнений (4).

Единственная особенность, которую представляет численное интегрирование уравнений (4), заключается в вычислении вторых членов в правых частях этих уравнений.

Непосредственное вычисление стоящих в скобках разностей сопряжено со значительной потерей точности. Чтобы привести эти разности

к более выгодному, с точки зрения вычислительной техники, виду, напишем их так:

$$\frac{\bar{x}}{r^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{x-\xi}{r^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3} \left[ x \left( 1 - \frac{r^3}{r^3} \right) - \xi \right].$$

Отсюда ясно, что для всех трех координат задача приводится к нахождению разности  $1 - \frac{r^3}{r^3}$ .

Так как

$$r^2 = (\bar{x} + \xi)^2 + (\bar{y} + \eta)^2 + (\bar{z} + \zeta)^2 = \\ = \bar{r}^2 + (2\bar{x} + \xi)\xi + (2\bar{y} + \eta)\eta + (2\bar{z} + \zeta)\zeta,$$

то можно положить

$$\frac{r^2}{\bar{r}^2} = 1 + 2q,$$

где

$$q = \frac{1}{\bar{r}^2} \left[ \left( \bar{x} + \frac{1}{2}\xi \right) \xi + \left( \bar{y} + \frac{1}{2}\eta \right) \eta + \left( \bar{z} + \frac{1}{2}\zeta \right) \zeta \right]. \quad (5)$$

Поэтому

$$\frac{r^3}{\bar{r}^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3q + \frac{3.5}{1.2} q^2 - \frac{3.5.7}{1.2.3.1} q^3 + \dots$$

Следуя Энке, положим

$$f = 3 \left( 1 - \frac{5}{2} q + \frac{35}{6} q^2 - \frac{315}{24} q^3 + \dots \right); \quad (6)$$

это даст

$$1 - \frac{r^3}{\bar{r}^3} = qf,$$

и потому

$$\frac{\bar{x}}{r^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r^3} (qfx - \xi).$$

Будучи представлены в такой форме, рассматриваемые разности вычисляются без всякой потери точности.

Итак, нужное для численного интегрирования уравнений (4) вычисление функций

$$F = w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad G = w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad H = w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

выполняется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} F &= X + \frac{w^2 k^2}{r^3} (qfx - \xi) \\ G &= Y + \frac{w^2 k^2}{r^3} (qfy - \eta) \\ H &= Z + \frac{w^2 k^2}{r^3} (qfz - \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

где  $X, Y, Z$  определяются формулами (IV) предыдущего параграфа.

Входящая сюда величина  $f$ , определяемая равенством (6), может быть взята из таблицы III (стр. 399). Значения этой величины с шестью десятичными знаками имеются в вышеупомянутых таблицах Комри.

Перечислим теперь операции, которые нужно выполнить при употреблении метода Энке.

1. При помощи заданных оскулирующих элементов вычисляются по формулам (I) или (I') невозмущенные экваториальные координаты  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  для ряда моментов  $t_n = t_0 + hw$ , где  $h = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . При этом выгодно выбрать  $t_0$  так, чтобы эпоха оскуляции пришлось на момент  $t_0 - \frac{w}{2}$ , что мы и будем предполагать в дальнейшем.

2. Берем из таблиц Комри прямоугольные координаты возмущенных планет  $x_i, y_i, z_i$  и соответствующие величины  $X^i, Y^i, Z^i$  для всех моментов, для которых предполагается вычислить возмущения.

3. Чтобы начать интегрирование, находим по формулам (IV) и (VII)  $F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2$ , причем для первого приближения полагаем

$$\xi = \eta = \zeta = 0, \quad x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad q = 0.$$

Определив начальные члены столбцов сумм формулами (см. § 54; в настоящем случае для эпохи оскуляции  $t_0 - \frac{w}{2}$  мы имеем  $\xi = \eta = \zeta = 0$ ,  $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} F_{-\frac{1}{2}}^{-1} &= -\frac{1}{24} F_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{339} F_{-\frac{1}{2}}^3 - \dots \\ F_0^{-2} &= +\frac{1}{24} F_{-1}^{-1} - \frac{1}{339} (2F_{-1}^2 + F_0^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (VIII)$$

вычисляем возмущения по формулам вида

$$\xi_n = F_n^{-2} + \text{Red}, \quad \text{Red} = \frac{1}{12} F_n^{-1} - \frac{1}{240} F_n^2 + \frac{1}{1951} F_n^4 - \dots \quad (IX)$$

После этого повторяем вычисление величин  $F_{-2}, F_{-1}, F_0, F_1, F_2, \dots$  с полученными значениями  $\xi, \eta, \zeta$  и так продолжаем до тех пор, пока эти величины не перестанут изменяться.

4. Когда только что указанные вычисления дадут окончательные значения величин (VIII), переходим к обычному интегрированию по формуле (IX), пользуясь экстраполированными значениями разностей или поправки Red (§ 55).

Полученные таким образом возмущения координат прибавляем к найденным ранее (п. 1) невозмущенным координатам, что даст искомые возмущенные координаты

$$x = \bar{x} + \xi, \quad y = \bar{y} + \eta, \quad z = \bar{z} + \zeta.$$

В заключение заметим, что вычисление по методу Энке только в том случае выгоднее вычисления по методу Коуэлла, когда возмущения  $\xi, \eta, \zeta$  действительно малы. Правда, их можно всегда сделать небольшими, если время от времени менять эпоху оскуляции тех элементов, по которым вычисляются невозмущенные координаты. Но вычисление новых оскулирующих элементов при помощи полученных возмущенных координат (т. I, глава IV) представляет дополнительную работу, которая значительно уменьшает преимущества метода Энке.

Таким образом к этому методу прибегают только тогда, когда возмущения малы и их надо вычислить для небольшого промежутка времени. Но при этих условиях (например для комет, наблюдавшихся только в одном появлении) метод Энке часто является наилучшим.

Особо следует остановиться на комбинировании методов Энке и Коуэлла при изучении движения комет. Когда комета находится далеко от Солнца и испытывает значительные возмущения со стороны планет, лучше всего применять метод Коуэлла, как наиболее универсальный и совершенно независимый от величины возмущений. Напротив, когда комета находится вблизи перигелия, то возмущения, как общее правило, малы (вследствие быстроты движения и удаленности от планет с большими массами), тогда как невозмущенные координаты меняются очень быстро; поэтому метод Коуэлла становится неудобным (интервал  $w$  вследствие быстрого изменения невозмущенных координат приходится брать очень малым) и его выгодно заменить методом Энке.

Примечание I. При интегрировании уравнений (4) с пользой может быть применен прием Титьена для уменьшения числа последовательных приближений (§ 58).

В самом деле, замечая, что, на основании (VII),

$$F_n = X_n + hqfx_n - h\xi_n,$$

где для краткости положено

$$h = \frac{w^2 k^2}{r_n^3}, \quad (7)$$

мы можем формулу (IX), по которой производится вычисление  $\xi_n$ , написать так:

$$\xi_n \left(1 + \frac{1}{12} h\right) = S_n^x + \frac{1}{12} hqfx_n, \quad (8)$$

где

$$S^x = \frac{1}{12} X_n + \frac{F_n^{-2}}{240} - \frac{1}{1951} F_n^2 + \frac{1}{1951} F_n^4 - \dots$$

Точно так же

$$\eta_n \left(1 + \frac{1}{12} h\right) = S_n^y + \frac{1}{12} hqfy_n, \quad (9)$$

$$\zeta_n \left(1 + \frac{1}{12} h\right) = S_n^z + \frac{1}{12} hqfz_n.$$

Благодаря малым коэффициентам  $\frac{1}{240}, \dots$  для величин  $S_n^x, S_n^y, S_n^z$  мы получим сразу окончательные значения. С другой стороны, для вычисления  $q$  имеем формулу (4)

$$q = \frac{1}{r^2} \left[ \left( \bar{x}_n + \frac{1}{2} \xi_n \right) \xi_n + \left( \bar{y}_n + \frac{1}{2} \eta_n \right) \eta_n + \left( \bar{z}_n + \frac{1}{2} \zeta_n \right) \zeta_n \right],$$

причем стоящие в скобках  $\frac{1}{2} \xi_n, \frac{1}{2} \eta_n, \frac{1}{2} \zeta_n$  можно, не делая чувствительной ошибки, заменить экстраполированными значениями, так как эти величины имеют малые множители  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n$ . Что же касается до  $\xi_n, \dots$ ,

стоящих вне скобок, то их заменим значениями, даваемыми формулами (8) и (9). Это даст:

$$q = \alpha S_n^x + \beta S_n^y + \gamma S_n^z + \frac{1}{12} hfg (\alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n),$$

где

$$\alpha = \frac{\bar{x}_n + \frac{1}{2} \xi_n}{\bar{r}_n^2 \left(1 + \frac{1}{12} h\right)}, \quad \beta = \frac{\bar{y}_n + \frac{1}{2} \eta_n}{\bar{r}_n^2 \left(1 + \frac{1}{12} h\right)}, \quad \gamma = \frac{\bar{z}_n + \frac{1}{2} \zeta_n}{\bar{r}_n^2 \left(1 + \frac{1}{12} h\right)}. \quad (10)$$

Таким образом окончательно для вычисления  $q$  мы будем иметь такую формулу:

$$q = \frac{\alpha S_n^x + \beta S_n^y + \gamma S_n^z}{1 - \frac{1}{12} hfg (\alpha x_n + \beta y_n + \gamma z_n)}. \quad (11)$$

Итак, вычислив по формулам (7) и (10) с помощью экстраполированных значений  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n$  коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$ , находим  $q$  из (II), после чего формулы (8) и (9) дадут новые, более точные значения  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n$ .

При вычислении  $q$  по формуле (II) вместо того, чтобы находить знаменатель при помощи экстраполированных значений  $\xi_n, \eta_n, \zeta_n$ , обычно предпочитают экстраполировать знаменатель как одно целое.

Указанное применение способа Титьена к интегрированию уравнений (4) было сделано Оппольцером и носит название приема Оппольцера.

Примечание II. При отсутствии таблиц Комри<sup>1</sup> прямоугольные экваториальные координаты возмущающих планет могут быть вычислены по формулам (3). Однако в этом случае выгоднее вести вычисление возмущений в эклиптических координатах, которые для возмущающих планет вычисляются по более простым формулам:

$$x'_i = r_i \cos b_i \cos l_i,$$

$$y'_i = r_i \cos b_i \sin l_i,$$

$$z'_i = r_i \sin b_i.$$

После того как будут определены возмущения  $\xi', \eta', \zeta'$  эклиптических координат, возмущения экваториальных координат получим при помощи очевидных соотношений:

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta' \cos \epsilon - \zeta' \sin \epsilon, \quad \zeta = \eta' \sin \epsilon + \zeta' \cos \epsilon.$$

<sup>1</sup> Укажем еще следующие очень удобные таблицы:

H. Q. Rasmussen, Hilfstafeln für die numerische Integration der rechtwinkligen Koordinaten eines Himmelskörpers, Astr. Nachr., 260, 1936, 325—376.

Таблица, облегчающая применение приема Титьена при вычислении координат по методу Коуэлла, дана в статье:

M. Th. Subbotin, Sur le calcul des coordonnées héliocentriques des planètes et des comètes au moyen des quadratures, Poulkovo Observatory Circular, № 9, 1933, 15—25.

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ  
ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ**

ГЛАВА XII.

**РАЗЛОЖЕНИЕ КООРДИНАТ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В РЯДЫ.**

**§ 77. Введение.**

Аналитическое интегрирование уравнений возмущенного движения возможно, вследствие сложности этих уравнений, лишь в том случае, когда входящие в них возмущающие ускорения представлены в виде явных функций независимой переменной.

За независимую переменную в теории возмущенного движения принимается либо время (или, что то же, средняя аномалия возмущаемого светила), либо эксцентрическая аномалия возмущаемого светила, либо, наконец, его истинная аномалия. Истинная аномалия нередко заменяется истинной долготой.

Так как возмущающие ускорения очень просто выражаются через пертурбационную функцию, то проблема аналитического интегрирования уравнений движения приводится к задаче представления пертурбационной функции в виде явной функции одной из только-что указанных переменных. В виду сложности пертурбационной функции такое представление может быть осуществлено лишь в форме бесконечного ряда.

Встающая, таким образом, перед нами проблема разложения пертурбационной функции в ряд делится на несколько частей. Прежде всего, необходимо координаты эллиптического движения дать в виде явных функций времени или, что сводится к тому же, средней аномалии. Этому вопросу и посвящена настоящая глава.

Координаты эллиптического движения  $r$  и  $v$ , так же как и любая функция этих координат  $F(r, v)$ , являются периодическими функциями  $f(M)$  средней аномалии  $M$  с периодом  $2\pi$ .

Таким образом каждая такая функция  $F(r, v) = f(M)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$f(M) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos M + \dots + a_k \cos kM + \dots + b_1 \sin M + \dots + b_k \sin kM + \dots, \quad (1)$$

сходящийся для всех значений  $M$ , поскольку мы рассматриваем лишь функции  $f(M)$ , непрерывные и имеющие непрерывные производные. Известно, что в этом случае коэффициенты  $a_k, b_k$  убывают очень быстро, так что произведения  $a_k k^\alpha, b_k k^\alpha$  стремятся к нулю при любом постоянном показателе  $\alpha$ .

Коэффициенты ряда (1) выражаются формулами:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \cos kM dM, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \sin kM dM. \quad (2)$$

Очень часто ряд (1) заменяют соответствующим рядом Лорана.

Пусть

$$z = e^{iM} \equiv \exp iM,$$

где  $i = \sqrt{-1}$ , тогда

$$2 \cos kM = \exp ikM + \exp(-ikM)$$

$$2i \sin kM = \exp ikM - \exp(-ikM)$$

и потому

$$f(M) = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_k - ib_k) \exp ikM + \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} (a_k + ib_k) \exp(-ikM).$$

Введем коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  с отрицательными индексами, полагая

$$a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k;$$

ряд (1) примет окончательно такой вид:

$$f(M) = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k z^k, \quad (3)$$

где

$$P_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k).$$

Коэффициенты ряда Лорана (3) даются известной формулой

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(M) dz}{z^{k+1}},$$

где интегрирование совершается по контуру  $C$ , заключающему на плоскости комплексного переменного  $z$  точку  $z=0$ .

Принимая за контур  $C$  окружность радиуса, равного единице, с центром в точке  $z=0$ , получим:

$$P_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(M) \exp(-ikM) dM. \quad (4)$$

Эта формула эквивалентна соотношениям (2).

Для тех функций  $F(r, v) = f(M)$ , которые мы будем рассматривать, интегралы (2) или (4), как общее правило, не могут быть выражены через элементарные функции, но зато очень удобно выражаются через функции Бесселя. Поэтому начнем с изучения нужных нам свойств этих последних.

## § 78. Функции Бесселя.

Рассмотрим выражение

$$\Phi(z) = \exp\left(\frac{x}{2}z - \frac{x}{2}z^{-1}\right). \quad (5)$$

Так как

$$\exp\left(\frac{x}{2}z\right) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\alpha!}, \quad \exp\left(-\frac{x}{2}z^{-1}\right) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\beta} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!} z^{-\beta},$$

то, перемножая эти (абсолютно сходящиеся) ряды, получим

$$\Phi(z) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+\beta} \frac{(-1)^{\beta}}{\alpha!\beta!} z^{\alpha-\beta}.$$

Расположим этот ряд по степеням  $z$ . Пусть

$$\alpha - \beta = n.$$

Мы получим все члены, и притом только по одному разу, если будем менять  $n$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а  $\beta$  от 0 (если  $n \geq 0$ ), или от  $-n$  (если  $n < 0$ ) до  $+\infty$ . Следовательно

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n, \quad (6)$$

где

$$J_n(x) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!(\beta+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\beta} \quad (7)$$

если  $n \geq 0$ , и

$$J_n(x) = \sum_{\beta=-n}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta}}{\beta!(\beta+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\beta}$$

если  $n < 0$ .

Коэффициент  $J_n(x)$  разложения (6) называется функцией Бесселя индекса  $n$ . Ряд (7), сходящийся, очевидно, для всех значений  $x$ , может быть также принят за определение этих функций.

Полагая в последнем равенстве  $n = -m$ , где  $m > 0$ , получим соотношение

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x), \quad (8)$$

показывающее, что можно ограничиться изучением функций Бесселя с положительными индексами.

Из формулы (7) непосредственно видно, что

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x). \quad (9)$$

Другие нужные нам свойства этих функций проще всего получить при помощи соотношения (6). Дифференцирование этого равенства по  $z$  дает

$$\frac{x}{2} (1 + z^{-2}) \Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n J_n(x) z^{n-1}.$$

Заменяя здесь  $\Phi(z)$  выражением (6) и приравнявая коэффициенты при  $z^{n-1}$  в обеих частях равенства, получим:

$$n J_n(x) = \frac{x}{2} [J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]. \quad (10)$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (6) по  $x$ , будем иметь

$$\frac{1}{2} (z - z^{-1}) \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} J'_n(x) z^n,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при  $z^n$ :

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]. \quad (11)$$

Это равенство позволяет представить любую производную функции Бесселя в виде линейной комбинации этих функций. Например

$$J''_n(x) = \frac{1}{2} [J''_{n-1}(x) - J''_{n+1}(x)],$$

или

$$J''_n(x) = \frac{1}{4} [J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)]. \quad (12)$$

Покажем теперь, что функция  $J_n(x)$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка. В самом деле, равенство (10) дает:

$$(n-1)J_{n-1}(x) = \frac{x}{2} [J_{n-2}(x) + J_n(x)]$$

$$(n+1)J_{n+1}(x) = \frac{x}{2} [J_n(x) + J_{n+2}(x)],$$

откуда, опуская для краткости аргумент  $x$ :

$$n[J_{n-1} + J_{n+1}] - [J_{n-1} - J_{n+1}] = \frac{x}{2} [J_{n-2} - 2J_n + J_{n+2}] + 2xJ_n.$$

Заменив квадратные скобки выражениями, даваемыми равенствами (10), (11) и (12), получим:

$$J''_n(x) + \frac{1}{x} J'_n(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0. \quad (13)$$

Это дифференциальное уравнение, дающее возможность удобно изучать функции  $J_n(x)$  для всех как действительных, так и комплексных значений индекса  $n$ , кладется обычно в основу общей теории функций Бесселя.

В формуле (6) положим

$$z = \exp i\varphi, \quad (14)$$

что дает

$$\exp(ix \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) \exp(in\varphi).$$

Пусть  $x$  и  $\varphi$  будут действительные числа. Приравнивая действительные и мнимые части и учитывая соотношение (8), получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \sin \varphi) &= J_0(x) + 2J_2(x) \cos 2\varphi + 2J_4(x) \cos 4\varphi + \dots \\ \sin(x \sin \varphi) &= 2J_1(x) \sin \varphi + 2J_3(x) \sin 3\varphi + \dots \end{aligned} \right\} (15)$$

Замена  $\varphi$  через  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  дает:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \cos \varphi) &= J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2\varphi + 2J_4(x) \cos 4\varphi - \dots \\ \sin(x \cos \varphi) &= 2J_1(x) \cos \varphi - 2J_3(x) \cos 3\varphi + \dots \end{aligned} \right\} (16)$$

В заключение покажем некоторые простейшие выражения функций Бесселя при помощи определенных интегралов.

Применение формулы (4) к коэффициентам ряда (6) дает, учитывая равенство (14):

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(z) \exp(-in\varphi) d\varphi,$$

или

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \sin \varphi - in\varphi) d\varphi. \quad (17)$$

Следовательно, приравняв действительные части, будем иметь

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi. \quad (18)$$

Эта формула совершенно непригодна для вычисления  $J_n(x)$  при больших значениях индекса  $n$ , так как в этом случае подинтегральная функция имеет большое число максимумов и минимумов. Кроме того, формула маскирует тот важный для астрономических приложений факт, что при малых значениях  $x$  функция  $J_n(x)$  имеет величину порядка  $x^n$ .

Напишем формулу (7) таким образом:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= x^n \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta x^{2\beta}}{2 \cdot 4 \dots (2\beta) \cdot 2 \cdot 4 \dots (2n + 2\beta)} = \\ &= \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\beta-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2\beta)} \frac{(-1)^\beta x^{2\beta}}{(2\beta)!}. \end{aligned}$$

Но, как известно, при любых целых значениях  $n$  и  $\beta$  имеет место формула

$$\int_0^\pi \sin^{2n} \varphi \cos^{2\beta} \varphi d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\beta-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n+2\beta)} \pi.$$

Поэтому

$$J_n(x) = \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi \frac{(-1)^\beta x^{2\beta} \cos^{2\beta} \varphi}{(2\beta)!} d\varphi,$$

или, окончательно,

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \int_0^\pi \sin^{2n} \varphi \cos(x \cos \varphi) d\varphi. \quad (19)$$

Эта формула свободна от всех указанных выше недостатков формулы (18).

### § 79. Вычисление функций Бесселя.

В тех проблемах, с которыми мы встретимся дальше, приходится для данного значения  $x$  вычислять все функции  $J_0(x), J_1(x), \dots$ , отличные от нуля в пределах принятого числа знаков. Укажем простейшие и удобнейшие способы для решения этой задачи.

Прежде всего заметим, что формула (19) дает

$$|J_n(x)| < \frac{|x|^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}.$$

Это неравенство позволяет легко найти наибольшее значение  $n$ , при котором  $J_n(x)$  может отличаться от нуля в пределах принятой точности.

**Первый способ.** Формула (7), будучи написана в развернутом виде, дает

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (20)$$

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left\{ 1 - \frac{1}{1 \cdot (n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \cdot (n+1)(n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \dots \right\}. \quad (21)$$

Если числа  $x$  и  $n$  невелики, то эти ряды позволяют достаточно быстро и удобно вычислить нужные функции.

Достаточно вычислить только две функции, например  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ , так как все остальные могут быть определены при помощи последовательного применения формулы (10). Например

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x), \quad J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x), \dots$$

Нужно однако заметить, что, вследствие наличия множителей  $\frac{2}{x}, \frac{4}{x}, \frac{6}{x}, \dots$ , мы будем иметь прогрессирующую потерю точности, тем более значительную, чем меньше  $x$ .

**Второй способ.** Введем в рассмотрение отношения  $p_k$  двух смежных функций Бесселя, полагая

$$J_1(x) = p_1 J_0(x), \quad J_2(x) = p_2 J_1(x), \dots, \quad J_n(x) = p_n J_{n-1}(x).$$

Опуская для краткости аргумент  $x$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= J_0 p_1 \\ J_2 &= J_0 p_1 p_2 \\ &\dots \\ J_n &= J_0 p_1 p_2 \dots p_n. \end{aligned} \right\} (22)$$

Таким образом, задача приводится, с одной стороны, к вычислению  $J_0(x)$ , с другой — к нахождению  $p_1, \dots, p_n$ . Что касается до  $J_0(x)$ , то эту величину всегда можно вычислить либо при помощи ряда (20), либо — если  $x$  велико — при помощи формулы (19).

Обратимся теперь к вычислению  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Формула (10) дает

$$\frac{2k}{x} = \frac{J_{k-1}}{J_k} + \frac{J_{k+1}}{J_k},$$

или

$$\frac{2k}{x} = \frac{1}{p_k} + p_{k+1}. \quad (23)$$

Откуда, делая  $k = n-1, n-2, \dots, 1$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p_{n-1}} &= \frac{2n-2}{x} - p_n \\ \frac{1}{p_{n-2}} &= \frac{2n-4}{x} - p_{n-1} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{1}{p_1} &= \frac{2}{x} - p_2. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Эти соотношения дают возможность удобно и без потери точности найти  $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1$ , как только будет известно  $p_n$ .

Но из того же равенства (23) имеем:

$$p_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - p_{n+1}}, \quad p_{n+1} = \frac{1}{\frac{2n+2}{x} - p_{n+2}}, \dots$$

так что  $p_n$  может быть представлено следующей непрерывной дробью:

$$p_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} - \frac{1}{\frac{2n+2}{x} - \frac{1}{\frac{2n+4}{x} - \dots}}} \quad (25)$$

которая сходится тем быстрее, чем больше  $n$ .

**Третий способ.** Сложим почленно равенства (16); получим:

$$F(\varphi) = c_0 + c_1 \cos \varphi + c_2 \cos 2\varphi + c_3 \cos 3\varphi + \dots,$$

где

$$F(\varphi) = \cos(x \cos \varphi) + \sin(x \cos \varphi)$$

$$c_0 = J_0(x), \quad c_1 = 2J_1(x), \quad c_2 = -2J_2(x), \quad c_3 = -2J_3(x),$$

$$c_4 = 2J_4(x), \quad c_5 = 2J_5(x), \quad c_6 = -2J_6(x), \dots$$

Таким образом, вычислив функцию  $F(\varphi)$  для ряда равноотстоящих значений  $\varphi$  и применив обычные формулы гармонического анализа, найдем  $J_0(x), J_1(x), \dots$

Предположим, например, что  $J_7(x), J_8(x), \dots$  можно считать равным нулю. Введем такие обозначения:

$$y_0 = F(0^\circ), \quad y_1 = F(30^\circ), \quad y_2 = F(60^\circ), \dots, \quad y_6 = F(180^\circ),$$

$$A = y_0 + y_6, \quad B = y_1 + y_5, \quad C = y_2 + y_4, \quad D = 2y_3,$$

тогда

$$4c_0 + 4c_4 = A + D; \quad 4c_2 + 4c_6 = A - D$$

$$4c_0 - 2c_4 = B + C; \quad 2c_2 - 4c_6 = B - C,$$

откуда получим  $c, c_2, c_4$  и  $c_6$ .

Точно так же, делая

$$A' = y_0 - y_6, \quad B' = y_1 - y_5, \quad C' = y_2 - y_4,$$

получим

$$3c_1 + 3c_5 = A' + C'; \quad 2c_1 + 2c_3 + 2c_5 = A'$$

$$3c_1 - 3c_5 = \sqrt{3} B'; \quad 6c_3 = A' - 2C'$$

откуда найдем  $c_1, c_3$  и  $c_5$ .

Для контроля целесообразно использовать какой-либо частный случай формул (15) и (16); например, одно из равенств

$$1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \dots$$

$$1 = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \dots$$

$$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \dots$$

Десятизначные таблицы функций  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  даны Бесселем<sup>1</sup> для значений  $x$ , изменяющихся через 0.01 от 0.00 до 3.20. Ганзен<sup>2</sup> дал шестизначные таблицы этих функций для значений  $x$ , меняющихся от 0.0 до 20.0 через 0.1.

### § 80. Разложение эксцентрической аномалии и ее функций по кратным средней аномалии.

Уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M \quad (26)$$

показывает, что, при всех значениях эксцентриситета, удовлетворяющих условию

$$0 \leq e < 1,$$

эксцентрическая аномалия  $E$  является конечной, непрерывной (так же, как и все ее производные) функцией средней аномалии  $M$ . При возрастании  $M$  на  $2\pi$  эксцентрическая аномалия увеличивается тоже на  $2\pi$ . Вследствие этого всякая периодическая функция  $E$ , имеющая период  $2\pi$ , будет также периодической функцией  $M$  с тем же периодом.

Рассмотрим выражение  $\cos mE$ , где  $m$  — целое число. Это выражение является, очевидно, четной периодической функцией  $M$ , и мы можем положить

$$\cos mE = \frac{1}{2} a_0^m + a_1^m \cos M + a_2^m \cos 2M + \dots \quad (27)$$

<sup>1</sup> F. W. Bessel, Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht, Abhandlungen der Berliner Akademie, 1824.

<sup>2</sup> P. A. Hansen, Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Exzentrizität und Neigung, Schriften der Sternwarte Seeberg (Götha), 1843.

где, на основании формул (2),

$$\pi a_k^m = \int_0^{2\pi} \cos mE \cos kM dM.$$

В частности, для  $k=0$  получим, исключив  $M$  при помощи равенства (26):

$$\begin{aligned} \pi a_0^m &= \int_0^{2\pi} \cos mE (1 - e \cos E) dE = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos mE dE - e \int_0^{2\pi} \cos mE \cos E dE. \end{aligned}$$

Если  $m > 1$ , то каждый из этих интегралов равен нулю и потому

$$a_0^m = 0.$$

Если  $m=1$ , то, как нетрудно видеть,

$$a_0^1 = -e.$$

В случае  $k > 0$  интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \pi a_k^m &= - \int_0^{2\pi} \frac{\sin kM}{k} \frac{d \cos mE}{dM} dM = \\ &= - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin kM \frac{d \cos mE}{dE} dE = \\ &= \frac{m}{k} \int_0^{2\pi} \sin kM \sin mE dE. \end{aligned}$$

Таким образом, заменив  $M$  его значением (26), получим:

$$\begin{aligned} \frac{2k\pi}{m} a_k^m &= 2 \int_0^{2\pi} \sin mE \sin (kE - ke \sin E) dE = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos [(k-m)E - ke \sin E] dE - \\ &- \int_0^{2\pi} \cos [(k+m)E - ke \sin E] dE. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (18), окончательно будем иметь для  $k > 0$ :

$$a_k^m = \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)].$$

Таким же путем легко показать, что коэффициенты ряда

$$\sin mE = b_1^m \sin M + b_2^m \sin 2M + \dots \quad (28)$$

даются формулой

$$b_k^m = \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)].$$

Заметим, что коэффициенты рядов (27) и (28) могут быть получены одновременно, если рассматривать разложение функции  $\exp(imE)$ .

При  $m > 1$  ряды (27) и (28) можно представить, как нетрудно проверить, в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \cos mE &= m \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{k-m}(ke) \frac{\cos kM}{k} \\ \sin mE &= m \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{k-m}(ke) \frac{\sin kM}{k} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В том случае, когда  $m=1$ , ряду (27) может быть придан, при помощи соотношения (11), такой вид:

$$\cos E = -\frac{1}{2} e + \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} J'_k(ke) \cos kM.$$

Точно так же, воспользовавшись соотношением (10), получим:

$$\sin E = \frac{1}{e} \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM. \quad (30)$$

Подставляя только-что указанные разложения в равенство (26) и в формулу

$$r = a(1 - e \cos E),$$

найдем

$$E = M + \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM \quad (31)$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - e \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} J'_k(ke) \cos kM. \quad (32)$$

Выведем еще разложение квадрата радиуса-вектора. Так как

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} e^2 - 2e \cos E + \frac{1}{2} e^2 \cos 2E$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \cos 2E &= \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} [J_{k-2}(ke) - J_{k+2}(ke)] \cos kM = \\ &= \sum_1^{\infty} \frac{2}{k} \left[ \frac{2(k-1)}{ke} J_{k-1}(ke) - \frac{2(k+1)}{ke} J_{k+1}(ke) \right] \cos kM = \\ &= \sum_1^{\infty} \left[ \frac{8}{ke} J'_k(ke) - \frac{8}{k^2 e^2} J_k(ke) \right] \cos kM, \end{aligned}$$

то окончательно получим

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \sum_1^{\infty} \frac{4}{k^2} J_k(ke) \cos kM. \quad (33)$$

Эту формулу можно найти еще проще, если обратить внимание на соотношение

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a}\right)^2 = 2e \sin E$$

и воспользоваться разложением (30).

Точно так же, замечая, что

$$\frac{dE}{dM} = (1 - e \cos E)^{-1} = \frac{a}{r},$$

из формулы (31) получим

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} J_k(ke) \cos kM. \quad (34)$$

Это равенство, в свою очередь, позволяет найти коэффициенты разложения

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} g_0 + \sum_1^{\infty} g_k \cos kM. \quad (35)$$

Сложные выражения коэффициентов  $g_1, g_2, \dots$  через функции Бесселя мы приводить не будем, так как для применений достаточно иметь разложение каждого из этих коэффициентов по степеням  $e$ . Такие разложения будут приведены ниже (§ 82). Сейчас ограничимся лишь определением  $g_0$ .

Из равенства (35) следует

$$g_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^2 dM.$$

Обратимся к интегралу площадей

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{1+m} \sqrt{a(1-e^2)},$$

который можно представить в таком виде:

$$\frac{dv}{dM} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1-e^2}, \quad (36)$$

ибо

$$M = k \sqrt{1+m} a^{-\frac{2}{3}} (t - t_0) + M_0.$$

Следовательно

$$g_0 = (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dv = 2(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}},$$

и потому

$$\frac{1}{2} g_0 = 1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1.3}{2.4} e^4 + \dots + \frac{1.3 \dots (2h-1)}{2.4 \dots (2h)} e^{2h} + \dots$$

Вычисляя этот коэффициент при помощи непосредственного возведения в квадрат равенства (34) и сравнивая результаты, получим:

$$(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} J_k^2(ke).$$

Примечание. В разложениях, выведенных в этом параграфе, так же как и в большинстве астрономических приложений, функции Бесселя встречаются чаще всего в двух следующих формах:

$$\frac{2}{e} J_k(ke) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \left\{ 1 - \frac{k^2 e^2}{2 \cdot (2k+2)} + \frac{k^4 e^4}{2.4 \cdot (2k+2)(2k+4)} - \dots \right\}$$

$$2J'_k(ke) =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \left\{ 1 - \frac{k+2}{k} \frac{k^2 e^2}{2 \cdot (2k+2)} + \frac{k+4}{k} \frac{k^4 e^4}{2.4 \cdot (2k+2)(2k+4)} - \dots \right\}$$

Отметим следующие частные случаи, которые особенно полезно иметь в готовом виде:

$$\frac{2}{e} J_1(e) = 1 - \frac{e^2}{8} + \frac{e^4}{192} - \frac{e^6}{9216} + \dots$$

$$\frac{2}{e} J_2(2e) = e \left( 1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e^4}{24} - \frac{e^6}{360} + \dots \right)$$

$$\frac{2}{e} J_3(3e) = \frac{9e^2}{8} \left( 1 - \frac{9e^2}{16} + \frac{81e^4}{640} - \dots \right)$$

$$\frac{2}{e} J_4(4e) = \frac{4e^3}{3} \left( 1 - \frac{4e^2}{5} + \frac{4e^4}{15} - \dots \right)$$

$$\frac{2}{e} J_5(5e) = \frac{625e^4}{384} \left( 1 - \frac{25e^2}{24} + \frac{625e^4}{1344} - \dots \right)$$

$$\frac{2}{e} J_6(6e) = \frac{81e^5}{40} \left( 1 - \frac{9e^2}{7} + \frac{81e^4}{112} - \dots \right)$$

$$2J'_1(e) = 1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5e^4}{192} - \frac{7e^6}{9216} + \dots$$

$$2J'_2(2e) = e \left( 1 - \frac{2e^2}{3} + \frac{e^4}{8} - \frac{e^6}{90} + \dots \right)$$

$$2J'_3(3e) = \frac{9e^2}{8} \left( 1 - \frac{15e^2}{16} + \frac{189e^4}{640} - \dots \right)$$

$$2J'_4(4e) = \frac{4e^3}{3} \left( 1 - \frac{6e^2}{5} + \frac{8e^4}{15} - \dots \right)$$

$$2J'_5(5e) = \frac{625e^4}{384} \left( 1 - \frac{35e^2}{24} + \frac{375e^4}{448} - \dots \right)$$

$$2J'_6(6e) = \frac{81e^5}{40} \left( 1 - \frac{12e^2}{7} + \frac{135e^4}{112} - \dots \right)$$

§ 81. Преобразование ряда, расположенного по кратным эксцентрической аномалии, в ряд, расположенный по кратным средней аномалии.

Обозначим через  $S$  периодическую функцию  $E$ , период которой равен  $2\pi$ . Эту функцию мы будем предполагать непрерывной, так же как и ее производные, а потому разложимой в ряд Фурье

$$S = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos E + a_2 \cos 2E + \dots + b_1 \sin E + \dots \quad (37)$$

Как уже было отмечено, величина  $S$  будет периодическая функция  $M$ , имеющая тот же период  $2\pi$  и разложимая в ряд

$$S = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos M + A_2 \cos 2M + \dots + B_1 \sin M + \dots \quad (38)$$

Стоящая перед нами задача заключается в получении разложения (38) при условии, что коэффициенты разложения (37) известны.

Подставим вместо  $\cos mE$  и  $\sin mE$  их выражения, даваемые формулами (27) и (28). Это даст:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 + a_1 a_0^1 \\ A_k &= a_1 a_k^1 + a_2 a_k^2 + \dots \\ B_k &= b_1 b_k^1 + b_2 b_k^2 + \dots \end{aligned}$$

или, заменяя  $a_k^m$  и  $b_k^m$  их значениями, найденными в предыдущем параграфе:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= a_0 - a_1 e \\ kA_k &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)] \\ kB_k &= \sum_{m=1}^{\infty} m b_m [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Таким образом, преобразование ряда (37) в ряд (38) приводится к вычислению величин

$$\begin{aligned} J_0(e), J_1(e), J_2(e), \dots \\ J_0(2e), J_1(2e), J_2(2e), \dots \\ \dots \end{aligned}$$

что может быть выполнено как алгебраически (до определенной степени  $e$ ), так и численно по формулам, указанным в §§ 78 и 79.

Другой способ для решения рассматриваемой задачи был предложен Коши. Он основывается на следующих соображениях.

Положим

$$y = \exp iE, \quad z = \exp iM$$

и заменим разложения (37) и (38) соответствующими рядами Лорана:

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_k y^k$$

и

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} P_k z^k. \quad (40)$$

Для вычисления коэффициентов  $P_k$  обратимся к формуле (4), которая дает

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} S z^{-k} dM. \quad (41)$$

Но на основании соотношения (26)

$$z^{-k} = \exp(-ikM) = \exp(-ikE + ike \sin E) =$$

$$= y^{-k} \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right]$$

$$\frac{dM}{dE} = 1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1}).$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} 2\pi P_k &= \int_0^{2\pi} S y^{-k} \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right] \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right] dE = \\ &= \int_0^{2\pi} T y^{-k} dE. \end{aligned}$$

Последнее равенство является не чем иным, как применением общей формулы (4) к определению коэффициентов разложения функции

$$T = S \left[1 - \frac{e}{2}(y + y^{-1})\right] \exp\left[\frac{ke}{2}(y - y^{-1})\right]$$

по степеням  $y$ . Таким образом, получаем первое правило Коши:

Для получения коэффициента  $P_k$  ряда (40) надо функцию  $T$ , в которой  $S$  заменено рядом (37), разложить по степеням  $y$ ; коэффициент при  $y^k$  будет равен  $P_k$ .

С другой стороны, так как

$$\frac{dz}{dM} = iz,$$

то равенство (41) дает

$$\begin{aligned} 2\pi P_k &= -i \int_0^{2\pi} S z^{-k-1} \frac{dz}{dM} dM = ik^{-1} \int_0^{2\pi} S \frac{dz^{-k}}{dM} dM = \\ &= -ik^{-1} \int_0^{2\pi} z^{-k} \frac{dS}{dM} dM = -ik^{-1} \int_0^{2\pi} z^{-k} \frac{dS}{dE} dE. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{dS}{dE} = \frac{dS}{dy} \frac{dy}{dE} = iy \frac{dS}{dy},$$

поэтому, выражая опять  $z^{-k}$  через  $y^{-k}$ , получаем:

$$2\pi P_k = \int_0^{2\pi} U y^{-k+1} dE,$$

где

$$U = \frac{1}{k} \frac{dS}{dy} \exp \left[ \frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right].$$

Это выражение для  $P_k$  доказывает второе правило Коши:

Для получения коэффициента  $P_k$  ряда (40) надо разложить функцию  $U$  по степеням  $y$  и взять коэффициент при  $y^{k-1}$ .

Так как функции, которые приходится разлагать, почти всегда просто выражаются через  $y + y^{-1}$  и  $y - y^{-1}$ , то применение указанных правил естественно приводит к употреблению чисел Коши: так называются коэффициенты  $N_{-p, j, q}$  в разложении

$$(t + t^{-1})^j (t - t^{-1})^q = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} N_{-p, j, q} t^p,$$

где  $j$  и  $q$  — целые, не отрицательные числа.

В настоящее время все обычно встречающиеся в Небесной механике разложения уже имеются в готовом виде (§ 82). Поэтому мы не будем останавливаться на свойствах чисел Коши.<sup>1</sup>

### § 82. Разложение некоторых функций координат эллиптического движения.

Нами уже найдено разложение радиуса-вектора в ряд (32), расположенный по кратным средней аномалии. Посмотрим теперь, каким образом может быть получено такое разложение для истинной аномалии.

Выразим прежде всего истинную аномалию через эксцентрическую, для чего воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (42)$$

Полагая

$$\frac{1}{2}v = w, \quad \frac{1}{2}E = u, \quad \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \mu,$$

получим

$$\operatorname{tg} w = \mu \operatorname{tg} u,$$

или

$$\frac{\exp(2iw) - 1}{\exp(2iw) + 1} = \mu \frac{\exp(2iu) - 1}{\exp(2iu) + 1}.$$

Откуда, полагая  $\beta = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}$ ,

$$\exp(2iw) = \frac{1 - \mu + (1 + \mu) \exp(2iu)}{1 + \mu + (1 - \mu) \exp(2iu)} = \frac{1 - \beta \exp(-2iu)}{1 - \beta \exp(2iu)} \exp(2iu).$$

Логарифмирование обеих частей дает

$$w = u + \frac{1}{2i} \ln(1 - \beta \exp(-2iu)) - \frac{1}{2i} \ln(1 - \beta \exp(2iu)),$$

<sup>1</sup> См. F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, 1, Paris 1889, 234–237, где указана дальнейшая литература.

или

$$w = u + \beta \sin 2u + \frac{1}{2} \beta^2 \sin 4u + \frac{1}{3} \beta^3 \sin 6u + \dots \quad (43)$$

Применение этой формулы к соотношению (42) дает разложение

$$v = E + 2 \left[ \beta \sin E + \frac{1}{2} \beta^2 \sin 2E + \frac{1}{3} \beta^3 \sin 3E + \dots \right], \quad (44)$$

где

$$\beta = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

Перепишав соотношение (42) в форме

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \frac{v}{2}$$

и применяя опять формулу (43), получим:

$$E = v - 2 \left[ \beta \sin v - \frac{1}{2} \beta^2 \sin 2v + \frac{1}{3} \beta^3 \sin 3v - \dots \right]. \quad (45)$$

Заменив в равенстве (44)  $E, \sin E, \sin 2E, \dots$  их выражениями (31) и (28), получим весьма важное разложение, дающее уравнение центра, а именно

$$v - M = H_1 \sin M + H_2 \sin 2M + \dots, \quad (46)$$

где

$$H_1 = 4 \left( \frac{e}{2} \right) - 2 \left( \frac{e}{2} \right)^3 + \frac{5}{3} \left( \frac{e}{2} \right)^5 + \frac{107}{36} \left( \frac{e}{2} \right)^7 - \dots$$

$$H_2 = 5 \left( \frac{e}{2} \right)^2 - \frac{22}{3} \left( \frac{e}{2} \right)^4 + \frac{17}{3} \left( \frac{e}{2} \right)^6 + \dots$$

$$H_3 = \frac{26}{3} \left( \frac{e}{2} \right)^3 - \frac{43}{2} \left( \frac{e}{2} \right)^5 + \frac{95}{4} \left( \frac{e}{2} \right)^7 - \dots$$

$$H_4 = \frac{103}{6} \left( \frac{e}{2} \right)^4 - \frac{902}{15} \left( \frac{e}{2} \right)^6 + \dots$$

$$H_5 = \frac{1097}{30} \left( \frac{e}{2} \right)^5 - \frac{5957}{36} \left( \frac{e}{2} \right)^7 + \dots$$

$$H_6 = \frac{1223}{15} \left( \frac{e}{2} \right)^6 - \dots \quad H_7 = \frac{47273}{252} \left( \frac{e}{2} \right)^7 - \dots$$

Приведем еще значения  $H_1, H_2, \dots$  в секундах дуги, причем вместо числовых коэффициентов дадим их логарифмы:

$$H_1 = [5.615\ 455\ 129] e - [4.712\ 3651] e^3 + [4.031\ 124] e^5 + [3.6803] e^7 + [3.541] e^9 + \dots$$

$$H_2 = [5.411\ 335\ 146] e^2 - [4.975\ 6066] e^4 + [4.261\ 57] e^6 + [3.1875] e^8 + \dots$$

$$H_3 = [5.349\ 187\ 24] e^3 - [5.141\ 7136] e^5 + [4.582\ 88] e^7 - [3.514] e^9 + \dots$$

$$H_4 = [5.344\ 9911] e^4 - [5.287\ 36] e^6 + [4.8682] e^8 - [4.14] e^{10} + \dots$$

$$H_5 = [5.372\ 3605] e^5 - [5.425\ 94] e^7 + [5.120] e^9 - [4.554] e^{11} + \dots$$

$$H_6 = [5.419\ 58] e^6 - [5.5615] e^8 + [5.348] e^{10} - \dots$$

$$\begin{aligned}
H_7 &= [5.480\ 43] e^7 - [5.695\ 57] e^9 + [5.56] e^{11} - \dots \\
H_8 &= [5.5512] e^8 - [5.829] e^{10} + [5.76] e^{12} - \dots \\
H_9 &= [5.629\ 53] e^9 - [5.9518] e^{11} + [5.952] e^{13} - \dots \\
H_{10} &= [5.7138] e^{10} - [6.094] e^{12} + \dots \\
H_{11} &= [5.8028] e^{11} - [6.227] e^{13} + \dots \\
H_{12} &= [5.896] e^{12} - \dots, & H_{13} &= [5.992] e^{13} - \dots
\end{aligned}$$

Для удобства дадим в развернутом виде и формулу (22), представляющую радиус-вектор. Напишем ее так:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - \sum_1^{\infty} G_k \cos kM, \quad (47)$$

тогда

$$\begin{aligned}
G_1 &= 2 \left(\frac{e}{2}\right) - 3 \left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{6} \left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{7}{72} \left(\frac{e}{2}\right)^7 + \dots \\
G_2 &= 2 \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{16}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^4 + 4 \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \dots \\
G_3 &= 3 \left(\frac{e}{2}\right)^3 - \frac{45}{4} \left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{567}{40} \left(\frac{e}{2}\right)^7 - \dots \\
G_4 &= \frac{16}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^4 - \frac{128}{5} \left(\frac{e}{2}\right)^6 + \dots, \\
G_5 &= \frac{125}{12} \left(\frac{e}{2}\right)^5 - \frac{4375}{72} \left(\frac{e}{2}\right)^7 + \dots \\
G_6 &= \frac{108}{5} \left(\frac{e}{2}\right)^6 - \dots, & G_7 &= \frac{16\ 807}{360} \left(\frac{e}{2}\right)^7 - \dots
\end{aligned}$$

Или, заменяя числовые коэффициенты их логарифмами:

$$\begin{aligned}
G_1 &= e - [9.574\ 0313] e^3 + [8.415\ 6688] e^5 - [6.880] e^7 + \dots \\
G_2 &= [9.698\ 9700] e^2 - [9.522\ 8787] e^4 + [8.795\ 88] e^6 - [7.7447] e^8 + \dots \\
G_3 &= [9.574\ 0313] e^3 - [9.546\ 0025] e^5 + [9.044\ 313] e^7 - [8.25] e^9 + \dots \\
G_4 &= [9.522\ 8787] e^4 - [9.602\ 0600] e^6 + [9.249\ 88] e^8 - [8.627] e^{10} + \dots \\
G_5 &= [9.512\ 5788] e^5 - [9.676\ 436] e^7 + [9.435\ 33] e^9 - [8.938] e^{11} + \dots \\
G_6 &= [9.528\ 2738] e^6 - [9.762\ 357] e^8 + [9.6094] e^{10} - [9.211] e^{12} + \dots \\
G_7 &= [9.561\ 98] e^7 - [9.856\ 17] e^9 + [9.7762] e^{11} + \dots \\
G_8 &= [9.6089] e^8 - [9.9557] e^{10} + [9.938] e^{12} + \dots \\
G_9 &= [9.6659] e^9 - [10.0595] e^{11} + [10.096] e^{13} - \dots \\
G_{10} &= [9.731] e^{10} - [10.167] e^{12} \\
G_{11} &= [9.8025] e^{11} - [10.277] e^{13} \\
G_{12} &= [9.879] e^{12} - \dots, & G_{13} &= [9.961] e^{13} - \dots
\end{aligned}$$

Из характеристик всех логарифмов надо вычесть 10.

Полезно отметить, что разложение (46) можно получить еще иначе. Действительно, подставив ряд (35) в формулу (36) и проинтегрировав, будем иметь:

$$v - M = \sqrt{1 - e^2} \sum_1^{\infty} \frac{g_k}{k} \sin kM. \quad (46')$$

При разложении пертурбационной функции в ряд употребляются также разложения функций

$$\left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin m(v - M), \quad (48)$$

где  $p, n$  и  $m$  — целые числа, причем  $p$  и  $m$  принимают только положительные и равные нулю значения.

Вычисление коэффициентов разложений таких функций до определенной степени  $e$  не представляет никаких трудностей. Имеем, например:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin m(v - M) = \\
&= \left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \left(\frac{r}{a}\right)^n \left\{ m(v - M) - \frac{1}{6} m^3 (v - M)^3 + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Заменяя здесь  $\frac{r}{a}$  и  $v - M$  рядами (47) и (46), получим требуемый результат.

Коэффициенты разложений функций (48), вычисленные до  $e^7$ , дает Леверрье.<sup>1</sup>

Кэли<sup>2</sup> дал с той же точностью коэффициенты разложений функций

$$\left(\frac{r}{a} - 1\right)^p \sin mv$$

для  $p = 0, 1, \dots, 7, m = 0, 1, \dots, 7$  и функций

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv$$

для  $n = -5, -4, \dots, -1, 1, \dots, 4, m = 0, 1, \dots, 5$ .

Некоторые, наиболее часто встречающиеся разложения приведены на стр. 391—398 в форме таблиц I и II. Эти таблицы дают коэффициенты при различных степенях  $e$  в  $C_k^{n, m}$  и  $S_k^{n, m}$ , фигурирующих в разложениях:

$$\left. \begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos mv &= C_0^{n, m} + C_1^{n, m} \cos M + C_2^{n, m} \cos 2M + \dots \\
\left(\frac{r}{a}\right)^n \sin mv &= S_1^{n, m} \sin M + S_2^{n, m} \sin 2M + \dots
\end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Так, например, таблица II показывает, что

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{a}\right) \sin v &= \left(1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{11}{192} e^4 - \frac{457}{9216} e^6 - \dots\right) \sin M + \\
&+ \left(\frac{1}{2} e - \frac{5}{12} e^3 + \frac{1}{24} e^5 - \frac{1}{45} e^7 + \dots\right) \sin 2M + \\
&+ \left(\frac{3}{8} e^2 - \frac{51}{128} e^4 + \frac{543}{5120} e^6 - \dots\right) \sin 3M + \dots
\end{aligned}$$

<sup>1</sup> U. J. J. Leverrier, Recherches astronomiques, Annales de l'Observatoire de Paris, 1, 1855, 343—355.

<sup>2</sup> A. Cayley, Tables of the Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion, Memoirs of the R. Astron. Society 29, 1859, 191—306.

В дополнение приведем еще следующее разложение, легко выводимое из (47):

$$\begin{aligned} \ln \frac{r}{a} = & \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{32} e^4 + \frac{1}{96} e^6 + \dots + \\ & + \left( -e + \frac{3}{8} e^3 + \frac{1}{64} e^5 + \frac{127}{9216} e^7 + \dots \right) \cos M + \\ & + \left( -\frac{3}{4} e^2 + \frac{11}{24} e^4 - \frac{3}{64} e^6 - \dots \right) \cos 2M + \\ & + \left( -\frac{17}{24} e^3 + \frac{77}{128} e^5 - \frac{743}{5120} e^7 - \dots \right) \cos 3M + \\ & + \left( -\frac{71}{96} e^4 + \frac{129}{160} e^6 - \dots \right) \cos 4M + \left( -\frac{523}{640} e^5 + \frac{10039}{9216} e^7 - \dots \right) \cos 5M + \\ & + \left( -\frac{899}{960} e^6 - \dots \right) \cos 6M - \frac{355\,081}{322\,560} e^7 \cos 7M + \dots \end{aligned}$$

Примечание. Коэффициенты ряда (46) или (46') имеют весьма сложную структуру. Несравненно проще выражаются коэффициенты разложения уравнения центра по кратным истинной аномалии. Чтобы вывести такое разложение, обратимся к формулам

$$M = E - e \sin E, \quad \sin E = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin v}{1 + e \cos v},$$

которые дают:

$$M = E + \sqrt{1 - e^2} \frac{d}{dv} \ln(1 + e \cos v).$$

Так как

$$1 + e \cos v = \frac{e}{2\beta} (1 + \beta x)(1 + \beta x^{-1}),$$

где

$$x = \exp(iv), \quad \beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

то

$$\ln(1 + e \cos v) = \ln \frac{e}{2\beta} + 2 \left( \beta \cos v - \frac{1}{2} \beta^2 \cos 2v + \frac{1}{3} \beta^3 \cos 3v - \dots \right)$$

и потому

$$M = E + 2\sqrt{1 - e^2} (-\beta \sin v + \beta^2 \sin 2v - \beta^3 \sin 3v + \dots).$$

Заменив здесь  $E$  выражением (45), окончательно получим:

$$M = v + 2 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \beta^k (1 + k\sqrt{1 - e^2}) \sin kv. \quad (50)$$

### § 83. Коэффициенты Ганзена.

Вместо того чтобы рассматривать отдельно два разложения (49), можно изучать один ряд Лорана:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n x^m = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_k^{n, m} z^k.$$

Коэффициенты  $X_k^{n, m}$  этого ряда называются иногда коэффициентами Ганзена, так как Ганзен первый дал общие выражения этих величин, представив их в виде рядов, расположенных по степеням  $\beta$ . Другой, более простой вывод формул Ганзена был предложен Тиссераном.<sup>1</sup>

Проще всего эти коэффициенты могут быть получены при помощи первого правила Коши.

Выразим прежде всего функцию

$$S = \left(\frac{r}{a}\right)^n x^m$$

через  $y$ . Так как

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = 1 - \frac{e}{2} (y + y^{-1}),$$

то, согласно этому правилу,  $X_k^{n, m}$  будет равняться коэффициенту при  $y^k$  в разложении выражения

$$T = S \left[ 1 - \frac{e}{2} (y + y^{-1}) \right] \exp \left[ \frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right] = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} x^m \exp \left[ \frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right].$$

Легко видеть, что

$$\frac{r}{a} = (1 + \beta^2)^{-1} (1 - \beta y)(1 - \beta y^{-1}),$$

где, как и раньше:

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

С другой стороны, соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

может быть написано следующим образом:

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{1+\beta y-1}{1-\beta y+1},$$

откуда

$$x = y(1 - \beta y^{-1})(1 - \beta y)^{-1}.$$

Таким образом

$$T = (1 + \beta^2)^{-n-1} y^m (1 - \beta y)^{n-m+1} (1 - \beta y^{-1})^{n+m+1} \exp \left[ \frac{ke}{2} (y - y^{-1}) \right].$$

Пользуясь формулой бинома, легко вычислить коэффициенты разложения:

$$(1 - \beta y)^{n-m+1} (1 - \beta y^{-1})^{n+m+1} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} E_{k, p}^{n, m} y^{k-p-m}$$

<sup>1</sup> F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, 1, 1889, Ch. XV.

и получить их в такой форме:

$$E_{k,p}^{n,m} = (-\beta)^{k-p-m} \binom{n-m+1}{k-p-m} F(k-p-n-1, -m-n-1, k-p-m+1, \beta^2),$$

где через  $F(a, b, c, x)$  обозначена гипергеометрическая функция.

Так как

$$\exp\left[\frac{ke}{2}(y-y^{-1})\right] = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p(ke) y^p,$$

то искомый коэффициент при  $y^k$  в разложении функции  $T$  равен

$$X_k^{n,m} = (1+\beta^2)^{-n-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} E_{k,p}^{n,m} J_p(ke).$$

Эта формула позволяет сравнительно очень легко получить разложения коэффициентов  $C_k^{n,m}$  и  $S_k^{n,m}$  по степеням эксцентриситета.

#### § 84. О сходимости рядов, представляющих координаты эллиптического движения.

В предыдущих параграфах нами получены разложения различных функций эксцентрической аномалии  $E$  в ряды Фурье, расположенные по кратным средней аномалии  $M$ . Эти ряды сходятся, на основании теоремы Дирихле, для всех значений  $M$  и  $e$ , если только  $e < 1$ , ибо при этих условиях разлагаемые функции непрерывны, так же, как и их производные.

Однако, в виду сложности коэффициентов рассматриваемых рядов, эти коэффициенты приходится разлагать по степеням  $e$  и отбрасывать члены, начиная с некоторой определенной степени. Таким образом фактически мы имеем дело со степенными рядами, расположенными по целым положительным степеням  $e$ , причем коэффициенты этих рядов являются периодическими (с периодом  $2\pi$ ) функциями  $M$ . Радиус сходимости каждого такого ряда будет некоторой функцией  $\varphi(M)$  средней аномалии. Наша задача заключается в определении минимального значения этой функции  $\varphi(M)$  при изменении  $M$  от 0 до  $2\pi$ .

Возьмем какую-нибудь функцию  $F(E)$  эксцентрической аномалии и будем рассматривать ее как функцию  $e$  и  $M$  на основании уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M. \quad (51)$$

Эта функция голоморфна для всех значений  $e$  (при данном  $M$ ), для которых ее производная

$$\frac{dF(E)}{de} = F'(E) \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

остаётся конечной. Поэтому общие особые точки всех функций  $F(E)$  определяются уравнением

$$1 - e \cos E = 0, \quad (52)$$

которое должно быть решено совместно с (51). Исключение могут представлять только те функции, для которых произведение  $F'(E) \sin E$  либо обращается в нуль для значений переменных, удовлетворяющих условию (52), либо обращается в бесконечность. Такие функции мы оставим в стороне.

Итак, радиус сходимости  $\varphi(M)$  равняется, для всех рассматриваемых функций, наименьшему из модулей корней  $e$  уравнений (51) и (52).

Переходя к изучению функции  $\varphi(M)$ , заметим, прежде всего, что

$$\varphi(\pi \pm M) = \varphi(M).$$

Действительно, замена  $E$ ,  $M$  и  $e$  в уравнениях (51) и (52) через  $\pi \pm E$ ,  $\pi \pm M$  и  $-e$  не изменяет этих уравнений, а потому при такой замене каждая особая точка  $e_0$  обращается в особую точку  $-e_0$ , имеющую тот же модуль. Таким образом радиус круга сходимости измениться не может.

Несколько труднее доказать другое свойство функции  $\varphi(M)$ , заключающееся в том, что минимальное значение этой функции равно  $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

Следуя Пуанкаре, возьмем функцию

$$F(E) = \exp(2imE),$$

где  $m$  — целое число, производная которой удовлетворяет только что указанным условиям.

Разложение этой функции в степенной ряд легко получить, пользуясь формулами (29) и (7), которые дают:

$$F(E) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{k} J_{k-2m}(ke) z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{k} z^k \sum_{\beta} \frac{(-1)^\beta}{\beta! (\beta + k - 2m)!} \left(\frac{ke}{2}\right)^{k-2m+2\beta}.$$

Положим, далее,

$$F(E) = \Phi(M, e)$$

и рассмотрим сумму

$$\Psi(M, e) = \Phi(M, e) + \Phi(\pi + M, e). \quad (53)$$

Очевидно

$$\Psi(M, e) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \frac{2m}{h} z^{2h} \sum_{\beta} \frac{(-1)^\beta}{\beta! (\beta + 2h - 2m)!} (he)^{2h-2m+2\beta}, \quad (54)$$

так как все члены с нечетными степенями  $z$  сокращаются.

Пусть  $M = M_1$  — какое-нибудь определенное значение средней аномалии, не равное  $\frac{\pi}{2}$ . Обозначим через  $e_1$  действительное число, удовлетворяющее условию

$$\varphi(M_1) < e_1 < 1. \quad (55)$$

В таком случае ряд  $\Phi(M_1, e_1)$  очевидно расходится. Покажем, что сумма (53) будет также расходиться для этих значений переменных. Действительно, особым точкам  $e_0$  функции  $\Phi(M_1, e)$  отвечают особые точки  $-e_0$  функции  $\Phi(\pi + M_1, e)$ , но  $-e_0$  не может быть особой точкой для  $\Phi(M_1, e)$ , так как при замене  $e$  через  $-e$  в уравнениях (51) и (52)  $M$  обращается в  $\pi \pm M$ . Таким образом, каждая особая точка одного из слагаемых выражения (53) обязательно является особой точкой суммы, ибо  $M_1 \neq \pi \pm M_1$ , раз  $M_1 \neq \frac{\pi}{2}$ .

Итак, ряд  $\Psi(M_1, e_1)$  расходится, если выполнено условие (55). Сравним члены этого ряда с соответствующими членами ряда

$$\Psi\left(-\frac{\pi}{2}, ie_1\right) = \Phi\left(-\frac{\pi}{2}, ie_1\right) + \Phi\left(+\frac{\pi}{2}, ie_1\right). \quad (56)$$

Очевидно, модули сравниваемых членов будут одинаковы, но в то время как аргументы членов  $\Psi(M_1, e_1)$  могут между собой различаться, аргументы всех членов ряда  $\Psi\left(-\frac{\pi}{2}, ie_1\right)$  одинаковы. Действительно, аргумент каждого члена равен, как это видно из (54):

$$-\frac{\pi}{2}2h + \pi\beta + \frac{\pi}{2}(2h - 2m + 2\beta) = -m\pi.$$

Таким образом, раз ряд  $\Psi(M_1, e_1)$  расходится, то разложение функции (56) тем более будет расходиться. Отсюда следует, что по крайней мере для одной из функций  $\Phi\left(\pm\frac{\pi}{2}, ie_1\right)$  разложение по степеням эксцентриситета расходится, если оно расходится для  $\Phi(M_1, e_1)$ : иначе говоря,

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \varphi(M_1),$$

что и требовалось доказать.

Итак, для нахождения минимального значения функции нужно найти корень  $e_0$  уравнений

$$\begin{aligned} 1 - e_0 \cos E_0 &= 0 \\ E_0 - e_0 \sin E_0 &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

имеющий наименьший модуль; тогда получим:

$$\min \varphi(M) = |e_0|.$$

Эти уравнения дают

$$E_0 - \operatorname{tg} E_0 = \frac{\pi}{2}$$

или, полагая  $E_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ,

$$\varepsilon + \operatorname{ctg} \varepsilon = 0. \quad (56)$$

Мы можем ограничиться рассмотрением комплексных корней уравнения (56), так как действительные корни этого уравнения дают

$$|e_0| = \left| \frac{1}{\cos E_0} \right| > 1$$

и потому не представляют для нас интереса.

Каждому комплексному корню  $\varepsilon$  уравнения (56) будет соответствовать сопряженный корень  $\varepsilon'$ , так что это уравнение должно иметь по меньшей мере два корня.

Возьмем какие-нибудь два корня  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  уравнения (56) и составим следующие вспомогательные функции:

$$\varphi = \cos \varepsilon u, \quad \varphi' = \cos \varepsilon' u.$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \varepsilon^2\varphi = 0, \quad \frac{d^2\varphi'}{du^2} + \varepsilon'^2\varphi' = 0,$$

следовательно

$$\varphi' \frac{d^2\varphi}{du^2} - \varphi \frac{d^2\varphi'}{du^2} = (\varepsilon'^2 - \varepsilon^2) \varphi \varphi'$$

или

$$\frac{d}{du} \left[ \varphi' \frac{d\varphi}{du} - \varphi \frac{d\varphi'}{du} \right] = (\varepsilon'^2 - \varepsilon^2) \varphi \varphi'.$$

Это равенство проинтегрируем в пределах от 0 до 1. Так как при  $u=0$

$$\frac{d\varphi}{du} = 0, \quad \frac{d\varphi'}{du} = 0,$$

а при  $u=1$

$$\frac{d\varphi}{du} = -\varepsilon \sin \varepsilon = \cos \varepsilon, \quad \frac{d\varphi'}{du} = \cos \varepsilon',$$

на основании уравнения (56), то получим:

$$(\varepsilon'^2 - \varepsilon^2) \int_0^1 \varphi \varphi' du = 0.$$

Отсюда следует, что для каждой пары комплексных сопряженных корней  $\varepsilon, \varepsilon'$  должно быть

$$\varepsilon'^2 - \varepsilon^2 = 0,$$

ибо в этом случае  $\varphi$  и  $\varphi'$  будут также сопряженные числа и потому

$$\varphi \varphi' = |\varphi|^2 > 0.$$

Но последнее равенство может иметь место только для действительных или чисто мнимых значений  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ .

Итак, уравнение (56) имеет только действительные и чисто мнимые корни. Так как первые нас не интересуют, то остается найти наименьшие по модулю чисто мнимые корни.

Полагая в уравнении (56):

$$\varepsilon = i\rho,$$

получим

$$\operatorname{ch} \rho - \rho \operatorname{sh} \rho = 0,$$

откуда

$$\rho = 1.199\,678\,640\,257\,734 \dots$$

Так как

$$\min \varphi(M) = |e_0| = \left| \frac{1}{\sin \varepsilon} \right| = \frac{1}{\operatorname{sh} \rho},$$

то искомый радиус сходимости разложений по степеням эксцентриситета равен

$$0.662\,743\,419\,349\,2 \dots$$

Таков теоретический предел сходимости полученных рядов. Свою практическую пригодность они теряют, конечно, гораздо раньше.

Примечание. Нами доказано, что разложения функций координат эллиптического движения в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии сходятся для всех значений  $M$  и для всех значений  $e$ , удовлетворяющих условию

$$0 \leq e < 1.$$

С другой стороны, мы только-что видели, что эти разложения, будучи расположены по степеням  $e$ , сходятся лишь в интервале

$$0 \leq e < 0.6627 \dots$$

Такое изменение области сходимости связано с тем обстоятельством, что функции Бесселя, разложенные по степеням эксцентриситета:

$$J_k(ke) = \frac{1}{k!} \left(\frac{ke}{2}\right)^k \left\{ 1 - \frac{k^2 e^2}{2(2k+2)} + \dots \right\}$$

представляются своими первыми членами тем менее точно, чем больше число  $k$ .

Например, отношение второго члена этого разложения к первому, равное по абсолютной величине

$$\frac{k^2 e^2}{2(2k+2)},$$

возрастает до бесконечности при возрастании  $k$ .

§ 85. Вычисление долготы и широты планеты.

Обозначим через  $w$  долготу планеты в орбите; эта долгота выражается следующим образом через употреблявшиеся ранее величины:

$$w = \pi + v = \Omega + \omega + v = \Omega + u. \quad (57)$$

Обозначим далее через  $l = \gamma Q$  и  $b = PQ$  (рис. 12) гелиоцентрическую долготу и широту планеты  $P$ .

Прямоугольный сферический треугольник  $\Omega PQ$  дает

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u \quad (58)$$

$$\sin b = \sin i \sin u. \quad (59)$$

Чтобы определить  $l$  из уравнения (58), воспользуемся формулой (43). Так как в настоящем случае

$$\beta = \frac{\cos i - 1}{\cos i + 1} = -\operatorname{tg}^2 \frac{i}{2},$$

то эта формула дает

$$l - \Omega = u - \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2u + \frac{1}{2 \operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4u - \dots$$

Следовательно, учитывая равенство (57), мы можем написать:

$$l = w + R,$$

где

$$R = -\frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2u + \frac{1}{\operatorname{arc} 2''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4u - \dots$$

Разность между гелиоцентрической долготой и долготой в орбите, равная  $R$ , называется приведением к эклиптике.

При постоянной наклонности орбиты  $i$  эта величина может быть удобно табулирована по аргументу  $u$ .

Точно так же может быть построена таблица, дающая по аргументу  $u$  гелиоцентрическую широту  $b$ .

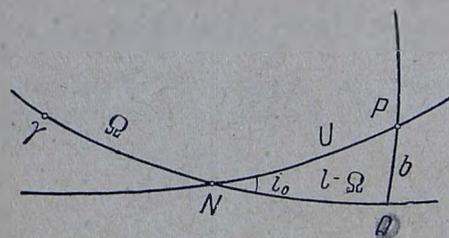


Рис. 12.

ГЛАВА XIII.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В РЯД.

§ 86. Введение. Разложение по степеням взаимной наклонности.

Для того чтобы дифференциальные уравнения, определяющие возмущения (§ 15), могли быть проинтегрированы в общем виде, а не только численно, необходимо иметь аналитические выражения пертурбационных функций

$$R = k^2 m' R_{0,1}, \quad R' = k^2 m R_{1,0},$$

где

$$R_{0,1} = \frac{1}{\Delta} \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3}$$

$$R_{1,0} = \frac{1}{\Delta} \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \quad (1)$$

через элементы орбит  $a, e, \dots, a', e', \dots$ . В этой главе мы рассмотрим главнейшие способы для получения таких выражений, имеющих неизбежно форму бесконечных рядов.

Прежде всего, займемся разложением в ряд величины

$$\Delta^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где через  $H$  обозначен угол между радиусами-векторами  $r$  и  $r'$ . Разложение этой величины, носящей название главной части пертурбационной функции, представляет наибольшие затруднения, тогда как разложение вторых частей выражений (1) выполняется сравнительно весьма просто.

Выражение радиуса-вектора через время и элементы орбиты было изучено в предыдущей главе. Посмотрим теперь, каким образом можно найти угол  $H$ .

Обратимся к рис. 11. Из треугольника  $\Omega \Omega_1 N$  мы можем найти стороны  $N, N_1$  и угол  $J$  (сохраняем обозначения § 68) либо при помощи формул (16) на стр. 185, либо при помощи следующих, являющихся следствиями основных теорем сферической тригонометрии:

$$\left. \begin{aligned} \sin J \sin N &= \sin i' \sin (\Omega' - \Omega) \\ \sin J \cos N &= \cos i' \sin i - \sin i' \cos i \cos (\Omega' - \Omega) \\ \cos J &= \cos i' \cos i + \sin i' \sin i \cos (\Omega' - \Omega) \\ \sin J \sin N_1 &= \sin i \sin (\Omega' - \Omega) \\ \sin J \cos N_1 &= -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos (\Omega' - \Omega), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

после чего долготы планет  $P$  и  $P'$  в их орбитах, которые мы будем обозначать через  $w$  и  $w'$ , можно будет представить так:

$$w = \tau + W, \quad w' = \tau' + W',$$

полагая

$$\tau = \Omega + N, \quad \tau' = \Omega' + N_1$$

и обозначая через  $W$  и  $W'$  долготы, считаемые от точки пересечения орбит. Следовательно, обращаясь к треугольнику  $NPP'$ , получим

$$\cos H = \cos W \cos W' + \sin W \sin W' \cos J$$

или

$$\cos H = \cos(W' - W) - 2\sigma^2 \sin W \sin W', \quad (4)$$

где

$$\sigma = \sin \frac{J}{2}.$$

Подставим это выражение  $\cos H$  в равенство (2) и напомним  $\Delta^{-1}$  следующим образом:

$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(W' - W)]^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{4\sigma^2 rr' \sin W \sin W'}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(W' - W)} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Ограничимся тем случаем, когда второй член в фигурных скобках остается всегда меньше некоторой правильной дроби. Так как этот член по абсолютной величине меньше, чем

$$\frac{4\sigma^2 rr'}{(r - r')^2},$$

то это условие будет выполняться, как нетрудно проверить, для всех больших планет солнечной системы. Действительно, наибольшая величина угла  $J$  между плоскостями орбит (имеющая место для Марса и Меркурия) равна всего  $12^\circ 30'$ , что дает  $\sigma^2 = 0.0118$ . С другой стороны, для каждой пары больших планет абсолютная величина разности  $r - r'$  остается больше некоторой величины, тем более значительной, чем больше произведение  $rr'$ . Случаем, когда указанное условие не выполняется, мы заниматься не будем.<sup>1</sup>

Итак, мы можем разложить второй множитель в ряд.

Применяя формулу бинома и полагая

$$\Delta_0 = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(W' - W)]^{\frac{1}{2}},$$

окончательно получим

$$\Delta^{-1} = \Delta_0^{-1} - rr' \Delta_0^{-3} \cdot 2\sigma^2 \sin W \sin W' + \left. \begin{aligned} &+ r^2 r'^2 \Delta_0^{-5} \cdot 6\sigma^4 \sin^2 W \sin^2 W' - \\ &- r^3 r'^3 \Delta_0^{-7} \cdot 20\sigma^6 \sin^3 W \sin^3 W' + \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

<sup>1</sup> Более общий метод разложения пертурбационной функции, одинаково применимый при любых наклонностях, но зато более сложный, был дан Тиссераном. См.:

F. Tisserand, *Traité de Mécanique Céleste*, I, Ch. XXVIII.

H. C. Plummer, *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, 1918, Cambridge.

O. Backlund, *Zur Entwicklung der Störungsfunktion*, Мемуары Академии наук, VII-e série, t. 32, 1884.

Подробные библиографические указания содержит статья:

H. v. Zeipel, *Entwicklung der Störungsfunktion*, *Encyclopädie der Mathem. Wissenschaften*, Bd. VI, 2, 1912.

Написанные члены достаточны для всех больших планет.

Обозначим через  $\Pi$  и  $\Pi'$  расстояния перигелиев планет  $P$  и  $P'$  от точки  $N$ , в которой пересекаются их орбиты. В таком случае

$$W = \Pi + v, \quad W' = \Pi' + v',$$

если через  $v$  и  $v'$  обозначить истинные аномалии.

Формула (5) дает разложение главной части пертурбационной функции по степеням взаимной наклонности орбит.

Обратимся теперь к рассмотрению вторых частей функций (1). Так как

$$xx' + yy' + zz' = rr' \cos H,$$

то вычисление этих вторых частей приводится к вычислению выражений

$$R_1 = \frac{r \cos H}{r'^2}, \quad R'_1 = \frac{r' \cos H}{r^2}.$$

Пользуясь равенством (4), получим:

$$\left. \begin{aligned} r'R_1 &= \frac{r}{r'} [\cos(W' - W) - \sigma^2 \cos(W' - W) + \sigma^2 \cos(W' + W)] \\ r'R'_1 &= \left(\frac{r'}{r}\right)^2 [\cos(W' - W) - \sigma^2 \cos(W' - W) + \sigma^2 \cos(W' + W)]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Чтобы от разложений пертурбационной функции, даваемых равенствами (5) и (6), перейти к нужному нам окончательному виду, надо еще выразить координаты планет  $r, v$  и  $r', v'$  через элементы орбит. Для достижения этой цели рассмотрим сначала тот частный случай, когда эксцентриситеты орбит равны нулю, т. е. когда движение планет  $P$  и  $P'$  происходит по круговым орбитам.

### § 87. Случай круговых орбит.

Если эксцентриситеты рассматриваемых планет равны нулю, то

$$r = a, \quad w = \lambda, \quad r' = a', \quad w' = \lambda',$$

где через  $\lambda$  и  $\lambda'$  обозначены средние долготы в орбите.

Полагая

$$L = \lambda - \tau, \quad L' = \lambda' - \tau',$$

вместо (5) будем иметь

$$\Delta^{-1} = I - II + III - IV + \dots, \quad (7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I &= \Delta_0^{-1} = [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(L' - L)]^{-\frac{1}{2}} \\ II &= aa' \Delta_0^{-3} \cdot 2\sigma^2 \sin L \sin L' \\ III &= a^2 a'^2 \Delta_0^{-5} \cdot 6\sigma^4 \sin^2 L \sin^2 L' \\ IV &= a^3 a'^3 \Delta_0^{-7} \cdot 20\sigma^6 \sin^3 L \sin^3 L' \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом проблема дальнейшего разложения приводится к разложению в тригонометрический ряд выражений вида

$$(aa')^{\frac{n-1}{2}} \Delta_0^{-n} = a'^{-1} a^{\frac{n-1}{2}} (1 - 2a \cos S + a^2)^{-\frac{n}{2}},$$

где  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$  и для краткости положено  $S = L' - L$ . Кроме того,

$$\alpha = \frac{a}{a'};$$

причем, условившись выбирать обозначения таким образом, чтобы было  $a < a'$ , в дальнейшем будем всегда считать, что  $\alpha < 1$ .

Мы можем положить

$$(1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iS, \quad (9)$$

так как стоящая слева функция очевидно разлагается в сходящийся ряд Фурье. Коэффициенты  $b_n^{(i)}$  носят название *коэффициентов Лапласа*.

Делая, далее,

$$c_n^{(i)} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)}, \quad (10)$$

получим:

$$(aa')^{\frac{n-1}{2}} \Delta_0^{-n} = a'^{-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^{(i)} \cos i(L' - L). \quad (11)$$

Отметим, что

$$b_n^{(-i)} = b_n^{(i)}, \quad c_n^{(-i)} = c_n^{(i)}.$$

При подстановке рядов (11) в формулу (7) нам придется каждый такой ряд умножить (для  $n = 3, 5, 7, \dots$ ) на одно из выражений

$$2 \sin L \sin L' = \cos(L' - L) - \cos(L' + L).$$

$$8 \sin^2 L \sin^2 L' = 2 - 2 \cos 2L - 2 \cos 2L' + \cos(2L' + 2L) + \cos(2L' - 2L).$$

$$32 \sin^3 L \sin^3 L' = 9 \cos(L' - L) - 9 \cos(L' + L) + 3 \cos(3L + L') - 3 \cos(3L - L') + 3 \cos(3L' + L) - 3 \cos(3L' - L) + \cos(3L' - 3L) - \cos(3L' + 3L).$$

Иначе говоря, придется находить произведения вида

$$\cos v \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L) = \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) + v] + \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) - v].$$

Но стоящие справа суммы равны, так как они переходят одна в другую при замене  $i$  через  $-i$ . Поэтому

$$\cos v \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L) = \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) + v].$$

Пользуясь этим правилом, легко найдем, что

$$a'II = \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i)} \cos (i+1)(L' - L) - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i)} \cos [(i+1)L' - (i-1)L],$$

или, заменяя в первой сумме  $i+1$  через  $i$ ,

$$a'II = \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i-1)} \cos i(L' - L) - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i)} \cos [(i+1)L' - (i-1)L].$$

Таким же точно способом вычисляем III, IV, ... После подстановки полученных выражений

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
237	14 сверху	+ 2c <sub>5</sub>	+ 2c <sub>5</sub> <sup>(i)</sup>	типографии

следующие выражения:

$$a'A_i = c_1^{(i)} - \sigma^2 c_3^{(i-1)} + \frac{3}{4} \sigma^4 (c_5^{(i-2)} + 2c_5^{(i)}) -$$

$$- \frac{5}{8} \sigma^6 (c_7^{(i-3)} + 9c_7^{(i-1)}) + \frac{35}{64} \sigma^8 (c_9^{(i-4)} + 16c_9^{(i-2)} + 18c_9^{(i)}) - \dots$$

$$a'B_i = \frac{1}{2} c_3^{(i)} - \frac{3}{4} \sigma^2 (c_5^{(i-1)} + c_5^{(i+1)}) + \frac{15}{16} \sigma^4 (c_7^{(i-2)} + 3c_7^{(i)} + c_7^{(i+2)}) -$$

$$- \frac{35}{32} \sigma^6 (c_9^{(i-3)} + 6c_9^{(i-1)} + 6c_9^{(i+1)} + c_9^{(i+3)}) + \dots$$

$$a'C_i = \frac{3}{8} c_5^{(i)} - \frac{15}{16} \sigma^2 (c_7^{(i-1)} + c_7^{(i+1)}) + \frac{35}{64} \sigma^4 (3c_9^{(i-2)} + 8c_9^{(i)} + 3c_9^{(i+2)}) - \dots$$

$$a'D_i = \frac{5}{16} c_7^{(i)} - \frac{35}{32} \sigma^2 (c_9^{(i-1)} + c_9^{(i+1)}) + \dots$$

$$a'E_i = \frac{35}{128} c_9^{(i)} - \dots$$

Формула (12) дает разложение главной части каждой из пертурбационных функций (1) в случае круговых орбит. Для фактического выполнения этого разложения надо только иметь возможность вычислить для рассматриваемого значения  $\alpha = a/a'$  коэффициенты  $c_n^{(i)}$  или, что то же, коэффициенты Лапласа. Как производится такое вычисление, будет показано в одном из следующих параграфов.

Обратимся теперь ко вторым частям  $R_1$  и  $R'_1$  пертурбационных функций

$$R = k^2 m' (\Delta^{-1} - R_1), \quad R' = k^2 m' (\Delta^{-1} - R'_1).$$

Формулы (6) дают:

$$\left. \begin{aligned} a'R_1 &= a(1 - \sigma^2) \cos(L' - L) + a\sigma^2 \cos(L' + L) \\ a'R'_1 &= \alpha^{-2}(1 - \sigma^2) \cos(L' - L) + \alpha^{-2}\sigma^2 \cos(L' + L). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$  и для краткости положено  $S = L' - L$ . Кроме того,

$$a = \frac{a}{a'};$$

..... условившись выбирать обозначения таким образом, чтобы было

Отметим, что

$$b_n^{(-i)} = b_n^{(i)}, \quad c_n^{(-i)} = c_n^{(i)}.$$

При подстановке рядов (11) в формулу (7) нам придется каждый такой ряд умножить (для  $n = 3, 5, 7, \dots$ ) на одно из выражений

$$2 \sin L \sin L' = \cos(L' - L) - \cos(L' + L).$$

$$8 \sin^2 L \sin^2 L' = 2 - 2 \cos 2L - 2 \cos 2L' + \cos(2L' + 2L) + \cos(2L' - 2L).$$

$$32 \sin^3 L \sin^3 L' = 9 \cos(L' - L) - 9 \cos(L' + L) + 3 \cos(3L + L') - 3 \cos(3L - L') + 3 \cos(3L' + L) - 3 \cos(3L' - L) + \cos(3L' - 3L) - \cos(3L' + 3L).$$

Иначе говоря, придется находить произведения вида

$$\cos v \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L) = \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) + v] + \frac{1}{2} \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) - v].$$

Но стоящие справа суммы равны, так как они переходят одна в другую при замене  $i$  через  $-i$ . Поэтому

$$\cos v \sum c_n^{(i)} \cos i(L' - L) = \sum c_n^{(i)} \cos [i(L' - L) + v].$$

Пользуясь этим правилом, легко найдем, что

$$a'' = \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i)} \cos (i+1)(L' - L) - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i)} \cos [(i+1)L' - (i-1)L],$$

или, заменяя в первой сумме  $i+1$  через  $i$ ,

$$a'' = \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i-1)} \cos i(L' - L) - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i)} \cos [(i+1)L' - (i-1)L].$$

Таким же точно способом вычисляем III, IV, ... После подстановки полученных выражений в равенство (7) и приведения подобных членов будем иметь окончательно:

$$a' \Delta^{-1} = \frac{1}{2} \sum a' A_i \cos (iL' - iL) + \sigma^2 \sum a' B_i \cos [(i+1)L' - (i-1)L] + \sigma^4 \sum a' C_i \cos [(i+2)L' - (i-2)L] + \sigma^6 \sum a' D_i \cos [(i+3)L' - (i-3)L] + \sigma^8 \sum a' E_i \cos [(i+4)L' - (i-4)L] + \dots \quad (12)$$

причем коэффициенты этих рядов имеют следующие выражения:

$$a' A_i = c_1^{(i)} - \sigma^2 c_3^{(i-1)} + \frac{3}{4} \sigma^4 (c_5^{(i-2)} + 2 c_5^{(i)}) -$$

$$- \frac{5}{8} \sigma^6 (c_7^{(i-3)} + 9 c_7^{(i-1)}) + \frac{35}{64} \sigma^8 (c_9^{(i-4)} + 16 c_9^{(i-2)} + 18 c_9^{(i)}) - \dots$$

$$a' B_i = \frac{1}{2} c_3^{(i)} - \frac{3}{4} \sigma^2 (c_5^{(i-1)} + c_5^{(i+1)}) + \frac{15}{16} \sigma^4 (c_7^{(i-2)} + 3 c_7^{(i)} + c_7^{(i+2)}) -$$

$$- \frac{35}{32} \sigma^6 (c_9^{(i-3)} + 6 c_9^{(i-1)} + 6 c_9^{(i+1)} + c_9^{(i+3)}) + \dots$$

$$a' C_i = \frac{3}{8} c_5^{(i)} - \frac{15}{16} \sigma^2 (c_7^{(i-1)} + c_7^{(i+1)}) + \frac{35}{64} \sigma^4 (3 c_9^{(i-2)} + 8 c_9^{(i)} + 3 c_9^{(i+2)}) - \dots$$

$$a' D_i = \frac{5}{16} c_7^{(i)} - \frac{35}{32} \sigma^2 (c_9^{(i-1)} + c_9^{(i+1)}) + \dots$$

$$a' E_i = \frac{35}{128} c_9^{(i)} - \dots$$

Формула (12) дает разложение главной части каждой из пертурбационных функций (1) в случае круговых орбит. Для фактического выполнения этого разложения надо только иметь возможность вычислить для рассматриваемого значения  $a = a/a'$  коэффициенты  $c_n^{(i)}$  или, что то же, коэффициенты Лапласа. Как производится такое вычисление, будет показано в одном из следующих параграфов.

Обратимся теперь ко вторым частям  $R_1$  и  $R'_1$  пертурбационных функций

$$R = k^2 m' (\Delta^{-1} - R_1), \quad R' = k^2 m' (\Delta^{-1} - R'_1).$$

Формулы (6) дают:

$$\left. \begin{aligned} a' R_1 &= a (1 - \sigma^2) \cos(L' - L) + a \sigma^2 \cos(L' + L) \\ a' R'_1 &= a^{-2} (1 - \sigma^2) \cos(L' - L) + a^{-2} \sigma^2 \cos(L' + L). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Сопоставляя эти выражения с только-что приведенными выражениями коэффициентов ряда (12), мы видим, что влияние второго члена для функции  $R$  будет полностью учтено, если в разложении (12) мы заменим

$$\begin{aligned} a'A_1 & \text{ через } a'A_1 - \alpha(1 - \sigma^2) \\ a'A_{-1} & \text{ " } a'A_{-1} - \alpha(1 - \sigma^2) \\ a'B_0 & \text{ " } a'B_0 - \alpha. \end{aligned}$$

Точно так же, для получения  $R'$  достаточно в разложении (12) заменить

$$\begin{aligned} a'A_1 & \text{ через } a'A_1 - \alpha^{-2}(1 - \sigma^2) \\ a'A_{-1} & \text{ " } a'A_{-1} - \alpha^{-2}(1 - \sigma^2) \\ a'B_0 & \text{ " } a'B_0 - \alpha^{-2}. \end{aligned}$$

Таким образом, проблема разложения пертурбационной функции для случая круговых орбит нами полностью разрешена.

Примечание. Важно отметить, что вторая часть пертурбационной функции состоит, как показывают выражения (13), исключительно из периодических членов. Таким образом, других вековых членов, кроме тех, которые даются первой из сумм разложения (12) при  $i=0$ , пертурбационная функция не содержит.

### § 88. Разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов. Метод Ньюкома.

В § 86 мы видели, что пертурбационная функция  $R$  является функцией  $r, r', W = \Pi + v, W' = \Pi' + v'$ , так что можно положить

$$R = f(r, r', W, W').$$

В предыдущем параграфе мы сделали  $e=0, e'=0$ , вследствие чего  $r, r', W, W'$  обратились соответственно в  $a, a'$  и

$$L = \Pi + M, \quad L' = \Pi' + M',$$

где  $M$  и  $M'$  — средние аномалии рассматриваемых планет. Для соответствующей этому случаю функции  $f(a, a', L, L')$  нами было дано, при помощи формул (12) и (13), развернутое выражение.

Так как эксцентриситеты  $e$  и  $e'$  мы считаем малыми величинами, то выражение  $f(r, r', W, W')$  целесообразно разложить в ряд по степеням  $e$  и  $e'$ .

Чтобы облегчить применение формулы Тэйлора, лучше рассматривать  $R$  как функцию не  $r$  и  $r'$ , а  $\lg r$  и  $\lg r'$ , ибо переход от  $\lg a$  к  $\lg r$  осуществляется путем прибавления некоторого приращения, тогда как переход от  $a$  к  $r$  осуществляется при помощи умножения  $a$  на некоторый поправочный множитель.

Итак, положим, с одной стороны:

$$R = F(\lg r, \lg r', W, W'),$$

с другой —

$$\begin{aligned} \lg r &= \lg a + \rho, & \lg r' &= \lg a' + \rho' \\ W &= L + f, & W' &= L' + f', \end{aligned}$$

где через

$$f = v - M, \quad f' = v' - M'$$

обозначены уравнения центра для рассматриваемых планет.

В § 82 было показано, что  $\rho$  и  $f$  разлагаются по степеням  $e$  в ряды следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -e \cos M + e^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos 2M \right) + e^3 \left( \frac{3}{8} \cos M - \frac{17}{24} \cos 3M \right) + \dots \\ f &= e \cdot 2 \sin M + e^2 \cdot \frac{5}{4} \sin 2M + e^3 \left( -\frac{1}{4} \sin M + \frac{13}{12} \sin 3M \right) + \dots \end{aligned} \right\} (14)$$

Стоящая перед нами задача заключается в разложении выражения

$$R = F(\lg a + \rho, \lg a' + \rho', L + f, L' + f')$$

по степеням  $e$  и  $e'$ . Воспользуемся для этого формулой Тэйлора, которую, как известно, для функции любого числа независимых переменных  $u, v, \dots$  можно представить в следующей символической форме:

$$\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v, \dots) = \exp \left( \Delta u \frac{\partial}{\partial u} + \Delta v \frac{\partial}{\partial v} + \dots \right) \varphi(u, v, \dots).$$

Поэтому, вводя для сокращения письма символы

$$\begin{aligned} D &\equiv \frac{\partial}{\partial(\lg a)}, & D' &\equiv \frac{\partial}{\partial(\lg a')} \\ D_1 &\equiv \frac{\partial}{\partial L}, & D'_1 &\equiv \frac{\partial}{\partial L'}, \end{aligned}$$

будем иметь такое символическое равенство:

$$R = \exp(\rho D + \rho' D' + f D_1 + f' D'_1) F(\lg a, \lg a', L, L').$$

Так как  $\exp(\rho D + \rho' D' + f D_1 + f' D'_1)$  есть произведение двух множителей:

$$\exp(\rho D + f D_1) \text{ и } \exp(\rho' D' + f' D'_1), \quad (15)$$

то рассмотрим символическое умножение функции

$$F(\lg a, \lg a', L, L') \quad (16)$$

на каждый из этих множителей отдельно.

Полагая

$$\lambda = \exp(\sqrt{-1} L), \quad \lambda' = \exp(\sqrt{-1} L'),$$

мы можем функцию (16), представляемую формулами (12) и (13), написать так:

$$\sum_{s, s'} H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'}.$$

Общий член этого ряда

$$R^0 = H(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'}$$

умножим символически на первый из множителей (15). Так как

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial L} = \sqrt{-1} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad D_1 R^0 = \sqrt{-1} s R^0,$$

то

$$\exp(\rho D_1 + f D_1) R^0 = \exp(\rho D + s f \sqrt{-1}) R^0. \quad (17)$$

Обращаясь теперь к равенствам (14), мы видим, что можно положить

$$\exp(\rho D + sf\sqrt{-1}) = k_0 + k_1 e + k_2 e^2 + \dots, \quad (18)$$

где  $k_0, k_1, \dots$  — функции  $D, s$  и  $M$ .

Положим, далее,

$$\mu = \exp(\sqrt{-1} M)$$

и напишем формулы (14) так:

$$\rho = e \left( -\frac{1}{2} \mu - \frac{1}{2} \mu^{-1} \right) + e^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \mu^2 - \frac{3}{8} \mu^{-2} \right) + \dots$$

$$f\sqrt{-1} = e(\mu - \mu^{-1}) + \frac{5}{8} e^3 (\mu^3 - \mu^{-3}) +$$

$$+ \frac{1}{8} e^5 \left( -\mu + \mu^{-1} + \frac{13}{3} \mu^3 - \frac{13}{3} \mu^{-3} \right) + \dots$$

Подставив эти выражения в равенство (18), получим:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= 1 \\ k_1 &= \Pi_1^1 \mu + \Pi_{-1}^1 \mu^{-1} \\ k_2 &= \Pi_2^2 \mu^2 + \Pi_0^2 + \Pi_{-2}^2 \mu^{-2} \\ &\dots \\ k_n &= \Pi_n^n \mu^n + \Pi_{n-2}^n \mu^{n-2} + \dots + \Pi_{-n}^n \mu^{-n}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где через  $\Pi_m^n = \Pi_m^n(D, s)$  обозначен полином  $n$ -ой степени относительно  $s$  и  $D$ . Эти символические полиномы мы будем называть операторами.

Отметим, что, как нетрудно усмотреть,

$$\Pi_m^n(D, -s) = \Pi_{-m}^n(D, s).$$

Итак, член разложения (17), содержащий множитель  $e^n$ , будет иметь вид:

$$R_n^0 = e^n \sum_{m=-n}^{m=n} P_m^n(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} \mu^m, \quad (20)$$

где  $m = n, n-2, n-4, \dots, -n$ , причем для краткости положено

$$P_m^n(s, s') = \Pi_m^n H(s, s').$$

Умножим теперь выражение (20) на второй из символических множителей (15). Обозначая соответствующий символический полином через  $\Pi_{0,m'}^{0,n'}$ , получим член разложения функции (20), имеющий множитель  $e^{n'}$ , в таком виде:

$$R_{n,n'}^0 = e^n e^{n'} \sum_{m'=-n'}^{m'=n'} \Pi_{0,m'}^{0,n'} \sum_{m=-n}^{m=n} P_m^n(s, s') \lambda^s \lambda'^{s'} \mu^m \mu'^{m'}. \quad (21)$$

Результат действия на исходный коэффициент  $H(s, S')$  сначала операторов  $\Pi_m^n$ , затем  $\Pi_{0,m'}^{0,n'}$ , может быть представлен как результат действия сложных операторов

$$\Pi_{m,m'}^{n,n'}(D, s, s') \equiv \Pi_m^n(D, s) \cdot \Pi_{0,m'}^{0,n'}(D, s').$$

Полагая для краткости

$$\Pi_{m,m'}^{n,n'} H(s, s') = P_{m,m'}^{n,n'}(s, s')$$

и выделяя в выражении (21) действительную часть, окончательно получим разложение пертурбационной функции в следующем виде:

$$R = \sum e^n e^{n'} P_{m,m'}^{n,n'}(s, s') \cos(sL + s'L' + mM + m'M'), \quad (22)$$

где индексы  $n, n'$  меняются от 0 до  $+\infty$ , а индексы  $s, s', m, m'$  — от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Коэффициенты  $P$  зависят от больших полуосей  $a, a'$  и от взаимной наклонности орбит  $J$ .

Равенства (12) и (13) показывают, что сумма  $s + s'$  всегда равна четному числу. Кроме того, учитывая формулы (14), легко видеть, что каждая из разностей  $n - |m|, n' - |m'|$  также равна не отрицательному четному числу.

Итак, разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов приводится, в конечном счете, к вычислению операторов. Для начальных значений индексов  $n, m, n', m'$  вычисление операторов выполняется просто, но при возрастании этих индексов сложность выкладок увеличивается крайне быстро. В этом случае для нахождения операторов используются многочисленные рекуррентные соотношения, существующие между ними.<sup>1</sup>

В случае, когда  $e = e' = 0$ , вековые члены в разложении пертурбационной функции получаются, как мы видели в конце предыдущего параграфа, исключительно от разложения главной части  $\Delta^{-1}$ . Рассматривая только-что изложенный способ для получения разложения по степеням эксцентриситетов, не трудно видеть, что применение операторов к членам (13) может дать только периодические члены. Это позволяет формулировать следующую теорему:

**Теорема.** Вековые члены в разложении пертурбационной функции в тригонометрический ряд получают лишь при разложении главной части.

В заключение отметим, что выполнение разложения (22) требует знания не только коэффициентов (10), но и их производных по  $\lg a$ . Действительно, так как  $\alpha = a/a'$ , то

$$D = \frac{\partial}{\partial(\lg a)} = a \frac{\partial}{\partial a} = a \frac{\partial \alpha}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial(\lg \alpha)}.$$

Поэтому мы можем считать  $D$  символом дифференцирования по  $\lg \alpha$  и положить

$$D^k c_n^{(i)} = \frac{d^k c_n^{(i)}}{(d \lg \alpha)^k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

<sup>1</sup> Методы, предложенные для вычисления операторов, подробно рассмотрены в монографии: Б. А. Орлов, Разложение пертурбационной функции по методу Ньюкома. Труды Астрономической обсерватории Ленинградского университета, 6, 1936, 82—125.

Примечание. Для всякой однородной функции  $\Phi(a, a')$ , порядок которой равен  $-1$ , теорема Эйлера дает

$$a \frac{\partial \Phi}{\partial a} + a' \frac{\partial \Phi}{\partial a'} = -\Phi,$$

или

$$D\Phi + D'\Phi = -\Phi.$$

Поэтому для таких функций мы имеем символическое равенство

$$D + D' = -1,$$

из которого следует

$$\Pi_{0,m'}^{0,n'} = \Pi_{m'}^{n'}(-D - 1, s').$$

Таким образом вычисление всех операторов

$$\Pi_{m,m'}^{n,n'}(D, s, s') = \Pi_m^n(D, s) \Pi_{m'}^{n'}(-D - 1, s')$$

приводится к вычислению простых операторов  $\Pi_m^n$ .

### § 89. Окончательная форма разложения пертурбационной функции.

В предыдущих параграфах мы познакомились с методами, дающими возможность получить любое число членов разложения пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов и взаимной наклонности орбит.

Это разложение, как было показано, имеет следующую форму:

$$R = \Sigma K e^h e^{h'} \sigma^{2f} \cos(sL + s'L' + mM + m'M'), \quad (23)$$

где  $h, h'$  и  $f$  принимают значения  $0, 1, 2, \dots$ , тогда как индексы  $s, s', m$  и  $m'$  принимают значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , причем сумма  $s + s'$  должна всегда равняться четному числу; наконец, разности  $h - |m|, h' - |m'|, 2f - |s + s'|$  могут равняться лишь четным числам  $0, 2, 4, \dots$ .

Коэффициенты  $K$ , зависящие от индексов  $h, h', f, s, s', m, m'$ , являются функциями больших полуосей орбит  $a$  и  $a'$ .

Отметим, что степень каждого члена разложения (23), т. е. сумма  $h + h' + 2f$ , равна или превосходит на четное число величину

$$|s + s'| + |m| + |m'|.$$

Разложение (23), представляющее пертурбационную функцию в виде тригонометрического ряда с четырьмя аргументами, является простейшим из возможных представлений этой функции, как явной функции времени.

Для более удобного интегрирования уравнений Лагранжа, определяющих оскулирующие элементы (§ 13), разложение (23) целесообразно написать несколько иначе. А именно, замечая, что

$$M = L - \Pi, \quad M' = L' - \Pi',$$

этому разложению можно придать такой вид:

$$R = \Sigma K e^h e^{h'} \sigma^{2f} \cos(pL + p'L' + q\Pi + q'\Pi'). \quad (24)$$

Индексы  $p, p', q, q'$  принимают все целые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , причем разности

$$h - |q|, \quad h' - |q'|, \quad 2f - |p + p' + q + q'|$$

суть четные, не отрицательные числа.

Таким образом, мы можем написать

$$h + h' + 2f \geq |p + p' + q + q'| + |q| + |q'|.$$

Откуда следует, что

$$h + h' + 2f \geq |p + p'|,$$

причем разность между левой и правой частями этого неравенства всегда равняется, как нетрудно видеть, четному числу.

Итак, степень каждого члена разложения (24) либо равна  $|p + p'|$ , либо превосходит эту величину на четное число.

Разложения (23) или (24) не могут быть непосредственно использованы при интегрировании уравнений Лагранжа, так как эти разложения вместо элементов  $i, \Omega, \pi, i', \dots$ , фигурирующих в дифференциальных уравнениях, содержат величины  $\Pi, \Pi', J$ , определяющие взаимное расположение орбит.

Чтобы получить  $R$  в виде явной функции элементов орбит, заметим, что

$$\begin{aligned} \Pi &= \pi - \Omega - N, & \Pi' &= \pi' - \Omega' - N' \\ L &= \Pi + M = nt + \varepsilon - \Omega - N, & L' &= n't + \varepsilon' - \Omega' - N'. \end{aligned}$$

Поэтому аргумент разложения (24) может быть представлен в таком виде:

$$\begin{aligned} &p(nt + \varepsilon) + p'(n't + \varepsilon') + q\pi + q'\pi' - (p + q)\Omega - \\ &\quad - (p' + q')\Omega' - (p + q)N - (p' + q')N', \end{aligned}$$

или

$$D + \frac{1}{2} \beta(N + N') + \frac{1}{2} \gamma(N - N'), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} D &= p(nt + \varepsilon) + p'(n't + \varepsilon') + q\pi + q'\pi' - (p + q)\Omega - (p' + q')\Omega' \\ \beta &= -p - q - p' - q', \quad \gamma = -p - q + p' + q'. \end{aligned}$$

Таким образом, при разворачивании косинусов аргументов вида (25) мы получим при выражениях, не зависящих от  $\Pi, \Pi', J$ , множители следующих типов:

$$\sigma^{2f} \frac{\sin}{\cos} \frac{1}{2} \beta(N + N'), \quad \sigma^{2f} \frac{\sin}{\cos} \frac{1}{2} \gamma(N - N'), \quad (26)$$

где  $\sigma = \sin \frac{1}{2} J$ . Чтобы эти величины выразить через элементы, обратимся к формулам (16) на стр. 185, из которых следует, если воспользоваться формулами Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} J \cdot \exp \frac{1}{2} (N + N') \sqrt{-1} &= \sin \frac{i'}{2} \cos \frac{i}{2} \cdot \exp \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sqrt{-1} - \\ &\quad - \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i'}{2} \exp \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sqrt{-1} \\ \cos \frac{1}{2} J \cdot \exp \frac{1}{2} (N - N') \sqrt{-1} &= \cos \frac{i'}{2} \cos \frac{i}{2} \cdot \exp \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega) \sqrt{-1} + \\ &\quad + \sin \frac{i'}{2} \sin \frac{i}{2} \cdot \exp \frac{1}{2} (\Omega - \Omega') \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

После возведения этих равенств в степень  $\beta$  и обратного перехода от показательных функций к тригонометрическим, будем иметь выражения величин:

$$\sigma^\beta \frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \beta} (N + N'), \quad (1 - \sigma^2)^{\frac{1}{2} \beta} \frac{\sin \frac{1}{2} \beta}{\cos \frac{1}{2} \beta} (N - N') \quad (28)$$

через элементы орбит.

С другой стороны, те же самые формулы (16) на стр. 185, после возведения в квадрат и попарного сложения, дают:

$$\sigma^2 = \sin^2 \frac{i'}{2} \cos^2 \frac{i}{2} + \sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{i'}{2} - \frac{1}{2} \sin i \sin i' \cos(\Omega' - \Omega)$$

$$1 - \sigma^2 = \cos^2 \frac{i'}{2} \cos^2 \frac{i}{2} + \sin^2 \frac{i'}{2} \sin^2 \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \sin i \sin i' \cos(\Omega' - \Omega).$$

Возводя эти равенства соответственно в степени  $f - \frac{1}{2} \beta$  и  $-\frac{1}{2} \beta$  и перемножая их почленно с выражениями, полученными для величин (28), будем иметь окончательные выражения для величин (26).

Таким образом, пертурбационная функция  $R$  получит следующую форму:

$$R = \sum A e^h e^{h'} \left( \sin \frac{i}{2} \right)^k \left( \sin \frac{i'}{2} \right)^{k'} \cos D_0, \quad (29)$$

где

$$D_0 = p(nt + \varepsilon) + p'(n't + \varepsilon') + q\pi + q'\pi' + s\Omega + s'\Omega'.$$

Коэффициент  $A$  зависит только от  $a$  и  $a'$ . Легко видеть, что индексы  $p, p', \dots, s'$  в аргументе  $D_0$  должны всегда удовлетворять соотношению

$$p + p' + q + q' + s + s' = 0.$$

В самом деле, пертурбационная функция  $R$  не зависит, очевидно, от начала счета долгот. Но если начало счета долгот сместить на угол  $\Delta$ , то аргумент  $D_0$  изменится на  $\Delta(p + p' + q + q' + s + s')$ ; поскольку  $R$  не зависит от  $\Delta$ , эта величина должна равняться нулю.

Отсюда следует, что тригонометрический ряд (29) расположен не по шести, а только по пяти индексам.

Так как фактическое выполнение разложения (29) представляет большие трудности, то на практике оно никогда не применяется. Созданные Лаверрье теории движения больших планет, представляющие наиболее обширное применение способа вариации элементов при аналитическом определении возмущений, базируются на разложении, занимающем как бы промежуточное положение между формулами (24) и (29).

Лаверрье вводит, вместо долгот  $L$  и  $L'$ , считаемых от точки пересечения орбит, долготы в орбитах (удерживаем его обозначения):

$$l = nt + \varepsilon = L + \tau, \quad l' = n't + \varepsilon' = L' + \tau'$$

и полагает

$$\lambda = l + \tau' - \tau, \quad (30)$$

что дает

$$L = \lambda - \tau', \quad L' = l' - \tau'. \quad (31)$$

Точно так же, замечая, что долготы перигелиев равны

$$\pi = \tau + \Pi, \quad \pi' = \tau' + \Pi'$$

и полагая

$$\omega = \pi + \tau' - \tau = \Pi + \tau', \quad (32)$$

получим

$$\Pi = \omega - \tau', \quad \Pi' = \pi' - \tau'. \quad (33)$$

Подставляя выражения (31) и (33) в разложение (24), окончательно будем иметь следующую форму, являющуюся основой всех работ Лаверрье:

$$R = \sum N e^h e^{h'} \sigma^{2f} \cos(j\lambda + j'l' + k\omega + k'\pi' - 2g\tau'). \quad (34)$$

Легко видеть, что индексы  $j, j', k, k', 2g$  связаны соотношением

$$j + j' + k + k' - 2g = 0,$$

являющимся следствием независимости  $R$  от начала счета долгот.

Величины  $\lambda$  и  $\omega$ , определяемые равенствами (30) и (32), отличаются от  $l$  и  $\pi$  на весьма малую величину  $\tau' - \tau$ .

Можно показать (мы не будем на этом останавливаться), что

$$\operatorname{tg} \frac{\tau' - \tau}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \sin(\Omega' - \Omega)}{1 + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \cos(\Omega' - \Omega)},$$

откуда

$$\frac{1}{2}(\tau' - \tau) = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{i'}{2} \sin(\Omega' - \Omega) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{i'}{2} \sin 2(\Omega' - \Omega) + \dots \quad (35)$$

Для того чтобы пользоваться разложением (34), Лаверрье был вынужден соответствующим образом преобразовать уравнения Лагранжа (§ 97).

### § 90. Начальные члены разложения пертурбационной функции.

Фактическое выполнение разложения (24) заключается прежде всего в выражении коэффициентов  $K$  через функции  $c_k^{(i)}$  отношения  $a = a/a'$ , введенные в § 87, а затем в вычислении этих функций для данного значения  $a$ . Эту последнюю задачу мы рассмотрим в следующей главе, а сейчас остановимся на получении коэффициентов  $K$  в явном виде.

Если ограничиться членами 2-го порядка относительно  $e, e'$  и  $\sigma$ , то операции, указанные в предыдущем параграфе, выполняются очень просто и дают, как не трудно проверить, следующее разложение главной части пертурбационной функции:

$$\begin{aligned} a' \Delta^{-1} = & \sum \left[ \frac{1}{2} c_1^{(i)} - \frac{1}{2} \sigma^2 c_3^{(i-1)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) (-4i^2 + D + D^2) c_1^{(i)} \right] \cos V + \\ & + \frac{1}{2} e \sum (-2i - D) c_1^{(i)} \cos(V + M) + \\ & + \frac{1}{2} e' \sum (2i + 1 + D) c_1^{(i)} \cos(V + M') + \\ & + \frac{1}{8} e^2 \sum [4i^2 - 5i + (4i - 3) D + D^2] c_1^{(i)} \cos(V + 2M) + \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} ee' \sum (4i^2 + 2i - D - D^2) c_1^{(i)} \cos(V - M + M') + \\
& + \frac{1}{4} ee' \sum [-4i^2 - 2i + (-4i - 1)D - D^2] c_1^{(i)} \cos(V + M + M') + \\
& + \frac{1}{8} e'^2 \sum [4i^2 + 9i + 4 + (4i + 5)D + D^2] c_1^{(i)} \cos(V + 2M') + \\
& + \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(i-1)} \cos(V + 2L) + \dots
\end{aligned}$$

Здесь для краткости положено

$$V = i(L' - L), \quad D = \frac{\partial}{\partial (\lg \alpha)};$$

суммирование ведется по значениям  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Второй член пертурбационной функции можно учесть при помощи правила, указанного в конце § 87. Впрочем, разложение этого члена в ряд может быть легко написано сразу, пользуясь формулой (36).

В самом деле, если считать эксцентриситеты  $e$  и  $e'$  равными нулю, то вторая часть пертурбационной функции

$$R_1 = \frac{r \cos H}{r'^2}$$

будет определяться, в силу первой из формул (13), равенством

$$a'R_1 = \alpha(1 - \sigma^2) \cos(L' - L) + \alpha\sigma^2 \cos(L' + L).$$

Сравнивая это выражение с (12), мы видим, что его можно получить как частный случай выражения (12), если в этом последнем взять

$$c_1^{(1)} = c_1^{(-1)} = \alpha, \quad c_3^{(0)} = 2\alpha,$$

а все остальные величины  $c_k^{(i)}$  заменить нулями.

Таким образом, применяя к этому частному случаю формулу (36), найдем, с точностью до членов второй степени относительно  $e, e', \sigma$ :

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1} a' R_1 = & \left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e'^2 - \sigma^2\right) \cos(L' - L) - \\
& - \frac{3}{2} e \cos(L' - \Pi) + \frac{1}{2} e \cos(L' - 2L + \Pi) + \\
& + 2e' \cos(2L' - L - \Pi') + \\
& + \frac{1}{8} e^2 \cos(L' + L - 2\Pi) + \frac{3}{8} e^2 \cos(L' - 3L + 2\Pi) + \\
& + ee' \cos(2L' - 2L - \Pi' + \Pi) - 3ee' \cos(2L' - \Pi' - \Pi) + \\
& + \frac{1}{8} e'^2 \cos(L' + L - 2\Pi') + \frac{27}{8} e'^2 \cos(3L' - L - 2\Pi') + \\
& + \sigma^2 \cos(L' + L) + \dots
\end{aligned}$$

Точно так же вторая из формул (13), дающая

$$a'R_1 = a' \frac{r' \cos H}{r^2} = \alpha^{-2} (1 - \sigma^2) \cos(L' - L) + \alpha^{-2} \sigma^2 \cos(L' + L),$$

показывает, что вторая часть пертурбационной функции  $R'$  получается из выражения (12) при

$$c_1^{(1)} = c_1^{(-1)} = \alpha^{-2}, \quad c_3^{(0)} = 2\alpha^{-2}, \quad c_k^{(i)} = 0.$$

Поэтому, пользуясь опять формулой (24), будем иметь:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 a' R_1 = & \left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e'^2 - \sigma^2\right) \cos(L' - L) + \\
& + 2e \cos(L' - 2L + \Pi) - \\
& - \frac{3}{2} e' \cos(L - \Pi') + \frac{1}{2} e' \cos(2L' - L - \Pi') + \\
& + \frac{1}{8} e^2 \cos(L' + L - 2\Pi) + \frac{27}{8} e^2 \cos(L' - 3L + 2\Pi) + \\
& + ee' \cos(2L' - 2L - \Pi' + \Pi) - 3ee' \cos(2L' - \Pi' - \Pi) + \\
& + \frac{1}{8} e'^2 \cos(L' + L - 2\Pi') + \frac{3}{8} e'^2 \cos(3L' - L - 2\Pi') + \\
& + \sigma^2 \cos(L' + L) + \dots
\end{aligned}$$

Таково разложение пертурбационной функции в том случае, когда отбрасываются члены 3-й степени относительно эксцентриситетов и наклонностей. С такую точностью это разложение было получено еще Лагранжем и Лапласом.

Но для того, чтобы получить возмущенные координаты больших планет с точностью, соответствующей точности современных наблюдений, надо выполнить разложение пертурбационной функции до членов 7-й степени включительно. Практическую выполнимость подобного разложения доказал Буркхард (J. C. Burckhardt). Его вычисления были исправлены и дополнены Бинэ (J. Binet) и Понтекуланом (G. de Pontécoulant), в результате чего было получено разложение, охватывающее значительную часть членов 6-й степени. Полное разложение до 6-й степени включительно дал впервые Пирс (V. Peirce) в 1849 г. Наконец, в 1855 г. Леверрье опубликовал<sup>1</sup> разложение до 7-й степени включительно. Данные им явные выражения всех членов до этого предела не потеряли своего значения и в настоящее время. Бокэ,<sup>2</sup> сохраняя метод и обозначения Леверрье, вычислил все члены 8-й степени.

Для получения разложения пертурбационной функции в форме (23) наиболее удобным является способ Ньюкома,<sup>3</sup> основанный на употреблении операторов (§ 88).

Примечание. Пользуясь указанными в предыдущей главе формулами, легко получить разложение второй части пертурбационной функции в общем виде в коэффициентами, выраженными через бесселевы функции.

### § 91. Численные методы разложения пертурбационной функции.

В предыдущих параграфах нами были изучены методы для получения пертурбационной функции в виде ряда, каждый член которого есть явная функция элементов орбит рассматриваемых планет и их средних аномалий  $M$  и  $M'$ .

<sup>1</sup> Annales de l'Observatoire de Paris, t. 1, 1855.

<sup>2</sup> F. Boquet, Développement de la fonction perturbatrice, Annales de l'Observatoire de Paris, t. 19, 1885.

<sup>3</sup> S. Newcomb, A Development of the perturbative function etc., Astronomical Papers, vol. V, 1895.

Такая форма разложения дает, конечно, наиболее полное решение задачи, так как позволяет представить возмущения в виде явных функций элементов орбиты. Методы для получения разложений этого вида, в которых все элементы сохраняют буквенные значения (за исключением лишь больших полуосей, придание численных значений которым необходимо для возможности вычисления коэффициентов Лапласа), носят название аналитических методов разложения пертурбационной функции.

Так как аналитические методы разложения дают пертурбационную функцию в виде рядов, расположенных по степеням эксцентриситетов, то они практически применимы лишь для очень малых значений эксцентриситетов (не больших, примерно, чем 0.15—0.20). Если же это условие не соблюдается, то, хотя разложение пертурбационной функции может сходиться достаточно быстро, его практически невозможно получить при помощи аналитических методов (ср. примечание к § 84). В подобных случаях приходится прибегать к численным методам разложения, в которых элементы с самого начала получают численные значения.

Если элементам орбит рассматриваемых планет дать численные значения, то пертурбационная функция представится рядом:

$$R = \sum_{i, i'} \{A_{i, i'} \cos(iM + i'M') + B_{i, i'} \sin(iM + i'M')\}, \quad (37)$$

расположенным по кратным средних аномалий  $M$  и  $M'$ .

Постоянные коэффициенты  $A$  и  $B$  этого ряда выражаются следующими, хорошо известными формулами:

$$A_{i, i'} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R \cos(iM + i'M') dM dM',$$

$$B_{i, i'} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R \sin(iM + i'M') dM dM'.$$

Чтобы найти эти коэффициенты, пользуются приближенными формулами, получающимися путем замены каждого интеграла суммой значений подинтегральной функции для равноотстоящих значений аргумента. Эти формулы могут быть соединены в одну следующим образом:

$$A_{i, i'} + \sqrt{-1} B_{i, i'} = \frac{1}{mm'} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k'=0}^{m'-1} R_{k, k'} \exp\left\{-\sqrt{-1} \left(ik \frac{2\pi}{m} + i'k' \frac{2\pi}{m'}\right)\right\},$$

где  $R_{k, k'}$  есть величина функции  $R$  для  $M = k \frac{2\pi}{m}$ ,  $M' = k' \frac{2\pi}{m'}$ .

Таким образом, вычисляя функцию  $R$  для достаточно большого числа частных значений средних аномалий, можно найти коэффициенты разложения (37) с любой точностью.

Конечно, разложение вида (37) с численными коэффициентами не может служить для нахождения производных пертурбационной функции по элементам. Поэтому таким разложением нельзя пользоваться для вычисления возмущений элементов по формулам Лагранжа (§ 15). Но подобного рода разложения вполне пригодны для непосредственного вычисления возмущений координат (глава XVI): в этом случае достаточно иметь

разложения  $\Delta^{-1}$  и  $\Delta^{-3}$ , если вычисляются возмущения только первого порядка; если же ищутся и возмущения высших порядков, то нужно получить еще и разложения  $\Delta^{-5}$ ,  $\Delta^{-7}$ , . . .

Ганзен, который в своей работе о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна (1831) первый опубликовал применение численного метода разложения пертурбационной функции, за аргументы принял разность средних аномалий  $M - M'$  и среднюю аномалию Сатурна  $M'$ . Чтобы получить коэффициенты разложения по формулам гармонического анализа, он вычислил  $\Delta^{-1}$ ,  $\Delta^{-3}$ , . . . для всех комбинаций следующих значений аргументов:

$$M - M' = 11^\circ 15' \times k, \quad k = 0, 1, \dots, 31$$

$$M' = 22^\circ 30' \times k', \quad k' = 0, 1, \dots, 15.$$

Таким образом, ему пришлось найти  $32 \times 16 = 512$  частных значений указанных функций.

### § 92. Метод Ганзена.

Указанный в предыдущем параграфе численный метод позволяет получить разложение пертурбационной функции с какой угодно точностью при помощи простых, легко механизуемых вычислений, единственное неудобство которых заключается в их обширности.

Применяя численный метод, мы совершенно не пользуемся свойствами разлагаемой в ряд функции. Поэтому естественно возникает вопрос, нельзя ли сократить вычислительную работу путем надлежащего учета хорошо нам известной аналитической структуры разлагаемой функции.

Коши первый употребил (1844) для разложения пертурбационной функции полуаналитический метод, в котором разложение по одному аргументу выполняется аналитически, а по другому — численно.

Эта идея была со всей подробностью развита Ганзеном (1857), давшим метод разложения, получивший довольно значительное распространение. В частности, этот метод был применен Хиллом при построении теории движения Юпитера и Сатурна.

Задача заключается в разложении в двойные тригонометрические ряды величин  $\Delta^{-1}$ ,  $\Delta^{-3}$ ,  $\Delta^{-5}$ , . . . , где

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H,$$

$$\cos H = \cos(v + \Pi) \cos(v' + \Pi') + \sin(v + \Pi) \sin(v' + \Pi') \cos J.$$

Считая опять  $a < a'$  и полагая  $\alpha = a/a'$ , напишем это равенство так:

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2 = \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \alpha^2 - 2 \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \alpha \cos H. \quad (38)$$

С другой стороны,  $\cos H$  в развернутом виде равняется

$$C_1 \cos v \cos v' + C_2 \cos v \sin v' + C_3 \sin v \cos v' + C_4 \sin v \sin v',$$

где

$$C_1 = \cos \Pi \cos \Pi' + \sin \Pi \sin \Pi' \cos J$$

$$C_2 = -\cos \Pi \sin \Pi' + \sin \Pi \cos \Pi' \cos J$$

$$C_3 = -\sin \Pi \cos \Pi' + \cos \Pi \sin \Pi' \cos J$$

$$C_4 = \sin \Pi \sin \Pi' + \cos \Pi \cos \Pi' \cos J.$$

Вводя вспомогательные величины  $k, K$  и  $k_1, K_1$ , при помощи равенств

$$\left. \begin{aligned} k \sin(\Pi' - K) &= a \sin \Pi \cos J \\ k \cos(\Pi' - K) &= a \cos \Pi \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 \sin(\Pi' - K_1) &= a \sin \Pi \\ k_1 \cos(\Pi' - K_1) &= a \cos \Pi \cos J, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

легко найдем, что

$$a \cos H = k \cos v \cdot \cos(v' + K) + k_1 \sin v \sin(v' + K_1).$$

Поэтому, подставляя это выражение в равенство (38) и пользуясь известными формулами

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), & r' &= a'(1 - e' \cos E'), \\ r \cos v &= a(\cos E - e), & r' \cos v' &= a'(\cos E' - e'), \\ r \sin v &= a \cos \varphi \sin E, & r' \sin v' &= a' \cos \varphi' \sin E', \end{aligned}$$

получим следующее выражение для квадрата взаимного расстояния двух планет через их эксцентрисические аномалии:

$$\left(\frac{\Delta}{a'}\right)^2 = D - f \cos(E - F) + \frac{1}{2} \gamma_2 \cos 2E, \quad (41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= \alpha^2 e^2 \\ D &= D_0 + D_1 \cos E' + D_2 \sin E' + e'^2 \cos^2 E' \\ f \sin F &= G_0 + G_1 \cos E' + G_2 \sin E' \\ f \cos F &= H_0 + H_1 \cos E' + H_2 \sin E', \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

причем постоянные коэффициенты имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 + \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 e^2 - 2k e e' \cos K, \\ D_1 &= 2(e k \cos K - e') \\ D_2 &= -2 e k \sin K \cos \varphi' \\ G_0 &= -2 e' k_1 \sin K_1 \cos \varphi \\ G_1 &= 2 k_1 \sin K_1 \cos \varphi \\ G_2 &= 2 k_1 \cos K_1 \cos \varphi \cos \varphi' \\ H_0 &= 2(e \alpha^2 - e' k \cos K) \\ H_1 &= 2k \cos K \\ H_2 &= -2k \sin K \cos \varphi'. \end{aligned} \quad (43)$$

Отметим, что  $D, f$  и  $F$  известные, легко вычисляемые функции  $E'$ , а следовательно и  $M'$ . При возрастании  $M'$  на  $2\pi$  угол  $F$ , как легко видеть, также увеличивается на  $2\pi$ .

Внимательное рассмотрение формул (42) показывает, что при малых эксцентриситетах  $e$  и  $e'$  разности  $F - E'$ , а следовательно и разности  $F - M'$ , остаются в довольно тесных границах при всех изменениях  $M'$ .

Во всех встречающихся на практике случаях последний член выражения (41) крайне мал по сравнению с суммой двух первых. Это обстоя-

тельство позволяет написать, на основании формулы бинома, такое весьма быстро сходящееся разложение:

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n = \Delta_0^{-n} - \frac{n}{4} \gamma_2 \cos 2E \cdot \Delta_0^{-n-2} + \dots, \quad (44)$$

где

$$\Delta_0 = [D - f \cos(E - F)]^{\frac{1}{2}}.$$

Каждая из величин  $\Delta_0^{-1}, \Delta_0^{-3}, \dots$ , к разложению которых приводится стоящая перед нами задача, может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\Delta_0^{-n} = \alpha_n^{(0)} + 2\alpha_n^{(1)} \cos(E - F) + 2\alpha_n^{(2)} \cos 2(E - F) + \dots \quad (45)$$

Коэффициенты этого ряда очень просто выражаются через коэффициенты Лапласа. В самом деле, полагая

$$D = \mathfrak{M}(1 + \theta^2), \quad f = 2\mathfrak{M}\theta, \quad (46)$$

получим

$$\begin{aligned} \Delta_0^{-n} &= \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} [1 + \theta^2 - 2\theta \cos(E - F)]^{-\frac{n}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} \sum b_n^{(i)} \cos i(E - F). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\alpha_n^{(i)} = \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{-\frac{n}{2}} b_n^{(i)}. \quad (47)$$

Аргумент ряда (45) заменим разностью

$$E - F = E - M' - (F - M'),$$

что позволяет трансформировать этот ряд следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_0^{-n} &= \beta_n^{(0)} + 2\beta_n^{(1)} \cos(E - M') + 2\beta_n^{(2)} \cos 2(E - M') + \dots \\ &+ 2\gamma_n^{(1)} \sin(E - M') + 2\gamma_n^{(2)} \sin 2(E - M') + \dots, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_n^{(i)} &= \alpha_n^{(i)} \cos i(F - M') \\ \gamma_n^{(i)} &= \alpha_n^{(i)} \sin i(F - M'). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Для любого значения  $M'$  мы можем вычислить, как уже было отмечено,  $D, f$  и  $F$ , а следовательно, пользуясь формулами (46), (47) и (49), и коэффициенты  $\beta$  и  $\gamma$ .

Вычисляя каждый из этих коэффициентов для ряда равноотстоящих значений  $M'$  и применяя обычные формулы гармонического анализа, мы можем каждый из коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  разложить в ряд вида:

$$\frac{1}{2} c_0 + \sum_1^{\infty} c_j \cos j M' + \sum_1^{\infty} s_j \sin j M'.$$

Подставляя такие ряды вместо каждого коэффициента разложения (48), внося эти последние в формулу (44) и развертывая получаю-

щиеся произведения тригонометрических функций, окончательно получим ряды вида:

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n = \sum_{i, i'} (i, i', c)_n \cos(iE - i'M') + \sum_{i, i'} (i, i', s)_n \sin(iE - i'M'), \quad (50)$$

где  $n = 1, 3, 5, \dots$ ; что же касается до индексов  $i, i'$ , то, очевидно, достаточно давать им значения  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   $i' = 0, 1, 2, \dots$

Разложение (50) не может быть непосредственно использовано для интегрирования уравнений, определяющих возмущения, так как это разложение включает две переменные  $E$  и  $M'$ .

Ганзен выражает  $M'$  через эксцентрическую аномалию  $E$ , которую он принимает за независимую переменную.

Так как

$$M = nt + M_0, \quad M' = n't + M_0',$$

то

$$M' = \mu M + C,$$

где  $\mu = n'/n$ , а  $C$  — некоторая постоянная величина.

Поэтому, пользуясь уравнением Кеплера, получим:

$$M' = \mu E - \mu e \sin E + C.$$

Подстановка этого выражения вместо  $M'$  в формулу (50) и развертывание функций

$$\sin(\mu e \sin E), \quad \cos(\mu e \sin E)$$

в тригонометрические ряды при помощи формул (15) § 78 дает разложение вида

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n = \sum [i, i', c]_n \cos(iE - i'\mu E) + \sum [i, i', s]_n \sin(iE - i'\mu E). \quad (51)$$

Хилл, в уже упоминавшейся теории Юпитера и Сатурна, преобразует разложения (50) в разложения вида:

$$\left(\frac{a'}{\Delta}\right)^n = \sum \{i, i', c\}_n \cos(iM - i'M') + \sum \{i, i', s\}_n \sin(iM - i'M'), \quad (52)$$

что легко выполняется при помощи способов, указанных в § 81.

Примечание. Для вычисления  $\theta$  и  $\mathfrak{M}$  при помощи формул (46) удобно ввести вспомогательный угол  $\psi$ , определяемый равенством

$$\sin \psi = \frac{f}{D}$$

и условием  $0 < \psi < 90^\circ$ .

Уравнение

$$\frac{2\theta}{1 + \theta^2} = \sin \psi$$

имеет два корня:

$$\theta_1 = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}, \quad \theta_2 = \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}.$$

Беря первый из них, будем иметь такие равенства:

$$\theta = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}, \quad \mathfrak{M} = D \cos^2 \frac{\psi}{2}.$$

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛАПЛАСА.

## § 93. Вычисление коэффициентов Лапласа при помощи рядов.

Чтобы покончить с вопросом о разложении пертурбационной функции в ряд, нам остается еще рассмотреть способы вычисления величин  $c_n^{(i)}$ , или, что то же самое, в силу равенства (10) § 87, величин  $b_n^{(i)}$ , определяемых соотношениям

$$(1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iS \quad (1)$$

и носящих название коэффициентов Лапласа.

Покажем, прежде всего, что коэффициенты Лапласа могут быть вычислены при помощи бесконечных рядов.

Положим

$$z = \exp(S\sqrt{-1}),$$

тогда

$$1 - 2\alpha \cos S + \alpha^2 = 1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1}) = (1 - \alpha z)(1 - \alpha z^{-1}),$$

следовательно равенство (1) может быть заменено таким:

$$(1 - \alpha z)^{-\frac{n}{2}} (1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} z^i. \quad (2)$$

Так как

$$(1 - \alpha z^{\pm 1})^{-\frac{n}{2}} = 1 + \frac{n}{2} \alpha z^{\pm 1} + \frac{n(n+2)}{2.4} \alpha^2 z^{\pm 2} + \frac{n(n+2)(n+4)}{2.4.6} \alpha^3 z^{\pm 3} + \dots,$$

то отсюда легко получить, приравнявая справа и слева коэффициенты при  $z^i$ , формулу

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \frac{n(n+2) \dots (n+2i-2)}{2.4 \dots (2i)} \alpha^i \left[ 1 + \frac{n}{2} \frac{n+2i}{2i+2} \alpha^2 + \frac{n(n+2)(n+2i)(n+2i+2)}{2.4 (2i+2)(2i+4)} \alpha^4 - \dots \right]. \quad (3)$$

Для  $i=0$  имеем:

$$\frac{1}{2} b_n^{(0)} = 1 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{n(n+2)}{2.4}\right)^2 \alpha^4 + \dots \quad (4)$$

Эти ряды сходятся, очевидно, для всех положительных значений  $\alpha$ , удовлетворяющих условию

$$\alpha < 1;$$

но при сколько-нибудь значительных  $\alpha$  сходимость их слишком медленна, даже для  $n=1$ .

Если воспользоваться обычным обозначением гипергеометрического ряда

$$F(A, B, C; x) = 1 + \frac{AB}{1.C} x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{1.2.C(C+1)} x^2 + \dots \quad (5)$$

и, кроме того, ввести символ

$$(k, i) = k(k+1)(k+2) \dots (k+i-1), \quad (k, 0) = 1,$$

то формулу (3) можно написать так:

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \alpha^i F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i + 1; \alpha^2\right). \quad (6)$$

Гипергеометрическая функция, определяемая рядом (5), может быть представлена, как известно, в следующем виде:

$$F(A, B, C; x) = (1-x)^{-A} F\left(A, C-B, C; \frac{-x}{1-x}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \alpha^i (1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} F\left(\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, i + 1; \frac{-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

или, в развернутом виде:

$$\frac{1}{2} b_n^{(i)} = \frac{n(n+2) \dots (n+2i-2)}{2.4.6 \dots (2i)} \alpha^i (1-\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} \left[ 1 + \frac{n}{2} \frac{n-2}{2i+2} p + \frac{n(n+2)}{2.4} \frac{(n-2)(n-4)}{(2i+2)(2i+4)} p^2 + \dots \right], \quad (7)$$

где

$$p = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Этот ряд сходится для  $|p| < 1$ , т. е. для значений  $\alpha$ , удовлетворяющих условию

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \dots$$

Чем больше  $i$ , тем более выгодным является применение ряда (7) по сравнению с (3). В самом деле, отношения соответственных коэффициентов этих рядов равны

$$1, \frac{n-2}{n+2i}, \frac{(n-2)(n-4)}{(n+2i)(n+2i+2)}, \dots$$

и потому быстро стремятся к нулю при сколько-нибудь значительных  $i$ .

Если  $\alpha \geq 0.707 \dots$ , то ряд (7) расходится. Однако и в этом случае он может применяться для вычисления  $b_n^{(i)}$ , если только  $i$  достаточно велико. Действительно, можно показать, что ряд (7) становится в этом случае асимптотическим.

При больших значениях  $i$  употребление расходящегося ряда (7) оказывается более удобным, чем применение сходящегося ряда (3).

Ряд (7) может быть заменен более удобным и в то же время сходящимся рядом при помощи аналитического продолжения. Действительно, рассматриваемая нами ветвь функции (7) не имеет других особых точек, кроме  $\alpha=1$  и  $\alpha=\infty$ . Следовательно, для соответствующей ветви функции

$$F(p) = F\left(\frac{n}{2}, 1 - \frac{n}{2}, i + 1, -p\right)$$

особыми точками будут лишь точки  $p=-1$  и  $p=\infty$ .

Таким образом, применяя к функции  $F(p)$  формулу Тэйлора

$$F(p) = F(p_0) + (p-p_0)F'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2!} F''(p_0) + \dots,$$

где  $p_0$  — действительное положительное число, получим ряд, имеющий круг сходимости с радиусом  $1+p_0$ .

Приведем численные коэффициенты рядов, служащих для вычисления  $b_1^{(10)}$  и  $b_1^{(11)}$  в случаях, когда  $p_0=0, \frac{1}{2}, 1$ .

Первый из указанных коэффициентов Лапласа равен

$$b_1^{(10)} = \frac{1.3.5 \dots 19}{2.4.6 \dots 20} \alpha^{10} (1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} F_{10}(p) = \frac{46189}{262144} \alpha^9 \sqrt{p} F_{10}(p), \quad (8)$$

причем для функции  $F_{10}(p)$  имеем следующие разложения:

$p_0 = 0$	$p_0 = \frac{1}{2}$	$p_0 = 1$
+ 1.00000 000	+ 0.98913 047	+ 0.97912 120
- 0.02272 727p	- 0.02082 065 $\left(p - \frac{1}{2}\right)$	- 0.01926 520 $(p-1)$
+ 0.00213 068p <sup>2</sup>	+ 0.00171 01 $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2$	- 0.00141 681 $(p-1)^2$
- 0.00034 15p <sup>3</sup>	- 0.00023 04 $\left(p - \frac{1}{2}\right)^3$	- 0.00016 594 $(p-1)^3$
+ 0.00007 47p <sup>4</sup>	+ 0.00004 1 $\left(p - \frac{1}{2}\right)^4$	- 0.00002 515 $(p-1)^4$
- 0.00002 0 p <sup>5</sup>	- 0.00000 9 $\left(p - \frac{1}{2}\right)^5$	- 0.00000 451 $(p-1)^5$
+ 0.00000 6 p <sup>6</sup>	+ 0.00000 2 $\left(p - \frac{1}{2}\right)^6$	- 0.00000 091 $(p-1)^6$
		- 0.00000 020 $(p-1)^7$
		- 0.00000 005 $(p-1)^8$
		- 0.00000 001 $(p-1)^9$

Для  $b_1^{(11)}$  формула (7) дает

$$b_1^{(11)} = \frac{88\,179}{524\,288} \alpha^{10} \sqrt{p} F_{11}(p), \quad (8a)$$

причем для функции  $F_{11}(p)$  может быть взято одно из разложений:

$p_0 = 0$	$p_0 = \frac{1}{2}$	$p_0 = 1$
+ 1.00000 000	+ 0.99000 356	+ 0.98074 527
- 0.02083 333p	- 0.01920 796 $(p - \frac{1}{2})$	- 0.01786 420 $(p - 1)$
+ 0.00180 288p <sup>2</sup>	+ 0.00146 840 $(p - \frac{1}{2})^2$	+ 0.00123 022 $(p - 1)^2$
- 0.00026 83p <sup>3</sup>	- 0.00018 54 $(p - \frac{1}{2})^3$	- 0.00013 597 $(p - 1)^3$
+ 0.00005 48p <sup>4</sup>	+ 0.00003 11 $(p - \frac{1}{2})^4$	+ 0.00001 956 $(p - 1)^4$
- 0.00001 4p <sup>5</sup>	- 0.00000 7 $(p - \frac{1}{2})^5$	- 0.00000 335 $(p - 1)^5$
+ 0.00000 1p <sup>6</sup>	+ 0.00000 2 $(p - \frac{1}{2})^6$	+ 0.00000 065 $(p - 1)^6$
		- 0.00000 014 $(p - 1)^7$
		+ 0.00000 003 $(p - 1)^8$
		- 0.00000 001 $(p - 1)^9$

Для того чтобы выбрать наиболее удобный из этих рядов в каждом конкретном случае, может служить следующая табличка:

$\alpha = 0$	0.45	0.61	0.66	0.71	0.78	0.82	0.88
$p = 0$	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	3.00

#### § 94. Рекуррентные соотношения между коэффициентами Лапласа.

Обратимся к равенству (2), могущему служить для определения коэффициентов Лапласа, и напишем его так:

$$[1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \sum b_n^{(i)} z^i. \quad (9)$$

Дифференцирование этого равенства по  $z$  дает

$$\frac{1}{2} n \alpha (1 - z^{-2}) [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})]^{-\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2} \sum i b_n^{(i)} z^{i-1},$$

что может быть переписано, на основании (9), в двух следующих формах:

$$\frac{1}{2} n \alpha (1 - z^{-2}) \sum b_n^{(i)} z^i = [1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})] \sum i b_n^{(i)} z^{i-1} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} n \alpha (1 - z^{-2}) \sum b_{n+2}^{(i)} z^i = \sum i b_n^{(i)} z^{i-1}. \quad (11)$$

#### § 94. Рекуррентные соотношения между коэффициентами Лапласа 257

Приравнявая коэффициенты при  $z^{i-1}$  в обеих частях равенства (10), получим:

$$b_n^{(i+1)} = \frac{2i}{2i-n+2} (\alpha + \alpha^{-1}) b_n^{(i)} - \frac{2i+n-2}{2i-n+2} b_n^{(i-1)}. \quad (12)$$

Это соотношение позволяет, зная два из коэффициентов  $b_n^{(i)}$ , например  $b_n^{(0)}$  и  $b_n^{(1)}$ , вычислить все остальные.

Точно так же, приравнявая коэффициенты при  $z^{i-1}$  в равенстве (11), будем иметь:

$$\frac{1}{2} n \alpha (b_{n+2}^{(i-1)} - b_{n+2}^{(i+1)}) = i b_n^{(i)}. \quad (13)$$

С другой стороны, из равенства (9) следует, если заменить  $n$  через  $n+2$ :

$$[1 + \alpha^2 - \alpha(z + z^{-1})] \sum b_{n+2}^{(i)} z^i = \sum b_n^{(i)} z^i, \quad (14)$$

откуда

$$(1 + \alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - \alpha (b_{n+2}^{(i-1)} + b_{n+2}^{(i+1)}) = b_n^{(i)}.$$

Исключение  $b_{n+2}^{(i-1)}$  из уравнений (13) и (14) дает:

$$n(1 + \alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - 2\alpha n b_{n+2}^{(i+1)} = (n+2i) b_n^{(i)}.$$

Если из тех же уравнений исключить  $b_{n+2}^{(i+1)}$ , то получим:

$$n(1 + \alpha^2) b_{n+2}^{(i)} - 2\alpha n b_{n+2}^{(i-1)} = (n-2i) b_n^{(i)}.$$

Заменяя здесь  $i$  через  $i+1$  и разрешая полученное таким образом уравнение совместно с предыдущим, найдем:

$$\left. \begin{aligned} n(1 - \alpha^2) (b_{n+2}^{(i)} + b_{n+2}^{(i+1)}) &= (2i+n) b_n^{(i)} - (2i-n+2) b_n^{(i+1)} \\ n(1 - \alpha^2) (b_{n+2}^{(i)} - b_{n+2}^{(i+1)}) &= (2i+n) b_n^{(i)} + (2i-n+2) b_n^{(i+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Таким образом, зная коэффициенты  $b_1^{(i)}$ , мы можем вычислить все  $b_3^{(i)}$ , затем все  $b_5^{(i)}$ , и т. д. Сопоставляя этот результат с тем, что было только что сказано относительно формулы (12), мы видим, что достаточно непосредственно вычислить два коэффициента Лапласа, например  $b_1^{(0)}$  и  $b_1^{(1)}$ , чтобы затем, при помощи соотношений (12) и (15), найти все остальные коэффициенты.

Вместо  $b_1^{(0)}$  и  $b_1^{(1)}$ , к вычислению которых мы вернемся в следующем параграфе, можно за исходные величины взять коэффициенты  $b_1^{(10)}$  и  $b_1^{(11)}$ , удобно находимые по формулам предыдущего параграфа.

Употребление рекуррентного соотношения (12) становится неудобным для малых значений  $\alpha$ , так как сопровождается потерей точности. То же самое можно сказать про формулы (15) в случае больших значений  $\alpha$ .

Нужно, однако, заметить, что в настоящее время с вычислением коэффициентов Лапласа приходится встречаться редко, так как имеются таблицы, дающие эти коэффициенты. Лучшими из таблиц этого рода являются таблицы, опубликованные Брауном и Брувером.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> E. W. Brown and D. Brouwer, Tables for the development of the disturbing function with schedules for harmonic analysis, Cambridge, 1933.

Положив

$$b_n^{(i)} = \frac{\alpha^i}{\sqrt{1-\alpha^2}} G_{\frac{n}{2}}^{(i)},$$

эти авторы дают  $\lg G_{\frac{n}{2}}^{(i)}$  (для  $n=1, 3, 5$ , с восьмью, для  $n=7$  — с семью знаками) по аргументу  $p = \alpha^2 : (1 - \alpha^2)$ , меняющемуся от 0.00 до 2.50. При этом  $i=0, 1, 2, \dots, 11$ .

### § 95. Выражение коэффициентов Лапласа определенными интегралами.

Применяя хорошо известные формулы Эйлера для вычисления коэффициентов ряда Фурье к разложению (1), получим:

$$b_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \alpha)^{-\frac{n}{2}} \cos ix \, dx. \quad (16)$$

Эта формула неудобна для вычисления коэффициентов Лапласа при сколько-нибудь значительных величинах  $i$ , так как  $\cos ix$  в этом случае много раз меняет знак. Кроме того, при малых значениях  $\alpha$  коэффициент  $b_n^{(i)}$  есть малая величина порядка  $\alpha^i$ , — существенное обстоятельство, совершенно маскируемое формулой (16). Однако не трудно из формулы (16) получить другие, более удобные.

Известная из интегрального исчисления формула

$$\int_0^\pi \cos^p x \cos ix \, dx = \frac{p(p-1) \dots (p-i+1)}{1.3 \dots (2i-1)} \int_0^\pi \cos^{p-i} x \sin^{2i} x \, dx$$

позволяет для всякой функции  $f(t)$ , разложимой в интервале  $-1 \leq t \leq +1$  в равномерно сходящийся ряд

$$f(t) = \sum_0^\infty a_p t^p,$$

написать

$$\int_0^\pi f(\cos x) \cos ix \, dx = \frac{1}{1.3.5 \dots (2i-1)} \int_0^\pi f^{(i)}(\cos x) \sin^{2i} x \, dx.$$

Применив эту (указанную Якоби) формулу к интегралу (16), получим:

$$b_n^{(i)} = \frac{n(n+2) \dots (n+2i-2) 2}{1.3.5 \dots (2i-1)} \frac{\alpha^i}{\pi} \int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x)^{-\frac{n}{2}-i} \sin^{2i} x \, dx. \quad (17)$$

Применение обычных формул квадратур (§ 56) к интегралу, стоящему в равенстве (17), дает едва ли не лучший способ вычисления коэффициентов Лапласа, особенно в тех случаях, когда требуется большая точность.

При помощи преобразования Ландена

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin x}{\cos x - \alpha},$$

дающего

$$\sin \varphi = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x}}, \quad d\varphi = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos x} dx,$$

из формулы (17) легко получить такую:

$$b_n^{(i)} = \frac{n(n+2) \dots (n+2i-2) 2}{1.3 \dots (2i-1)} \frac{\alpha^i}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\alpha \cos \varphi + \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}{1 - \alpha^2} \right\}^{n-1} \frac{\sin^{2i} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (18)$$

В частности, для  $n=1$  имеем

$$b_1^{(i)} = \frac{2}{\pi} \alpha^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}},$$

или, как легко проверить,

$$b_1^{(i)} = \frac{4}{\pi} \alpha^i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2i} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (19)$$

Таким образом

$$b_1^{(i)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{4}{\pi} F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right), \quad (20)$$

где через  $F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$  обозначен полный эллиптический интеграл первого рода.

Для  $i=1$  равенство (19) дает:

$$b_1^{(1)} = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}} \, d\varphi = \frac{4}{\pi\alpha} \left[ F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (21)$$

где

$$E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

есть полный эллиптический интеграл второго рода.

Существование подробных таблиц эллиптических интегралов делает употребление формул (20) и (21) особенно удобным, не говоря уже о том, что полные эллиптические интегралы вычисляются весьма просто непосредственно.

Например для вычисления интеграла первого рода может быть применена формула Гаусса:

$$F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{M(1, \sqrt{1 - \alpha^2})}, \quad (22)$$

где через  $M(a, b)$  обозначена арифметически-геометрическая средняя между  $a$  и  $b$ , т. е. число, определяемое следующим предельным переходом:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(a+b); & b_1 &= \sqrt{ab} \\ a_2 &= \frac{1}{2}(a_1+b_1); & b_2 &= \sqrt{a_1 b_1} \\ &\dots & & \\ a_n &= \frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}); & b_n &= \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \\ M(a, b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

§ 96. Вычисление производных коэффициентов Лапласа. Метод Ньюкома.

Для разложения пертурбационной функции в ряд нужно знать, как мы видели в предыдущей главе, не только коэффициенты Лапласа, но и их производные по  $\alpha$ .

Конечно, эти производные могут быть вычислены при помощи рядов, получающихся путем почленного дифференцирования ряда (3). Но эти ряды сходятся еще более медленно, чем ряд (3), так что этот способ не имеет практического значения.

Дифференцируя равенство (9) по  $\alpha$ , получим:

$$-\frac{n}{2} [2\alpha - (z+z^{-1})] [1+\alpha^2 - \alpha(z+z^{-1})]^{-\frac{n}{2}-1} = \frac{1}{2} \sum \frac{db_n^{(i)}}{d\alpha} z^i$$

или

$$\frac{n}{2} (z+z^{-1} - 2\alpha) \sum b_{n+2}^{(i)} z^i = \sum \frac{db_n^{(i)}}{d\alpha} z^i.$$

Следовательно

$$\frac{db_n^{(i)}}{d\alpha} = \frac{n}{2} (b_{n+2}^{(i-1)} + b_{n+2}^{(i+1)} - 2\alpha b_{n+2}^{(i)}).$$

Дифференцируя это соотношение и комбинируя его с формулами (12) и (15), легко найти ряд рекуррентных формул, позволяющих последовательно определять производные до любого порядка. Нужно, однако, заметить, что эти формулы, которыми пользовался в своих работах Леверрье,<sup>1</sup> мало удобны.

С другой стороны, как уже было отмечено (§ 88), в разложение пертурбационной функции входят собственно не коэффициенты Лапласа, а величины

$$c_n^{(i)} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)} \tag{23}$$

и их производные по  $\lg \alpha$ , т. е.

$$D^k c_n^{(i)} = \frac{d^k c_n^{(i)}}{(d \lg \alpha)^k} \tag{24}$$

<sup>1</sup> Annales de l'Observatoire de Paris, t. 2, 1856.

Наилучшим способом вычисления величин (23) и (24) с точки зрения как удобства, так и точности результатов является метод Ньюкома,<sup>1</sup> представляющий развитие и усовершенствование предложенного ранее Ганzenом способа для вычисления коэффициентов Лапласа. К изложению этого метода мы теперь и перейдем.

Формула (6) дает

$$c_n^{(i)} = 2 \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i-1)} F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i+1; \alpha^2\right).$$

Ньюком вводит следующую, более общую функцию

$$\begin{aligned} c_n^{i,j} &= 2^{j+1} \frac{\left(\frac{n}{2}, j\right) \left(\frac{n}{2}, i+j\right)}{(1, i+j)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i+4j-1)} \\ &\cdot F\left(\frac{n}{2} + j, \frac{n}{2} + i+j, i+j+1, \alpha^2\right), \end{aligned} \tag{25}$$

так что

$$c_n^{(i)} = c_n^{i,0}.$$

Заметим теперь, что равенство (5) дает:

$$\frac{d}{dx} F(A, B, C; x) = \frac{AB}{C} F(A+1, B+1, C+1; x),$$

откуда следует:

$$DF(A, B, C; \alpha^2) = 2\alpha^2 \frac{AB}{C} F(A+1, B+1, C+1; \alpha^2).$$

Применяя эту формулу, легко представим производную функцию (25) по  $\lg \alpha$  в таком виде:

$$D c_n^{i,j} = \frac{1}{2} (n+2i+4j-1) c_n^{i,j} + c_n^{i,j+1}.$$

Применив к обеим частям последнего равенства операцию  $D^k$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} D^{k+1} c_n^{i,j} &= \frac{1}{2} (n+2i+4j-1) D^k c_n^{i,j} + D^k c_n^{i,j+1}, \\ (n=1, 3, 5, \dots, i, j, k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{26}$$

позволяющее найти, зная величины (25), сначала  $D c_n^{i,j}$ , затем  $D^2 c_n^{i,j}$ , и т. д. Этим самым станут известны и величины (24).

Рассматриваемая проблема приводится, таким образом, к вычислению величин (25). Эту задачу мы разобьем на три части и решим, пользуясь линейными соотношениями, существующими, как известно, между всякими тремя гипергеометрическими функциями  $F(A, B, C; x)$ , параметры которых отличаются на целые числа.

<sup>1</sup> S. Newcomb, Development of the Perturbative Function and its Derivatives, in sines and cosines of multiples of the eccentric anomalies, and in powers of the eccentricities, Astronomical Papers, 3, Washington, 1891.

Легко, например, проверить, пользуясь рядом (5), что:

$$C(C+1)F(A, B, C; x) - [C + (B - A + 1)x]F(A, B + 1, C + 1; x) + (B + 1)(C - A + 1)x F(A, B + 2, C + 2; x) = 0. \quad (27)$$

Формула (25) дает:

$$c_n^{i-1, j} = LF\left(\frac{n}{2} + j, \frac{n}{2} + i + j - 1, i + j; \alpha^2\right)$$

$$c_n^{i, j} = L \frac{n + 2i + 2j - 2}{2i + 2j} \alpha F\left(\frac{n}{2} + j, \frac{n}{2} + i + j, i + j + 1; \alpha^2\right)$$

$$c_n^{i+1, j} = L \frac{(n + 2i + 2j - 2)(n + 2i + 2j)}{(2i + 2j)(2i + 2j - 2)} \alpha^2 F\left(\frac{n}{2} + j, \frac{n}{2} + i + j + 1, i + j + 2; \alpha^2\right),$$

где

$$L = 2^{i+1} \binom{\frac{n}{2}, j}{\frac{n}{2}, i+j-1} \frac{\left(\frac{n}{2}, i+j-1\right)}{(1, i+j-1)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+2i+4j-3)}$$

Поэтому, делая в равенстве (27)

$$A = \frac{n}{2} + j, \quad B = \frac{n}{2} + i + j - 1, \quad C = i + j, \quad x = \alpha^2,$$

получим

$$(2i + 2j + n - 2)c_n^{i-1, j} - 2(i + j + i\alpha^2)c_n^{i, j} + (2i - n + 2)\alpha c_n^{i+1, j} = 0. \quad (28)$$

Полагая

$$p_n^{i, j} = \frac{c_n^{i, j}}{c_n^{i-1, j}}, \quad (29)$$

можно это равенство написать так:

$$p_n^{i, j} = \frac{p_n^{i, j}}{1 - Q_n^{i, j} p_n^{i+1, j}}, \quad (30)$$

где

$$p_n^{i, j} = \frac{(2i + 2j + n - 2)\alpha}{2i(1 + \alpha^2) + 2j}, \quad Q_n^{i, j} = \frac{(2i - n + 2)\alpha}{2i(1 + \alpha^2) + 2j}.$$

Формула (30) позволяет, зная величину (29) для  $i = k$ , найти ее для  $i = k - 1, k - 2, \dots, 2, 1$ . Для вычисления же  $p_n^{k, j}$  можно воспользоваться следующей непрерывной дробью, непосредственно вытекающей из той же формулы (30), именно:

$$p_n^{k, j} = \frac{p_k}{1 - \frac{Q_k p_{k+1}}{1 - \frac{Q_{k+1} p_{k+2}}{1 - \dots}}}, \quad (31)$$

где для краткости положено

$$P_k = p_n^{k, j}, \quad Q_k = Q_n^{k, j}.$$

Вычислив таким образом величины (29) для  $i = 1, 2, \dots, k$  и зная  $c_n^{0, j}$ , при помощи формулы (29) легко найдем  $c_n^{i, j}$  для всех рассматриваемых значений  $i$ .

Займемся теперь вычислением  $c_n^{0, i}$ . Заметим прежде всего, что величина

$$c_1^{0, 0} = c_1^{(0)} = b_1^{(0)}$$

очень удобно вычисляется при помощи формул (20) и (22). Зная  $c_1^{(0, 0)}$ , легко найти  $c_1^{(0, 1)}, c_1^{(0, 2)}, \dots$  при помощи рекуррентного соотношения, которое мы сейчас выведем.

На основании формулы (25) имеем:

$$c_n^{1, j} = MF\left(\frac{n}{2} + j, \frac{n}{2} + j + 1, j + 2; \alpha^2\right)$$

$$c_n^{1, j+1} = M(n + 2j) \frac{n + 2j + 2}{2j + 4} \alpha^2 F\left(\frac{n}{2} + j + 1, \frac{n}{2} + j + 2, j + 3; \alpha^2\right)$$

$$c_n^{0, i+1} = M(n + 2j) \alpha F\left(\frac{n}{2} + j + 1, \frac{n}{2} + j + 1, j + 2; \alpha^2\right),$$

где

$$M = 2^{j+1} \binom{\frac{n}{2}, j}{\frac{n}{2}, j+1} \frac{\left(\frac{n}{2}, j+1\right)}{(1, j+1)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+4j+1)}$$

Поэтому, полагая

$$A = \frac{n}{2} + j, \quad B = \frac{n}{2} + j + 1, \quad C = j + 2, \quad x = \alpha^2$$

и замечая, что

$$CF(A, B, C; x) - CF(A + 1, B, C; x) + Bx F(A + 1, B + 1, C + 1; x) = 0,$$

получим:

$$(2j + n)\alpha c_n^{1, j} - c_n^{0, j+1} + \alpha c_n^{1, j+1} = 0,$$

или

$$c_1^{0, j+1} = \frac{(2j + 1)\alpha p_1^{1, j} c_1^{0, j}}{1 - \alpha p_1^{1, j+1}}. \quad (32)$$

Это и есть искомое соотношение, позволяющее находить  $c_1^{0, 1}, c_1^{0, 2}, \dots$ , когда  $c_1^{0, 0}$  и  $p_1^{1, j}$  уже вычислены.

Остается рассмотреть вычисление  $c_n^{0, i}, c_n^{0, j}, \dots$ . Для того чтобы выразить эти величины через  $c_1^{0, j}$ , выведем еще одну рекуррентную формулу.

Из формулы (25) имеем:

$$c_n^{0, j} = NF\left(\frac{n}{2} + j, \frac{n}{2} + j, j + 1; \alpha^2\right)$$

$$c_{n+2}^{0, j} = N \left(\frac{n + 2j}{n}\right)^2 \alpha F\left(\frac{n}{2} + j + 1, \frac{n}{2} + j + 1, j + 1; \alpha^2\right)$$

$$c_{n+2}^{1, j} = N \left(\frac{n + 2j}{2}\right)^2 \frac{n + 2j + 2}{2j + 2} \alpha^2 F\left(\frac{n}{2} + j + 1, \frac{n}{2} + j + 2, j + 2; \alpha^2\right),$$

где

$$N = 2^{j+1} \binom{n}{2, j} \frac{\binom{n}{2, j}}{(1, j)} \alpha^{\frac{1}{2}(n+4j-1)}$$

Воспользуемся теперь следующим свойством гипергеометрической функции, которое, как и в предыдущих случаях, легко проверяется при помощи равенства (5):

$$C(A-C+1)F(A, B, C; x) - C(A-C+1+Bx)F(A+1, B+1, C; x) + (A+1)(A-C+1+Bx)F(A+2, B+1, C+1; x) = 0.$$

Получим:

$$(n+2j)^2 \alpha c_n^{0,j} - n[n+(n+2j)\alpha^2]c_{n+2}^{0,j} + 2n(n+j)\alpha c_{n+2}^{1,j} = 0,$$

откуда

$$c_{n+2}^{0,j} = \frac{(n+2j)^2 \alpha c_n^{0,j}}{n[n+(n+2j)\alpha^2] - 2n(n+j)\alpha c_{n+2}^{1,j}} \quad (33)$$

Эта формула полностью решает задачу вычисления  $c_3^{0,j}, c_5^{0,j}, \dots$  по уже найденным  $c_1^{0,j}$ .

Итак, применяя метод Ньюкома, нужно выполнить следующие операции:

1. При помощи непрерывной дроби (31) вычисляются  $p_n^{i,j}$  для наибольшего из рассматриваемых значений  $i=k$  и для всех нужных значений  $n$  и  $j$ .
2. При помощи соотношения (30) находятся  $p_n^{i,j}$  для всех остальных значений  $i$ .
3. По формулам (20) и (22) находится  $c_1^{0,0} = b_1^{(0)}$ .
4. Соотношение (32) дает все величины  $c_1^{0,j}$ .
5. Соотношение (33) дает  $c_3^{0,i}, c_5^{0,j}, \dots$
6. По формуле (29) вычисляются все  $c_n^{i,j}$ .
7. Наконец, по формуле (26) находятся нужные для разложения пертурбационной функции величины

$$D^k c_n^{i,0} = \frac{d^k c_n^{(i)}}{(d \lg \alpha)^k}$$

Примечание. Непрерывная дробь (30) быстро сходится лишь при малых значениях  $\alpha$ . Поэтому еще Ганзен предложил заменить ее следующей:

$$p_n^{k,j} = \frac{P}{1 - a_1 \frac{1}{1 - b_1 \frac{1}{1 - a_2 \frac{1}{1 - b_2 \frac{1}{1 - a_3 \frac{1}{1 - \dots}}}}}}$$

где

$$P = \frac{n+2i+2j-2}{2(i+j)} \alpha$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \frac{(n+2j)(2-n)}{(i+j)(i+j+1)} \alpha^2, \quad b_1 = \frac{1}{4} \frac{(2i+2j+n)(2i+2-n)}{(i+j+1)(i+j+2)} \alpha^2;$$

причем  $a_{m+1}, b_{m+1}$  получаются из  $a_m, b_m$  путем замены  $j$  и  $n$  через  $j+2$  и  $n-2$ .

Эта формула является частным случаем найденного Гауссом разложения

$$\frac{F(A, B+1, C+1; x)}{F(A, B, C; x)} = \frac{1}{1 - a_1 x \frac{1 - \beta_1 x}{1 - a_2 x \frac{1 - \beta_2 x}{1 - \dots}}}$$

где

$$a_1 = \frac{A}{C} \frac{C-B}{C+1}, \quad \beta_1 = \frac{B+1}{C+1} \frac{C+1-A}{C+2}$$

$$a_2 = \frac{A+1}{C+2} \frac{C+1-B}{C+3}, \quad \beta_2 = \frac{B+2}{C+3} \frac{C+2-A}{C+4}$$

.....

Таким образом, уравнения Лагранжа (41), данные в § 13, могут быть написаны в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2m'}{1+m} na^2 \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda_0} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2m'}{1+m} na^2 \frac{\partial R_{0,1}}{\partial a} + \frac{m'}{1+m} na \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \frac{\partial R_{0,1}}{\partial e} + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{m'}{1+m} na \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \omega} - \frac{m'}{1+m} na \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda} \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{m'}{1+m} na \operatorname{ctg} \frac{\partial R_{0,1}}{\partial e} + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{m'}{1+m} na \sec \varphi \operatorname{cosec} i \frac{\partial R_{0,1}}{\partial i} \\ \frac{di}{dt} &= -\frac{m'}{1+m} na \sec \varphi \operatorname{cosec} i \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \Omega} - \frac{m'}{1+m} na \sec \varphi \operatorname{tg} \frac{i}{2} \left( \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda} + \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \omega} \right) \end{aligned} \right\} (4)$$

где через  $\varphi$  обозначен, как обычно, угол эксцентриситета.

Так как выражения (2) не содержат непосредственно  $i$  и  $\Omega$ , то надо исключить производные  $R_{0,1}$  по этим величинам, заменив их производными по  $\tau'$ ,  $\tau' - \tau$  и  $\sigma$ .

Учитывая соотношения (3), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{\partial R}{\partial \tau'} \frac{\partial \tau'}{\partial i} + \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \frac{\partial (\tau' - \tau)}{\partial i} + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \sigma} \cos \frac{J}{2} \frac{\partial J}{\partial i} \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R}{\partial \tau'} \frac{\partial \tau'}{\partial \Omega} + \left( \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \frac{\partial (\tau' - \tau)}{\partial \Omega} + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \sigma} \cos \frac{J}{2} \frac{\partial J}{\partial \Omega} \end{aligned} \right\} (5)$$

Чтобы найти стоящие здесь производные  $\tau'$ ,  $\tau' - \tau$ ,  $J$  по  $i$  и  $\Omega$ , достаточно применить дифференциальные формулы сферической тригонометрии к треугольнику  $\Omega N \Omega_1$  (рис. 11), образованному тремя узлами. Это даст равенства:

$$\begin{aligned} dJ &= \cos(\tau - \Omega) di - \cos(\tau' - \Omega') di' - \sin i' \sin(\tau' - \Omega') d(\Omega' - \Omega) \\ \sin J d(\tau - \Omega) &= -\cos J \sin(\tau - \Omega) di + \sin(\tau' - \Omega') di' - \sin i' \cos(\tau' - \Omega') d(\Omega' - \Omega) \\ \sin J d(\tau' - \Omega') &= -\sin(\tau - \Omega) di + \cos J \sin(\tau' - \Omega') di' - \sin i' \cos(\tau' - \Omega') d(\Omega' - \Omega), \end{aligned}$$

из которых легко могут быть получены нужные частные производные. Например

$$\frac{\partial (\tau' - \tau)}{\partial i} = -\frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin J} + \frac{\cos J \sin(\tau - \Omega)}{\sin J} = -\operatorname{tg} \frac{J}{2} \sin(\tau - \Omega).$$

Подставив эти значения производных в выражения (5), а эти последние в уравнения (4), получим дифференциальные уравнения, подлежащие интегрированию, в окончательном виде.

Леве́рье вводит вспомогательные величины  $L, \Lambda, P_1, \dots, T, V$  при помощи равенств:

ГЛАВА XV.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ.

§ 97. Преобразование дифференциальных уравнений, определяющих элементы орбиты.

Пертурбационные функции, соответствующие случаю, когда рассматривается движение только двух планет, имеющих массы  $m$  и  $m'$ , таковы:

$$R = k^2 m' R_{0,1}, \quad R' = k^2 m R_{1,0},$$

где  $R_{0,1}$  и  $R_{1,0}$  определяются формулами (1) в § 86 (стр. 233).

Леве́рье замечает, что

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m), \quad n'^2 a'^3 = k^2 (1 + m')$$

и представляет только-что написанные равенства так:

$$R = \frac{m'}{1+m} n^2 a^3 R_{0,1}, \quad R' = \frac{m}{1+m'} n'^2 a'^3 R_{1,0}. \quad (1)$$

Как уже было отмечено в § 89, Леве́рье пользуется разложением пертурбационной функции в следующей форме:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} a' R_{0,1} &= \sum N e^h e'^h \sigma^{2f} \cos D \\ a' R_{1,0} &= \sum N' e^h e'^h \sigma^{2f} \cos D, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$D = j\lambda_0 + j'\lambda' + k\omega + k'\pi' - 2g\tau'.$$

Так как

$$\lambda_0 = \lambda + \tau' - \tau, \quad \omega = \pi + \tau' - \tau, \quad (3)$$

причем разность  $\tau' - \tau$  зависит, как показывает формула (35) на стр. 245, лишь от  $i, i'$  и  $\Omega' - \Omega$ , то

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_0}, \quad \frac{\partial R}{\partial \pi} = \frac{\partial R}{\partial \omega}.$$

<sup>1</sup> В этой главе мы будем, по возможности, придерживаться обозначений Леве́рье. Заметим, что величины  $J, \sigma, \lambda, \lambda'$  и  $\lambda_0$  он обозначает соответственно через  $\gamma, \eta, l, l'$  и  $\lambda$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{2m'}{1+m} na^2 \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda_0}; & \frac{d^2 \Delta}{dt^2} &= \frac{-3m'}{1+m} n^2 a \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda_0} \\ \frac{dP_1}{dt} &= \frac{-2m'}{1+m} na^2 \frac{\partial R_{0,1}}{\partial a}; & \frac{dP_2}{dt} &= \frac{m'}{1+m} na \cos \varphi \frac{\partial R_{0,1}}{\partial e} \\ \frac{dP_3}{dt} &= \frac{-m'}{1+m} na \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \omega}; & \frac{dP_4}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\cos \varphi} \cos \frac{J}{2} \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \sigma} \\ & & \frac{dT}{dt} &= -\frac{1}{2} \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\sigma} \sec \varphi \sec \frac{J}{2} \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \tau'} \\ & & \frac{dV}{dt} &= -\frac{m'}{1+m} na \sec \varphi \operatorname{tg} \frac{J}{2} \left( \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \omega} \right). \end{aligned} \right\} (6)$$

Это позволяет придать окончательным уравнениям, определяющим элементы, такую форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{dL}{dt}, & \frac{d^2 p}{dt^2} &= \frac{d^2 \Delta}{dt^2} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{dP_1}{dt} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \frac{dP_2}{dt} + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{dP_3}{dt} - \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \frac{dL}{dt} \\ e \frac{d\pi}{dt} &= \frac{dP_2}{dt} + e \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{di}{dt} &= -\sin(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \cos(\tau - \Omega) \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) \\ \sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \cos(\tau - \Omega) \frac{dP_4}{dt} + \sin(\tau - \Omega) \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right). \end{aligned} \right\} (7)$$

Так как наклонности планетных орбит  $i, i', \dots$  малы, Леверрье вводит, вместо  $i$  и  $\Omega$ , элементы:

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega.$$

Дифференциальные уравнения, определяющие эти элементы, могут быть написаны в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \cos i \frac{dp}{dt} &= \cos \tau \frac{dP_4}{dt} + \sin \tau \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) + p \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{di}{dt} \\ \cos i \frac{dq}{dt} &= -\sin \tau \frac{dP_4}{dt} + \cos \tau \left( \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) + q \operatorname{tg} \frac{i}{2} \frac{di}{dt} \end{aligned} \right\} (8)$$

Употребление элементов  $p$  и  $q$  удобно не только потому, что их возмущения малы (тогда как возмущения  $\Omega$ , благодаря малому делителю в последнем из уравнений (7), могут стать очень большими), но еще и потому, что через эти величины особенно просто выражаются возмущения гелиоцентрической широты (§ 100).

§ 98. Возмущения элементов.

Обозначим через  $\delta_1 \lambda, \delta_1 a, \delta_1 e, \dots$  возмущения первого порядка средней долготы  $\lambda$  и элементов  $a, e, \dots$ . Из уравнений (7) получаем, считая элементы в правых частях постоянными и надлежаше определяя постоянные интегрирования:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 a &= L; & \delta_1 p &= \Lambda \\ \delta_1 e &= P_1 + P_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \delta_1 \Omega \\ \delta_1 \lambda &= \delta_1 p + \delta_1 e \\ \delta_1 e &= P_3 - \frac{1}{2a} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos \varphi L \\ e \delta_1 \pi &= P_2 + e \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i \delta_1 \Omega. \end{aligned} \right\} (9)$$

Интегрирование уравнений (6) после подстановки вместо  $R_{0,1}$  выражения (2) дает:

$$\begin{aligned} L &= \frac{2m' a^2}{(1+m) a'} \sum \frac{j}{j+j'\mu} N e^{h'e'h'} \sigma^{2f} \cos D \\ \Lambda &= -\frac{3m' a}{(1+m) a'} \sum \frac{j}{(j+j'\mu)^2} N e^{h'e'h'} \sigma^{2f} \sin D, \end{aligned}$$

где через  $\mu$  обозначено отношение средних движений  $n'/n$ .

Внося эти разложения в формулы (9), получим возмущения первого порядка элементов в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 a &= \sum A \cos D & \delta_1 \lambda &= \sum L \sin D \\ \delta_1 e &= \sum E \cos D & e \delta_1 \pi &= \sum P \sin D \end{aligned} \right\} (10)$$

где

$$D = j\lambda_0 + j'\lambda' + k\omega + k'\pi' - 2g\tau'.$$

Собирая в этих рядах члены, для которых  $j=j'=0$ , получим вековые возмущения; остальные члены дадут периодические неравенства.

Обозначая вековую часть какой-либо величины, например  $\delta_1 a$ , через  $[\delta_1 a]$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} [\delta_1 a] &= 0, & [\delta_1 p] &= 0, \\ [\delta_1 \lambda] &= [\delta_1 e] = [P_1] + [P_2] \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin i [\delta_1 \Omega], \end{aligned} \right\}$$

Пусть вековой член в средней долготе равен

$$[\delta_1 \lambda] = x t.$$

Средняя долгота будет вычисляться, с точностью до первых степеней масс, по формуле

$$\lambda = nt + \varepsilon_0 + x t + \text{период. члены.} \quad (11)$$

Таким образом, если среднее движение планеты находить при помощи долгот, полученных из наблюдений в две эпохи, разделенные значительным промежутком времени, как это делается на практике, то мы получим не  $n$ , а величину

$$n_1 = n + x. \quad (12)$$

Вычислим  $a_1$  при помощи соотношения

$$n_1^2 a_1^3 = k^2 (1 + m),$$

аналогичного равенству

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m),$$

которое связывает невозмущенное среднее движение и большую полуось.

Так как

$$a^3 = \frac{n_1^2 a_1^3}{(n_1 - x)^2},$$

то, с ошибкой порядка  $m'^2$ , которой можно пренебречь, будем иметь такое равенство:

$$a = a_1 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{x}{n_1} \right). \quad (13)$$

Итак, определив из наблюдений  $n_1$ , надо найти  $n$  и  $a$  при помощи равенств (12) и (13), и именно эти величины должны быть подставлены в формулы (10), дающие возмущения первого порядка.

Но при вычислении возмущений второго и высших порядков для средней долготы должна быть взята величина (11), иначе говоря,  $n$  должно быть заменено через  $n + x = n_1$ . Поэтому предпочитают ставить во всех аргументах  $D$  с самого начала  $n_1$  вместо  $n$ , чем учитывается, уже в первом приближении, некоторая (и притом довольно существенная) часть возмущений второго порядка.

При этом надо иметь в виду, что замена  $n$  через  $n_1$  может быть произведена лишь в аргументах  $D$ . Что же касается до коэффициентов уравнений (4) или (6), то в них всюду  $a$  имеет значение (13), а  $n$  представляет лишь сокращенное обозначение величины

$$k\sqrt{1+m} a^{-\frac{3}{2}} = n_1 - x.$$

Полезно отметить, что среднее движение планеты, даваемое в таблицах элементов, есть  $n_1$ , т. е. в него всегда включена постоянная часть возмущений. Сообразно с этим значение большой полуоси, даваемое таблицами и равное в наших обозначениях  $a_1$ , должно быть заменено, при вычислении возмущений, через

$$a = a_1 + \Delta a_1,$$

где

$$\Delta a_1 = \frac{2}{3} \frac{a_1}{n_1} x.$$

Так как в пределах принятой точности

$$\lg a = \lg (a_1 + \Delta a_1) = \lg a_1 + M \frac{\Delta a_1}{a_1}, \quad M = 0.43429 \dots,$$

то соответствующая поправка  $\lg a_1$  равна

$$\Delta \lg a_1 = \frac{2}{3} M \frac{x}{n_1}.$$

Производя вычисление первых членов формул (10), легко найти, что

$$\Delta \lg a_1 = -\frac{1}{6} M m' \alpha^2 \frac{db_1^{(0)}}{da} = -\frac{1}{6} M m' \alpha Dc_1^{(0)} \quad (14)$$

и аналогично для другой планеты

$$\Delta \lg a'_1 = \frac{1}{6} M m' (c_1^{(0)} + Dc_1^{(0)}). \quad (15)$$

При этом предполагается, конечно, что  $a = a_1/a'_1$  меньше единицы.

Для каждой планеты должна быть взята сумма таких поправок, соответствующих всем возмущающим планетам.

Чтобы дать представление о величине и характере периодических возмущений, приведем возмущения (10), производимые Венерой в движении Земли, согласно вычислениям Леверрье.

$j$	$j'$	$k$	$k'$	$-2g$	A	L	E	P
1	-1	0	0	0	+1".59	-3".49	-0".01	-0".05
2	-2	0	0	0	-0.86	-2.66	—	+0.00
3	-3	0	0	0	-0.53	-1.27	—	+0.01
4	-4	0	0	0	-0.34	-0.69	—	+0.01
5	-5	0	0	0	-0.22	-0.41	—	+0.01
6	-6	0	0	0	-0.15	-0.25	—	+0.01
7	-7	0	0	0	-0.10	-0.16	—	+0.01
8	-8	0	0	0	-0.07	-0.10	—	+0.01
9	-9	0	0	0	-0.05	-0.07	—	+0.01
<hr/>								
2	-1	0	-1	0	-0.07	+0.13	—	—
3	-2	0	-1	0	+0.13	+1.02	—	—
4	-3	0	-1	0	+0.04	+0.14	—	—
5	-4	0	-1	0	+0.02	+0.06	—	—
<hr/>								
0	+1	-1	0	0	—	—	+1.01	+1.01
1	0	-1	0	0	+0.03	+0.04	+0.91	+0.91
2	-1	-1	0	0	+0.12	-0.07	+1.72	+1.72
3	-2	-1	0	0	-0.42	-3.13	-4.17	-4.17
4	-3	-1	0	0	-0.14	-0.42	-1.02	-1.01
5	-4	-1	0	0	-0.08	-0.18	-0.48	-0.48
6	-5	-1	0	0	-0.06	-0.11	-0.27	-0.27
7	-6	-1	0	0	-0.04	-0.07	-0.16	-0.16
8	-7	-1	0	0	-0.03	-0.05	-0.10	-0.10
9	-8	-1	0	0	-0.02	-0.03	-0.07	-0.07
5	-3	0	-2	0	+0.01	-0.07	—	—
<hr/>								
5	-3	-1	-1	0	-0.04	+0.48	-0.26	-0.26
6	-4	-1	-1	0	+0.01	+0.06	+0.06	+0.06

$j$	$j'$	$k$	$k'$	$-2g$	A	L	E	P
5	-3	-2	0	0	+0.07	-0.77	+0.84	+0.84
6	-4	-2	0	0	-0.02	-0.09	-0.20	-0.20
7	-5	-2	0	0	-0.01	-0.03	-0.08	-0.08
5	-3	0	0	-2	+0.06	-0.62	—	—
6	-4	0	0	-2	-0.01	-0.07	—	—
8	-5	-2	-2	0	—	+0.08	+0.04	+0.04
8	-5	-3	0	0	-0.01	-0.08	-0.07	—
8	-5	-1	0	-2	-0.01	-0.16	-0.04	-0.04
13	-8	-2	-3	0	—	+0.14	+0.00	+0.00
13	-8	-3	-2	0	—	-0.46	-0.01	-0.01
13	-8	-4	-1	0	—	+0.74	+0.02	+0.02
13	-8	-5	0	0	—	-0.48	-0.02	-0.02
13	-8	0	-3	-2	—	+0.06	—	—
13	-8	-1	-2	-2	—	-0.58	-0.00	-0.00
13	-8	-2	-1	-2	—	+1.97	+0.02	+0.02
13	-8	-3	0	-2	—	-2.24	-0.04	-0.04
13	-8	0	-1	-4	—	+0.33	—	—
13	-8	-1	0	-4	—	-1.18	-0.01	-0.01

В этой таблице мы привели лишь те 44 аргумента, для которых имеется хотя бы один член, превосходящий 0.005. Леверрье вычислил все члены, достигающие 0.001, вследствие чего его таблица содержит 123 аргумента.<sup>1</sup>

Заметим, что для случая, когда одна из рассматриваемых планет — Земля, имеем:

$$\tau' - \tau = 0, \quad \lambda_0 = \lambda, \quad \omega = \pi,$$

вследствие чего аргумент  $D$  имеет вид:

$$D = j\lambda + j'\lambda' + k\pi + k'\pi' - 2g\tau.$$

### § 99. Возмущения элементов (второй порядок относительно масс).

После того как по формулам (10) найдены возмущения первого порядка как для планеты  $P$ , так и для всех других рассматриваемых планет  $P'$ ,  $P''$ , . . . , можно перейти к вычислению возмущений второго порядка.

<sup>1</sup> Коэффициенты, меньшие по абсолютной величине 0.001, заменены черточками.

Для этого в пертурбационной функции (1) надо заменить элементы  $a, e, \dots, a', e', \dots, a'', e'', \dots$  всех планет величинами

$$\begin{aligned} a + \delta_1 a, & \quad e + \delta_1 e, \dots \\ a' + \delta_1 a', & \quad e' + \delta_1 e', \dots \\ a'' + \delta_1 a'', & \quad e'' + \delta_1 e'', \dots \end{aligned}$$

Таким образом, для вычисления возмущений второго порядка уравнения (4) дадут уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_2 a}{dt} = \frac{2m'}{1+m} na^2 \left[ \frac{\partial^2 R_{0,1}}{\partial \lambda_0 \partial a} \delta_1 a + \dots + \frac{\partial^2 R_{0,1}}{\partial \lambda_0 \partial a'} \delta_1 a' + \dots \right] + \\ + \frac{2m'}{1+m} a^2 \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda_0} \delta_1 n + \frac{4m'}{1+m} na \frac{\partial R_{0,1}}{\partial \lambda_0} \delta_1 a. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя сюда выражения (2) и (10) и делая перемножение рядов, в результате получим в правой части ряд, расположенный по косинусам или синусам аргументов вида:

$$j\lambda_0 + j'\lambda' + j''\lambda'' + \dots + k\omega + k'\pi' + \dots$$

или

$$(jn + j'n' + j''n'' + \dots)t + \text{const.}$$

Следовательно, интегрирование уравнений вида (16) введет делители формы  $jn + j'n' + j''n'' + \dots$ . Если существуют небольшие по абсолютной величине целые числа  $j, j', j'', \dots$ , при которых эта сумма становится малым числом, то соответствующее возмущение второго порядка делается особенно значительным. Период такого возмущения, равный  $360^\circ : (jn + j'n' + j''n'' + \dots)$ , будет весьма велик.

В результате второго приближения для каждого элемента получится выражение вида

$$A + A't + A''t^2 + \sum B \cos(ht + q) + t \sum B' \cos(h't + q').$$

Вычисление возмущений второго порядка в элементах очень неудобно, так как требует вычисления большого количества членов в уравнениях вида (16). Эти трудности становятся еще более чувствительными при переходе к возмущениям третьего порядка. В следующей главе мы увидим, что определение возмущений второго и высших порядков в координатах выполняется много проще.

При построении теорий движения Меркурия, Венеры, Земли и Марса Леверрье мог ограничиться вычислением лишь очень немногих возмущений второго порядка. Для других же планет, в особенности для Юпитера и Сатурна, приходится принимать во внимание не только большое число возмущений второго порядка, но и некоторые возмущения третьего порядка. Работы Леверрье по вычислению этих возмущений для указанных планет были продолжены Гайо (A. Gaillot).

### § 100. Переход от возмущений в элементах к возмущениям в координатах. Построение таблиц.

После того как вычислены возмущения  $\delta_1 a, \dots, \delta_1 \lambda$  элементов и средней долготы, можно дать общие выражения координат планеты.

Рассмотрим сначала долготу в орбите  $w$ .

В невозмущенном движении она равна

$$w = \lambda + f, \quad (17)$$

где через  $f$  обозначено уравнение центра (§ 82).

$$f = H_1 \sin M + H_2 \sin 2M + \dots, \quad (18)$$

причем

$$H_1 = 2e - \frac{1}{4}e^3 + \dots, \quad H_2 = \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \dots$$

Средняя аномалия равна

$$M = \lambda - \pi; \quad (19)$$

поэтому, заменяя в равенстве (17)  $\lambda$ ,  $\pi$  и  $e$  значениями

$$\lambda + \delta_1 \lambda, \quad \pi + \delta_1 \pi, \quad e + \delta_1 e,$$

полученными в первом приближении, и ограничиваясь величинами первого порядка относительно масс, для возмущения долготы будем иметь следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta_1 w = & \delta_1 \lambda + \left\{ H_1 \cos(\lambda - \pi) + 2H_2 \cos 2(\lambda - \pi) + \dots \right\} \delta_1 \lambda - \\ & - \left\{ H_1 \cos(\lambda - \pi) + 2H_2 \cos 2(\lambda - \pi) + \dots \right\} \delta_1 \pi + \\ & + \left\{ \frac{dH_1}{de} \sin(\lambda - \pi) + \frac{dH_2}{de} \sin 2(\lambda - \pi) + \dots \right\} \delta_1 e. \quad (20) \end{aligned}$$

При помощи этой формулы учитываются обычно только короткопериодические возмущения  $\lambda$  и периодические возмущения  $\pi$  и  $e$ , что же касается до остальных возмущений этих элементов, то их влияние учитывается иначе, а именно следующим образом.

Формула (18) позволяет вычислить таблицу, дающую при определенном значении  $e$  уравнение центра  $f$  по аргументу  $M$ . Например, для Земли мы имеем согласно вычислениям Ньюкома (для среднего Гриничского полдня 0 января 1900 г.)

$$f = 6910''.057 \sin M + 72''.338 \sin 2M + \\ + 1''.054 \sin 3M + 0''.018 \sin 4M + \dots$$

При пользовании этой таблицей, для составления аргумента (19) берут значение  $\lambda$ , уже исправленное за долгопериодические возмущения, и значение  $\pi$ , уже заключающее вековую часть возмущений. Таким образом, на долю поправок  $\delta_1 \lambda$  и  $\delta_1 \pi$ , стоящих в формуле (20), остаются лишь периодические возмущения  $\pi$  и короткопериодические возмущения  $\lambda$ .

С другой стороны, влияние вековой части  $\delta_1 e$ , которую мы можем обозначить через  $[\delta_1 e]$ , выражается формулой

$$[f] = \left\{ \frac{dH_1}{de} \sin M + \frac{dH_2}{de} \sin 2M + \dots \right\} [\delta_1 e]$$

и учитывается отдельно при помощи специальной таблицы, дающей эту величину по аргументу  $M$ .

Для Земли

$$e = 0.016\,751\,04 - 0.000\,041\,80T - 0.000\,000\,126T^2 = \\ = 3455''.150 - 8''.621T - 0''.0260T^2,$$

где  $T$  есть время, считаемое от указанного выше начального момента и выраженное в юлианских столетиях. Поэтому влияние вековых возмущений эксцентриситета на уравнение центра таково:

$$[f] = (-17''.240T - 0''.052T^2) \sin M - 0''.361T \sin 2M - \\ - 0''.001T \sin 3M.$$

В таблицах движения Земли, построенных Ньюкомом (Astronomical Papers, Vol. VI), по аргументу  $M$  дается частное от деления этой величины на  $T + 0.0030T^2$ .

Заметим, что члены с  $T^2$  выражают вековые возмущения второго порядка.

Итак, под  $\delta_1 e$  в формуле (20) можно разуметь совокупность одних только периодических членов.

Вычисление суммы периодических членов, стоящих в формуле (20), облегчается несколькими специальными таблицами, каждая из которых дает сумму членов, зависящих от определенного аргумента  $j\lambda + j'\lambda'$ . Когда при помощи таких таблиц исчерпаны все наиболее значительные члены, сумму всех остальных остающихся в выражении (20) членов можно найти из таблицы с двумя входами, расположенной по аргументам  $\lambda$  и  $\lambda'$ .

Обратимся теперь к возмущениям логарифма радиуса-вектора. В невозмущенном движении он выражается формулой (§ 82)

$$\lg r = \lg a + A_0 + A_1 \cos M + A_2 \cos 2M + \dots, \quad (21)$$

где  $A_0, A_1, \dots$  — функции  $e$ .

Следовательно

$$\begin{aligned} \delta_1 \lg r = & \delta_1 \lg a - \left\{ A_1 \sin(\lambda - \pi) + 2A_2 \sin 2(\lambda - \pi) + \dots \right\} \delta_1 \lambda + \\ & + \left\{ A_1 \sin(\lambda - \pi) + 2A_2 \sin 2(\lambda - \pi) + \dots \right\} \delta_1 \pi + \\ & + \left\{ \frac{dA_0}{de} + \frac{dA_1}{de} \cos M + \frac{dA_2}{de} \cos 2M + \dots \right\} \delta_1 e. \quad (22) \end{aligned}$$

Формула (21) позволяет построить таблицу, которая дает, при определенном значении  $e$ , логарифм радиуса-вектора по аргументу

$$M = \lambda - \pi.$$

Для Земли такая таблица построена Ньюкомом на основании формулы

$$\lg r = 0.000\,030\,57 - 0.007\,274\,12 \cos M \\ - 0.000\,091\,38 \cos 2M \\ - 0.000\,001\,45 \cos 3M \\ - 0.000\,000\,02 \cos 4M.$$

Условимся включать в  $M$ , при пользовании этой таблицей, долгопериодическую часть  $\delta_1 \lambda$  (даваемую специальной таблицей) и вековую часть  $\delta_1 \pi$ .

Что касается до вековой части  $\delta_1 e$ , то влияние ее на  $\lg r$  легко может быть учтено при помощи особой таблицы. Например для Земли сумма членов формулы (22), соответствующих вековой части  $\delta_1 e$ , такова:

$$10^8 \cdot [\delta_1 \lg r] = \{-15 + (1814 + 5T) \cos M + 46 \cos 2M + \cos 3M\} T.$$

Ньюком дает таблицу, позволяющую по аргументу  $M$  находить частное от деления этой величины на  $T + 0.0030 T^2$ .

Сумма периодических членов, остающихся в формуле (22) после всех этих упрощений, частично вычисляется для каждой из возмущающих планет при помощи таблиц с одним входом, а остаток берется из таблицы с двумя входами.

Рассмотрим, наконец, определение гелиоцентрической долготы  $l$  и широты  $b$ .

В § 85 мы видели, что

$$l = w + R, \quad \sin b = \sin i \sin u, \quad (23)$$

где

$$R = -\frac{1}{\arcsin 1''} \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2} \sin 2u + \frac{1}{\arcsin 2''} \operatorname{tg}^4 \frac{i}{2} \sin 4u - \dots \quad (24)$$

есть приведение к эклиптике, а через  $u$  обозначен аргумент широты

$$u = w - \Omega. \quad (25)$$

Таким образом, взяв какое-либо определенное значение  $i$ , можно построить две таблицы, дающие по аргументу  $u$  соответственно  $R$  и  $b$ .

Полагая, как и раньше,

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega,$$

будем иметь

$$\sin b = \cos i (q \sin w - p \cos w).$$

Согласно общепринятому правилу, в аргументе (25) берется значение  $w$ , уже включающее все возмущения. Поэтому, обращаясь к вычислению  $\delta_1 b$ , мы можем считать, что в последнем равенстве только  $i$ ,  $p$ , и  $q$  получают приращения.

Следовательно

$$\delta_1 b = \frac{\cos i}{\cos b} (\sin w \cdot \delta_1 q - \cos w \cdot \delta_1 p) - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} i \cdot \delta_1 i. \quad (26)$$

Вековые возмущения  $\Omega$  учитывают, включая их в аргумент (25); влияние вековых возмущений  $i$  вычисляется по формуле

$$[\delta_1 b] = -\operatorname{tg} b \operatorname{tg} i [\delta_1 i],$$

которая для всех больших планет может быть приведена к виду

$$[\delta_1 b] = -A \sin u \cdot T$$

и заменена таблицей с аргументом  $u$ .

Таким образом при помощи формулы (26) нужно учесть влияние только периодических возмущений  $i$ ,  $p$  и  $q$ . Это делается так же, как и в предыдущих случаях.

Влияние векового возмущения  $i$  на приведение к эклиптике (24) учитывается очень просто; периодические возмущения  $i$  заметного изменения  $R$  не производят.

В качестве примера укажем выражения этих величин для Марса:

$$[\delta_2 b] = -2'' \cdot 246 \sin u \cdot T$$

$$R = -(53'' \cdot 791 - 0'' \cdot 036 T) \sin 2u - 0'' \cdot 007 \sin 4u,$$

лежащие в основе соответствующих таблиц Ньюкома.

**Примечание.** Нами рассмотрено получение формул, дающих члены первого порядка в возмущениях координат.

Члены второго порядка могут быть найдены совершенно так же, но это требует весьма громоздких вычислений.

Таблицы Леверрье дают возмущенные координаты  $r$ ,  $l$  и  $b$  для Меркурия, Венеры, Земли и Марса; что же касается остальных планет, для которых возмущения второго порядка играют существенную роль, то Леверрье ограничивается тем, что дает таблицы, позволяющие находить оскулирующие элементы этих планет для любого момента времени. Координаты, таким образом, приходится вычислять по обычным формулам эллиптического движения.

### § 101. Вычисление вековых возмущений по методу Гаусса.

В формулах, дающих возмущения элементов какой-либо планеты коэффициенты вековых членов должны быть вычислены с большею точностью, чем коэффициенты всех остальных членов, так как влияние вековых членов растет пропорционально времени.

Между тем изложенный в предыдущих параграфах метод вычисления дает коэффициенты всех возмущений с одинаковою точностью; эта точность определяется той степенью эксцентриситетов и взаимной наклонности орбит, до которой доведено разложение пертурбационной функции.

Гаусс предложил (1818) особый метод для вычисления вековых возмущений первого порядка, позволяющий находить их независимо от всех остальных возмущений. Этот метод не требует разложения пертурбационной функции в ряд, а потому он одинаково применим при любых эксцентриситетах и наклонностях орбит.

В § 12 нами были даны формулы (37), выражающие производные элементов через компоненты возмущающего ускорения. Эти формулы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= r \cos u W_1 \\ \frac{de}{dt} &= p \sin v S_1 + p (\cos v + \cos E) T_1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{k\sqrt{p}} S, \quad T_1 = \frac{1}{k\sqrt{p}} T, \quad W_1 = \frac{1}{k\sqrt{p}} W,$$

причем через  $S$ ,  $T$ , и  $W$  обозначены компоненты возмущающего ускорения.

В том случае, когда возмущающее ускорение вызывается притяжением одной планеты  $P'$ , компоненты  $S$ ,  $T$ ,  $W$  будут равны производным пертурбационной функции по направлению радиуса-вектора и двух перпендикуляров к нему, одного в плоскости орбиты, другого — нормального к плоскости орбиты (§ 11).

Но уже было отмечено (§ 88), что вторая часть пертурбационной функции вековых возмущений не дает; поэтому здесь мы можем эту функцию заменить ее главной частью

$$m' \Delta^{-1}, \tag{28}$$

где  $\Delta$  есть расстояние между планетами  $P$  и  $P'$ , а  $m'$  — масса планеты  $P'$ .

Пользуясь уже изученным разложением пертурбационной функции в ряд, каждое из уравнений (27) можно представить в форме

$$\frac{di}{dt} = \left[ \frac{di}{dt} \right] + \sum A_{i,j} \cos(jM + j'M' + Q), \tag{29}$$

где через  $\left[ \frac{di}{dt} \right]$  обозначен постоянный член разложения.

Предполагая, как всегда, что средние движения  $n$  и  $n'$  несоизмеримы, так что выражение  $jn + j'n'$  равняется нулю только при  $j = j' = 0$ , после интегрирования получим:

$$i = i_0 + \left[ \frac{di}{dt} \right] t + \sum \frac{A_{i,j}}{jn + j'n'} \sin(jM + j'M' + Q).$$

Таким образом, вычисление вековых возмущений первого порядка эквивалентно вычислению постоянных членов разложений вида (29).

Из равенства (29) следует, что

$$\left[ \frac{di}{dt} \right] = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{di}{dt} dM dM';$$

иначе говоря, искомые постоянные члены получаются путем осреднения величин (27) по переменным  $M$  и  $M'$ .

Так как от  $M'$  в выражениях (27) зависят только  $S_1, T_1, W_1$ , то, производя интегрирование сначала по  $M'$ , а потом по  $M$  и полагая

$$S_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_1 dM' = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k\sqrt{p}} \int_0^{2\pi} S dM' \tag{30}$$

и аналогично для  $T_0$  и  $W_0$ , окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{di}{dt} \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \cos u W_0 dM \\ \left[ \frac{de}{dt} \right] &= \frac{p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin v S_0 dM + \frac{p}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos v + \cos E) T_0 dM \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

Займемся прежде всего вычислением интегралов (30).

На основании того, что было сказано выше относительно замены пертурбационной функции выражением (28), мы можем рассматривать интегралы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S dM', \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T dM', \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W dM', \tag{32}$$

как компоненты притяжения, соответствующего потенциалу

$$\frac{m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dM'}{\Delta}.$$

Этот потенциал имеет весьма простую механическую интерпретацию. В самом деле, представим себе, что масса планеты  $P'$  распределена вдоль орбиты этой планеты таким образом, что на каждый линейный элемент орбиты приходится элемент массы  $dm'$ , пропорциональный тому времени  $dt$ , в течение которого планета описывает этот линейный элемент, так что

$$\frac{dm'}{m'} = \frac{dt}{P'},$$

если через  $P'$  обозначить время обращения планеты  $P'$ .

Но

$$\frac{dt}{P'} = \frac{n' dt}{n' P'} = \frac{dM'}{2\pi},$$

следовательно

$$\frac{m'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dM'}{\Delta} = \int \frac{dm'}{\Delta},$$

а это выражение есть не что иное, как потенциал эллиптического кольца, получающегося от распределения массы планеты  $P'$  вдоль ее орбиты только что указанным способом.

Итак, задача приводится к вычислению компонентов притяжения материального эллиптического кольца, плотность которого определяется законом Кеплера. Не останавливаясь на выполнении этого вычисления, отметим только, что искомые интегралы (32) легко находятся при помощи эллиптических функций.

После того, как дано средство для вычисления значений интегралов (32), а следовательно и величин  $S_0, T_0, W_0$ , в любой точке пространства, мы можем перейти к вычислению величин (31). Стоящие в формулах (31) интегралы находятся численно: каждая из подинтегральных функций, например  $r \cos u W_0$ , вычисляется для равноотстоящих значений  $M$ , и затем берется среднее из этих значений.

Возьмем например разложение

$$\begin{aligned} r \cos u W_0 &= a_0 + a_1 \cos M + a_2 \cos 2M + \dots \\ &\quad + b_1 \sin M + b_2 \sin 2M + \dots \end{aligned} \tag{33}$$

и применим обычный метод гармонического анализа.

Обозначим через  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{k-1}$  значения функции (33), соответствующие значениям

$$M = 0, \frac{2\pi}{k}, 2 \frac{2\pi}{k}, \dots, (k-1) \frac{2\pi}{k}; \tag{34}$$

в таком случае

$$\left[ \frac{di}{dt} \right] = a_0 = \frac{1}{k} (\Phi_0 + \Phi_1 + \dots + \Phi_{k-1}) - a_k - a_{2k} - a_{3k} - \dots$$

Ряд (33) сходится настолько быстро, что уже при небольших значениях  $k$  вековые возмущения получаются с большой точностью. Можно

показать, что делаемая ошибка будет относительно эксцентриситетов и взаимной наклонности орбит порядка  $k-1$  для вековых возмущений  $i, \Omega, e, \pi$  и порядка  $k$  для вековых возмущений средней долготы эпохи  $\epsilon$ .

Нередко в интегралах (31) вместо переменного  $M$  вводится эксцентрисическая аномалия при помощи равенства

$$dM = (1 - e \cos E) dE,$$

т. е. осреднение по  $M$  заменяется осреднением по  $E$ . При значительных величинах эксцентриситета  $e$ , точки, соответствующие равноотстоящим значениям  $E$ , располагаются по орбите гораздо более равномерно, чем точки (34), как мы уже отмечали в § 69.

Следует, однако, заметить, что преимущества употребления  $E$  в качестве независимой переменной не так уже несомненны, ибо, при равномерном распределении выбираемых точек вдоль орбиты, части орбиты, проходимые быстро и проходимые медленно, получают одинаковый вес. Поэтому нет оснований думать, что замена  $M$  переменной  $E$  существенно уменьшает число  $k$ .

Интересное обобщение ограниченной проблемы трех тел указал Фату:<sup>1</sup> он рассматривает движение материальной точки  $P$  с бесконечно малой массой в поле тяготения центрального тела  $S$  и нескольких материальных эллиптических колец с вышеуказанным распределением плотностей.

### § 102. Дифференциальные уравнения, данные Лагранжем для определения вековых возмущений.

Если движение планеты изучается в течение небольшого промежутка времени, порядка нескольких столетий, то можно, вообще говоря, ограничиться вековыми возмущениями первого порядка. В этом случае их лучше всего вычислять при помощи метода Гаусса, дающего эти возмущения без особых затруднений с произвольной точностью относительно эксцентриситетов и наклонностей.

Если имеются в виду более значительные промежутки времени, то приходится обратиться к методам, изложенным в §§ 98 и 99, которые позволяют найти вековые возмущения второго, третьего и т. д. порядков. Однако количество требующейся при этом работы возрастает очень быстро при увеличении порядка, так что практически итти дальше третьего порядка едва ли возможно.

Наконец в тех случаях, когда нужно охарактеризовать движение планеты в течение очень большого интервала времени, решающее значение имеют члены нулевого ранга, т. е. члены, имеющие множителем возмущающие массы и время в одной и той же степени (§ 15). Метод вычисления вековых возмущений, который был предложен Лагранжем и к изучению которого мы сейчас переходим, дает, в сущности, как раз именно все члены нулевого ранга, хотя и с очень небольшой точностью относительно эксцентриситетов и взаимной наклонности орбит.

Лагранж поставил вопрос об интегрировании уравнений (41) § 13, определяющих элементы орбиты, при условии, что в пертурбационной функции, стоящей в правых частях этих уравнений, отброшены все периодические члены. Конечно, без специального исследования нельзя утверждать, что интегрирование усеченных таким образом уравнений даст

<sup>1</sup> P. Fatou, Sur le mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation fixe, Acta astronomica, Sér. a, Vol. 2, 1931, 101—164.

вполне точные значения всех тех возмущений, которые при интегрировании полных уравнений способом последовательных приближений получаются в виде вековых членов. Тем не менее можно думать, что результат интегрирования усеченных уравнений достаточно хорошо освещает характер движения на чрезвычайно большой промежуток времени и потому является весьма ценным с точки зрения Космогонии.

Заменяя в правых частях уравнений Лагранжа пертурбационную функцию ее вековыми членами, мы ограничимся в разложении этой функции членами в т о р о й степени относительно эксцентриситетов и наклонностей, так как только при таком ограничении удалось выполнить точное интегрирование рассматриваемых уравнений.

Обращаясь к разложению (36) § 90 и замечая, что вторая часть пертурбационной функции вековых членов дать не может, мы получим, в пределах указанной точности, вековую часть пертурбационной функции в следующем виде:

$$R_{0,1} = \frac{k^2 m'}{a'} \left\{ \frac{1}{2} c_1^{(0)} - \frac{1}{2} \sigma^2 c_3^{(1)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) (D + D^2) c_1^{(0)} - \frac{1}{4} e e' (D + D^2) c_1^{(1)} \cos (\Pi' - \Pi) \right\}.$$

Так как

$$\Pi' - \Pi = (\pi' - \tau') - (\pi - \tau) = \pi' - \pi - (\tau' - \tau)$$

и, как показывает формула (35) § 89, разность  $\tau' - \tau$  есть малая величина второго порядка относительно наклонностей, то, в пределах принятой точности, мы можем заменить  $\cos (\Pi' - \Pi)$  через  $\cos (\pi' - \pi)$ .

С другой стороны, с той же точностью, имеем

$$\begin{aligned} 2\sigma^2 &= 2\sin^2 \frac{J}{2} = 1 - \cos J = 1 - \cos i \cos i' - \sin i \sin i' \cos (\Omega' - \Omega) = \\ &= 2\sin^2 \frac{i}{2} + 2\sin^2 \frac{i'}{2} - \sin i \sin i' \cos (\Omega' - \Omega) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 i + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 i' - \operatorname{tg} i \operatorname{tg} i' \cos (\Omega' - \Omega). \end{aligned}$$

Поэтому мы можем положить

$$R_{0,1} = k^2 m' \{ M_{0,1} + N_{0,1} [e^2 + e'^2 - \operatorname{tg}^2 i - \operatorname{tg}^2 i' + 2 \operatorname{tg} i \operatorname{tg} i' \cos (\Omega' - \Omega)] - 2P_{0,1} e e' \cos (\pi' - \pi) \}, \quad (35)$$

где через  $M_{0,1}$ ,  $N_{0,1}$ ,  $P_{0,1}$  обозначены коэффициенты, зависящие только от  $a$  и  $a'$ . Можно отметить, что эти коэффициенты являются, как это следует из формул § 88, симметрическими функциями  $a$  и  $a'$ .

Вместо обычных элементов  $e$ ,  $\pi$  и  $i$ ,  $\Omega$  введем, следуя Лагранжу, переменные

$$h = e \sin \pi, \quad l = e \cos \pi, \quad (36)$$

$$p = \operatorname{tg} i \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \Omega, \quad (37)$$

что дает возможность переписать выражение (35) следующим образом:

$$R_{0,1} = k^2 m' \{ M_{0,1} + N_{0,1} [h^2 + l^2 + h'^2 + l'^2 - p^2 - q^2 - p'^2 - q'^2 + 2(pp' + qq')] - 2P_{0,1} (hh' + ll') \}, \quad (38)$$

где  $h'$ ,  $l'$ ,  $p'$ ,  $q'$  определяются формулами, аналогичными (36) и (37).

Обратимся теперь к выводу дифференциальных уравнений, определяющих новые элементы (36) и (37). Так как

$$\frac{dh}{dt} = \sin \pi \frac{de}{dt} + e \cos \pi \frac{d\pi}{dt}, \quad \frac{dl}{dt} = \cos \pi \frac{de}{dt} - e \sin \pi \frac{d\pi}{dt},$$

то, пользуясь уравнениями (41) § 13 и замечая, что

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial R}{\partial h} \sin \pi + \frac{\partial R}{\partial l} \cos \pi$$

$$\frac{\partial R}{\partial \pi} = \frac{\partial R}{\partial h} l - \frac{\partial R}{\partial l} h,$$

легко найдем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \left( \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) + \frac{l \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{\sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \left( -\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{l}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial e} \right) - \frac{h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \end{aligned} \right\} (39)$$

Дифференцирование выражения (38) по  $h$ ,  $l$  и  $i$  даст члены первой степени относительно малых величин, по которым ведется разложение. Поэтому, отбрасывая члены третьей степени, получим:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h}. \quad (40)$$

В том случае, когда изучаются вековые возмущения, происходящие от взаимодействия двух планет  $P$  и  $P'$ , надо в уравнениях (40) заменить  $R$  выражением (38). Но мы рассмотрим сразу более общую проблему, когда имеется произвольное число планет и требуется определить вековые возмущения их элементов.

Обозначим через  $m_0, m_1, m_2, \dots$  массы планет  $P, P', P'', \dots$ ; через  $a_0, a_1, \dots; e_0, e_1, \dots$  обозначим их элементы.

Применяя уравнения (40) к планете  $P^{(\mu)}$ , получим:

$$\frac{dh_\mu}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial l_\mu}, \quad \frac{dl_\mu}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R_\mu}{\partial h_\mu}, \quad (41)$$

где на основании (38):

$$\begin{aligned} R_\mu &= \sum_\nu R_{\mu,\nu} = \sum_\nu k^2 m_\nu M_{\mu,\nu} + \sum_\nu k^2 m_\nu N_{\mu,\nu} [h_\mu^2 + l_\mu^2 + \\ &+ h_\nu^2 + l_\nu^2 - p_\mu^2 - q_\mu^2 - p_\nu^2 - q_\nu^2 + 2(p_\mu p_\nu + q_\mu q_\nu)] - \\ &- \sum_\nu k^2 m_\nu P_{\mu,\nu} (h_\mu h_\nu + l_\mu l_\nu), \end{aligned} \quad (42)$$

причем условимся считать, чтобы не делать исключений при суммировании, что

$$M_{\mu,\mu} = N_{\mu,\mu} = P_{\mu,\mu} = 0.$$

Полагая для краткости

$$\frac{2k^2 m_\nu}{n_\mu a_\mu^2} N_{\mu,\nu} = (\mu, \nu), \quad \frac{2k^2 m_\nu}{n_\mu a_\mu^2} P_{\mu,\nu} = [\mu, \nu],$$

мы можем результат подстановки выражения (42) в уравнения (41) написать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh_\mu}{dt} - A_{\mu,\mu} l_\mu + [\mu, 0] l_0 + [\mu, 1] l_1 + \dots &= 0 \\ \frac{dl_\mu}{dt} + A_{\mu,\mu} h_\mu - [\mu, 0] h_0 - [\mu, 1] h_1 - \dots &= 0, \end{aligned} \right\} (43)$$

где

$$A_{\mu,\mu} = (\mu, 0) + (\mu, 1) + (\mu, 2) + \dots \quad (44)$$

Так как каждый из коэффициентов  $N_{\mu,\nu}, P_{\mu,\nu}$  есть симметрическая функция  $a_\mu$  и  $a_\nu$ , то имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} m_\mu n_\mu a_\mu^2 (\mu, \nu) &= m_\nu n_\nu a_\nu^2 (\nu, \mu) \\ m_\mu n_\mu a_\mu^2 [\mu, \nu] &= m_\nu n_\nu a_\nu^2 [\nu, \mu]. \end{aligned} \right\} (45)$$

Таким образом, определение вековых возмущений эксцентриситетов  $e_0, e_1, e_2, \dots$  и долгот перигелиев  $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$  приводится, в пределах принятой точности, к интегрированию уравнений (43).

Обращаясь теперь к переменным (37), определяющим положение орбиты, находим, прежде всего:

$$\frac{dp}{dt} = \operatorname{tg} i \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \sin \Omega \sec^2 i \frac{di}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\operatorname{tg} i \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt} + \cos \Omega \sec^2 i \frac{di}{dt}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = \operatorname{tg} i \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial p} - \operatorname{tg} i \sin \Omega \frac{\partial R}{\partial q}$$

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \sec^2 i \sin \Omega \frac{\partial R}{\partial p} + \sec^2 i \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial q}.$$

Учитывая, далее, уравнения (41) § 13, легко получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p \sec i \sec^2 \frac{i}{2}}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right) \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{-\sec^3 i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q \sec i \sec^2 \frac{i}{2}}{2na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial e} \right). \end{aligned} \right\} (46)$$

Так как в настоящем случае  $R$  выражается формулой (42), то  $\frac{\partial R}{\partial e} = 0$ , а  $\frac{\partial R}{\partial \pi}$  есть величина второго порядка. Поэтому, отбрасывая члены третьей степени, будем иметь:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial p}. \quad (47)$$

Подстановка выражения (42) в аналогичные уравнения, определяющие  $p_\mu, q_\mu$ , даст окончательно такую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_\mu}{dt} + A_{\mu,\mu} q_\mu - (\mu, 0) q_0 - (\mu, 1) q_1 - \dots = 0 \\ \frac{dq_\mu}{dt} - A_{\mu,\mu} p_\mu + (\mu, 0) p_0 + (\mu, 1) p_1 + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Решением систем (43) и (48) мы займемся в следующем параграфе, а сейчас ограничимся получением тех замечательных первых интегралов этих систем, которые были открыты Лапласом.

Умножим уравнения (43) соответственно на  $m_\mu n_\mu a_\mu^2 h_\mu$  и  $m_\mu n_\mu a_\mu^2 l_\mu$ , сложим их и результат просуммируем. Это даст, в силу соотношений (45),

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 \left( h_\mu \frac{dh_\mu}{dt} + l_\mu \frac{dl_\mu}{dt} \right) = 0,$$

или

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 (h_\mu^2 + l_\mu^2) = C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная, определяемая начальными условиями движения.

Принимая во внимание (36), окончательно получим:

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 e_\mu^2 = C. \quad (49)$$

Таким же точно образом для уравнений (48) находим первый интеграл

$$\sum m_\mu n_\mu a_\mu^2 \operatorname{tg}^2 i_\mu = C'. \quad (50)$$

В настоящее время эксцентриситеты и наклонности орбит — малые величины, следовательно и постоянные  $C$  и  $C'$  также малы. Так как все члены в суммах (49) и (50) положительны, то Лаплас считал возможным заключить отсюда, что и в будущем все  $e_\mu$  и  $i_\mu$  останутся малыми величинами. Но такое заключение справедливо лишь в отношении тех планет, масса которых составляет значительную часть суммы всех планетных масс. Если же масса какой-либо планеты очень мала, то эксцентриситет и наклонность такой планеты могут, не нарушая равенств (49) и (50), стать весьма значительными.

Так как

$$n_\mu = k \sqrt{1 + m_\mu} a_\mu^{-\frac{3}{2}},$$

то, пренебрегая величинами второго порядка относительно масс, равенства (49), (50) можно заменить такими:

$$\sum m_\mu \sqrt{a_\mu} e_\mu^2 = \text{const}$$

$$\sum m_\mu \sqrt{a_\mu} \operatorname{tg}^2 i_\mu = \text{const}$$

§ 103. Тригонометрические выражения вековых возмущений.

Обратимся теперь к решению уравнений (43). Согласно общей теории интегрирования систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, будем искать частные решения в такой форме:

$$h_\mu = \frac{L^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \sin(st + \beta), \quad l_\mu = \frac{L^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}} \cos(st + \beta), \quad (51)$$

где  $s, \beta$  и  $L^{(\mu)}$  — постоянные числа.

Подстановка этих выражений в уравнения (43) дает следующую систему для определения  $s$  и  $L^{(\mu)}$ :

$$\left. \begin{aligned} (A_{0,0} - s) L^{(0)} + A_{0,1} L^{(1)} + \dots + A_{0,m} L^{(m)} = 0 \\ A_{1,0} L^{(0)} + (A_{1,1} - s) L^{(1)} + \dots + A_{1,m} L^{(m)} = 0 \\ \dots \\ A_{m,0} L^{(0)} + A_{m,1} L^{(1)} + \dots + (A_{m,m} - s) L^{(m)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

причем через  $m+1$  обозначено число планет и для краткости положено

$$A_{\mu,\nu} = -\frac{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}}{a_\nu \sqrt{m_\nu n_\nu}} [\mu, \nu], \quad \mu \neq \nu. \quad (53)$$

Равенства (45) показывают, что

$$A_{\mu,\nu} = A_{\nu,\mu}.$$

Таким образом, определитель этой системы:

$$D(s) = \begin{vmatrix} A_{0,0} - s & A_{0,1} & \dots & A_{0,m} \\ A_{1,0} & A_{1,1} - s & \dots & A_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,0} & A_{m,1} & \dots & A_{m,m} - s \end{vmatrix} \quad (54)$$

симметричен относительно главной диагонали.

Обозначим через  $s_0, s_1, \dots, s_m$  корни уравнения

$$D(s) = 0; \quad (55)$$

через  $L_\lambda^{(\mu)}$  — значения коэффициентов, получаемые из уравнений (52) при  $s = s_\lambda$ . Один из этих коэффициентов остается произвольным, вследствие чего мы можем положить

$$L_\lambda^{(\mu)} = C_\lambda q_\lambda^{(\mu)},$$

где  $C_0, C_1, \dots, C_m$  — произвольные постоянные, а  $q_\lambda^{(\mu)}$  — вполне определенные числа.

Так как параметр  $\beta$  в каждом частном решении (51) остается произвольным, то, обозначая через  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$  еще  $m+1$  произвольных

постоянных, мы можем общее решение системы (43) написать следующим образом:

$$\begin{aligned} h_\mu &= \sum M_\lambda^{(\mu)} \sin(s_\lambda t + \beta_\lambda) \\ l_\mu &= \sum M_\lambda^{(\mu)} \cos(s_\lambda t + \beta_\lambda), \end{aligned} \quad (56)$$

где положено

$$M_\lambda^{(\mu)} = \frac{L_\lambda^{(\mu)}}{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}}. \quad (57)$$

Свойства полученного решения зависят прежде всего от характера корней уравнения (55), получившего название векового уравнения.

Лагранж ограничился тем, что вычислил корни векового уравнения для тех значений постоянных, которые имеют место в солнечной системе, и убедился, что эти корни действительны и неравны между собой. Лапласу удалось показать, при помощи интеграла (49), что каковы бы ни были эти постоянные, уравнение (55) не может иметь комплексных корней.

Действительно, если бы среди корней уравнения (55) были комплексные, то соответствующие члены выражений (56) содержали бы показательные функции и потому сумма  $h^2 + l^2$  возрастала бы, при  $t \rightarrow \pm \infty$ , до бесконечности, что противоречит соотношению (49).

Лаплас пытался доказать таким же способом отсутствие у векового уравнения равных корней, но при этом впал в ошибку: он считал, что при наличии равных корней в общем интеграле (56) обязательно должны появиться в качестве множителей тригонометрических функций полиномы относительно  $t$ , что было бы опять несовместимо с (49). Однако, как почти одновременно отметили Вейерштрасс (1858) и О. И. Сомов (1859), в случае равных корней вовсе необязательно, чтобы  $t$  фигурировало в общем интеграле вне знаков тригонометрических функций.

Когда рассматриваются только две планеты, невозможность равных корней доказывается очень просто, непосредственной проверкой. Для случая трех планет эта невозможность была доказана Зеелигером (Н. v. Seeliger) в 1878 г.

Для того чтобы получить предельные значения эксцентриситета  $e_\mu$ , возведем выражения (56) в квадрат и сложим. Это даст:

$$\begin{aligned} e_\mu^2 &= M_0^{(\mu)2} + M_1^{(\mu)2} + M_2^{(\mu)2} + \dots \\ &+ 2M_0^{(\mu)} M_1^{(\mu)} \cos[(s_0 - s_1)t + \beta_0 - \beta_1] \\ &+ 2M_0^{(\mu)} M_2^{(\mu)} \cos[(s_0 - s_2)t + \beta_0 - \beta_2], \\ &+ \dots \end{aligned}$$

откуда ясно, что

$$e_\mu < |M_0^{(\mu)}| + |M_1^{(\mu)}| + \dots \quad (58)$$

Заметим, что в случае, когда в формулах (56) один из коэффициентов (57), например  $M_p^{(\mu)}$ , превосходит по абсолютной величине сумму всех остальных коэффициентов, перигелий планеты  $P^{(\mu)}$  будет иметь поступательное движение, обладающее средней скоростью  $s_p$ .

Действительно, комбинируя равенства (56), будем иметь:

$$\begin{aligned} e_\mu \sin(\pi_\mu - s_p t - \beta_p) &= + \sum M_\lambda^{(\mu)} \sin[(s_\lambda - s_p)t + \beta_\lambda - \beta_p] \\ e_\mu \cos(\pi_\mu - s_p t - \beta_p) &= M_p^{(\mu)} + \sum M_\lambda^{(\mu)} \cos[(s_\lambda - s_p)t + \beta_\lambda - \beta_p]. \end{aligned}$$

По условию

$$|M_p^{(\mu)}| > \sum_{\lambda \neq p} |M_\lambda^{(\mu)}|,$$

следовательно  $\cos(\pi_\mu - s_p t - \beta_p)$  никогда не может обратиться в нуль, а потому

$$\pi_\mu = s_p t + \beta_p + k \cdot 180^\circ + \delta_\mu(t),$$

где  $k$  — целое число, а последний член всегда удовлетворяет условию

$$-90^\circ < \delta_\mu(t) < +90^\circ.$$

Таким образом, перигелий рассматриваемой планеты никогда не отойдет больше чем на  $90^\circ$  от точки, движущейся равномерно со скоростью  $s_p$ .

Обратимся теперь к уравнениям (48), определяющим  $p_\mu, q_\mu$ . Поскольку эти уравнения имеют ту же форму, что и уравнения (43), мы можем сразу написать их общее решение следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p_\mu &= \sum N_\lambda^{(\mu)} \sin(\sigma_\lambda t + \tau_\lambda) \\ q_\mu &= \sum N_\lambda^{(\mu)} \cos(\sigma_\lambda t + \tau_\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Через  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  обозначены корни векового уравнения]

$$D'(\sigma) = 0, \quad (60)$$

имеющего ту же структуру, что и уравнение (55), только на этот раз

$$A_{\mu,\nu} = -\frac{a_\mu \sqrt{m_\mu n_\mu}}{a_\nu \sqrt{m_\nu n_\nu}} (\mu, \nu) \quad (61)$$

для  $\mu \neq \nu$ .

Примечание. Так как все величины  $A_{\mu,\mu}$  и  $A_{\mu,\nu}$ , входящие в вековые уравнения (55) и (60), порядка планетных масс, то и корни этих уравнений будут, вообще говоря, величинами первого порядка относительно этих масс.

Таким образом, разлагая выражения (56) и (59) в ряды по степеням  $s_\lambda t$  и  $\sigma_\lambda t$ , мы получим члены нулевого ранга.

### § 104. Вековые возмущения больших планет.

Численные значения коэффициентов формул (56) и (59) были впервые определены самим Лагранжем. Но его результаты представляют лишь исторический интерес, так как Уран еще не мог фигурировать в этих вычислениях, не говоря уже о том, что для масс Меркурия, Венеры

и Марса были взяты гипотетические величины, полученные путем умножения объема на некоторую предположительную плотность.

В 1839 г. Леверрье повторил эти вычисления с лучшими значениями постоянных и уже принимая во внимание Уран. Но действие Нептуна, открытого Леверрье в 1846 г., еще не могло быть учтено. Наиболее полные результаты в этом отношении получены Стокуэллом,<sup>1</sup> который в основу вычислений положил нижеследующие значения масс, средних годовых движений и больших полуосей.

Таблица 1

П л а н е т а	1 : $m$	$n$	$a$
Меркурий . . . . .	4 865 751	5 381 016 <sup>2</sup>	0.387 0987
Венера . . . . .	390 000	2 106 641.438	0.723 3323
Земля . . . . .	368 689	1 295 977.440	1.000 0000
Марс . . . . .	2 680 637	689 050.9023	1.523 6378
Юпитер . . . . .	1 047.879	109 256.719	5.202 798
Сатурн . . . . .	3 501.6	43 996.127	9.538 852
Уран . . . . .	24 905	15 424.5094	19.183 581
Нептун . . . . .	18 780	7 873.993	30.033 86

Приняв, далее, значения интересующих нас элементов для 1.0 января 1850 г., указанные в таблице 2 (в основу положены эклиптика и равноденствие 1850.0), он нашел те значения параметров, фигурирующих в формулах (56) и (59), которые приведены в таблице 3 и таблице 4.

Таблица 2

$\mu$	П л а н е т а	$e$	$\pi$	$i$	$\Omega$
0	Меркурий . . . . .	0.205 6179	75° 7' 0 <sup>0</sup>	7° 0' 8 <sup>2</sup>	46° 33' 3 <sup>2</sup>
1	Венера . . . . .	0.006 8418	129 28 51.7	3 23 34.4	75 20 42.9
2	Земля . . . . .	0.016 7712	100 21 41.0	0 0 0.0	0 0 0.0
3	Марс . . . . .	0.093 1324	333 17 47.8	1 51 2.3	48 23 36.8
4	Юпитер . . . . .	0.048 2388	11 54 53.1	1 18 40.3	98 54 20.5
5	Сатурн . . . . .	0.055 9956	90 6 12.0	2 29 22.4	112 19 20.6
6	Уран . . . . .	0.046 2149	170 34 17.6	0 46 29.9	73 14 14.4
7	Нептун . . . . .	0.009 1740	50 16 39.1	1 47 0.9	130 7 45.3

Полученные Стокуэллом числа позволяют, прежде всего, фиксировать границы, в которых изменяются средние величины эксцентриситетов и наклонов, причем под средними величинами мы разумеем, как всегда, значения этих элементов, получаемые при

<sup>1</sup> J. N. Stockwell, Smithsonian Contributions to Knowledge, Vol. 18, 1870, Washington 1873.

Таблица 3.

	7	6	5	4	3	2	1	0
$\lambda =$	22 <sup>2</sup> .460 848	3 <sup>3</sup> .716 607	2 <sup>2</sup> .727 659	0 <sup>0</sup> .616 685	17 <sup>1</sup> .784 456	17 <sup>1</sup> .014 373	7 <sup>1</sup> .248 427	5 <sup>1</sup> .463 803
$s_\lambda =$	307° 56' 50 <sup>2</sup>	28° 8' 46 <sup>2</sup>	105° 3' 53 <sup>2</sup>	67° 56' 35 <sup>2</sup>	137° 6' 36 <sup>2</sup> .5	335° 11' 31 <sup>2</sup>	20° 50' 19 <sup>2</sup>	88° 0' 38 <sup>2</sup>
$\beta_\lambda =$	—	+0.024 4939	+0.000 5685	+0.000 0077	+0.001 5934	+0.001 4673	+0.026 8838	+0.176 6064
$M_\lambda^{(0)} =$	+0.000 3175	+0.016 6053	+0.000 5571	+0.000 0117	—0.013 1892	—0.011 2171	—0.020 1444	+0.008 5906
$M_\lambda^{(1)} =$	—0.002 3780	+0.016 3413	+0.000 5832	+0.000 0136	+0.016 2641	+0.011 3105	—0.015 3619	+0.005 4825
$M_\lambda^{(2)} =$	—0.015 0371	+0.018 7954	+0.000 7765	+0.000 0219	—0.079 0650	+0.022 5719	—0.002 5451	+0.000 8418
$M_\lambda^{(3)} =$	+0.015 6383	+0.043 1601	+0.001 9436	+0.000 0636	+0.000 0011	—0.000 0011	+0.000 0106	—0.000 0090
$M_\lambda^{(4)} =$	+0.048 5504	+0.034 1011	+0.001 7694	+0.000 0717	+0.000 0110	—0.000 0064	+0.000 0109	—0.000 0080
$M_\lambda^{(5)} =$	+0.001 8058	—0.044 8614	+0.029 7330	+0.001 5578	—0.000 0006	+0.000 0004	—0.000 0027	+0.000 0035
$M_\lambda^{(6)} =$	+0.000 1365	+0.001 4205	+0.002 9105	+0.010 0389	—0.000 0000	+0.000 0000	—0.000 0001	+0.000 0001

Таблица 4.

$\lambda =$	0	1	2	3	4	5	6
$\sigma_\lambda =$	-5".126112	-6".592128	-17".393390	-18".408914	-0".661666	-2".916082	-25".934567
$\gamma_\lambda =$	21° 6' 26".8	132° 40' 57".8	292° 49' 53".2	251° 45' 8".6	20° 31' 24".6	133° 56' 10".8	306° 19' 21".2
$N_\lambda^{(0)} =$	+0.1210760	+0.0283520	+0.0015240	+0.0036775	+0.0014778	+0.0031283	-0.0002652
$N_\lambda^{(1)} =$	+0.0148670	-0.0078380	-0.0084783	-0.0224278	+0.0013568	+0.0018108	-0.0002932
$N_\lambda^{(2)} =$	+0.0106500	-0.0063210	+0.0069546	+0.0244768	+0.0013291	+0.0016228	-0.0027275
$N_\lambda^{(3)} =$	+0.0021280	-0.0013250	+0.0506672	-0.0375951	+0.0012586	+0.0011557	-0.0092499
$N_\lambda^{(4)} =$	-0.0000252	+0.0000095	-0.0000025	-0.0000001	+0.0011993	+0.0008794	+0.0063005
$N_\lambda^{(5)} =$	-0.0000320	+0.0000134	-0.0000214	-0.0000006	+0.0011577	+0.0007180	-0.0156928
$N_\lambda^{(6)} =$	+0.0000280	-0.0000070	+0.0000021	+0.0000000	-0.0011248	-0.0176872	+0.0006890
$N_\lambda^{(7)} =$	+0.0000008	-0.0000004	+0.0000002	+0.0000000	-0.0117882	+0.0019010	+0.0000772

учитывании только вековых, но не периодических возмущений. Границы эти таковы:

Планета	Эксцентриситет		Наклонность	
	Min.	Max.	Min.	Max.
Меркурий . . . . .	0.121	0.232	4°44'	9°11'
Венера . . . . .	0	0.071	0	3 16
Земля . . . . .	0	0.068	0	3 6
Марс . . . . .	0.018	0.140	0	5 56
Юпитер . . . . .	0.025	0.061	0°14'	0 29
Сатурн . . . . .	0.012	0.084	0 47	1 1
Уран . . . . .	0.012	0.078	0 54	1 7
Нептун . . . . .	0.006	0.015	0 34	0 47

В этой табличке наклонность орбиты считается относительно неизменной плоскости, для которой Стокуэлл принимает, на основании вышеуказанных значений постоянных, следующие элементы:

$$i = 1^\circ 35' 19''.376, \quad \Omega = 106^\circ 14' 6''.00,$$

считаемые относительно эклиптики и равноденствия 1850.0.

Так как для всех планет, кроме Венеры и Земли, один из коэффициентов  $M_\lambda^{(n)}$  превосходит по абсолютной величине сумму абсолютных величин остальных коэффициентов, то перигелии всех этих планет имеют среднее движение. Любопытно отметить, что средние движения перигелиев Юпитера и Урана оказываются одинаковыми, причем средние долготы этих перигелиев различаются ровно на  $180^\circ$ . Колебания перигелия Юпитера около среднего положения происходят в пределах  $\pm 24^\circ 10'$ , для Урана пределы отклонений  $\pm 47^\circ 33'$ . Таким образом, при наибольшем сближении расстояние между средними перигелиями этих планет равняется

$$180^\circ - (24^\circ 10' + 47^\circ 33') = 108^\circ 17'.$$

Примечание. Решение вековых уравнений (55) и (60), левая часть которых выражается определителем вида (54), представляло вначале значительные затруднения. В связи с этим Леверрье употребил (1839) специальный метод для решения таких уравнений. Вслед за тем Якоби предложил (1845) другой способ, также основанный на свойствах определителей вида (54). Наилучший из методов этого рода, учитывающих специфические особенности вековых уравнений, предложен академиком А. Н. Крыловым.<sup>1</sup>

Мы не будем останавливаться на этих методах, так как обычные способы развертывания определителей в соединении с методом Лобачевского-Греффе для численного решения уравнений тоже достаточно просто приводят к цели.

§ 105. Вековые возмущения малых планет.

Рассмотрим теперь тот случай, когда планета  $P$  имеет бесконечно малую массу, так что действием ее на другие планеты  $P', P'', \dots, P^{(m)}$  можно пренебречь.

<sup>1</sup> А. Н. Крылов, О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем, Известия Академии наук СССР, 1931.

В этом случае система уравнений (43) распадается на систему уравнений (получающихся при  $\mu = 1, 2, \dots, m$ ), которые не будут заключать величин, относящихся к планете  $P$ , и на систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= l \sum_{\mu} (0, \mu) - \sum_{\mu} l_{\mu} [0, \mu] \\ \frac{dl}{dt} &= -h \sum_{\mu} (0, \mu) + \sum_{\mu} h_{\mu} [0, \mu], \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

дающих вековые возмущения изучаемой малой планеты.

После того как первая система, определяющая взаимные возмущения больших планет, разрешена, мы можем подставить полученные выражения (56) в уравнения (61), что даст систему двух неоднородных уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= l \sum (0, \mu) - \sum A_{\lambda} \cos(s_{\lambda} t + \beta_{\lambda}) \\ \frac{dl}{dt} &= -h \sum (0, \mu) + \sum A_{\lambda} \sin(s_{\lambda} t + \beta_{\lambda}), \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где  $A_{\lambda}$  — постоянные коэффициенты.

Решение этих уравнений дается, как известно, формулами:

$$\left. \begin{aligned} h &= M \sin(t \Sigma(0, \mu) + \beta) + \sum \frac{A_{\lambda}}{\Sigma(0, \mu) - s_{\lambda}} \sin(s_{\lambda} t + \beta_{\lambda}) \\ l &= M \cos(t \Sigma(0, \mu) + \beta) + \sum \frac{A_{\lambda}}{\Sigma(0, \mu) - s_{\lambda}} \cos(s_{\lambda} t + \beta_{\lambda}), \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

в которых через  $M$  и  $\beta$  обозначены произвольные постоянные.

Аналогичные результаты получаются для элементов  $p$  и  $q$ .

Вопрос о том, может ли сумма  $\Sigma(0, \mu)$  равняться одной из величин  $s_{\lambda}$ , что сделало бы такой прием интегрирования неприменимым, был изучен Шарлье.<sup>1</sup>

Постоянные  $M$  и  $\beta$  характеризуют движение малой планеты лучше, нежели переменные элементы  $e$  и  $\pi$ , что дало основание Хирайаме<sup>2</sup> назвать их собственным эксцентриситетом и собственной долготой перигелия.

Вычислив эти величины для большого числа малых планет, Хирайама смог выделить несколько семейств малых планет, относя к одному семейству планеты, имеющие очень близкие собственные элементы  $M$ ,  $\beta$  и большие полуоси.

<sup>1</sup> C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, 1, 424.  
<sup>2</sup> Kiyotsugu Hirayama, Families of Asteroids, Japanese Journal of Astronomy and Geophysics, Vol. 1, 1923; Vol. V, 1928.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ КООРДИНАТ.

§ 106. Уравнения возмущенного движения в ганзеновских координатах.

Возьмем неподвижную гелиоцентрическую систему прямоугольных координат — например эклиптическую систему какой-либо определенной эпохи — и обозначим через  $x, y, z$  координаты планеты  $P$ , движение которой мы изучаем, через  $x', y', z'$  — координаты возмущающей планеты  $P'$ . Пусть, далее,  $m$  и  $m'$  будут массы этих планет,  $r$  и  $r'$  — их радиусы-векторы, а  $\Delta$  — расстояние между ними.

Уравнения движения планеты  $P$  напишутся так (§ 3):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + k^2(1+m) \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x} \\ \ddot{y} + k^2(1+m) \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y} \\ \ddot{z} + k^2(1+m) \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$R = k^2 m' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right) \quad (2)$$

— пертурбационная функция.

Введем новую прямоугольную подвижную систему осей при помощи равенств

$$\left. \begin{aligned} X &= \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z \\ Y &= \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z \\ Z &= \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Угловые коэффициенты  $\alpha, \alpha_1, \dots, \gamma_2$  (являющиеся функциями времени) удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 &= 1; & \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 &= 0 \\ \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 &= 1; & \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 &= 0 \\ \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &= 1; & \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

из которых следует, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1; & \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1; & \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1; & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Равенства (3) в силу этих соотношений дают:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y &= \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z \\ z &= \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

На девять угловых коэффициентов, уже связанных шестью соотношениями (4), наложим еще дополнительные условия:

$$\left. \begin{aligned} x\alpha + y\alpha_1 + z\alpha_2 &= 0 \\ x\beta + y\beta_1 + z\beta_2 &= 0 \\ x\gamma + y\gamma_1 + z\gamma_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

в силу которых производные новых подвижных координат выражаются такими же формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= \alpha\dot{x} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_2\dot{z} \\ \dot{Y} &= \beta\dot{x} + \beta_1\dot{y} + \beta_2\dot{z} \\ \dot{Z} &= \gamma\dot{x} + \gamma_1\dot{y} + \gamma_2\dot{z}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

как если бы эта координатная система была неподвижной.

Так как одно из уравнений (7) является, в силу соотношений (6), следствием двух других, то 9 коэффициентов  $\alpha, \alpha_1, \dots$  оказываются связанными лишь восемью уравнениями; поэтому существует бесчисленное множество подвижных систем координат, удовлетворяющих всем поставленным условиям.

Ганзен предложил назвать прямоугольные координаты  $(X, Y, Z)$ , производные которых выражаются формулами (8), идеальными координатами. Эти координаты, как мы только что видели, выражаются через неподвижные формулами (3) при дополнительных условиях (4) и (7).

Остающимся произволом в выборе идеальной системы воспользуемся для того, чтобы удовлетворить условию

$$\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z = 0. \quad (9)$$

Это даст идеальную систему, в которой всегда  $Z=0$ ; иначе говоря, плоскость  $XU$  всегда проходит через радиус-вектор планеты  $P$ . Такую систему координат будем называть ганзеновской.

Легко видеть, что ганзеновская система координат вполне определяется условиями (4), (7) и (9), если не считать двух произвольных постоянных, вводимых интегрированием уравнений (7).

Наша задача заключается теперь в получении уравнений движения в ганзеновских координатах. Для этого выведем, прежде всего, некоторые вспомогательные соотношения.

Умножим равенства (3) соответственно на  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$  и сложим. Это даст

$$\begin{aligned} X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} &= x(\dot{\alpha}\alpha + \dot{\beta}\beta + \dot{\gamma}\gamma) + \\ &+ y(\dot{\alpha}\alpha_1 + \dot{\beta}\beta_1 + \dot{\gamma}\gamma_1) + \\ &+ z(\dot{\alpha}\alpha_2 + \dot{\beta}\beta_2 + \dot{\gamma}\gamma_2), \end{aligned}$$

или, учитывая соотношения, получающиеся из (5) путем дифференцирования:

$$\begin{aligned} X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} &= -y(\dot{\alpha}\alpha_1 + \dot{\beta}\beta_1 + \dot{\gamma}\gamma_1) - \\ &- z(\dot{\alpha}\alpha_2 + \dot{\beta}\beta_2 + \dot{\gamma}\gamma_2). \end{aligned}$$

Выражение, стоящее справа, равно нулю, как в этом легко убедиться, если умножить равенства (7) соответственно на  $\alpha, \beta, \gamma$  и почленно сложить.

Таким образом, получаем первое из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} X\dot{\alpha} + Y\dot{\beta} &= 0 \\ X\dot{\alpha}_1 + Y\dot{\beta}_1 &= 0 \\ X\dot{\alpha}_2 + Y\dot{\beta}_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

два другие находятся совершенно аналогично.

Поэтому уравнения (6), имеющие для ганзеновских координат вид

$$x = \alpha X + \beta Y; \quad y = \alpha_1 X + \beta_1 Y; \quad z = \alpha_2 X + \beta_2 Y, \quad (11)$$

после двукратного дифференцирования, дают:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \alpha\ddot{X} + \beta\ddot{Y} + \dot{\alpha}\dot{X} + \dot{\beta}\dot{Y} \\ \ddot{y} &= \alpha_1\ddot{X} + \beta_1\ddot{Y} + \dot{\alpha}_1\dot{X} + \dot{\beta}_1\dot{Y} \\ \ddot{z} &= \alpha_2\ddot{X} + \beta_2\ddot{Y} + \dot{\alpha}_2\dot{X} + \dot{\beta}_2\dot{Y}. \end{aligned}$$

Умножив эти равенства сначала на  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  и сложив, затем — на  $\beta, \beta_1, \beta_2$  и опять сложив, наконец, на  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  и снова сложив, получим:

$$\alpha\ddot{x} + \alpha_1\ddot{y} + \alpha_2\ddot{z} = \ddot{X} \quad (12)$$

$$\beta\ddot{x} + \beta_1\ddot{y} + \beta_2\ddot{z} = \ddot{Y}$$

$$\begin{aligned} \gamma\ddot{x} + \gamma_1\ddot{y} + \gamma_2\ddot{z} &= (\gamma\dot{\alpha} + \gamma_1\dot{\alpha}_1 + \gamma_2\dot{\alpha}_2)\dot{X} + \\ &+ (\gamma\dot{\beta} + \gamma_1\dot{\beta}_1 + \gamma_2\dot{\beta}_2)\dot{Y}. \end{aligned} \quad (13)$$

В самом деле, подстановка выражений (11) в первое из равенств (7) дает:

$$(\dot{\alpha}\alpha + \dot{\alpha}_1\alpha_1 + \dot{\alpha}_2\alpha_2)X + (\dot{\beta}\alpha + \dot{\beta}_1\alpha_1 + \dot{\beta}_2\alpha_2)Y = 0,$$

откуда, учитывая, что на основании (4)

$$\dot{\alpha}\alpha + \dot{\alpha}_1\alpha_1 + \dot{\alpha}_2\alpha_2 = 0, \quad \dot{\beta}\alpha + \dot{\alpha}_1\beta_1 + \dot{\alpha}_2\beta_2 = 0,$$

получим

$$\dot{\beta}\alpha + \dot{\beta}_1\alpha_1 + \dot{\beta}_2\alpha_2 = 0, \quad \dot{\alpha}\beta + \dot{\alpha}_1\beta_1 + \dot{\alpha}_2\beta_2 = 0.$$

Последние равенства дают

$$\frac{\dot{\alpha}}{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1} = \frac{\dot{\alpha}_1}{\beta_2 \alpha - \beta \alpha_2} = \frac{\dot{\alpha}_2}{\beta \alpha_1 - \beta_1 \alpha}.$$

А так как, в силу тех же условий (4),

$$\frac{\dot{\gamma}}{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1} = \frac{\dot{\gamma}_1}{\beta_2 \alpha - \beta \alpha_2} = \frac{\dot{\gamma}_2}{\beta \alpha_1 - \beta_1 \alpha},$$

то окончательно получим

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\gamma}} = \frac{\dot{\alpha}_1}{\dot{\gamma}_1} = \frac{\dot{\alpha}_2}{\dot{\gamma}_2}.$$

Совершенно таким же путем доказываются соотношения

$$\frac{\dot{\beta}}{\dot{\gamma}} = \frac{\dot{\beta}_1}{\dot{\gamma}_1} = \frac{\dot{\beta}_2}{\dot{\gamma}_2}.$$

Принимая все это во внимание, равенство (13) можно заменить таким:

$$\dot{\gamma} \ddot{x} + \dot{\gamma}_1 \ddot{y} + \dot{\gamma}_2 \ddot{z} = \frac{1}{\dot{\gamma}_2} (\dot{\alpha}_2 \dot{X} + \dot{\beta}_2 \dot{Y}). \quad (14)$$

Обратимся теперь к уравнениям (1). Умножая их сперва на  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ , затем на  $\beta, \beta_1, \beta_2$ , наконец на  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  и каждый раз складывая, получим, на основании (12) и (14):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + k^2(1+m) \frac{X}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial X} \\ \ddot{Y} + k^2(1+m) \frac{Y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial Y} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\dot{\alpha}_2 \dot{X} + \dot{\beta}_2 \dot{Y} = \dot{\gamma}_2 \frac{\partial R}{\partial Z}. \quad (16)$$

В самом деле, из равенств (6) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial R}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial X} \\ \beta \frac{\partial R}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial R}{\partial y} + \beta_2 \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial Y} \\ \gamma \frac{\partial R}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial R}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial Z} \end{aligned} \right\}$$

и, кроме того,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2.$$

Уравнение (16) и последнее из уравнений (10) дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\alpha}_2}{\dot{\gamma}_2} &= -h^{-1} Y \frac{\partial R}{\partial Z} \\ \frac{\dot{\beta}_2}{\dot{\gamma}_2} &= +h^{-1} X \frac{\partial R}{\partial Z} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$h = X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt}. \quad (18)$$

Так как

$$\dot{\gamma}_2 = \sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2},$$

то уравнения (15) и (17) вполне определяют  $X, Y, \alpha_2, \beta_2$ , после чего уравнения (4) дают возможность найти  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ . Таким образом будут известны все величины, входящие в выражения (11) координат планеты  $P$ .

### § 107. Переход к полярным координатам в плоскости оскулирующей орбиты.

Покажем, прежде всего, что координатная плоскость ганзеновской системы координат является плоскостью оскулирующей орбиты.

Для этого достаточно показать, что производная

$$\dot{Z} = \dot{\gamma} \dot{x} + \dot{\gamma}_1 \dot{y} + \dot{\gamma}_2 \dot{z}$$

равна нулю. Но эту производную можно написать, пользуясь соотношениями (9) и (11), следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= -x \dot{\gamma} - y \dot{\gamma}_1 - z \dot{\gamma}_2 = \\ &= -X(\dot{\alpha} \dot{\gamma} + \alpha_1 \dot{\gamma}_1 + \alpha_2 \dot{\gamma}_2) - \\ &\quad - Y(\dot{\beta} \dot{\gamma} + \beta_1 \dot{\gamma}_1 + \beta_2 \dot{\gamma}_2). \end{aligned}$$

Подстановка выражений (11) в последнее из соотношений (7) показывает, что эта величина действительно равна нулю.

Введем теперь полярные координаты в плоскости оскулирующей орбиты, полагая

$$X = r \cos w, \quad Y = r \sin w. \quad (19)$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial w} &= -\frac{\partial R}{\partial X} r \sin w + \frac{\partial R}{\partial Y} r \cos w \\ \frac{\partial R}{\partial r} &= +\frac{\partial R}{\partial X} \cos w + \frac{\partial R}{\partial Y} \sin w, \end{aligned}$$

то вместо уравнений (15) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{dw}{dt} \right) &= \frac{\partial R}{\partial w} \\ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= \frac{\partial R}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Равенство (18) дает

$$h = r^2 \frac{dw}{dt}, \quad (21)$$

вследствие чего первое из уравнений (20) может быть заменено таким:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial R}{\partial w}. \quad (22)$$

## § 108. Случай невозмущенного движения.

Если пертурбационная функция  $R$  равна нулю, то уравнения (20) обращаются в хорошо известные уравнения задачи двух тел. Их общее решение выражается, в этом случае, равенствами:

$$\left. \begin{aligned} E - e \sin E &= n_0 t + M_0; & \operatorname{tg} \frac{1}{2} v &= \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \\ n_0^2 a_0^3 &= k^2 (1+m); & p_0 &= a_0 (1-e_0^2) \\ w &= v + \chi_0; & r &= \frac{p_0}{1+e_0 \cos v} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

содержащими четыре произвольные постоянные  $a_0, e_0, M_0, \chi_0$ .

Уравнения (17) в этом случае могут быть трактуемы отдельно от (20) и дают для  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  постоянные значения.

Остальные нужные нам угловые коэффициенты  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$  определяются из уравнений (4) или (5). Очевидно, одна из этих величин остается произвольной.

Окончательные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= ar \cos w + \beta r \sin w \\ y &= \alpha_1 r \cos w + \beta_1 r \sin w \\ z &= \alpha_2 r \cos w + \beta_2 r \sin w, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

определяющие движение планеты  $P$ , будут содержать, таким образом, семь произвольных постоянных. Легко, однако, видеть, что две из этих постоянных (а именно  $\chi_0$  и один из коэффициентов  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ , оставшийся произвольным) характеризуют одно и то же, а именно положение оси  $X$  в плоскости  $XY$ . Поэтому одной из этих величин можно, не нарушая общности, дать фиксированное значение.

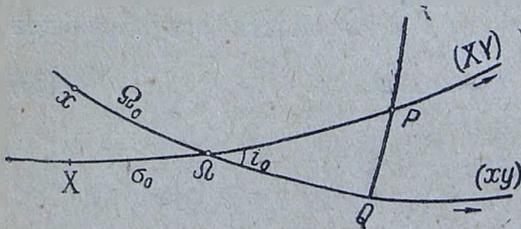


Рис. 13.

Вместо постоянных интегрирования  $\alpha_2, \beta_2$ , определяющих положение плоскости орбиты, введем другие, более удобные, а именно долготу восходящего узла  $\Omega_0$  и наклонность  $i_0$  (рис. 13).

Положение оси  $X$  в плоскости орбиты определим углом  $\sigma_0$  между этой осью и восходящим узлом плоскости  $XY$  относительно плоскости  $xy$ .

Обозначим, далее, через  $l$  и  $b$  гелиоцентрические долготу  $xQ$  и широту  $QP$  планеты  $P$ . Это даст:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos b \cos l \\ y &= r \cos b \sin l \\ z &= r \sin b. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Из треугольника  $\Omega QP$ , в виду того, что  $\Omega P = XP - X\Omega = w - \sigma_0$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos b \cos (l - \Omega_0) &= \cos (w - \sigma_0) \\ \cos b \sin (l - \Omega_0) &= \sin (w - \sigma_0) \cos i_0 \\ \sin b &= \sin (w - \sigma_0) \sin i_0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

откуда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \cos b \cos l &= \cos (w - \sigma_0) \cos \Omega_0 - \sin (w - \sigma_0) \sin \Omega_0 \cos i_0 \\ \cos b \sin l &= \cos (w - \sigma_0) \sin \Omega_0 + \sin (w - \sigma_0) \cos \Omega_0 \cos i_0. \end{aligned}$$

Поэтому, сравнивая (24) и (25), получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \sigma_0 \cos \Omega_0 + \sin \sigma_0 \sin \Omega_0 \cos i_0 \\ \beta &= \sin \sigma_0 \cos \Omega_0 - \cos \sigma_0 \sin \Omega_0 \cos i_0 \\ \alpha_1 &= \cos \sigma_0 \sin \Omega_0 - \sin \sigma_0 \cos \Omega_0 \cos i_0 \\ \beta_1 &= \sin \sigma_0 \sin \Omega_0 + \cos \sigma_0 \cos \Omega_0 \cos i_0 \\ \alpha_2 &= -\sin \sigma_0 \sin i_0 \\ \beta_2 &= \cos \sigma_0 \sin i_0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Уравнения (23), (24) и (27) дают полное решение дифференциальных уравнений (1) для случая, когда  $R=0$ . Это решение включает семь произвольных постоянных, но две из них эквивалентны одной постоянной. В самом деле, равенства (26) показывают, что координаты  $x, y, z$  зависят только от

$$w - \sigma_0 = v + \chi_0 - \sigma_0,$$

т. е. только от разности  $\chi_0 - \sigma_0$ , представляющей расстояние перигелия от узла.

Наличие в формулах двух постоянных вместо обычно применяемой одной используется в методе, данном Ганзеном для вычисления возмущений.

## § 109. Метод Лапласа-Ньюкома. Возмущения радиуса-вектора.

Первый метод для аналитического определения возмущений больших планет был разработан Лапласом, показавшим, каким образом могут быть непосредственно найдены возмущения радиуса-вектора  $r$ , долготы в оскулирующей орбите  $w$  и синуса широты планеты по отношению к плоскости невозмущенной орбиты. Лаплас ограничился нахождением лишь возмущений первого порядка относительно масс и не выше чем третьих степеней относительно эксцентриситетов и наклонностей.

Когда Ньюком, в 80-х годах прошлого столетия, предпринял построение теорий движения всех больших планет, он остановился на методе Лапласа как на наиболее выгодном с практической точки зрения. Все таблицы больших планет, вычисленные под руководством Ньюкома и лежащие сейчас в основе астрономических ежегодников, получены при помощи вычисления возмущений в координатах. За исключением Юпитера и Сатурна, для которых возмущения вычислены по методу Ганзена, для всех остальных планет был употреблен метод Лапласа. Таким образом, этот метод не утратил своего значения и до настоящего времени.

Мы изложим метод Лапласа с теми изменениями, которые были в него внесены Ньюкомом и которые имеют целью облегчить вычисление возмущений второго и высших порядков.

Обратимся к уравнениям (20). Полагая

$$\rho = \ln r \quad (28)$$

и замечая, что

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \rho},$$

эти уравнения можно написать так:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 r}{dt^2} - r^2 \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r} &= \frac{\partial R}{\partial \rho} \\ r^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Умножим первое из этих равенств на  $2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{2}{r} \frac{dr}{dt}$ , второе на  $2 \frac{dw}{dt}$ , сложим и проинтегрируем. Это даст

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 - \frac{2k_1^2}{r} = 2(C + \int d'R),$$

где для краткости положено

$$\left( \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial R}{\partial w} \frac{dw}{dt} \right) dt = d'R, \quad k^2(1+m) = k_1^2,$$

а через  $C$  обозначена произвольная постоянная.

Складывая почленно последнее равенство с первым из уравнений (29), получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{k_1^2}{r} = 2C + 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho}. \quad (30)$$

Обозначим через  $r_0$  радиус-вектор невозмущенного движения, удовлетворяющий уравнению:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r_0^2)}{dt^2} - \frac{k_1^2}{r_0} = 2C.$$

Почленное вычитание этого равенства из (30) дает

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (r^2 - r_0^2) - k_1^2 (r^{-1} - r_0^{-1}) = 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho}, \quad (31)$$

причем интеграл определяется условием, что правая и левая части равны нулю, когда  $R=0$ .

Ньюком считает более выгодным определять возмущения не радиуса-вектора, а его логарифма. Поэтому, полагая, аналогично (28),

$$\rho_0 = \ln r_0$$

и делая

$$\delta\rho = \rho - \rho_0,$$

находим

$$\begin{aligned} r^2 &= \exp(2\rho_0 + 2\delta\rho) = r_0^2 \exp(2\delta\rho) = \\ &= r_0^2 \left( 1 + 2\delta\rho + \frac{4}{1.2} \delta\rho^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (r^2 - r_0^2) &= r_0^2 \delta\rho + r_0^2 \delta\rho^2 + \dots \\ r^{-1} - r_0^{-1} &= -r_0^{-1} \delta\rho + \frac{1}{2} r_0^{-1} \delta\rho^2 + \dots \end{aligned}$$

Эти выражения подставим в уравнение (31), причем с левой стороны оставим лишь члены первого порядка, а члены второго порядка (которыми мы ограничимся) перенесем направо; получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(r_0^2 \delta\rho)}{dt^2} + \frac{k_1^2}{r_0^3} (r_0^2 \delta\rho) &= 2 \int d'R + \frac{\partial R}{\partial \rho} - \\ &- \frac{d^2(r_0^2 \delta\rho^2)}{dt^2} + \frac{k_1^2 \delta\rho^2}{2r_0}, \end{aligned} \quad (32)$$

являющееся основным при определении возмущений радиуса-вектора.

Таким образом, задача приводится к интегрированию уравнения вида

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{k_1^2}{r_0^3} q = Q, \quad (33)$$

где  $k_1^2 r_0^{-3}$  и  $Q$  — известные функции  $t$ . В самом деле, для получения возмущений первого порядка надо в правой части уравнения (32) отбросить члены, заключающие  $\delta\rho^2$ , и вычислить пертурбационную функцию  $R$  с невозмущенными значениями координат планет, что даст для  $Q$  вполне известную функцию времени.

Точно так же при вычислении возмущений второго порядка мы найдем правую часть уравнения (32) со всею нужною точностью при помощи уже известных возмущений первого порядка, и т. д.

Остается рассмотреть интегрирование уравнения (33), т. е. линейного неоднородного уравнения второго порядка.

Вместо того, чтобы применять метод вариации произвольных постоянных в его классической форме, поступим несколько иначе.

Пусть нам известны два линейно независимых решения  $q_1$  и  $q_2$  соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{q} + k_1^2 r_0^{-3} q = 0, \quad (34)$$

так что

$$\ddot{q}_1 + k_1^2 r_0^{-3} q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + k_1^2 r_0^{-3} q_2 = 0. \quad (35)$$

Исключая из этих равенств  $k_1^2 r_0^{-3}$ , получим:

$$q_1 \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1 = 0,$$

откуда

$$q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = \text{const.}$$

С другой стороны, исключение той же величины из уравнения (33) при помощи каждого из равенств (35) дает

$$q_1 \ddot{q} - q \ddot{q}_1 = Q q_1, \quad q_2 \ddot{q} - q \ddot{q}_2 = Q q_2,$$

или, обозначая через  $K_1$  и  $K_2$  произвольные постоянные,

$$\begin{aligned} q_1 \dot{q} - q \dot{q}_1 &= K_2 + \int q_1 Q dt \\ q_2 \dot{q} - q \dot{q}_2 &= -K_1 + \int q_2 Q dt. \end{aligned}$$

Умножая первое из этих равенств на  $q_2$ , второе на  $-q_1$  и складывая, получим:

$$q(q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1) = K_1 q_1 + K_2 q_2 + q_2 \int q_1 Q dt - q_1 \int q_2 Q dt. \quad (36)$$

Чтобы получить нужные нам частные решения  $q_1$  и  $q_2$ , заметим, что орбитальные координаты

$$\xi = a(\cos E - e), \quad \eta = a \cos \varphi \sin E$$

удовлетворяют уравнению (34). Следовательно, можно положить

$$q_1 = \cos E - e, \quad q_2 = \sin E,$$

или, в виде явных функций времени,

$$q_1 = \frac{1}{2} \sum c_i \cos iM, \quad q_2 = \frac{1}{2} \sum s_i \sin iM. \quad (37)$$

На основании результатов, полученных в § 80, имеем

$$\begin{aligned} c_0 &= -3e; & c_1 &= 1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 - \frac{7}{9216}e^6 + \dots \\ c_2 &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \dots; & c_3 &= \frac{3}{8}e^2 - \frac{45}{128}e^4 + \frac{567}{5120}e^6 - \dots \\ c_4 &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{6}{15}e^5 + \dots; & c_5 &= \frac{125}{384}e^4 - \frac{4375}{9216}e^6 + \dots \\ c_6 &= \frac{27}{80}e^5 - \dots; & c_7 &= \frac{16807}{46080}e^6 - \dots \\ s_1 &= 1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4 - \frac{1}{9216}e^6 + \dots; & s_2 &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{6}e^3 + \frac{1}{48}e^5 - \dots \\ s_3 &= \frac{3}{8}e^2 - \frac{27}{128}e^4 + \frac{243}{5120}e^6 - \dots; & s_4 &= \frac{1}{3}e^3 - \frac{4}{15}e^5 + \dots \\ s_5 &= \frac{125}{384}e^4 - \frac{3125}{9216}e^6 + \dots; & s_6 &= \frac{27}{80}e^5 - \dots \\ s_7 &= \frac{16807}{46080}e^6 - \dots \end{aligned}$$

Для выбранных нами частных решений

$$q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 = (1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = n,$$

как это следует из уравнения Кеплера.

Применим теперь формулу (36) к решению уравнения (32), правую часть которого обозначим через  $Q$ . Получим:

$$r^2 \delta \rho = n^{-1} q_2 \int q_1 Q dt - n^{-1} q_1 \int q_2 Q dt, \quad (38)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  определяются равенствами (37).

Постоянные  $K_1$  и  $K_2$  в этом случае равны нулю, так как правая часть должна быть того же порядка относительно возмущающих масс, как и левая.

Когда разложение пертурбационной функции  $R$  по кратным средним аномалий известно, применение формулы (38) для вычисления как возмущений первого порядка, так и возмущений второго порядка (в этом случае в уравнении (32) принимаются во внимание два последние члена) не представляет затруднений.

Отметим только, что вековые возмущения радиуса-вектора выгоднее находить отдельно при помощи вековых возмущений элементов (которые могут быть вычислены например по методу Гаусса) и включать в  $r_0$ . Таким образом,  $\delta \rho$  будет состоять только из периодических членов, что облегчает вычисление возмущений второго порядка.

#### § 110. Метод Лапласа-Ньюкома. Возмущения долготы. Вычисление гелиоцентрических координат.

Для определения возмущенной долготы воспользуемся, следуя Ньюкому, вторым из уравнений (20). Имеем:

$$\frac{dw}{dt} = r^{-2} \left\{ C + \int \frac{\partial R}{\partial w} dt \right\}.$$

Положим

$$w = w_0 + \delta w,$$

где через  $w_0$  обозначена долгота, соответствующая эллиптическому движению. Так как

$$\frac{dw_0}{dt} = r_0^{-2} a^2 n \cos \varphi, \quad (39)$$

и, следовательно,

$$C = a^2 n \cos \varphi,$$

то

$$\frac{d\delta w}{dt} = r^{-2} \int \frac{\partial R}{\partial w} dt + (r^{-2} - r_0^{-2}) a^2 n \cos \varphi.$$

Отсюда, пользуясь разложением

$$r^{-2} = r_0^{-2} (1 - 2\delta\rho + 2\delta\rho^2 - \dots)$$

и ограничиваясь членами второго порядка, получим:

$$r_0^2 \frac{d\delta w}{dt} = (1 - 2\delta\rho) \int \frac{\partial R}{\partial w} dt - 2a^2 n \cos \varphi (\delta\rho - \delta\rho^2). \quad (40)$$

Таким образом, зная возмущения радиуса-вектора, мы найдем возмущения долготы при помощи квадратуры.

Особого внимания заслуживают долгопериодические члены  $d'R$ , так как они дадут как в  $\delta r$ , так и в  $\delta w$  члены с коэффициентами, содержащими, благодаря двукратному интегрированию, квадраты малых делителей. Лаплас предложил учитывать эти члены, вычисляя эллиптические значения  $r_0$  и  $w_0$  при помощи средней аномалии, находимой по формуле

$$M = \int n_0 dt + \varepsilon_0 - \pi_0,$$

где к  $n_0$  прибавлены долгопериодические члены выражения

$$3a^{-\frac{1}{2}} (1+m)^{-\frac{3}{2}} \int d'R.$$

Мы не будем останавливаться на обосновании этого приема.<sup>1</sup>

После того как найдены, при помощи уравнений (32) и (40), возмущения первого порядка радиуса-вектора и долготы, Ньюком определяет по обычным формулам возмущения элементов  $i$  и  $\Omega$ , что позволяет закончить определение гелиоцентрических координат по способу, изложенному в § 100.

Имея возмущения первого порядка всех трех координат, мы можем определить при помощи тех же самых формул возмущения второго порядка в уравнениях (32) и (40): изменяются только правые части.

### § 111. Первоначальная форма метода Лапласа.

Как уже было отмечено, Ньюком, применяя метод Лапласа при построении теорий движения больших планет, внес в него довольно существенные изменения. Однако и первоначальная форма этого метода, данная Лапласом в первом томе *Mécanique céleste*, не лишена интереса, так как в том случае, когда ограничиваются возмущениями первого порядка, она может иметь преимущества.

Лаплас полагает

$$r = r_0 + \delta r, \quad w = w_0 + \delta w,$$

что позволяет написать уравнение (30) и первое из уравнений (29) следующим образом:

$$\frac{d^2(r_0 \delta r)}{dt^2} + \frac{k_1^2 r_0 \delta r}{r_0^3} = 2 \int d'R + r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} + G_2 \quad (41)$$

$$2r_0^3 \frac{dw_0 \delta w}{dt} + \frac{d^2 r_0}{dt^2} \delta r - r \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{3k_1^2 r_0 \delta r}{r_0^3} = -r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} + H_2, \quad (42)$$

где через  $G_2$  и  $H_2$  обозначены члены второго и высших порядков.

Исключая из этих уравнений величину  $\frac{k_1^2 r_0 \delta r}{r_0^3}$ , Лаплас для вычисления возмущений долготы получает, на основании (39), такое уравнение:

$$a^2 n \cos \varphi \frac{d\delta w}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 2r_0 \frac{d\delta r}{dt} + \delta r \frac{dr_0}{dt} \right) - 3 \int d'R - 2r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} + I_2, \quad (43)$$

где  $I_2$  обозначает совокупность членов второго и высших порядков.

<sup>1</sup> P. S. Laplace, *Traité de mécanique céleste*, 1, 1799, 292.

Уравнение (41), эквивалентное уравнению (32), позволяет найти возмущения первого порядка радиуса-вектора, после чего возмущения долготы находятся при помощи уравнения (43).

Уравнение (43) имеет то преимущество по сравнению с уравнением (40), что оно не содержит  $\frac{\partial R}{\partial w}$  и потому не требует вычислений, связанных с определением этой производной. Но оно становится менее удобным, когда имеется в виду вычисление возмущений второго порядка, так как в этом случае все равно приходится вычислять не только  $\frac{\partial R}{\partial w}$ , но и вторые производные  $R$ .

Лаплас следующим образом упрощает интегрирование уравнения (41). Так как (§ 82)

$$\left(\frac{a_0}{r_0}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \dots + \left(3e + \frac{27}{8}e^3 + \dots\right) \cos M + \left(\frac{9}{2}e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \dots\right) \cos 2M + \dots,$$

то это уравнение можно написать так:

$$\frac{d^2(r_0 \delta r)}{dt^2} + n_1^2 (r_0 \delta r) = 2 \int d'R + r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} - n_0^2 (r_0 \delta r) \left\{ \left(3e + \frac{27}{8}e^3 + \dots\right) \cos M + \left(\frac{9}{2}e^2 + \frac{7}{2}e^4 + \dots\right) \cos 2M + \dots \right\}, \quad (44)$$

где

$$n_1^2 = n_0^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \dots\right).$$

Последнее уравнение очень удобно интегрируется последовательными приближениями.

Если через

$$A \cos(\nu t + \beta) \quad (45)$$

обозначить один из членов правой части, то соответствующий член в  $r_0 \delta r$  будет, как известно,

$$\frac{A}{n_1^2 - \nu^2} \cos(\nu t + \beta), \quad (46)$$

если  $\nu \neq n_1$ , и

$$\frac{At}{2n_1} \sin(n_1 t + \beta)$$

в том случае, когда  $\nu = n_1$ .

Как уже было отмечено, для того, чтобы избежать вековых членов в  $\delta r$ ,  $r_0$  вычисляют при помощи элементов, к которым уже приданы вековые возмущения. В этом случае величины  $A$ ,  $\nu$  и  $\beta$  в членах (45) становятся переменными, вследствие чего вместо (46) будем иметь в  $r_0 \delta r$  такое выражение:

$$\frac{A}{n_1^2 - \nu^2} \cos(\nu t + \beta) + \cos \nu t \left\{ \frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2} \frac{d(A \sin \beta)}{dt} + \dots \right\} - \sin \nu t \left\{ \frac{2\nu}{(n_1^2 - \nu^2)^2} \frac{d(A \cos \beta)}{dt} + \dots \right\}.$$

Точно так же в этом случае при вычислении возмущений долготы вместо интегралов

$$\int A \cos(vt + \beta) dt = \frac{A}{v} \sin(vt + \beta)$$

$$\int dt \int A \sin(vt + \beta) dt = -\frac{A}{v^2} \sin(vt + \beta)$$

будем иметь соответственно

$$\int A \cos(vt + \beta) dt = \frac{A}{v} \sin(vt + \beta) +$$

$$+ \sin vt \left\{ -\frac{1}{v^2} \frac{d(A \sin \beta)}{dt} - \frac{1}{v^3} \frac{d^2(A \cos \beta)}{dt^2} + \dots \right\}$$

$$+ \cos vt \left\{ \frac{1}{v^2} \frac{d(A \cos \beta)}{dt} - \frac{1}{v^3} \frac{d^2(A \sin \beta)}{dt^2} + \dots \right\}$$

$$\int dt \int A \sin(vt + \beta) dt = -\frac{A}{v^2} \sin(vt + \beta) +$$

$$+ \sin vt \left\{ \frac{2}{v^3} \frac{d(A \sin \beta)}{dt} + \frac{3}{v^4} \frac{d^2(A \cos \beta)}{dt^2} - \dots \right\}$$

$$+ \cos vt \left\{ -\frac{2}{v^3} \frac{d(A \cos \beta)}{dt} + \frac{3}{v^4} \frac{d^2(A \sin \beta)}{dt^2} + \dots \right\}$$

§ 112. Вычисление возмущений прямоугольных координат.

Возьмем уравнения возмущенного движения планеты  $P$ , имеющей массу  $m$ , в обычной форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k_1^2 x r^{-3} + \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k_1^2 y r^{-3} + \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k_1^2 z r^{-3} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned} \right\} (47)$$

где  $k_1^2 = k^2(1+m)$ , а через  $R$  обозначена пертурбационная функция

$$R = \sum k^2 m' \left[ \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right],$$

причем суммирование распространяется на все возмущающие планеты.

Массы возмущающих планет  $m', m'', \dots$  заменим через

$$m' = \mu m'_0, \quad m'' = \mu m''_0, \dots,$$

где  $m'_0, m''_0, \dots$  постоянные числа, а  $\mu$  — переменный параметр, изменяющийся от 0 до 1.

Если начальные значения координат  $x, y, z, x', y', z', x'', \dots$  для момента  $t=t_0$  взяты в области, в которой правые части уравнений оста-

ются конечными, то, как известно, существуют такие числа  $\tau$  и  $\mu_0$ , что в области

$$|t - t_0| \leq \tau, \quad 0 \leq \mu \leq \mu_0 \quad (48)$$

будут существовать функции  $x(t, \mu), y(t, \mu), z(t, \mu)$ , удовлетворяющие уравнениям (47), причем эти функции разлагаются в ряды вида

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu \xi_1(t) + \mu^2 \xi_2(t) + \dots,$$

сходящиеся в области (48).

Члены  $x_0(t), y_0(t), \dots$  дают невозмущенное движение; члены

$$\delta_n x = \mu^n \xi_n(t), \quad \delta_n y = \mu^n \eta_n(t), \quad \delta_n z = \mu^n \zeta_n(t)$$

представляют возмущения  $n$ -го порядка.

Чтобы получить уравнения, определяющие возмущения первого порядка, подставим в уравнения (47) выражения

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \delta_1 x + \delta_2 x + \dots \\ y &= y_0 + \delta_1 y + \delta_2 y + \dots \\ z &= z_0 + \delta_1 z + \delta_2 z + \dots \\ r &= r_0 + \delta_1 r + \delta_2 r + \dots \end{aligned}$$

и приравняем члены первой степени относительно  $\mu$ .

Имеем

$$\frac{x_0 + \delta_1 x + \dots}{(r_0 + \delta_1 r + \dots)^3} = \frac{x_0}{r_0^3} + \frac{\delta_1 x}{r_0^3} - 3 \frac{x_0 \delta_1 r}{r_0^4} + \dots,$$

с другой стороны,

$$r = [(x_0 + \delta x + \dots)^2 + (y_0 + \delta y + \dots)^2 + (z_0 + \delta z + \dots)^2]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= r_0 + \frac{x_0 \delta_1 x + y_0 \delta_1 y + z_0 \delta_1 z}{r_0} + \dots,$$

откуда

$$\delta_1 r = \frac{1}{r_0} (x_0 \delta_1 x + y_0 \delta_1 y + z_0 \delta_1 z).$$

Поэтому окончательно получим

$$\frac{d^2 \delta_1 x}{dt^2} = -\frac{k_1^2}{r_0^3} \delta_1 x + \frac{3k_1 x_0}{r_0^5} (x_0 \delta_1 x + y_0 \delta_1 y + z_0 \delta_1 z) + \frac{\partial R}{\partial x_0}$$

и аналогично для двух других координат.

Таким же точно путем, приравнявая члены, имеющие множителем  $\mu^n$ , получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \delta_n x}{dt^2} + \frac{k_1^2}{r_0^3} \delta_n x &= \frac{3k_1^2 x_0}{r_0^5} (x_0 \delta_n x + y_0 \delta_n y + z_0 \delta_n z) + X_n \\ \frac{d^2 \delta_n y}{dt^2} + \frac{k_1^2}{r_0^3} \delta_n y &= \frac{3k_1^2 y_0}{r_0^5} (x_0 \delta_n x + y_0 \delta_n y + z_0 \delta_n z) + Y_n \\ \frac{d^2 \delta_n z}{dt^2} + \frac{k_1^2}{r_0^3} \delta_n z &= \frac{3k_1^2 z_0}{r_0^5} (x_0 \delta_n x + y_0 \delta_n y + z_0 \delta_n z) + Z_n \end{aligned} \right\} (49)$$

для определения возмущений  $n$ -го порядка. Через  $X_n, Y_n, Z_n$  обозначены выражения, содержащие  $x_0, \dots, \delta_1 x, \dots, \delta_{n-1} x, \delta_{n-1} y, \delta_{n-1} z$ .

Пользуясь разложением пертурбационной функции в ряд, мы можем, при помощи уравнений (49), последовательно найти возмущения первого, второго порядка.

Энке улучшил этот метод, предложив параллельно с возмущениями координат вычислять, при помощи уравнения (41), возмущения радиуса-вектора. Когда  $\delta_n r$  найдено, равенство

$$x_0 \delta_n x + y_0 \delta_n y + z_0 \delta_n z = r_0 \delta_n r + R_n,$$

где через  $R_n$  обозначена совокупность членов не выше  $(n-1)$ -го порядка, позволит вычислить первые члены правых частей уравнений (49), после чего эти уравнения приведутся к виду (33); интегрирование же уравнений такого вида выполняется, как мы видели, весьма просто.

Изложенный метод сразу дает координаты  $x, y, z$ , нужные для вычисления эфемериды. Тем не менее он не получил распространения, так как возмущения в прямоугольных координатах велики и вычислять их неудобно, не говоря уже о том, что возмущения всех трех координат здесь одинаково велики, между тем как в других методах, основанных на употреблении полярных координат, вычисление сравнительно весьма малых возмущений третьей координаты выполняется очень просто.

### § 113. Метод Хилла.

Мы только-что видели, что вычисление возмущений любого порядка радиуса-вектора и прямоугольных координат приводится к интегрированию уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(r_0 \delta r)}{dt^2} + \frac{h_1^2}{r_0^3} r_0 \delta r &= Q_r \\ \frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \frac{h_1^2}{r_0^3} \delta x &= Q_x \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} + \frac{h_1^2}{r_0^3} \delta y &= Q_y \\ \frac{d^2 \delta z}{dt^2} + \frac{h_1^2}{r_0^3} \delta z &= Q_z. \end{aligned} \right\} (50)$$

После того, как первое из этих уравнений разрешено, каждое из трех следующих интегрируется независимо от двух других.

На основании того, что было сказано в § 109 об интегрировании уравнений такого вида, мы можем написать:

$$\begin{aligned} (q_1 q_2 - q_2 q_1) r_0 \delta r &= q_2 \int q_1 Q_r dt - q_1 \int q_2 Q_r dt \\ (q_1 q_2 - q_2 q_1) \delta x &= q_2 \int q_1 Q_x dt - q_1 \int q_2 Q_x dt \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Чтобы представить эти выражения в более удобном виде, условимся функции от  $t$ , в которых  $t$  заменено через  $\tau$ , отмечать черточкой.

Полагая

$$N = \dot{q}_2 q_1 - q_1 \dot{q}_2,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} r_0 \delta r &= \int N Q_r dt, \\ \delta x &= \int N Q_x dt, \dots \end{aligned} \right\} (51)$$

— если условиться в том, что после выполнения интегрирования  $\tau$  должно быть снова заменено через  $t$ .

Возьмем опять, как и в § 109:

$$\begin{aligned} q_1 &= \cos E - e = \frac{r}{a} \cos v \\ q_2 &= \sin E = \frac{r}{a} \sin v; \end{aligned}$$

в таком случае

$$\begin{aligned} N &= \sin(\bar{E} - E) - e(\sin \bar{E} - \sin E) = \frac{r\bar{r}}{a^2 \cos \varphi} \sin(\bar{v} - v) \\ q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1 &= n. \end{aligned}$$

Хилл принимает за независимую переменную истинную аномалию  $v$ . Так как

$$dt = \frac{r_0^2 dv}{a^2 n \cos \varphi},$$

то окончательно формулы (51) получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \frac{1}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_r r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv \\ \delta x &= \frac{r_0}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_x r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv \\ \delta y &= \frac{r_0}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_y r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv \\ \delta z &= \frac{r_0}{n^2 a^4 \cos^2 \varphi} \int Q_z r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv. \end{aligned} \right\} (52)$$

После интегрирования  $\bar{v}$  должно быть заменено через  $v$ .

Так как система (52) включает одним уравнением больше, чем это необходимо для определения возмущений, то Хилл заменяет второе и третье уравнения одним, что проще всего достигается путем введения полярных координат. Полагая

$$x = r \cos \lambda \cos \beta, \quad y = r \sin \lambda \cos \beta, \quad z = r \sin \beta,$$

получим

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{x},$$

откуда

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{x^2 + y^2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right).$$

С другой стороны, уравнения движения (47) дают:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = h_0 + \int \left( x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x} \right) dt,$$

причем для определения постоянной  $h_0$  переходим к случаю невозмущенного движения, когда

$$h_0 = x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} = k_1 \sqrt{p} \cos i.$$

Поэтому, полагая

$$Q_\lambda = x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (53)$$

окончательно получим:

$$(r^2 - z^2) \frac{d\lambda}{dt} = h_0 + \int Q_\lambda dt.$$

Таким образом, делая  $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$  и замечая, что

$$\begin{aligned} h_0 - (r^2 - z^2) \frac{d\lambda_0}{dt} &= -[(r^2 - r_0^2) - (z^2 - z_0^2)] \frac{d\lambda_0}{dt} = \\ &= -\frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} h_0, \end{aligned}$$

получим

$$\delta\lambda = \int \left[ \int Q_\lambda^2 dt - k_1 \sqrt{p} \cos i \frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} \right] \frac{dt}{r^2 - z^2}.$$

Переходя, наконец, к переменному  $v$ , получим следующие уравнения для определения возмущений координат  $r$ ,  $\lambda$  и  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \frac{1}{k_1^2 p} \int Q_r r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv \\ \delta z &= \frac{r_0}{k_1^2 p} \int Q_z r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv \\ &= \int \left[ \frac{1}{k_1^2 p} \int Q_\lambda r_0^2 dv - \cos i \frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} \right] \frac{r_0 dv}{r^2 - z^2}. \end{aligned} \right\} (54)$$

Хилл особо подчеркивает, что эти уравнения абсолютно точны и могут служить для вычисления возмущений какого угодно порядка.

В том случае, когда ищутся возмущения первого порядка, уравнения (54) могут быть значительно упрощены.

Хилл принимает в этом случае за плоскость  $xu$  плоскость эллиптической орбиты рассматриваемой планеты, что дает с точностью до членов первого порядка включительно:

$$z = \delta z = r_0 \delta\beta.$$

Полагая

$$T = \frac{r^3}{k_1^2 p} Q_r = \frac{r^3}{k_1^2 p} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} + 2 \int d'R \right),$$

$$Y = \frac{r^3}{k_1^2 p} Q_\lambda, \quad Z = \frac{r^2}{k_1^2 p} \frac{\partial R}{\partial z},$$

получим

$$\delta r = \int T \sin(\bar{v} - v) dv$$

$$\delta\beta = \int Z \sin(\bar{v} - v) dv$$

$$\delta\lambda = \int \left[ \int Y dv - 2 \frac{\delta r}{r} \right] dv.$$

Хилл вводит еще вспомогательную величину

$$X = \frac{r^4}{k_1^2 p} \frac{\partial R}{\partial r},$$

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
310	14 снизу	=	$\delta\lambda =$	типографии

$\sigma r \quad \sigma \lambda \quad \sigma z$

В самом деле, равенство (53) показывает, что

$$Q_\lambda = \frac{\partial R}{\partial \lambda}.$$

Мы ограничимся приведенным выводом уравнений (54) и (55), являющихся основными для метода Хилла; что же касается до подробностей применения их к вычислению возмущений, то отошлем читателя к основному мемуару Хилла,<sup>1</sup> где все эти вопросы изложены со всею полнотою, нужною для приложений как в отношении возмущений первого, так и второго порядка.

В заключение отметим, что метод Хилла требует разложения пертурбационной функции в ряд по кратным истинным аномалиям  $v$ ,  $v'$  и последующего выражения  $v'$  через  $v$ . Первая операция выполняется очень просто, если коэффициенты разложения находятся численно, что и создает известные выгоды употреблению  $v$  в качестве независимой переменной.<sup>2</sup> Конечно, полученные таким образом выражения возмущений через  $v$  менее удобны, чем их выражения в виде явных функций времени.

<sup>1</sup> G. W. Hill, A Method of Computing Absolute Perturbations, Astr. Nachr., 83, 1874, 209—224 = Works, 1, 151—166.

G. W. Hill, Jupiter-Perturbations of Ceres, of the First Order, and the Derivation of the Mean Elements, Astr. Journal, 16, 1896, 57—62 = Works, 4, 111—122.

<sup>2</sup> В случае аналитического (буквенного) разложения пертурбационной функции употребление  $v$  в качестве независимой переменной приводит к более сложным результатам, нежели применение методов Леверрье и Ньюкома, изложенных в §§ 86—89. Относительно разложений по кратным истинной аномалии укажем:

H. Guldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales, 1, Stockholm, 1893.

G. W. Hill, Development, in Terms of the True Anomaly of odd Negative Powers of the Distance between two Planets Moving in the Same Plane, Works, 4, 398—407.

причем для определения постоянной  $h_0$  переходим к случаю невозмущенного движения, когда

$$h_0 = x_0 \frac{dy_0}{dt} - y_0 \frac{dx_0}{dt} = k_1 \sqrt{p} \cos i.$$

Поэтому, полагая

$$Q_\lambda = x \frac{\partial R}{\partial y} - y \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (53)$$

окончательно получим:

для определения возмущений координат  $r$ ,  $\lambda$  и  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \frac{1}{k_1^2 p} \int Q_r r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv \\ \delta z &= \frac{r_0}{k_1^2 p} \int Q_z r_0^3 \sin(\bar{v} - v) dv \\ &= \int \left[ \frac{1}{k^2 p} \int Q_\lambda r_0^2 dv - \cos i \frac{(r + r_0) \delta r - (z + z_0) \delta z}{r_0^2 - z_0^2} \right] \frac{r_0 dv}{r^2 - z^2} \end{aligned} \right\} (54)$$

Хилл особо подчеркивает, что эти уравнения абсолютно точны и могут служить для вычисления возмущений какого угодно порядка.

В том случае, когда ищутся возмущения первого порядка, уравнения (54) могут быть значительно упрощены.

Хилл принимает в этом случае за плоскость  $xu$  плоскость эллиптической орбиты рассматриваемой планеты, что дает с точностью до членов первого порядка включительно:

$$z = \delta z = r_0 \delta \beta.$$

Полагая

$$T = \frac{r^3}{k_1^2 p} Q_r = \frac{r^3}{k_1^2 p} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} + 2 \int d'R \right),$$

$$Y = \frac{r^3}{k_1^2 p} Q_\lambda, \quad Z = \frac{r^2}{k_1^2 p} \frac{\partial R}{\partial z},$$

получим

$$\delta r = \int T \sin(\bar{v} - v) dv$$

$$\delta \beta = \int Z \sin(\bar{v} - v) dv$$

$$\delta \lambda = \int \left[ \int Y dv - 2 \frac{\delta r}{r} \right] dv.$$

Хилл вводит еще вспомогательную величину

$$X = \frac{r^4}{k_1^2 p} \frac{\partial R}{\partial r},$$

что позволяет придать полученным уравнениям следующую, окончательную, форму:

$$\left. \begin{aligned} \delta r &= \int \left[ X + 2r^3 \int r^{-2} \left( \frac{e \sin v}{p} X + Y \right) dv \right] \sin(\bar{v} - v) dv \\ \delta \lambda &= \int \left[ \int Y dv - 2 \frac{\delta r}{r} \right] dv \\ \delta \beta &= \int Z \sin(\bar{v} - v) dv. \end{aligned} \right\} (55)$$

Важно отметить, что применение этих формул требует вычисления лишь трех производных пертурбационной функции, а именно

$$\frac{\partial R}{\partial r}, \quad \frac{\partial R}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial R}{\partial z}.$$

В самом деле, равенство (53) показывает, что

$$Q_\lambda = \frac{\partial R}{\partial \lambda}.$$

Мы ограничимся приведенным выводом уравнений (54) и (55), являющихся основными для метода Хилла; что же касается до подробностей применения их к вычислению возмущений, то отошлем читателя к основному мемуару Хилла,<sup>1</sup> где все эти вопросы изложены со всею полнотою, нужно для приложений как в отношении возмущений первого, так и второго порядка.

В заключение отметим, что метод Хилла требует разложения пертурбационной функции в ряд по кратным истинных аномалий  $v$ ,  $v'$  и последующего выражения  $v'$  через  $v$ . Первая операция выполняется очень просто, если коэффициенты разложения находятся численно, что и создает известные выгоды употреблению  $v$  в качестве независимой переменной.<sup>2</sup> Конечно, полученные таким образом выражения возмущений через  $v$  менее удобны, чем их выражения в виде явных функций времени.

<sup>1</sup> G. W. Hill, A Method of Computing Absolute Perturbations, Astr. Nachr., 83, 1874, 209—224 = Works, 1, 151—166.

G. W. Hill, Jupiter-Perturbations of Ceres, of the First Order, and the Derivation of the Mean Elements, Astr. Journal, 16, 1896, 57—62 = Works, 4, 111—122.

<sup>2</sup> В случае аналитического (буквенного) разложения пертурбационной функции употребление  $v$  в качестве независимой переменной приводит к более сложным результатам, нежели применение методов Леверрье и Ньюкома, изложенных в §§ 86—89. Относительно разложений по кратным истинной аномалии укажем:

H. G y l d é n, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales, 1, Stockholm, 1893.

G. W. Hill, Development, in Terms of the True Anomaly of odd Negative Powers of the Distance between two Planets Moving in the Same Plane, Works, 4, 398—407.

## § 114. Основные идеи метода Ганзена.

Выбор координат, для которых вычисляются возмущения, имеет весьма существенное значение. Мы уже видели в предыдущих параграфах, что возмущения в полярных координатах вычисляются несравненно удобнее, нежели в прямоугольных. Естественно возникает вопрос, нельзя ли выбрать еще более выгодную, с точки зрения вычисления возмущений, систему переменных. Такова проблема, которую поставил себе Ганзен.

Как уже было указано (§ 110), Лаплас предложил включать долгопериодические возмущения в среднюю аномалию, служащую для вычисления радиуса-вектора и долготы. Ганзен, развивая дальше эту идею, предложил принять среднюю аномалию за одну из переменных, для которых вычисляются возмущения.

Рассмотрим сначала движение в плоскости орбиты, определяемое, при отсутствии возмущений, формулами (23).

Ганзен предлагает возмущенные значения орбитальных координат  $w$  и  $r$  вычислять по аналогичным формулам:

$$\left. \begin{aligned} w &= \bar{v} + \chi_0, & r &= \bar{r}(1 + \nu) \\ E - e_0 \sin E &= n_0 z + M_0, & \operatorname{tg} \frac{1}{2} \bar{v} &= \sqrt{\frac{1+e_0}{1-e_0}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E \\ n_0^2 a_0^3 &= k^2(1+m), & p_0 &= a_0(1-e_0^2) \\ \bar{r} &= a_0(1 - e_0 \cos E) = p_0(1 + e_0 \cos \bar{v})^{-1}, \end{aligned} \right\} (56)$$

в которых через  $z$  и  $\nu$  обозначены соответствующие функции  $t$ .

Уравнения для определения неизвестных  $z$  и  $\nu$  получаются путем подстановки выражений для  $w$  и  $r$ , даваемых формулами (56), в уравнения (20). Мы не будем сейчас останавливаться на выводе этих уравнений.

Так как в невозмущенном движении  $z = t$ , то естественно положить

$$z = t + \delta z,$$

где  $\delta z$  — малая величина порядка возмущающих масс.

Зная  $\delta z$  и  $\nu$ , можно вычислить координаты  $w$  и  $r$ , определяющие положение планеты в плоскости  $XY$ . Остается показать, каким образом может быть вычислено положение осей  $SX$  и  $SY$  для любого момента времени.

Для возмущенного движения мы должны в формулах (27) заменить постоянные значения элементов  $i_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\sigma_0$  их оскулирующими значениями для рассматриваемого момента  $t$ . Это даст:

$$\alpha_2^t = -\sin \sigma \sin i, \quad \beta_2 = \cos \sigma \sin i, \quad \gamma_2 = \cos i.$$

Поэтому, обращаясь к уравнениям (17) и учитывая равенства (19), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= h^{-1} r \cos(w - \sigma) \frac{\partial R}{\partial Z} \\ \operatorname{tg} i \frac{d\sigma}{dt} &= h^{-1} r \sin(w - \sigma) \frac{\partial R}{\partial Z} \end{aligned} \right\} (57)$$

С другой стороны, подставляя в равенство (стр. 295)

$$\beta \frac{dz}{dt} + \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} = 0$$

найденные в § 106 выражения угловых коэффициентов (27), получим

$$d\sigma = \cos i \cdot d\Omega, \quad (58)$$

следовательно

$$\sin i \frac{d\Omega}{dt} = h^{-1} r \sin(w - \sigma) \frac{\partial R}{\partial Z}.$$

Интегрирование уравнений (57) и (58) дает  $i$ ,  $\sigma$  и  $\Omega$ . Так как у нас получается одна лишняя постоянная интегрирования, то мы можем, следуя Ганзену, подчинить начальные значения элементов, соответствующие моменту  $t=0$ , условию

$$\sigma_0 = \Omega_0.$$

При этом условии  $\chi_0$  будет не чем иным, как долготой перигелия  $\pi_0$ . Когда интегрирование уравнений, определяющих  $\delta z$ ,  $\nu$ ,  $\Omega$ ,  $i$ ,  $\sigma$ , выполнено, легко найти гелиоцентрические координаты  $l$  и  $b$ . Для этого могут быть употреблены формулы:

$$\left. \begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega) &= \cos i \sin(w - \sigma) \\ \cos b \cos(l - \Omega) &= \cos(w - \sigma) \\ \sin b &= \sin i \sin(w - \sigma), \end{aligned} \right\} (59)$$

аналогичные формулам (26) для невозмущенного движения.

Формулы (59) вполне решают задачу о нахождении возмущенного положения планеты; но они удобны только в том случае, когда нужно вычислить лишь несколько отдельных положений планеты. Между тем определение возмущений аналитическими методами принято заканчивать построением таблиц движения рассматриваемой планеты, по возможности облегчающих вычисление ее координат. Так как при этом, естественно, избегают употребления таблиц с двумя входами, то Ганзен предложил заменить формулы (59) другими, более удобными с точки зрения табулирования.

Ганзен показывает, что эти формулы могут быть преобразованы к виду

$$\left. \begin{aligned} \cos b \sin(l - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos i_0 \sin(w - \Omega_0) - \psi \\ \cos b \cos(l - \Omega_0 - \Gamma) &= \cos(w - \Omega_0) + \psi' \\ \sin b &= \sin i_0 \sin(w - \Omega_0) + s, \end{aligned} \right\} (60)$$

где первые члены правых частей удобно табулируются по аргументу  $w - \Omega_0$ , а малые величины  $\Gamma$ ,  $\psi$ ,  $\psi'$  и  $s$  определяются без особых затруднений.

Окончательные формулы, которые мы приводим без вывода, таковы:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{s}{x} [\sin i_0 \cos i + \cos i_0 \sin i \cos(\sigma - \Omega_0)] \\ \psi' &= \frac{s}{x} \sin i \sin(\sigma - \Omega_0) \\ s &= Q \sin(w - \Omega_0) - P \cos(w - \Omega_0) \\ x &= \cos i_0 (\cos i_0 + \cos i) - Q \sin i, \end{aligned} \right\} (61)$$

причем  $\Gamma$ ,  $P$  и  $Q$  определяются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \frac{rs}{\kappa h} \frac{\partial R}{\partial Z} \\ \frac{dP}{dt} &= h^{-1} r \cos i \sin(w - \Omega_0) \frac{\partial R}{\partial Z} \\ \frac{dQ}{dt} &= h^{-1} r \cos i \cos(w - \Omega_0) \frac{\partial R}{\partial Z} \end{aligned}$$

Если ограничиться возмущениями первого порядка, то

$$\Gamma = 0, \quad \psi = s \operatorname{tg} i_0, \quad \psi' = 0,$$

так что применение формул (60) потребует в этом случае составления только одной таблицы с двумя входами, дающей  $s$ . Вследствие малости этой величины составление и употребление такой таблицы не представляется затруднений.

Полезно отметить, что в дифференциальных уравнениях, которые приходится разрешать в методе Ганзена, пертурбационная функция фигурирует только в форме частных производных

$$\frac{\partial R}{\partial r}, \quad \frac{\partial R}{\partial v}, \quad \frac{\partial R}{\partial Z}.$$

Излагая свой метод в окончательном виде,<sup>1</sup> Ганзен теснейшим образом связывает его с разложением пертурбационной функции (точнее говоря—только что указанных производных) по кратным эксцентрисических аномалий и с употреблением эксцентрисической аномалии возмущаемой планеты в качестве независимой переменной. Но этот метод не зависит, по существу, ни от выбора независимой переменной, ни от избранной формы разложения пертурбационной функции.

Метод Ганзена получил довольно широкое распространение при вычислении возмущений малых планет, что объясняется, с одной стороны, практичностью этого метода, действительно сводящего величину возмущений к минимуму, а с другой стороны—тем, что этот метод был развит Ганзеном с исключительной подробностью.

### § 115. Вычисление производных пертурбационной функции по координатам.

Вычисление возмущений в координатах требует разложений в ряды частных производных

$$\frac{\partial R}{\partial w} = \frac{\partial R}{\partial v}, \quad \frac{\partial R}{\partial r}, \quad \frac{\partial R}{\partial Z} \quad (62)$$

пертурбационной функции. Покажем, каким образом могут быть найдены эти разложения.

Так как для каждой из возмущающих планет

$$R = k^2 m' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right),$$

<sup>1</sup> P. A. Hansen, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, Abh. I—II—III, Leipzig 1857—1861.

причем

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H \\ \cos H &= \cos(v + \Pi) \cos(v' + \Pi') + \sin(v + \Pi) \sin(v' + \Pi') \cos J, \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial v} = k^2 m' \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right). \quad (63)$$

Очевидно

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{r \cos H}{r'^2} \right) = \\ &= \frac{r}{r'^2} [-\sin(v + \Pi) \cos(v' + \Pi') + \cos(v + \Pi) \sin(v' + \Pi') \cos J]. \end{aligned} \quad (64)$$

С другой стороны, тождество

$$\frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right) = \frac{\partial r}{\partial M} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right) + \frac{\partial v}{\partial M} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right)$$

и хорошо известные формулы

$$\frac{\partial r}{\partial M} = \frac{ae \sin v}{\cos \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial M} = \left( \frac{a}{r} \right)^2 \cos \varphi$$

позволяют написать:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right) = \frac{r^2}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right) - \frac{er^2}{p} \sin v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right),$$

откуда уже нетрудно получить

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\Delta} \right) = \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right) - \frac{e \sin v}{pr} \left[ \frac{3}{2} \frac{r^2}{\Delta} + \frac{1}{2} \frac{r^2 (r'^2 - r^2)}{\Delta^3} \right]. \quad (65)$$

Формулы (63), (64) и (65) дают первую из производных (62).

Перейдем теперь к вычислению производной по радиусу-вектору. Очевидно:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = k^2 m' \left[ \frac{-r + r' \cos H}{\Delta^3} - \frac{\cos H}{r'^2} \right];$$

но

$$2rr' \cos H = r^2 + r'^2 - \Delta^2,$$

поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial r} = k^2 m' \left[ -\frac{1}{2\Delta} + \frac{r'^2 - r^2}{2\Delta^3} - \frac{r \cos H}{r'^2} \right]. \quad (66)$$

Что касается до последней из производных (62), то ее можно рассматривать как компоненту возмущающего ускорения по нормали к плоскости орбиты. Поэтому, как мы уже видели в § 67:

$$\frac{\partial R}{\partial Z} = k^2 m' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \zeta',$$

где через  $\zeta'$  обозначена координата  $Z$  возмущающей планеты.

Очевидно

$$\zeta' = r' \sin(v' + \Pi') \sin J,$$

следовательно

$$\frac{\partial R}{\partial Z} = k^2 m' r' \left( \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \sin(v' + \Pi') \sin J. \quad (67)$$

Итак, для вычисления производных (62) достаточно разложить  $\Delta^{-1}$  и  $\Delta^{-3}$  в двойные тригонометрические ряды по кратным средним аномалий. Для всех остальных величин, входящих в формулы (64) — (67), нами уже были даны в § 82 разложения в общем виде.

Ради определенности мы предполагали, что ищется разложение по кратным средним аномалий. Те же самые формулы годятся и для случая, когда разложение производится по кратным эксцентрических аномалий, следует только в равенстве (65) положить:

$$\frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right) = \frac{\partial E}{\partial M} \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{r^2}{\Delta} \right).$$

Заметим, что выгоднее разлагать в двойной ряд не  $\Delta^{-1}$ , а  $r^2 \Delta^{-1}$ , так как эта последняя величина встречается в полученных формулах чаще.

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ. ТЕОРИЯ ЛАПЛАСА.

## § 116. Общий характер движения Луны.

Положение Луны всегда определяется относительно центра Земли, которая в этом случае принимается за центральное тело. Движение, которое имела бы Луна при отсутствии других небесных тел, кроме Земли, принимается за основное, невозмущенное движение, а те изменения, которые вызываются в нем притяжением Солнца и прочих планет (а также другими причинами), называются возмущениями или неравенствами.

Особый интерес представляют возмущения, испытываемые Луной со стороны Солнца, так как эти возмущения совсем иного характера, чем те, с которыми приходится иметь дело в теории движения планет.

Возмущения, производимые планетами, всегда очень малы вследствие крайней малости возмущающих масс, несмотря на то, что эти массы часто находятся ближе к возмущаемому светилу, чем Солнце. Напротив, в теории движения Луны Солнце, являющееся возмущающим телом, имеет массу в 331 950 раз большую, нежели Земля, которая рассматривается как центральное тело. Только вследствие того, что Солнце находится на расстоянии почти в 400 раз большем, чем Земля, эту последнюю можно рассматривать при изучении движения Луны как центральное тело.

Принимая средние расстояния Луны и Солнца от Земли равными соответственно 384 400 км и 149 450 000 км, найдем, что отношение этих расстояний равно  $\frac{1}{389}$ . Отсюда следует, что ускорение, сообщаемое Луне Солнцем, в

$$\frac{331\,950}{389^2} \approx 2.2$$

раза (в среднем) больше, чем ускорение, вызываемое притяжением Земли.

Но, поскольку мы изучаем движение Луны по отношению к Земле, нас интересует разность ускорений, вызываемых Солнцем в движении Луны и Земли. Легко видеть, что получаемое таким образом возмущающее ускорение в среднем составляет

$$\frac{331\,950}{389^3} \approx \frac{1}{177}$$

часть ускорения, производимого Землей. Не трудно найти, приняв во внимание эксцентриситеты земной и лунной орбит, что это отношение может иногда доходить до  $\frac{1}{60}$ .

Мы видим, таким образом, что возмущения, вызываемые Солнцем в движении Луны, по крайней мере в десятки раз больше тех, с которыми приходится иметь дело в теории планет.

Близость Луны к Земле, с одной стороны, упрощает задачу, так как делает возмущения, производимые всеми остальными планетами, весьма малыми. Но, с другой стороны, вследствие этой близости приходится считать с влиянием на движение Луны отклонений в структуре Земли от сферической симметрии.

Принимая все это во внимание, мы видим, что теорию движения Луны естественно разделить на следующие части:

1. Изучение движения трех материальных точек  $T$ ,  $L$  и  $S$ , одна из которых,  $S$  (Солнце), описывает кеплеров эллипс вокруг центра инерции  $G$  двух других точек  $T$  (Земля) и  $L$  (Луна). Эта проблема является основной в теории движения Луны и наиболее характерна для этой последней.

2. Вычисление возмущений, вызываемых в движении Луны отклонением Земли и Луны от сферической структуры.

3. Вычисление возмущений, вызываемых прямым притяжением планет.

4. Определение возмущений, производимых отклонениями в движении  $S$  вокруг  $G$  от законов Кеплера (т. е. возмущений, зависящих от косвенного воздействия планет).

5. Вычисление возмущений второго и высших порядков, происходящих от наложения действий, указанных в пп. 2, 3, 4.

6. Выяснение эффекта всех прочих факторов, могущих влиять на движение Луны (морские приливы, увеличение масс Земли и Луны вследствие падения метеоритов и т. п.).

Только первая из этих задач представляет серьезные принципиальные трудности, а употребляемые в ней методы — общий интерес. Остальные пять проблем, хотя и требуют иногда очень большого количества труда, решаются применением способа последовательных приближений в его обычной форме. Учитывая это обстоятельство, мы ограничимся в дальнейшем исключительно рассмотрением основной проблемы, называемой иногда солнечной теорией лунного движения (*théorie solaire du mouvement de la Lune*).

Заметим, что строгое разграничение указанных выше проблем не всегда целесообразно. Например может оказаться полезным уже при решении основной проблемы учесть некоторые возмущения движения Солнца — прежде всего вековое движение перигелия и вековое уменьшение эксцентриситета земной орбиты.

Чтобы закончить эти вводные замечания, напомним, в чем выражаются наиболее значительные из возмущений, производимых Солнцем в движении Луны.

За невозмущенную орбиту Луны можно считать эллипс с эксцентриситетом, равным 0.05490, лежащий в плоскости, наклоненной к эклиптике 1850.0 под углом в  $5^{\circ}9'$ .

Действие Солнца сказывается прежде всего в том, что перигей лунной орбиты имеет поступательное движение. Полный оборот он совершает в среднем в 8.8503 года. На равномерное движение перигея накладываются периодические неравенства, самое большое из которых имеет амплитуду в  $8^{\circ}41'$ . Эксцентриситет при этом изменяется немного, колеблясь около указанного выше среднего значения.

С другой стороны, линия узлов движется попятным движением, делая полный оборот в среднем в 18.5995 года. Наиболее значительное из периодических неравенств, накладывающихся на это поступательное движение, имеет амплитуду в  $1^{\circ}26'$ . Наклонность орбиты имеет периодические неравенства, вследствие которых она меняется в пределах от  $4^{\circ}57'$  до  $5^{\circ}20'$ .

Перейдем теперь к периодическим неравенствам долготы. Следующая формула дает представление о наиболее значительных из этих неравенств:

$$v = \lambda + 377' \sin M + 13' \sin 2M + \dots + 76' \sin (2D - M) + 39' \sin 2D - 11' \sin M' - 2' \sin D + \dots$$

Через  $v$  обозначена истинная долгота Луны, через  $\lambda$  — средняя; через  $M$  и  $M'$  обозначены средние аномалии Луны и Солнца, причем  $M$  считается от среднего положения перигея; наконец  $D$  есть разность средних долгот Луны и Солнца.

Члены с аргументами  $M$ ,  $2M$ , . . . называются эллиптическими членами. Их сумма дает уравнение центра.

Член с аргументом  $2D - M$  получил название эвекции. Легко видеть, что период этого возмущения равен 31.8 суток.

Неравенство, производимое членом с аргументом  $2D$ , получило название вариации. Период вариации равен очевидно половине синодического месяца, т. е. 14.76 суток. Вариация не меняет положения Луны в сизигиях и квадратурах; наибольшее смещение Луны она производит в октантах.

Член с аргументом  $M'$  дает возмущение, имеющее годовой период и получившее название годового неравенства. Это неравенство вызывается эллиптичностью земной орбиты, производящей изменение расстояния до Солнца, а следовательно и величины возмущающей силы.

Наконец, члены с аргументами  $D$ ,  $3D$ , . . . дают параллактическое неравенство. Амплитуда каждого из этих членов пропорциональна отношению  $\frac{a}{a'}$  средних расстояний Луны и Солнца. Так как параллакс Луны

легко находится из наблюдений, то сравнение наблюдаемой величины параллактического неравенства с теоретической дает возможность найти параллакс Солнца. Этот метод определения солнечного параллакса является одним из наиболее точных.

В выражениях радиуса-вектора и широты Луны имеются члены с теми же аргументами, что и в указанном выше разложении долготы. Разложение в ряд параллакса Луны, легко выводимое из разложения радиуса-вектора, имеет следующий вид:

$$P_{\zeta} = 3424'' + 187'' \cos M + 10'' \cos 2M + \dots + 34'' \cos (2D - M) + 28'' \cos 2D + \dots,$$

где в первой строке дано среднее значение параллакса и эллиптические члены, а во второй — важнейшие возмущения.

Указанные выше главные члены лунных неравенств были открыты эмпирически. Эллиптические члены были найдены Гиппархом, давшим удовлетворительное для того времени средство вычисления этих членов при помощи эксцентрика. Во времена Гиппарха были известны также движение перигея и узла.

Эвекция была открыта Птолемеом. Вариация и годовое неравенство были открыты Тихо Браге (около 1580 г.).

В настоящее время каждым из этих имен обозначают группу членов, аналогичных указанному выше главному члену: так, эвекцией называют члены

$$4607''.77 \sin (2D - M) + 174''.87 \sin (2D + M) + \dots;$$

вариацией — члены с аргументами  $2D$ ,  $4D$ ,  $6D$ , . . . , т. е.

$$2106''.25 \sin 2D + 8''.75 \sin 4D + \dots;$$

годовым неравенством — члены, зависящие от средней аномалии Солнца, а именно:

$$- 659''.23 \sin M' + 152''.11 \sin (2D - M') - 21''.63 \sin (2D + M') + \dots ;$$

наконец, параллактическим неравенством — члены

$$- 127''.62 \sin D + 0''.84 \sin 3D + 0''.01 \sin 5D + \dots$$

### § 117. Краткий исторический обзор развития теории движения Луны.

Теория движения Луны, в современном смысле, естественно начинается со времени открытия закона всемирного тяготения. Ньютон показал, что вариация, движение перигея, движение узла, наблюдаемые изменения наклонности и эксцентриситета являются следствиями закона всемирного тяготения.

Ньютон не стремился к построению полной теории, воспроизводящей наблюдаемое движение Луны, тем не менее отдельные неравенства были им определены с большой точностью. Есть основание думать, что Ньютон получил свои результаты при помощи общего метода, а именно метода вариации элементов, но опубликовал он их в форме отрывочных теорем.

Путь для построения теории, охватывающей все особенности движения Луны, был указан Клеро, который выразил проблему дифференциальными уравнениями и начал решение этих уравнений способом последовательных приближений (1747). Клеро принадлежит идея взять в качестве первого приближения к движению Луны не кеплеров неподвижный эллипс, а эллипс с равномерно вращающейся линией апсид.

Теорию, аналогичную теории Клеро, но гораздо более систематичную, развил Даламбер (1754—1756). В то время как Клеро с самого начала подставляет численные значения параметров, Даламбер дал первый пример алгебраической теории, в которой параметры сохраняют произвольные значения.

Характерной особенностью работ Клеро и Даламбера является употребление истинной долготы Луны в качестве независимой переменной. Метод, основанный на этой идее, был разработан во всей полноте и общности Лапласом, который более 30 лет занимался теорией Луны. Полученные результаты Лаплас собрал в третьем томе *Mécanique céleste* (1802). Помимо разработки общего метода, позволяющего планомерно найти все неравенства, зависящие от притяжения Солнца, Лаплас впервые определил возмущения, вызываемые фигурой Земли и притяжением планет. С последней проблемой связано одно из самых замечательных открытий Лапласа — объяснение векового ускорения среднего движения Луны (см. § 125). Им было также найдено, что аналогичные ускорения, зависящие от той же причины, — векового уменьшения эксцентриситета земной орбиты, — имеют место в движении перигея и в движении узла.

Лаплас определил лунные неравенства до 2-х, частично — до 3-х степеней тех параметров, по которым ведется разложение. Дамуазо (M. Damoiseau) применил метод Лапласа для получения численных значений неравенств с гораздо большей точностью (1827). Плана (G. Plana) проделал ту же самую работу алгебраически (1832), но его результаты содержат очень много ошибок.

В 1846 г. Понтекулан (G. de Pontécoulant) опубликовал новую теорию Луны, основанную, как и только-что рассмотренные, на употреблении

полярных координат; но он принимает за независимую переменную время. Соответствующие дифференциальные уравнения (§ 7) были даны еще Лапласом. Этот же самый метод одновременно с Понтекуланом развил Лёббок (J. W. Lubbock), опубликовавший свои результаты в 1834 г., но он ограничился проведением только второго приближения.

Появившееся в 1753 г. сочинение Эйлера *Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates* является источником новых направлений в разработке лунной теории. Обширное *Additamentum*, заканчивающее это сочинение, содержит по существу метод вариации эллиптических элементов. Дальнейшим, и притом весьма глубоким, развитием этой идеи Эйлера можно считать метод интегрирования уравнений возмущенного движения, предложенный в 1846 г. Делоне (С. Delaunay). Этот метод позволил Делоне создать наиболее полную буквенную теорию солнечных неравенств. Ценой двадцатилетней работы он получил общие выражения для всех неравенств включительно до 7-го порядка относительно возмущающих сил.

Теория Делоне, усовершенствованная Радо (R. Radau) и Андуайе (H. Andoyer), легла в основу весьма совершенных таблиц движения Луны, созданных Радо.

Поставленная Эйлером задача определения оскулирующих элементов лунной орбиты была продвинута вперед Пуассоном (1835), Пуизё (V. Puiseux) (1864) и М. А. Вильевым (1919). Нужно однако заметить, что для достижения ближайшей цели лунной теории — построения таблиц движения Луны — определение оскулирующих элементов представляется мало целесообразным.

Другая весьма важная идея, встречающаяся в указанной работе Эйлера, была развита им самим в обширном сочинении, напечатанном в 1772 г. под заглавием *Theoria motuum lunae nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis, unde ad quodvis tempus loca lunae expedite computari possunt*.<sup>1</sup> Эта идея заключается в разложении искомым координат Луны в ряды вида

$$A + eB_{10} + e^2B_{20} + \dots + e'B_{01} + e'^2B_{02} + \dots + ee'B_{11} + \dots + i^2C_2 + \dots,$$

где  $e$  и  $e'$  — эксцентриситеты лунной и солнечной орбит,  $i$  — наклонность лунной орбиты, а через  $A, B_{10}, \dots, C_2, \dots$  обозначены периодические функции. Эйлер получает системы дифференциальных уравнений для последовательного определения  $A, B_{10}, \dots$  и решает каждую такую систему методом неопределенных коэффициентов.

Среди многих весьма важных усовершенствований, внесенных Эйлером в лунную теорию, особо отметим употребление прямоугольных равномерно вращающихся осей координат. Эта идея, в отличие от других идей Эйлера, долго не имела последователей, и только через сто с лишним лет, в 1877 г., Хилл в своих известных мемуарах,<sup>2</sup> положивших начало современным методам Небесной механики, показал всю плодотворность этой идеи в соединении с только-что указанной идеей последовательного вычисления неравенств различных степеней относительно эксцентриситетов и наклонности.

<sup>1</sup> Имеется русский перевод наиболее важных частей этого сочинения, выполненный акад. А. Н. Крыловым и снабженный им интересными примечаниями и добавлениями: Леонард Эйлер, Новая теория движения Луны, Ленинград 1934.

<sup>2</sup> G. W. Hill, On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motion of the Sun and Moon, *Acta math.*, 8, 1886, 1—36 (Works, 1, 243—270).

— *Researches in the Lunar Theory*, *American Journal of Math.* 1, 1877 (Works, 1, 284—335).

Теория движения Луны, развитая Хиллом в этих и нескольких последующих мемуарах, была затем доведена до исчерпывающей полноты Брауном.<sup>1</sup>

Таким образом, эта, лучшая в настоящее время, теория движения Луны базируется непосредственно на идеях Эйлера.

Следует отметить, что разработку идей Эйлера в указанном направлении одновременно с Хиллом начал Адамс, много занимавшийся вопросом независимого вычисления отдельных лунных неравенств.

Несколько в стороне от указанных направлений в развитии теории движения Луны стоят работы Ганзена, применившего к этой проблеме свой общий метод изучения возмущенного движения (глава XVI). Эти работы, обнимающие период 1829—1864 гг., привели к созданию весьма точных таблиц (опубликованных в 1857 г.), до недавнего времени оставшихся наилучшими.

В этой главе мы рассмотрим основы теории Лапласа, что позволит быстро и достаточно полно познакомиться с особенностями движения Луны. Метод Лапласа представляет, кроме того, и самостоятельный интерес, так как он может быть с успехом использован (так же, как метод Понтекулана) и в других проблемах, например при изучении движений в системах тройных звезд.<sup>2</sup>

### § 118. Дифференциальные уравнения основной проблемы.

За начало прямоугольной эллиптической системы координат принимаем центр Земли. Через  $v$  обозначим долготу Луны, через  $s$  тангенс ее широты, а через  $u$  величину, обратную проекции радиуса-вектора на плоскость эклиптики, так что будем иметь:

$$x = \frac{\cos v}{u}, \quad y = \frac{\sin v}{u}, \quad z = \frac{s}{u},$$

и потому

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u}.$$

Соответствующие уравнения движения мы можем написать в следующем виде (§ 8):

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = h^{-2} \frac{\partial U}{\partial u} + su^{-1} h^{-2} \frac{\partial U}{\partial s} - u^{-2} h^{-2} \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial U}{\partial v} - 2h^{-2} \left( \frac{d^2u}{dv^2} + u \right) \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv; \quad (1)$$

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s = su^{-1} h^{-2} \frac{\partial U}{\partial u} + u^{-2} h^{-2} (1+s^2) \frac{\partial U}{\partial s} - u^{-2} h^{-2} \frac{\partial s}{\partial v} \frac{\partial U}{\partial v} - 2h^{-2} \left( \frac{d^2s}{dv^2} + s \right) \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv; \quad (2)$$

<sup>1</sup> E. W. Brown, Investigations in the lunar theory, American Journal of Math., 17, 1895, 318—358.

— Theory of the motion of the moon etc., Memoirs of the R. Astr. Society 53, 54, 57, 59, (1897—1908).

<sup>2</sup> Весьма полные литературные указания по теории движения Луны можно найти в статье: E. W. Brown, Theorie des Erdmondes, Encyclopädie der Mathem. Wissenschaften, Bd. VI, 2, 1915.

$$dt = \frac{dv}{hu^2 \sqrt{1 + 2h^{-2} \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv}}, \quad (3)$$

где через  $h$  обозначена постоянная интегрирования.

Обозначая через  $T, L$  и  $m'$  массы Земли, Луны и Солнца, а через  $x', y', z', r'$  — геоцентрические координаты и радиус-вектор Солнца, будем иметь для функции сил следующее выражение (§ 3):

$$U = \frac{k^2(T+L)}{r} + k^2 m' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right), \quad (4)$$

где  $\Delta$  есть расстояние между Луной и Солнцем.

Обозначим через  $H$  угол между радиусами-векторами  $r$  и  $r'$ . В таком случае

$$xx' + yy' + zz' = rr' \cos H.$$

Для разложения функции  $U$  по степеням отношения  $r/r'$  воспользуемся известной формулой

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos H), \quad (5)$$

в которой через

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \dots$$

обозначены полиномы Лежандра.

Подставляя это разложение в равенство (4) и опуская член  $k^2 m' / r'$ , как не содержащий координат Луны, а потому не влияющий на нужные нам частные производные, получим:

$$U = \frac{k^2(T+L)}{r} + \frac{k^2 m'}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos H). \quad (6)$$

Этот ряд сходится весьма быстро, так как отношение  $r/r'$  порядка  $1/400$ .

Для сокращения письма выберем единицу времени и единицу массы таким образом, чтобы было

$$k^2 = 1, \quad T + L = 1.$$

Ограничиваясь лишь нужными нам членами, будем иметь окончательно:

$$U = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + m' \frac{r^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right) + m' \frac{r^3}{r^4} \left( \frac{5}{2} \cos^3 H - \frac{3}{2} \cos H \right) + \dots$$

Обозначим теперь, через  $u', v', s'$  координаты Солнца в принятой системе, так что

$$x' = \frac{\cos v'}{u'}, \quad y' = \frac{\sin v'}{u'}, \quad z' = \frac{s'}{u'}.$$

Следовательно, пренебрегая квадратом  $s'$ :

$$r' = \frac{\sqrt{1+s'^2}}{u'} = \frac{1}{u'}$$

$$\cos H = \frac{\cos(v-v') + ss'}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+s'^2}} = \frac{\cos(v-v') + ss'}{\sqrt{1+s^2}}$$

Подставим эти выражения в  $U$ . После того как степени  $\cos(v-v')$  будут заменены через косинусы кратных дуг, окончательно получим:

$$U = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{m'u'^3}{4u^2} [1 + 3 \cos 2(v-v') - 2s^2 + 12ss' \cos(v-v')] +$$

$$+ \frac{m'u'^4}{8u^3} [3(1-4s^2) \cos(v-v') + 5 \cos 3(v-v')] + \dots (7)$$

Мы опустили член  $m'/r'$ , как исчезающий при дифференцировании. Заметим, что величина  $s'$  очень мала, так как положение земной орбиты меняется весьма мало и весьма медленно. Поэтому Лаплас положил  $s' = 0$ , считая, что это не вызовет заметного изменения в движении Луны. Но когда Эри (G. V. Airy) открыл, в 1848 г., в наблюдаемых широтах Луны небольшое периодическое отклонение от теоретических значений, Ганзен показал, что это отклонение объясняется именно влиянием члена  $s'$  в разложении (7). Действительно, этот член вызывает в  $s$  возмущение, равное

$$\delta s = 1''.41 \cos v - 0''.17 \sin v.$$

Так как этим исчерпывается заметное влияние указанного члена, то в дальнейшем мы будем считать, что  $s' = 0$ .

Первая группа членов разложения (7), вызывающих возмущения, имеет множитель  $u'^3$ . Обозначив через  $a'$  большую полуось земной орбиты, мы можем считать, поскольку  $r'$  пропорционально  $a'$ , что рассматриваемые члены имеют множитель

$$a'^{-3} = \frac{n'^2}{1+m'}$$

где  $n'$  — среднее движение Солнца.

Таким образом, эти члены, дающие наибольшие возмущения движения Луны, зависят в сущности не от  $a'$ , а от  $n'$  — величины, очень точно определенной из сопоставления наблюдений Солнца, разделенных большим промежутком времени.

Напротив, члены следующей группы, имеющие множителем  $u'^4$ , после разложения по степеням эксцентриситета  $e'$ , будут умножены на

$$\frac{n'^2}{(1+m')a'}$$

Сравнение теоретических значений возмущений, вызываемых этими членами, с наблюдаемыми значениями дает возможность определить  $a'$ , иначе говоря — параллакс Солнца. Поэтому соответствующие возмущения получили название параллактических неравенств.

Следующие, не написанные нами члены в разложении (4) имеют лишь очень небольшое влияние на движение Луны, так как амплитуды соответствующих им неравенств весьма малы.

После этих общих замечаний перейдем к интегрированию уравнений (1), (2), (3), в которых  $U$  заменено выражением (7), способом последовательных приближений.

### § 119. Первое приближение.

Если возмущения со стороны Солнца отсутствуют, т. е. если  $m' = 0$ , то уравнения (1) и (2) обращаются в такие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u}{dv^2} + u &= h^{-2} (1+s^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{d^2s}{dv^2} + s &= 0. \end{aligned} \right\} (8)$$

Второе уравнение дает:

$$s = \gamma \sin(v - \theta), (9)$$

где  $\gamma$  и  $\theta$  — постоянные интегрирования.

Нетрудно убедиться, что общее решение первого уравнения может быть написано так:

$$u = \frac{\sqrt{1+s^2} + e \cos(v - \pi)}{h^2(1+\gamma^2)}, (10)$$

где  $e$  и  $\pi$  — новые произвольные постоянные.

В рассматриваемом случае мы имеем дело с обычной проблемой двух тел. Поэтому мы могли бы получить выражения (9) и (10), исходя из известных формул эллиптического движения.

Обратимся к рис. 14, на котором изображена геоцентрическая небесная сфера. Пусть  $xNL'$  будет эклиптика,  $NL$  — орбита Луны.

Обозначая через  $i$  и  $\theta$  наклонность и долготу узла лунной орбиты, из треугольника  $NLL'$  получим:

$$\operatorname{tg} LL' = \operatorname{tg} LNL' \sin NL'$$

или

$$s = \operatorname{tg} i \sin(v - \theta).$$

Сравнивая с (9), мы видим, что

$$\gamma = \operatorname{tg} i,$$

а постоянная  $\theta$ , стоящая в формуле (9), есть не что иное, как долгота узла.

Чтобы выяснить зависимость, существующую между постоянными  $e$  и  $\pi$  и эллиптическими элементами, напомним равенство (10) следующим образом:

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{u} = \frac{h^2(1+\gamma^2)}{1+e \frac{\cos(v-\theta) \cos(\pi-\theta) + \sin(v-\theta) \sin(\pi-\theta)}{\sqrt{1+s^2}}}.$$

Далее, треугольник  $NLL'$  дает:

$$\begin{aligned} \sin NL' \cos LL' &= \sin NL \cos \\ \cos NL' \cos LL' &= \cos NL, \end{aligned}$$

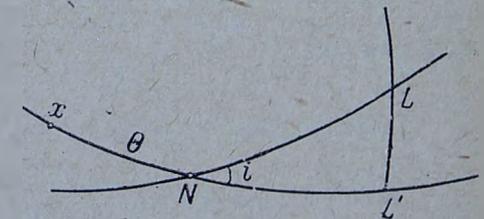


Рис. 14.

поэтому, обозначая через  $w$  долготу в орбите  $xN + NL$ , получим:

$$\frac{\sin(v - \theta)}{\sqrt{1 + s^2}} = \frac{\sin(w - \theta)}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$$

$$\frac{\cos(v - \theta)}{\sqrt{1 + s^2}} = \cos(w - \theta).$$

Следовательно

$$r = \frac{h^2(1 + \gamma^2)}{1 + e \left[ \cos(w - \theta) \cos(\pi - \theta) + \frac{\sin(w - \theta) \sin(\pi - \theta)}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \right]}$$

С другой стороны, мы имеем:

$$r = \frac{a(1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cos(w - \pi_0)},$$

где через  $a$ ,  $e_0$  и  $\pi_0$  обозначены большая полуось, эксцентриситет и долгота перигея.

Сравнение этих выражений дает:

$$e_0 \sin(\pi_0 - \theta) = e(1 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}} \sin(\pi - \theta)$$

$$e_0 \cos(\pi_0 - \theta) = e \cos(\pi - \theta)$$

$$a(1 - e_0^2) = h^2(1 + \gamma^2)$$

откуда

$$a = \frac{h^2(1 + \gamma^2)}{1 - e^2 \frac{1 + \gamma^2 \cos^2(\pi - \theta)}{1 + \gamma^2}}$$

Первые два из этих равенств показывают, что  $e$  и  $e_0$  разнятся лишь на величину порядка  $\gamma^2$ . Последнее равенство дает, отбрасывая величины 4-го порядка:

$$h^2 = a(1 - e^2 - \gamma^2 + \dots). \quad (11)$$

Полезно заметить, что

$$e \approx \frac{1}{20}, \quad \gamma \approx \frac{1}{11}.$$

Движения перигея и узла лунной орбиты настолько быстры, что принимать выражения (9) и (10) за первые приближения нецелесообразно. Приблизительно каждые четыре с половиной года перигей и апогей лунной орбиты меняются местами. Поэтому, если мы хотим представить движение Луны в течение сколько-нибудь значительного интервала времени, неподвижный эллипс будет столь же грубым приближением к действительной орбите, как и окружность.

Исходя из этих соображений, Клеро принял за первое приближение неизменный эллипс, вращающийся в своей плоскости. Развивая эту идею, Лаплас берет за первое приближение орбиту, определяемую равенствами

$$s = \gamma \sin(gv - \theta) \quad (12)$$

$$u = \frac{\sqrt{1 + s^2} + e \cos(cv - \pi)}{h^2(1 + \gamma^2)}, \quad (13)$$

где  $g$  и  $c$  — некоторые постоянные, мало отличающиеся от единицы.

Так как

$$gv - \theta = v - [\theta + (1 - g)v]$$

$$cv - \pi = v - [\pi + (1 - c)v],$$

то долготы узла и перигея будут соответственно равны  $\theta + (1 - g)v$  и  $\pi + (1 - c)v$ , а потому будут меняться при каждом обороте соответственно на  $(1 - g)360^\circ$  и  $(1 - c)360^\circ$ .

Конечно, выражения (12) и (13) не могут точно удовлетворять уравнениям (8), если  $g$  и  $c$  не равны единице. Но, как будет показано ниже, при подстановке (12) и (13) в уравнения (8) получаются величины второго порядка относительно малых величин  $\gamma$ ,  $e$ ,  $1 - g$ ,  $1 - c$ .

Принимая выражения (12), (13) за первое приближение, мы учитываем этим некоторую часть возмущений.

Чтобы установить зависимость между координатами и временем, соответствующую орбите, определяемой уравнениями (12), (13), обратимся к уравнению (3), которое при  $m' = 0$  дает

$$dt = h^{-1} u^{-2} dv.$$

Пренебрегая четвертыми степенями малых величин  $e$  и  $\gamma$ , напомним выражение (13) следующим образом:

$$u = h^{-2}(1 + \gamma^2)^{-1} \left[ 1 + \frac{1}{4} \gamma^2 - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) + e \cos(cv - \pi) \right]$$

или

$$u = h^{-2} \left[ 1 - \frac{3}{4} \gamma^2 + e(1 - \gamma^2) \cos(cv - \pi) - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) \right], \quad (14)$$

откуда

$$dt = h^3 \left[ 1 + \frac{3}{2} (e^2 + \gamma^2) - 2e(1 - \gamma^2) \cos(cv - \pi) + \frac{3}{2} e^2 \cos(2cv - 2\pi) + \frac{1}{2} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) \right] dv,$$

или, после интегрирования,

$$t + \text{const} = h^3 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} \gamma^2 \right) v - \frac{2h^3 e}{c} (1 - \gamma^2) \sin(cv - \pi) + \frac{3h^3 e^2}{4c} \sin(2cv - 2\pi) + \frac{h^3 \gamma^2}{4g} \sin(2gv - 2\theta).$$

Обозначим через  $n$  среднее движение Луны, связанное с большой полуосью соотношением

$$n^2 a^3 = 1.$$

Равенство (11) дает:

$$h = a^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \dots \right), \quad (15)$$

откуда

$$n^{-1} = h^3 \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} \gamma^2 + \dots \right).$$

Коэффициент при  $v$  в только-что полученном соотношении между  $t$  и  $v$  должен быть совершенно точно равен  $n^{-1}$ . Поэтому, учитывая (15) и опуская члены 3-го порядка, мы можем это соотношение написать так:

$$nt + \epsilon = v - \frac{2e}{c} \sin(cv - \pi) + \frac{3e^2}{4c} \sin(2cv - 2\pi) + \frac{\gamma^2}{4g} \sin(2gv - 2\theta) + \dots, \quad (16)$$

где через  $\epsilon$  обозначена постоянная интегрирования.

Заметим, наконец, что равенству (14) можно придать следующий вид, если вместо  $h$  подставить его значение (15):

$$u = a^{-1} \left[ 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + (e + e^3) \cos(cv - \pi) - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) + \dots \right]. \quad (17)$$

### § 120. Вычисление координат Солнца.

Так как за независимую переменную принята долгота Луны  $v$ , то координаты Солнца мы должны также выразить в виде явных функций  $v$ .

Движение Солнца относительно центра инерции системы Земля—Луна может считаться эллиптическим, если не принимать во внимание действия остальных планет, а изучать, как это мы сейчас и делаем, только солнечные неравенства движения Луны.

Напротив, движение Солнца относительно центра Земли чувствительно отличается от эллиптического. Но так как соответствующая поправка очень легко может быть введена, как это будет показано в конце параграфа, то мы будем считать, что и относительно Земли Солнце движется по законам Кеплера. Поэтому для представления движения Солнца мы воспользуемся формулами предыдущего параграфа.

Так как для Солнца  $s' = 0$ ,  $\gamma' = 0$ , то получим следующие уравнения движения:

$$u' = a'^{-1} [1 + e'^2 + e' \cos(c'v' - \pi') + \dots] \quad (18)$$

$$n't + \epsilon' = v' - 2e' \sin(c'v' - \pi') + \frac{3}{4} e'^2 \sin(2c'v' - 2\pi') + \dots \quad (19)$$

Здесь мы сохранили в аргументах коэффициент  $c'$ , зависящий от векового движения перигелия земной орбиты. Этим самым мы учитываем, без всякого усложнения вычислений, часть планетных возмущений.

Так как  $c'$  очень мало отличается от единицы, то в коэффициентах мы положили  $c' = 1$ .

Исключение  $t$  из (16) и (19) дает:

$$\begin{aligned} v' - 2e' \sin(c'v' - \pi') + \frac{3}{4} e'^2 \sin(2c'v' - 2\pi') = \\ = \mu v + \epsilon' - \mu \epsilon - 2\mu e \sin(cv - \pi) + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{n'}{n}.$$

Так как это отношение — малая величина порядка  $1/13$  и так как в левой части последнего равенства отброшены члены 3-го порядка, то

и с правой стороны мы отбросили члены, имеющие множители  $\mu e^2$  и  $\mu \gamma^2$ . По этой же причине  $\mu e c^{-1}$  заменено через  $\mu e$ .

Полученное уравнение легко решается относительно  $v'$  последовательными приближениями. Условившись писать для краткости  $\mu v$  вместо  $\mu v + \epsilon' - \mu \epsilon$ , получим:

$$v' = \mu v + 2e' \sin(c'\mu v - \pi') - 2\mu e \sin(cv - \pi) + \frac{5}{4} e'^2 \sin(2c'\mu v - 2\pi') + \dots \quad (20)$$

Подставив это значение  $v'$  в (18), будем иметь, в пределах принятой точности:

$$u' = a'^{-1} [1 + e' \cos(c'\mu v - \pi') + e'^2 \cos(2c'\mu v - 2\pi') + \dots], \quad (21)$$

так как

$$\begin{aligned} e' \cos(c'v' - \pi') &= e' \cos [c'\mu v - \pi' + 2c'e' \sin(c'\mu v - \pi')] = \\ &= e' \cos(c'\mu v - \pi') - 2c'e'^2 \sin^2(c'\mu v - \pi') = \\ &= e' \cos(c'\mu v - \pi') - e'^2 + e'^2 \cos 2(c'\mu v - \pi'), \end{aligned}$$

причем  $c'$ , переставшее быть множителем неограниченно возрастающей величины  $v$ , мы снова заменяем единицей.

Примечание I. Посмотрим, с какою точностью движение Солнца относительно центра инерции  $G$  системы Земля—Луна может считаться эллиптическим.

Обозначая через  $x_1, y_1, z_1$  координаты Солнца в системе, оси которой параллельны предыдущим, а начало помещено в точку  $G$ , получим (ср. § 4):

$$x_1 = x' - \frac{L}{T+L} x, \quad y_1 = y' - \frac{L}{T+L} y, \quad z_1 = z' - \frac{L}{T+L} z.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} r'^2 &= \left(x_1 + \frac{L}{T+L} x\right)^2 + \left(y_1 + \frac{L}{T+L} y\right)^2 + \left(z_1 + \frac{L}{T+L} z\right)^2 \\ \Delta^2 &= \left(x_1 - \frac{T}{T+L} x\right)^2 + \left(y_1 - \frac{T}{T+L} y\right)^2 + \left(z_1 - \frac{T}{T+L} z\right)^2 \end{aligned}$$

или, обозначая через  $H_1$  угол между векторами  $Gm'$  и  $GL$  и полагая  $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ ,

$$\begin{aligned} r'^2 &= r_1^2 + 2 \frac{L}{T+L} r r_1 \cos H_1 + \left(\frac{L}{T+L}\right)^2 r^2 \\ \Delta^2 &= r_1^2 - 2 \frac{T}{T+L} r r_1 \cos H_1 + \left(\frac{T}{T+L}\right)^2 r^2. \end{aligned}$$

На основании формул (18) в § 4 уравнения движения Солнца относительно  $G$  напишутся так:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \mu' \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \mu' \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \mu' \frac{\partial u_1}{\partial z_1},$$

где

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{T+L+m'}{m'(T+L)} \\ u_1 &= k^2 \left( \frac{TL}{r} + \frac{Tm'}{r'} + \frac{Lm'}{\Delta} \right). \end{aligned}$$

Отбрасывая здесь первый член, как не влияющий на производные, и пользуясь разложением (5), получим:

$$U_1 = k^2 \frac{T+L+m'}{r_1} \left[ 1 + \frac{TL}{(T+L)^2} \frac{r^2}{r_1^2} \left( \frac{3}{2} \cos^2 H_1 - \frac{1}{2} \right) + \dots \right].$$

Таким образом, даже второй член этого разложения, имеющий верхний предел порядка

$$\frac{1}{80} \frac{1}{400^2} = \frac{1}{12\,800\,000},$$

может быть отброшен. Остающийся первый член дает эллиптическое движение.

Примечание II. Так как для представления движения Солнца мы пользуемся формулами эллиптического движения, то для того, чтобы быть вполне последовательными, мы должны для изучения движения Луны исходить из уравнений движения, данных в § 4. Иначе говоря, вместо функции сил  $U$ , определяемой равенством (4), мы должны пользоваться только что указанной функцией сил  $U_1$ .

Учитывая множитель  $\frac{m_0+m_1}{m_0 m_1} = \frac{T+L}{TL}$ , которым сопровождается эта функция в уравнениях движения Луны (ср. (18) в § 4), мы видим, что  $U$  надо заменить через

$$\frac{T+L}{TL} U_1 = \frac{k^2(T+L)}{r} + k^2 \frac{T+L}{L} \frac{m'}{r'} + k^2 \frac{T+L}{T} \frac{m'}{\Delta}.$$

Разлагая в ряды два последних члена, получим:

$$\frac{T+L}{TL} U_1 = \frac{k^2(T+L)}{r} + \frac{k^2 m'}{r_1} \sum_{n=2}^{\infty} x_n \left( \frac{r}{r_1} \right)^n P_n(\cos H_1), \quad (22)$$

где

$$x_n = \left( \frac{T}{T+L} \right)^{n-1} - \left( \frac{-L}{T+L} \right)^{n-1},$$

причем член  $k^2 m'/r_1$ , не зависящий от координат Луны, опущен.

Сравним полученное точное выражение функции сил с употребляемым нами выражением (6), которое не является достаточно точным, если мы пользуемся формулами эллиптического движения для представления геоцентрических координат Солнца.

Так как разница между  $\cos H$  и  $\cos H_1$  совершенно нечувствительна, то для перехода от (6) к (22) достаточно члены разложения (6) умножить на поправочные множители

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ x_3 &= \frac{T^2 - L^2}{(T+L)^2} = \frac{T-L}{T+L} \\ x_4 &= \frac{T^3 + L^3}{(T+L)^3} = \frac{T^2 - TL + L^2}{(T+L)^2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

мало отличающиеся от единицы.

### § 121. Об интегрировании уравнений возмущенного движения во втором и следующих приближениях.

Найденные в первом приближении значения координат Луны и Солнца, т. е. выражения (12), (14) и (20), подставим в дифференциальные уравнения (1) и (2), в которых  $U$  заменено выражением (7). Таким образом, для определения более точных значений координат  $u$  и  $s$  получим уравнения вида

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + u = A + \sum P \cos(pv + K), \quad (23)$$

где с правой стороны стоит сумма конечного числа членов; через  $p$  обозначены некоторые постоянные числа, не обязательно целые.

Проинтегрировав уравнение (23) и аналогичное уравнение для  $s$ , получим  $u$  и  $s$  во втором приближении. Подстановка этих значений в уравнения (1) и (2) даст уравнения для нахождения третьего приближения и т. д. Важно отметить, что в каждом из этих последовательных приближений мы будем иметь дело исключительно с уравнениями вида (23).

Если ни одно из чисел  $p$  не равно единице, то общее решение уравнения (23) имеет вид

$$u = A + C_1 \cos v + C_2 \sin v + \sum \frac{P}{1-p^2} \cos(pv + K), \quad (24)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Если же в правой части уравнения имеется член  $P \cos(v + K)$ , то в общем решении ему будет соответствовать член

$$\frac{1}{2} P v \sin(v + K). \quad (25)$$

Но наличие такого члена в разложении  $u$  и  $s$  недопустимо, так как эти координаты остаются для Луны ограниченными, а выражение (25) принимает сколь угодно большие значения. Чтобы члены указанного вида не могли появиться, необходимо в каждом приближении в общем решении (24) брать постоянные  $C_1$  и  $C_2$  равными нулю.

Формула (24) показывает, что коэффициент  $P$  члена, для которого  $p$  близко к единице, необходимо вычислять с большей точностью, чем коэффициенты остальных членов, так как благодаря малому делителю  $1-p^2$  в этих членах при интегрировании получается потеря точности.

Особого внимания заслуживают также члены, для которых  $p$  близко к нулю. Эти члены мало изменяются при вычислении  $u$  и  $s$ , но они производят потерю точности при вычислении  $t$  по формуле (3).

Действительно, член вида  $P \cos(pv + K)$  в выражении  $\frac{dt}{dv}$  после интегрирования дает

$$\frac{P}{p} \sin(pv + K).$$

Если такой член входит в выражение, стоящее в (3) под знаком интеграла, то после двух интегрирований мы будем иметь в разложении  $t$  член вида

$$\frac{P}{p^2} \cos(pv + K).$$

Отсюда ясно, что коэффициенты этих членов также должны быть вычислены с известным запасом точности, особенно значительным во втором случае. Такого рода члены назовем критическими.

### § 122. Уравнения, определяющие наибольшие периодические неравенства.

В первую очередь рассмотрим неравенства, вызываемые членами функции сил (7), имеющими множителем  $n^3 u^{-2}$ . С этой целью в уравнениях (1) и (2) положим

$$U = \frac{u}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{1}{4} m' u^3 u^{-2} [1 + 3 \cos 2(v-v') - 2s^2].$$

Получим:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + u = h^{-2} (1+s^2)^{-\frac{1}{2}} + I + II + III \quad (26)$$

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s = I' + II' + III', \quad (27)$$

где

$$I = -\frac{m' u^3}{2h^2 u^3} [1 + 3 \cos^2(v-v')]$$

$$II = \frac{3m' u^3}{2h^2 u^4} \frac{du}{dv} \sin 2(v-v')$$

$$III = \frac{3m'}{h^2} \left( \frac{d^2 u}{dv^2} + u \right) \int \frac{u^3}{u^4} \sin 2(v-v') dv$$

$$I' = -\frac{3m' u^3}{2h^2 u^4} s [1 + \cos 2(v-v')]$$

$$II' = \frac{3m' u^3}{2h^2 u^4} \frac{ds}{dv} \sin 2(v-v')$$

$$III' = \frac{3m'}{h^2} \left( \frac{d^2 s}{dv^2} + s \right) \int \frac{u^3}{u^4} \sin 2(v-v') dv.$$

Значения  $u$  и  $s$ , соответствующие второму приближению, обозначим через

$$u = u_0 + \delta u, \quad s = s_0 + \delta s,$$

где  $u_0, s_0$  — величины, полученные в первом приближении, т. е.

$$s_0 = \gamma \sin(gv - \theta)$$

$$u_0 = a^{-1} \left[ 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + (e + e^3) \cos(cv - \pi) - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) + \dots \right]. \quad (28)$$

Стоящая здесь величина  $a$  была нами определена (§ 119) как большая полуось эллиптической орбиты, связанная с наблюдаемым средним движением соотношением

$$n^2 a^3 = 1. \quad (29)$$

Под влиянием возмущающего действия Солнца постоянная часть  $u$  изменится (ср. § 98) и уже не будет равна тому выражению, которое стоит в равенстве (28). Условимся, следуя Лапласу, под  $a$  разуметь в дальнейшем такое число, что постоянная часть  $u$  в каждом приближении будет иметь то же выражение

$$a^{-1} \left[ 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \dots \right],$$

как и в  $u_0$ .

Измененное таким образом  $a$  уже не будет связано с  $n$  соотношением (29), вследствие чего не будет иметь место и равенство (15). Определим поэтому новую величину  $a_1$  равенством

$$n^2 a_1^3 = 1, \text{ или } h = a_1^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 - \dots \right), \quad (30)$$

аналогичным соотношению (15).

Перейдем теперь к вычислению величин, обозначенных через I, II, ... Начнем с вычисления выражения

$$\frac{m' u^3}{2h^2 u^3} = \frac{m' a^3}{2h^2 a^3} \frac{(a' u')^3}{(au)^3}.$$

Так как

$$n'^2 a'^3 = 1 + m' \approx m',$$

то это выражение равно

$$\frac{n'^2 a^3}{2a_1 (1 - e^2 - \gamma^2 - \dots)} \frac{(a' u')^3}{(au)^3}.$$

Далее

$$(a' u')^3 = 1 + \frac{3}{2} e'^2 + 3e' \cos(c'\mu v - \pi') + \frac{9}{2} e'^2 \cos 2(c'\mu v - \pi') + \dots$$

$$(au)^{-3} = 1 - \frac{3}{4} \gamma^2 - 3e(1 - \frac{1}{2} e^2 - \gamma^2) \cos(cv - \pi) + 3e^2 \cos 2(cv - \pi) + \frac{3}{4} \gamma^2 \cos 2(gv - \theta) + \dots$$

Мы ограничиваемся, вообще говоря, членами второго порядка, но, на основании сказанного в предыдущем параграфе, сохраняем члены третьего порядка в коэффициентах критических членов.

Таким образом, полагая

$$n'^2 a^3 = \mu_1^2,$$

окончательно получим

$$\frac{m' u^3}{2h^2 u^3} = \frac{\mu_1^2}{2a_1} \left[ 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{3}{2} e'^2 - 3e(1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{2} e'^2) \cos(cv - \pi) + 3e'(1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2) \cos(c'\mu v - \pi') + \dots \right]. \quad (31)$$

С другой стороны, в пределах нужной нам точности,

$$\cos 2(v-v') = \cos(2v - 2\mu v) - 2\mu e \cos(2v - 2\mu v - cv + \pi) + \dots$$

Поэтому, полагая для краткости

$$\lambda = 2(1 - \mu),$$

получим

$$\frac{m' u^3}{2h^2} 3 \cos 2(v - v') = \frac{3\mu_1^2}{2a_1} \left[ \cos \lambda v - \frac{3 + 4\mu}{2} e \cos(\lambda v - cv + \pi) + \dots \right].$$

Складывая это выражение с (31), получим I.

При вычислении II мы можем принять

$$u = a^{-1}, \quad \frac{du}{dv} = -\frac{ec}{a} \sin(cv - \pi)$$

$$u' = a'^{-1}, \quad v' = \mu v.$$

Это даст

$$II = \frac{3\mu_1^2}{4a_1} e [\cos(\lambda v - cv + \pi) - \cos(\lambda v + cv - \pi)] + \dots$$

Здесь достаточно сохранить только первый из двух написанных членов, так как множитель  $\lambda + c$  в аргументе второго косинуса существенно отличается от единицы.

Остается найти III. Тут достаточно принять

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = \frac{1}{a}, \quad u' = \frac{1}{a'}$$

$$u^{-1} = a^4 [1 - 4e \cos(cv - \pi)]$$

$$\sin 2(v - v') = \sin \lambda v - 2\mu e \sin(\lambda v - cv + \pi).$$

Окончательно получим:

$$III = \frac{3\mu_1^2}{a_1} \left[ \frac{\cos \lambda v}{2 - 2\mu} - \frac{2 + 2\mu}{1 - 2\mu} e \cos(\lambda v - cv + \pi) + \dots \right].$$

Что касается до первого члена уравнения (26), то его мы представим в таком виде:

$$h^{-2} (1 + s^2)^{-\frac{3}{2}} = h^{-2} \left[ 1 - \frac{3}{2} (s_0 + \delta s)^2 + \dots \right] = \\ = a_1^{-1} \left[ 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{3}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) - \right. \\ \left. - 3\gamma \sin(gv - \theta) \delta s + \dots \right].$$

Вычисление выражений I', II', III', производящееся совершенно таким же образом, ради краткости приводить не будем. Окончательный вид уравнений (26) и (27) после всех подстановок будет такой:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u = \frac{1}{a_1} \left( 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 \right) - \frac{\mu_1^2}{2a_1} \left( 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{3}{2} e'^2 \right) + \\ + \frac{3\mu_1^2}{4a_1} (2 + e^2 + 3e'^2) e \cos(cv - \pi) - \frac{3\mu_1^2}{2a_1} \frac{2 - \mu}{1 - \mu} \cos \lambda v + \quad (32)$$

$$+ \frac{3\mu_1}{2a_1} \frac{5 + 4\mu}{1 - 2\mu} e \cos(\lambda v - cv + \pi) + \frac{3}{4a_1} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) - \\ - \frac{3}{a_1} \gamma \sin(gv - \theta) \delta s \\ \frac{d^2s}{dv^2} + s = -\frac{3}{2} \mu_1^2 \left( 1 + 2e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{3}{2} e'^2 \right) \gamma \sin(gv - \theta) + \\ + \frac{3}{2} \mu_1^2 \gamma \sin(\lambda v - gv + \theta). \quad (33)$$

Чтобы правильно оценить порядок коэффициентов в правых частях этих уравнений, надо иметь в виду, что  $\mu_1$  есть величина первого порядка. В самом деле, для невозмущенного движения

$$\mu_1^2 = n'^2 a^3 = \left( \frac{n'}{n} \right)^2 = \mu^2,$$

поэтому  $\mu_1$  порядка  $\frac{1}{13}$ .

Таким образом, коэффициенты тригонометрических членов в уравнениях (32), (33) даны с точностью до членов второго порядка включительно, за исключением членов с критическими аргументами, коэффициенты которых найдены с большей точностью. В постоянном члене уравнения (32) сохранены величины четвертого порядка, которые нам понадобятся в дальнейшем.

### § 123. Второе приближение.

Интегрирование уравнений, выведенных в предыдущем параграфе, выполним способом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим сначала уравнение (33). Так как

$$\frac{d^2s_0}{dv^2} + s_0 = \gamma (1 - g^2) \sin(gv - \theta),$$

то, полагая в этом уравнении  $s = s_0 + \delta s$ , мы можем взять

$$\delta s = A \sin(\lambda v - gv + \theta),$$

где  $A$  — неопределенный коэффициент.

Делая подстановку и приравнявая коэффициенты при обоих синусах, получим два уравнения для определения  $g$  и  $A$ , из которых следует:

$$g^2 = 1 + \frac{3}{2} \mu_1^2 (1 + 2e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{3}{2} e'^2)$$

$$A = \frac{3}{2} \frac{\mu_1^2 \gamma}{1 - (2 - 2\mu - g)^2}$$

В последнем равенстве мы можем взять

$$g = 1, \quad \mu_1 = \mu,$$

поэтому окончательно будем иметь, как результат второго приближения,

$$\delta s = \frac{3}{8} \mu \gamma \sin(\lambda v - gv + \theta) \quad (34)$$

$$g = 1 + \frac{3}{4} \mu^2 (1 + 2e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{3}{2} e'^2) + \dots \quad (35)$$

Обратимся теперь к уравнению (32). Подстановка в правую часть этого уравнения только-что найденного значения  $\delta s$  дает член третьего порядка, который мы отбросим, так как коэффициент у  $v$  в аргументе этого члена отличается от единицы на значительную величину.

Так как

$$\frac{d^2 u_0}{dv^2} + u_0 = a^{-1} \left[ 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \dots + \right. \\ \left. + (e + e^3) (1 - c^2) \cos(cv - \pi) - \frac{1}{4} \gamma^2 (1 - 4g^2) \cos(2gv - 2\theta) + \dots \right],$$

то положим

$$\delta u = B_0 \cos \lambda v + B_1 \cos(\lambda v - cv + \pi) + B_2 \cos(2gv - 2\theta).$$

Таким образом, для определения введенных ранее постоянных  $a$ ,  $c$  и коэффициентов  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{a} (1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2) = \frac{1}{a_1} (1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2) - \frac{\mu_1^2}{2a_1} (1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + \frac{3}{2} e'^2) \\ \frac{e}{a} (1 + e^2) (1 - c^2) - \frac{3\mu_1^2}{4a_1} e (2 + e^2 + 3e'^2) = 0 \\ B_0 [1 - (2 - 2\mu)^2] + \frac{3\mu_1^2}{2a_1} \frac{2 - \mu}{1 - \mu} = 0 \\ B_1 [1 - (2 - 2\mu - c)^2] - \frac{3\mu_1^2}{2a_1} \frac{5 + 4\mu}{1 - 2\mu} e = 0 \\ B_2 [1 - 4g^2] + \frac{\gamma^2}{4a} (4g^2 - 1) - \frac{3\gamma^2}{4a_1} = 0.$$

Из первого уравнения имеем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} - \frac{\mu_1^2}{2a_1} \left( 1 + \frac{3}{2} e'^2 \right) + \dots \quad (36)$$

откуда ясно, что  $a$  отличается от  $a_1$  на величину второго порядка.

Второе уравнение позволяет найти  $c$ . Легко видеть, что

$$c = 1 - \frac{3}{4} \mu_1^2 \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{2} e'^2 \right) + \dots \quad (37)$$

Остальные уравнения дают:

$$B_0 = \frac{\mu_1^2}{a_1}, \quad B_1 = \frac{15}{8} \frac{\mu_1^2 e}{\mu a_1} \\ B_2 = \frac{\gamma^2}{3a} (g^2 - 1) + \frac{1}{4} \gamma^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} \right).$$

или, отбрасывая величины третьего и высших порядков:

$$B_0 = \frac{\mu^2}{a}, \quad B_1 = \frac{15\mu e}{8a}, \quad B_2 = 0.$$

Итак, в результате второго приближения мы имеем с точностью до членов второго порядка следующие уравнения орбиты:

$$u = a^{-1} \left[ 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + e \cos(cv - \pi) - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) + \right. \\ \left. + \mu^2 \cos \lambda v + \frac{15}{8} \mu e \cos(\lambda v - cv + \pi) \right] \quad (38)$$

$$s = \gamma \sin(gv - \theta) + \frac{3}{8} \mu \gamma \sin(\lambda v - gv + \theta). \quad (39)$$

Стоящая здесь величина  $a$  выражается через среднее движение Луны  $n$  при помощи равенств (36) и (30).

Примечание. Ради большей простоты выкладок мы ограничились при вычислении  $u$  лишь членами второго порядка. Однако, согласно сказанному в § 121, в дальнейшем нам понадобятся также и некоторые члены третьего порядка, а именно те, аргументы которых имеют малый коэффициент при  $v$ .

Дополнительное вычисление этих членов не представляет затруднений, поэтому ограничимся лишь указанием результата:

$$au = 1 + e^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 + e \cos(cv - \pi) - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) + \\ + \mu^2 \cos \lambda v + \frac{15}{8} \mu e \cos(\lambda v - cv + \pi) + \\ + \frac{15}{16} \mu e^2 \cos(\lambda v - 2cv + 2\pi) + \frac{3}{16} \mu \gamma^2 \cos(\lambda v - 2gv + 2\theta) - \\ - \frac{3}{2} \mu^2 e' \cos(c'\mu v - \pi') + \dots \quad (38bis)$$

#### § 124. Зависимость между долготой и временем во втором приближении.

Обратимся теперь к интегрированию уравнения (3), а именно:

$$\frac{dt}{dv} = h^{-1} u^{-2} \left[ 1 + 2h^{-2} \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Во втором приближении мы должны взять для  $u$  выражение (38bis). Прежде всего находим, учитывая значение  $h$ , даваемое формулой (30):

$$h^{-1} u^{-2} = \frac{a^2}{\sqrt{a_1}} \left[ 1 - 2e \cos(cv - \pi) + \frac{3}{2} e^2 \cos(2cv - 2\pi) + \right. \\ + \frac{1}{2} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) - 2\mu^2 \cos \lambda v - \frac{15}{4} \mu e \cos(\lambda v - cv + \pi) - \\ - \frac{15}{8} \mu e^2 \cos(\lambda v - 2cv + 2\pi) - \frac{3}{8} \mu \gamma^2 \cos(\lambda v - 2gv + 2\theta) + \\ \left. + 3\mu^2 e' \cos(c'\mu v - \pi') + \dots \right] \quad (40)$$

Из членов третьего порядка мы сохранили только те, в аргументах которых коэффициент  $v$  — малая величина.

Полезно отметить, что непериодическая часть этого выражения должна точно равняться  $\frac{a^2}{\sqrt{a_1}}$ , потому что она должна приводиться к  $a^{\frac{3}{2}} = a_1^{\frac{3}{2}}$  в случае невозмущенного движения.

С другой стороны, при выводе уравнения (26) мы уже имели равенство

$$2h^{-2} \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv = -3m'h^{-2} \int \frac{u'^3}{u^4} \sin 2(v-v') dv.$$

Следовательно

$$\left[ 1 + 2h^{-2} \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3a}{2h^2} \mu_1^2 \int \frac{(a'u')^3}{(au)^4} \sin 2(v-v') dv + \dots$$

так как

$$\frac{m'a^3}{a'^3} = \frac{n'^2 a'^3 a^3}{a'^3} = \mu_1^2.$$

Но

$$\frac{a_1}{h^2} = 1 + e^2 + \gamma^2 + \dots$$

$$(a'u')^3 = 1 + \frac{3}{2} e'^2 + 3e' \cos(c'\mu v - \pi') + \frac{9}{2} e'^2 \cos(2c'\mu v - 2\pi') + \dots$$

$$(au)^{-4} = 1 + e^2 - \gamma^2 - 4e \cos(cv - \pi) + \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) + 5e^2 \cos(2cv - 2\pi) + \dots$$

$$\sin 2(v-v') = \sin \lambda v - 2\mu e \sin(\lambda v - cv + \pi) + \dots$$

Поэтому, замечая, что  $a_1$  отличается от  $a$  на величину второго порядка, а  $\mu_1^2$  от  $\mu^2$  на величину четвертого порядка, и сохраняя среди членов третьего и четвертого порядка лишь те, которые имеют в аргументе очень малый коэффициент у  $v$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned} \left[ 1 + 2h^{-2} \int u^{-2} \frac{\partial U}{\partial v} dv \right]^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{3}{4} \mu^2 \cos \lambda v + \frac{15}{8} \mu e^2 \cos(\lambda v - 2cv + 2\pi) + \\ &+ \frac{3}{8} \mu \gamma^2 \cos(\lambda v - 2gv + 2\theta) + \dots \end{aligned} \quad (40')$$

Перемножив этот ряд с указанным выше выражением для  $h^{-1}u^{-2}$ , окончательно, для определения времени в функции долготы, будем иметь такое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{\sqrt{a_1}} \left[ 1 - 2e \cos(cv - \pi) + \frac{3}{2} e^2 \cos(2cv - 2\pi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma^2 \cos(2gv - 2\theta) - \frac{11}{4} \mu^2 \cos \lambda v - \right. \\ \left. - \frac{15}{4} \mu e \cos(\lambda v - cv + \pi) + 3\mu^2 e' \cos(c'\mu v - \pi') + \dots \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Весьма важно отметить, что непериодическая часть стоящего справа выражения равняется, если воспользоваться соотношением (36) и ограничиться членами второй степени относительно  $\mu$ :

$$\frac{a^2}{\sqrt{a_1}} = a_1^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \mu^2 + \frac{3}{2} \mu^2 e'^2 + \dots \right).$$

Действительно, при умножении членов ряда (40), в аргументы которых не входит  $\lambda$ , на члены ряда (40') не могут получиться непериодические выражения, так как аргументы всех членов в (40') содержат  $\lambda v$  и это  $\lambda v$  не может пропасть при указанном перемножении.

С другой стороны, члены ряда (40), аргументы которых заключают  $\lambda v$ , имеют множителем  $\mu$ , тогда как все члены ряда (40'), за исключением двух (третьего и четвертого), умножены на  $\mu^2$ .

Поэтому мы можем написать:

$$\frac{dt}{dv} = a_1^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \mu^2 + \frac{3}{2} \mu^2 e'^2 + \dots \right) + \text{период. члены.}$$

Рассмотрим прежде всего непериодическую часть этого выражения, а изучение периодических членов отложим до § 126.

Так как эксцентриситет земной орбиты  $e'$  меняется с течением времени, то, обозначая через  $e'_0$  значение  $e'$  для какой-либо определенной эпохи  $t=0$  и отделяя постоянную часть от переменной, можем написать:

$$\frac{dt}{dv} = a_1^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \mu_1^2 + \frac{3}{2} \mu_1^2 e'^2 + \dots \right) + \frac{3}{2} a_1^{\frac{3}{2}} \mu_1^2 (e'^2 - e'_0{}^2) + \text{период. члены.}$$

Интегрируя и замечая, что коэффициент при  $v$  мы условились обозначать через  $n^{-1}$ , будем иметь:

$$t = \frac{v}{n_0} + \frac{3}{2} a_1^{\frac{3}{2}} \mu_1^2 \int (e'^2 - e'_0{}^2) dv + \text{const} + \text{период. члены,}$$

где

$$\frac{1}{n_0} = a_1^{\frac{3}{2}} \left( 1 + \mu_1^2 + \frac{3}{2} \mu_1^2 e'^2 + \dots \right).$$

Таким образом, ограничиваясь членами второй степени относительно  $\mu$ :

$$v = n_0 t + \varepsilon_0 - \frac{3}{2} \mu^2 \int_0^t (e'^2 - e'_0{}^2) n_0 dt + \text{период. члены.} \quad (42)$$

Периодические неравенства  $e'$  дадут только периодические члены, поэтому мы их здесь можем не рассматривать и ограничиться только вековыми возмущениями. Вследствие вековых возмущений эксцентриситет  $e'$  в настоящее время убывает, причем закон этого убывания хорошо выражается, в течение ближайших к нам столетий, следующей формулой (§ 100):

$$e' = e'_0 - \alpha T - \alpha' T^2,$$

где

$$e'_0 = 0.01675104, \quad \alpha = 0.00004180, \quad \alpha' = 0.000000126,$$

а через  $T$  обозначено время, считаемое в юлианских столетиях от среднего Гриничского полдня 0 января 1900 г.

Подставив это значение  $e'$  в равенство (42) и пренебрегая членами, умноженными на  $\alpha^2$  и  $\alpha'$ , окончательно будем иметь такое выражение для долготы Луны:

$$v = n_0 t + \varepsilon + \sigma T^2 + \text{период. члены,}$$

где

$$\sigma = \frac{3}{2} 100 \mu^2 e_0' \alpha n_0 = \frac{3}{2} 100 \mu e_0' \alpha n', \quad (43)$$

если через  $n$  и  $n'$  обозначим годовые средние движения Луны и Солнца.  
Так как

$$n = 17325594''06085, \quad n' = 1295977''41516$$

$$\mu = \frac{n'}{n} = 0.074801326 \dots$$

то

$$\sigma = 10''3.$$

Итак, среднее годовое движение Луны  $n$  возрастает каждые сто лет на  $2\sigma \approx 20''$ .

Коэффициент  $\sigma$  носит название векового ускорения среднего движения Луны.

Наиболее точным в настоящее время значением  $\sigma$  надо считать следующее:

$$\sigma = 6''02 \pm 0''002,$$

данное Брауном (§ 117).

Примечание. Развитие нами второе приближение позволяет установить наличие вековых ускорений в движениях перигея и узла.

Действительно, равенство (38) показывает, что мгновенная долгота перигея равна

$$\Pi = v - (cv - \pi) = \pi + (1 - c)v,$$

где  $c$  определяется формулой (37).

Поэтому мгновенная скорость движения перигея такова:

$$\frac{d\Pi}{dv} = \frac{3}{4} \mu_1^2 \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{2} e_0'^2 \right) + \frac{9}{8} \mu_1^2 (e'^2 - e_0'^2).$$

Интегрируя, получим долготу перигея для произвольного момента времени

$$\Pi = \pi + \frac{3}{4} \mu_1^2 \left( 1 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{2} e_0'^2 \right) v + \frac{9}{8} \mu_1^2 \int (e'^2 - e_0'^2) dv.$$

Таким образом, после выражения долготы через время мы будем иметь здесь член, пропорциональный квадрату времени.

Аналогичное рассуждение, примененное к равенствам (39) и (35), показывает, что долгота узла выражается формулой

$$\Omega = \theta - \frac{3}{4} \mu_1^2 \left( 1 + 2e^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{3}{2} e_0'^2 \right) - \frac{9}{8} \mu_1^2 \int (e'^2 - e_0'^2) dv.$$

По вычислениям Брауна, вековые изменения движения перигея и узла равны соответственно

$$-38''2 \pm 0''1 \text{ и } +6''36 \pm 0''02.$$

### § 125. Вековое ускорение среднего движения Луны.

Остановимся подробнее на вопросе о вековом ускорении среднего движения Луны, так как эволюция этого вопроса является одним из очень интересных эпизодов в истории Небесной механики.

Вековое ускорение было открыто Галлеем (1693) при попытке использовать для определения среднего движения Луны, т. е. величины  $n$ , с одной стороны, наблюдения затмений, приведенные в Альмагесте, с другой — наблюдения затмений, сделанные арабскими астрономами в конце IX века, и, наконец, современные наблюдения Луны. Зная, таким образом, долготы Луны  $v_1, v_2, v_3$ , соответствующие трем эпохам  $t_1, t_2, t_3$  ( $t_1 < t_2 < t_3$ ), Галлей мог написать три равенства:

$$v = nt_1 + \varepsilon + \rho_1, \quad v_2 = nt_2 + \varepsilon + \rho_2, \quad v_3 = nt_3 + \varepsilon + \rho_3, \quad (44)$$

где через  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  обозначены суммы периодических членов. Отсюда получаются два значения

$$n = \frac{v_2 - v_1 - \rho_2 + \rho_1}{t_2 - t_1}, \quad n = \frac{v_3 - v_2 - \rho_3 + \rho_2}{t_3 - t_2},$$

которые должны были бы быть равны в пределах точности наблюдений. Галлей однако установил, что второе значение  $n$  несомненно больше первого, иначе говоря, что среднее движение Луны с течением времени увеличивается.

Заменив равенства (44) такими:

$$v_i = nt_i + \varepsilon + \sigma \left( \frac{t_i}{100} \right)^2 + \rho_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

мы получим возможность определить из этих трех уравнений не только  $\varepsilon$  и  $n$ , но и ускорение  $\sigma$ .

Первые надежные числовые определения  $\sigma$  были сделаны значительно позднее, благодаря тем трудностям, которые встречаются при употреблении древних наблюдений. Dunthorne в 1742 г. получил  $\sigma = 10''$ . Tobias Maueg в первом издании своих таблиц движения Луны (1752) принял  $\sigma = 6''7$ ; во втором издании (1770) он взял  $\sigma = 9''0$ . Наконец, Лаланд дал (1757)  $\sigma = 9''886$ .

Точное определение  $\sigma$  из наблюдений и в настоящее время представляет большие трудности. Ганзен, который несколько раз возвращался к этому вопросу, давал последовательно значения  $11''93, 11''47, 12''18$  и, наконец,  $12''56$ . Наилучшим можно считать значение  $\sigma = 8''$ , полученное Ньюкомом (1909), или значение  $10''3$ , к которому пришел (1915) Фотерингэм (Fotheringham).

Теоретическое объяснение векового ускорения Луны было одной из самых актуальных проблем астрономии XVIII века, так как космогонические следствия, которые влекло наличие такого ускорения, огромны. Действительно, при наличии ускорения среднего движения расстояние между Землей и Луной должно убывать, и, как ни медленно это убывание (около 3 см в год), все же через определенный интервал времени Луна должна упасть на Землю.

После ряда безрезультатных попыток найти объяснение векового ускорения Лагранж стал склоняться к мысли, что оно нереально и зависит лишь от неточностей тех сведений о древних затмениях, которыми мы располагаем. С другой стороны, Лаплас безуспешно пытался объяснить вековое ускорение гипотезой конечной скорости распространения тяготения.

Верный путь указал в 1783 г. Лагранж, впервые поставивший вопрос о влиянии вековых неравенств эксцентриситета и наклона одной планеты на долготу другой. Однако Лагранж, убедившись в том, что это

влияние в случае Юпитера и Сатурна ничтожно, слишком поспешно заключил, что то же самое будет иметь место и во всех остальных случаях.

Несколько позднее Лаплас, занимаясь теорией спутников Юпитера, открыл, что вековое изменение эксцентриситета орбиты Юпитера вызывает ускорение средних движений спутников. Он поспешил перенести этот результат в теорию движения Луны и таким образом получил, наконец (1787), разгадку векового ускорения движения Луны. В то же время он открыл, что вековое изменение эксцентриситета земной орбиты производит вековые неравенства также в движении перигея и в движении узла.

Таким образом было получено не только новое, блестящее подтверждение универсальности закона всемирного тяготения, но и новая гарантия устойчивости солнечной системы. В самом деле, теория вековых возмущений показывает, что эксцентриситет земной орбиты меняется периодически, так что и изменение среднего движения Луны является также периодическим. В настоящее время эксцентриситет убывает и потому среднее движение ускоряется. Так будет продолжаться примерно 24000 лет, после чего эксцентриситет начнет возрастать, а среднее движение Луны замедляться.

В своем знаменитом „Изложении системы мира“ Лаплас замечает, что без всяких вычислений, при помощи элементарных геометрических соображений, можно видеть, что уменьшение эксцентриситета земной орбиты должно вызывать ускорение движения Луны, так что надо было бы только удивляться, что причина этого явления так долго ускользала от внимания геометров, „если бы не было известно, что самые простые идеи почти всегда приходят людям в голову последними“.

Для вековых изменений движения апогея и узла Лаплас провел дальнейшие приближения и, учитывая возмущения второго порядка, получил значения, существенно отличающиеся от найденных в первом приближении. Что касается до векового ускорения среднего движения, то первое приближение, выражаемое формулой (43), дало Лапласу  $\sigma = 10''.18$  в достаточно полном согласии с величиной, полученной из наблюдений. Обманутый этим согласием между теорией и наблюдениями, Лаплас без всяких дальнейших исследований ограничился утверждением, что здесь уже первое приближение дает достаточную точность. Однако это не так.

Первая попытка уточнить теоретическое значение  $\sigma$ , найденное Лапласом, была сделана почти одновременно Плана и Дамуазо, которые дали соответственно  $\sigma = 10''.58$  и  $\sigma = 10''.72$ , т. е. подтвердили в сущности результат Лапласа. Но при этом ими была допущена, как показал Адамс (1853), принципиальная ошибка: они интегрировали дифференциальные уравнения при постоянном  $e'$  и затем уже подставляли выражение  $e'$  через время; между тем поступать таким образом можно только в первом приближении.

Адамс показал, что при правильном интегрировании уравнений во втором приближении коэффициент  $\frac{3}{2} \mu^2$  в выражении ускорения

$$\sigma = \frac{3}{2} \mu^2 \int_0^t (e_0^2 - e'^2) n_0 dt,$$

даваемом формулой (42), должен быть заменен таким:

$$\frac{3}{2} \mu^2 - \frac{3771}{64} \mu^4 - \frac{34047}{64} \mu^5.$$

Этот результат был подтвержден Делоне, давшим весьма полное выражение векового ускорения.<sup>1</sup> Метод Делоне был существенно упрощен Ньюкомом и Брауном, давшими значение

$$\sigma = 6''.02 \pm 0''.02,$$

которое может считаться окончательным. Указанные пределы  $\pm 0''.02$  получены путем учета влияния возможных неточностей различных величин, от которых зависит  $\sigma$ .

Итак, в настоящее время между теоретическим значением ускорения  $6''.0$  и значением  $8''$ , получаемым из наблюдений, остается необъясненная разница в  $2''$ . Все попытки уничтожить эту разницу путем уточнения теоретической величины  $\sigma$  не дали никаких результатов. Наиболее распространенным является мнение, что эта разница зависит от замедления вращения Земли вследствие приливного трения. Укорочение суток, нужное для устранения указанной невязки, слишком мало для того, чтобы его влияние уже в настоящее время сказалось достаточно определенно на наблюдаемом движении других светил. Во всяком случае теоретический расчет влияния приливного трения, сделанный Джеффрисом (H. Jeffreys), соответствует кажущемуся ускорению среднего движения Луны порядка  $2''$ .

### § 126. Периодические неравенства долготы.

Вернемся к интегрированию уравнения (41), причем на этот раз сосредоточим свое внимание на периодических членах.

Принимая во внимание равенство (42), получим:

$$\begin{aligned} n_0 t + \varepsilon + \sigma T^2 = v - 2e \sin(cv - \pi) + \frac{3}{4} e^2 \sin(2cv - 2\pi) + \\ + \frac{1}{4} \gamma^2 \sin(2gv - 2\theta) - \frac{11}{8} \mu^2 \sin \lambda v - \\ - \frac{15}{4} \mu e \sin(\lambda v - cv + \pi) + 3\mu e' \sin(c'\mu v - \pi') + \dots \end{aligned}$$

Теперь напомним, что мы условились (§ 120) в аргументах вместо  $\mu v + \varepsilon' - \mu e$  писать  $\mu v$ . Поэтому, делая  $\varepsilon' - \mu e = \beta$  и выбирая начало счета времени так, чтобы было  $\varepsilon = 0$ , окончательно будем иметь такое равенство:

$$\begin{aligned} nt = v - 2e \sin(cv - \pi) + \frac{3}{4} e^2 \sin(2cv - 2\pi) + \\ + \frac{1}{4} \gamma^2 \sin(2gv - 2\theta) - \frac{11}{8} \mu^2 \sin(\lambda v - 2\beta) - \\ - \frac{15}{4} \mu e \sin(\lambda v - cv - 2\beta + \pi) + 3\mu e' \sin(c'\mu v + \beta - \pi') + \dots, \end{aligned}$$

где

$$nt = n_0 t + \sigma T^2,$$

или

$$n = n_0 + 10^{-4} \sigma t.$$

<sup>1</sup> Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 68 (1869), 72 (1871).

Решим это уравнение относительно  $v$ . Для этого составляем следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} v &= nt \\ v &= nt + 2e \sin(cnt - \pi) \\ v &= nt + 2e \sin[cnt - \pi + 2ec \sin(cnt - \pi)] - \\ &\quad - \frac{3}{4} e^2 \sin(2cnt - 2\pi) - \frac{1}{4} \gamma^2 \sin(2gnt - 2\theta) + \\ &\quad + \frac{11}{8} \mu^2 \sin(\lambda nt - 2\beta) + \frac{15}{4} \mu e \sin[(\lambda - c)nt - 2\beta + \pi] - \\ &\quad - 3\mu e' \sin(c' \mu nt + \beta - \pi') + \dots \end{aligned}$$

Откуда, принимая во внимание, что  $\mu n = n'$ ,  $\lambda n = 2n - 2n'$ ,

$$\begin{aligned} v &= nt + 2e \sin(cnt - \pi) + \frac{5}{4} e^2 \sin(2cnt - 2\pi) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \gamma^2 \sin(2gnt - 2\theta) + \frac{11}{8} \mu^2 \sin[2(n - n')t - 2\beta] + \\ &\quad + \frac{15}{4} \mu e \sin[(2n - 2n' - cn)t - 2\beta + \pi] - 3\mu e' \sin(c'n't + \beta - \pi') + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Таково окончательное выражение долготы Луны с точностью до членов второго порядка включительно. Рассмотрим это выражение подробнее.

Пусть

$$\begin{aligned} M &= cnt - \pi = nt - \Pi, \\ \Pi &= \pi + (1 - c)nt, \end{aligned}$$

$M$  есть средняя аномалия Луны, считаемая от перигея, имеющего долготу  $\Pi$ .

Поэтому первые два периодические члена выражения (45) дают начало разложения в ряд уравнения центра (§ 82), а выражение

$$w = nt + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots$$

есть не что иное, как долгота в орбите. Эти два члена дают эллиптические неравенства движения Луны.

Следующий член

$$-\frac{1}{4} \gamma^2 \sin(2gnt - 2\theta) = -\frac{1}{4} \gamma^2 \sin 2(w - \Omega),$$

где

$$\Omega = \theta + (1 - g)nt,$$

дает приведение к эклиптике (§ 85), вычисленное с точностью до вторых степеней малых величин  $\gamma$  и  $e$ .

Член

$$\frac{11}{8} \mu^2 \sin[2(n - n')t - 2\beta],$$

имеющий период, равный  $\frac{360^\circ}{2(n - n')}$ , что составляет половину синодического месяца ( $14^d.765$ ), дает вариацию.

Член

$$\frac{15}{4} \mu e \sin[(2n - 2n' - cn)t - 2\beta + \pi]$$

дает эвекцию. Период этого неравенства равен

$$\frac{360^\circ}{n(2 - 2\mu - c)},$$

иначе говоря, звездному месяцу ( $27^d.32166 \dots$ ), деленному на

$$2 - 2\mu - c = 1 - 2\mu + \frac{3}{4} \mu^2 + \dots,$$

т. е. приблизительно  $32^d$ .

Наконец, последний член выражения (45) дает годовое неравенство.

Если бы в § 122, при разворачивании уравнения (26), мы удержали в силовой функции  $U$ , определяемой равенством (7), еще член

$$\frac{m'u'^4}{8u^3} [3(1 - 4s^2) \cos(v - v') + 5 \cos 3(v - v')],$$

то это дало бы в долготе еще одно неравенство, главная часть которого равна (см. стр. 330)

$$-\frac{15}{8} \mu \frac{a}{a'} \frac{T-L}{T+L} \sin(v - v') = -\frac{15}{8} \mu \frac{a}{a'} \frac{T-L}{T+L} \sin[(n - n')t - \beta] + \dots$$

Это неравенство, носящее название паралактического, позволяет, как уже было отмечено, определять из наблюдений отношение  $\frac{a}{a'}$ .

### § 127. Выражение радиуса-вектора и широты в функции времени.

Чтобы получить выражение радиуса-вектора в функции времени, нужно значение долготы, даваемое формулой (45), подставить в равенство (38). Так как

$$\begin{aligned} e \cos(cv - \pi) &= e \cos[cnt - \pi + 2ce \sin(cnt - \pi)] = \\ &= e \cos(cnt - \pi) - e^2 + e^2 \cos(2cnt - 2\pi) + \dots, \end{aligned}$$

то это даст, в пределах принятой точности,

$$\begin{aligned} au &= 1 + \frac{1}{4} \gamma^2 + e \cos(cnt - \pi) + e^2 \cos 2(cnt - \pi) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \gamma^2 \cos 2(gnt - \theta) + \mu^2 \cos[2(n - n')t - 2\beta] + \\ &\quad + \frac{15}{8} \mu e \cos[(2n - 2n' - cn)t - 2\beta + \pi] + \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Точно так же из равенства (39), замечая, что

$$\begin{aligned} \gamma \sin (gv - \theta) &= \gamma \sin [gnt - \theta + 2ge \sin (cnt - \pi)] = \\ &= \gamma \sin (gnt - \theta) + \gamma e \sin [(c + g)nt - \pi - \theta] + \\ &+ \gamma e \sin [(c - g)nt - \pi + \theta] + \dots, \\ \text{получим:} \\ s &= \gamma \sin (gnt - \theta) + \gamma e \sin [(g + c)cnt - \pi - \theta] - \\ &- \gamma e \sin [(g - c)nt + \pi - \theta] + \\ &+ \frac{3}{8} \gamma \mu \sin [(2n - 2n' - gn)t + \theta - 2\beta] + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

Заметим, что при дальнейших приближениях для частей  $c$  и  $g$ , зависящих только от  $\mu$ , получаются следующие значения:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{3}{4} \mu^2 - \frac{225}{32} \mu^3 - \frac{4071}{128} \mu^4 - \frac{265493}{2048} \mu^5 - \frac{12822631}{24576} \mu^6 - \dots \\ g &= 1 + \frac{3}{4} \mu^2 - \frac{9}{32} \mu^3 - \frac{273}{128} \mu^4 - \dots \end{aligned}$$

В заключение найдем экваториальный горизонтальный параллакс Луны для момента  $t$ . Обозначая этот параллакс через  $P_{\zeta}$ , а через  $A$  — экваториальный радиус Земли, имеем

$$\sin P_{\zeta} = \frac{A}{r} = \frac{Au}{\sqrt{1+s^2}} = Au \left( 1 - \frac{1}{2} s^2 + \dots \right),$$

откуда, в пределах принятой нами точности:

$$\begin{aligned} P_{\zeta} &= p_{\zeta} \left\{ 1 + e \cos (cnt - \pi) + e^2 \cos (2cnt - 2\pi) + \right. \\ &+ \mu^2 \cos [2(n - n')t - 2\beta] + \left. \frac{15}{8} \mu e \cos [(2n - 2n' - cn)t - 2\beta + \pi] + \dots \right\}, \end{aligned}$$

где через

$$p_{\zeta} = Aa^{-1}$$

обозначена величина параллакса, соответствующая среднему расстоянию от Земли до Луны.

### § 128. Дальнейшее развитие теории Лапласа.

В предыдущих параграфах было полностью проделано, следуя методу Лапласа, вычисление неравенств второго порядка. Лаплас вычислил таким же путем все неравенства третьего порядка. Наиболее обширное применение этого метода принадлежит Дамуазо,<sup>2</sup> поставившему себе задачей найти коэффициенты неравенств с точностью до 0.1 способом неопределенных коэффициентов.

<sup>1</sup> Наиболее простой путь для вычисления коэффициентов этих рядов дает теория Хилла. Ср. § 140 и § 142.

<sup>2</sup> M. C. T. Damoiseau, Mémoire sur la théorie de la Lune, Mémoires prés. par divers savants, Paris, 3-e sér. 1, 1827, 313—598.

— Tables de la Lune, formées par la seule théorie de l'attraction et suivant la division de la circonférence en 360 degrés, Paris 1828.

Дамуазо полагает

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \delta u, & s &= \gamma \sin (gv - \theta) + \delta s \\ \delta u &= \sum A e^{\alpha} e'^{\alpha'} \gamma^{\beta} \left( \frac{a}{a'} \right)^{\nu} \cos \vartheta \\ \delta s &= \sum B e^{\alpha} e'^{\alpha'} \gamma^{\beta} \left( \frac{a}{a'} \right)^{\nu} \sin \vartheta \\ nt + \varepsilon &= v + k \int (e'^2 - e_0'^2) dv + \sum C e^{\alpha} e'^{\alpha'} \gamma^{\beta} \left( \frac{a}{a'} \right)^{\nu} \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\vartheta = \alpha (cv - \pi) + \alpha' (c'\mu v - \pi') + \beta (gv - \theta) + \kappa (v - \mu v),$$

причем индексы  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$  и  $\nu$  (от которых зависят коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) принимают целые как положительные, так и отрицательные значения.

Через  $u_0$  обозначена величина  $u$ , соответствующая эллиптическому движению, но, в отличие от того, что мы делали в § 123, в выражении  $u_0$  берутся все члены до шестого порядка включительно.

Дамуазо считает нужным сохранить в указанных выражениях 85 коэффициентов  $A$ , 37 —  $B$  и 85 —  $C$ . Выразив координаты Солнца  $v'$ ,  $u'$  через коэффициенты  $C$ , он подставляет все эти выражения в дифференциальные уравнения и, приравняв коэффициенты при тригонометрических функциях, получает 209 уравнений для определения  $c$ ,  $g$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Два уравнения, дающие  $c$  и  $g$ , решаются отдельно, после чего Дамуазо решает численно все остальные уравнения, заменив предварительно  $c$ ,  $g$ ,  $\mu$ ,

$e$ ,  $e'$ ,  $\gamma$ ,  $\frac{a}{a'}$  их значениями. Это решение, проводимое последовательными приближениями, не представляет очень больших трудностей, несмотря на огромное число уравнений. В заключение Дамуазо решает уравнение (48) относительно  $v$  и дает долготу в виде явной функции времени.

Сравнение результатов Дамуазо с теорией Ганзена, развитие которой потребовало несравненно большего количества работы, может быть иллюстрировано следующей табличкой, дающей число коэффициентов в разложении долготы, разница между значениями которых у Дамуазо и Ганзена заключена в указанных пределах:

Пределы разности в величине коэффициента	Число коэффициентов
0".00—0".20	63
0.20—0.40	32
0.40—0.60	9
0.60—1.00	4
>1.00	8

Наибольшие разности 3".33, 3".15, 1".82, 1".64, 1".25, 1".22, 1".21, 1".20 несомненно зависят прежде всего от употребления различных постоянных; не исключена возможность и вычислительных ошибок.

Наконец, нужно отметить, что вычисления Ганзена дают некоторые коэффициенты с ошибками в несколько десятых секунды.

Таким образом, метод Лапласа позволяет сравнительно просто получить численные величины возмущений движения Луны со значительной точностью. Однако он обладает и существенными недостатками, которые практически закрывают возможность построения при помощи этого ме-

тогда полной теории движения Луны, удовлетворяющей современным требованиям точности. Отметим следующее.

1. Для получения долготы с определенной точностью надо вычислить  $u$  со значительно большей точностью. Например, для получения членов второго порядка в разложении  $v$  нам пришлось вычислить (§ 123) часть членов третьего порядка в разложении  $u$ . При переходе к высшим порядкам это обстоятельство очень сильно увеличивает работу.

2. Решение системы уравнений, определяющей неизвестные коэффициенты, быстро усложняется по мере возрастания числа неизвестных.

3. Добавление новых членов весьма затруднительно.

Одновременно с Дамуазо, давшим численное развитие метода Лапласа, Плана и Карлини (Carlini) дали развитие этого метода в чисто алгебраической форме (1820). В 1832 г. Плана в трех огромных томах изложил полученные им результаты. Он дает все коэффициенты в форме рядов, расположенных по степеням  $\mu, e, e', \gamma, a/a'$ , причем, как правило, доходит до 5-х степеней, но в некоторых случаях дает члены до 8-й степени включительно. Несмотря на это, им не вполне достигнута та точность, которую получил Дамуазо в своей численной теории с несравненно меньшей затратой труда, что объясняется медленностью сходимости рядов, расположенных по степеням  $\mu$ . Лаплас, заметивший это обстоятельство с самого начала, предпочел развивать свою теорию в полуалгебраической, получисленной форме: он сразу подставляет вместо  $\mu$  его численную величину, но оставляет параметры  $e, e', \gamma, a/a'$  в буквенном виде.

В § 119 было отмечено, что Лаплас взял за первое приближение орбиту, получающуюся из эллиптической заменой  $v$  через  $sv$  в выражении радиуса-вектора и через  $gv$  — в выражении широты. Вместо такой в достаточной степени произвольной попытки получить промежуточную орбиту Луны можно, как указал Гюльден (1885), сохранить, уже в первом приближении, в дифференциальных уравнениях (1), (2) некоторые члены, дающие возмущения. Таким путем легко получается промежуточная орбита, более точная, чем взятая Лапласом. Эта идея была усовершенствована Тиссераном и Андуайе.<sup>1</sup>

Хилл<sup>2</sup> предложил в пертурбационной функции, дающей возмущения, производимые Солнцем, выделить член, пропорциональный квадрату радиуса-вектора, и член, пропорциональный квадрату расстояния Луны от плоскости эклиптики, т. е. положить

$$U = \frac{1}{r} + \frac{1}{2} a (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2} bz^2 + R',$$

где через  $R'$  обозначена остающаяся часть пертурбационной функции.

Первый из выделенных членов дает силу, пропорциональную  $r$ , а потому поворачивающую линию апсид; второй член дает силу, производящую движение узлов.

Для первого приближения возьмем, отбрасывая  $R'$  и выражая остальные члены через  $u$  и  $s$ :

$$U = u(1+s)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} au^{-2} + \frac{1}{2} (a+b)s^2u^{-2}.$$

<sup>1</sup> F. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste, 3, 118—140.

<sup>2</sup> G. W. Hill, On Intermediary Orbits in the Lunar Theory, Astr. Journal, 18, 1897, 81—87 (Works, 4, 1907. 136—149).

Подставляя это выражение в уравнения (1) и (2), получим:

$$\frac{d^2u}{dv^2} + u + au^{-3} - \gamma(1+s^2)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$\frac{d^2s}{du^2} + s + \beta u^{-4}s = 0,$$

где

$$\alpha = ah^{-2}, \quad \beta = -bh^{-2}, \quad \gamma = h^{-2}.$$

Первое из этих уравнений, определяющих искомую промежуточную орбиту, может быть проинтегрировано в конечном виде при помощи эллиптических функций, если  $s=0$ , после чего полное решение системы легко находится последовательными приближениями, если воспользоваться малостью  $s$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> По вопросу о применении промежуточных орбит в теории движения Луны можно отметить следующие работы:

А. М. Жданов. Теория промежуточных орбит и приложение ее к исследованию движения Луны, СПб 1888.

А. В. Краснов, Теория солнечных неравенств в движении Луны. Казань 1894.

A. W. Krassnow, Zur Theorie der intermediären Bahnen des Mondes, Astr. Nachr., 146, 1898.

## ГЛАВА XVIII.

## ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУНЫ, ОСНОВАННАЯ НА РАБОТАХ ХИЛЛА.

## § 129. Введение.

Хиллом и Адамсом были даны методы, позволяющие сравнительно просто находить главнейшие неравенства движения Луны с неограниченной, практически, точностью. Эти весьма эффективные методы, непосредственно примыкающие, как уже было отмечено в § 117, к идеям Эйлера, позволили Брауну построить наиболее полную теорию движения Луны.

Одной из характерных особенностей работ Хилла по теории движения Луны является употребление прямоугольных координат вместо полярных. Хилл отмечает, что в случае применения прямоугольных координат дифференциальные уравнения движения имеют более простую, чисто алгебраическую форму, тогда как употребление долготы и широты вводит в уравнения тригонометрические функции. С другой стороны, в случае невозмущенного эллиптического движения прямоугольные координаты (§ 85) сравнительно просто могут быть выражены в виде явных функций времени, тогда как соответствующее выражение истинной аномалии (§ 82), а следовательно и долготы, несравненно сложнее. Можно думать, что и для возмущенного движения явные выражения прямоугольных координат будут иметь более простую структуру, чем соответствующие выражения полярных координат.

Сравнивая метод интегрирования уравнений движения в прямоугольных координатах с методом вариации элементов и с методом Делоне, Хилл и здесь усматривает превосходство первого метода. Действительно, если мы желаем вычислить возмущения с очень большой точностью, то необходимо прибегнуть к способу неопределенных коэффициентов, чтобы получить закон составления последовательных членов. Но этот способ одинаково удобно применяется к дифференциальному уравнению любого порядка, тогда как увеличение числа неизвестных и числа уравнений сопровождается значительным увеличением работы.

На основании всех этих соображений Хилл считает целесообразным выполнить интегрирование уравнений движения Луны в прямоугольных координатах. Когда прямоугольные координаты найдены, вычисление соответствующих полярных координат не представляет никаких трудностей.

Уже Эйлер, во втором мемуаре, пользовался эллиптической прямоугольной координатной системой, вращающейся со скоростью, равной средней скорости Луны. Хилл пользуется аналогичной системой, но вращающейся со скоростью, равной средней скорости Солнца.

Адамс и вслед за ним Хилл систематически проводили идею Эйлера отдельного определения неравенств различной степени относительно параметров. Так, например, Хилл вычисляет сначала часть движения пе-

ригея, не зависящую от эксцентриситета солнечной орбиты; затем ту часть, которая пропорциональна первой степени эксцентриситета, и т. д.

Эту идею Хилл распространяет и на первое приближение: вместо того, чтобы исходить из эллиптической орбиты, получающейся в предположении, что масса Солнца  $m'$  равна нулю, он полагает в первом приближении, что параллакс Солнца равен нулю. Это приводит к рассмотрению своеобразного вырождения проблемы трех тел, когда одно тело уходит в бесконечность, но продолжает влиять на движение двух других. Таким образом получается вариационная орбита, заключающая все неравенства, зависящие от углового расстояния Луны и Солнца и служащая исходной промежуточной орбитой.

Можно обратить внимание еще на одну особенность работ Хилла. В то время как все его предшественники за один из параметров, по степеням которых разлагаются возмущения, принимали отношение

$$\mu = \frac{n'}{n}$$

средних сидерических движений Солнца и Луны, Хилл предпочитает разлагать возмущения по степеням отношения

$$m = \frac{n'}{n - n'},$$

так как в этом случае ряды сходятся много быстрее.

## § 130. Уравнения движения.

Возьмем прямоугольную геоцентрическую систему координат, у которой плоскость  $xy$  совпадает с плоскостью эклиптики и которая вращается вокруг оси  $z$  с постоянной угловой скоростью, равной  $n'$ .

Уравнения движения Луны в этой системе координат напишутся, очевидно, следующим образом (ср. § 38):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} - n'^2 x &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} - n'^2 y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где через  $V$  обозначена функция сил, равная, на основании § 4, такому выражению:

$$V = k^2 \frac{T+L}{r} + k^2 \frac{T+Lm'}{Lr'} + k^2 \frac{T+Lm'}{T\Delta}.$$

Здесь  $T$ ,  $L$  и  $m'$  обозначают, как и раньше, массы Земли, Луны и Солнца; через  $r$  и  $r'$  обозначены геоцентрические расстояния Луны и Солнца, а через  $\Delta$  — расстояние между ними.

Разложение в ряд двух последних членов дает, как мы уже видели (§ 120, примечание II):

$$V = k^2 \frac{T+L}{r} + \frac{k^2 m'}{r_1} \sum_{n=2}^{\infty} x_n \left( \frac{r}{r_1} \right)^n P_n(\cos H_1),$$

где через  $r_1$  обозначено расстояние Солнца от центра инерции Земли и Луны, а через  $H_1$  угол между радиусами-векторами  $r$  и  $r_1$ .

Движение Солнца относительно центра инерции системы Земля — Луна мы можем считать строго эллиптическим (§ 120, примечание I), поэтому, обозначая через  $a'$  большую полуось орбиты Солнца, мы будем иметь соотношение

$$n'^2 a'^3 = k^2 m'.$$

( $T + L + m'$  можно заменить через  $m'$ ).

Следовательно, учитывая, что  $x_2 = 1$ :

$$V = k^2 \frac{T+L}{r} + n'^2 r^2 \left( \frac{a'}{r_1} \right)^3 \left[ \frac{3}{2} \cos^2 H_1 - \frac{1}{2} \right] + \dots \quad (2)$$

Все ненаписанные нами члены имеют множителем

$$\frac{k^2 m'}{r_1^3} = n'^2 \left( \frac{a'}{r_1} \right)^3 \frac{1}{r_1}$$

и потому обратятся в нуль, если  $a$  и  $m'$  увеличивать до бесконечности, сохраняя конечным отношение

$$\frac{k^2 m'}{a'^3} = n'^2.$$

Отсюда ясно, что для получения неравенств Луны, независимых от параллакса Солнца, в уравнениях (1) надо взять вместо  $V$  функцию

$$V_1 = k^2 \frac{T+L}{r} + \frac{1}{2} n'^2 \left( \frac{a'}{r_1} \right)^3 [3r^2 \cos^2 H_1 - r^2]. \quad (3)$$

Хилл определяет, в первую очередь, неравенства, которые не зависят не только от параллакса Солнца, но и от эксцентриситета солнечной орбиты. Если  $e' = 0$ , то Солнце будет двигаться равномерно с угловой скоростью  $n'$ , поэтому мы можем ось  $x$  направить так, чтобы она всегда проходила через Солнце. В таком случае будем иметь

$$x' = a' \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

и потому

$$r_1 = a', \quad r \cos H_1 = \frac{xx' + yy' + zz'}{r_1} = x.$$

Итак, в этом случае за функцию сил надо взять

$$V_2 = k^2 \frac{T+L}{r} + \frac{1}{2} n'^2 (3x^2 - r^2).$$

Введем, наконец, параметр  $m$ , определяемый равенством

$$m = \frac{n'}{n - n'},$$

где  $n$  — среднее сидерическое движение Луны, и напомним функцию  $V_2$  в следующей окончательной форме:

$$V_2 = k^2 \frac{T+L}{r} - \frac{1}{2} n'^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m^2 (n - n')^2 (3x^2 - z^2). \quad (4)$$

Положим, далее,

$$V_1 = V_2 + \Omega,$$

где, как легко видеть,

$$\Omega = \frac{1}{2} m^2 (n - n')^2 \left[ 3 \frac{a'^3}{r_1^3} r^2 \cos^2 H_1 - 3x^2 + r^2 \left( 1 - \frac{a'^3}{r_1^3} \right) \right]. \quad (5)$$

Уравнения (1) для функции сил  $V = V_1$  напишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2n' \frac{dy}{dt} &= (n - n')^2 \left[ -\frac{xx}{r^3} + 3m^2 x + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2n' \frac{dx}{dt} &= (n - n')^2 \left[ -\frac{xy}{r^3} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right] \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= (n - n')^2 \left[ -\frac{xz}{r^3} - m^2 z + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

где

$$x = \frac{k^2 (T+L)}{(n - n')^2}.$$

Полагая  $\tau = (n - n')t$ , окончательно получим следующие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \frac{xx}{r^3} - 3m^2 x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \frac{xy}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{d\tau^2} + \frac{xz}{r^3} + m^2 z &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

соответствующие случаю, когда параллакс Солнца принимается равным нулю. Если эксцентриситет солнечной орбиты также равен нулю, то  $\Omega = 0$ .

Так как

$$n = \frac{2\pi}{27.32166 \dots}, \quad n' = \frac{2\pi}{365.24220 \dots}$$

и время  $t$  выражено в сутках, то  $\tau$  можно определить как время, выраженное в таких единицах, что синодическое обращение Луны становится равным  $2\pi$ .

Луна находится в сизигиях для  $\tau = 0, \pi, 3\pi, \dots$ , в квадратурах — для  $\tau = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ .

### § 131. Преобразование Хилла.

Для того чтобы облегчить применение к уравнениям (6) способа неопределенных коэффициентов, Хилл вводит новые переменные. Положим

$$u = x + yi, \quad s = x - yi,$$

тогда первые два из уравнений (6) могут быть заменены такими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + 2mi \frac{du}{d\tau} + \frac{xu}{r^3} - \frac{3}{2} m^2 (u + s) &= 2 \frac{\partial \Omega}{\partial s} \\ \frac{d^2 s}{d\tau^2} - 2mi \frac{ds}{d\tau} + \frac{xs}{r^3} - \frac{3}{2} m^2 (u + s) &= 2 \frac{\partial \Omega}{\partial u}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Введем, далее, новую независимую переменную  $\zeta$  при помощи равенства

$$\zeta = \exp(\tau i).$$

Так как

$$\frac{d}{d\zeta} = \frac{d\tau}{d\zeta} \frac{d}{d\tau} = \tau \frac{d}{d\tau},$$

то, пользуясь оператором

$$D \equiv \zeta \frac{d}{d\zeta},$$

приведем уравнения движения к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} D^2 u + 2m Du + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \frac{\chi u}{r^3} &= -2 \frac{\partial \Omega}{\partial s} \\ D^2 s - 2m Ds + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \frac{\chi s}{r^3} &= -2 \frac{\partial \Omega}{\partial u} \\ D^2 z - m^2 z - \frac{\chi z}{r^3} &= -1 \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $r^2 = us + z^2$ .

В дальнейшем нам, кроме этих уравнений, понадобится еще одно соотношение, аналогичное интегралу живых сил. Для вывода этого соотношения умножим равенства (6) соответственно на  $2 \frac{dx}{d\tau}$ ,  $2 \frac{dy}{d\tau}$ ,  $2 \frac{dz}{d\tau}$ , сложим и проинтегрируем полученный результат. Это даст

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 = \frac{2\chi}{r} + 3m^2 x^2 - m^2 z^2 + 2 \int_0^\tau d'\Omega - C,$$

где положено

$$d'\Omega = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} \right) d\tau;$$

слева стоит квадрат относительной скорости Луны, которую мы будем обозначать через  $V$ .

Вводя сюда наши новые переменные, получим:

$$Du \cdot Ds + (Dz)^2 + \frac{2\chi}{r} + \frac{3}{4} m^2 (u + s)^2 - m^2 z^2 + 2 \int_0^\tau d'\Omega = C. \quad (9)$$

Если  $\Omega = 0$ , то это соотношение дает первый интеграл, носящий название интеграла Якоби (ср. § 38).

Уравнения (8) неудобны для применения способа неопределенных коэффициентов благодаря наличию членов, заключающих  $r^{-3}$ . Для получения более удобных уравнений умножим равенства (8) на  $s$ ,  $u$ ,  $2z$  и сложим. Это даст

$$s D^2 u + u D^2 s + 2z D^2 z - 2m (u Ds - s Du) + \frac{3}{2} m^2 (u + s)^2 - 2m^2 z^2 - \frac{2\chi}{r} = -2 \left( s \frac{\partial \Omega}{\partial s} + u \frac{\partial \Omega}{\partial u} + z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right).$$

Исключив отсюда член, заключающий  $r^{-1}$ , при помощи соотношения (9), получим первое из двух следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} D^2 (us + z^2) - Du \cdot Ds - (Dz)^2 - 2m (u Ds - s Du) + \\ + \frac{9}{4} m^2 (u + s)^2 - 3m^2 z^2 &= -2 \int_0^\tau d'\Omega - 2 \left( s \frac{\partial \Omega}{\partial s} + u \frac{\partial \Omega}{\partial u} + z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) + C \\ D (u Ds - s Du) - 2m D(us) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) &= s \frac{\partial \Omega}{\partial u} - u \frac{\partial \Omega}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Второе уравнение получается, если уравнения (8) умножить соответственно на  $-s$ ,  $+u$ ,  $0$  и сложить.

Обратимся теперь к тому простейшему случаю, когда движение Луны предполагается происходящим в плоскости эклиптики и, кроме того, эксцентриситет солнечной орбиты принимается равным нулю. В этом случае  $z = 0$ ,  $\Omega = 0$ , вследствие чего уравнения (10) и (9) обращаются в следующие:

$$\left. \begin{aligned} D^2 (us) - Du \cdot Ds - 2m (u Ds - s Du) + \frac{9}{4} m^2 (u + s)^2 &= C \\ D (u Ds - s Du) - 2m D(us) + \frac{3}{2} m^2 (u^2 - s^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$Du \cdot Ds + \frac{3}{4} m^2 (u + s)^2 + 2\chi (us)^{-\frac{1}{2}} = C. \quad (12)$$

Необходимо отметить, что уравнения (11) не вполне заменяют первоначальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} D^2 u + 2m Du + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \chi u (us)^{-\frac{3}{2}} &= 0 \\ D^2 s - 2m Ds + \frac{3}{2} m^2 (u + s) - \chi s (us)^{-\frac{3}{2}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

получающиеся из уравнений (8) при  $z = 0$ ,  $\Omega = 0$ ; после того как будет найдено решение уравнений (11), необходимо еще, подставив это решение в одно из равенств (12) или (13), установить связь между постоянными  $\chi$  и  $C$ .

### § 132. Вариационная кривая.

Общее решение уравнений (11) или эквивалентных им уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} + \chi x r^{-3} - 3m^2 x &= 0 \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + \chi y r^{-3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

получаемых из (6) при  $z = 0$ ,  $\Omega = 0$ , содержит четыре произвольные постоянные.

Попробуем определить эти четыре постоянные так, чтобы соответствующая траектория была симметрична относительно обеих осей координат. Для этого прежде всего необходимо, поскольку траектория предполагается без особых точек, чтобы она пересекала каждую ось под

прямым углом. Таким образом, обозначая через  $A$  абсциссу точки пересечения с осью  $x$ , мы должны иметь:

$$x = A, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} = 0 \text{ для } \tau = \beta,$$

где  $\beta$  — произвольная постоянная. Присоединяя сюда равенства

$$x = 0, \quad \frac{dy}{d\tau} = 0,$$

выражающие тот факт, что пересечение с осью  $y$  происходит также под прямым углом (в некоторый момент  $\tau$ , который мы можем исключить из этих равенств), получим четыре условия, определяющие, вообще говоря, решение системы (14). Это решение будет зависеть от двух произвольных постоянных  $A$  и  $\beta$ . Что оно будет симметрично относительно оси  $x$ , видно из того, что уравнения (14) не меняются при замене  $\beta + \tau$  через  $\beta - \tau$ , если одновременно  $y$  заменяется через  $-y$ , а  $x$  остается без изменения. Так же убедимся в симметрии относительно оси  $y$ .

Для сокращения письма положим  $\beta = 0$ , что равносильно сдвигу времени  $\tau$  от момента пересечения с осью  $x$ . Момент первого пересечения с осью  $y$  примем равным  $\frac{\pi}{2}$  (чем определяется период рассматриваемого решения).

Принимая все это во внимание, будем искать частное решение вида

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \tau + A_3 \cos 3\tau + A_5 \cos 5\tau + \dots \\ y = A'_1 \sin \tau + A'_3 \sin 3\tau + A'_5 \sin 5\tau + \dots \end{cases} \quad (15)$$

или, переходя к переменным  $u, s$  и  $\zeta$ :

$$\begin{aligned} u &= \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} (A_{2k+1} + A'_{2k+1}) \zeta^{2k+1} + \frac{1}{2} (A_{2k+1} - A'_{2k+1}) \zeta^{-2k-1} \right\} \\ s &= \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} (A_{2k+1} - A'_{2k+1}) \zeta^{2k+1} + \frac{1}{2} (A_{2k+1} + A'_{2k+1}) \zeta^{-2k-1} \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$A_{2k+1} = a(a_{2k} + a_{-2k-2}), \quad A'_{2k+1} = a(a_{2k} - a_{-2k-2}),$$

тогда

$$u = a \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{2k} \zeta^{2k+1}, \quad s = a \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{-2k-2} \zeta^{2k+1} \quad (16)$$

и задача приводится к нахождению коэффициентов  $a_0, a_2, a_{-2}, a_4, a_{-4}, \dots$ . Так как нами выделен общий множитель  $a$ , то мы можем считать, например,  $a_0 = 1$ , чем и определяется значение  $a$ .

Чтобы облегчить подстановку выражений (16) в уравнения (11), найдем предварительно входящие в эти уравнения величины. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} us &= a^2 \sum_k a_{2k} \zeta^{2k+1} \sum_h a_{-2h-2} \zeta^{2h+1} = \\ &= a^2 \sum_i \sum_k a_{2k} a_{2k-2i} \zeta^{2i}, \end{aligned}$$

где  $i = k + h + 1$  пробегает все значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Аналогично

$$u^2 = a^2 \sum_i \sum_k a_{2k} a_{2i-2k-2} \zeta^{2i}, \quad s^2 = a^2 \sum_i \sum_k a_{-2k-2} a_{2k-2i} \zeta^{2i}.$$

Так как

$$Du = a \sum_k (2k+1) a_{2k} \zeta^{2k+1}, \quad Ds = a \sum_k (2k+1) a_{-2k-2} \zeta^{2k+1},$$

то

$$\begin{aligned} Du \cdot Ds &= a^2 \sum_i \sum_k (2k+1) (2i-2k-1) a_{2k} a_{2k-2i} \zeta^{2i} \\ u Ds - s Du &= 2a^2 \sum_i \sum_k (i-2k-1) a_{2k} a_{2k-2i} \zeta^{2i}. \end{aligned}$$

Наконец

$$D^2(us) = a^2 \sum_i \sum_k 4i^2 a_{2k} a_{2k-2i} \zeta^{2i}.$$

Подставляя все эти выражения в уравнения (13) и приравнивая коэффициенты при  $\zeta^{2i}$ , получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_k \left[ 4i^2 + (2k+1)(2k-2i+1) + 4(2k-i+1)m + \frac{9}{2} m^2 \right] a_{2k} a_{2k-2i} + \\ + \frac{9}{4} m^2 \sum_k a_{2k} (a_{2i-2k-2} + a_{-2i-2k-2}) = 0 \\ 4i \sum_k (2k-i+1+m) a_{2k} a_{2k-2i} - \\ - \frac{3}{2} m^2 \sum_k a_{2k} (a_{2i-2k-2} - a_{-2i-2k-2}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для  $i=0$  второе из этих уравнений обращается в тождество, а первое должно быть заменено таким:

$$\sum_k \left[ (2k+1)^2 + 4(2k+1)m + \frac{9}{2} m^2 \right] a_{2k}^2 + \frac{9}{2} m^2 \sum_k a_{2k} a_{-2k-2} = a^{-2} C. \quad (18)$$

В следующем параграфе мы увидим, что коэффициенты  $a_{2k}$ , удовлетворяющие уравнениям (17), не только существуют, но и могут быть сравнительно очень просто найдены, по крайней мере для малых значений параметра  $m$ . Так как соответствующие ряды (16) или (15) сходятся, то тем самым доказывается существование частного решения уравнений (14) требуемого вида.

Кривая, определяемая уравнениями (15), получила название вариационной кривой. Покажем, что она действительно имеет связь с неравенством движения Луны, именуемым вариацией.

Заметим прежде всего, что выражения (15) будут удовлетворять уравнениям (14) и в том случае, если  $\tau$  мы заменим через  $\tau - \beta$ , где  $\beta$  — произвольная постоянная.

Обозначим через  $v$  истинную долготу Луны в момент  $t$ . Средняя долгота Луны для того же момента может быть представлена в виде  $nt + \epsilon$ . Рассмотрим выражения

$$r \cos(v - nt - \epsilon) \text{ и } r \sin(v - nt - \epsilon).$$

Имеем

$$v - nt - \varepsilon = v - n't - \varepsilon' - (n - n')t + (\varepsilon' - \varepsilon) = \\ = v - n't - \varepsilon' - (\tau - \beta),$$

где через  $n't + \varepsilon'$  обозначена средняя долгота Солнца и положено  $\beta = \varepsilon' - \varepsilon$ .

Но, поскольку ось  $x$  проходит через среднее Солнце,

$$x = r \cos(v - n't - \varepsilon'), \quad y = r \sin(v - n't - \varepsilon');$$

поэтому

$$r \cos(v - nt - \varepsilon) = x \cos(\tau - \beta) + y \sin(\tau - \beta) \\ r \sin(v - nt - \varepsilon) = y \cos(\tau - \beta) - x \sin(\tau - \beta).$$

Таким образом, заменив в выражениях (15)  $\tau$  через  $\tau - \beta$ , окончательно получим:

$$r \cos(v - nt - \varepsilon) = a [1 + (a_2 + a_{-2}) \cos 2(\tau - \beta) + (a_4 + a_{-4}) \cos 4(\tau - \beta) + \dots] \\ r \sin(v - nt - \varepsilon) = a [(a_2 - a_{-2}) \sin 2(\tau - \beta) + (a_4 - a_{-4}) \sin 4(\tau - \beta) + \dots].$$

Эти два уравнения определяют движение Луны, соответствующее рассматриваемому частному решению системы (14). Чтобы найти из них долготу Луны, можно воспользоваться равенством

$$v - nt - \varepsilon = \operatorname{tg}(v - nt - \varepsilon) - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3(v - nt - \varepsilon) + \dots$$

Мы скоро увидим, что коэффициенты  $a_{2k}$  и  $a_{-2k}$  суть величины порядка  $2k$  относительно  $m$ ; в частности

$$a_2 = \frac{3}{16} m^2 + \frac{1}{2} m^3 + \dots, \quad a_{-2} = -\frac{19}{16} m^2 - \frac{5}{3} m^3 - \dots$$

Поэтому, ограничиваясь членами третьего порядка:

$$v = nt + \varepsilon + \left( \frac{11}{8} m^2 + \frac{13}{6} m^3 + \dots \right) \sin 2(\tau - \beta) + \dots$$

Сравнивая это разложение с формулой (45) в § 127, мы видим, что, действительно, сохраненные нами члены в функции сил воспроизводят вариацию, чем и оправдывается название, данное кривой (15).

## § 133. Вычисление коэффициентов.

Обратимся теперь к решению уравнений (17). Прежде всего заметим, что их можно заменить несколько более простыми, если, умножив соответственно на 2 и на 3, составить сумму и разность этих уравнений. Получим:

$$\sum_k [8k^2 - 8(4i - 1)k + 20i^2 - 16i + 2 + 4(4k - 5i + 2)m + 9m^2] a_{2k} a_{2k-2i} + \\ + 9m^2 \sum_k a_{2k} a_{2i-2k-2} = 0 \\ \sum_k [8k^2 + 8(2i + 1)k - 4i^2 + 8i + 2 + 4(4k + i + 2)m + 9m^2] a_{2k} a_{2k-2i} + \\ + 9m^2 \sum_k a_{2k} a_{2i-2k-2} = 0. \quad (19)$$

Чтобы получить члены, содержащие  $a_0 a_{2i}$  и  $a_0 a_{-2i}$ , надо в первой сумме каждого из этих уравнений взять члены, соответствующие значениям  $k=0$  и  $k=i$ . Эти члены таковы:

$$[20i^2 - 16i + 2 - 4(5i - 2)m + 9m^2] a_0 a_{-2i} + \\ + [-4i^2 - 8i + 2 - 4(i - 2)m + 9m^2] a_0 a_{2i}; \\ [-4i^2 + 8i + 2 + 4(i + 2)m + 9m^2] a_0 a_{-2i} + \\ + [20i^2 + 16i + 2 + 4(5i + 2)m + 9m^2] a_0 a_{2i}.$$

Сообразно с этим, умножим первое уравнение на  $-4i^2 + 8i + 2 + 4(i + 2)m + 9m^2$ ,

второе на

$$-20i^2 + 16i - 2 + 4(5i - 2)m - 9m^2$$

и сложим полученные равенства; таким образом получим уравнение, не содержащее уже члена с произведением  $a_0 a_{-2i}$ . Полагая

$$\left. \begin{aligned} [i, k] &= -\frac{k}{i} \frac{4(i-1)k + 4i^2 + 4i - 2 - 4(k-i+1)m + m^2}{2(4i^2 - 1) - 4m + m^2} \\ [i] &= -\frac{3m^2}{16i^2} \frac{4i^2 - 8i - 2 - 4(i+2)m - 9m^2}{2(4i^2 - 1) - 4m + m^2} \\ (i) &= -\frac{3m^2}{16i^2} \frac{20i^2 - 16i + 2 - 4(5i-2)m + 9m^2}{2(4i^2 - 1) - 4m + m^2}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

окончательно будем иметь:

$$\sum_k \left\{ [i, k] a_{2k} a_{2k-2i} + [i] a_{2k} a_{2i-2k-2} + (i) a_{2k} a_{-2i-2k-2} \right\} = 0. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что это одно уравнение вполне заменяет собой систему (17). Действительно, уравнения (17) эквивалентны уравнениям (19), каждое из которых является следствием другого: например, если в первом из уравнений (19) заменим  $k$  и  $i$  через  $k-i$  и  $-i$ , то получим второе.

Уравнениям (21) придана форма, наиболее удобная для определения  $a_{2i}$ , так как

$$[i, 0] = 0, \quad [i, i] = -1,$$

а величины  $[i]$  и  $(i)$  — второго порядка относительно параметра  $m$ , который мы продолжаем считать малой величиной.

Допустим, что  $a_{2k}$  порядка  $|2k|$  относительно  $m$ . В таком случае, сумма

$$\sum_k (i) a_{2k} a_{-2i-2k-2} \quad (22)$$

при  $i > 0$  будет состоять из членов, имеющих порядок по крайней мере на 4 единицы больший, чем порядок того члена уравнения (21), порядок которого наименьший. Точно таким же свойством будет обладать сумма

$$\sum_k [i] a_{2k} a_{2i-2k-2} \quad (23)$$

в случае  $i < 0$ . Значение  $i=0$  здесь, так же как и в уравнениях (17), рассматривать не приходится.

Обратимся теперь к вычислению коэффициентов  $a_{2k}$  в первом приближении. Для этого напишем уравнения (21) для различных значений  $i$ , сохраняя каждый раз лишь члены наименьшего порядка. Учитывая только что отмеченные свойства сумм (22) и (23), получим (в этих равенствах мы сохраняем  $a_0 = 1$  для того, чтобы был яснее закон составления последовательных членов):

$$\begin{aligned} a_2 &= [1] a_0 a_0 \\ a_{-2} &= (-1) a_0 a_0 \\ a_4 &= [2] (a_0 a_2 + a_2 a_0) + [2, 1] a_2 a_{-2} \\ a_{-4} &= (-2) (a_0 a_2 + a_2 a_0) + [-2, -1] a_2 a_{-2} \\ a_6 &= [3] (a_0 a_4 + a_2 a_2 + a_4 a_0) + [3, 1] a_2 a_{-4} + [3, 2] a_4 a_{-2} \\ a_{-6} &= (-3) (a_0 a_4 + a_2 a_2 + a_4 a_0) + [-3, -1] a_{-2} a_4 + [-3, -2] a_{-4} a_2 \\ a_8 &= [4] (a_0 a_6 + a_2 a_4 + a_4 a_2 + a_6 a_0) + [4, 1] a_2 a_{-6} + \\ &\quad + [4, 2] a_4 a_{-4} + [4, 3] a_6 a_{-2} \\ a_{-8} &= (-4) (a_0 a_6 + a_2 a_4 + a_4 a_2 + a_6 a_0) + [-4, -1] a_{-2} a_6 + \\ &\quad + [-4, -2] a_{-4} a_4 + [-4, -3] a_{-6} a_2. \end{aligned}$$

Решение этой системы рекуррентных уравнений не представляет никакого затруднения, причем для  $a_{2k}$  получается величина порядка  $|2k|$ .

Чтобы получить более точные значения, нужно вычисления повторить, сохранив на этот раз в уравнениях (21) не только члены низшего порядка, но и следующего. В первом приближении мы получим  $a_{2k}$  с ошибкой порядка  $|2k| + 4$ , во втором — с ошибкой порядка  $|2k| + 8$  и т. д. Так что последовательные приближения будут сходиться, при малых значениях  $m$ , весьма быстро.

Чтобы показать, насколько просты вычисления, приведем уравнение, служащее для вычисления  $a^2$  с ошибкой 14-го порядка. Оно таково:

$$a_2 = [1] (1 + 2a_{-2} a_2 + 2a_{-4} a_4) + (1) (a_{-2}^2 + 2a_{-4} + 2a_2 a_{-6}) + [1, -2] a_{-4} a_{-6} + [1, -1] a_{-2} a_{-4} + [1, 2] a_4 a_2 + [1, 3] a_6 a_4.$$

Что касается до вычисления величин  $[i, k]$ ,  $[i]$  и  $(i)$ , то формулы (20) могут быть упрощены.

В самом деле, нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} [i, k] + [-i, -k] &= -\frac{2k}{i} + \frac{8k(i-k)}{2(4i^2-1) - 4m + m^2} \\ [i, k] - [-i, -k] &= \frac{8k(k-i)}{i} \frac{1+m}{2(4i^2-1) - 4m + m^2}. \end{aligned} \right\} (24)$$

Точно так же

$$\left. \begin{aligned} [i] + (-i) &= -\frac{3}{2i} \frac{3i+1+2m}{2(4i^2-1) - 4m + m^2} m^2 \\ [i] - (-i) &= \frac{27}{8i^2} m^2 - \frac{3}{2i^2} \frac{16i^2-3i-5 - (3i+11)m}{2(4i^2-1) - 4m + m^2} m. \end{aligned} \right\} (24')$$

Эти формулы удобнее, чем (20).

В том случае, когда вариационная кривая должна быть получена только для одного определенного значения  $m$ , проще всего находить сразу численные значения коэффициентов. Хилл полагает

$$n = 17\ 325\ 594'' .06085, \quad n' = 1\ 295\ 977'' .41516,$$

что дает

$$m = \frac{n'}{n - n'} = 0.08084\ 89338\ 08312.$$

С этим значением  $m$  он заготовляет сначала при помощи только что указанных формул все необходимые величины  $[i, k]$ ,  $[i]$ ,  $(i)$ , после чего переходит к вычислению  $a_2, a_{-2}, \dots$  последовательными приближениями. Вычисление первых двух коэффициентов имеет такой вид:

1-е пригл., член 2-го пор.	+ 0.00151 58491 71593	- 0.00869 58084 99634
2-е " " 6-го "	- 0.00000 01416 98831	+ 0.00000 00615 51932
3-е " " 10-го "	+ 0.00000 00000 06801	- 0.00000 00000 13838
	$a_2 = + 0.00151\ 57074\ 79563$	$a_{-2} = - 0.00869\ 57469\ 61540$

Окончательные результаты Хилл дает в следующей форме:

$$\begin{aligned} r \cos(v - nt - \epsilon) &= a [1 - 0.00718\ 00394\ 81977 \cos 2(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 60424\ 47064 \cos 4(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00324\ 92024 \cos 6(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00001\ 87552 \cos 8(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00000\ 01171 \cos 10(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00000\ 00008 \cos 12(\tau - \beta)] \\ r \sin(v - nt - \epsilon) &= a [+ 0.01021\ 14544\ 41102 \sin 2(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 57148\ 66093 \sin 4(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00275\ 71239 \sin 6(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00001\ 62985 \sin 8(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00000\ 01042 \sin 10(\tau - \beta) \\ &\quad + 0.00000\ 00000\ 00007 \sin 12(\tau - \beta)] \end{aligned}$$

Приводя этот результат в прибавлении к упомянутому выше (стр. 321) переводу Эйлеровой „Новой теории движения Луны“, акад. А. Н. Крылов замечает, что  $a \cdot 10^{-14}$  составляет в расстоянии от центра Земли до центра Луны величину в 4 микрона. Эта необычайная, хотя практически и совершенно бесполезная точность свидетельствует о чрезвычайной мощи метода Хилла, так как метод Хилла позволяет получить такую точность при помощи сравнительно весьма небольшой вычислительной работы.

### § 134. Общие выражения коэффициентов.

Уравнения предыдущего параграфа могут быть использованы не только для определения численных значений коэффициентов  $a_{2k}$ , но и для получения общих выражений этих коэффициентов в функции  $m$ .

Формулы (24) и (24') показывают, что множители  $[i, k]$ ,  $[i]$ ,  $(i)$  являются рациональными функциями  $m$  со знаменателями

$$2(4i^2 - 1) - 4m + m^2. \quad (25)$$

Отсюда легко заключить, что каждый из искомых коэффициентов представится, в результате проведения последовательных приближений, двойным рядом вида

$$a_{2k} = M_0 + \frac{M_1}{6 - 4m + m^2} + \frac{M_2}{(6 - 4m + m^2)^2} + \dots \\ + \frac{N_1}{30 - 4m + m^2} + \frac{N_2}{(30 - 4m + m^2)^2} + \dots \\ + \dots \quad (26)$$

где каждая из величин  $M_0, M_1, \dots, N_1, \dots$  есть двучлен вида

$$Am^k + Bm^{k+1}$$

с рациональными коэффициентами.

Написанный ряд может сходиться лишь для значений  $m$ , которые меньше наименьшего по модулю из корней знаменателей (25), т. е. для  $m < \sqrt{6}$ .

Разлагая каждый член ряда (26) по степеням  $m$ , Хилл получил

$$a_2 = \frac{3}{16}m^2 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{7}{2^2 \cdot 3}m^4 + \frac{11}{2^2 \cdot 3^2}m^5 - \frac{30749}{2^{12} \cdot 3^3}m^6 - \\ - \frac{1010521}{2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5}m^7 - \frac{18445871}{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2}m^8 - \frac{2114557853}{2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^3}m^9 - \dots \\ a_{-2} = + \frac{19}{16}m^2 - \frac{5}{3}m^3 - \frac{43}{2^2 \cdot 3^2}m^4 - \frac{14}{3^3}m^5 - \frac{7381}{2^{10} \cdot 3^4}m^6 + \\ + \frac{3574153}{2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5}m^7 + \frac{55218889}{2^9 \cdot 3^6 \cdot 5^2}m^8 + \frac{13620153029}{2^{12} \cdot 3^7 \cdot 5^3}m^9 + \dots \\ a_4 = \frac{25}{2^8}m^4 + \frac{803}{2^7 \cdot 3 \cdot 5}m^5 + \frac{6109}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2}m^6 + \frac{897599}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^3}m^7 + \\ + \frac{237203647}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5^4}m^8 - \frac{44461407673}{2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7}m^9 + \dots \\ a_{-4} = + \frac{23}{2^7 \cdot 5}m^5 + \frac{299}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2}m^6 + \frac{56339}{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3}m^7 + \\ + \frac{79400351}{2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5^4}m^8 + \frac{8085846833}{2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7}m^9 + \dots \\ a_6 = \frac{833}{2^{12} \cdot 3}m^6 + \frac{27943}{2^{11} \cdot 5 \cdot 7}m^7 + \frac{12275527}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}m^8 + \\ + \frac{27409853579}{2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3}m^9 + \dots \\ a_{-6} = \frac{1}{2^6 \cdot 3}m^6 + \frac{71}{2^7 \cdot 3 \cdot 5}m^7 + \frac{46951}{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}m^8 + \\ + \frac{14086643}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2}m^9 + \dots \\ a_8 = \frac{3537}{2^{16}}m^8 + \frac{111809667}{2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2}m^9 + \dots \\ a_{-8} = \frac{23}{2^{11} \cdot 3}m^8 + \frac{1576553}{2^{17} \cdot 3^2 \cdot 7^2}m^9 + \dots$$

Весьма трудный вопрос о сходимости полученных степенных рядов был изучен А. М. Ляпуновым в его замечательной работе „О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны“, в которой он доказывает, что рассматриваемые ряды сходятся для  $m \leq \frac{1}{7}$ . Так как

для Луны  $m = 0.0808 \dots \approx \frac{1}{12}$ , то законность применения метода Хилла в этом случае, таким образом, может считаться доказанной вполне строго.

Точная граница сходимости рядов Хилла остается неизвестной. Если ограничиться членами второго порядка относительно  $m$ , то

$$a_2 = \frac{3}{16}m^2, \quad a_{-2} = -\frac{19}{16}m^2,$$

поэтому уравнения (15) дают:

$$x = a \left[ \left( 1 - \frac{19}{16}m^2 \right) \cos \tau + \frac{3}{16}m^2 \cos 3\tau \right] \\ y = a \left[ \left( 1 + \frac{19}{16}m^2 \right) \sin \tau + \frac{3}{16}m^2 \sin 3\tau \right].$$

Принимая во внимание, что

$$\cos 3\tau = 4 \cos^3 \tau - 3 \cos \tau = \cos \tau (1 - 4 \sin^2 \tau) \\ \sin 3\tau = 3 \sin \tau - 4 \sin^3 \tau = \sin \tau (-1 + 4 \cos^2 \tau),$$

уравнения вариационной кривой легко привести, в пределах принятой точности, к такому виду:

$$x = a \cos \tau \left[ 1 - m^2 - \frac{3}{4}m^2 \sin^2 \tau \right] \\ y = a \sin \tau \left[ 1 + m^2 + \frac{3}{4}m^2 \cos^2 \tau \right].$$

Таким образом вариационная кривая, имеющая при  $m=0$  форму окружности, при возрастании  $m$  принимает форму, напоминающую эллипс с центром в начале координат и с полуосями, отношение которых равно  $(1 - m^2) : (1 + m^2)$ .

Заметим, что из двух последних равенств следует

$$r = a(1 - m^2 \cos 2\tau).$$

Рассмотрим, наконец, вычисление общего множителя  $a$  выражений (16). Для этого надо взять какое-нибудь из неоднородных относительно  $u$  и  $s$  уравнений. Возьмем первое из уравнений (13), которое можно написать так:

$$\left( D^2 + 2mD + \frac{3}{2}m^2 \right) u + \frac{3}{2}m^2 s = x u (us)^{-\frac{3}{2}}$$

или

$$a \sum \left[ (2k+1)^2 + 2m(2k+1) + \frac{3}{2}m^2 \right] a_{2k} \zeta^{2k+1} + \\ + \frac{3}{2}m^2 a \sum a_{2k} \zeta^{-2k-1} = x u (us)^{-\frac{3}{2}},$$

потому что

$$s = a \sum a_{-2k-2} \zeta^{2k+1} = a \sum a_{2k-2} \zeta^{-2k+1} = a \sum a_{2k} \zeta^{-2k-1}.$$

Это равенство при  $\zeta = 1$  дает

$$a \sum \left[ (2k+1+m)^2 + 2m^2 \right] a_{2k} = \kappa a^{-2} \left( \sum a_{2k} \right)^{-2}, \quad (*)$$

или, так как

$$\kappa = \kappa^2 (T+L) (n-n')^{-2} = \kappa^2 (T+L) (1+m)^2 n^{-2},$$

то

$$n^2 a^3 = \kappa^2 (T+L) (1+m)^2 \left( \sum a_{2k} \right)^{-2} \left\{ \sum \left[ (2k+1+m)^2 + 2m^2 \right] a_{2k} \right\}^{-1}.$$

Обозначим через  $a$  большую полуось, соответствующую среднему движению  $n$  в невозмущенном движении. Третий закон Кеплера дает

$$n^2 a^3 = \kappa^2 (T+L).$$

Сравнивая это равенство с предыдущим и пользуясь указанными выше значениями коэффициентов  $a_{2k}$ , легко найти, что

$$a = a \left( 1 - \frac{1}{6} m^2 + \frac{1}{3} m^3 + \frac{407}{2304} m^4 - \frac{67}{288} m^5 - \frac{45\,293}{41\,472} m^6 - \frac{8761}{6912} m^7 - \frac{4967\,441}{7\,962\,624} m^8 + \frac{14\,829\,273}{39\,813\,120} m^9 + \dots \right).$$

Таким образом форма вариационной кривой вполне определяется величиной  $m$ , для определения же размеров этой кривой, характеризующих величиной  $a$ , надо еще знать  $n$ .

В дальнейшем нам еще понадобится соотношение (\*) между  $\kappa$  и  $a$ , которое с точностью до членов порядка  $m^2$  включительно может быть написано так:

$$\kappa a^{-3} = 1 + 2m + \frac{3}{2} m^2 + \dots$$

### § 135. Орбиты, бесконечно близкие к вариационной кривой.

В предыдущих параграфах мы подробно изучили вариационную кривую, иначе говоря, частное решение уравнений (14), имеющее форму (15). В какой мере это решение является частным с точки зрения приближения к действительному движению Луны, можно судить по тому, что при  $m=0$ , когда уравнения (14) обращаются в хорошо известные уравнения проблемы двух тел и, следовательно, дают эллиптическое движение, формулы (15) обращаются в

$$x = a \cos \tau, \quad y = a \sin \tau,$$

т. е. представляют круговое движение.

Таким образом, при малых значениях  $m$  мы можем рассматривать движение, представляемое вариационной кривой, как движение по круговой орбите, деформированной притяжением Солнца. Поскольку действительная орбита Луны гораздо ближе подходит к эллиптической орбите, чем к круговой, мы не можем ограничиться изучением решения (15) уравнений (14) и должны рассмотреть более общие решения этих уравнений.

Назовем вариационной орбитой общее решение уравнений (14), заключающее четыре произвольные постоянные.

Переходя к сложной задаче определения вариационной орбиты, начнем с изучения частного случая, а именно с определения орбит, бесконечно мало отличающихся от вариационной кривой, т. е. таких орбит, которые соответствуют эллиптическим орбитам задачи двух тел, имеющих столь малый эксцентриситет, что квадратом этого эксцентриситета можно пренебречь.

Напишем прежде всего эти уравнения в таком виде:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - 2m \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (27)$$

где

$$F = \kappa r^{-1} + \frac{3}{2} m^2 x^2.$$

Обозначим через  $x, y$  координаты произвольной точки  $P$  вариационной кривой (15), а через  $x+\delta x, y+\delta y$  координаты соответствующей точки  $P'$  близкой орбиты, причем под соответствующей точкой понимается точка, относящаяся к тому же моменту  $\tau$ . Приращения  $\delta x, \delta y$  мы рассматриваем как величины бесконечно малые, квадратами и произведениями которых можно пренебречь.

Подставляя в уравнения (27) координаты точек  $P'$  и  $P$  и вычитая почленно полученные равенства, будем иметь для определения приращений  $\delta x$  и  $\delta y$  следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \delta x - 2m \frac{d}{d\tau} \delta y &= \frac{\partial}{\partial x} \delta F \\ \frac{d^2}{d\tau^2} \delta y + 2m \frac{d}{d\tau} \delta x &= \frac{\partial}{\partial y} \delta F, \end{aligned} \right\} (28)$$

где

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y.$$

Соотношение (9) дает, поскольку в рассматриваемом случае  $z=0$  и  $\Omega=0$ , интеграл Якоби в таком виде:

$$V^2 = \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 = 2F - C. \quad (29)$$

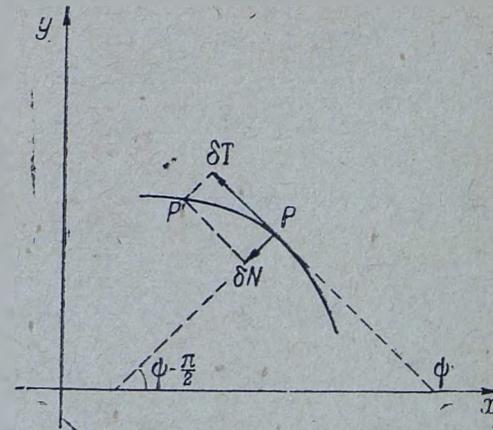


Рис. 15.

Ограничимся рассмотрением лишь таких смежных орбит, для которых постоянная  $C$  имеет то же значение, что и для исходной вариационной кривой. Поступая с интегралом Якоби так же, как мы только что поступили с уравнениями (27), получим:

$$\frac{dx}{d\tau} \frac{d\delta x}{d\tau} + \frac{dy}{d\tau} \frac{d\delta y}{d\tau} = \delta F. \quad (30)$$

Обозначим через  $\delta T$  и  $\delta N$  тангенциальное и нормальное смещение точки  $P'$  относительно  $P$ , а через  $\psi$  — угол, образуемый касательной к вариационной кривой с осью  $x$  (рис. 15). Очевидные равенства

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta T \cos \psi - \delta N \sin \psi \\ \delta y &= \delta T \sin \psi + \delta N \cos \psi \end{aligned} \right\} (31)$$

позволяют из уравнений (28) и (29) получить уравнения, определяющие  $\delta N$  и  $\delta T$ , что мы и сделаем.

Займемся сначала преобразованием уравнения (29). Прежде всего имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta x}{d\tau} &= -\sin\psi \frac{d\delta N}{d\tau} - \sin\psi \delta T \frac{d\psi}{d\tau} + \cos\psi \frac{d\delta T}{d\tau} - \cos\psi \delta N \frac{d\psi}{d\tau} \\ \frac{d\delta y}{d\tau} &= +\cos\psi \frac{d\delta N}{d\tau} + \cos\psi \delta T \frac{d\psi}{d\tau} + \sin\psi \frac{d\delta T}{d\tau} - \sin\psi \delta N \frac{d\psi}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

а так как

$$\frac{dx}{d\tau} = V \cos\psi, \quad \frac{dy}{d\tau} = V \sin\psi, \quad (33)$$

то уравнение (30) заменится таким:

$$V \left( \frac{d\delta T}{d\tau} - \frac{d\psi}{d\tau} \delta N \right) = \delta F. \quad (34)$$

С другой стороны, из равенств (33) имеем:

$$\psi = \arctg \frac{dy/d\tau}{dx/d\tau}, \quad V^2 \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d^2 y}{d\tau^2} \frac{dx}{d\tau} - \frac{d^2 x}{d\tau^2} \frac{dy}{d\tau},$$

откуда, на основании (27),

$$V^2 \frac{d\psi}{d\tau} = -2mV^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dx}{d\tau} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dy}{d\tau},$$

или, снова пользуясь равенствами (32) и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial N} = \cos\psi \frac{\partial}{\partial y} - \sin\psi \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial T} = \cos\psi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\psi \frac{\partial}{\partial y}, \quad (35)$$

получим окончательно

$$V \left( \frac{d\psi}{d\tau} + 2m \right) = \frac{\partial F}{\partial N}. \quad (36)$$

Обратимся еще раз к интегралу Якоби (29), который дает

$$V \frac{dV}{d\tau} = \frac{dF}{d\tau}. \quad (37)$$

Но

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} = V \frac{\partial F}{\partial T},$$

вследствие чего

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (38)$$

Соотношение (34) напомним в таком виде:

$$V \left( \frac{d\delta T}{d\tau} - \frac{d\psi}{d\tau} \delta N \right) = \frac{\partial F}{\partial N} \delta N + \frac{\partial F}{\partial T} \delta T,$$

откуда, исключая при помощи (36) и (38) частные производные функции  $F$ , будем иметь:

$$\frac{d\delta T}{d\tau} - \frac{dV}{d\tau} \frac{\delta T}{V} = 2 \left( \frac{d\psi}{d\tau} + m \right) \delta N. \quad (39)$$

Покончив с преобразованием интеграла Якоби и выводом вспомогательных соотношений, обратимся теперь к уравнениям (28). Умножим их соответственно на  $-\sin\psi$  и  $+\cos\psi$  и сложим. Это даст

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\delta x}{d\tau^2} \sin\psi + \frac{d^2\delta y}{d\tau^2} \cos\psi + 2m \left[ \frac{d\delta y}{d\tau} \sin\psi + \frac{d\delta x}{d\tau} \cos\psi \right] = \\ = -\sin\psi \frac{\partial \delta F}{\partial x} + \cos\psi \frac{\partial \delta F}{\partial y} = +\frac{\partial \delta F}{\partial N}. \end{aligned} \quad (40)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, при помощи соотношений (32) может быть заменено таким:

$$\frac{d\delta y}{d\tau} \sin\psi + \frac{d\delta x}{d\tau} \cos\psi = \frac{d\delta T}{d\tau} - \frac{d\psi}{d\tau} \delta N.$$

Точно так же

$$-\frac{d\delta x}{d\tau} \sin\psi + \frac{d\delta y}{d\tau} \cos\psi = \frac{d\delta N}{d\tau} + \frac{d\psi}{d\tau} \delta T.$$

Дифференцируя это равенство и пользуясь снова равенствами (32), получим

$$-\frac{d^2\delta x}{d\tau^2} \sin\psi + \frac{d^2\delta y}{d\tau^2} \cos\psi = \frac{d^2\delta N}{d\tau^2} + 2 \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\delta T}{d\tau} - \left( \frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 \delta N + \frac{d^2\psi}{d\tau^2} \delta T.$$

Все это позволяет представить уравнение (40) в таком виде:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} - \left( \frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 - 2m \frac{d\psi}{d\tau} \right\} \delta N + \frac{d^2\psi}{d\tau^2} \delta T + 2 \left( \frac{d\psi}{d\tau} + m \right) \frac{d\delta T}{d\tau} - \frac{\partial \delta F}{\partial N} = 0. \quad (41)$$

Преобразуем последний член. Прежде всего имеем

$$\frac{\partial \delta F}{\partial N} = \delta \frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \delta N + \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T} \delta T. \quad (42)$$

Дифференцирование по  $\tau$  равенства

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \cos\psi \frac{\partial F}{\partial y} - \sin\psi \frac{\partial F}{\partial x}$$

дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial N} &= -\frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial T} + \cos\psi \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial y} - \sin\psi \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial x} = \\ &= -\frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial T} + V \left[ \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \cos\psi \sin\psi + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} (\cos^2\psi - \sin^2\psi) \right], \end{aligned}$$

или, замечая, что на основании (35)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T} = \left( -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \cos\psi \sin\psi + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} (\cos^2\psi - \sin^2\psi),$$

окончательно получим

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial N} = -\frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial T} + V \frac{\partial^2 F}{\partial N \partial T}.$$

Этим соотношением воспользуемся для того, чтобы исключить вторую производную функции  $F$  из равенства (42). Таким образом найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta F}{\partial N} &= \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \delta N + \frac{\delta T}{V} \left( \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial N} + \frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial T} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \delta N + \frac{\delta T}{V} \left[ V \frac{d^2 \psi}{d\tau^2} + \frac{dV}{d\tau} \left( \frac{d\psi}{d\tau} + 2m \right) + \frac{d\psi}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial T} \right], \end{aligned}$$

если  $\frac{\partial F}{\partial N}$  заменить его выражением (36). Наконец, при помощи равенства (38) будем иметь

$$\frac{\partial \delta F}{\partial N} = \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \delta N + \frac{d^2 \psi}{d\tau^2} \delta T + 2 \left( \frac{d\psi}{d\tau} + m \right) \frac{dV}{d\tau} \frac{\delta T}{V}.$$

Теперь, имея такое окончательное выражение последнего члена уравнения (41), мы можем это уравнение написать следующим образом:

$$\left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} - \left( \frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 - 2m \frac{d\psi}{d\tau} - \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} \right\} \delta N + 2 \left( \frac{d\psi}{d\tau} + m \right) \left( \frac{d\delta T}{d\tau} - \frac{dV}{d\tau} \frac{\delta T}{V} \right) = 0$$

или, пользуясь соотношением (39),

$$\frac{d^2 \delta N}{d\tau^2} + \Theta \delta N = 0, \quad (43)$$

где

$$\Theta = 3 \left( \frac{d\psi}{d\tau} + m \right)^2 + m^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial N^2}. \quad (44)$$

Для вычисления функции  $\Theta$  можно воспользоваться следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial N^2} &= \sin^2 \psi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \sin \psi \cos \psi \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \cos^2 \psi \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= V^{-2} \left( \frac{d^2 y}{d\tau^2} \frac{dx}{d\tau} - \frac{d^2 x}{d\tau^2} \frac{dy}{d\tau} \right), \end{aligned}$$

к которым надо еще присоединить соотношения (33).

После того как  $\delta N$  найдено из уравнения (43), мы можем найти  $\delta T$  при помощи уравнения (39).

Такой способ определения бесконечно близких решений применим ко всем уравнениям вида (27), в которых функция сил  $F$  не зависит явно от времени. Задача приводится, как мы только-что видели, к решению основного уравнения (43).

В интересующем нас частном случае функция сил имеет вид

$$F = x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} m^2 x^2,$$

где  $x$  и  $y$  выражаются рядами (15).

Так как при замене  $\tau$  через  $-\tau$ , или через  $\tau + \pi$ , координаты  $x$  и  $y$  либо не меняются, либо только меняют знак, то  $F$  есть четная периодическая функция  $\tau$ , имеющая период  $\pi$ . Легко видеть, что такими же свойствами обладает вторая частная производная  $\frac{\partial^2 F}{\partial N^2}$ , так же как и производная  $\frac{d\psi}{d\tau}$ . Отсюда следует, что  $\Theta$  разлагается в ряд вида

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + 2q_2 \cos 4\tau + \dots$$

Соответствующее уравнение (43) называется уравнением Хилла.

Можно показать, что функция  $\Theta$  разлагается в ряд, расположенный по целым положительным степеням величин  $m$ ,  $m^2 \zeta^2$ ,  $m^2 \zeta^{-2}$ , откуда следует, что разложение  $q_k$  по степеням  $m$  начинается с члена порядка  $2k$ . Мы не будем останавливаться на доказательстве этого свойства коэффициентов  $q_k$ . Если произвести вычисления (для чего удобнее от переменных  $x$  и  $y$  перейти к  $u$  и  $s$ ), то получим:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} q^2 &= 1 + 2m - \frac{1}{2} m^2 + \frac{255}{32} m^4 + 19 m^5 + \frac{80}{3} m^6 + \\ &+ \frac{533}{2 \cdot 3^2} m^7 + \frac{11\,230\,225}{2^{13} \cdot 3^3} m^8 + \frac{1\,576\,037}{2^7 \cdot 3^4} m^9 + \\ &+ \frac{49\,359\,583}{2^9 \cdot 3^5} m^{10} + \frac{720\,508\,007}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5} m^{11} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= -\frac{15}{2} m^2 - \frac{57}{4} m^3 - 11 m^4 - \frac{23}{2 \cdot 3} m^5 - \frac{68\,803}{2^9 \cdot 3^2} m^6 - \\ &- \frac{1\,792\,417}{2^{10} \cdot 3^3} m^7 - \frac{7\,172\,183}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5} m^8 - \frac{596\,404\,499}{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2} m^9 - \\ &- \frac{2\,641\,291\,011\,773}{2^{17} \cdot 3^6 \cdot 5^3} m^{10} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= +\frac{111}{16} m^4 + \frac{1397}{2^6} m^5 + \frac{8807}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} m^6 + \frac{319\,003}{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} m^7 + \\ &+ \frac{252\,382\,507}{2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^3} m^8 + \dots \end{aligned}$$

$$q_3 = -\frac{11\,669}{2^9} m^6 + \dots$$

Приведем числовые значения этих коэффициентов для значения  $m = 0.08084\,89338\,08212$ , взятого Хиллом. Согласно его вычислениям имеем

$$\begin{aligned} \Theta &= 1.15884\,39395\,96583 \\ &- 0.11408\,80374\,93807 \cos 2\tau \\ &+ 0.00076\,64759\,95109 \cos 4\tau \\ &- 0.00001\,83465\,77790 \cos 6\tau \\ &+ 0.00000\,01088\,95009 \cos 8\tau \\ &- 0.00000\,00020\,98671 \cos 10\tau \\ &+ 0.00000\,00000\,12103 \cos 12\tau \\ &- 0.00000\,00000\,00211 \cos 14\tau. \end{aligned}$$

Численный метод позволяет определить коэффициенты этого ряда гораздо проще при той же точности, чем алгебраический метод, основанный на получении только-что указанных разложений по степеням  $m$ .

В заключение заметим, что уравнение (39), служащее для определения  $\delta T$ , будучи написано с точностью до вторых степеней  $m$ , имеет вид:

$$\frac{d\delta T}{d\tau} + \frac{7}{2} m^2 \sin 2\tau \delta T - 2 \left( 1 + m - \frac{5}{4} m^2 \cos 2\tau \right) \delta N = 0. \quad (45)$$

<sup>1</sup> G. W. Hill, Literal Expression for the Motion of the Moon's Perigee, Annals of Mathematics, 9, 1894, 31—41 (Works, IV, 41—50).

## § 136. Некоторые свойства уравнения Хилла.

В предыдущем параграфе задача отыскания орбит, близких к вариационной кривой, была приведена к решению уравнения Хилла

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \Theta x = 0, \quad (46)$$

в котором коэффициент

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + 2q_2 \cos 4\tau + 2q_3 \cos 6\tau + \dots$$

есть периодическая функция с периодом  $\pi$ .

Рассмотрим прежде всего некоторые свойства этого уравнения, являющиеся частными случаями свойств, присущих всем линейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами.

Обозначим через  $f(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  частные решения уравнения (46), определяемые начальными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Так как эти решения образуют фундаментальную систему, то любое решение  $F(\tau)$  уравнения (46) может быть представлено в форме

$$F(\tau) = Af(\tau) + B\varphi(\tau),$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные.

Уравнение (46) не меняется при замене  $\tau$  через  $\tau + \pi$ , поэтому  $f(\tau + \pi)$  и  $\varphi(\tau + \pi)$  суть также решения этого уравнения, и следовательно существуют такие постоянные числа  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , что

$$\left. \begin{aligned} f(\tau + \pi) &= \alpha f(\tau) + \beta \varphi(\tau) \\ \varphi(\tau + \pi) &= \gamma f(\tau) + \delta \varphi(\tau) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Покажем, что уравнение (46) имеет решение, удовлетворяющее условию

$$F(\tau + \pi) = \nu F(\tau), \quad (48)$$

где  $\nu$  — постоянный множитель.

Это условие дает (опуская для краткости аргумент  $\tau$ )

$$A(\alpha f + \beta \varphi) + B(\gamma f + \delta \varphi) = \nu(Af + B\varphi),$$

откуда следует, поскольку решения  $f$  и  $\varphi$  образуют фундаментальную систему:

$$A(\alpha - \nu) + B\gamma = 0, \quad A\beta + B(\delta - \nu) = 0.$$

Но  $A$  и  $B$  не могут быть одновременно равны нулю, поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha - \nu & \gamma \\ \beta & \delta - \nu \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\nu^2 - (\alpha + \delta)\nu + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0. \quad (49)$$

Каждый из корней этого уравнения дает решение  $F(\tau)$ , удовлетворяющее соотношению (48). Таким образом, определение множителей  $\nu$ , имеющих фундаментальное значение для всего дальнейшего, приводится к нахождению подстановки (47), которой подвергается фундаментальная система  $f, \varphi$  при увеличении аргумента на период  $\pi$ .

Если функции  $f$  и  $\varphi$  удовлетворяют указанным выше начальным условиям, то уравнение (49) может быть упрощено. В самом деле, равенства

$$\frac{d^2f}{d\tau^2} + \Theta f = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Theta \varphi = 0$$

дают

$$f \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} - \varphi \frac{d^2f}{d\tau^2} = 0,$$

откуда, интегрируя и пользуясь начальными условиями,

$$f(\tau)\varphi'(\tau) - \varphi(\tau)f'(\tau) = 1.$$

Делая в этом равенстве  $\tau = \pi$  и замечая, что при  $\tau = 0$  соотношения (47) дают

$$f(\pi) = \alpha, \quad \varphi(\pi) = \gamma, \quad f'(\pi) = \beta, \quad \varphi'(\pi) = \delta,$$

получим

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

В рассматриваемом случае уравнение (49) имеет, следовательно, вид

$$\nu^2 - (\alpha + \delta)\nu + 1 = 0,$$

так что его корни могут быть обозначены через  $\nu$  и  $\frac{1}{\nu}$ . Поэтому

$$\nu + \frac{1}{\nu} = \alpha + \delta.$$

Равенство (48) при  $\tau = 0$  и  $\tau = -\pi$  дает

$$F(\pi) = \nu F(0), \quad F(-\pi) = \frac{1}{\nu} F(0),$$

откуда

$$\nu + \frac{1}{\nu} = \frac{F(\pi) + F(-\pi)}{F(0)}.$$

С другой стороны, легко видеть, что  $f(\tau)$  есть четная функция  $\tau$ , тогда как  $\varphi(\tau)$  — нечетная. Поэтому

$$\begin{aligned} F(\pi) &= Af(\pi) + B\varphi(\pi) \\ F(-\pi) &= Af(\pi) - B\varphi(\pi). \end{aligned}$$

А так как, кроме того,  $F(0) = A$ , то окончательно будем иметь

$$\nu + \frac{1}{\nu} = 2f(\pi).$$

Эта форма уравнения (49) позволяет показать, что для малых значений параметра  $m$  корни  $\nu$  и  $\nu^{-1}$  суть сопряженные комплексные числа с модулем, равным единице. Действительно, последнее равенство дает

$$\nu = f(\pi) \pm \sqrt{[f(\pi)]^2 - 1}.$$

С другой стороны, пользуясь приближенными значениями  $q^2, q_1, q_2, \dots$ , указанными в конце предыдущего параграфа, и отбрасывая члены порядка  $m^2$ , получим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (1 + 2m)x = 0.$$

Отсюда следует, что в первом приближении

$$f(\tau) = \cos(1 + m)\tau,$$

и потому  $|f(\pi)| < 1$ .

Итак, если положить

$$v = \exp(ic\pi),$$

то  $c$  будет действительное число, мало отличающееся от единицы, по крайней мере для достаточно малых значений  $m$ .

Рассмотрим функцию  $\exp(ic\tau)$ . Очевидно

$$\exp[ic(\tau + \pi)] = v \exp(ic\tau),$$

т. е. эта функция удовлетворяет тому же соотношению (48), как и функция  $F(\tau)$ . Отсюда следует, что отношение

$$\frac{F(\tau)}{\exp(ic\tau)} = \Phi(\tau)$$

не меняется при прибавлении  $\pi$  к аргументу.

Учитывая, наконец, что уравнение (46) не меняется при замене  $\tau$  на  $-\tau$ , мы можем утверждать наличие у уравнения (46) двух решений вида

$$\Phi(\tau) \cdot \exp(ic\tau) \text{ и } \Phi(-\tau) \exp(-ic\tau),$$

где  $\Phi(\tau)$  — функция, имеющая период  $\pi$ . Эти решения образуют, как нетрудно проверить, фундаментальную систему.

Введем теперь, как и в предыдущих параграфах, независимую переменную

$$\zeta = \exp(i\tau).$$

Полагая  $q_0 = q^2$ ,  $q_{-k} = q_k$ , мы можем функцию

$$\Theta = q^2 + 2q_1 \cos 2\tau + \dots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_k \cos 2k\tau$$

написать в таком виде:

$$\Theta = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_k \zeta^{2k}. \quad (50)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты  $q_k$  таковы, что ряд  $\sum |q_k|$  сходится.

Так как функция  $\Phi(\tau)$  имеет тот же период  $\pi$ , то она разложима в сходящийся ряд такого же вида. Положим поэтому

$$\Phi(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k},$$

откуда

$$x(\tau) = \Phi(\tau) \exp(ic\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^{2k+c}. \quad (51)$$

Итак, уравнение Хилла имеет решение вида (51). Если это решение будет найдено, для чего нужно вычислить  $c$  и  $b_k$ , то общее решение этого уравнения можно представить в такой форме:

$$C_1 x(\tau) + C_2 x(-\tau),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

### § 137. Применение способа неопределенных коэффициентов.

Чтобы найти  $c$  и  $b_k$ , подставим выражение (51) в уравнение (46). Это даст, учитывая равенство (50):

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k (2k+c)^2 \zeta^{2k+c} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} q_h b_k \zeta^{2k+2h+c} = 0.$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $\zeta^{2k+c}$ , получим такую систему уравнений:

$$[q_0 - (2k+c)^2] b_k + \sum_{-\infty}^{+\infty} q_{k-i} b_i = 0. \quad (i \neq k) \quad (52)$$

Несмотря на то, что мы имеем здесь бесконечную систему линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных  $b_k$ , Хилл применил к этой системе теоремы, доказанные лишь для конечных систем линейных уравнений. Полученные им результаты были вполне строго обоснованы Пуанкаре, который развил с этой целью теорию бесконечных определителей.

Рассмотрим, прежде всего, тот простейший частный случай, когда  $q_1 = q_2 = \dots = 0$ . Так как  $q_0 = q^2$ ,  $q_{-k} = q_k$ , то уравнения (52) в этом случае имеют вид

$$[q^2 - (2k+c)^2] b_k = 0.$$

Поэтому, поскольку нас интересуют лишь решения (51), для которых не все коэффициенты  $b_k$  равны нулю, будем иметь

$$c = -2n \pm q, \quad b_k = 0 \text{ для } k \neq n;$$

следовательно получим два таких решения:

$$x = b_n \zeta^q, \quad x = b_n \zeta^{-q}$$

уравнения (46), которое в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + q^2 x = 0.$$

Обратимся теперь к общему случаю, когда  $q_1, q_2, \dots$  не равны нулю. Если эти коэффициенты весьма малы, а такой только случай мы и рассматриваем, то соответствующие значения  $c$  будут не равны величинам  $-2n \pm q$ , где  $n$  — целое число, но будут мало от них отличаться.

Итак, мы можем считать, что ни одно из выражений

$$q^2 - (2k+c)^2$$

не равно нулю, и переписать уравнения (52) так:

$$b_k + \sum \frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k+c)^2} b_i = 0, \quad (i \neq k)$$

или, в развернутом виде:

$$\dots + \frac{q_2}{q^2 - (2k+c)^2} b_{k-2} + \frac{q_1}{q^2 - (2k+c)^2} b_{k-1} + b_k + \frac{q_1}{q^2 - (2k+c)^2} b_{k+1} + \dots = 0. \quad (53)$$

Легко видеть, что определитель этой системы уравнений принадлежит к числу нормальных бесконечных определителей. Так называются определители вида

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1+a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} & \dots \\ \dots & a_{0,-1} & 1+a_{0,0} & a_{0,1} & \dots \\ \dots & a_{1,-1} & a_{1,0} & 1+a_{1,1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

для которых двойной ряд  $\sum_{l,k} |a_{lk}|$  сходится. В самом деле, в рассматриваемом случае

$$a_{ii} = 0, \quad a_{ik} = \frac{q_k}{q^2 - (2k+c)^2},$$

а потому

$$\sum_{i,k} |a_{ik}| = 2 \sum_j |q_j| \sum_k \left| \frac{1}{q^2 - (2k+c)^2} \right|,$$

причем оба стоящие справа ряда сходятся.

В дальнейшем мы будем иметь в виду лишь ограниченные системы решений уравнений (53), т. е. такие, которые удовлетворяют условию

$$|b_k| < A,$$

где  $A$  — некоторое постоянное число.

Как известно, бесконечная система линейных уравнений, у которой определитель, составленный из коэффициентов, нормальный, обладает в отношении ограниченных систем решений теми же свойствами, что и конечная система.

В частности, можно утверждать, что уравнения (53) только в том случае имеют решение, в котором не все  $b_k$  равны нулю, когда определитель, составленный из коэффициентов, равен нулю. Обозначим этот определитель через  $\Delta(c)$ .

Итак, стоящая перед нами задача нахождения решений (51) уравнения Хилла распадается на две части: сначала надо найти корни уравнения

$$\Delta(c) = 0; \tag{54}$$

затем, для полученных значений  $c$ , решить уравнения (53).

Приступая к решению уравнения (54), существование корней которого вытекает из рассуждений предыдущего параграфа, начнем с изучения функции  $\Delta(z)$  комплексного переменного  $z$ .

Под функцией  $\Delta(z)$  мы разумеем, следовательно, величину определителя,  $k$ -ая строка которого

$$\dots, a_{k,k-2}, a_{k,k-1}, 1+a_{k,k}, a_{k,k+1}, \dots$$

состоит из членов, соответственно равных

$$\dots, \frac{q_2}{q^2 - (2k+z)^2}, \frac{q_1}{q^2 - (2k+z)^2}, 1, \frac{q_1}{q^2 - (2k+z)^2}, \dots \tag{55}$$

где  $k = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$

На основании предыдущего, этот определитель является нормальным для всех значений  $z$ , кроме

$$z = \pm q - 2k. \tag{56}$$

Поэтому функция  $\Delta(z)$  голоморфна во всех точках  $z$ , кроме точек (56), которые, как легко видеть, могут быть для этой функции только полюсами первого порядка. Действительно, каждая из точек (56) является полюсом первого порядка для всех членов  $k$ -ой строки (за исключением одного члена, равного единице) и обыкновенной точкой для членов всех других строк. Но при разворачивании нормального определителя получим сходящийся ряд, каждый член которого будет иметь множителем один и только один член  $k$ -ой строки. Откуда ясно, что точки (56) могут быть только полюсами, порядка не выше первого, для функции  $\Delta(z)$ .

Итак,  $\Delta(z)$  есть мероморфная функция. Легко видеть, что это функция четная, так что

$$\Delta(-z) = \Delta(z). \tag{57}$$

Действительно, при замене  $z$  через  $-z$  и одновременной замене столбцов строками определитель  $\Delta(z)$  не меняется.

Точно так же

$$\Delta(z+2) = \Delta(z), \tag{58}$$

ибо при замене  $z$  через  $z+2$  каждый столбец и каждая строка занимают место соответственно следующего столбца и следующей строки. Таким образом  $\Delta(z)$  есть функция периодическая с периодом, равным 2.

Из равенств (54), (57) и (58) вытекает, что все точки  $z = \pm c - 2k$ , где  $k$  — попрежнему произвольное целое число, являются нулями функции  $\Delta(z)$ .

Отметим еще одно свойство этой функции. Положим  $z = x + yi$  и заставим  $y$  стремиться к  $\pm\infty$ . В таком случае все члены (55)  $k$ -ой строки, за исключением лишь члена  $1 + a_{kk} = 1$ , обратятся в нуль. Следовательно

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Delta(x + yi) = 1.$$

Покажем теперь, что доказанные свойства функции  $\Delta(z)$  вполне ее определяют.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\frac{\cos \pi z - \cos \pi c}{\cos \pi z - \cos \pi q},$$

имеющую нули первого порядка в точках (59) и полюса первого порядка в точках (56). Это функция четная, имеющая период, равный 2. Если положить  $z = x + yi$  и заставить  $y$  стремиться к  $\pm\infty$ , то эта функция, так же как и  $\Delta(z)$ , стремится к единице.

Отсюда следует, что отношение рассматриваемых функций, т. е.

$$F(z) = \Delta(z) \frac{\cos \pi z - \cos \pi q}{\cos \pi z - \cos \pi c},$$

есть целая функция с периодом 2, стремящаяся к единице, когда  $y$  стремится к  $\pm\infty$ . Но такая функция necessarily равна постоянному числу, так как она остается ограниченной на всей плоскости переменного  $z$ . Делая  $y \rightarrow \pm\infty$ , получим  $F(z) \equiv 1$ , а потому окончательно

$$\Delta(z) = \frac{\cos \pi z - \cos \pi c}{\cos \pi z - \cos \pi q}.$$

При  $z=0$  это равенство дает

$$\sin^2 \frac{\pi c}{2} = \Delta(0) \sin^2 \frac{\pi q}{2}. \quad (60)$$

Итак, решение уравнения (54) приведено нами к вопросу о вычислении определителя  $\Delta(0)$ , т. е. к задаче сравнительно весьма простой.

Полагая  $z = \frac{1}{2}$ , или  $z=1$ , или  $z=q$ , получим другие формы уравнения, определяющего  $c$ , однако менее удобные, чем (60).

### § 138. Вычисление определителя $\Delta(0)$ .

Полагая для краткости

$$\beta_k = \frac{1}{q^2 - 4k^2},$$

мы можем определитель  $\Delta(0)$  написать так:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \beta_{k-1} q_1 & \beta_{k-1} q_2 & \dots \\ \dots & \beta_k q_1 & 1 & \beta_k q_1 & \dots \\ \dots & \beta_{k+1} q_2 & \beta_{k+1} q_1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (61)$$

В конце предыдущего параграфа было отмечено, что  $q_j$  есть величина порядка  $2j$  относительно  $m$ .

Это обстоятельство позволяет развернуть  $\Delta(0)$  в ряд, весьма быстро сходящийся. Мы выполним это разложение, основываясь на следующем свойстве определителя (61):

Если  $Aq_\alpha q_\beta \dots q_\lambda$  есть один из членов разложения определителя (61), то сумма индексов

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda$$

равна всегда четному числу.

Для доказательства заменим во всех членах выражения (61) величины  $q_j$  через  $q_j z^j$  и покажем, что полученный таким образом определитель  $\Delta(0, z)$  есть четная функция  $z$ . В самом деле,  $\Delta(0, -z)$  получается из  $\Delta(0, z)$ , если сначала переменить знаки у всех столбцов через один, затем — у всех строк через одну. Но так как число строк и число столбцов в каждом из конечных определителей, пределом которых является (61), одинаково, то при такой перемене знаков определитель не изменится.

Отсюда непосредственно вытекает, что разложение определителя (61) будет состоять из членов, порядок каждого из которых относительно  $m$  делится на 4.

Таким образом, отбрасывая члены 12-го порядка, мы будем иметь (сумма индексов может равняться только 0, 2, 4)

$$\Delta(0) = 1 + Aq_1^2 + Bq_1^4 + Cq_1^2 q_2 + Dq_2^2.$$

Легко видеть, что

$$Aq_1^2 = \sum_k \begin{vmatrix} 0 & \beta_{k-1} q_1 \\ \beta_k q_1 & 0 \end{vmatrix} = -q_1^2 \sum_k \beta_{k-1} \beta_k$$

$$Bq_1^4 = \sum_k \sum_i \begin{vmatrix} 0 & \beta_{k-1} q_1 \\ \beta_k q_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \beta_{i-1} q_1 \\ \beta_i q_1 & 0 \end{vmatrix} = q_1^4 \sum_k \sum_i \beta_{k-1} \beta_k \beta_{i-1} \beta_i.$$

В этом последнем равенстве  $k$  не может равняться  $i$ ,  $i-1$ ,  $i+1$ . Поэтому

$$B = A^2 - \sum_i \beta_{i-1}^2 \beta_i^2 - 2 \sum_i \beta_{i-1} \beta_i^2 \beta_{i+1}.$$

Коэффициенты  $A, B, C, D, \dots$  весьма просто выражаются через  $q$ . Например:

$$\begin{aligned} A &= - \sum_k \beta_{k-1} \beta_k = - \sum_k \frac{1}{16 \left[ \frac{1}{4} q^2 - (k-1)^2 \right] \left[ \frac{1}{4} q^2 - k^2 \right]} \\ &= \sum_k \frac{1}{16q(q+1)} \left( \frac{1}{\frac{1}{2}q+k} + \frac{1}{\frac{1}{2}q-k+1} \right) - \sum_k \frac{1}{16q(q-1)} \left( \frac{1}{\frac{1}{2}q-k} + \frac{1}{\frac{1}{2}q+k-1} \right) \\ &= \sum_k \frac{1}{4q(1-q^2)} \frac{1}{\frac{1}{2}q+k} = \frac{1}{4q(1-q^2)} \left( \frac{1}{\frac{1}{2}q} + q \sum_1^\infty \frac{1}{\frac{1}{4}q^2 - k^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4q(1-q^2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}. \end{aligned}$$

Хилл вычислил все члены разложения  $\Delta(0)$ , порядок которых относительно  $m$  меньше 16. Результат, полученный им, таков:

$$\begin{aligned} \Delta(0) &= 1 + \frac{\pi}{4q} \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2} \left[ \frac{q_1^2}{1-q^2} + \frac{q_2^2}{4-q^2} + \frac{q_3^2}{9-q^2} \right] + \\ &+ \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{32q(1-q^2)^2} \left[ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{9}{2(4-q^2)} \right] q_1^4 + \\ &+ \frac{3\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{8q(1-q^2)(4-q^2)} q_1^2 q_2 + \\ &+ \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{128q(1-q^2)^3} \left[ \left( -\frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{9}{2(4-q^2)} \right) \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{25}{8q^2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{q^4} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{4}{(1-q^2)^2} - \frac{9}{8(4-q^2)} + \frac{9}{(4-q^2)^2} - \frac{4}{9-q^2} - \frac{\pi^2}{3q^2} \right] q_1^6 + \\ &+ \frac{3\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{32q(1-q^2)^2(4-q^2)} \left[ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2}{4-q^2} + \frac{20}{3(9-q^2)} \right] q_1^4 q_2 + \\ &+ \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{16q(1-q^2)(4-q^2)} \left[ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi q}{q} - \frac{1}{q^2} + \frac{2}{1-q^2} + \frac{2}{4-q^2} + \right. \\ &\left. + \frac{10}{9-q^2} \right] q_1^2 q_2^2 + \frac{(7-3q^2)\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{4q(1-q^2)(4-q^2)(9-q^2)} q_1 q_2 q_3 + \\ &+ \frac{5\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi q}{2}}{16q(1-q^2)(4-q^2)(9-q^2)} q_1^3 q_3. \end{aligned}$$

Подставив сюда значения  $q, q_1, q_2, \dots$ , соответствующие принятой величине  $m$  (§ 135), Хилл получил

Член нулевого порядка . . . . .	1.00000 00000 00000 0
Член 4-го порядка . . . . .	+ 0.00180 46110 93422 7
Сумма членов 8-го порядка . . . . .	+ 0.00000 01808 63109 9
Сумма членов 12-го порядка . . . . .	+ 0.00000 00000 64478 6
	<hr/>
	= 1.00180 47920 21011 2

Рассмотрение характера убывания членов различных порядков позволяет думать, что первые 13 десятичных знаков точны.

Обращаясь теперь к уравнению (60), найдем:

$$c = 1.07158\ 32774\ 160.$$

Можно отметить, что ошибка в  $\Delta(0)$  переходит в  $c$  увеличенная в 2.8 раза.

То обстоятельство, что для  $c$  получилось действительное значение, имеет весьма важное значение, так как позволяет утверждать, что вариационная кривая является устойчивым решением уравнений (14). Действительно, обращаясь к §§ 135 и 136, мы видим, что отклонения  $\delta N$  и  $\delta T$  от движения, представляемого вариационной кривой, таковы, что если начальное отклонение от движения по вариационной кривой не велико, то оно останется небольшим и при дальнейшем движении, если только  $c$  действительное число.

Если вместо  $q^2, q_1, \dots$  подставить их выражения через  $m$  (§ 135), то можно получить как  $\Delta(0)$ , так и  $c$  в виде явных функций  $m$ .

В мемуаре, указанном в конце § 135, Хилл способом последовательных приближений нашел:

$$c = 1 + m - \frac{3}{4}m^2 - \frac{201}{32}m^3 - \frac{2367}{2^7}m^4 - \frac{111\ 749}{2^{11}}m^5 - \frac{4\ 095\ 991}{2^{13} \cdot 3}m^6 - \frac{332\ 532\ 037}{2^{16} \cdot 3^2}m^7 - \frac{15\ 106\ 211\ 789}{2^{18} \cdot 3^3}m^8 - \frac{5\ 975\ 332\ 916\ 861}{2^{23} \cdot 3^4}m^9 - \frac{1\ 547\ 804\ 933\ 375\ 567}{2^{25} \cdot 3^{5.5}}m^{10} - \frac{818\ 293\ 211\ 836\ 767\ 367}{2^{28} \cdot 3^{6.5^2}}m^{11} - \dots$$

§ 139. Вычисление коэффициентов.

После того как фундаментальная постоянная  $c$  найдена, решение уравнений (52) относительно коэффициентов  $b_k$  не представляет затруднений.

Для того чтобы получить численные значения коэффициентов, можно заменить бесконечную систему (52), написанную в форме

$$b_k + \sum_i \frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k+c)^2} b_i = 0, \quad (i \neq k) \quad (63)$$

конечной системой, полученной путем отбрасывания всех исчезающе малых членов.

Так как неизвестные  $b_k$  мы считаем ограниченными, то величина каждого члена уравнения будет зависеть от абсолютной величины

$|q^2 - (2k+c)^2|$  знаменателя и абсолютной величины  $|k-i|$  индекса у  $q_{k-i}$  и будет быстро убывать с возрастанием этих величин. Отсюда, между прочим, следует, что и искомые коэффициенты  $b_k$  будут быстро стремиться к нулю по мере возрастания  $|k|$ .

Для получения общих выражений коэффициентов  $b_k$  проще всего поступить следующим образом.

В определителе  $\Delta(z)$ , составленном из элементов (55), заменим нулевую строку

$$\dots, \frac{q_{-2}}{q^2 - z^2}, \frac{q_{-1}}{q^2 - z^2}, 1, \frac{q_1}{q^2 - z^2}, \frac{q_2}{q^2 - z^2}, \dots$$

неопределенными величинами

$$\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

Полученный таким образом определитель  $D(z)$  будет сходиться, если выполняется условие  $|x_i| < A$ , где  $A$  — независимое от  $i$  число.

Развертывая  $D(z)$  по элементам нулевой строки, найдем:

$$D(z) = \dots + x_{-1}B_{-1}(z) + x_0B_0(z) + x_1B_1(z) + \dots,$$

где  $B_k(z)$  суть мероморфные функции  $z$ , имеющие те же полюса (56), что и функция  $\Delta(z)$ , за исключением точек  $z = \pm q$ .

Легко видеть, что

$$b_k = B_k(c).$$

Действительно, если в определителе  $D(c)$  заменить величину  $x_i$  через

$$\frac{q_{k-i}}{q^2 - (2k+c)^2}$$

для  $i \neq k$ , а  $x_k$  заменить единицей, то получим  $D(c) = 0$ , так как определитель будет иметь две одинаковые строки, если  $k \neq 0$ ; если же  $k = 0$ , то при такой замене  $D(c)$  обратится в  $\Delta(c)$ , следовательно и в этом случае  $D(c) = 0$ . Но указанная замена делает  $D(c)$  тождественным с левой частью  $k$ -го из уравнений (63), что и доказывает наше утверждение.

Можно показать, что коэффициент  $b_k$  имеет множителем  $m^{|2k|-1}$ , но мы не будем на этом останавливаться.

§ 140. Важнейшие неравенства движения Луны.

Чтобы лучше уяснить связь между теорией Хилла и теорией Лапласа, найдем первые члены в разложениях рассматриваемых величин по степеням  $m$ .

Ограничиваясь в уравнениях (52) членами порядка не выше 3-го и учитывая значения  $q^2, q_1, q_2, \dots$ , приведенные в § 135, получим

$$\begin{aligned} [q^2 - c^2] b_0 + q_1 b_1 + q_1 b_{-1} &= 0, \\ [q^2 - (c+2)^2] b_1 + q_1 b_0 &= 0, \quad [q^2 - (c-2)^2] b_{-1} + q_1 b_0 + q_1 b_{-2} = 0 \\ [q^2 - (c+4)^2] b_2 + q_1 b_1 &= 0, \quad [q^2 - (c-4)^2] b_{-2} + q_1 b_{-1} = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} q^2 - c^2 &= \frac{225}{16}m^3 + \frac{3645}{64}m^4 + \dots, \quad q_1 = -\frac{15}{2}m^2 - \frac{57}{4}m^3 - 11m^4 + \dots \\ q^2 - (c+2)^2 &= -8 - 4m + 3m^2 + \dots, \quad q^2 - (c-2)^2 = 4m - 3m^2 - \dots \\ q^2 - (c+4)^2 &= -24 - 8m + \dots, \quad q^2 - (c-4)^2 = -8 + 8m - 6m^2 - \dots \end{aligned}$$

то из этих уравнений легко найти, отбрасывая члены порядка  $m^3$ :

$$b_1 = -\frac{15}{16} m^2 b_0, \quad b_{-1} = \left( \frac{15}{8} m + \frac{159}{32} m^2 \right) b_0, \quad b_2 = b_{-2} = 0.$$

Соответственно этому формула (51) дает общее решение уравнения, определяющего  $\delta N$ , в следующем виде:

$$\delta N = -\frac{15}{16} m^2 (C_1 \zeta^{2+c} + C_2 \zeta^{-2-c}) + (C_1 \zeta^c + C_2 \zeta^{-c}) + \\ + \left( \frac{15}{8} m + \frac{159}{32} m^2 \right) (C_1 \zeta^{-2+c} + C_2 \zeta^{+2-c}) + \dots,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Полагая

$$C_1 + C_2 = A \cos \omega, \quad i(C_1 - C_2) = -A \sin \omega,$$

где  $A$  и  $\omega$  — новые произвольные постоянные, получим:

$$A^{-1} \delta N = -\frac{15}{16} m^2 \cos [(c+2)\tau + \omega] + \cos (c\tau + \omega) + \\ + \left( \frac{15}{8} m + \frac{159}{32} m^2 \right) \cos [(c-2)\tau + \omega].$$

Чтобы еще более упростить дальнейшие выкладки, отбросим и члены второго порядка. Тогда уравнение (45) обратится в такое:

$$\frac{d}{d\tau} \delta T = 2(1+m) \delta N,$$

а предыдущее выражение для  $\delta N$  даст

$$\delta N = A \cos (c\tau + \omega) + \frac{15}{8} Am \cos [(c-2)\tau + \omega].$$

Поэтому

$$\delta T = 2A \sin (c\tau + \omega) - \frac{15}{4} Am \sin [(c-2)\tau + \omega] + B,$$

ибо в пределах нужной нам точности  $c = 1 + m$ ,  $c - 2 = -(1 - m)$ ; через  $B$  обозначена новая постоянная.

С другой стороны, в § 134 мы видели, что уравнения вариационной кривой с точностью до членов порядка  $m^2$  таковы:

$$x = a \cos \tau \left[ 1 - m^2 - \frac{3}{4} m^2 \sin^2 \tau \right], \quad y = a \sin \tau \left[ 1 + m^2 + \frac{3}{4} m^2 \cos^2 \tau \right].$$

Поэтому соотношения (33), определяющие угол  $\psi$ , образуемый касательной к вариационной кривой с осью  $x$ , дают, с ошибкой порядка  $m^2$ :

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \tau.$$

Следовательно

$$\delta x = -\delta T \sin \tau - \delta N \cos \tau, \quad \delta y = \delta T \cos \tau - \delta N \sin \tau.$$

Подставив сюда только-что найденные значения  $\delta N$ ,  $\delta T$  и прибавив полученные  $\delta x$ ,  $\delta y$  к координатам точек вариационной кривой, получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \tau - B \sin \tau - am^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \sin^2 \tau \right) \cos \tau - \\ &- A \left\{ \frac{15}{8} m \cos [(c-2)\tau + \omega] \cos \tau + \cos (c\tau + \omega) \cos \tau - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{4} m \sin [(c-2)\tau + \omega] \sin \omega + 2 \sin (c\tau + \omega) \sin \tau \right\} \\ y &= a \sin \tau + B \cos \tau + am^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \cos^2 \tau \right) \sin \tau - \\ &- A \left\{ \frac{15}{8} m \cos [(c-2)\tau + \omega] \sin \tau + \cos (c\tau + \omega) \sin \tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{4} m \sin [(c-2)\tau + \omega] \cos \tau - 2 \sin (c\tau + \omega) \cos \tau \right\}. \end{aligned} \right\} (64)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  мы должны рассматривать как бесконечно малые величины первого порядка. Поэтому можно положить

$$a \cos \tau - B \sin \tau = a \cos (\tau + \delta\tau_0), \quad a \sin \tau + B \cos \tau = a \sin (\tau + \delta\tau_0),$$

где через  $\delta\tau_0$  обозначена бесконечно малая постоянная, эквивалентная  $B$ .

Так как начало счета  $\tau$  произвольно, то мы можем отбросить  $\delta\tau_0$  — это вызовет изменение предыдущих выражений для  $x$  и  $y$  лишь на величины второго порядка малости относительно  $A$  и  $\delta\tau_0$ .

Рассмотрим сначала предельный случай, когда  $m = 0$ . В этом случае возмущения со стороны Солнца отсутствуют и дифференциальные уравнения (14), определяющие вариационную орбиту, обращаются в уравнения задачи двух тел. Поэтому при  $m = 0$  равенства (64) должны представлять эллиптическое движение с точностью до первых степеней эксцентриситета. Но при  $m = 0$  эти равенства дают:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \tau - \frac{3}{2} A \cos \omega + \frac{1}{2} A \cos (2\tau + \omega) \\ y &= a \sin \tau + \frac{3}{2} A \sin \omega + \frac{1}{2} A \sin (2\tau + \omega). \end{aligned} \right\}$$

Повернем оси координат на угол  $\omega$ . Новые координаты

$$x' = x \cos \omega - y \sin \omega, \quad y' = x \sin \omega + y \cos \omega$$

будут равны

$$\left. \begin{aligned} x' &= -\frac{3}{2} A + a \cos (\tau + \omega) + \frac{1}{2} A \cos 2(\tau + \omega), \\ y' &= a \sin (\tau + \omega) + \frac{1}{2} A \sin 2(\tau + \omega). \end{aligned} \right\}$$

Сравнивая эти выражения с формулами, дающими орбитальные координаты в эллиптическом движении (§ 80), а именно

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a (\cos E - e) = a \left( -\frac{3}{2} e + \cos M + \frac{e}{2} \cos 2M \right), \\ \eta &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E = a \left( \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M \right). \end{aligned} \right\}$$

если ограничиться первыми степенями эксцентриситета, получим

$$a = a, \quad A = ae, \quad \tau + \omega = M.$$

Вернемся теперь к рассмотрению движения Луны в общем случае, когда  $m \neq 0$ . Обозначая, как и раньше, через  $r$  и  $v$  радиус-вектор и долготу Луны, через  $v' = n't + \varepsilon'$  долготу Солнца и полагая в формулах (64)  $B = 0, A = ae$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{a} \cos(v - v') &= \cos \tau - am^2 \left(1 + \frac{3}{4} \sin^2 \tau\right) \cos \tau - \\ &- \frac{15}{8} me \cos[(c-2)\tau + \omega] \cos \tau - e \cos(c\tau + \omega) \cos \tau + \\ &+ \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] \sin \tau - 2e \sin(c\tau + \omega) \sin \tau \\ \frac{r}{a} \sin(v - v') &= \sin \tau + am^2 \left(1 + \frac{3}{4} \cos^2 \tau\right) \sin \tau - \\ &- \frac{15}{8} me \cos[(c-2)\tau + \omega] \sin \tau - e \cos(c\tau + \omega) \sin \tau - \\ &- \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] \cos \tau + 2e \sin(c\tau + \omega) \cos \tau. \end{aligned} \right\} (65)$$

Возводя эти выражения в квадрат и складывая, будем иметь, после очевидных упрощений:

$$r^2 = a^2 \left\{ 1 - 2e \cos(c\tau + \omega) - 2m^2 \cos 2\tau - \frac{15}{4} me \cos[(c-2)\tau + \omega] \right\};$$

откуда, принимая во внимание (§ 134), что

$$a = a \left( 1 - \frac{1}{6} m^2 + \dots \right),$$

следует

$$r = a \left\{ 1 - \frac{1}{6} m^2 - e \cos(c\tau + \omega) - \frac{15}{8} me \cos[(c-2)\tau + \omega] - m^2 \cos 2\tau \right\}. (66)$$

Почленное деление каждого из равенств (65) на полученное значение  $r$  дает:

$$\begin{aligned} \cos(v - v') &= \cos \tau \left[ 1 - \frac{11}{4} m^2 \sin^2 \tau \right] + \\ &+ \sin \tau \left\{ \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] - 2e \sin(c\tau + \omega) \right\} \\ \sin(v - v') &= \sin \tau \left[ 1 + \frac{11}{4} m^2 \cos^2 \tau \right] - \\ &- \cos \tau \left\{ \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] - 2e \sin(c\tau + \omega) \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sin(v - v' - \tau) = \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau - \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] + 2e \sin(c\tau + \omega),$$

или, все с той же точностью до малых величин второго порядка относительно  $m$  и первого — относительно  $e$ :

$$v - v' - \tau = 2e \sin(c\tau + \omega) - \frac{15}{4} me \sin[(c-2)\tau + \omega] + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau. (67)$$

Первые периодические члены в разложениях (66) и (67) представляют, очевидно, эллиптические неравенства движения Луны, а потому аргумент этих членов есть не что иное, как средняя аномалия Луны. С другой стороны, удерживая обозначения § 126, средняя аномалия равна  $nt - \Pi$ ; следовательно

$$c\tau + \omega = nt - \Pi.$$

Дифференцирование этого равенства дает движение перигея:

$$\frac{d\Pi}{dt} = n - c(n - n') = n \left( 1 - \frac{c}{1+m} \right).$$

Подставляя сюда найденное в § 138 значение  $c$ , получим следующее выражение для той части движения перигея, которая не зависит от эксцентриситетов Луны и Солнца:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{d\Pi}{dt} &= \frac{3}{2^2} m^2 + \frac{177}{2^5} m^3 + \frac{1659}{2^7} m^4 + \frac{85\,205}{2^{11}} m^5 + \frac{3\,073\,531}{2^{13.3}} m^6 + \\ &+ \frac{258\,767\,293}{2^{16.3^2}} m^7 + \frac{12\,001\,004\,273}{2^{18.3^3}} m^8 + \frac{4\,823\,236\,506\,653}{2^{23.3^4}} m^9 + \dots \end{aligned}$$

Этот ряд сходится настолько медленно, что для действительного определения движения перигея целесообразнее найти  $c$  указанным в § 138 численным методом. Таким именно путем Хилл нашел

$$\frac{1}{n} \frac{d\Pi}{dt} = 0.00857\,25730\,04864.$$

При сравнении полученных результатов с тем, что дают теории Лапласа, Понтекулана и других, надо иметь в виду, что

$$m = \frac{n'}{n - n'} = \frac{\mu}{1 - \mu}, \quad c = \frac{n}{n - n'} c = (1 + m)c.$$

Таким образом, выражая движение перигея через  $\mu$ , получим:

$$\frac{1}{n} \frac{d\Pi}{dt} = 1 - c = \frac{3}{4} \mu^2 + \frac{225}{32} \mu^3 + \frac{4071}{2^7} \mu^4 + \frac{265\,493}{2^{11}} \mu^5 + \frac{12\,822\,631}{2^{13.3}} \mu^6 + \dots$$

Коэффициенты этого ряда значительно больше соответственных коэффициентов ряда, расположенного по степеням  $m$ , вследствие чего употребление параметра  $m$  в теории движения Луны выгоднее, чем параметра  $\mu$ . Однако в тех случаях, когда требуется особенно большая точность, не следует употреблять разложения и по степеням  $m$ , проще и скорее ведут к цели численные методы, как это было уже отмечено в § 138.

Вернемся теперь к формулам (66) и (67). Так как средние долготы Луны и Солнца равны соответственно  $nt + \varepsilon$  и  $n't + \varepsilon'$ , а через  $\tau$  обозначено угловое расстояние между средними положениями Луны и Солнца, то

$$v' + \tau = nt + \varepsilon, \quad \tau = (n - n')t - \beta,$$

где  $\beta = \varepsilon' - \varepsilon$ .

Положим

$$c\tau + \omega = \frac{cn}{n-n'}\tau + \omega = c\pi - \pi.$$

где

$$\pi = \frac{cn\beta}{n-n'} - \omega.$$

При этих обозначениях равенства (67) и (66) могут быть представлены так:

$$\begin{aligned} v &= nt + \varepsilon + 2e \sin(cnt - \pi) + \frac{11}{8} m^2 \sin[2(n-n')t - 2\beta] + \\ &+ \frac{15}{4} me \sin[(2n - 2n' - cn)t - 2\beta + \pi] \\ r &= a \left\{ 1 - \frac{1}{6} m^2 - e \cos(cnt - \pi) - m^2 \cos[2(n-n')t - 2\beta] - \right. \\ &\left. - \frac{15}{8} me \cos[(2n - 2n' - cn)t - 2\beta + \pi] \right\}. \end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения с тем, что было получено в теории Лапласа, в частности с формулой (45) в § 127, видим, что теория Хилла дает, в пределах принятой нами точности, главные члены уравнения центра, вариации и эвекции. Преимущество этой теории перед теорией Лапласа заключается прежде всего в том, что теория Хилла позволяет сравнительно очень просто вычислить эти неравенства, так же, как и движение перигея, с произвольно большой точностью относительно параметра  $m$ .

#### § 141. Неравенства, зависящие от эксцентриситета лунной орбиты.

Мы подробно изучили метод, данный Хиллом для вычисления неравенств, зависящих от первой степени эксцентриситета лунной орбиты. Теперь мы перейдем к более сложной задаче определения неравенств, имеющих множителями высшие степени эксцентриситета. Эта задача эквивалентна нахождению общего решения уравнений (14) или (13).

Рассмотрим сначала решение, бесконечно близкое к вариационной кривой, найденное в §§ 135—139. Из равенств (31) следует:

$$\begin{aligned} \delta N &= -\delta x \sin \psi + \delta y \cos \psi = \frac{1}{2} i (\delta s \cdot e^{i\psi} - \delta u \cdot e^{-i\psi}) \\ \delta T &= \delta x \cos \psi + \delta y \sin \psi = \frac{1}{2} (\delta s \cdot e^{i\psi} + \delta u \cdot e^{-i\psi}), \end{aligned}$$

если опять положить  $u = x + yi$ ,  $s = x - yi$ .

С другой стороны, равенства (33) дают:

$$Ve^{i\psi} = i Du, \quad Ve^{-i\psi} = i Ds,$$

поэтому

$$\delta u = \frac{Du}{V} (\delta T - \delta N), \quad \delta s = \frac{Ds}{V} (i\delta T + \delta N). \quad (68)$$

Общее выражение для  $\delta N$ , даваемое формулой (51), мы можем, для удобства дальнейших выкладок, написать так:

$$\delta N = \zeta_1^{\pm c} \sum b_{2k} \zeta_1^{2k},$$

где

$$\zeta_1 = \exp i(\tau - \tau_1),$$

причем через  $\tau_1$  обозначена произвольная постоянная.

Уравнение (39), которому можно придать вид:

$$V \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\delta T}{V} \right) = 2 \left( \frac{d\psi}{d\tau} + m \right) \delta N,$$

или

$$iV \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\delta T}{V} \right) = \left( \frac{D^2 u}{Du} - \frac{D^2 s}{Ds} + m \right) \delta N,$$

позволяет легко заключить, что и  $\delta T$  имеет ту же форму, что  $\delta N$ , нужно только иметь в виду, что  $V$  есть четная функция  $\zeta$ .

Обращаясь теперь к равенствам (68), мы видим, что  $\delta u$  и  $\delta s$  суть четные функции  $\zeta_1$ , разлагающиеся в ряды

$$\delta u = \zeta_1^{\pm c} \zeta \sum b_{2k} \zeta^{2k}, \quad \delta s = \zeta_1^{\pm c} \zeta^{-1} \sum b_{2k} \zeta^{-2k}$$

с действительными коэффициентами.

В самом деле, сумма  $\delta u + \delta s = 2\delta x$  должна иметь действительные коэффициенты, а разность  $\delta u - \delta s = 2\delta y$  — чисто мнимые.

Таким образом, учитывая равенства (16), мы можем решение уравнений (13), мало отличающееся от вариационной кривой, представить рядами:

$$u = a \zeta \sum_{k,p} A_{2k+pc} \zeta^{2k} \zeta_1^{pc}, \quad s = a \zeta^{-1} \sum_{k,p} A_{-2k-pc} \zeta^{2k} \zeta_1^{pc}, \quad (69)$$

где  $k$  принимает все целые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а  $p$  принимает только три значения:  $-1$ ,  $0$  и  $+1$ . В частности, для  $p=0$  имеем  $A_{2k} = a_{2k}$ .

Так как общее решение отличается от вариационной кривой на величины конечные, то мы можем рассматривать только что указанное решение как образованное начальными членами некоторых более общих разложений, представляющих общее решение уравнений (13). Следуя Брауну, попробуем найти общее решение в виде тех же самых рядов (69), но при условии, что  $p$  принимает все целые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . При этом будем предполагать, что коэффициент  $A_{2k+pc}$  есть величина порядка  $|p|$  относительно некоторого малого параметра  $e$ . Небезинтересно заметить, что сам Браун пришел к выражениям (69) для  $u$  и  $s$ , пользуясь теорией Понтекулана.

Первое, что надо сделать для того, чтобы показать наличие решения вида (69) у системы (13), это убедиться в возможности найти такие коэффициенты  $A_{2k+pc}$ , при которых ряды (69) формально удовлетворяют уравнениям (13).

Подставим ряды (69) в уравнения (11), являющиеся следствием уравнений (13). Так как, с одной стороны:

$$D(\zeta^{2k+1} \zeta_1^{pc}) = (2k+1+pc) \zeta^{2k+1} \zeta_1^{pc},$$

а с другой

$$D(\zeta^{2k+1+pc}) = (2k+1+pc)\zeta^{2k+1+pc},$$

то результат подстановки и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\zeta$  не изменится, если в рядах (69) мы положим  $\zeta_1 = \zeta$ . Нужно только помнить, что в окончательных результатах  $\zeta^{2k+1+pc}$  должно быть заменено величиной

$$\exp i[(2k+1)\tau + pc(\tau - \tau_1)].$$

Таким образом, вместо (69) мы можем подставить в уравнения (11) ряды

$$u = a \sum_{k,p} A_{2k+pc} \zeta^{2k+1+pc}, \quad s = a \sum_{k,p} A_{-2k-2-pc} \zeta^{2k+1+pc}.$$

Не повторяя вычислений, сделанных в § 137, мы можем сразу написать результат этой подстановки в виде следующих уравнений, соответствующих уравнениям (21):

$$\sum_{k,p} A_{2k+pc} \{ [2i+qc, 2k+pc] A_{-2i+2k-qc+pc} + [2i+qc] A_{2i-2k+qc-pc} + (2i+qc) A_{-2i-2k-2-qc-pc} \} = 0. \quad (70)$$

Решение этих уравнений легко находится способом последовательных приближений, если исходить из значений  $c$  и  $a_{2k}$ , найденных выше. Таким образом получается, между прочим, та часть движения перигея, которая зависит от эксцентриситета лунной орбиты. Мы не будем входить в подробности этих вычислений, не представляющих ничего принципиально нового.

### § 142. Неравенства, зависящие от наклонности лунной орбиты.

До сих пор мы предполагали, что Луна движется в плоскости эклиптики и потому в уравнениях движения, выведенных в § 130, полагаем  $z=0$ . Посмотрим теперь, как изменится движение Луны, если освободиться от этого допущения и учитывать наклонность лунной орбиты.

Пренебрегая попрежнему эксцентриситетом орбиты Солнца и полагая, следовательно,  $\Omega=0$ , из уравнений (8) и (10) получим такие уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} D^2(us+z^2) - Du \cdot Ds - (Dz)^2 - 2m(us - sDu) + \\ + \frac{9}{4}m^2(u+s)^2 - 3m^2z^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$$\left. \begin{aligned} D(us - sDu) - 2mD(us) + \frac{3}{2}m^2(u^2 - s^2) = 0 \\ D^2z - m^2z - xzr^{-3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Одна из произвольных постоянных, входящих в общее решение уравнения (72), может быть выбрана так, что при обращении ее в нуль  $z$  также обращается в нуль. Обозначим эту постоянную через  $\gamma$  и будем, следовательно, считать, что  $z$  имеет множителем  $\gamma$ , причем  $\gamma$  — малая величина порядка наклонности лунной орбиты.

Если пренебречь величинами порядка  $\gamma^2$ , то уравнения (71) становятся независимыми от  $z$  и дают решение, подробно изученное нами в предыдущих параграфах. Подставляя найденные таким образом значения  $u$  и  $s$  в уравнение (72), получим возможность определить  $z$  с ошибкой порядка  $\gamma^2$ . Это значение  $z$ , будучи подставлено в уравнения (71), даст возможность найти члены порядка  $\gamma^2$  в разложениях  $u$  и  $s$ , и т. д. При помощи такого чередования в употреблении уравнений (71) и (72) могут быть получены члены любого порядка относительно  $\gamma$  во всех трех координатах  $u$ ,  $s$  и  $z$ . Очевидно  $u$  и  $s$  будут заключать только четные степени  $\gamma$ , а  $z$  — только нечетные.

Рассмотрим подробнее вычисление членов первого порядка в координате  $z$ , причем эксцентриситет лунной орбиты будем считать равным нулю. Соответствующее этому случаю решение уравнений (71) есть вариационная кривая

$$u = a \sum_{2k} a_{2k} \zeta^{2k+1}, \quad s = a \sum_{-2k-2} a_{-2k-2} \zeta^{2k+1}.$$

Подставим эти значения  $u$  и  $s$  в уравнение (72). Так как

$$m^2 + xr^{-3} = m^2 + x(u^2 + s^2)^{-\frac{3}{2}}$$

есть четная функция  $\zeta$ , не меняющаяся при замене  $\zeta$  на  $\zeta^{-1}$ , то

$$m^2 + xr^{-3} = 2 \sum_k M_k \zeta^{2k}, \quad (73)$$

где  $M_{-k} = M_k$ . Нетрудно, кроме того, убедиться, что  $M_k$  есть величина порядка  $m^{2k}$ . Отсюда следует, что уравнение (72) приводится к виду

$$D^2z - z \cdot 2 \sum_k M_k \zeta^{2k} = 0 \quad (74)$$

или

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + (2M_0 + 4M_1 \cos 2\tau + 4M_2 \cos 4\tau + \dots)z = 0,$$

т. е. оно становится тождественным с уравнением Хилла, подробно изученным в §§ 136—139.

Итак, общее решение уравнения (74) имеет вид:

$$z = C_1 \zeta^g \cdot \sum \beta_k \zeta^{2k} + C_2 \zeta^{-g} \cdot \sum \beta_k \zeta^{-2k}, \quad (75)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные; характеристические показатели  $g$  и  $-g$  являются корнями уравнения

$$\sin^2 \frac{\pi g}{2} = \Delta_1(0) \sin^2 \frac{\pi \sqrt{2M_0}}{2}, \quad (76)$$

причем бесконечный определитель  $\Delta_1(0)$  получается из  $\Delta(0)$  путем замены  $q^2$  через  $2M_0$ , а  $q_k$  через  $2M_k$ . Наконец, коэффициенты  $\beta_k$  определяются из уравнений

$$\beta_k (g + 2k)^2 - 2 \sum_{k-i} M_{k-i} \beta_i = 0, \quad (77)$$

соответствующих (52).

В конце § 134 мы видели, что с точностью до членов порядка  $m^3$  имеют место равенства:

$$\begin{aligned} xa^{-3} &= 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2 + \dots \\ r &= a(1 - m^2 \cos 2\tau + \dots). \end{aligned}$$

Следовательно

$$m^2 + \chi r^{-3} = 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 + 3m^2 \cos 2\tau + \dots$$

Итак, в пределах принятой точности,

$$2M_0 = 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2, \quad 2M_1 = 2M_{-1} = \frac{3}{2} m^2,$$

а все остальные коэффициенты  $M_k$  равны нулю.

Так как коэффициенты  $\beta_{\pm 2}, \beta_{\pm 3}, \dots$  не ниже третьего порядка, то уравнения (77) дают:

$$\begin{aligned} \left[ 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 - g^2 \right] \beta_0 + \frac{3}{2} m^2 \beta_{-1} + \frac{3}{2} m^2 \beta_1 &= 0 \\ \left[ 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 - (g-2)^2 \right] \beta_{-1} + \frac{3}{2} m^2 \beta_0 &= 0 \\ \left[ 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 - (g+2)^2 \right] \beta_1 + \frac{3}{2} m^2 \beta_0 &= 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Из этих уравнений можно определить, прежде всего, приближенное значение  $g$ . Действительно, первое из уравнений (78) показывает, что с ошибкой порядка не ниже чем  $m^3$  должно иметь место равенство

$$g^2 = 1 + 2m + \frac{5}{2} m^2 + \dots,$$

откуда

$$g = 1 + m + \frac{3}{4} m^2 + \dots$$

Подставив это значение  $g$  во второе из уравнений (78), мы видим, что в коэффициенте  $\beta_{-1}$  может быть найден лишь член первого порядка

$$\beta_{-1} = -\frac{3}{8} m \beta_0.$$

Поэтому и в  $\beta_1$  сохранять члены второго порядка не имеет смысла, так что можно взять  $\beta_1 = 0$ .

Итак, с ошибкой порядка  $m^2$  равенство (75) дает

$$z = \beta_0 \left\{ \cos(g\tau + \varepsilon_1) - \frac{3}{8} m \cos[(g-2)\tau + \varepsilon_1] \right\}, \quad (79)$$

ибо, пользуясь произвольностью  $\beta_0$ , мы можем положить

$$C_1 = \frac{1}{2} \exp(i\varepsilon_1), \quad C_2 = \frac{1}{2} \exp(-i\varepsilon_1).$$

Первый член формулы (79) соответствует, очевидно, невозмущенному движению. Второй член носит название эвекции широты.

Обозначим через  $i$  наклонность лунной орбиты, через  $\Omega$  — долготу восходящего узла. Тогда, как было показано в § 119,

$$z = \gamma r \sin(v - \Omega),$$

где  $\gamma = \operatorname{tg} i$ . Так как

$$r = a(1 - m^2 \cos 2\tau), \quad v = nt + \varepsilon + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\tau + \dots$$

то, отбрасывая члены порядка  $m^2$ , получим

$$\beta_0 = a\gamma, \quad g\tau + \varepsilon_1 = nt + \varepsilon - \Omega - 90^\circ.$$

Чтобы выяснить значение множителя  $g$ , возьмем производные по  $t$  от обеих частей последнего равенства. Это даст

$$g(n - n') = n - \frac{d\Omega}{dt},$$

откуда

$$\frac{d\Omega}{dt} = n \left( 1 - \frac{g}{1+m} \right).$$

Так как в теории Лапласа мы положили

$$\frac{d\Omega}{dt} = n(1 - g),$$

то

$$g = \frac{g}{1+m}.$$

Уравнение (76) позволяет найти  $g$ , а следовательно и  $g$ , с любой точностью. Первые члены разложения  $g$  по степеням  $m$  таковы:

$$\begin{aligned} g = 1 + \frac{3}{4} m^2 + \frac{177}{32} m^3 + \frac{1659}{2^7} m^4 + \frac{85205}{2^{11}} m^5 + \frac{3073531}{2^{15} \cdot 3} m^6 + \\ + \frac{258767293}{2^{16} \cdot 3^2} m^7 + \frac{12001004273}{2^{18} \cdot 3^3} m^8 + \frac{4823236506653}{2^{23} \cdot 3^4} m^9 + \dots \end{aligned}$$

Если желательно получить очень большую точность, то лучше не прибегать к разложениям по степеням  $m$ , а находить непосредственно численные значения  $g$  и коэффициентов  $\beta_k$ . В этом случае лучше и разложение функции (73) получить при помощи вычисления отдельных значений  $r$ . Пользуясь указанными выше разложениями функций  $\frac{r}{a} \cos v$  и  $\frac{r}{a} \sin v$ , Хилл нашел следующие частные значения функции  $\chi r^{-3}$ :

$v = 0^\circ$	$\chi r^{-3} = 1.19699\ 57017\ 23421$
$15^\circ$	$1.19348\ 68051\ 03032$
$30^\circ$	$1.18399\ 66676\ 76716$
$45^\circ$	$1.17125\ 64904\ 33157$
$60^\circ$	$1.15876\ 77987\ 29687$
$75^\circ$	$1.14978\ 07679\ 95764$
$90^\circ$	$1.14652\ 34925\ 50570$

Откуда, по обычным формулам гармонического анализа, получается

$$\begin{aligned}
 m^2 + \kappa r^{-2} &= 1.17804\ 45712\ 77166 \\
 &+ 0.02523\ 36924\ 97860 \cos 2\tau \\
 &+ 0.00025\ 15533\ 50012 \cos 4\tau \\
 &+ 0.00000\ 24118\ 79799 \cos 6\tau \\
 &+ 0.00000\ 00226\ 05851 \cos 8\tau \\
 &+ 0.00000\ 00002\ 08750 \cos 10\tau \\
 &+ 0.00000\ 00000\ 01908 \cos 12\tau \\
 &+ 0.00000\ 00000\ 00017 \cos 14\tau
 \end{aligned}$$

Величину  $g$ , характеризующую поступательное движение узла лунной орбиты, этим методом впервые определил Адамс.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> J. C. Adams, On the Motion of the Moon's Node in the case when the Orbits of the Sun and Moon are supposed to have no Eccentricities, etc. Monthly Notices R. A. S., 38, 1877, 43-49=Coll. Works, 181-188.

Таблица I.

Коэффициенты разложений  $C_k^{n,m}$  по степеням эксцентриситета. (Стр. 225).

n	m	k=0				k=1			
		e <sup>0</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>
-3	0	+1	+ $\frac{3}{2}$	+ $\frac{15}{8}$	+ $\frac{35}{16}$	+3	+ $\frac{27}{8}$	+ $\frac{261}{64}$	+ $\frac{14309}{3072}$
-2	0	+1	+ $\frac{1}{2}$	+ $\frac{3}{8}$	+ $\frac{5}{16}$	+2	+ $\frac{3}{4}$	+ $\frac{65}{96}$	+ $\frac{2675}{4608}$
-1	0	+1	0	0	0	+1	- $\frac{1}{8}$	+ $\frac{1}{192}$	- $\frac{1}{9216}$
+1	0	+1	+ $\frac{1}{2}$	0	0	-1	+ $\frac{3}{8}$	- $\frac{5}{192}$	+ $\frac{7}{9216}$
+2	0	+1	+ $\frac{3}{2}$	0	0	-2	+ $\frac{1}{4}$	- $\frac{1}{96}$	+ $\frac{1}{4608}$
+3	0	+1	+3	+ $\frac{3}{8}$	0	-3	- $\frac{9}{8}$	+ $\frac{15}{64}$	- $\frac{35}{3072}$
-2	2	0	0	0	0	-1	+ $\frac{1}{3}$	+ $\frac{1}{384}$	+ $\frac{77}{11520}$
-1	2	0	+ $\frac{1}{4}$	+ $\frac{1}{8}$	+ $\frac{5}{64}$	- $\frac{3}{2}$	+ $\frac{13}{12}$	+ $\frac{103}{768}$	+ $\frac{31}{240}$
0	2	0	+ $\frac{3}{4}$	+ $\frac{1}{8}$	+ $\frac{3}{64}$	-2	+ $\frac{11}{6}$	- $\frac{5}{192}$	+ $\frac{751}{11520}$
+1	2	0	+ $\frac{3}{2}$	0	0	- $\frac{5}{2}$	+ $\frac{25}{12}$	- $\frac{187}{768}$	+ $\frac{29}{2880}$
+2	2	0	+ $\frac{5}{2}$	0	0	-3	+ $\frac{4}{3}$	- $\frac{37}{384}$	+ $\frac{11}{3840}$
		e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>0</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>
-2	1	0	0	0	0	+1	- $\frac{3}{8}$	+ $\frac{5}{192}$	- $\frac{7}{9216}$
-1	1	- $\frac{1}{2}$	- $\frac{1}{8}$	- $\frac{1}{16}$	- $\frac{5}{128}$	+1	- $\frac{9}{8}$	- $\frac{5}{64}$	- $\frac{889}{9216}$
0	1	-1	0	0	0	+1	- $\frac{9}{8}$	+ $\frac{25}{192}$	- $\frac{49}{9216}$
+1	1	- $\frac{3}{2}$	0	0	0	+1	- $\frac{3}{8}$	+ $\frac{5}{192}$	- $\frac{7}{9216}$
+2	1	-2	- $\frac{1}{2}$	0	0	+1	+ $\frac{9}{8}$	- $\frac{25}{64}$	+ $\frac{245}{9216}$

(Продолжение)

n	m	k=2				k=3				
		e <sup>0</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	
-3	0	0	+ 9/2	+ 7/2	+ 141/32	0	+ 53/8	+ 393/128	+ 24 753/5120	
-2	0	0	+ 5/2	+ 1/3	+ 21/32	0	+ 13/4	- 25/64	+ 393/512	
-1	0	0	+ 1	- 1/3	+ 1/24	0	+ 9/8	- 81/128	+ 729/5120	
+1	0	0	- 1/2	+ 1/3	- 1/16	0	- 3/8	+ 45/128	- 567/5120	
+2	0	0	- 1/2	+ 1/6	- 1/48	0	- 1/4	+ 9/64	- 81/560	
+3	0	0	0	- 1/2	+ 3/16	0	+ 1/8	- 45/128	+ 189/1024	
-2	2	+1	- 7/2	+ 85/48	- 319/1440	+3	- 69/8	+ 3663/640	- 3597/2560	
-1	2	+1	- 4	+ 47/16	- 13/36	+ 5/2	- 131/16	+ 8861/1280	- 9921/5120	
0	2	+1	- 4	+ 167/48	- 503/720	+ 2	- 27/4	+ 2079/320	- 1427/640	
+1	2	+1	- 7/2	+ 71/24	- 551/720	+ 3/2	- 75/16	+ 5751/1280	- 8829/5120	
+2	2	+1	- 5/2	+ 11/8	- 179/720	+ 1	- 19/8	+ 1053/640	- 243/512	
			e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>0</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>
-2	1	+2	- 4/3	+ 1/4	- 1/45	0	+ 27/8	- 405/128	+ 5103/5120	
-1	1	+ 3/2	- 11/6	+ 9/32	- 9/80	0	+ 17/8	- 385/128	+ 5201/5120	
0	1	+1	- 4/3	+ 3/8	- 2/45	0	+ 9/8	- 225/128	+ 3969/5120	
+1	1	+ 1/2	- 1/3	+ 1/16	- 1/180	0	+ 3/8	- 45/128	+ 567/5120	
+2	1	0	+ 2/3	- 3/8	+ 1/15	0	- 1/8	+ 75/128	- 441/1024	

(Продолжение)

n	m	k=4			k=5			
		e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	
-3	0	0	+ 77/8	+ 129/80	0	+ 1773/128	- 4987/3072	
-2	0	0	+ 103/24	- 129/80	0	+ 1097/192	- 16 621/4608	
-1	0	0	+ 4/3	- 16/15	0	+ 625/384	- 15 625/9216	
+1	0	0	- 1/3	+ 2/5	0	- 125/384	+ 4375/9216	
+2	0	0	- 1/6	+ 2/15	0	- 25/192	+ 625/4608	
+3	0	0	+ 1/8	- 3/10	0	+ 15/128	- 875/3072	
-2	2	+ 13/2	- 55/3	+ 10 723/720	+ 295/24	- 13 745/384	+ 1 102 775/32 256	
-1	2	+ 19/4	- 121/8	+ 10 597/720	+ 389/48	- 20 267/768	+ 626 681/21 504	
0	2	+ 13/4	- 259/24	+ 8401/720	+ 59/12	- 3221/192	+ 163 363/8064	
+1	2	+ 2	- 19/3	+ 62/9	+ 125/48	- 6625/768	+ 679 375/64 512	
+2	2	+ 1	- 5/2	+ 94/45	+ 25/24	- 1075/384	+ 29 375/10 752	
			e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	-
-2	1	+ 16/3	- 32/5	+ 128/45	+ 3125/384	- 109 375/9216	-	
-1	1	+ 71/24	- 387/80	+ 387/160	+ 523/128	- 70 273/9216	-	
0	1	+ 4/3	- 12/5	+ 64/45	+ 625/384	- 30 625/9216	-	
+1	1	+ 1/3	- 2/5	+ 8/45	+ 125/384	- 4375/9216	-	
+2	1	- 1/6	+ 3/5	- 8/15	- 25/128	+ 6125/9216	-	

(Продолжение)

n	m	k=6		k=7		k=8	k=9
		e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>6</sup>	e <sup>7</sup>
-3	0	0	+ 3167/160	0	+ 432 091/15 360	0	0
-2	0	0	+ 1223/160	0	+ 47 273/4608	0	0
-1	0	0	+ 81/40	0	+ 117 649/46 080	0	0
+1	0	0	- 27/80	0	- 16 807/46 080	0	0
+2	0	0	- 9/80	0	- 2401/23 040	0	0
+3	0	0	+ 9/80	0	+ 343/3072	0	0
-2	2	+ 345/16	- 10 569/160	+ 69 251/1920	- 5 394 109/46 080	+ 42 037/720	+ 3 306 951/35 840
-1	2	+ 209/16	- 887/20	+ 78 077/3840	- 2 228 929/30 720	+ 17 807/576	+ 3 313 213/71 680
0	2	+ 115/16	- 2049/80	+ 9893/960	- 889 303/23 040	+ 42 037/2880	+ 367 439/17 920
+1	2	+ 27/8	- 189/16	+ 16 807/3840	- 1 495 823/92 160	+ 256/45	+ 531 441/71 680
+2	2	+ 9/8	- 261/80	+ 2401/1920	- 12 005/3072	+ 64/45	+ 59 049/35 840
		e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>6</sup>	-	e <sup>7</sup>	-
-2	1	+ 243/20	- 729/35	+ 823 543/46 080	-	+ 8192/315	-
-1	1	+ 899/160	- 6617/560	+ 355 081/46 080	-	+ 47 259/4480	-
0	1	+ 81/40	- 162/35	+ 117 649/46 080	-	+ 1024/315	-
+1	1	+ 27/80	- 81/140	+ 16 807/46 080	-	+ 128/315	-
+2	1	- 9/40	+ 27/35	- 2401/9216	-	- 32/105	-

Таблица II.

Коэффициенты разложений S<sub>k</sub><sup>n, m</sup> по степеням эксцентриситета.  
(Стр. 225).

n	m	k=1				k=2			
		e <sup>0</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>
-2	1	+ 1	- 5/8	- 11/192	- 457/9216	+ 2	- 5/3	+ 1/6	- 4/45
-1	1	+ 1	- 7/8	+ 3/64	- 199/9216	+ 3/2	- 5/3	+ 35/96	- 13/240
0	1	+ 1	- 7/8	+ 17/192	- 271/9216	+ 1	- 7/6	+ 1/3	- 19/360
+1	1	+ 1	- 5/8	- 11/192	- 457/9216	+ 1/2	- 5/12	+ 1/24	- 1/45
+2	1	+ 1	- 1/8	- 25/64	- 613/9216	0	+ 1/3	- 7/24	+ 3/80
+3	1	+ 1	+ 5/8	- 151/192	- 1387/9216	- 1/2	+ 5/6	- 17/48	+ 47/2440
-2	3	0	+ 7/8	- 85/384	- 237/5120	- 2	+ 9/2	- 103/60	+ 2/15
-1	3	0	+ 13/8	- 329/384	- 2009/15360	- 5/2	+ 13/2	- 1709/480	+ 13/40
0	3	0	+ 21/8	- 243/128	- 339/5120	- 3	+ 33/4	- 111/20	+ 13/15
+1	3	0	+ 31/8	- 1213/384	+ 143/1024	- 7/2	+ 75/8	- 821/120	+ 22/15
+2	3	0	+ 43/8	- 1637/384	+ 3397/15360	- 4	+ 19/2	- 791/120	+ 37/24
		e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>0</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>
-2	2	- 1	+ 5/12	+ 9/128	+ 1321/23040	+ 1	- 7/2	+ 89/48	- 211/2440
-1	2	- 3/2	+ 25/24	+ 15/256	+ 971/15360	+ 1	- 4	+ 47/16	- 29/72
0	2	- 2	+ 5/3	- 5/64	+ 151/2880	+ 1	- 4	+ 163/48	- 527/720
+1	2	- 5/2	+ 49/24	- 35/256	+ 3941/46080	+ 1	- 7/2	+ 35/12	- 131/180
+2	2	- 3	+ 23/12	+ 19/128	+ 371/2560	+ 1	- 5/2	+ 3/2	- 73/360

(Продолжение)

n	m	k = 3				k = 4			
		e <sup>0</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>
-2	1	0	+ 27/8	- 459/128	+ 4887/5120	0	+ 16/3	- 104/15	+ 26/9
-1	1	0	+ 17/8	- 367/128	+ 5489/5120	0	+ 71/24	- 1129/240	+ 1177/480
0	1	0	+ 9/8	- 207/128	+ 3681/5120	0	+ 4/3	- 34/15	+ 121/90
+1	1	0	+ 3/8	- 51/128	+ 543/5120	0	+ 1/3	- 13/30	+ 13/72
+2	1	0	- 1/8	+ 53/128	- 253/1024	0	- 1/6	+ 29/60	- 107/240
+3	1	0	- 3/8	+ 81/128	- 1683/5120	0	- 7/24	+ 131/240	- 203/576
-2	3	+1	- 17/2	+ 951/64	- 38 947/5120	+4	- 24	+ 241/6	- 5309/210
-1	3	+1	- 9	+ 1143/64	- 11 689/1024	+ 7/2	- 179/8	+ 2009/48	- 103 781/3360
0	3	+1	- 9	+ 1215/64	- 71 813/5120	+ 3	- 39/2	+ 155/4	- 26 843/840
+1	3	+1	- 17/2	+ 1143/64	- 72 131/5120	+ 5/2	- 63/4	+ 757/24	- 15 387/560
+2	3	+1	- 15/2	+ 927/64	- 56 599/5120	+ 2	- 23/2	+ 65/3	- 31 013/1680
			e	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>
-2	2	+3	- 69/8	+ 3717/640	- 213/160	+ 13/2	- 55/3	+ 10 787/720	-
-1	2	+ 5/2	- 131/16	+ 8879/1280	- 5037/2560	+ 19/4	- 121/8	+ 10 613/720	-
0	2	+2	- 27/4	+ 2061/320	- 25 929/11 520	+ 13/4	- 259/24	+ 8369/720	-
+1	2	+ 3/2	- 75/16	+ 5709/1280	- 4353/2560	+ 2	- 19/3	+ 247/36	-
+2	2	+1	- 19/8	+ 1087/640	- 59/128	+ 1	- 5/2	+ 763/360	-

(Продолжение)

n	m	k = 5			k = 6		
		e <sup>2</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>
-2	1	0	+ 3125/384	- 115 625/9216	0	+ 899/160	- 817/70
-1	1	0	+ 523/128	- 69 023/9216	0	+ 243/20	- 1215/56
0	1	0	+ 625/384	- 29 375/9216	0	+ 81/40	- 2511/560
+1	1	0	+ 125/384	- 4625/9216	0	+ 27/80	- 135/224
+2	1	0	- 25/128	+ 5275/9216	0	- 9/40	+ 387/560
+3	1	0	- 95/384	+ 4765/9216	0	- 9/40	+ 117/224
-2	1	+ 85/8	- 1355/24	+ 98 525/1024	+ 47/2	- 239/2	- 33 951/160
-1	3	+ 67/8	- 2279/48	+ 274 345/3072	+ 17	- 2949/32	+ 57 213/320
0	3	+ 51/8	- 593/16	+ 75 643/1024	+ 47/4	- 525/8	+ 43 041/320
+1	3	+ 37/8	- 635/24	+ 54 765/1024	+ 61/8	- 677/16	+ 56 487/640
+2	3	+ 25/8	- 50/3	+ 98 875/3072	+ 9/2	- 189/8	+ 3807/80
			e <sup>3</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>
-2	2	+ 295/24	- 13 745/384	+ 276 475/8064	+ 345/16	- 10569/160	-
-1	2	+ 389/48	- 20 267/768	+ 104 551/3584	+ 209/16	- 887/20	-
0	2	+ 59/12	- 3221/192	+ 326 101/16 128	+ 115/16	- 2049/80	-
+1	2	+ 125/48	- 6625/768	+ 338 875/32 256	+ 27/8	- 189/16	-
+2	2	+ 25/24	- 1075/384	+ 925/336	+ 9/8	- 261/80	-

(Продолжение)

n	m	k = 7		k = 8		k = 9	k = 10
		e <sup>4</sup>	e <sup>6</sup>	e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>6</sup>	e <sup>7</sup>
-2	1	0	+ 823 543 46 080	0	+ 8192 315	0	0
-1	1	0	+ 355 081 46 080	0	+ 47 259 4480	0	0
0	1	0	+ 117 649 46 080	0	+ 1024 315	0	0
+1	1	0	+ 16 807 46 080	0	+ 128 315	0	0
+2	1	0	2401 9216	0	32 105	0	0
+3	1	0	9947 46 080	0	68 315	0	0
-2	3	+ 17 969 384	- 301 973 1280	+ 2611 30	- 39 893 90	+ 790 053 5120	+ 532 345 2016
-1	3	+ 12 085 384	- 32 419 192	+ 26 371 480	- 1 710 983 5760	+ 471 527 5120	+ 604 279 4032
0	3	+ 2567 128	- 35 563 320	+ 2611 80	- 87 599 480	+ 263 351 5120	+ 106 469 1344
+1	3	+ 4553 384	- 84 109 1280	+ 8551 480	- 288 221 2880	+ 26 809 1024	+ 305 593 8064
+2	3	+ 2401 384	- 127 253 3840	+ 128 15	- 416 9	+ 59 049 5120	+ 15 62 5 1008
			e <sup>5</sup>	e <sup>7</sup>	e <sup>6</sup>	-	e <sup>7</sup>
-2	2	+ 69 251 1920	- 5 394 109 46 080	+ 42 037 720	-	+ 3 306 951 35 840	-
-1	2	+ 78 077 3840	- 2 228 929 30 720	+ 17 807 576	-	+ 3 313 213 71 680	-
0	2	+ 9893 960	- 889 303 23 040	+ 42 037 2880	-	+ 367 439 17 920	-
+1	2	+ 16 807 3840	- 1 495 823 92 160	+ 256 45	-	+ 531 441 71 680	-
+2	2	+ 2401 1920	- 12 005 3072	+ 64 45	-	+ 59 049 35 840	-

Таблица III.  
Функция Энке f(q) и ее логарифм.  
(Стр. 205).

q	f		lg f		q
	q > 0	q < 0	q > 0	q < 0	
0.000	3.0000	3.0000	0.47712	0.47712	0.000
0.001	2.9925 <sup>75</sup>	3.0075 <sup>75</sup>	0.47604 <sup>108</sup>	0.47821 <sup>109</sup>	0.001
0.002	2.9851 <sup>74</sup>	3.0151 <sup>76</sup>	0.47495 <sup>109</sup>	0.47930 <sup>109</sup>	0.002
0.003	2.9777 <sup>74</sup>	3.0227 <sup>76</sup>	0.47387 <sup>108</sup>	0.48039 <sup>109</sup>	0.003
0.004	2.9703 <sup>74</sup>	3.0303 <sup>76</sup>	0.47280 <sup>107</sup>	0.48148 <sup>109</sup>	0.004
0.005	2.9629 <sup>74</sup>	3.0379 <sup>76</sup>	0.47172 <sup>108</sup>	0.48258 <sup>110</sup>	0.005
0.006	2.9556 <sup>73</sup>	3.0456 <sup>77</sup>	0.47065 <sup>107</sup>	0.48368 <sup>110</sup>	0.006
0.007	2.9483 <sup>73</sup>	3.0534 <sup>78</sup>	0.46958 <sup>107</sup>	0.48478 <sup>110</sup>	0.007
0.008	2.9411 <sup>72</sup>	3.0611 <sup>77</sup>	0.46851 <sup>107</sup>	0.48588 <sup>110</sup>	0.008
0.009	2.9339 <sup>72</sup>	3.0689 <sup>78</sup>	0.46744 <sup>107</sup>	0.48699 <sup>111</sup>	0.009
0.010	2.9267 <sup>72</sup>	3.0768 <sup>79</sup>	0.46638 <sup>106</sup>	0.48810 <sup>111</sup>	0.010
0.011	2.9196 <sup>71</sup>	3.0847 <sup>79</sup>	0.46532 <sup>106</sup>	0.48921 <sup>111</sup>	0.011
0.012	2.9125 <sup>71</sup>	3.0926 <sup>79</sup>	0.46426 <sup>106</sup>	0.49032 <sup>111</sup>	0.012
0.013	2.9054 <sup>71</sup>	3.1005 <sup>79</sup>	0.46320 <sup>106</sup>	0.49144 <sup>112</sup>	0.013
0.014	2.8983 <sup>71</sup>	3.1085 <sup>80</sup>	0.46215 <sup>105</sup>	0.49256 <sup>112</sup>	0.014
0.015	2.8913 <sup>70</sup>	3.1166 <sup>81</sup>	0.46109 <sup>106</sup>	0.49368 <sup>112</sup>	0.015
0.016	2.8843 <sup>70</sup>	3.1247 <sup>81</sup>	0.46004 <sup>105</sup>	0.49480 <sup>112</sup>	0.016
0.017	2.8774 <sup>69</sup>	3.1328 <sup>81</sup>	0.45900 <sup>104</sup>	0.49593 <sup>113</sup>	0.017
0.018	2.8705 <sup>69</sup>	3.1409 <sup>81</sup>	0.45795 <sup>105</sup>	0.49706 <sup>113</sup>	0.018
0.019	2.8636 <sup>69</sup>	3.1491 <sup>82</sup>	0.45691 <sup>104</sup>	0.49819 <sup>113</sup>	0.019
0.020	2.8567 <sup>69</sup>	3.1573 <sup>82</sup>	0.45586 <sup>105</sup>	0.49932 <sup>113</sup>	0.020
0.021	2.8499 <sup>68</sup>	3.1656 <sup>83</sup>	0.45482 <sup>104</sup>	0.50046 <sup>114</sup>	0.021
0.022	2.8431 <sup>68</sup>	3.1739 <sup>83</sup>	0.45379 <sup>103</sup>	0.50159 <sup>113</sup>	0.022
0.023	2.8363 <sup>68</sup>	3.1823 <sup>84</sup>	0.45275 <sup>104</sup>	0.50274 <sup>115</sup>	0.023
0.024	2.8296 <sup>67</sup>	3.1907 <sup>84</sup>	0.45172 <sup>103</sup>	0.50388 <sup>114</sup>	0.024
0.025	2.8229 <sup>67</sup>	3.1991 <sup>84</sup>	0.45069 <sup>103</sup>	0.50503 <sup>115</sup>	0.025
0.026	2.8162 <sup>67</sup>	3.2076 <sup>85</sup>	0.44966 <sup>103</sup>	0.50618 <sup>115</sup>	0.026
0.027	2.8095 <sup>67</sup>	3.2161 <sup>85</sup>	0.44863 <sup>103</sup>	0.50733 <sup>115</sup>	0.027
0.028	2.8029 <sup>66</sup>	3.2246 <sup>85</sup>	0.44761 <sup>102</sup>	0.50848 <sup>115</sup>	0.028
0.029	2.7963 <sup>66</sup>	3.2332 <sup>86</sup>	0.44659 <sup>102</sup>	0.50964 <sup>116</sup>	0.029
0.030	2.7897 <sup>66</sup>	3.2419 <sup>87</sup>	0.44557 <sup>102</sup>	0.51080 <sup>116</sup>	0.030

Таблица IV.

Различные постоянные величины, употребляемые при вычислении возмущений.

	Число	Логарифм
Радиус круга в градусах . . . . .	57°29577951	1.758 1226 324
"    "    "    минутах . . . . .	3 437' 746771	3.536 2738 828
"    "    "    секундах . . . . .	206 264'' 806247	5.314 4251 332
Гауссова постоянная . . . . .	$k$ 0.017 20209895	8.235 5814 414—10
	$k''$ 3548'' 18761	3.550 0066
	$k^2$ 0.000 295 9122	6.471 1629—10

Интервал $w =$		$10^d$	$20^d$	$40^d$	$80^d$
П л а н е т а	$\frac{1}{m}$	Верхняя строка дает $\lg (wk''m)$ Нижняя строка дает $\lg (10^7 w^2 k^2 m)$			
		Меркурий . . . . .	6 000 000	7.7719—10 8.6930—10	8.0729—10 9.2951—10
Венера . . . . .	408 000	8.9394—10 9.8605—10	9.2404—10 0.4626	9.5414—10 1.0646	9.8424—10 1.6667
Земля + Луна . . . . .	329 390	9.0323—10 9.9534—10	9.3333—10 0.5555	9.6344—10 1.1576	9.9354—10 1.75963
Марс . . . . .	3 093 500	8.0596—10 8.9807—10	8.8606—10 9.5828—10	8.6616—10 0.1848	8.9626—10 0.7869
Юпитер . . . . .	1 047.355	1.529 913 2.451 069	1.830 943 3.053 129	2.131 973 3.655 189	2.433 003 4.257 249
Сатурн . . . . .	3501.6	1.00574 1.92690	1.30677 2.52896	1.60780 3.13102	1.90883 3.73308
Уран . . . . .	22 869	0.1908 1.1119	0.4918 1.7140	0.7928 2.3160	1.0938 2.9181
Нептун . . . . .	19 700	0.2556 1.1767	0.5566 1.7788	0.8576 2.3808	1.1586 2.9829
Плутон . . . . .	350 000	— —	— —	— —	9.909—10 1.733
$w^2 k^2 =$		0.029 5912	0.118 365	0.473 460	1.893 838
$\lg (w^2 k^2) =$		8.471 163—10	9.073 223—10	9.675 283—10	0.277 343

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие . . . . . 3

Часть первая.

Основы теории возмущенного движения.

Глава I. Проблема  $n$  тел. . . . . 5

§§ 1. Интегралы проблемы  $n$  тел . . . . . 5

§§ 2. Проблема  $n$  тел приводится к интегрированию системы  $6n - 12$  порядка и двум квадратурам . . . . . 7

§§ 3. Уравнения относительного движения . . . . . 9

§§ 4. Вторая форма уравнений относительного движения . . . . . 11

§§ 5. Формула Якоби . . . . . 14

§§ 6. Неизменная плоскость Лапласа . . . . . 16

Глава II. Уравнения движения в полярных координатах. . . . . 19

§§ 7. Уравнения движения в цилиндрических координатах . . . . . 19

§§ 8. Уравнения Клеро-Лапласа . . . . . 20

§§ 9. Применение уравнений Клеро-Лапласа к изучению движения в сопротивляющейся среде . . . . . 23

Глава III. Метод вариации произвольных постоянных. . . . . 27

§§ 10. Оскулирующие элементы . . . . . 27

§§ 11. Дифференциальные уравнения, определяющие оскулирующие элементы . . . . . 29

§§ 12. Сопоставление формул . . . . . 35

§§ 13. Уравнения Лагранжа . . . . . 37

§§ 14. Другой вывод уравнений Лагранжа . . . . . 40

§§ 15. Возмущения элементов . . . . . 45

§§ 16. Долгопериодические возмущения . . . . . 48

§§ 17. Вековые возмущения . . . . . 50

§§ 18. Способ Пуассона . . . . . 51

Глава IV. Канонические элементы. . . . . 54

§§ 19. Канонические уравнения . . . . . 54

§§ 20. Канонические преобразования . . . . . 58

§§ 21. Способ Якоби для решения канонических систем . . . . . 61

§§ 22. Применение метода вариации произвольных постоянных к каноническим элементам . . . . . 62

§§ 23. Канонические элементы эллиптического движения . . . . . 63

§§ 24. Применение канонических элементов к выводу уравнений Лагранжа . . . . . 67

§§ 25. Канонические элементы Делоне и Пуанкаре . . . . . 69

Глава V. Применение канонических переменных к изучению возмущений. . . . . 71

§§ 26. Каноническая форма уравнений относительного движения . . . . . 71

§§ 27. Интегралы площадей . . . . . 74

§§ 28. Выражение прямоугольных координат через канонические элементы . . . . . 75

§§ 29. Выражение пертурбационной функции через канонические переменные . . . . . 79

§§ 30. Теорема Пуанкаре о ранге . . . . . 81

§§ 31. Теорема Пуассона . . . . . 86

§§ 32. Теорема Пуанкаре о классе . . . . . 89

§§ 33. Возмущения наименьшего класса . . . . . 91

§§ 34. Метод Делоне-Хилла для вычисления долгопериодических возмущений . . . . . 94

Глава VI. Некоторые частные случаи проблемы трех тел.	
§ 35. Введение . . . . .	97
§ 36. Уравнения, определяющие лагранжевы движения. Случай неколлинеарного движения . . . . .	98
§ 37. Случай коллинеарного лагранжева движения . . . . .	103
Глава VII. Ограниченная проблема трех тел.	
§ 38. Уравнения движения. Интеграл Якоби . . . . .	107
§ 39. Поверхности нулевой скорости . . . . .	108
§ 40. Особые точки поверхностей нулевой скорости . . . . .	112
§ 41. Периодические решения ограниченной проблемы трех тел . . . . .	117
§ 42. Движение вблизи коллинеарных точек либрации . . . . .	119
§ 43. Движение вблизи треугольных точек либрации . . . . .	124
§ 44. Применение нормальных координат . . . . .	126
§ 45. Критерий Тиссерана . . . . .	129
<i>Часть вторая.</i>	
Численное интегрирование дифференциальных уравнений и его применение к изучению движения светил.	
Глава VIII. Численное интегрирование дифференциальных уравнений.	
§ 46. Введение . . . . .	132
§ 47. Выражение производных через разности . . . . .	133
§ 48. Интегрирование уравнений первого порядка. Разностные методы . . . . .	136
§ 49. Метод квадратур для уравнений первого порядка . . . . .	138
§ 50. Вторая форма метода квадратур для уравнений первого порядка . . . . .	140
§ 51. Пример интегрирования уравнения первого порядка . . . . .	142
§ 52. Интегрирование уравнений второго порядка. Вычисление интеграла, заданного двумя значениями . . . . .	146
§ 53. Другой случай вычисления интеграла уравнения второго порядка, заданного двумя значениями . . . . .	150
§ 54. Вычисление интеграла, определенного начальной точкой и начальной скоростью . . . . .	153
§ 55. Пример численного интегрирования уравнения второго порядка . . . . .	156
§ 56. Формулы квадратур . . . . .	159
§ 57. Обоснование способа последовательных приближений . . . . .	162
§ 58. Различные приемы для уменьшения числа последовательных приближений . . . . .	163
§ 59. О формуле квадратур Лапласа и связанных с ней методах численного интегрирования уравнений . . . . .	167
§ 60. О коэффициентах формул численного интегрирования . . . . .	169
Глава IX. Применение численного интегрирования к изучению невозмущенного движения.	
§ 61. Введение . . . . .	171
§ 62. Вычисление координат, определяющих положение светила в орбите . . . . .	171
§ 63. Пример вычисления орбитальных координат при помощи численного интегрирования . . . . .	173
§ 64. Вычисление эфемериды при помощи численного интегрирования уравнений движения . . . . .	175
§ 65. Другие способы для вычисления эфемериды при помощи численного интегрирования . . . . .	177
Глава X. Вычисление возмущений в элементах.	
§ 66. Общие соображения . . . . .	179
§ 67. Вычисление компонентов возмущающего ускорения . . . . .	182
§ 68. Другие способы вычисления компонентов возмущающего ускорения . . . . .	184
§ 69. Табулирование коэффициентов . . . . .	186
§ 70. Сопоставление формул . . . . .	188
§ 71. Особые случаи вычисления возмущений элементов малых планет . . . . .	190
§ 72. Некоторые особенности вычисления возмущений элементов кометных орбит . . . . .	192
§ 73. Приближенное вычисление возмущений малых планет . . . . .	195
Глава XI. Вычисление возмущений в координатах.	
§ 74. Прямое вычисление возмущенных координат (метод Коуэлла) . . . . .	198
§ 75. Сопоставление формул для применения метода Коуэлла . . . . .	200
§ 76. Метод Энке . . . . .	203

*Часть третья.*

## Аналитические методы изучения возмущенного движения.

Глава XII. Разложение координат эллиптического движения в ряды.	
§ 77. Введение . . . . .	208
§ 78. Функции Бесселя . . . . .	210
§ 79. Вычисление функций Бесселя . . . . .	213
§ 80. Разложение эксцентрической аномалии и ее функций по кратным средней аномалии . . . . .	215
§ 81. Преобразование ряда, расположенного по кратным эксцентрической аномалии, в ряд, расположенный по кратным средней аномалии . . . . .	220
§ 82. Разложение некоторых функций координат эллиптического движения . . . . .	222
§ 83. Коэффициенты Ганзена . . . . .	226
§ 84. О сходимости рядов, представляющих координаты эллиптического движения . . . . .	228
§ 85. Вычисление долготы и широты планеты . . . . .	232
Глава XIII. Разложение пертурбационной функции в ряд.	
§ 86. Введение. Разложение по степеням взаимной наклонности . . . . .	233
§ 87. Случай круговых орбит . . . . .	235
§ 88. Разложение пертурбационной функции по степеням эксцентриситетов. Метод Ньюкома . . . . .	238
§ 89. Окончательная форма разложения пертурбационной функции . . . . .	242
§ 90. Начальные члены разложения пертурбационной функции . . . . .	245
§ 91. Численные методы разложения пертурбационной функции . . . . .	247
§ 92. Метод Ганзена . . . . .	249
Глава XIV. Коэффициенты Лапласа.	
§ 93. Вычисление коэффициентов Лапласа при помощи рядов . . . . .	253
§ 94. Рекуррентные соотношения между коэффициентами Лапласа . . . . .	256
§ 95. Выражение коэффициентов Лапласа определенными интегралами . . . . .	258
§ 96. Вычисление производных коэффициентов Лапласа. Метод Ньюкома . . . . .	260
Глава XV. Аналитические методы определения возмущений элементов.	
§ 97. Преобразование дифференциальных уравнений, определяющих элементы орбиты . . . . .	266
§ 98. Возмущения элементов . . . . .	269
§ 99. Возмущения элементов (второй порядок относительно масс) . . . . .	272
§ 100. Переход от возмущения в элементах к возмущениям в координатах. Построение таблиц . . . . .	273
§ 101. Вычисление вековых возмущений по методу Гаусса . . . . .	277
§ 102. Дифференциальные уравнения, данные Лагранжем для определения вековых возмущений . . . . .	280
§ 103. Тригонометрические выражения вековых возмущений . . . . .	285
§ 104. Вековые возмущения больших планет . . . . .	287
§ 105. Вековые возмущения малых планет . . . . .	291
Глава XVI. Аналитические методы определения возмущений координат.	
§ 106. Уравнения возмущенного движения в ганзеновских координатах . . . . .	293
§ 107. Переход к полярным координатам в плоскости оскулирующей орбиты . . . . .	297
§ 108. Случай невозмущенного движения . . . . .	298
§ 109. Метод Лапласа-Ньюкома. Возмущения радиуса-вектора . . . . .	299
§ 110. Метод Лапласа-Ньюкома. Возмущения долготы. Вычисление гелиоцентрических координат . . . . .	303
§ 111. Первоначальная форма метода Лапласа . . . . .	304
§ 112. Вычисление возмущений прямоугольных координат . . . . .	306
§ 113. Метод Хилла . . . . .	308
§ 114. Основные идеи метода Ганзена . . . . .	312
§ 115. Вычисление производных пертурбационной функции по координатам . . . . .	314
<i>Часть четвертая.</i>	
Теория движения Луны.	
Глава XVII. Основы теории движения Луны. Теория Лапласа.	
§ 116. Общий характер движения Луны . . . . .	317
§ 117. Краткий исторический обзор развития теории движения Луны . . . . .	320
§ 118. Дифференциальные уравнения основной проблемы . . . . .	322

§ 119. Первое приближение . . . . .	325
§ 120. Вычисление координат Солнца . . . . .	328
§ 121. Об интегрировании уравнений возмущенного движения во втором и следующих приближениях . . . . .	331
§ 122. Уравнения, определяющие наибольшие периодические неравенства . . . . .	332
§ 123. Второе приближение . . . . .	335
§ 124. Зависимость между долготой и временем во втором приближении . . . . .	337
§ 125. Вековое ускорение среднего движения Луны . . . . .	340
§ 126. Периодические неравенства долготы . . . . .	343
§ 127. Выражение радиуса-вектора и широты в функции времени . . . . .	345
§ 128. Дальнейшее развитие теории Лапласа . . . . .	346
Глава XVIII. Теория движения Луны, основанная на работах Хилла.	
§ 129. Введение . . . . .	350
§ 130. Уравнения движения . . . . .	351
§ 131. Преобразование Хилла . . . . .	353
§ 132. Вариационная кривая . . . . .	355
§ 133. Вычисление коэффициентов . . . . .	358
§ 134. Общие выражения коэффициентов . . . . .	361
§ 135. Орбиты бесконечно близкие к вариационной кривой . . . . .	364
§ 136. Некоторые свойства уравнения Хилла . . . . .	370
§ 137. Применение способа неопределенных коэффициентов . . . . .	373
§ 138. Вычисление определителя $\Delta(0)$ . . . . .	376
§ 139. Вычисление коэффициентов . . . . .	378
§ 140. Важнейшие неравенства движения Луны . . . . .	379
§ 141. Неравенства, зависящие от эксцентриситета лунной орбиты . . . . .	384
§ 142. Неравенства, зависящие от наклонности лунной орбиты . . . . .	386
Таблицы.	
Таблица I. Коэффициенты разложений $C_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета . . . . .	391
Таблица II. Коэффициенты разложений $S_k^{n,m}$ по степеням эксцентриситета . . . . .	395
Таблица III. Функция Энке $f(q)$ и ее логарифм . . . . .	399
Таблица IV. Различные постоянные величины, употребляемые при вычислении возмущений . . . . .	400

Ответственный редактор И. М. Хентов      Технический редактор Р. В. Эмдина  
 Корректор И. И. Поляков  
 Сдано в набор 13/X 1936 г.    Подписано к печати 9/III 1937 г.    Формат бум. 72×105<sup>1/16</sup>  
 Бум. листов 25<sup>1/4</sup>.    Тип. зн. в 1 бум. л. 62.000  
 Леноблгорлит № 609.    Тираж 2.200.    Уч.-авт. л. 30,04    Заказ № 6250.