

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной конференции
ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2014

14–18 апреля 2014 г.

LXVII

Санкт-Петербург
Издательство РГПУ им. А. И. Герцена
2014

ББК 22.1.431
Н 47

*Печатается по решению
Оргкомитета конференции*

Редакционная коллегия: д. ф. -м. н., профессор **Зайцев В. Ф.**
д. ф. -м. н., профессор **Будаев В. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Флегонтов А. В.**

Рецензенты: д. ф. -м. н., профессор **Ханин С. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Широков Н. А.**

Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2014. Материалы научной конференции, 14–18 апреля 2014 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 256 с.

ISBN 978–5–8064–1960–7

Материалы 67-ой научной конференции “Герценовские чтения”, проходившей при кафедре математического анализа и кафедре информационных систем и программного обеспечения РГПУ им. А. И. Герцена 14–18 апреля 2014 г. Представленные статьи подготовлены по наиболее содержательным докладам четырех основных секций: “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений”, “Современные проблемы теории функций и функционального анализа”, “Актуальные проблемы математического образования”, “Актуальные информационные системы и технологии моделирования”.

Результаты работ рекомендуется использовать при чтении спецкурсов, а также как материал для научной работы аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов математических факультетов.

ББК 22.1.431

ISBN 978–5–8064–1960–7

© Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014
© Коллектив авторов, 2014

История и современность

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА ПОСРЕДСТВОМ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Виденский В. С.

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

Videnskii V. S. On a proof of the Weierstrass theorem by Bernstein polynomials. In 1912 S. N. Bernstein published the paper, in which he introduced his famous polynomials $B_n f$, and found a very elegant proof of the Weierstrass approximation theorem by them. In our paper we discuss the history of this investigation.

С. Н. Бернштейн при решении 19-ой проблемы Гильберта об эллиптических уравнениях с частными производными пришёл к задаче о разложении любой $f \in C[0, 1]$ в некоторые двойные ряды по x^k и $(1-x)^m$ (1903 г.). В дальнейшем (1912 г.), продолжая исследование этого вопроса, С. Н. Бернштейн изобрёл свои знаменитые полиномы $B_n f$, посредством которых дал новое доказательство аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей. В нашей статье излагается история этих исследований¹.

1. Карл Вейерштрасс открыл свою фундаментальную аппроксимационную теорему в 1885 году. В году, когда ему минуло 70 лет. Он несомненно считал это даром судьбы. В математике, как и в музыке и в поэзии, крупные творческие удачи, как правило, достаются молодым, энергичным и дерзновенным.

В большинстве книг по теории приближения функций приводится несколько различных доказательств теоремы Вейерштрасса, данных разными авторами. Статья Вейерштрасса [1] была написана в его обычном стиле — понятно и отчетливо. Наметим её план в общих чертах. Если $f \in C[a, b]$, то она продолжается на всю вещественную ось равенствами $f(x) = f(a)$ при $x \leq a$, $f(x) = f(b)$ при $x \geq b$. Затем вводится свёртка

$$W_n(f; x) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-n(t-x)^2} dt. \quad (1.1)$$

При достаточно больших n частные суммы рядов

$$W_n(f; x) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (-1)^k \frac{n^k (t-x)^{2k}}{k!} dt \quad (1.2)$$

и есть приближающие полиномы.

¹Этот текст соответствует моему докладу, прочтенному 7 ноября 2013 года на семинаре по истории математики в ПОМИ. Статья представляет собой некоторую вариацию прошлогодней публикации [6].

В статье [1] была приведена также вторая теорема о приближении непрерывных 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами. Её доказательство было сложнее, чем первой. Впрочем, в дальнейшем выяснилось, что обе теоремы эквивалентны — каждая из них выводится из другой заменой переменной.

В конце своей статьи Вейерштрасс выразил надежду, что молодые математики заинтересуются этой темой и найдут явные формулы для приближающих полиномов.

Среди тех, кто откликнулся на этот призыв, были такие выдающиеся математики, как А. Лебег, Л. Фейер, Ш. Валле Пуссен, Э. Ландау и С. Бернштейн. Они дали ряд новых оригинальных доказательств аппроксимационной теоремы Вейерштрасса и вывели различные явные формулы для приближающих полиномов.

Интересно, что по аналогии с операторами Вейерштрасса W_n нетрудно построить аппроксимирующие операторы, которые будут полиномами, т. е. искомыми явными формулами. Это заметили в 1908 г. почти одновременно и независимо Ш. Валле Пуссен и Э. Ландау. Оказалось, что вместо функции

$$e^{-n(t-x)^2} = \left(1 - (t-x)^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t-x)^{2k}}{k!} \right)^n \quad (1.3)$$

достаточно взять в качестве ядра свёртки не весь ряд (1.3), а только функцию

$$(1 - (t-x)^2)^n \quad (1.4)$$

и построить операторы по формуле

$$L_n(f; x) = k_n \int_a^b f(t) (1 - (t-x)^2)^n dt. \quad (1.5)$$

2. Возможно, что кое-кто из опубликовавших новые доказательства аппроксимационной теоремы Вейерштрасса нашли их не специально, но попутно в ходе собственных исследований, так или иначе связанных с приближением функций. В частности, так случилось с С. Н. Бернштейном, который изобрёл свои знаменитые полиномы $B_n f$, работая над 19-ой проблемой Гильберта о структуре решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа. Мы остановимся на подробностях в п. 3 и в п. 5.

Для функции $f \in C[0, 1]$ полиномы Бернштейна определяются так:

$$B_n(f(t); x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.1)$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (2.2)$$

В 1912 г. в «Сообщениях Харьковского математического общества» С. Н. Бернштейн [2] в очень краткой заметке «Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей» опубликовал такую теорему.

Теорема 1. Если $f \in C[0, 1]$, то последовательность полиномов $B_n f$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к f равномерно на $[0, 1]$.

Для доказательства применяются издавна известные в теории вероятностей тождества

$$\sum_{k=0}^n p_{nk}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1, \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{nk}(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = x, \quad (2.4)$$

и тождество, которое из них выводится дифференцированием,

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{n}. \quad (2.5)$$

Действительно, пусть $0 < x < 1$. Имеем

$$p'_{nk}(x) = \frac{n}{x(1-x)} \left(\frac{k}{n} - x \right) p_{nk}(x). \quad (2.6)$$

В силу (2.3) и (2.4)

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right) p_{nk}(x) = 0. \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.7), получаем (2.5).

Затем применяется неравенство Чебышёва, которое состоит в следующем: Пусть $0 < \delta < 1$; тогда, благодаря (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} p_{nk}(x) &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 p_{nk}(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{\delta^2 n} \leq \frac{1}{4n\delta^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Теорема 1 следует из (2.8). Пусть $f \in C[0, 1]$; $|f(x)| \leq M$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < 1$) и выбираем δ ($0 < \delta < 1$) по условию, что при $|x' - x''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.9)$$

Покажем, что при $n > M/\varepsilon\delta^2$ справедливо неравенство

$$\left| B_n(f(t); x) - f(x) \right| < \varepsilon, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.10)$$

Действительно, учитывая (2.8) и (2.9), имеем

$$\begin{aligned} \left| B_n(f(t); x) - f(x) B_n(1; x) \right| &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| p_{nk}(x) = \\ &= \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| p_{nk}(x) + \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| p_{nk}(x) \leq \frac{2M}{4n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Как мы видим, это доказательство не использует непосредственно терминологию теории вероятностей. Однако, оно использует по существу и в деталях идеи С. Н. Бернштейна. Впервые в такой форме оно было приведено в задачнике Г. Поля и Г. Сегё. Теперь эта манера изложения стала обычной.

Бесспорно, это прекрасное, простое и ясное доказательство. Вместе с тем абсолютно загадочно, как оно могло быть изобретено. В заметке [2] С. Н. Бернштейн не даёт никакого намёка на путь, который привёл его к полиномам $B_n f$.

В 1950 году С. Н. Бернштейну минуло 70 лет. По инициативе академиков П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова и И. Г. Петровского, поддержанной президентом Академии наук С. Н. Вавиловым, Академия наук постановила издать Собрание сочинений С. Н. Бернштейна под его редакцией.

Первый том сочинений вышел в свет весной 1952 г. Заметка [2], таким образом, была напечатана вторично, спустя ровно 40 лет. Редактор этого тома профессор Д. А. Райков рискнул спросить С. Н. Бернштейна, какова история изобретения таких оригинальных полиномов $B_n f$. Но Сергей Натанович не ответил по существу, а просто отшутился. Он сказал, что частые студенческие забастовки в 1911 году предоставили достаточно времени для математических размышлений.

3. В каждой шутке есть доля правды. Попробуем эту крупицу истины уловить в нашем случае. Мы увидим, что изобретение полиномов Бернштейна было результатом не мгновенного вдохновения, а что путь к ним был многолетним и нелёгким. Однако, разумеется, в конце пути не обошлось без вдохновения и глубокой интуиции.

Окончив в Париже университет (Сорбонна), С. Н. Бернштейн переехал в Геттинген. В поисках темы для самостоятельной научной работы он начал посещать прославленный семинар Гильберта и по личному его совету занялся 19-ой проблемой. Вот её содержание. Рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F(r, s, t, p, q, u, x, y) = 0, \quad (3.1)$$

где функция $u = u(x, y)$ — искомое решение уравнения. Уравнение (3.1) называется эллиптическим, если

$$4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0. \quad (3.2)$$

В 19-ой проблеме Гильберта предлагается доказать, что, если F аналитическая функция всех восьми переменных и если решение $u = u(x, y)$ имеет непрерывными все частные производные второго порядка, то функция u является аналитической.

Уравнение Лапласа

$$r + t = 0 \quad (3.3)$$

является частным случаем уравнения (3.1). Ещё Коши, применяя метод последовательных приближений, доказал аналитичность гармонических функций, т. е. решений уравнения (3.3). Этот метод стал ведущим частным приёмом при исследовании решений общего уравнения (3.1). Сначала в 1890 г. этот способ применил Пикар к уравнению

$$r + t + ap + bq + cu = 0, \quad (3.4)$$

где a , b , c аналитические функции переменных x , y , и доказал, что все решения будут аналитическими при начальных условиях, что все частные производные функции u второго порядка непрерывны.

С. Н. Бернштейн по примеру своих знаменитых предшественников начал исследование проблем Гильберта для уравнения (3.1) применением метода последовательных приближений. По-видимому, надеясь, с одной стороны, на плодотворность метода, но, с другой стороны, бесспорно не сомневаясь, что на этом пути встретятся большие трудности.

Действительно, препятствия незамедлительно появились. Переход от декартовых координат к полярным координатам в случае уравнений (3.3) и (3.4) приводил к степенным рядам, т. е. к вопросам известным и хорошо развитым. А в общем случае уравнения (3.1) та же процедура привела не к степенным рядам, а двойным рядам

$$f(x) = \sum_{l,m} a_{lm} x^l (1-x)^m, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3.5)$$

С. Н. Бернштейн называл ряд (3.5) нормальным, если он сходилась абсолютно и равномерно. В исследованиях С. Н. Бернштейна нормальные ряды играют существенную роль в решении 19-ой проблемы Гильберта.

Было естественно требовать в качестве начальных условий чтобы решение u уравнения (3.1) имело непрерывными все вторые частные производные. Для этого достаточно было доказать, что любая $f \in C[0, 1]$ раскладывается в нормальный ряд. Но долгие годы это установить не удавалось, и приходилось считать функцию u более гладкой.

В п. 5 будет доказано при помощи полиномов Бернштейна, что любая $f \in C[0, 1]$ раскладывается в нормальный ряд.

Среди частных сумм ряда (3.5) имеются такие

$$\sum_{l+m=n} a_{lm} x^l (1-x)^m. \quad (3.6)$$

С некоторой натяжкой их можно было бы считать дальними предшественниками полиномов Бернштейна.

С. Н. Бернштейн в 1908 г. в харьковской магистерской диссертации [3] доказал, что дважды непрерывно дифференцируемая функция f разлагается в нормальный ряд. Для этого он применил такую формулу

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f''(t) |x-t| dt + A + Bx, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.7)$$

которая легко проверяется интегрированием по частям. Затем $|x-t|$ представляется в виде

$$|x-t| = \left(1 - (1 - (x-t)^2)\right)^{1/2} = (1+t^2)^{1/2} \left(1 - \frac{1-x^2+2xt}{1+t^2}\right)^{1/2}, \quad (3.8)$$

раскладывается в степенной ряд и подставляется в интеграл (3.7). То, что почленное интегрирование даёт нормальный ряд, требует ещё оценки полученных коэффициентов.

4. Великие математики П. Л. Чебышёв (1821–1894) и К. Вейерштрасс (1815–1897) были современниками. Каждый из них внёс выдающийся вклад в проблему приближения непрерывных на отрезке функций. Чебышёв выдвинул и развил идею наилучшего приближения данной функции полиномами фиксированной степени n (неявно предполагая, что результат будет принципиально лучше, если n выбрать достаточно большим). А Вейерштрасс установил общий факт, что любая $f \in C[a, b]$ может быть равномерно приближена как угодно хорошо полиномом достаточно высокой степени. Интересно, что ни Вейерштрасс, ни Чебышёв не сделали попытки привести обе идеи в соприкосновение.

Первый шаг к сближению обоих кругов мысли сделал в 1908 г. Ш. Валле Пуссен. Он исследовал наилучшее приближение функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ полиномами степени n . Обозначим это наилучшее приближение через $E_n|x|$. Он получил неравенства

$$\frac{A}{n \ln^3 n} < E_n|x| < \frac{B}{n}, \quad (4.1)$$

в которых нижняя и верхняя границы разных порядков. Год спустя, А. Лебег улучшил оценку снизу:

$$\frac{C}{n \ln n} < E_n|x|. \quad (4.2)$$

По инициативе Валле Пуссена в 1910 г. Бельгийская академия наук объявила конкурс на тему о наилучшем приближении функции $|x|$.

С. Н. Бернштейн со свойственной ему сосредоточенностью включился в конкурс. Он получил неравенства

$$\frac{\alpha}{n} < E_n|x| < \frac{\beta}{n} \quad (4.3)$$

и, кроме того, доказал, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nE_n|x| = \mu, \quad 0,278 < \mu < 0,282. \quad (4.4)$$

В процессе этих исследований он глубоко объединил идеи и методы Чебышёва и Вейерштрасса и построил теорию, которую назвал конструктивной теорией функций, где приведена классификация непрерывных функций f по скорости стремления $E_n f$ к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Работа была удостоена премии Бельгийской академии наук. С. Н. Бернштейн был приглашён сделать часовой доклад на Международном конгрессе в Кембридже в 1912 г. В этом докладе [4] С. Н. Бернштейн так выразил своё отношение к роли удачно выдвинутых конкретных проблем в развитии математики: «Пример задачи о наилучшем приближении функции $|x|$, предложенный Валле Пуссеном, даёт ещё одно подтверждение того факта, что хорошо поставленный частный вопрос способен быть отправной точкой для далеко идущих теорий».

5. Исследования С. Н. Бернштейна по теории приближения функций вновь привлекли его внимание к вопросу, возможно ли любую $f \in C[0, 1]$ разложить в нормальный ряд. Теперь попытка решить эту задачу удалась блестяще. Были изобретены полиномы Бернштейна (2.1) и установлены их аппроксимационные свойства, что давало положительный ответ [5] (Добавление к главе 5 харьковской докторской диссертации).

К построению полиномов Бернштейна привела простая и плодотворная мысль. Так как система функций $\{x^k(1-x)^{n-k}\}_{k=0}^n$ линейно независима, то она образует базис в пространстве полиномов степени n , и любой полином

$$P_m(x) = \sum_{\nu=0}^m \alpha_\nu x^\nu, \quad m \leq n, \quad (5.1)$$

можно однозначно представить в виде

$$P_m(x) = \sum_{\nu=0}^m \alpha_\nu x^\nu ((1-x) + x)^{n-\nu} = \sum_{k=0}^n A_{nk} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (5.2)$$

Напишем для x^ν отдельно формулу (5.2):

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^\nu ((1-x) + x)^{n-\nu} = \sum_{k=\nu}^n C_{n-\nu}^{k-\nu} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \sum_{k=\nu}^n \frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=\nu}^n \frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k} p_{nk}(x), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где p_{nk} — полином (2.2). Легко вычислить, что

$$\frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k} = \frac{k(k-1)\dots(k-\nu+1)}{n(n-1)\dots(n-\nu+1)} = \left(\frac{k}{n}\right)^\nu \frac{(1-\frac{1}{k})\dots(1-\frac{\nu-1}{k})}{(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{\nu-1}{n})} = \left(\frac{k}{n}\right)^\nu \alpha_{nk}^{(\nu)}, \quad (5.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{nk}^{(\nu)} = 1. \quad (5.5)$$

Учитывая формулы (5.3)–(5.5), С. Н. Бернштейн по интуиции построил полиномы

$$B_n(t^\nu; x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\nu p_{nk}(x). \quad (5.6)$$

С. Н. Бернштейн путём тонких вычислений оценивает почленно разности между x^ν и $B_n t^\nu$ и получает оценки

$$\begin{aligned} |B_n(t^\nu; x) - x^\nu| &\leq \frac{K_\nu}{n}, \quad \nu \leq n, \\ |B_n(P_m(t); x) - P_m(x)| &\leq \frac{K_m}{n}, \quad m \leq n, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где K_ν — константы, которые зависят только от ν . Теперь для вывода (5.7) можно обойтись без трудных вычислений. Достаточно воспользоваться выведенной мною недавно рекуррентной формулой

$$B_n(t^{\nu+1}; x) = B_n(t^\nu; x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu (1-x) B_{n-1}(t^\nu; x)$$

и применить индукцию.

С. Н. Бернштейн из неравенств (5.7), считая аппроксимационную теорему Вейерштрасса известной, извлёк два важных следствия.

Теорема 2. Любая функция $f \in C[0, 1]$ разлагается в нормальный ряд.

Действительно, для фиксированной функции $f \in C[0, 1]$ по теореме Вейерштрасса существует последовательность полиномов P_{m_s} степени m_s , такая, что

$$|f(x) - P_{m_s}(x)| < \frac{1}{2^{s+2}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5.8)$$

а по (5.7) существует последовательность полиномов B_{n_s} , такая, что

$$|B_{n_s}(P_{m_s}; x) - P_{m_s}(x)| < \frac{1}{2^{s+2}}. \quad (5.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |B_{n_s}(P_{m_s}; x) - f(x)| &< \frac{1}{2^{s+1}}, \\ |B_{n_{s+1}}(P_{m_{s+1}}; x) - B_{n_s}(P_{m_s}; x)| &< \frac{1}{2^s}, \end{aligned}$$

и следовательно функция f разлагается в нормальный ряд

$$f(x) = \sum (B_{n_{s+1}}(P_{m_{s+1}}; x) - B_{n_s}(P_{m_s}; x)). \quad (5.10)$$

Теорема 3. Из теоремы Вейерштрасса и неравенств (5.7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f(t), x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (5.11)$$

Из (5.8) и (5.9) имеем

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq |B_n(f; x) - B_n(P_{m_s}; x)| + |B_n(P_{m_s}; x) - P_{m_s}(x)| + \\ &\quad + |P_{m_s}(x) - f(x)|, \\ |B_n(f; x) - B_n(P_{m_s}; x)| &\leq \sum_{k=0}^n |f(\frac{k}{n}) - P_{m_s}(\frac{k}{n})| p_{nk}(x) < \frac{1}{2^{s+2}}, \\ |B_n(P_{m_s}; x) - P_{m_s}(x)| &< \frac{K_{m_s}}{n}, \quad m_s < n. \end{aligned}$$

И (5.11) доказано.

Изложенное здесь Добавление С. Н. Бернштейн кончает фразой: «Формула (5.11) выведена мною при помощи теории вероятностей в заметке [2], 1912 г.». Указаний по истории вопроса и литературных ссылок в заметке [2] нет.

Полиномы Бернштейна не сразу привлекли внимание математиков. Но в дальнейшем их стали активно исследовать, обобщать и применять. Методы заметки [2] стали основой для построения других аппроксимирующих линейных положительных операторов. Список трудов по этим темам превышает 1500 названий.

Литература

- [1] Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer Argumente (1885). Werke, Bd. 3.

- [2] Бернштейн С. Н. Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей (1912). Сочинения, т. 1, статья № 4.
- [3] Бернштейн С. Н. Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа (1908). Сочинения, т. 3, статья № 9, стр. 48–50.
- [4] Бернштейн С. Н. О новых исследованиях, относящихся к наилучшему приближению непрерывных функций многочленами (1912). Сочинения, т. 1, статья № 6.
- [5] Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912). Сочинения, т. 1, статья № 3, стр. 79–84.
- [6] Виденский В. С. К столетию открытия полиномов Бернштейна // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2005. – СПб.: РГПУ, 2013. – С. 5–11.

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Н. М. МАТВЕЕВА

Галкина В. Г., Галунова К. В.
 Санкт-Петербургский университет кино и телевидения
 Санкт-Петербургский государственный
 политехнический университет
 Санкт-Петербург
 e-mail: galounova@gmail.com

В ноябре 2014 года исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося математика и великого педагога Николая Михайловича Матвеева (01.11.1914–04.12.2003). Николай Михайлович Матвеев – заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор, доктор физико-математических наук. Являлся первым заведующим кафедрой высшей математики и одним из основателей факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Н. М. Матвеев внес большой вклад в развитие кафедры математического анализа Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. Последние 10 лет до последнего дня своей жизни заведовал кафедрой высшей математики Ленинградского областного педагогического университета.

За свою многолетнюю педагогическую деятельность Николай Михайлович подготовил 50 кандидатов и 6 докторов наук, его ученики работают в крупнейших вузах России и за рубежом. Н. М. Матвеев много времени посвящал общественной деятельности: был членом учебно-методических советов при министерстве просвещения СССР и министерстве просвещения РСФСР, председателем бюро Северо-Западной зоны педвузов России.

Н. М. Матвеев является автором более 100 научных работ, многочисленных учебников и задачников, большая часть из которых относится к теории обыкновенных дифференциальных уравнений. По его учебнику “Методы инте-

гирования обыкновенных дифференциальных уравнений” учились все современные математики. Впервые изданный в 1955 г. и многократно переиздававшийся, этот учебник стал классическим и до сегодняшнего дня, по нашему мнению, является наилучшим учебником для изучения общего курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди учебников, написанных Николаем Михайловичем “Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Курс лекций” (1968); “Высшая математика. Ряды. Курс лекций” (1972); “Аналитическая геометрия в пространстве. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Дифференциальные уравнения” (1979); “Аналитическая теория дифференциальных уравнений: Уравнения класса Фукса и иррегулярная особая точка” (1989); “Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений” (1995). Многократно переиздавался и при этом перерабатывался автором “Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям”, последнее прижизненное издание которого в 2002 г. является ёмким, современным и нестандартным учебным пособием. Также Николай Михайлович внес свой вклад в создание учебников для средних специальных учебных заведений: “Курс математики для техникумов” (1976).

Николай Михайлович родился в г. Вологде, там же провел детство и школьные годы. После школы Николай Михайлович приехал учиться в Ленинградский Государственный университет. В 1938 г. он закончил математикомеханический факультет университета и большая часть его дальнейшей жизни была связана с Ленинградским Государственным Университетом. Николай Михайлович был последним аспирантом легендарного профессора Николая Максимовича Гюнтера. Даже будучи уже очень немолодым человеком, Николай Михайлович часто вспоминал о том, как ему повезло, что в молодости ему довелось общаться и сотрудничать с профессором Гюнтером. В 1941 г. Николай Михайлович защитил кандидатскую диссертацию по теме “О достаточном условии Лихтенштейна для слабого экстремума”, которая была им написана под руководством профессора Н. М. Гюнтера. В 1967 г. Николай Михайлович стал доктором физико-математических наук.

Уже аспирантом Николай Михайлович начал преподавать и, после защиты кандидатской диссертации, был направлен в Уральский государственный университет, где в 1942 г. он стал доцентом. В 1944 г. Николай Михайлович вернулся в Ленинградский университет на кафедру дифференциальных уравнений математикомеханического факультета. Много поколений студентов факультета слушали его лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Параллельно, с 1960 г. в течение 30 лет Николай Михайлович читал курс дифференциальных уравнений в Мордовском государственном университете. В 1970 г. ему было присвоено звание профессора.

В 1969 году в Ленинградском Государственном Университете был создан новый факультет – факультет прикладной математики – процессов управления. Н. М. Матвеев был среди людей, стоявших у истоков этого факультета. В 1971 г. на факультете ПМ–ПУ была образована кафедра высшей математики, которой Николай Михайлович заведовал с момента основания до 1979 года. Один из авторов данной статьи заканчивал эту кафедру, когда Николай Михайлович уже не был её заведующим, но большая часть преподавателей и сотрудников оставались ещё теми же, которые с ним работали. Все эти люди сохранили с Ни-

колаем Михайловичем тёплые, дружеские отношения, продолжалось научное и педагогическое сотрудничество.

В 1979 г. Н. М. Матвеев перешел работать на математический факультет РГПУ (тогда ЛГПИ) им. А. И. Герцена. С 1979 по 1989 гг. он заведовал кафедрой математического анализа этого факультета, позже, до середины 1993 г. был профессором кафедры. В 1994 г. Николай Михайлович стал заведующим кафедрой высшей математики Областного педагогического института (позже – университета) в г. Пушкине. Здесь Николай Михайлович проработал буквально до последних дней своей жизни. Он прочел свою последнюю лекцию за день до того, как его не стало.

И на факультете ПМ–ПУ, и в институте им. А. И. Герцена работал городской семинар по дифференциальным уравнениям. Этот семинар был создан Николаем Михайловичем Матвеевым в 1969 году. В течение 25 лет заседания семинара проводились еженедельно, здесь было заслушано около тысячи докладов и сообщений по методам общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физики и многочисленным приложениям этих методов. В работе семинара принимали участие преподаватели, сотрудники, аспиранты Университета, Герценовского института, различных технических вузов нашего города (практически всех вузов), были докладчики из других городов. Доклады и сообщения были посвящены как классическим, так и современным научным направлениям, в частности, новым результатам в теории управления, асимптотическим методам и методам дискретно-группового анализа в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Семинар, будучи научным, преследовал и учебные цели, содействовал повышению научно-методологического уровня молодых участников семинара. В докладах делался акцент на методы получения сообщаемых результатов. Результаты работы семинара публиковались в межвузовских сборниках научных трудов “Математическая физика” (с 1984 по 1987 гг.), “Дифференциальные уравнения в частных производных” (с 1986 по 1992 гг.), “Качественная теория сложных систем” (1986 г.) “Математический анализ: вопросы теории, истории и методики преподавания математики” (с 1988 по 1993 гг.), редактором которых был Николай Михайлович.

Каждый научный семинар – это уникальное, творческое явление и имеет “характер” своего руководителя. Семинар Николая Михайловича был объединяющий, добрый, дающий каждому свой шанс. Здесь были и очень сильные доклады, на которые специально приходили люди, не систематически его посещавшие, но мог появиться аспирант из провинциального вуза, которому тоже давали возможность изложить свои результаты. Обсуждение докладов всегда носило конструктивный характер, атмосфера заседаний семинара была доброжелательной, такой, каким был и сам Николай Михайлович.

Николай Михайлович очень внимательно относился к молодым ученым. Под его руководством множество аспирантов подготовили и защитили кандидатские диссертации. Николай Михайлович помогал войти в научную среду, найти своё направление, защитить диссертацию учёным, работающим на кафедрах высшей математики в различных технических вузах, где, чаще всего, нет общей научной тематики.

В последние годы жизни Николай Михайлович много внимания уделял методической работе, его статьи по методике преподавания математических

дисциплин в вузе актуальны до сих пор. Однако главный педагогический “секрет” Николая Михайловича знают только те, кто вместе с ним работал. Он готов был часами разговаривать с каждым студентом, консультировать, отвечать на вопросы, при этом не уставал, получал радость от общения со студентами.

Николай Михайлович был очень ярким, жизнелюбивым, темпераментным человеком. Мы хотим завершить данную статью фрагментом из воспоминаний доцента матмеха А. Ю. Львовича, который был студентом Николая Михайловича в послевоенные годы. Его слова столь точно совпадают с нашими собственными впечатлениями об этом человеке, что мы не могли их здесь не привести: “Вы видели когда-нибудь шарики ртути? Такие блестящие, бегают, ни секунды не стоят на месте? Мне пришлось продолжить учёбу на матмехе сразу после войны. Многие из нас, студентов, воевали, жизнь научила нас разбираться в людях. Практические занятия по дифференциальным уравнениям должен был вести Николай Михайлович. Ранее я его не знал, его фамилию я прочел в расписании занятий. Когда я впервые увидел его входящим в 75 аудиторию в здании матмеха на 10-й линии, мне сразу пришла в голову мысль, что он весь состоит именно из таких шариков, – подвижных, не имеющих ни секунды покоя. С первого же взгляда было ясно, что он – очень живой, жизнерадостный и добрый человек”.

О РАБОТЕ Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦА В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА К 125-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Одинец В. П.

Коми государственный педагогический институт

Сыктывкар

e-mail: w.p.odyniec@mail.ru

Odyniec W. P. On G. M. Fichtenholz work at Herzen institute. (On the 125th anniversary of his birth). Some facts on G. M. Fichtenholz work at Herzen institute since 1918 to 1949 are considered.

Рассматриваются некоторые факты о работе Г. М. Фихтенгольца в ЛГПИ им. А. И. Герцена с 1918 по 1949 г.

Широко известна роль Григория Михайловича Фихтенгольца (05.06.1888 по новому стилю – 26.06.1959) в создании школы математического анализа в Ленинграде. Всемирно известен его знаменитый трехтомник “Курс дифференциального и интегрального исчисления”, переведенный на ряд иностранных языков. Значительно менее известна его роль в развитии математического образования в советской школе, связанная с его работой в Педагогическом институте им. А. И. Герцена.

Осенью 1918 года по инициативе Адама (Альберта) Петровича Пинкеви-



ча (1883–1937)¹ и Златы Ионовны Лилиной (1882–1929)² решением Петросовета (протокол № 1 от 17 октября 1918 г.) был организован III Педагогический институт “как первый педагогический вуз Советской России нового типа” [1].

Первым деканом физико-математического факультета этого вуза был назначен Григорий Михайлович Фихтенгольц. Математическая кафедра на этом факультете была тогда одна – кафедра математики. Позже III Педагогический институт получил имя А. И. Герцена (в январе 1920 г.) и вообрал в себя не только первый и второй педвузы, но и Педагогический институт дошкольного

¹А. П. Пинкевич – выпускник Казанского университета (1909), активный участник революционных событий 1905–1907 гг., преподаватель естествознания в Вольской (в Саратовской губернии) учительской семинарии (1909–1917), автор учебников для учительских институтов и семинарий. В 1917 г. член ЦК “объединенной” РСДРП. В 1918 г. А. П. Пинкевич избирается Председателем экспертного совета при Комиссариате просвещения Союза коммун Северной области. Членом этого совета был и Г. М. Фихтенгольц. В 1920 году А. П. Пинкевич стал организатором и первым ректором Уральского государственного университета в Екатеринбурге. Позже работает в Москве на различных руководящих должностях Наркомпроса (Народного комиссариата просвещения) РСФСР. Репрессирован в 1937 г. [3].

²З. И. Лилина (партийный псевдоним Зина Левина), урожденная Бернштейн. Училась в гимназии в Митаве (ныне Jelgava, Латвия) и в университете в Берне. Член РСДРП с 1902 года, большевичка. В 1908–1917 гг. находилась в эмиграции в Швейцарии. В 1914–1915 гг. секретарь Бернской группы РСДРП. З. И. Лилина – вторая жена Г. Е. Зиновьева (Радомысльского Евсея Гирша: 1883–1936). С августа 1918 г. и. о. комиссара внутренних дел Северной области. Позже – заведующая отделом народного образования Петроградского исполкома. После переезда в Москву в 1928 г. работала в Наркомпросе и заведовала (до кончины от рака лёгких) отделом детской книги в Госиздате РСФСР [4].

образования [1], [2]³.

С 1919 года по 1930 год Г. М. Фихтенгольц был профессором кафедры математики в ЛГПИ по совместительству (основным местом его работы в это время был Университет), при этом звание профессора он получил в 1926 году ([5], с. 345–346).

Второй приход Г. М. Фихтенгольца в ЛГПИ датируется 1937 г. [5]. Этому приходу предшествовали события, на которых остановимся чуть подробнее.

20 и 21 декабря 1936 года состоялась специальная сессия Группы математики Академии Наук СССР, посвященная состоянию математического образования в стране. Этой сессии предшествовала годичная работа специально созданных при Группе комиссий. Комиссии пришли к выводу, что состояние математического образования в средней школе, в педвузах и во втузах в настоящее время неудовлетворительное. Основной доклад по математической подготовке в средней школе на сессии сделал Г. М. Фихтенгольц⁴ [6]. И это не случайно, поскольку, начиная с 1935 года, Г. М. Фихтенгольц работал на общественных началах в качестве председателя комиссии Наркомпроса по составлению школьных программ по математике. Его критика была конструктивной. Среди его предложений особо заслуживает внимания мысль, что главным в школе должен быть квалифицированный учитель. Поэтому он предложил вернуть в школу старых учителей, по разным причинам покинувшим её⁵. Предлагалось также переиздать некоторые старые (дореволюционные) учебники, уделяя особое внимание текстовым задачам, задачам на построение, задачам по стереометрии, понятию равносильности уравнений. В педвузах в качестве обязательного курса предлагалось ввести курс истории математики.

В резолюции по итогам сессии предлагалось укрепить педвузы и втузы высококвалифицированными специалистами [7].

Для самого Г. М. Фихтенгольца результатом сессии было назначение в 1937 г. (по совместительству) заведующим кафедрой математики ЛГПИ им. А.И. Герцена [5].

Став заведующим, Г. М. Фихтенгольц вместе с деканом физ.-мат. факультета Захаром Захаровичем Вулихом (1869–1941/42) осуществляет проект реорганизации кафедры математики в три специализированные кафедры: кафедру алгебры, кафедру геометрии и кафедру анализа, возглавив последнюю (по совместительству) до 1941 г.

На кафедру анализа в 1937/38 учебном году приглашается совместителем ученик Фихтенгольца профессор Л. В. Канторович (1912–1986), и на постоянной основе – их общие ученики Б. З. Вулих (1913–1978) и М. К. Гавурин (1911–1992) [2].

По материалам доклада на осенней научной сессии ЛГПИ 1938 года

³С 1924 года Педагогический институт им. А. И. Герцена именовался Ленинградский педагогический институт им. А. И. Герцена (сокращенно: ЛГПИ).

⁴Остальные четыре доклада сделали: “О стабильных учебниках математики в средней школе” – чл.-корр. АН СССР Л. Г. Шнирельман, “О программах математики во втузах” – академик С. Н. Бернштейн, “Об учебниках математики во втузах” – проф. Л. А. Тумаркин, “О подготовке преподавателей математики в педвузах” – проф. Л. А. Люстерник [7].

⁵Не следует забывать, что это время было временем раскручивания репрессий. Из школ зачастую изгонялись учителя с дореволюционным стажем, как “классово чуждые”.

Г. М. Фихтенгольц публикует в 1939 г. статью в Ученых записках Педагогического института т. 28, с. 225–244 “Об интеграле Данжуа”⁶ ([8], с. 710).

В 1944–46 годах Г. М. Фихтенгольц вновь заведует кафедрой анализа ЛГПИ (по совместительству). Осенью 1944 г. Г. М. Фихтенгольц выступает перед учителями математики Ленинграда с лекцией “Иррациональные числа в средней школе”, целью которой было “точнее очертить материал, который подлежит прохождению в средней школе, а в ряде случаев – и указать, как подать этот материал, чтобы он был доступен школьникам” [9].

В 1946–1949 гг. Г. М. Фихтенгольц работал на кафедре анализа ЛГПИ в должности профессора (по совместительству). Именно к этому периоду относится издание Методического сборника “Математика в школе”, Вып. 2 (1947) со статьёй Г. М. Фихтенгольца об иррациональных числах [9]⁷.

Важным представляется умение Г. М. Фихтенгольца передать будущим учителям математики стремление улучшать процесс обучения школьников не только на уроках, но и во внеучебное время. Сам Г. М. Фихтенгольц не только умел, но и любил общаться со школьниками (и не только во время проведения математических олимпиад в Ленинграде, одним из инициаторов которых он был, наряду с Б. Н. Делоне (1890–1980))⁸ ([11] с. 6).

Интересно, что по инициативе ЛГПИ им. А. И. Герцена в 1948 г. Г. М. Фихтенгольц был награжден значком “Отличник народного просвещения” [5]. Впрочем, ещё в 1940 году руководство ЛГПИ поддержало ходатайство Ленинградского государственного университета о присвоении Г. М. Фихтенгольцу звания “Заслуженного деятеля науки РСФСР”.

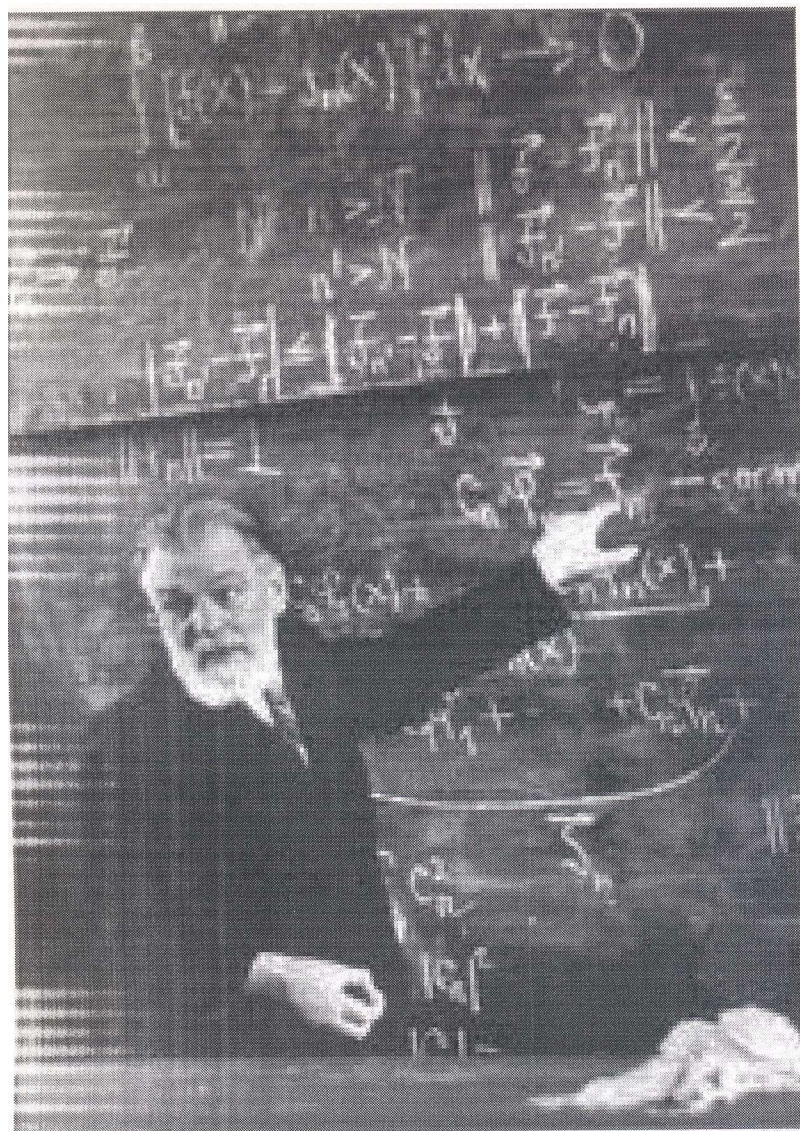
Литература

- [1] Гончаров С. А. (составитель) и др. Педагогический Университет им. А. И. Герцена. От Императорского Воспитательного Дома до Российского государственного педагогического университета. – СПб.: “Лики России”, 1997. – 207 с.
- [2] Одинец В. П. К 75-летию кафедры математического анализа РГПУ им. А. И. Герцена. Зарисовки истории. Век XX // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения, 2012. Т. LXV. – СПб.: БАН, 2012. – С. 3–18.

⁶Интерес к интегралу Данжуа возник у Г. М. Фихтенгольца еще с тех пор, как он заинтересовался абсолютно непрерывными функциями. Так, ещё в 1924 г. он строит пример суперпозиции двух абсолютно непрерывных функций, не являющейся абсолютно непрерывной функцией (Г. М. Фихтенгольц. Об абсолютно непрерывных функциях // Матем. сб., 31 (1924). – С. 286–296.). Интересно, что именно на осенней научной сессии 1938 г. Л. В. Канторович делает доклад, в котором и предлагается оптимизационный метод, названный позже симплекс-методом [2].

⁷К сожалению, борьба с так называемым “космополитизмом” в начале 50-х годов привела к тому, что сборник, авторами которого были ещё профессора И. С. Соминский, И. П. Натансон и Б. З. Вулих, был изъят из большинства библиотек, так что даже в некрологе [10] название статьи Г. М. Фихтенгольца и издательство приведены неверно.

⁸Автору довелось видеть выступление Григория Михайловича на слёте пионеров-отличников зимой 1957/58 годов. Он говорил негромко, но очень образно: о мироздании, о Джордано Бруно. (Напомню, что это было время после запуска в СССР первого искусственного спутника Земли 4 октября 1957 года).



- [3] Главацкий М. Е. Пинкевич Альберт Петрович // Свободная энциклопедия Урала. – <http://enc.ural.ru/index.php>
- [4] Лилина Злата Ионовна – <http://funeral-spb.ru/necropols/kommunistlavra/lilina/>
- [5] Профессора Российского Государственного Педагогического Университета им. А. И. Герцена в XX веке. Справочник. (Под ред. Г. А. Бордовского и В. А. Козырева). – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000. – 391 с.
- [6] Фихтенгольц Г. М. Математическая подготовка в средней школе // УМН, № 4 (1938). – С. 300–308.
- [7] Декабрьская сессия Группы математики Академии Наук СССР // УМН, № 4, (1938). – С. 309–318.
- [8] Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957. Том второй. Библиография. М.: Госиздат Физматлит, 1959. – 819 с.
- [9] Фихтенгольц Г. М. Иррациональные числа в средней школе // Математика в школе. Методический сборник. Вып. II. – С. 24–44. – Л.: Ленинградский обл. ин-т усовершенствования учителей, 1947.

- [10] Канторович Л. В. и Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц. Некролог // УМН, т. XIV, вып. 5 (1959). – С. 123–128.
- [11] Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады. – СПб.: Политехника, 1994. – 309 с.

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Андреев В. К.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск

e-mail: andr@icm.krasn.ru

Andreev V. K. On one partially invariant solution of the hydrodynamics equations. Three-parameter group containing the Galilei translation along an one axis was used to searching partially invariant solution. For the an ideal incompressible fluid equations such solution was found in closed form. It describes the motion of a plane layer with the free boundary. For the Navier – Stokes equations the corresponding factor system was reduced to the nonlinear operator equation. Some qualitative properties of it solutions were established and based on Schauder principle the existence theorem was proved. The applications of this solution on convection equations were considered.

На трёхмерной подгруппе, содержащей галилеев перенос вдоль одной координатной оси, строится частично инвариантное решение. Для уравнений идеальной несжимаемой жидкости решение найдено в виде квадратур и дана его физическая интерпретация как движения плоского слоя со свободной границей. Для модели Навье – Стокса фактор-система сведена к нелинейному операторному уравнению. Установлены качественные свойства решений и на основе принципа Шаудера доказана его разрешимость. Рассмотрены некоторые обобщения этого решения и на уравнения конвекции.

1. Модель идеальной жидкости. Система уравнений двумерных движений идеальной несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, & u_x + v_y &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y &= 0, & \rho &= \text{const}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

допускает трёхпараметрическую подалгебру Ли $\langle \partial_x, t\partial_u + \partial_x, \partial_p \rangle$. Её инварианты суть t , y , v , и частично инвариантное решение системы (1.1) ранга два и дефекта два следует искать в виде $u = u(x, y, t)$, $v = v(y, t)$, $p = p(x, y, t)$. Из уравнения сохранения массы имеем

$$u(x, y, t) = u_1(y, t)x + u_2(y, t), \quad u_1(y, t) + v_y(y, t) = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения импульса системы (1.1) эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} u_{1t} + vu_{1y} + u_1^2 &= f(t), \quad \frac{1}{\rho} p = l(y, t) - f(t) \frac{x^2}{2}, \\ l_y &= -v_t - vv_y, \quad u_{2t} + vu_{2y} + u_1 u_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

с произвольной функцией $f(t)$.

Введём лагранжевы координаты (η, t) с помощью решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = v(y, t), \quad y|_{t=0} = \eta. \quad (1.4)$$

Пусть $\overset{\circ}{u}_1(\eta, t) = u_1(y(\eta, t), t)$, $\overset{\circ}{u}_2(\eta, t) = u_2(y(\eta, t), t)$, $\overset{\circ}{v}(\eta, t) = v(y(\eta, t), t)$, где $y(\eta, t)$ — решение задачи (1.4). Тогда

$$\overset{\circ}{u}_1(\eta, t) = \frac{g'(t)}{g(t)} + \frac{1}{g^2(t)} \left[u_{10}(\eta) + \int_0^t \frac{1}{g^2(t)} dt \right]^{-1}, \quad (1.5)$$

где $g(t)$ — вспомогательная функция: $g'' - f(t)g = 0$, $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $u_{10}(\eta)$ — начальное значение функции $u_1(y, t)$;

$$y(\eta, t) = \int_0^\eta \exp \left[- \int_0^t \overset{\circ}{u}_1(\eta, t) dt \right] d\eta; \quad (1.6)$$

$$\overset{\circ}{v}(\eta, t) = - \int_0^\eta \overset{\circ}{u}_1(\eta, t) \exp \left[- \int_0^t \overset{\circ}{u}_1(\eta, t) dt \right] d\eta; \quad (1.7)$$

$$\overset{\circ}{u}_2(\eta, t) = u_{20}(\eta) \exp \left[- \int_0^t \overset{\circ}{u}_1(\eta, t) dt \right]. \quad (1.8)$$

Для $\overset{\circ}{l}(\eta, t) = l(y(\eta, t), t)$ из третьего уравнения (1.3) имеем представление

$$\overset{\circ}{l}(\eta, t) = l_1(t) - \int_0^\eta \overset{\circ}{v}_t(\eta, t) \exp \left[- \int_0^t \overset{\circ}{u}_1(\eta, t) dt \right] d\eta \quad (1.9)$$

с произвольной функцией $l_1(t)$.

Таким образом, решение восстанавливается с точностью до квадратур. Полученному решению дадим следующую интерпретацию. В начальный момент времени имеется слой жидкости толщиной $y = h_0 = \text{const}$ на твёрдой подложке $y = 0$. Начальное поле скоростей в жидкости есть $u_0(x, y) = u_{10}(y)x + u_{20}(y)$, $v_0(y) = - \int_0^y u_{10}(y) dy$, $v_0(0) = 0$. Верхняя граница $y = h_0$ является свободной и на ней давление $p(h_0, 0)$ совпадает с внешним $p_{\text{вн}} = p_{10} + p_{00}x^2/2$. При $t > 0$ движение слоя описывается первой зависимостью (1.2), формулами (1.5), (1.6)–(1.8). Давление определяется по второй формуле (1.3), где $l(y, t) = \overset{\circ}{l}(y(\eta, t), t)$

даётся выражением (1.9). Конечно, при $t > 0$ $p_{\text{вн}} = p_1(t) - p_0(t)x^2/2$ должно быть задано и, тем самым, $f(t) = p_0(t)$.

Поставленная задача имеет четыре стационарных решения, причём только одному из них,

$$\begin{aligned} v &= \frac{h_0 \sqrt{f_0}}{\pi} \sin \frac{\pi y}{h_0}, \quad u = -\sqrt{f_0} x \cos \frac{\pi y}{h_0}, \quad f_0 > 0, \\ \frac{1}{\rho} p &= l_0 - \frac{f_0}{2} \left(x^2 + \frac{h_0^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\pi y}{h_0} \right), \quad l_0 = \text{const} > 0, \end{aligned}$$

можно дать физическую интерпретацию. Оно описывает двумерное течение жидкости в слое $0 < y < h_0$, $|x| < \infty$, причём прямые $y = 0$, $y = h_0$ суть непроницаемые твёрдые стенки.

2. Модель вязкой несжимаемой жидкости. Здесь система уравнений Навье – Стокса ($\nu > 0$ — постоянная вязкость жидкости)

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho} p_x &= \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad u_x + v_y = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y &= \nu(v_{xx} + v_{yy}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

по-прежнему допускает трёхмерную подалгебру $\langle \partial_x, t\partial_u + \partial_x, \partial_p \rangle$. Поэтому справедливы соотношения (1.2); далее будем считать $u_2 \equiv 0$. Представление давления в формуле (1.3) останется без изменений, а функции $u_1(y, t)$, $l(y, t)$ найдутся из уравнений

$$u_{1t} + \nu u_{1y} + u_1^2 = f(t) + \nu u_{1yy}; \quad (2.2)$$

$$l_y = \nu v_{yy} - v_t - \nu v_y. \quad (2.3)$$

При интерпретации решения как движения вязкой жидкости в слое $0 < y < h$ с твёрдыми стенками $y = 0$, $y = h$ необходимо поставить условия прилипания на них:

$$u_1(0, t) = u_1(h, t) = 0, \quad \int_0^h u_1(z, t) dz = 0, \quad (2.4)$$

а также начальные условия

$$u_1(y, 0) = u_{10}(y), \quad u_{10}(0) = u_{10}(h) = 0, \quad \int_0^h u_{10}(z) dz = 0. \quad (2.5)$$

Таким образом, функция $u_1(y, t)$ есть решение интегродифференциального уравнения

$$u_{1t} - u_{1y} \int_0^y u_1(z, t) dz + u_1^2 = \nu u_{1yy} + f(t) \quad (2.6)$$

с граничными и начальными условиями (2.4), (2.5).

Рассмотрим стационарный вариант задачи (2.6), (2.4), (2.5). Введём безразмерные переменные $U(z) = u_1(zh)h^2/\nu$, $z = y/h$, $a = f_0h^4/\nu^2$. Функция $U(z)$ и параметр a есть решение краевой задачи

$$U'' + U' \int_0^z U(z) dz - U^2 + a = 0, \quad 0 < z < 1; \quad (2.7)$$

$$U(0) = U(1) = 0, \quad \int_0^1 U(z) dz = 0. \quad (2.8)$$

Задача (2.7), (2.8) сводится к операторному уравнению

$$U(z) = (AU)(z), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (AU)(z) = \int_0^z \left\{ \int_0^p (U^2(\sigma) - a) \exp \left[\int_0^\sigma (\sigma - \tau) U(\tau) d\tau \right] d\sigma + b \right\} \times \\ \times \exp \left[- \int_0^p (p - \tau) U(\tau) d\tau \right] dp, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$b = a(U)B_1(U) - B_2(U)$; $a(U)$, $B_1(U)$, $B_2(U)$ — сильно нелинейные функционалы от решения.

Доказывается, что на шаре $B(0, r) = \{U \in C[0, 1] \mid \|U\|_C \leq r\}$ функционалы $B_1(U)$, $B_2(U)$, $a(U)$ допускают оценки

$$\begin{aligned} \frac{e^{-r/2}}{r} (1 - e^{-r/2}) \leq B_1(U) \leq \frac{2}{r} (e^{r/2} - 1), \\ 0 \leq B_2(U) \leq 2r(e^{r/2} - 1), \quad |a| \leq 4r^2(2 - e^{-r})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

С помощью неравенств (2.11) устанавливается, что оператор A переводит шар $B(0, r_0)$ при $r_0 \approx 0,102$ в себя. Кроме того, он является вполне непрерывным на этом шаре. Значит, по теореме Шаудера операторное уравнение (2.9) имеет по крайней мере одно решение.

Если плоскость $y = h$ является свободной границей, то такое стационарное течение по-прежнему описывается уравнением (2.7), изменится лишь второе краевое условие (2.8), оно примет вид $U'(1) = 0$. Здесь оператор A действует на $U(z)$ по формуле

$$(AU)(z) = \int_0^z \int_p^1 (a - U^2(\sigma)) \exp \left[\int_0^\sigma (\sigma - \tau) U(\tau) d\tau \right] d\sigma \exp \left[- \int_0^p (p - \tau) U(\tau) d\tau \right] dp, \quad (2.12)$$

параметр a — неотрицательный функционал от U и на шаре $\bar{S}(0, r) \subset C[0, 1]$ допускает оценку $0 \leq a \leq r^2$. Значения оператора A на этом шаре ограничены величиной $2(e^{r/2} - 1)^2$. Значит, A переводит шар $\bar{S}(0, r_0)$ в себя, является вполне непрерывным и решение краевой задачи существует; $r_0 = 1,156$ — единственный корень уравнения $2(e^{r_0/2} - 1)^2 = r_0$.

Имеется осесимметрический аналог решения, когда в цилиндрических координатах вектор скорости и давление представляются в виде

$$\mathbf{u} = (u(z)r, 0, w(z)), \quad p = l(z) - \frac{f_0 r^2}{2}. \quad (2.13)$$

Если стенки $z = 0$, $h = \text{const}$ — твёрдые, то после введения безразмерных переменных задача для функции $U(z)$ такова:

$$U'' + 2U' \int_0^z U(z) dz - U^2 + a = 0 \quad (2.14)$$

с теми же краевыми условиями (2.4). Полученная задача также сводится к операторному уравнению вида (2.9) аналогичной структуры, причём

$$|a| \leq 4r^2(2 - e^{-2r})^{-1}. \quad (2.15)$$

В шаре $B(0, r_0)$, $r_0 \approx 0,103$, оператор A удовлетворяет условиям теоремы Шаудера и $|a| \leq 0,063$. В результате расчётов получены три значения параметра: $a^1 = -7,341 \cdot 10^{-6}$, $a^2 = 9,12 \cdot 10^{-7}$, $a^3 = 12,0168$. Величины a^1 , a^2 удовлетворяют оценке (2.15) при $r_0 = 0,103$. Таким образом, имеется три различных решения.

3. Модель конвективных течений. Подалгебра $\langle \partial_x, t\partial_u + \partial_x, \partial_p \rangle$ допускается также и уравнениями конвекции, когда сила плавучести не зависит от давления. Конвекция может быть чисто тепловой или термоконцентрационной. Приведём здесь только один пример термогравитационной конвекции вблизи точки инверсии воды. Частично инвариантное решение в безразмерных переменных удовлетворяет системе (стационарный случай)

$$\begin{aligned} U^2 + WU' &= U'' + a, \quad 2U + W' = 0, \\ WW' &= -L' + W'' + \text{Ga} - \text{Gr}(T - 1)^2, \\ WT' &= \frac{1}{\text{Pr}} T'' + f \exp(-\alpha z), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $a = -a_1 h^4 / \nu^2$, $\text{Ga} = g_0 h^3 / \nu^2$ — число Галилея, $\text{Gr} = g_0 \alpha \theta_0^2 h^3 / \nu^2$ — число Грасгофа, $\text{Pr} = \nu / \chi$ — число Прандтля, f , α — физические постоянные, связанные с радиационным нагревом воды.

Система (3.1) решается в области $0 < z < 1$ с граничными условиями

$$\begin{aligned} U(0) &= W(0) = 0, \quad T_z(0) = Q = \text{const}, \\ U(1) &= W(1) = 0, \quad T(1) = T_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ясно, что функция $U(z)$ есть решение краевой задачи (2.14), (2.8), уже изученной в п. 2. Поскольку $W(z) = -2 \int_0^z U(z) dz$, то из третьего уравнения (3.1) и граничных условий (3.2) однозначно восстанавливается $T(z)$. Затем из второго уравнения (3.1) функция $L(z)$ (безразмерный аналог $l(z)$ из выражения (2.13)) находится квадратурой. Расчёты показывают, что профиль температуры хорошо соответствует профилю температуры озера Байкал.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН, междисциплинарный интеграционный проект № 44.

УДК 517+530.1

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ЦИКЛОМ

Васильев Ю. А., Смирнов А. В.
СПбГПУ
Санкт Петербург

Vasilyev Yu. A., Smirnov A. V. Creation of the equation trajectories of system with the limit cycle. Describes the methodology of formation differential equation trajectories for limit cycle with the required parameters (frequency and amplitude periodic oscillations, duration transient process).

Keywords: Ordinary differential equations, Nonlinear oscillations, Equation trajectories, Limit cycle, Phase plane.

Описывается методика формирования дифференциального уравнения траекторий для предельного цикла с требуемыми параметрами (частота и амплитуда периодических колебаний, длительность переходного процесса).

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, нелинейные колебания, уравнение траекторий, предельный цикл, фазовая плоскость.

Известно решение задачи построения системы второго порядка по заданной интегральной кривой [1]. В данной работе строится траектория на основе функции Ляпунова, зависящей от времени подобно предельному циклу. Рассмотрим уравнение:

$$G(x, y) = C(t), \quad (1)$$

в котором предполагается $G(x, y)$ – голоморфная в окрестности точки (x_0, y_0) функция; $C(t)$ – непрерывная функция времени $C(t) > 0$ при $t \geq 0$.

Дифференцируя уравнение по переменной x , получим:

$$G'_x + G'_y \cdot y'_x = C'_t \cdot t'_x. \quad (2)$$

Примем, что функция $C(t)$ описывается уравнением Бернулли:

$$\frac{dC}{dt} = \varepsilon \cdot C \left(1 - \frac{C^2}{C_0^2} \right), \quad (3)$$

где ε – постоянная времени, характеризующая длительность переходного процесса от начальных значений к циклу. Из уравнения (3) следует, что независимо от начального отношения $C(0)/C_0$ стационарное (установившееся) значение $C = C_0$.

Из известных соотношений связи декартовых и полярных координат можно найти, что $t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\omega = \text{const}$ – круговая частота, и:

$$t'_x = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{x \cdot y'_x - y}{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

В уравнении (2) проведем замену в правой части в соответствии с (4) и уравнением (3), в котором, в свою очередь, учтено равенство $C = G(x, y)$ согласно (1). Из преобразованного уравнения (2) можно найти:

$$y'_x = \frac{G'_x + \varepsilon y \cdot P(x, y)}{-G'_y + \varepsilon x \cdot P(x, y)}, \quad P(x, y) = \frac{G}{\omega(x^2 + y^2)} \left(1 - \frac{G^2}{G_0^2}\right). \quad (5)$$

Из уравнения (5) (уравнение траекторий) следует, что в установившемся режиме наличие цикла на плоскости (x, y) зависит от отношения производных G'_x/G'_y . Поэтому при выборе аналитического выражения для $G(x, y)$ необходимо учитывать условия замкнутости для кривой, описываемой уравнением $G(x, y) = C_0$ [1, с. 485]. Этим условиям, например, удовлетворяет функция:

$$G(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{k+l \geq 3} a_{kl} x^k y^l, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

Сумма может представлять сходящийся ряд [1, 2], или конечное число членов, например, $k + l = 3$ [2].

В компьютерном эксперименте использовалась в основном система:

$$\dot{y} = \frac{y'_x}{t'_x}, \quad \dot{x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y'_x}{t'_x} - \frac{\omega(x^2 + y^2)}{y},$$

как во временной области, так и на фазовой плоскости $(x(t), y(t))$.

Для моделей $G(x, y) = x^2 + axy + y^2 = R^2$, $-2 < a < 2$, $R = 2$; $(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + x)^2 = 2$ проверялись данные расчёта: величина колебаний в характерных точках, изохронность и форма фазового портрета, зависимость длительности установления колебаний от начальных условий. Во второй модели три особых точки $((0, 0); (-1, -1); (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$, в каждой из которых характер установления колебаний был одинаков.

Литература

- [1] Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.
- [2] Амелкин В. В. Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: БГУ, 1982. – 208 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ «ПУЛЬСИРУЮЩИХ» РЕЖИМОВ

Вдовина Е. К., Пугина Л. В., Волосов К. А.
 Московский государственный университет путей сообщения
 Москва
 e-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

Vdovina E. K., Pugina L. V., Volosov K. A. The models of the «pulsating» process. There is possibility of describing a family of solutions of nonlinear differential equation of fourth order with partial derivatives (PDE) solutions of nonlinear second order PDE. The proof of the existence of such way of construction of solutions uses the method of unfixed constructive replacement (MUCR). Asymptotic solutions was constructed describing nonlinear «pulsating» modes arising in models of processes of blood coagulation, for example. The expressions coefficients exponential decreasing of the solution and the frequency of oscillations were calculated through the parameters of the problem. There was describes the «pulsating» spiral waves too.

Показано, что существует возможность описания семейства решений дифференциального нелинейного уравнения четвёртого порядка с частными производными (ДНУсЧП) решениями ДНУсЧП второго порядка. Для доказательства существования такого способа построения решений используется метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНФКЗП). Для демонстрации такого подхода построены асимптотические решения, описывающие нелинейные «пульсирующие» режимы, возникающие в моделях процессов свертывания крови. Вычислены выражения коэффициента экспоненциального убывания решения и частоты колебаний через параметры задачи. Описаны «пульсирующие» спиральные волны.

1. Введение. В цикле работ, перечисленных в библиографии статей [1], [2], исследована феноменологическая модель свертывания крови (ФМСК), и обнаружен режим пространственного «пульсирующего» распределения.

Система уравнений ФМСК для активатора процесса свертываемости $Q(x, t)$ (тромбина), гипотетического ингибитора $S(x, t)$ и аналога фибрина $f(x, t)$ [1] привлекательна тем, что она проста и даёт результаты, совпадающие с экспериментальными данными

$$\begin{aligned} Q'_t - d \Delta Q + F_1(Q, S) &= 0, \quad S'_t - d \Delta S + F_2(Q, S) = 0 \\ f'_t &= K_9 Q. \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим случай равных коэффициентов диффузии d . В ФМСК функции F_i , $i = 1, 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_1(Q, S) &= -K_1 Q^2 / (K_2 + Q) + K_3 Q + K_4 Q S, \\ F_2(Q, S) &= -K_5 Q (1 - S/K_6) (1 + (S/K_7)^2) + K_8 Q. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь K_j , $j = 1, \dots, 8$ – параметры задачи.

В работах [1], [2] показано, что существует допороговый режим, когда функция Q ограничена и при больших значениях переменной t стремится к

константе. Этому режиму соответствуют построенные в данной работе решения. В этом случае в уравнениях превалирует функция диссипации (стока) в окрестности малых значений Q [1], [2]. Режим взрывной кинетики образования тромбина при надпороговой активации возникает при доминировании источников в ФМСК.

Замечание 1. Малый параметр $d < 1$ при старшей производной в (1) [4], входит в решение сингулярно, что характеризует свойства, связанные с «жесткостью» задачи (1), (2) и объясняет существование тонких пограничных слоёв. Из цитируемых работ следует, что $K_2 < 1$ – малый параметр, который входит в ФМСК регулярно и следовательно, можно построить решение по теории возмущения [3], [4].

Решение задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$Q(x, t) = u(x, t) + K_2 W(x, t) + \dots$$

2. Свойство ФМСК при $K_2 = 0$. Динамическая система, которая соответствует модели (1), (2) при отсутствии диффузии, исследована в цикле работ, представителем которых являются статья [1]. Бифуркационные диаграммы системы (1), (2) исследуется в цитируемом цикле работ.

С одной стороны, при $K_2 = 0$ исчезают два положения равновесия. С другой стороны, получить исходную картину (или близкую к ней) и исходное число точек равновесия, можно получить, исследуя ДНУсЧП второго порядка.

Покажем, что часть решений ДНУсЧП четвёртого порядка с частными производными можно – точно или приближенно – описать решениями ДНУсЧП второго порядка. В качестве примера эффективности использования такого подхода используем ФМСК. Выразим из первого уравнения (1), (2) функцию

$$S(x, t) = (-Q'_t + d \Delta Q) / (K_4 Q) - K_3 / K_4 + K_1 / (K_4 (K_2 + Q)) \quad (3)$$

и подставим во второе уравнение. Получим ДНУсЧП четвёртого порядка.

Выпишем ДНУсЧП для главного члена ряда теории возмущения $u(x, t)$ по малому параметру K_2 . Оно значительно упростится: в нём останется только две группы слагаемых (вместо пяти при $K_2 > 0$) одной степени однородности семь и шесть, которые имеют вид

$$K_5 u^4(x, t) A_1 A_2 A_3 + K_4^2 K_6 K_7^2 u^3(x, t) A_4 = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= (K_1 - K_3 - K_4 K_6) u(x, t) + d u''_{xx} - u'_t, \\ A_2 &= (K_1 - K_3 + i K_4 K_7) u(x, t) + d u''_{xx} - u'_t, \\ A_3 &= (K_1 - K_3 - i K_4 K_7) u(x, t) + d u''_{xx} - u'_t, \\ A_4 &= (K_1 - K_3) K_8 u^3 - K_8 u^2 u'_t + u(u'_t)^2 - u^2 u''_{xx} + \\ &\quad + 2d u'_t (u'_x)^2 - 2d u u'_x u''_{xt} + d K_8 u^2 u''_{xx} - d u u'_t u''_{xx} - \\ &\quad - d u u'_t u''_{xx} - 2d^2 (u'_x)^2 u''_{xx} + d^2 u (u''_{xx})^2 + d u^2 u'''_{xxt} + \\ &\quad + d u^2 u'''_{xxt} + 2d^2 u u'_x u'''_{xxx} - d^2 u^2 u''''_{xxxx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для уравнения (5) поставим задачу Коши с финитным начальным условием $u(x, t)|_{t=0} = q(x)$.

Во всех ДНУсЧП, которые следуют из моделей [1], существует слагаемое одной степени однородности, и оно разлагается на нетривиальных три множителя $A_1 A_2 A_3$. Важное свойство, выделяющее модель ФМСК из других рассмотренных моделей, заключается в том, что A_2 и A_3 являются *комплексно сопряжёнными*.

Замечание 2. Можно сделать важный промежуточный вывод, что в ФМСК существует «внутренняя» причина, вызывающая колебания с частотой $K_4 K_7$. Выяснить, как зависит коэффициент экспоненциального убывания решения и частота от параметров задачи, является для специалистов – биологов, физиков и биофизиков, которые создают новые лекарственные формы и приборы, – даже более важным, чем построение самого решения!

3. Связь решений ДНУсЧП (4) с решениями ДНУсЧП второго порядка. Параллельно с (4) в случае одной пространственной переменной $u(x, t)$ рассмотрим ДНУсЧП второго порядка параболического типа

$$u'_t - d u''_{xx} + H(t, u(x, t)) = 0, \quad (6)$$

где $H(t, u(x, t))$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

Решения уравнений (4) и (5) совпадают, если выполнено равенство

$$\begin{aligned} & -(u'_x)^2 L_1 - L_2 H H'_u(t, u) - K_5 u H^3(t, u) + L_3 H^2 + L_4 H u^2 + \\ & + K_5 (K_1 - K_3 - K_4 K_6) (K_1^2 - 2K_1 K_3 + K_3^2 + K_4^2 K_7^2) u^4 + \\ & + (K_1 - K_3) K_4^2 K_6 K_7^2 K_8 u^3 + K_4^2 K_6 K_7^2 u^2 H'_t(t, u) = 0, \\ L_1 &= d K_4^2 K_6 K_7^2 (2H(t, u) - 2u H'_u(t, u) + u^2 H''_{uu}(t, u)), \\ L_3 &= u (K_4^2 K_6 K_7^2 + K_5 (3K_1 - 3K_3 - K_4 K_6) u), \\ L_4 &= 3(K_1 - K_3)^2 K_5 u + 2(K_3 - K_1) K_4 K_5 K_6 u + K_4^2 K_7^2 (K_6 K_8 + K_5 u), \\ L_2 &= K_4^2 K_6 K_7^2 u^2. \end{aligned} \quad (7)$$

В более подробной работе авторы показали, почему и в каких случаях равенство (7) выполняется точно. Если (7) выполнено приближенно, то можно построить асимптотическое решение.

4. Метод построения приближённых решений ДНУсЧП (4). Применим метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНФКЗП) к уравнению (4), который был разработан в работах [5]–[6]. См. также [2]. Сделаем произвольную не фиксированную замену переменных

$$u(x, t) \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = U(\xi, \delta). \quad (8)$$

Ниже, для краткости, введено обозначение $U(\xi, \delta) = U$.

Введём обозначения (установим дифференциальные связи) [5]–[6]

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = Y(\xi, \delta), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = T(\xi, \delta). \quad (9)$$

Отсюда окончательно получим выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} &= Y(\xi, \delta) [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta], \\ -\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= T(\xi, \delta) [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta]. \end{aligned} \quad (10)$$

С необходимостью должно быть выполнено равенство смешанных производных $u''_{xt} = u''_{tx}$ в переменных ξ, δ . Это соотношение можно записать как

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} = 0. \quad (11)$$

Введем ещё две дифференциальные связи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial Y(\xi(x, t), \delta(x, t))}{\partial x} \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = M(\xi, \delta), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = \frac{\partial M(\xi(x, t), \delta(x, t))}{\partial x} \Big|_{x=x(\xi, \delta), t=t(\xi, \delta)} = R(\xi, \delta). \quad (13)$$

Аналогично получим:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) = [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta] M(\xi, \delta), \quad (14)$$

и формулу:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial M}{\partial \delta} \frac{\partial t}{\partial \xi} \right) = [x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta] R(\xi, \delta). \quad (15)$$

Здесь $M(\xi, \delta)$, $R(\xi, \delta)$ – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Уравнение (4) в новых переменных не приводим из-за громоздкости.

Таким образом ДНУсЧП четвёртого порядка (4) эквивалентно системе шести уравнений (10), (11), (14), (15) (плюс аналог (4)) с частными производными первого порядка.

Теорема 1. Пусть дано уравнение (4) и дана система шести уравнений с частными производными первого порядка (приведенная выше) на четыре раза непрерывно дифференцируемые функции $t(\xi, \delta)$, $x(\xi, \delta)$, $u(\xi, \delta)$, $Y(\xi, \delta)$, $T(\xi, \delta)$, $M(\xi, \delta)$, $R(\xi, \delta)$.

Тогда справедливы соотношения

$$t(\xi, \delta) = \xi, \quad M(\xi, \delta) = Y(\xi, \delta) Y'_\delta(\xi, \delta) / U'_\delta(\xi, \delta), \quad (16)$$

и справедливы предложения

$$\begin{aligned} t(\xi, \delta) &= \xi, \quad Y(\xi, \delta) = G(\xi, U(\xi, \delta)), \quad T(\xi, \delta) = \tilde{T}(\xi, U(\xi, \delta)), \\ x(\xi, \delta) &= X(\xi, U(\xi, \delta)), \quad M(\xi, \delta) = G(\xi, U) G'_U(\xi, U), \\ R(\xi, \delta) &= G(\xi, U) [(G'_U(\xi, U))^2 + G(\xi, U) G''_{UU}(\xi, U)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Функция $X(\xi, U)$ определяется из системы

$$X'_\xi(\xi, U) = -\tilde{T}(\xi, U)/G(\xi, U), \quad X'_U(\xi, U) = 1/G(\xi, U), \quad (18)$$

а функция $\tilde{T}(\xi, U)$ является решением дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$Y(\xi, \delta) T'_\delta(\xi, \delta) - T(\xi, \delta) Y'_\delta(\xi, \delta) + Y'_\delta U'_\xi - Y'_\xi U'_\delta = 0. \quad (19)$$

$$\tilde{T}(\xi, U) = m(\xi) G(\xi, U) + G(\xi, U) \int G'_\xi(\xi, U)/G^2(\xi, U) dU. \quad (20)$$

Функция $G(\xi, U)$ определяется из ДНУсЧП (следствие (4)) $\square$

В связи с ограничением объёма работы используем вышеприведенные формулы.

Теорема 2. Пусть дано ДНУсЧП (6). Тогда применение к (6) МНФКЗП по формулам (8)–(12) даёт систему четырёх ДНУсЧП первого порядка (10), (11), (14), и справедливы соотношения (16), (17). Функция $\tilde{T}(\xi, U)$ (20) является решением дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (19). Функция $G(\xi, U)$ определяется из ДНУсЧП

$$G'_\xi(\xi, U)/G^2(\xi, U) - d G''_{UU} + \frac{\partial}{\partial U}(H(\xi, U)/G(\xi, U)) = 0. \quad (21)$$

Комментарии к доказательству. Очевидно, что при данном способе (МНФКЗП) построения решений, в системе (10), (11), (14), (15) для уравнения (4) и системе (10)–(12) для уравнения

$$\tilde{T}(\xi, U) - d M(\xi, U) + H(\xi, U) = 0, \quad (22)$$

четыре первых уравнения двух систем ДУсЧП первого порядка совпадают. Когда функция U ограничена и мала, сформулирована

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда соотношение (7) приближённо выполняется в переменных ξ, δ , где в уравнении (21) функция $H(\xi, U)$ с комплекснозначным слагаемым, отвечающим за колебания, примет вид

$$H = (-K_1 + K_3 + K_4 K_6 + i K_4 K_7) U. \quad (23)$$

Комплекснозначный остаток (невязка (7)) содержит только четыре слагаемых, равномерно ограничен сверху и убывает по времени $t = \xi$

$$K_6 K_7 K_4^3 U^3 ((K_7 K_6 K_8 - 2 K_7 K_5 U) + i(K_7^2 K_8 + K_5 K_6 U)), \quad (24)$$

если выполнено неравенство $K_1 < K_3 + K_4 K_6$ $\square$

4. Построение «пульсирующих» решений. Полученные результаты, в данном случае, можно сформулировать в исходных переменных x, t . На группе преобразований сдвига можно положить $u'_x = P(t, u)$. Другие решения существуют, но выходят за рамки данной работы.

Теорема 4. Пусть дана задача Коши для ДНУсЧП уравнение (4) в области $\Omega = (\overline{R^1} \otimes [0, T])$, $T > 0$, с начальным условием $u(x, 0) = q(x)$ и для параметров задачи выполнено неравенство $K_1 < K_3 + K_4 K_6$.

Тогда существует асимптотическое равномерно ограниченное по переменной x , «пульсирующее» убывающее в «среднем» и равномерно ограниченное по переменной t решение, которое является одновременно точным решением задачи Коши для уравнения (6)

$$u(x, t) = \cos(K_4 K_7 t + \varphi) \exp((K_1 - K_3 - K_4 K_6)t) w(x, t) + C_1. \quad (25)$$

Здесь φ – константа, а функция $w(x, t)$ является решением линейного параболического уравнения с финитным начальным условием

$$w'_t - d w''_{xx}(x, t) = 0, \quad w(x, 0) = q(x). \quad (26)$$

Решение задачи (26) существует и даётся классическими формулами [7] $\square$

Свойства, описанные выше, обобщаются на случай многих переменных. В полярной системе координат были построены спиральные «пульсирующие» волны.

Литература

- [1] Zarnitsina V.I., Ataullakhanov F.I., Lobanov A.I., Morozova O.L. Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation // *Chaos*, V. 11, № 1, 2001, P. 57–70.
- [2] Вдовина Е. К., Волосов К. А. Математическое моделирование спиральных волн // *Математическое моделирование*, 2013, т. 25, №. 3, С. 14–24.
- [3] Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A. *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*. – Kluwer Academic publishers. Dordrecht / Boston / London 1995. – 316 p.
- [4] Богачевский В. Н., Повзнер А. Я. *Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений*. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
- [5] Волосов К. А. Методика анализа эволюционных систем с распределёнными параметрами. Диссертация на соискание уч. ст. д. ф-м. н., 2007, МИЭМ, <http://eqworld.ipmnet.ru>
- [6] Волосова А. К., Волосов К. А. Construction solutions of PDE in Parametric Form // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, V. 2009, Article ID 319269, 17 p. <http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269>
- [7] Волосов К. А. Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными // *Сибирский журнал индустриальной математики* 2008, № 11, №. 2(34), С. 29–39.
- [8] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения*. – М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОУПРУГОСТИ

Вельмисов П. А., Киреев С. В.

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновск

e-mail: velmisov@ulstu.ru, ksv1511@yandex.ru

Velmisov P. A., Kireev S. V. Investigation of the stability of solutions of a class of boundary value problems aeroelasticity. On the basis of the proposed nonlinear models and developed numerical method for the solution of the corresponding nonlinear boundary value problems is investigated static instability (divergence) of the elastic element of the design, streamlined and supersonic flow of ideal gas. Received bifurcation diagrams, showing the dependence of the maximal bending element of the flow velocity.

На основе предложенных нелинейных моделей и численного метода решения соответствующих нелинейных краевых задач исследуется статическая неустойчивость (дивергенция) упругого элемента конструкции, обтекаемой сверхзвуковым потоком идеального газа. Получены бифуркационные диаграммы, показывающие зависимость максимального прогиба элемента от скорости набегающего потока.

Введение. Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Исследования в этом направлении представлены в работах Белоцерковского С. М., Скрипача Б. К., Табачникова В. Г., Григолюка А. Г., Болотина В. В., Вольмира А. С., Лампера Р. Е., Шандарова Л. Г., Новичкова Ю. Н., Бисплингхоффа Р. Л., Эшли Х., Халфмана Р. Л., Фына Я. Ц., Фершинга Г., Ильюшина А. А., Кийко И. А., Алгазина С. Д., Мовчана А. А., Дж. Майлса, Пановко Я. Г., Губанова, Ильгамова М. А., Кудрявцева Б. Ю., Минасяна Д. М., Морозова В. И., Овчинникова В. В., Могилевича Л. И, Вельмисова П. А. и др. Решение задач о статической неустойчивости конструкций связано с теорией ветвления решения дифференциальных уравнений. Исследования в этом направлении проводились аналитическими и численными методами в работах Абботта Ж. П., Аткинсона К. Е., Бола Е., Крандалла М. Г., Рабиновича П. Х., Демулина М. Ж., Чена М., Холмеса П., Марсдена Ж., Кеенера Ж. П., Келлера Х. Б., Кубичека М., Марека М., Лангфорда В. Ф., Плаута Р. Х., Редиена Г. В., Зейдела Р., Стакгольда И., Вебера Х., Вайнберга М. М., Треногина В. А., Логинова Б. В., Сидорова Н. А., и др. В частности, результаты исследований устойчивости упругих элементов конструкций, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, приведены в работах Алгазина С. Д., Кийко И. А., Кудрявцева Б. Ю., Показеева В. В., Минасяна Д. М. [1–3, 7, 8, 11, 13], а также в работах авторов данной статьи [4–6, 9, 10, 12, 14–17]. На основе предлагаемых математических моделей исследуется ветвление решения задачи о статической неустойчивости (дивергенции) упругого элемента в сверхзвуковом потоке газа с классическими граничными условиями, а также с линейным

упругим закреплением концов. Исследование бифуркации проводилось численно с помощью разработанного метода, включающего в себя метод Рунге–Кутты 6-го порядка с контролем погрешности на шаге, метод Ньютона решения нелинейных уравнений и интегрирование с использованием квадратурных формул Ньютона–Котеса.

1. Дивергенция упругого элемента в сверхзвуковом потоке газа с классическими однородными граничными условиями. Предлагаемая математическая модель задачи об изгибных формах упругого элемента, который моделируется пластиной-полосой, в сверхзвуковом потоке газа описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением

$$Dw^{(4)} + Nw'' + \alpha w' + f(w) - \theta w'' \int_0^\ell (w')^2 dx = 0, \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_0 \rho_0 V^2}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad M = \frac{V}{a}, \quad \theta = \frac{EF}{2\ell(1 - \mu^2)}, \quad D = EJ$$

и совокупностью следующих четырех граничных условий в точках $x = 0$, $x = \ell$

$$c_0 w''(b) = g(w'(b)), \quad d_0 w'''(b) = h(w(b)), \quad b = 0, \quad b = \ell \quad (2)$$

При этом функции g , h и f имеют вид

$$g(w'(b)) = \sum_{k=1}^n c_k (w'(b))^{2k-1}, \quad h(w(b)) = \sum_{k=1}^m d_k (w(b))^{2k-1},$$

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} w^{2n+1}. \quad (3)$$

В (1) D – изгибная жёсткость пластины; N – сжимающее (растягивающее) усилие; V , ρ_0 , a , M – скорость газа, плотность, скорость звука, число Маха, соответствующие однородному потоку; $a_j (j = 1 \div \infty)$ – коэффициенты, характеризующие жесткость основания; интегральный член учитывает нелинейное воздействие продольного усилия; $\alpha w'$ – член, учитывающий аэродинамическое воздействие; $\alpha_0 = 1 (\alpha_0 = 2)$ соответствует одностороннему (двустороннему) обтеканию пластины; $w(x)$ – прогиб пластины; E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; F – площадь поперечного сечения; J – момент инерции сечения. Все коэффициенты, входящие в уравнение и граничные условия, постоянные. В (2) коэффициенты c_i , $d_j (i = 0 \div n, j = 0 \div m)$ – произвольные, часть из них может равняться нулю; в зависимости от значений этих коэффициентов условия могут быть или линейными, или нелинейными. Значения m и n могут быть равными ∞ . В качестве примера рассмотрим уравнение (1) вида

$$Dw^{(4)} + \alpha w' + a_3 w^3 - \theta w'' \int_0^\ell (w')^2 dx = 0. \quad (4)$$

Перейдем в уравнении (4) к безразмерным переменным. После замены $x = \ell \bar{x}$, $w = \ell \bar{w}$, где ℓ – некоторый характерный размер, величины с чертой – безразмерные переменные, приходим к уравнению

$$\bar{w}^{(4)} + \frac{\alpha \ell^3}{D} \bar{w}' + \frac{a_3 \ell^6}{D} \bar{w}^3 - \frac{\theta \ell^3}{D} \bar{w}'' \int_0^1 (\bar{w}')^2 d\bar{x} = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем для упрощения записи черточки будем опускать. В качестве примера исследуем решения уравнения (5) при следующих граничных условиях (левый конец свободен, правый жестко защемлен):

$$\bar{w}'(0) = 0, \quad \bar{w}'''(0) = 0, \quad \bar{w}(1) = 0, \quad \bar{w}'(1) = 0. \quad (6)$$

Задача (5), (6) решалась численно. Численная реализация заключается в сведении краевой задачи к начальной задаче Коши. Уравнение (5) четвертого порядка, в исходной постановке имеется два начальных условия. Поэтому для начальной задачи Коши не хватает двух условий. Запишем эти условия в следующем виде: $w(0) = \lambda$, $w''(0) = \nu$, где λ , ν – параметры. Тогда $w(1)$ и $w'(1)$ являются функциями λ и ν

$$F_1(\lambda, \nu) \equiv w(1, \lambda, \nu), \quad F_2(\lambda, \nu) \equiv w'(1, \lambda, \nu). \quad (7)$$

Решаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} w^{(4)} + \frac{\alpha \ell^3}{D} w' + \frac{a_3 \ell^6}{D} w^3 - \frac{\theta \ell^3}{D} w'' \int_0^1 (w')^2 dx = 0, \\ w(0) = \lambda, \quad w''(0) = \nu, \quad w'(0) = 0, \quad w'''(0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Задача Коши (8) будет соответствовать краевой задаче (5), (6), если выполняются условия

$$F_1(\lambda, \nu) = 0, \quad F_2(\lambda, \nu) = 0. \quad (9)$$

Параметры λ , ν будем определять с помощью Ньютоновского процесса, по формулам

$$\begin{pmatrix} \lambda_{n+1} \\ \nu_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \nu_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(\lambda_n, \nu_n)}{\partial \lambda} & \frac{\partial F_1(\lambda_n, \nu_n)}{\partial \nu} \\ \frac{\partial F_2(\lambda_n, \nu_n)}{\partial \lambda} & \frac{\partial F_2(\lambda_n, \nu_n)}{\partial \nu} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_1(\lambda_n, \nu_n) \\ F_2(\lambda_n, \nu_n) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Этот итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока не выполняются условия

$$|F_1| < \varepsilon_*, \quad |F_2| < \varepsilon_*, \quad (11)$$

где ε_* – заданная точность вычисления. Введем следующие обозначения. Пусть

$$w = y_1, \quad w' = y_2, \quad w'' = y_3, \quad w''' = y_4, \quad (12)$$

тогда интегро-дифференциальное уравнение в (8) можно записать в виде системы

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = y_4, \quad y_4' = -\frac{\alpha \ell^3}{D} y_2 - \frac{a_3 \ell^6}{D} y_1^3 + \frac{\theta \ell^3}{D} y_3 I, \quad (13)$$

где $I = \int_0^1 (w')^2 dx = \int_0^1 y_2^2 dx$. Обозначим

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ -\frac{\alpha\ell^3}{D}y_2 - \frac{a_3\ell^6}{D}y_1^3 + \frac{\theta\ell^3}{D}y_3I \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда задача Коши (8) примет вид

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y), \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \quad (15)$$

Задачу Коши (15) решаем методом Рунге–Кутты шестого порядка с контролем погрешности на шаге. Сложность задачи Коши заключается в том, что в уравнении (15) присутствует интегральное слагаемое, для вычисления которого требуются значения подынтегральной функции сразу на всем отрезке интегрирования, что делает невозможным прямое применение метод Рунге–Кутты. Поэтому значение интеграла в уравнении (15) может быть получено из следующего итерационного процесса. Представим решаемое уравнение в виде $D(w_k) + I(w_k) = 0$, где

$$I(w_k) = -\frac{\theta\ell^3}{D}w_k'' \int_0^1 w_k'^2 dx, \quad D(w_k) = w^{(4)} + \frac{\alpha\ell^3}{D}w_k' + \frac{a_3\ell^6}{D}w_k^3, \quad k = 1, 2, \dots$$

1. Решаем уравнение $D(w_1) = 0$ методом Рунге–Кутты по формулам

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\right), \\ k_4 &= hf\left(x + h, y - k_2 + 2k_3\right), \quad k_5 = hf\left(x + \frac{2h}{3}, y + \frac{1}{27}(7k_1 + 10k_2 + k_4)\right), \\ k_6 &= hf\left(x + \frac{h}{5}, y + \frac{1}{625}(28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)\right), \\ \Delta Y &= \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4), \quad Y(x + h) - Y(h) = r + O(h^6), \\ r &= \frac{1}{336}(42k_1 + 224k_3 + 21k_4 - 162k_5 - 125k_6). \end{aligned} \quad (16)$$

Получаем значения $w_1'(x)$ и $w_1''(x)$ ($k = 1$) на всем отрезке интегрирования, необходимые для вычисления интегрального слагаемого $I(w_1)$;

2. Находим $I(w_1)$. Выражение $I(w_1)$ содержит интеграл, который вычисляем с помощью квадратурной формулы Ньютона–Котеса. Пусть вычисляется интеграл $\int_a^b q(x) dx$. Отрезок интегрирования $[a; b]$ разделим на n одинаковых

частей длины $h = (b - a)/n$. Число n выбираем кратным 5, для того чтобы весь интервал интегрирования разбился на участки, на которых подынтегральную функцию $q(x)$ будем аппроксимировать интерполяционным многочленом Лагранжа $L_5(x)$ четвёртой степени $q(x) \approx L_5(x) = \sum_{i=0}^5 q(x_i)p_i(x)$, где $p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^5 \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ – весовая функция. Тогда интеграл $\int_a^b q(x) dx$ будет определяться в виде суммы интегралов вида

$$\int_{x_0}^{x_5} q(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_5} L_5(x) dx = \sum_{i=0}^5 p_i q(x_i) = 5h (p_0 q(x_0) + p_1 q(x_1) + p_2 q(x_2) + p_3 q(x_3) + p_4 q(x_4) + p_5 q(x_5)), \quad (17)$$

где $p_0 = p_5 = \frac{19}{288}$, $p_1 = p_4 = \frac{75}{288}$, $p_2 = p_3 = \frac{50}{288}$.

3. Решаем уравнение $D(w_2) + I(w_1) = 0$ методом Рунге–Кутты (15). Получаем значения $w'_2(x)$ и $w''_2(x)$ ($k = 2$) на всем отрезке интегрирования;

4. Находим $I(w_2)$, используя формулу (17);

5. И т. д.

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие $\max |w_k(x) - w_{k-1}(x)| < \varepsilon_*$, где ε_* – то же самое, что и в Ньютоновском процессе; $w_k(x)$ – прогиб на k -ом шаге; $w_{k-1}(x)$ – прогиб на $(k - 1)$ -ом шаге.

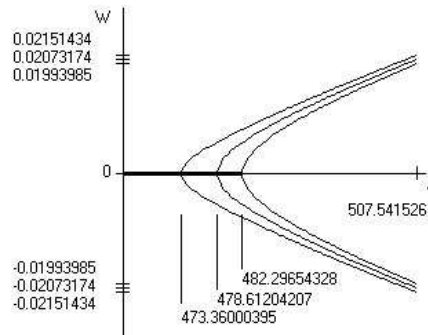


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы.

Численная реализация проведена с помощью программы, написанной на языке Delphi 7. Результатом работы программы является нахождение значения величины и определение формы прогиба пластины при различных заданных значениях возмущения ε . При решении поставленной задачи можно получить график $w(x)$, описывающий форму прогиба пластины и бифуркационные диаграммы, показывающие зависимость максимального прогиба пластины от скорости набегающего потока. Построены бифуркационные диаграммы, представленные на рис. 1 (построенные с помощью разработанной программы) и на рис. 2 (построенные в Mathcad 2001i Professional), при фиксированных коэффициентах изгибной жесткости $D_2 < D_0 < D_3$ в зависимости от изменения скорости потока сверх критических значений $\lambda_2 < \lambda_0 = s_0^3 < \lambda_3$. На диаграммах, представленных на рис. 1 и рис. 2, крайний левый график соответствует λ_2 , D_2 , средний – λ_0 , D_0 , крайний правый – λ_3 , D_3 . Графики на рисунках построены при: $a_3 = 1 \text{ Н/м}^4$, $\theta = 35 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$, $\ell = 0.4 \text{ м}$, $a_0 = 330 \text{ м/с}$, $D_1 = 1219 \text{ Нм}^2$,

$D_2 = 1220 \text{ Нм}^2$, $D_3 = 1221 \text{ Нм}^2$. Было проведено сравнение полученных численных решений с аналитическими с использованием математического пакета Mathcad 2001i Professional. С помощью этого пакета вычислялись коэффициенты, входящие в асимптотическое решение, полученное аналитически методом Ляпунова–Шмидта [6]. На рис. 3 представлены формы прогиба пластины асимптотического решения, где $\varphi(x)$ соответствует положительному решению ($\varphi(x) = w(x)$), $\psi(x)$ – отрицательному ($\psi(x) = -w(x)$), а на рис. 4 – численного решения. Точность совпадения асимптотического решения в первом приближении с численным решением составляет порядок 10^{-3} .

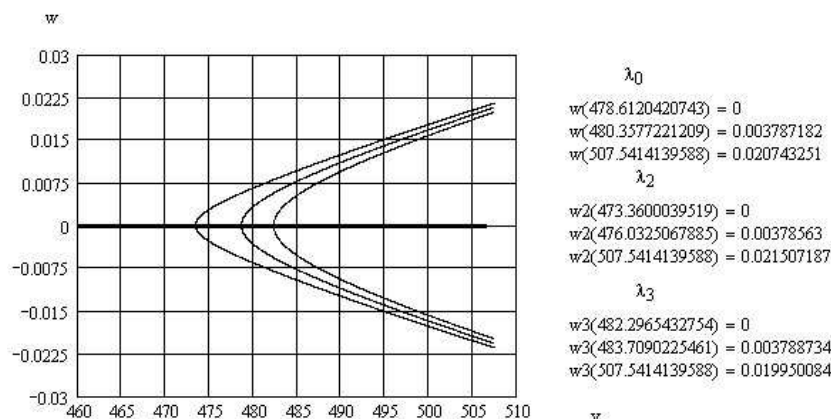


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы в Mathcad.

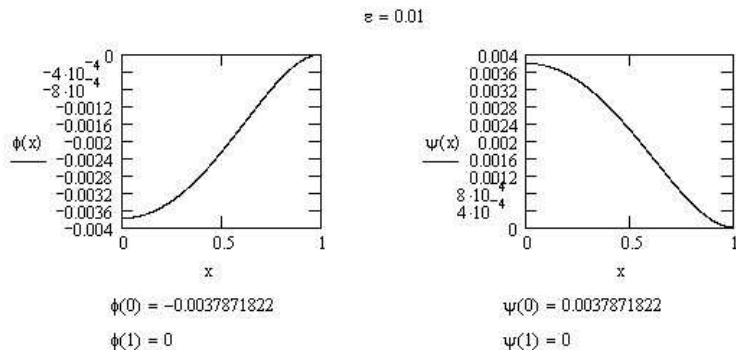


Рис. 3. Прогиб пластины для асимптотического решения

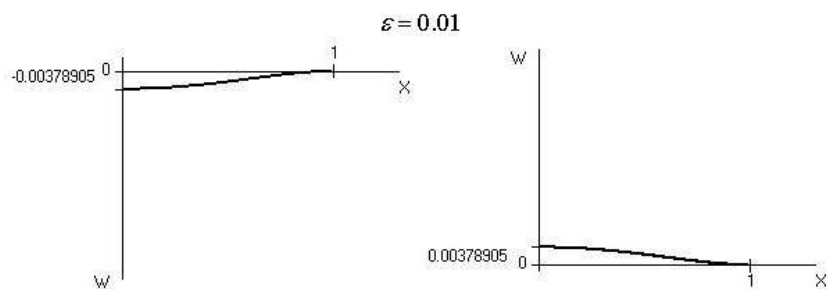


Рис. 4. Прогиб пластины при численном решении

2. Дивергенция упругого элемента в сверхзвуковом потоке газа с упругим закреплением концов. Математическая модель задачи описывается нелинейным интегро-дифференциальным уравнением (5) и граничными условиями (левый конец свободен, правый упруго закреплен)

$$\bar{w}''(0) = 0, \quad \bar{w}'''(0) = 0, \quad c\bar{w}(1) = D\bar{w}'''(1), \quad -c\bar{w}'(1) = D\bar{w}''(1). \quad (18)$$

В дальнейшем для упрощения записи черточки будем опускать. Задача (5), (18) решалась численно аналогично задаче из пункта 1 с помощью той же программы. В качестве параметров λ и ν в данном случае используется прогиб и угол поворот на левом конце:

$$w(0) = \lambda, \quad w'(0) = \nu. \quad (19)$$

Тогда $w(1) - (D/c)w'''(1)$ и $w'(1) + (D/c)w''(1)$ являются функциями λ и ν :

$$F_1(\lambda, \nu) \equiv w(1, \lambda, \nu) - (D/c)w'''(1, \lambda, \nu), \quad F_2(\lambda, \nu) \equiv w'(1, \lambda, \nu) + (D/c)w''(1, \lambda, \nu). \quad (20)$$

Решаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} w^{(4)} + \frac{\alpha\ell^3}{D}w' + \frac{a_3\ell^6}{D}w^3 - \frac{\theta\ell^3}{D}w'' \int_0^1 (w')^2 dx = 0, \\ w(0) = \lambda, \quad w'(0) = \nu, \quad w''(0) = 0, \quad w'''(0) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Задача Коши (21) будет соответствовать краевой задаче (5), (18), если выполняются условия (9). Параметры λ , ν будем определять с помощью Ньютоновского процесса, по формулам (10). Этот итерационный процесс будем продолжать до тех пор, пока не выполняются условия (11). Введем обозначения (12)–(14). Y_0 будет иметь вид $Y_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \nu & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда задача Коши (21) примет вид (15). Задачу Коши (15) решаем методом Рунге–Кутты шестого порядка с контролем погрешности на шаге по формулам (16), согласно алгоритму изложенному в пункте 1. Было также проведено сравнение полученных численных решений с аналитическими с использованием математического пакета Mathcad 2001i Professional. Относительная погрешность составляет 0.01%.

Литература

- [1] Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численно-аналитические исследование флаттера пластины произвольной формы в плане // ПММ. 197. Т. 61. Вып. 1. – С. 171–174.
- [2] Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // ЖПМТФ. 2003. Т. 44. № 4. – С. 35–42.
- [3] Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек – М.: Наука, 2006. – 246 с.
- [4] Вельмисов П. А., Киреев С. В. Численный метод решения задачи о статической неустойчивости пластины в сверхзвуковом потоке газа // Журнал “Труды Средневолжского математического общества”. № 1. 2004. – С. 166–170.

- [5] Вельмисов П. А., Киреев С. В. Численный метод решения задачи о бифуркации пластины в сверхзвуковом потоке газа // Журнал “Вестник”. УлГТУ. № 3. 2004. С. 28–31.
- [6] Вельмисов П. А., Киреев С. В. Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – 200 с.
- [7] Кийко И. А., Кудрявцев Б. Ю. Нелинейные аэроупругие колебания прямоугольной пластины // Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 2005. № 1. – С. 68–71.
- [8] Кийко И. А., Показеев В. В. Колебания и устойчивость вязкоупругой полосы в потоке газа // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 3. – С. 342–348.
- [9] Киреев С. В. Численный метод решения задачи о бифуркации пластины в сверхзвуковом потоке газа // Механика и процессы управления: Сборник научных трудов. Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 30–36.
- [10] Киреев С. В. Численный эксперимент в задаче о статической неустойчивости пластины // Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроматематика в науке и технике. Труды международной конференции. Том 4: Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – С. 116–121.
- [11] Кудрявцев Б. Ю. Флаттер упругой пластины, находящейся в потоке газа при умеренных сверхзвуковых скоростях // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. мат. мех. информ. 2005. Т. 11, вып. 3.
- [12] Морозов В. И., Овчинников В. В. Нелинейные задачи аэроупругой устойчивости крыла при отрывном обтекании // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. – С. 158–170.
- [13] Минасян Д. М. Флаттер упругой пластинки при малых сверхзвуковых скоростях потока газа: Сравнительный анализ // Изв. АН Армении. Механика. 2001. Т. 54, № 3.
- [14] Velmisov P. A., Kireev S. V. Numerical solution of the bifurcation problem of the design elements subject to aerohydrodynamic effects // Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics ROMAI JOURNAL. Vol. 2, № 2. 2006. – P. 195–203.
- [15] Velmisov P. A., Kireev S. V. Mathematical Modeling in Problems of Static Instability of Elastic Element of Constructions Upon Aero-Hydrodynamic Influence // Applications of Mathematics in Engineering and economics: Proceedings of the 32nd International Conference. Sozopol, Bulgaria: Softtrade Sofia, 2007. – P. 50–65.
- [16] Velmisov P. A., Kireev S. V., Kuznetsov A. O. Stability and Bifurcation of a Plate in a Supersonic Gas Flow // Applications of Mathematics in Engineering: Proceedings of the XXIV Summer School. Sozopol 98, Bulgaria: Heron Press, Sofia, 1999. – P. 41–46.
- [17] Velmisov P. A., Kireev S. V. Asymptotical solution of problem about plate stability in supersonic gas flow // Applications of Mathematics in Engineering: Proceedings of the XXVII Summer School. Sozopol, Bulgaria: Heron Press, Sofia, 2002. – P. 188–196.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А.

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновск

e-mail: velmisov@ulstu.ru, kazakovaua@mail.ru

Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. Asymptotic equations of transonic gas flows.

The article is devoted to the development of the mathematical theory of gas flow with a speed close to the speed of sound, namely transonic gas flows, i.e. flows that contain both subsonic and supersonic region. The main problems arising in the study of such flows should be classified as non-linearity and mixed type equations describing transonic flow. Transonic gas flows taking into account the transverse perturbations are studied on the basis of nonlinear equation obtained in this paper. Some exact particular solutions of this equation are constructed and their application to solving a number of transonic aerodynamics problems are shown. In particular, a solution of polynomial form describing axisymmetric gas flow in Laval nozzles with constant acceleration and flow swirling is obtained. There are investigate the unsteady flows in the channels between the rotating planes. The partical solutions are shown, and the examples of steady flows are constructed on their basis. The asymptotic equation, describing the flow arising from unseparated and separated flow of the body, a little different from the cylindrical, is obtained.

Статья посвящена развитию математической теории движения газа со скоростью, близкой к скорости звука, а именно трансзвуковых течений газа, т. е. течений, содержащих одновременно дозвуковые и сверхзвуковые области. К основным проблемам, возникающим при изучении таких течений, следует отнести нелинейность и смешанный тип уравнений, описывающих околосзвуковые течения. На основе полученного в статье асимптотического нелинейного уравнения исследуются трансзвуковые течения газа, учитывающие поперечные по отношению к основному потоку возмущения. Выведены асимптотические условия на фронте ударной волны и условия на обтекаемой поверхности, а также записаны уравнение звуковой поверхности и асимптотическая формула для определения давления. Построены некоторые точные частные решения этого уравнения и указаны их приложения к решению ряда задач трансзвуковой аэродинамики. В частности, получено решение полиномиального вида, описывающее осесимметричные течения газа в соплах Лаваля с постоянным ускорением в направлении оси сопла и поперечной закруткой потока. Также исследуются нестационарные течения в каналах между вращающимися плоскостями. Указаны частные решения, на основе которых построены примеры стационарных течений. Получено асимптотическое уравнение, описывающее течения, возникающие при безотрывном и отрывном обтекании тела, мало отличающегося от цилиндрического.

Введение. Задачи аэродинамики, связанные с переходом через скорость звука, имеют большое прикладное значение. Одной из важных задач является задача обтекания тела безграничным потоком. Этот класс задач играет значительную роль в аэродинамике крыла и снаряда, так как полет многих современных летательных аппаратов происходит в условиях трансзвукового режима обтекания. Результаты анализа и расчёта задач обтекания используются

при решении ряда актуальных проблем высокоскоростной (реактивной) авиации и внешней баллистики. Другим важным направлением применения теории трансзвуковых течений является расчет движения газа в соплах реактивных двигателей. Трансзвуковые течения характерны тем, что в них одновременно присутствуют сверхзвуковая область (область гиперболичности) и дозвуковая (область эллиптичности), при этом граница раздела (поверхность параболитичности), которая является звуковой поверхностью, заранее неизвестна. Смешанный тип и нелинейность уравнений, описывающих движение газа с околосзвуковой скоростью, делает проблему расчёта трансзвуковых течений чрезвычайно сложной. Аналитическое исследование трансзвуковых течений на основе точных уравнений газовой динамики фактически невозможно, поэтому для изучения движения газа в околосзвуковом диапазоне скоростей применяется приближенное (асимптотическое) уравнение. Основы теории трансзвуковых течений были заложены на заре развития сверхзвуковой авиации в 1946–1950 гг. С. В. Фальковичем [26], Т. Карманом [2], Л. В. Овсянниковым [21], Ф. И. Франклем [27], К. Г. Гудерлеем [15] и др. Для нестационарных течений приближённое околосзвуковое уравнение было получено в работе [3], при этом основная сложность исследования заключается в том, что даже в приближенной постановке указанная проблема нелинейна. Дальнейшее развитие теория трансзвуковых течений получила в работах О. С. Рыжова [18–20, 22, 24, 25], Ю. Б. Лифшица [18–20], Э. Г. Шифрина [28]. Исследованию нестационарных околосзвуковых течений посвящены работы Т. С. Adamson [1], П. А. Вельмисова [10–11], С. В. Фальковича [10, 26]. В работах S. Tomotika [6–7], К. Tamada [6], П. А. Вельмисова [10–12], О. С. Рыжова [18–19, 24–25], Ю. Б. Лифшица [18–19], С. В. Фальковича [10, 26] изучаются течения в соплах Лавала. Примеры расчетов в соплах и при обтекании летательных аппаратов для установившихся и неуставившихся течений представлены в работах [1, 10–13, 24, 26]. На структуру течений газа в некоторых случаях существенное влияние оказывают вязкость и теплопроводность. Учет вязкости проводился в работах М. Sichel [4–5], О. С. Рыжова, Г. М. Шефтера [23], П. А. Вельмисова, С. В. Фальковича [9]. Вследствие нелинейности трансзвукового уравнения большой интерес представляет вопрос отыскания точных частных решений, которые необходимы для того, чтобы на основе примеров течений, построенных с их помощью, изучить характерные свойства околосзвуковых течений. Эти решения также нужны для проверки различных численных методов исследования трансзвуковых течений, в этом случае они являются тестирующими примерами. Проблеме построения частных решений посвящены работы перечисленных выше авторов, а также авторов настоящей статьи [8, 14, 16, 17].

1. Вывод асимптотических уравнений и условий. Безвихревые изэнтропические течения газа в цилиндрических безразмерных координатах x , r , θ описываются уравнением:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + 2\Phi_r \Phi_{rt} + \frac{2}{r^2} \Phi_\theta \Phi_{\theta t} + 2\Phi_x \Phi_r \Phi_{rx} + \frac{2}{r^2} \Phi_x \Phi_\theta \Phi_{\theta x} + \frac{2}{r^2} \Phi_\theta \Phi_r \Phi_{\theta r} + \\ + \Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_r^2 \Phi_{rr} + \frac{1}{r^4} \Phi_\theta^2 \Phi_{\theta\theta} - a^2 \left(\Phi_{xx} + \Phi_{rr} + \frac{1}{r} \Phi_r + \frac{1}{r^2} \Phi_{\theta\theta} \right) = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

$$a^2 = \rho^{\chi-1} = p^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \frac{\chi+1}{2} - \frac{\chi-1}{2} \left(2\Phi_t + \Phi_x^2 + \Phi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2 \right). \quad (2)$$

В (1)–(2) $\Phi(x, r, \theta, t)$ – потенциал скорости, t – время, a – скорость звука, ρ – плотность, p – давление, χ – показатель адиабаты Пуассона, индексы снизу обозначают частные производные.

Введём для $\Phi(x, r, \theta, t)$ асимптотическое разложение

$$\Phi = x + \varepsilon\psi(r, \theta, t^0) + \varepsilon^3\varphi(x^0, r, \theta, t^0) + \dots, \quad x = \varepsilon x^0, \quad t = \frac{1}{\varepsilon}t^0, \quad (3)$$

где ε – малый параметр, функция $\varphi(x^0, r, \theta, t^0)$ определяет основное течение, а функция $\psi(r, \theta, t^0)$ задает поперечное возмущение. Подставляя (3) в (1)–(2) и оставляя члены старшего порядка, получим для функции $\varphi(x^0, r, \theta, t^0)$ трансзвуковое уравнение:

$$2\varphi_{x^0 t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0 x^0} + 2\psi_r\varphi_{x^0 r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{x^0 \theta} - \Delta\varphi + \frac{\chi-1}{2} \left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2 \right) \varphi_{x^0 x^0} = L(\psi). \quad (4)$$

В (4) введены обозначения

$$\begin{aligned} -L(\psi) &\equiv \psi_{t^0 t^0} + 2\psi_r\psi_{rt^0} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_{\theta t^0} + \psi_r^2\psi_{rr} + \frac{1}{r^4}\psi_\theta^2\psi_{\theta\theta} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_r\psi_{r\theta} - \frac{1}{r^3}\psi_r\psi_\theta^2, \\ \Delta\varphi &\equiv \varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Функция $\psi(r, \theta, t^0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$.

Если $\psi \equiv 0$, то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя–Рейсснера–Тзяна [3]

$$2\varphi_{x^0 t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0 x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} = 0,$$

которое в стационарном случае переходит в уравнение смешанного типа Кармана–Фальковича [2, 26]: $(\chi + 1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0 x^0} - \varphi_{rr} - \frac{1}{r}\varphi_r - \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} = 0$.

Уравнение (4) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело бокового (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси x) возмущения основного трансзвукового потока (для возмущающего поперечного течения $\Phi_r, \Phi_\theta \sim \varepsilon$, для основного течения $\Phi_r, \Phi_\theta \sim \varepsilon^3$). Для внешнего обтекания летательных аппаратов таким возмущением является, например, боковой, меняющий свою скорость с течением времени ветер $\psi = V_\infty(t)r \cos(\theta + \alpha(t))$. Для внутреннего обтекания, например для течений в соплах, таким возмущением может быть закрутка потока ($\psi = \Gamma(t)\theta$).

При переходе через ударную волну, заданную уравнением $g(x, y, z, t) = 0$, решения уравнений газовой динамики должны удовлетворять на её фронте условиям Ренкина–Гюгонио:

$$\begin{aligned} (g_t + \Phi_x^*g_x + \Phi_y^*g_y + \Phi_z^*g_z)(g_t + \Phi_x g_x + \Phi_y g_y + \Phi_z g_z) = \\ = \frac{\chi-1}{\chi+1}(g_t + \Phi_x g_x + \Phi_y g_y + \Phi_z g_z)^2 + \frac{2a^2(\Phi)}{\chi+1}(g_x^2 + g_y^2 + g_z^2), \quad \Phi = \Phi^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь Φ и Φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны, $a^2(\Phi)$ задается выражением (2). Условия на фронте ударной волны $x^0 = x^0(r, \theta, t^0)$ получим из условий (5), подставляя в них разложение (3) и оставляя члены старшего порядка:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial x^0}{\partial t^0} + \left(\frac{\partial x^0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \theta}\right)^2 + 2\psi_r \frac{\partial x^0}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta \frac{\partial x^0}{\partial \theta} = \\ = \frac{\chi-1}{2}\left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + \frac{\chi+1}{2}(\varphi_{x^0} + \varphi_{x^0}^*), \quad \varphi = \varphi^*. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь φ и φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны. Если в (6) положить $\varphi \equiv \varphi^*$, то получим характеристическое уравнение для (4).

Выведем условия на обтекаемой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической, задав её в виде

$$r = r_0(\theta, t^0) + r_2(x^0, \theta, t^0)\varepsilon^4 + \dots \quad (7)$$

Подставляя (3) и (7) в точное условие непротекания $-\Phi_x r_x + \Phi_r - r^{-2}r_\theta \Phi_\theta = r_t$ и оставляя старшие члены, получим:

$$\psi_r - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} \psi_\theta = \frac{\partial r_0}{\partial t^0}, \quad \varphi_r - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} \varphi_\theta = \frac{\partial r_2}{\partial x^0}. \quad (8)$$

Значения φ_r , φ_θ , ψ_r , ψ_θ в (8) вычисляются при $r = r_0(\theta, t^0)$.

Уравнение звуковой поверхности ($V^2 = a^2$) в трансзвуковом приближении принимает вид

$$N \equiv \frac{\chi+1}{2}\left(\psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + (\chi-1)\psi_{t^0} + (\chi+1)\varphi_{x^0} = 0. \quad (9)$$

Для установившихся течений уравнение (4) имеет смешанный тип. В этом случае звуковая поверхность $N = 0$ является поверхностью параболичности уравнения (4), при этом в сверхзвуковой области (области гиперболичности) $N > 0$, в дозвуковой области (области эллиптичности) $N < 0$.

Подставляя (3) в выражение для давления (2), проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены, получим асимптотическую формулу для определения давления

$$P = 1 - \chi\varepsilon^2 \left(\psi_{t^0} + \varphi_{x^0} + \frac{1}{2}\psi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2 \right). \quad (10)$$

2. Некоторые точные частные решения трансзвукового уравнения (4).

а. Уравнение (4) имеет решение полиномиального вида (индекс ноль у переменных x , t будем здесь и далее опускать):

$$\varphi = \sum_{k=0}^3 \varphi_k(r, \theta, t)x^k. \quad (11)$$

В классе решений (11) в случае установившихся течений содержится решение, которое описывает течение газа в кольцеобразных осесимметричных соплах Лавалья с постоянным ускорением ($\varphi_{xx} = \text{const}$) и учитывает закрутку потока ($\psi = \Gamma\theta$, $\Gamma = \text{const}$):

$$\varphi = ax^2 + (\chi + 1)a^2r^2x + \left[\frac{\chi - 1}{2}\Gamma^2a \ln^2 r + \frac{1}{8}(\chi + 1)^2a^3r^4 \right]. \quad (12)$$

Уравнение звуковой поверхности для (12) находим согласно (9):

$$x = -\frac{\chi + 1}{2}ar^2 - \frac{\Gamma^2}{4ar^2}.$$

Условия (8) принимают вид: $\frac{\partial r_0}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial r_2}{\partial x} = \varphi_r$ (φ_r вычисляется при $r = r_0$). Тогда получим уравнения стенок сопла:

$$r = r_k + \varepsilon^4 \left[r_k a^2 (\chi + 1) x^2 + \left((\chi - 1) \Gamma^2 a \frac{\ln r_k}{r_k} + \frac{1}{2} (\chi + 1)^2 a^3 r_k^3 \right) x \right], \quad (13)$$

$$r_k = \text{const}, \quad k = 1, 2.$$

б. Рассмотрим случай, соответствующий движению газа между вращающимися плоскостями $\theta = \theta_1(t)$, $\theta = \theta_2(t)$. В этом случае

$$\psi = r^2(a(t) \cos 2\theta + b(t) \sin 2\theta) = r^2 g(\theta, t), \quad (14)$$

при этом в (4) $L(\psi) = r^2 G(\theta, t)$,

$$G(\theta, t) = 8(a'a + b'b) + 8(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)(2ab \sin 4\theta + a^2 \cos 4\theta - b^2 \cos 4\theta) + a'' \cos 2\theta + b'' \sin 2\theta.$$

Подставляя (14) в (4), получим уравнение для $\varphi(x, r, \theta, t)$:

$$2\varphi_{xt} + (\chi + 1)\varphi_x \varphi_{xx} + 4r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{xr} - \Delta\varphi + 4(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_{x\theta} + (\chi - 1)r^2(a' \cos 2\theta + b' \sin 2\theta + 2a^2 + 2b^2)\varphi_{xx} = -r^2 G(\theta, t). \quad (15)$$

Уравнение (15) допускает решение вида (11). Тогда получим систему четырёх уравнений для функций $\varphi_0(r, \theta, t)$, $\varphi_1(r, \theta, t)$, $\varphi_2(r, \theta, t)$, $\varphi_3(r, \theta, t)$:

$$\begin{cases} 18\varphi_3^2(\chi + 1) - \Delta\varphi_3 = 0, \\ 6\varphi_{3t} + 18(\chi + 1)\varphi_2\varphi_3 + 12(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_{3\theta} - \Delta\varphi_2 + \\ + 12r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{3r} = 0, \\ 4\varphi_{2t} + (\chi + 1)(6\varphi_1\varphi_3 + 4\varphi_2^2) + 8r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{2r} - \Delta\varphi_1 + \\ + 6(\chi - 1)r^2(a' \cos 2\theta + b' \sin 2\theta + 2a^2 + 2b^2)\varphi_3 + 8(b \cos 2\theta - \\ - a \sin 2\theta)\varphi_{2\theta} = 0, \\ 2\varphi_{1t} + 2(\chi + 1)\varphi_1\varphi_2 + 4r(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)\varphi_{1r} - \Delta\varphi_0 + \\ + 2(\chi - 1)r^2(a' \cos 2\theta + b' \sin 2\theta + 2a^2 + 2b^2)\varphi_2 + \\ + 4(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)\varphi_{1\theta} = r^2 G(\theta, t). \end{cases} \quad (16)$$

Система (16) допускает частное решение

$$\begin{aligned} \varphi_3(r, \theta, t) &= r^{-2} f_3(\theta, t), & \varphi_2(r, \theta, t) &= f_2(\theta, t), \\ \varphi_1(r, \theta, t) &= r^2 f_1(\theta, t), & \varphi_0(r, \theta, t) &= r^4 f_0(\theta, t). \end{aligned} \quad (17)$$

В случае $f_3(\theta, t) = 0$ решение (11) принимает вид:

$$\varphi(x, r, \theta, t) = f_2(\theta, t)x^2 + f_1(\theta, t)r^2x + f_0(\theta, t)r^4. \quad (18)$$

Это решение, удовлетворяющее условию конечности скорости на оси $r = 0$, описывает течения в каналах. Согласно (16), получим систему для трех функций $f_0(\theta, t)$, $f_1(\theta, t)$, $f_2(\theta, t)$:

$$\begin{cases} f_{2\theta\theta} = 0, \\ 4f_1 + f_{1\theta\theta} = 4f_{2t} + 4(\chi + 1)f_2^2 + 8(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)f_{2\theta}, \\ 16f_0 + f_{0\theta\theta} = -G(\theta, t) + 2f_{1t} + 2(\chi + 1)f_1f_2 + 4(b \cos 2\theta - a \sin 2\theta)f_{1\theta} + \\ + 8(a \cos 2\theta + b \sin 2\theta)f_1 + 2(\chi - 1)(a' \cos 2\theta + b' \sin 2\theta + 2a^2 + 2b^2)f_2. \end{cases} \quad (19)$$

Общее решение системы (19) несложно записать, в частности, $f_2(\theta, t) = \alpha(t)\theta + \beta(t)$, где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – произвольные функции. Граничные условия для $g(\theta, t)$, $f_n(\theta, t)$, $n = 0, 1, 2$ на плоскостях $\theta = \theta_k(t)$, $k = 1, 2$ определим, подставляя (14), (18) в (3), и затем удовлетворяя условию непротекания $\Phi_\theta(x, r, \theta_k(t), t) = r^2\theta'_k(t)$:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta_k(t), t) = \theta'_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial f_n}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_n}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_2} = 0, \quad n = 0, 1, 2. \quad (21)$$

Функции $a(t)$, $b(t)$ в (14) определяются согласно (20): $a(t) = \frac{1}{A}(\theta'_2 \cos 2\theta_2 - \theta'_1 \cos 2\theta_1)$, $b(t) = \frac{1}{A}(\theta'_2 \sin 2\theta_1 - \theta'_1 \sin 2\theta_2)$, где $A = 2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2)$. Из условий (21) находятся произвольные функции, зависящие от t и входящие в выражения для $f_n(\theta, t)$, $n = 0, 1, 2$.

в. В частном случае, рассмотрим решение вида (18) для установившихся течений

$$\varphi(x, r, \theta) = f_2(\theta)x^2 + f_1(\theta)r^2x + f_0(\theta)r^4. \quad (22)$$

В этом случае функцию $\psi(r, \theta)$, ограниченную при $r \rightarrow 0$, можно задать в виде

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n} (A_n \cos \lambda_n \theta + B_n \sin \lambda_n \theta),$$

где $\lambda_n > 0$, A_n , B_n – произвольные константы. В качестве примера рассмотрим $\psi(r, \theta) = A_1 r^2 \cos 2\theta$. Подставляя $\psi(\theta, r)$ и (22) в (4), получим систему трех уравнений для функций $f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$:

$$\begin{cases} f_2'' = 0, \\ 4f_1 + f_1'' = 4(\chi + 1)f_2^2 - 8A_1 \sin 2\theta f_2', \\ 16f_0 + f_0'' = 2(\chi + 1)f_1f_2 - 4A_1 \sin 2\theta f_1' + 8A_1 \cos 2\theta f_1 + \\ + 4A_1^2(\chi - 1)f_2 - 8A_1^3 \cos 2\theta \cos 4\theta. \end{cases} \quad (23)$$

Решение системы (23), для которого выполняется условие периодичности $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = C_1, \\ \varphi_1 = C_1^2(\chi + 1) + C_2 \cos 2\theta + C_3 \sin 2\theta, \\ \varphi_0 = \frac{A_1^3 \cos 6\theta}{5} + \frac{\cos 4\theta}{8} (4A_1^2 C_1^2(\chi + 1) + C_1 C_2(\chi + 1) + 8C_4) + \\ + \frac{\sin 4\theta}{8} (8C_5 + (\chi + 1)C_1 C_3) + \frac{\cos 2\theta}{6} (C_1(\chi + 1)(C_2 + 4A_1 C_1) - 2A_1^3) + \\ + \frac{\sin 2\theta}{6} (\chi + 1)C_1 C_3 + \frac{A_1^2 C_1(\chi - 1)}{4} + \frac{A_1 C_2}{30} + \frac{C_1^3(\chi + 1)^2}{120}, \end{array} \right.$$

где C_k – произвольные константы ($k = 1 \div 5$).

г. Рассмотрим обтекание поверхности, мало отличающейся от цилиндра ($r_0 = R$). В этом случае, предполагая поперечное обтекание поверхности безотрывным, положим $\psi = V_\infty \cos \theta (r + R^2 r^{-1})$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$\begin{aligned} 2\varphi_{xt} + (\chi + 1)\varphi_x \varphi_{xx} + 2V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \varphi_{xr} - \Delta\varphi - \\ - 2V_\infty \frac{\sin \theta}{r} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \varphi_{x\theta} + \frac{\chi - 1}{2} V_\infty^2 \varphi_{xx} \left(1 - 2\frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{R^4}{r^4}\right) = \\ = -2 \left(\frac{R^2}{r^3}\right) V_\infty^3 \cos \theta \left(1 - \frac{2R^2}{r^2} + \frac{R^4}{r^4} - 4\sin^2 \theta\right). \end{aligned}$$

Литература

- [1] Adamson T. C. Unsteady transonic flows in two-dimensional channels // Journal of Fluid Mechanics. – 1972. – v. 52, issue 03. – P. 437–449.
- [2] Karman Th. von. The similarity law of transonic flow // J. Math. Phys. – 1947. – 26, № 3. – P. 182–190.
- [3] Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // Jour. Math. Phys. – 1948. – Vol. 27, № 3. – P. 220–231.
- [4] Sichel M. Structure of weak non-hygoniot schocks // Phys. Fluids. – 1963. – Vol. 6, №15. – P. 653–662.
- [5] Sichel M. The effect of longitudinal viscosity on the flow at a nozzle throat // J. of Fluid. Mech. – 1966. – Vol. 25, № 4. – P. 769–786.
- [6] Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids // Part I, Quart.Appl.Math. – 1949. – Vol. 7, № 4. – P. 381–397.
- [7] Tomotika S., Hasimoto Z. On the transonic flow of a compressible fluid through an axially symmetrical nozzle // J. Math. Phys. – 1950. – Vol. 29, № 2.
- [8] Vel'misov P. A., Todorov M. D., Kazakova Ju. A. Some classes of the solutions of aerohydromechanic equations // American Institute of Physics Conference Proceedings. – 2009. – Vol. 1067. – P. 427–441.
- [9] Вельмисов П. А., Фалькович С. В. К теории околосвуковых течений вязкого газа // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 52–61.

- [10] Вельмисов П. А., Фалькович С. В. Неустановившиеся течения газа в соплах Лаваля с местными сверхзвуковыми зонами // ПММ. – 1975. – Т. 39, вып. 2. – С. 271–279.
- [11] Вельмисов П. А. К вопросу о неустановившемся движении газа в соплах Лаваля // Известия вузов, Математика. – 1976. – № 12. – С. 3–10.
- [12] Вельмисов П. А. О единственности решения прямой задачи сопла Лаваля // Известия вузов, Математика. – 1979. – № 1. – С. 15–17.
- [13] Вельмисов П. А., Маценко П. К. О некоторых задачах внешнего пространственного обтекания тел околозвуковым потоком газа // Изв. вузов. Матем. – 1986. – № 9. – С. 10–16.
- [14] Вельмисов П. А., Казакова Ю.А. О параметрических решениях дифференциальных уравнений с частными производными; приложения в трансзвуковой газовой динамике // Журнал СВМО. – 2010. – № 4. – С. 30–36.
- [15] Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. – Москва: ИЛ, 1960. – 421 с.
- [16] Заславский Б. И., Клепикова Н. А. Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа // ПМТФ. – 1965. – № 6. – С. 65–68.
- [17] Казакова Ю. А. О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2011. – № 2(23). – С. 289–294.
- [18] Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности сопла Лаваля // ДАН СССР. – 1964. – 154, № 2. – С. 290–293.
- [19] Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. О причинах образования ударных волн в соплах Лаваля // ДАН СССР. – 1964. – 154, № 5. – С. 1052–1055.
- [20] Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. О некоторых точных решениях уравнений трансзвуковых течений газа // ЖВМиМФ. – 1964. – Т. 4. № 5. – С. 954–958.
- [21] Овсянников Л. В. Исследование газовых течений с прямой дозвуковой линией // Труды Ленинградской Военно-Воздушной инженерной академии им. А. Ф. Можайского. – 1950. – Вып. 33. – С. 3–24.
- [22] Рыжов О. С. Некоторые вырожденные околозвуковые течения // ПММ. – 1958. – Т. 22, вып. 2. – С. 260–264.
- [23] Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений // ПММ. – 1964. – Т. 28, вып. 6. – С. 996–1007.
- [24] Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. – М.: ВЦ АН СССР, 1965. – 238 с.
- [25] Рыжов О. С. О работе сопел Лаваля в нерасчетных режимах // ЖВМиМФ. 7:4 (1967). – С. 859–866.
- [26] Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля // ПММ. – 1946. – № 10. – С. 503–512.
- [27] Франкль Ф. И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973. – 712 с.
- [28] Шифрин Э. Г. Потенциальные и вихревые трансзвуковые течения идеального газа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с.

ХОПФ–ХОПФ БИФУРКАЦИЯ ПРИ 2:1 РЕЗОНАНСЕ. ХАОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Волков Д. Ю.^{1,2}, Галунова К. В.³

Санкт-Петербургский государственный университет¹

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена²

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет³

Санкт-Петербург

e-mail:dmitrivolkov@mail.ru

Volkov D. Yu. Galunova K. V. 2:1 Resonant Hopf – Hopf bifurcation. Chaotic solution Analogy between Hopf-Hopf bifurcation of equilibrium in dissipative system with resonance 2:1, generation of second harmonic in nonlinear optics and resonant interaction of waves in a plasma is presented. This analogy leads to the following predictions: the existence of chaotic solution in the small neighbourhood of equilibrium with resonance 2:1.

В статье устанавливается аналогия между Хопф–Хопф бифуркацией состояния равновесия в диссипативной системе при резонансе 2:1, генерацией второй гармоникой в нелинейной оптике и резонансным взаимодействием волн в плазме. Это аналогия позволяет, в частности, установить существование хаотических решений в окрестности состояния равновесия при 2:1 резонансе.

Введение. В работе устанавливается аналогия между тремя динамическими системами. Первая система возникает при описании Хопф–Хопф бифуркации состояния равновесия при 2:1 резонансе, вторая система описывает генерацию второй гармоники при прохождении света через кристалл, а третья система позволяет проанализировать резонансное взаимодействие волн в нелинейной среде. В статье кратко выводятся системы, описывающие каждую задачу и отмечаются основные работы, посвященные этим системам. Доказывается, что системы, описывающие вторую и третью модели, являются частными случаями системы первой модели. В системе, описывающей резонансное взаимодействие волн, многими исследователями были обнаружены хаотические режимы. Поэтому из установленной аналогии следует, что при 2:1 резонансе существуют хаотические(квазислучайные) решения.

1. Хопф–Хопф бифуркация при резонансе 2:1. Одним из интересных вопросов теории дифференциальных уравнений является вопрос о бифуркациях состояний равновесия. Классическая бифуркационная теорема Андронова–Хопфа [9, 12] дает достаточные условия появления (бифуркации) периодического решения из состояния равновесия. Одно из условий стандартной теоремы есть условие отсутствия резонансов: матрица линейного приближения векторного поля имеет одну пару чисто мнимых собственных чисел $\pm i\omega$, $\omega > 0$ и нет других собственных чисел вида $ik\omega$, где k целое число [9]. Более сложным является случай, когда имеются две пары чисто-мнимых собственных чисел $\pm i\omega_1$ и $\pm i\omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 > 0$ и отношение ω_2/ω_1 рационально,

т. е. резонанс между невозмущенными частотами. Такой случай часто называют Хопф–Хопф бифуркацией. Полностью такая бифуркация не изучена, так как при наличии резонансов поведение траекторий значительно усложняется. Наиболее интересны “сильные” резонансы: $\omega_2/\omega_1 = 1, 2$ и 3 . Исследованию бифуркаций при $2:1$ резонансе в диссипативных системах посвящены работы [14, 15, 13, 3, 4, 19]. Первая подробная работа, посвященная этой бифуркации – работа [14]. В этой работе выведена усеченная нормальная форма до членов третьего порядка включительно и частично исследованы бифуркации в усеченной нормальной форме. Связь решений полной и усеченной системы не обсуждаются. В подробной работе [15] исследуются бифуркации периодических решений из состояния равновесия при резонансе $2:1$. Эти бифуркации изучаются не с помощью метода нормальных форм, а с помощью метода Ляпунова–Шмидта и теории особенностей. В статье находятся периодические решения, но их устойчивость не рассматривается. В статьях [16, 13] бифуркация периодических решений и торов изучается с помощью метода нормальных форм. В статьях [3, 4] с помощью метода нормальных форм и метода интегральных многообразий изучается бифуркация инвариантных торов из тора меньшей размерности в случае $2:1$ резонанса. В 2005 году появилась статья [17], в которой исследуются системы с определённой симметрией и близкие к ним системы. При этом одна из систем оказывается усеченной нормальной формой при резонансе $2:1$. В статье [19] резонанс $2:1$ изучается численными методами.

Рассмотрим вывод усеченной нормальной формы системы при $2:1$ резонансе. Рассмотрим гладкое семейство векторных полей $\mathbf{X}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, заданное на $\mathbb{R}^4$. Предположим, что при $\mu = \mu_0$ поле имеет негиперболическое состояние равновесия. Предположим, что поле имеет следующий вид:

$$X_{\mu_0} = \sum_{l,r=1}^4 \{A_{lr}x_r + O_2(x)\} \frac{\partial}{\partial x_l} \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Параметры μ принадлежат открытой области $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}^s$. Мы рассмотрим случай, когда матрица $\mathbf{A}$ имеет две пары чисто-мнимых собственных чисел $\pm i\beta_1, \pm i\beta_2$. Будем считать, что $\beta_1, \beta_2 > 0$. Предположим, что между частотами есть $2:1$ резонанс $\beta_2 = 2\beta_1$ при $\mu = \mu_0$.

Основным методом исследования в теории бифуркаций является метод нормальных форм [9, 12]. Нормализуем семейство при этих предположениях до членов третьего порядка малости по пространственным переменным [14, 16, 13, 3, 4].

Верна следующая

Теорема. Пусть $\mathbf{X}_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ гладкое семейство векторных полей.

$$\mathbf{X}_\mu = \sum_{l,r=1}^4 \{\mathbf{A}_{lr}\mathbf{x}_r + \mathbf{g}_l(\mathbf{x}, \mu)\} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l}$$

с $(x, \mu) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^s$, где $g(x, 0) = O_2(x)$. Предположим, что $\beta_2 = 2\beta_1$. Тогда существует гладкое отображение $\Phi : (\mathbf{x}, \mu) \rightarrow (\mathbf{y} + \varphi(\mathbf{y}, \mu), \mu)$ дифференциал которого есть тождественное отображение, такое, что $\Phi_*(\mathbf{X}_\mu)$ в комплексных координатах

$$z_1 = y_1 + iy_2, \quad \bar{z}_1 = y_1 - iy_2, \quad z_2 = y_3 + iy_4, \quad \bar{z}_2 = y_3 - iy_4$$

примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (\alpha_1 + i\beta_1)z_1 + \tilde{a}\bar{z}_1z_2 + z_1(\tilde{c}_{11}|z_1|^2 + \tilde{c}_{12}|z_2|^2) + O_4(z, \bar{z}) \\ \dot{z}_2 &= (\alpha_2 + i\beta_2)z_2 + \tilde{b}z_1^2 + z_2(\tilde{c}_{21}|z_1|^2 + \tilde{c}_{22}|z_2|^2) + O_4(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{22})(a_r, b_r, d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}) + i(a_i, b_i, e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$$

В системе (2), как обычно, мы опустили уравнения для $\bar{z}_1, \bar{z}_2$. Доказательство можно найти в [14, 16, 13, 8].

Для дальнейшего изучения системы выберем определённую нормировку уравнений. При замене

$$z_1 \rightarrow \gamma_1 z_1, \quad z_2 \rightarrow \gamma_2 z_2, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$$

коэффициенты $\tilde{a}, \tilde{b}$ перейдут в

$$\tilde{a}_1 = \frac{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}{\gamma_1} \tilde{a}, \quad \tilde{b}_1 = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} \tilde{b}.$$

При $\tilde{a}\tilde{b} \neq 0$ модули $\tilde{a}, \tilde{b}$ и аргумент одного из коэффициентов могут быть сделаны произвольными, но аргумент произведения $\beta = \arg(\tilde{a}\tilde{b})$ – инвариант таких растяжений.

В зависимости от резонанса нужно нормализовать члены определенного порядка малости. При изучении резонанса 2:1 основную роль в динамике системы играют члены второго порядка малости. Для изучения системы (2) мы введём новые переменные

$$y_1 = \rho_1 \cos \varphi_1, \quad y_2 = \rho_1 \sin \varphi_1, \quad y_3 = \rho_2 \cos \varphi_2, \quad y_4 = \rho_2 \sin \varphi_2$$

и получим

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 &= \alpha_1(\mu)\rho_1 + q_1 \cos(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \theta_1)\rho_1\rho_2 + \rho_1(a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2) + O_4(\rho), \\ \dot{\rho}_2 &= \alpha_2(\mu)\rho_2 + q_2 \cos(-\varphi_2 + 2\varphi_1 + \theta_2)\rho_1^2 + \rho_2(a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2) + O_4(\rho), \\ \dot{\varphi}_1 &= \beta_1(\mu) + q_1 \sin(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \theta_1)\rho_2 + (b_{21}\rho_1^2 + b_{22}\rho_2^2) + O_3(\rho), \\ \dot{\varphi}_2 &= \beta_2(\mu) + q_2 \sin(-\varphi_2 + 2\varphi_1 + \theta_2)\rho_1^2/\rho_2 + (b_{21}\rho_1^2 + b_{22}\rho_2^2) + O_3(\rho), \end{cases} \quad (3)$$

где

$$q_1 \cos(\theta_1) = b_1(0), \quad q_1 \sin(\theta_1) = b_2(0), \quad q_2 \cos(\theta_2) = d_1(0), \quad q_2 \sin(\theta_2) = d_2(0),$$

$\rho = (\rho_1, \rho_2)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$. Переменные ρ_1, ρ_2 – амплитудные, а φ_1, φ_2 – угловые переменные. Из-за резонанса 2:1 между частотами β_1 и β_2 нелинейные слагаемые нормальной формы зависят только от “расстройки” $\varphi_2 - 2\varphi_1$. Введём новые переменные:

$$u = \rho_2 \cos(\psi), \quad v = \rho_2 \sin(\psi), \quad \psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \theta_1$$

Пусть $\theta_0 = -(\theta_1 + \theta_2)$. Система (3) перейдет в систему:

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_2 u - \beta_2 v + q_2 \cos(\theta_0)\rho_1^2 + 2q_1 v^2 + f_1(u, v, \rho_1, \psi) + O_8, \\ \dot{v} = \beta_2 u + \alpha_2 v + q_2 \sin(\theta_0)\rho_1^2 - 2q_1 uv + f_2(u, v, \rho_1, \psi) + O_8, \\ \dot{\rho}_1 = \alpha_1 \rho_1 + q_1 \rho_1 u + f_3(u, v, \rho_1, \psi) + O_7, \\ \dot{\psi} = \beta_1 + q_1 v + f_4(u, v, \rho_1, \psi) + O_7. \end{cases} \quad (4)$$

Наряду с системой рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_2 u - \beta_2 v + q_2 \cos(\theta_0) \rho_1^2 + 2q_1 v^2, \\ \dot{v} = \beta_2 u + \alpha_2 v + q_2 \sin(\theta_0) \rho_1^2 - 2q_1 uv, \\ \dot{\rho}_1 = \alpha_1 \rho_1 + q_1 \rho_1 u. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) – усеченная нормальная форма исходной системы. В (5) входят только медленные переменные – две переменные амплитудные, а одна переменная – угловая. Но из-за резонанса эта переменная тоже медленная. Систему (6) можно дальше упростить. Введем переменные

$$X = u = \rho_2 \cos(\psi), \quad Y = v = \rho_2 \sin(\psi), \quad Z = \rho_1^2. \quad (6)$$

Система (5) примет вид

$$\begin{cases} \dot{X} = \alpha_2 X - \beta_2 Y + q_2 \cos(\theta_0) Z + 2q_1 Y^2, \\ \dot{Y} = \beta_2 X + \alpha_2 Y + q_2 \sin(\theta_0) Z - 2q_1 XY, \\ \dot{Z} = 2\alpha_1 Z + 2q_1 ZX. \end{cases} \quad (7)$$

Эта система изучена в [14, 13, 3, 4]. Отметим, что система (5) при фиксированном μ при нулевых значениях $\alpha_{1,2}$ и точном резонансе позволяет проанализировать устойчивость состояния равновесия в критическом случае 2:1 резонанса [8]. В статье [21], содержащей подробную библиографию, рассматривается уравнение упругого маятника, который описывается системой (5) при нулевых значениях $\alpha_{1,2}$. В этом случае система (5) является гамильтоновой.

2. Генерация второй гармоники. Одной из первых задач нелинейной оптики является задача о генерации второй гармоники при прохождении света через кристалл. В 1961 П. Франкен с сотрудниками открыл эффект удвоения частоты света в кристаллах – генерацию второй гармоники. В 1961–1963 Р. В. Хохлов, С. А. Ахманов и Н. Бломберген получили фундаментальные результаты в теории нелинейных оптических явлений. Рассмотрим основные уравнения генерации второй гармоники, полученные С. А. Ахмановым и Р. В. Хохловым [1, 2]. Подробно эти исследования описаны в [6, глава 2]. Предположим, что световое поле представимо в виде суперпозиции поля волны с частотой ω и поля волны с частотой 2ω :

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \left(e_1 A_1(z) \exp[i(\omega t - kz)] + e_2 A_2(z) \exp[i(2\omega t - kz)] \right).$$

Для $A_1(z)$, $A_2(z)$ выводятся уравнения:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 + \delta_1 A_1 = -i\sigma_1 A_1^* A_2 \exp(-i\Delta_k z), \\ \dot{A}_2 + \delta_2 A_2 = -i\sigma_2 A_1^2 \exp(i\Delta_k z), \end{cases} \quad (8)$$

где точка означает дифференцирование по z , A_1 , A_2 – комплексные амплитуды, δ_1 , δ_2 – коэффициенты линейного поглощения, σ_1 , σ_2 – коэффициенты нелинейной связи, $\Delta_k = K - 2k$ – волновая расстройка. Перейдем от комплексных амплитуд A_1 , A_2 к вещественным амплитудам $a_1(z)$, $a_2(z)$ и фазам φ_1 , φ_2 :

$$A_{1,2} = a_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2}), \quad \Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta_k z.$$

Переменную Ψ называют обобщённой фазой. Для переменных a_1, a_2, Ψ получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{a}_1 + \delta_1 a_1 + \sigma_1 a_1 a_2 \sin \Psi = 0, \\ \dot{a}_2 dz + \delta_2 a_2 - \sigma_2 a_1^2 \sin \Psi = 0, \\ \dot{\Psi} - \Delta k + \left(2\sigma_1 a_2 - \sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2}\right) \cos \Psi = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для изучения траекторий системы в [1, с. 162] предложено преобразование, аналогичное (6)

$$x = A_2 \sin \Psi, \quad y = A_2 \cos \Psi, \quad z = A_1^2. \quad (10)$$

Система (9) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\delta_2 X + \Delta k Y + \sigma_2 Z - 2\sigma_1 Y^2, \\ \dot{Y} = \Delta k X - \delta_2 Y + 2\sigma_1 X Y, \\ \dot{Z} = -2\delta_1 Z - 2\sigma_1 X Z. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) совпадает с системой (7) при $\theta_0 = 0, \pi$. Система (11) подробно исследована в [1, 2, 6, 21] но, в основном, в тех случаях, когда исследование можно свести к изучению системы на плоскости. В [21] установлена аналогия между уравнением упругого маятника и генерацией второй гармоники при нулевых коэффициентах линейного поглощения.

3. Резонансное взаимодействие волн в плазме. Резонансное взаимодействие волн в нелинейной среде с учетом только квадратичной нелинейности изучено в [5, 20, 10, 18]. Изложим вывод уравнений [20, 7]. Предположим, что среда квадратично нелинейная. Это взаимодействие описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dC_1}{dt} = \gamma_1 C_1 + M C_2 C_3 \exp(-i\delta t), \quad \frac{dC_{2,3}}{dt} = \gamma_{2,3} C_{2,3} - M C_1 C_3^* \exp(i\delta t),$$

где C_k – комплексные амплитуды волн, $\delta = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3$ – расстройка, ω_k – частота k -ой волны, M – коэффициент нелинейной связи. Как видно, эта система аналогична системе (9), но только сейчас мы рассматриваем не две, а три волны. В работах [20, 10, 18] рассматривается случай, когда одна из волн (первая) неустойчивая, т. е. $\gamma_1 > 0$, а остальные две волны устойчивые, т. е. $\gamma_{2,3} < 0$. Вводя безразмерные время, амплитуды и фазы волн по формулам

$$t = \gamma_1^{-1} \tau, \quad C_k = \gamma_1 M^{-1} a_k \exp(i(\varphi_k - \omega_k)),$$

и разделяя действительные и мнимые части, получаем

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = a_1 + a_2 a_3 \cos \varphi, \\ \dot{a}_{2,3} = -\Gamma_{2,3} a_{2,3} - a_1 a_{3,2} \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = \Delta + \left(\frac{a_1 a_3}{a_2} + \frac{a_1 a_2}{a_3} + \frac{a_2 a_3}{a_1}\right) \sin \varphi, \end{cases} \quad (12)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$, $\Delta = \delta/\gamma_1$, $\Gamma_{2,3} = |\gamma_{2,3}|/\gamma_1$, дифференцирование в системе производится по τ . Рассмотрим частный случай $\Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma$ и $a_1 = a_2$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = a_1 + a_2 \cos \varphi, \\ \dot{a}_2 = -\Gamma a_2 - a_1 a_2 \cos \varphi, \\ \dot{\varphi} = \Delta + \left(2a_1 - \frac{a_2^2}{a_1}\right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (13)$$

Полагая $X = a_1 \cos \varphi$, $Y = a_2 \sin \varphi$, $Z = a_2^2$, получим систему

$$\begin{cases} \dot{X} = X - \Delta Y + Z - 2Y^2, \\ \dot{Y} = \Delta X + Y + 2XY, \\ \dot{Z} = -2\Gamma Z - 2XZ. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) является частным случаем (11) и, следовательно, системы (7). Система (14) изучена в ряде статей [5, 20, 10, 11, 18]. Генерацию второй гармоники начали исследовать в 1960 году. Тогда еще не была опубликована знаменитая работа Лоренца о хаосе в трехмерной системе дифференциальных уравнений. Резонансное взаимодействие волн исследовали в 70-е годы, и естественно, что в системе (14) искали хаотические решения. Наиболее полные результаты по хаосу в системе (14) получены в работе [10]. В этой работе численно были найдены области периодических и хаотических режимов. В [10] система рассматривалась при $\Gamma > 1$, $10 > \Delta > 0$. В системе (14) ровно два состояния равновесия, одно из них в начале координат. Это состояние равновесия всегда неустойчивое. Второе состояние равновесия имеет координаты

$$\left(-\Gamma, \frac{\Gamma\Delta}{(1-2\Gamma)}, \Gamma \left(1 + \left(\frac{\Delta}{1-2\Gamma} \right)^2 \right) \right).$$

Характер устойчивости этого состояния равновесия зависит от параметров. При численном исследовании при $0 < \Delta < 10$, $(1 + \sqrt{3})/2 < \Gamma < 50$ найдены области существования хаотических решений. Подробное описание механизма появления странного аттрактора дано в статье [22]. Система (14) есть частный случай системы (7). Следовательно, система (7) при определенных значениях параметров имеет хаотические решения. Конечно, из этого не следует, что полная система (1) имеет такие решения, но аналогия между тремя моделями позволяет наметить дальнейшую программу исследований каждой модели.

Заключение. Анализ трех моделей позволяет сделать вывод, что системы, описывающие генерацию второй гармоники и резонансное взаимодействие волн являются частным случаем системы (7), возникающей при описании Хопф–Хопф бифуркации при резонансе 2:1. Это аналогия позволяет обосновать существование хаотических решений в нормальной форме в окрестности состояния равновесия при Хопф–Хопф бифуркации.

Авторы благодарны профессору Viktor R. LeBlank за возможность ознакомиться с работой [16].

Литература

- [1] Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. – М.: ВИНТИ, 1964.
- [2] Akhmanov S., Khokhlov R. Problems of Nonlinear Optics. – New-York: Gordon and Breach, 1972.
- [3] Волков Д. Ю. The Andronov-Hopf bifurcation with 2:1resonance // Записки научн. семинаров ПОМИ, 300 (2003), С. 266–273.

- [4] Волков Д. Ю. Бифуркация Андронова–Хопфа при резонансах // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. – СПб: БАН, 2011. – С. 38–45.
- [5] Вышкинд С. Я., Рабинович М. И. Механизм стохастизации фаз и структура волновой турбулентности в диссипативных средах // ЖЭТФ, 1976, 71. С. 557–571.
- [6] Дмитриев В. Г., Тарасов Л. В. Прикладная нелинейная оптика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [7] Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987.
- [8] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических состояний равновесия – Пуццино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.
- [9] Arnold V. I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, second ed. – New-York: Springer-Verlag, 1988.
- [10] Bussac N. The Nonlinear three-wave system. Strange attractors and asymptotic solutions, Physica Scripta, 1982, v. T2/1, 110–118.
- [11] Meunier C., Bussac N., Laval G. Intermittency at the onset of stochasticity in nonlinear resonant coupling processes // Physica D., 1982, vol. 4, p. 236–243.
- [12] Chow S., Li C., Wang D. Normal Forms and Bifurcations of Planar Vector Fields. – Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [13] Dupuis E., De l’existence d’hypertores près d’une bifurcation de Hopf-Hopf avec résonance 1:2. – Ottava, 2000.
- [14] Knobloch E., Proctor R. E. The Double Hopf bifurcation with 2 : 1 resonance // Proc. R. Soc. Lond. A 415, p. 61–90 (1988).
- [15] LeBlanc V. G., Langford W.F. Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcation // Arch.Rational Mech. Anal.136 (1996) p. 305–357.
- [16] LeBlanc V. G. On some secondary bifurcations near resonant Hopf–Hopf interactions // Contin. Discrete Impuls. Systems 7 (2000) p. 405–427.
- [17] Porter J., Knobloch E. Dynamics in the 1:2 spatial resonance with broken reflection symmetry // Physica D., 2005, 201, p. 318–344.
- [18] D.W.Hughes, R.E.Proctor Chaos and the effect of noise in a model of three-wave mode coupling // Physica D 1990, 46, p. 163–176.
- [19] Revel G., Alonso D. M., Moiola J. L. Numerical semi-global analysis of a 1:2 resonant Hopf–Hopf bifurcation // Physica D., 247 (2013), p. 40–53.
- [20] Wersinger J. M., Finn J. M., Ott Edward. Bifurcation and “strange” behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling // Physics of Fluids, 1980, 23, p. 1142–1164.
- [21] Breitenberger E., Mueller R. The elastic pendulum: A nonlinear paradigm // J. Math. Phys. 1981, 22(6), p. 1196–1210.
- [22] Lopez-Rebollal O., Sanmartin J. R. A generic, hard transition to chaos // Physica D 89 (1995), p. 204–221.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ БОМА И СТЕПЕННЫМИ ЗАКОНАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Жестков С. В., Новашинская В. С.

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

г. Могилев, Беларусь

e-mail: zhestkov_s@rambler.ru, vichka-2468397@yandex.ru

Zhestkov S. V., Novashinskaya V. S. On existence of nontopological solitons of (2+1)-dimensional Schrödinger's equation with Bohm potential and power laws nonlinearity. The direct method of constructing solitons of (2+1)-dimensional Schrödinger's equation with Bohm potential and power laws nonlinearity is developed.

Keywords: nontopological soliton, Schrödinger's equation with Bohm potential, power laws nonlinearity.

Развит прямой метод построения солитонов (2+1)-мерного уравнения Шрёдингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности.

Ключевые слова: нетопологический солитон, уравнение Шрёдингера с потенциалом Бома, степенные законы нелинейности.

Известно [1], что киральное уравнение Шрёдингера с потенциалом Бома является неинтегрируемым уравнением. Поэтому для его исследования использовались вариационный метод Хи и численные вычисления. Возникает вопрос о существовании математических моделей уравнения Шрёдингера с потенциалом Бома, допускающих точные солитонные решения.

Целью работы является построение и исследование указанных моделей, допускающих существование нетопологических солитонов.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шрёдингера вида

$$iu_t + a_1(u_{xx} + u_{yy}) + a_2|u|^{2m}u = i \left[a_3u + a_4|u|^{2m}u + a_5u \frac{|u|_{xx}}{|u|} + a_6u \frac{|u|_{yy}}{|u|} \right] \quad (1)$$

с произвольными действительными коэффициентами a_j ($j = \overline{1,6}$), $m > 0$. Отметим, что в правую часть уравнения (1) добавлены члены

$$i[a_3u + a_4|u|^{2m}u],$$

описывающие степенной закон затухания [2]. Искомое решение уравнения (1) строится в виде

$$u(t, x, y) = I(t, x, y) \exp\{i\eta\}, \quad \eta = k_1x + k_2y + \omega t + \varphi, \quad (2)$$

где $I(t, x, y)$ — неотрицательная волновая функция, k_1 , k_2 , ω , φ — соответствующие параметры солитона. Поставляя (2) в (1) и отделяя мнимую и действительную части, получим

тельную часть, найдём

$$\begin{aligned} I_t + 2a_1(k_1 I_x + k_2 I_y) &= a_3 I + a_4 I^{2m+1} + a_5 I_{xx} + a_6 I_{yy}, \\ -\omega I + a_1(I_{xx} + I_{yy}) - a_1 k^2 I + a_2 I^{2m+1} &= 0, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) является системой определяющих уравнений, т. е. справедлива

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) имело решение (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (3).

Решение системы (3) строится в форме бегущей волны

$$I(t, x, y) = f(\xi), \quad \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi, \quad (4)$$

где v — скорость солитона. Подставляя (4) в (3), получим

$$[-v + 2a_1(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2)] f'(\xi) = a_3 f(\xi) + a_4 f^{2m+1}(\xi) + \tilde{a}_5 f''(\xi), \quad (5)$$

$$a_1 \alpha^2 f''(\xi) - (\omega + a_1 k^2) f(\xi) + a_2 f^{2m+1}(\xi) = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{a}_5 \equiv a_5 \alpha_1^2 + a_6 \alpha_2^2, \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Предположим, что выполнено соотношение

$$v = 2a_1(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2). \quad (7)$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$a_3 f(\xi) + a_4 f^{2m+1}(\xi) + \tilde{a}_5 f''(\xi) = 0. \quad (8)$$

Заметим, что уравнения (6) и (8) совпадают по форме. Поэтому в качестве $f(\xi)$ возьмем анзац вида [3]

$$f(\xi) = A \operatorname{ch}^{-\mu}(\xi), \quad (9)$$

где A — амплитуда солитона, $\mu > 0$ — неизвестный параметр. Подставляя (9) в (6), (8), получим законы распространения искомого солитона

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{m}, \quad a_1 \alpha^2 \mu^2 = \omega + a_1 k^2, \quad A^{2m} = \frac{1}{a_2} [a_1 \alpha^2 \mu(\mu + 1)], \quad \frac{a_1}{a_2} > 0, \\ a_3 + \tilde{a}_5 \mu^2 = 0, \quad A^{2m} = \frac{\tilde{a}_5 \mu(\mu + 1)}{a_4}, \quad \frac{\tilde{a}_5}{a_4} > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) вытекает важное соотношение, обеспечивающее существование нетопологического солитона (2), (4), (9)

$$\frac{\tilde{a}_5}{a_4} = \frac{a_1 \alpha^2}{a_2} \quad \text{или} \quad \tilde{a}_5 a_2 = a_1 a_4 \alpha^2. \quad (11)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7), (10), (11). Тогда уравнение (1) имеет нетопологический солитон

$$u(t, x, y) = A \operatorname{ch}^{-\frac{1}{m}}(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi) \exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\}.$$

Полученные результаты распространяются на уравнения (1) с законами удвоенной и утроенной степени нелинейности.

Литература

- [1] Biswas A., Milovic D. Chiral solitons with Bohm potential by He's variational principle // Physics of Atomic Nuclei. – 2011. Vol. 74, № 5. – P. 755–757.
- [2] Biswas A. Optical solitons with time-dependent dispersion, nonlinearity and attenuation in a Kerr-law media // Int. J. Theor. Phys. – 2009. Vol. 48. P. 256–260.
- [3] Жестков С. В., Новашинская В. С. О существовании оптических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шрёдингера с зависящими от времени коэффициентами и степенным законом нелинейности // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы LXV научной конференции “Герценовские чтения – 2012”. – Санкт-Петербург, 2012. – С. 55–57.

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ДОПУСКАЕМЫХ ОДУ 3-ГО ПОРЯДКА

Зайцев В. Ф., Мхитарян М. Г.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru

Zaitsev V. F., Mkhitaryan M. G. The reverse problem for the nonlocal nonexponential operators, admitted 3rd-order ODE. We consider factorization of the 3-rd order ordinary differential equations admitting nonlocal nonexponential operators. The method of the first integrals construction is proposed.

Рассматривается задача поиска классов обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка, допускающих неэкспоненциальный нелокальный оператор.

1. Предварительные замечания. Рассмотрим задачу поиска классов уравнений 3-го порядка, допускающих нелокальный неэкспоненциальный оператор (ННО) вида

$$X = \eta(x, y, y') \left(\int \zeta(x, y, y') dx \right) \partial_y. \quad (1)$$

Теорема 1. Любое уравнение, допускающее оператор (1), допускает и локальный оператор $\bar{X} = \eta(x, y, y') \partial_y$.

Доказательство очевидно. Расщепляя условие инвариантности для оператора (1), в качестве одного из уравнений определяющей системы получаем условие инвариантности для оператора $\bar{X}$.

Следствие. Для решения поставленной задачи мы можем рассматривать класс автономных уравнений, т. е. положить $\eta \equiv y'$ и искать оператор в виде

$$X = y' \left(\int \zeta(x, y, y') dx \right) \partial_y, \quad (2)$$

а затем найти все такие классы уравнений, используя принцип подобия точечных однопараметрических групп на плоскости.

Найдём продолжения оператора (2), вычислив сначала полные производные нелокальной переменной

$$I = \int \zeta(x, y, y') dx. \quad (3)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} D_x I &= \zeta, \\ D_x^2 I &= \zeta_x + \zeta_y y' + \zeta_{y'} y'', \\ D_x^3 I &= \zeta_{xx} + 2\zeta_{xy} y' + \zeta_{yy} (y')^2 + 2\zeta_{xy'} y'' + 2\zeta_{yy'} y' y'' + \zeta_{y'y'} (y'')^2 + \zeta_y y'' + \zeta_{y'} y'''. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь вычислим координаты продолженного оператора, учитывая, что $\tilde{\eta} = y' I$:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_1 &= D_x \tilde{\eta} = y'' I + y' \zeta, \\ \tilde{\eta}_2 &= D_x^2 \tilde{\eta} = y''' I + 2y'' \zeta + y' (\zeta_x + \zeta_y y' + \zeta_{y'} y''), \\ \tilde{\eta}_3 &= D_x^3 \tilde{\eta} = y^{IV} I + 3y''' \zeta + 3y'' (\zeta_x + \zeta_y y' + \zeta_{y'} y'') + \\ &\quad + y' [\zeta_{xx} + 2\zeta_{xy} y' + \zeta_{yy} (y')^2 + 2\zeta_{xy'} y'' + 2\zeta_{yy'} y' y'' + \zeta_{y'y'} (y'')^2 + \zeta_y y'' + \zeta_{y'} y''']. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Уравнения вида $y''' = F(y)$. Условие инвариантности запишется в виде

$$\tilde{\eta}_3 - \tilde{\eta} \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{y''' = F(y)} = 0.$$

Заменяя y''' и y^{IV} через исходное уравнение и его дифференциальное следствие $y^{IV} = y' F'(y)$ и расщепляя оставшееся выражение по степеням y'' и нелокальной переменной I , получаем систему, которая имеет лишь тривиальное решение ($F \equiv 0$ или F – любое, но $\zeta \equiv 0$). Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Не существует нетривиального уравнения вида $y''' = F(y)$, допускающего ННО вида (1).

3. Уравнения вида $y''' = F(y, y')$. Рассмотрим теперь автономное уравнение 3-го порядка без “предстаршей” производной

$$y''' = F(y, y'), \quad (6)$$

допускающее нелокальный неэкспоненциальный оператор (2). Условие инвариантности запишется в виде

$$\tilde{\eta}_3 - \tilde{\eta}_1 \frac{\partial F}{\partial y} - \tilde{\eta}_1 \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{y'''=F(y,y')} = 0. \quad (7)$$

Аналогично п. 1 получаем систему

$$\begin{aligned} [2] : \quad & 3\zeta_{y'} + y'\zeta_{y'y'} = 0, \\ [1] : \quad & 3\zeta_x + 2y'(\zeta_{xy'} + 2\zeta_y + \zeta_{yy'}y') = 0, \\ [0] : \quad & (3\zeta + y'\zeta_{y'})F - y'\zeta F_{y'} + y'\zeta_{xx} + 2\zeta_{xy}(y')^2 + \zeta_{yy}(y')^3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теорема 3. Уравнение (6) допускает ННО (2), если и только если правая часть имеет вид

$$F(y, y') = y' \left(C(y')^2 + G(y) \right) H(y) - \frac{1}{2C} G''(y) y', \quad (9)$$

при этом

$$\zeta(x, y, y') = C + \frac{G(y)}{(y')^2}, \quad (10)$$

где $G(y)$ и $H(y)$ – произвольные функции, $C \neq 0$ – произвольная константа.

Замечание. Значение $C = 0$ возможно, лишь если $G''(y) \equiv 0$. Но в этом случае исходное уравнение тривиально и легко интегрируется.

Как легко доказать [1], у оператора (2) не существует первый дифференциальный инвариант (точнее, инвариант, зависящий только от первой производной). Для вычисления второго дифференциального инварианта найденного оператора

$$X = y' \left[\int \left(C + \frac{G(y)}{(y')^2} \right) dx \right] \partial_y \quad (11)$$

необходимо решить уравнение

$$\tilde{\eta}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \tilde{\eta}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y'} + \tilde{\eta}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y''} = 0.$$

Подставляя найденные координаты оператора (11) и расщепляя уравнение по нелокальной переменной I , получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} y' \left[C + \frac{G(y)}{(y')^2} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y'} + (2Cy'' + G'(y)) \frac{\partial \Phi}{\partial y''} = 0, \\ y' \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y'} + \left[y' \left(C(y')^2 + G(y) \right) H(y) - \frac{1}{2C} G''(y) y' \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y''} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Заметим, что во втором уравнении вместо y''' подставлена правая часть уравнения (9), т. е. инвариант находится **на многообразии** решений исходного уравнения. Решением первого уравнения системы (12) является функция

$$\Omega \left(y, \frac{2Cy'' + G'(y)}{C(y')^2 + G(y)} \right), \quad (13)$$

подстановка (13) во второе уравнение системы приводит к линейному уравнению первого порядка в частных производных относительно функции Ω

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} + [H(y) - 2C\omega^2] \frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = 0, \quad (14)$$

где ω – второй аргумент функции Ω . Уравнение в характеристиках для (14) представляет собой уравнение Риккати в каноническом виде, следовательно, всегда сводится к линейному уравнению второго порядка. В большом числе случаев решение уравнения (14) может быть выражено в замкнутом виде – через элементарные или специальные функции. Вид представления существенно зависит от функции $H(y)$. Например, если $H(y) = y^k$ или $H(y) = e^y$, второй дифференциальный инвариант выражается через функции Бесселя, при этом в случае степенной функции мы получаем специальное уравнение Риккати – если выражение $\frac{k+3}{k+2}$ является полуцелым числом, второй дифференциальный инвариант является элементарной функцией. Например, при $k = 0$

$$\Omega = \sqrt{2C}y - \operatorname{arth} \left(\frac{2Cy'' + G'(y)}{\sqrt{2C} (C(y')^2 + G(y))} \right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что в силу исходного уравнения $\Omega' = 0$, т. е. имеет место факторизация

$$\begin{cases} \Omega' = 0, \\ \Omega = \sqrt{2C}y - \operatorname{arth} \left(\frac{2Cy'' + G'(y)}{\sqrt{2C} (C(y')^2 + G(y))} \right). \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, функция Ω является **автономным первым интегралом** исходного уравнения, а найденная симметрия является аналогом вариационной.

4. Поиск общего класса. Произвольное обратимое точечное преобразование $y = f(t, u)$, $x = g(t, u)$, применённое к найденному классу (9), даёт общий класс уравнений 3-го порядка, обладающий заданными свойствами:

$$\begin{aligned} & g_t(g_t f_{ttt} - g_{ttt} f_t) + 3g_{tt}(f_t g_{tt} - f_{tt} g_t) + \\ & + \dot{u} \left[g_u(g_t f_{ttt} - f_t g_{ttt}) + g_t(g_u f_{ttt} - f_u g_{ttt} + 3g_t f_{ttu} - 3f_t g_{ttu}) - \right. \\ & \left. - 3g_{tt}(g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2g_t f_{tu} - 2f_t g_{tu}) - 6g_{tu}(g_t f_{tt} - f_t g_{tt}) \right] + \\ & + \dot{u}^2 \left[g_u(f_{ttt} g_u - f_u g_{ttt} + 3f_{ttu} g_t - 3f_t g_{ttu}) + \right. \\ & + 3g_t(f_{ttu} g_u - f_u g_{ttu} + f_{tuu} g_t - f_t g_{tuu}) - 6g_{tu}(f_{tt} g_u - f_u g_{tt} + 2f_{tu} g_t - 2f_t g_{tu}) - \\ & \left. - 3g_{tt}(f_{uu} g_t - f_t g_{uu} + 2f_{tu} g_u - 2f_u g_{tu}) - 3g_{uu}(f_{tt} g_t - f_t g_{tt}) \right] + \\ & + \dot{u}^3 \left[g_t(f_{uuu} g_t - f_t g_{uuu} + 3f_{uut} g_u - 3f_u g_{uut}) + \right. \\ & + 3g_u(f_{ttu} g_u - f_u g_{ttu} + f_{tuu} g_t - f_t g_{tuu}) - 6g_{ut}(f_{uu} g_t - f_t g_{uu} + 2f_{ut} g_u - 2f_u g_{tu}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3g_{uu}(f_{tt}g_u - f_u g_{tt} + 2f_{ut}g_t - 2f_t g_{ut}) - 3g_{tt}(f_{uu}g_u - f_u g_{uu}) \Big] + \\
& + \dot{u}^4 \Big[g_t(f_{uuu}g_u - f_u g_{uuu}) + g_u(f_{uuu}g_t - f_t g_{uuu} + 3f_{tuu}g_u - 3f_u g_{tuu}) - \\
& - 6g_{tu}(f_{uu}g_u - f_u g_{uu}) - 3g_{uu}(f_{uu}g_t - f_t g_{uu} + 2f_{tu}g_u - 2f_u g_{tu}) \Big] + \\
& + \dot{u}^5 \Big[g_u(f_{uuu}g_u - f_u g_{uuu}) - 3g_{uu}(f_{uu}g_u - f_u g_{uu}) \Big] + \\
& + 3\ddot{u} \Big[g_t(f_{tu}g_t - f_t g_{tu}) - g_u(f_{tt}g_t - f_t g_{tt}) - g_{tt}(f_u g_t - f_t g_u) \Big] + \\
& + 3\dot{u}\ddot{u} \Big[g_t(f_{uu}g_t - f_t g_{uu}) - g_u(f_{tt}g_u - f_u g_{tt}) - 3g_{tu}(f_u g_t - f_t g_u) \Big] + \\
& + 3\dot{u}^2\ddot{u} \Big[g_t(f_{uu}g_u - f_u g_{uu}) - g_u(f_{tu}g_u - f_u g_{tu}) - g_{uu}(f_u g_t - f_t g_u) \Big] + \\
& + 3\ddot{u}^2 g_u(f_t g_u - f_u g_t) + \ddot{u}(g_t + g_u \dot{u})(f_u g_t - f_t g_u) = \\
& = (g_t + g_u \dot{u})^5 \left(\frac{f_t + f_u \dot{u}}{g_t + g_u \dot{u}} \right) \left\{ \left[C \left(\frac{f_t + f_u \dot{u}}{g_t + g_u \dot{u}} \right)^2 + G(f) \right] H(f) - \frac{1}{2C} G''(f) \right\}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Конкретное задание функций f и g позволяет (в известной степени) выбрать из класса (16) уравнение, наиболее близкое по структуре к ожидаемому модельному.

Аналогично могут быть пересчитаны координаты допускаемого оператора, инвариант и фактор-система.

Литература

- [1] Зайцев В. Ф. Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений // “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Труды III Международной конференции. – Красноярск, 2002. – С. 101–105.
- [2] Хоанг Нгы Хуан, Зайцев В. Ф. Аналоги вариационных симметрий ОДУ нечётных порядков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы LXV научной конференции «Герценовские чтения». – СПб.: РГПУ, 2012. – С. 116–120.
- [3] Зайцев В. Ф., Хоанг Нгы Хуан. Аналоги вариационных симметрий уравнений вида $y''' = F(y, y'')$ // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы XVI научной конференции «Герценовские чтения». – СПб.: РГПУ, 2013. – С. 65–69.

ЭЛЕКТРОННЫЕ ПУЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Зайцев В. Ф., Подклетнова А. А.

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru

Zaitsev V. F., Podkletnova A. A. Electron beams in curvilinear coordinates.

We consider the problem on motion of the electron beam in cylindrical and spherical areas.

Рассматривается задача о движении пучка электронов в коаксиальной цилиндрической и концентрической сферической областях.

Рассмотрим задачу о прохождении пучка электронов через некоторую эквипотенциальную область. В простейшем случае она исследована в [1] и формулируется следующим образом, Поток электронов заполняет всё пространство между двумя бесконечными параллельными плоскими электродами A и B , и движется в направлении нормали к электродам, которую можно принять за ось x . Потенциалы электродов A и B одинаковы и равны V_0 , а потенциал катода $V|_{x=0} = 0$. Считаем $x_B > x_A > 0$ и примем, что скорости электронов, а также плотность тока j , во всех точках каждой плоскости, перпендикулярной оси x , имеют одинаковые значения. Требуется найти распределение потенциала в пространстве между электродами A и B [1].

В силу принятых допущений все физические величины будут зависеть лишь от осевой координаты x , т. е. задача будет одномерной. Потенциал V между электродами A и B определяется из уравнения Пуассона

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0 v}, \quad (1)$$

где j – плотность электронного тока, v – скорость электронов. Подставляя значение $v = \sqrt{2\eta V(x)}$, получаем дифференциальное уравнение для потенциала

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0 \sqrt{2\eta V(x)}}, \quad (2)$$

Если вместо параллельных плоскостей рассматривать бесконечные соосные цилиндрические или концентрические сферические поверхности, то необходимо перейти, соответственно, к цилиндрическим или сферическим координатам. При этом в аналогичной постановке задача остаётся одномерной (здесь, как и в предыдущей задаче, все физические величины зависят только от радиальной координаты). Тем не менее, есть существенное различие – линии тока в криволинейных координатах, вообще говоря, не являются параллельными, и плотность тока $j = j(r)$ [2, 3].

1. Цилиндрические координаты. В данном случае $j = j_0/r$, и в одномерном случае уравнение для потенциала имеет вид

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{j_0}{\varepsilon_0 r \sqrt{2\eta V(r)}}. \quad (3)$$

Обычная степенная подстановка $r = \rho^k$, применяемая для исключения слагаемого с первой производной, для данного уравнения не приводит к приемлемому результату – значение коэффициента при первой производной соответствует сингулярной точке пространства существенных параметров рассматриваемого класса уравнений. Поэтому к цели приводит подстановка $r = e^\rho$, в результате чего получаем уравнение

$$\ddot{V} = C_0 e^\rho V^{-1/2}, \quad (\cdot) = \frac{d}{d\rho}, \quad C_0 = \frac{j_0}{\varepsilon_0 \sqrt{2\eta}}, \quad (4)$$

т. е. к элементу расширения класса уравнений Эмдена–Фаулера на сингулярные точки $(\exp, -1/2, 0)$. Это уравнение с помощью преобразования

$$x = \dot{V}, \quad y = e^\rho \quad (5)$$

приводится к уравнению Эмдена–Фаулера

$$y'' = C^* x y^{-1}, \quad (6)$$

где $C^* = -C_0^{-2}/2$. Оно отсутствует в справочнике [4] и, по-видимому, не интегрируется в замкнутом виде.

Уравнение (4) преобразованием $V = e^{2/3\rho} u(\rho)$ можно привести к автономному виду. После понижения порядка $u' = p(u)$ и канонического преобразования $u = -4t/3$ получаем уравнение Абеля 2-го рода

$$p\dot{p} - p = -\frac{4}{9}t + \tilde{C}t^{-1/2}.$$

2. Сферические координаты. В этом случае $j = j_0/r^2$, и одномерное уравнение для потенциала имеет вид

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{j_0}{\varepsilon_0 r^2 \sqrt{2\eta V(r)}}. \quad (7)$$

Здесь, в отличие от предыдущего случая, можно применить степенную подстановку – преобразование $r = \rho^{-1}$ приводит к уравнению, не содержащему первой производной

$$\ddot{V} = C_0 \rho^{-2} V^{-1/2}, \quad (\cdot) = \frac{d}{d\rho}, \quad C_0 = \frac{j_0}{\varepsilon_0 \sqrt{2\eta}}, \quad (8)$$

т. е. к уравнению Эмдена–Фаулера $(-2, -1/2, 0)$, решение которого (в параметрическом виде [4], 2.3.1.26) имеет вид

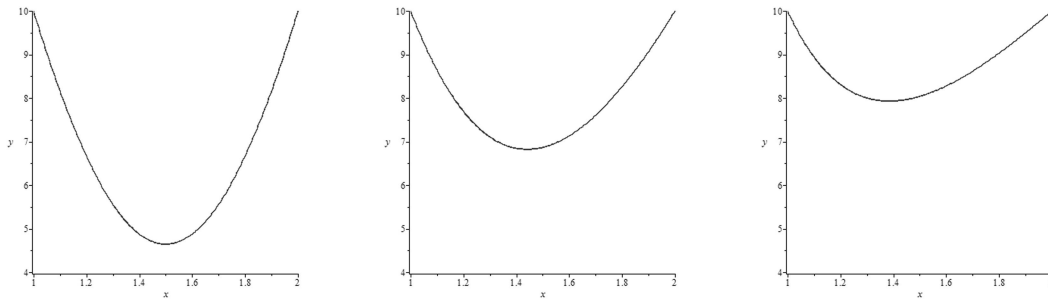
$$\begin{cases} \rho = a\tau^{-2/3}Z^{-2}, \\ V = b\tau^{-4/3}Z^{-2} \left(\tau Z' + \frac{1}{3}Z \right)^2, \end{cases} \quad (9)$$

где τ – параметр, $C_0 = \frac{1}{3}b^{3/2}$,

$$Z = C_1 I_{1/3}(\tau) + C_2 K_{1/3}(\tau),$$

$I_{1/3}(\tau)$ и $K_{1/3}(\tau)$ – модифицированные функции Бесселя (так как $C_0 > 0$, в формуле [4] взят нижний знак). Следует заметить, что одна из произвольных констант a , C_1 , C_2 не является независимой.

Пусть $x_A = 1$, $x_B = 2$, $V_0(x_A) = V_0(x_B) = 10$ (в условных единицах). Известно [1], что в декартовых координатах (“бесконечный плоский катод”) про возрастании тока потенциал в точке $x_0 = 3/2$ $V(3/2)$ плавно уменьшается (“провисает”). По достижении значения $V(3/2) = V_0/4$ он скачком падает до нуля (образуется “виртуальный катод”). Аналогичная динамика наблюдается и для катода в виде бесконечно нити (цилиндрические координаты) и для точечного катода (сферические координаты). При последовательном переходе от декартовой системы к цилиндрической и далее к сферической точка локализации виртуального катода смещается в сторону реального катода, а степень “провисания” потенциала уменьшается. Сравнение результатов вычисления решений этих трёх задач приведено на графиках при $C_0 = 100$:



Литература

- [1] Зинченко Н. С. Курс лекций по электронной оптике. – Харьков: изд. ХГУ, 1958. – 275 с.
- [2] Langmuir I., Blodgett K. // Phys. Rev. 22, 347, 1923.
- [3] Langmuir I., Blodgett K. // Phys. Rev. 24, 49, 1924.
- [4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТОНКОЙ ПЛЁНКИ

Зотов И. Н.

Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет
Красноярск
e-mail: zotovin@rambler.ru

Zotov I. N. Symmetries of the equations of unidirectional motion of a thin film. We consider the system of equations arising in the unidirectional motion of a thin liquid film flowing on a plane inclined to the horizontal substrate with a constant viscosity. We solve the problem of group classification with respect to an arbitrary function and the constants for this system.

Рассматривается система уравнений, возникающая при однонаправленном движении тонкой жидкой плёнки, стекающей по наклоненной к горизонту плоской подложке, с постоянной вязкостью. Для неё решается задача групповой классификации по отношению к произвольной функции и трёх постоянных.

Процессы, протекающие в природе и технике, во многих случаях включают жидкие неизотермические среды с деформируемой границей раздела жидкость – газ. Наиболее простым, но достаточно распространённым случаем таких многофазных течений являются тонкие стекающие под действием гравитации плёнки жидкости. Стекающие плёнки широко применяются в технике для охлаждения электронных устройств, интенсификации теплообмена и т. д. Изучение динамики и деформаций тонких неизотермических плёнок жидкости продолжает оставаться актуальной задачей и необходимо для разработки перспективных методов охлаждения нагреваемых поверхностей в мини-системах.

Пусть подложка наклонена к горизонту под углом α . Выберем систему декартовых координат x, y, z так, что ось Oz ортогональна к подложке, а ось Ox направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость занимает область $\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, 0 < z < H(t, x, y)\}$, где H – толщина плёнки и u, v, ω – компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$. В [1] возникает следующая система уравнений:

$$hD(\theta_t + u\theta_x + v\theta_y + \omega\theta_z) = \theta_{\xi\xi}, \quad (1)$$

$$-p = \Delta h - Ah + Cx, \quad (2)$$

$$h_t - (Mh^2\gamma\tilde{\theta}_x + h^3\varphi p_x)_x + (Mh^2\gamma\tilde{\theta}_y - h^3\varphi p_y)_y = 0, \quad (3)$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа; координата $\xi = z/H(t, x, y)$, $p(t, x, y)$, $h(t, x, y)$, $\theta(t, x, y, \xi)$ – безразмерные переменные гидродинамического давления, толщины плёнки и температуры жидкости соответственно. Числа A, C задают вклад в градиент давления его гидростатических (продольной и

поперечной) составляющих, M является модифицированным числом Марангони, задающим вклад термокапиллярных сил, действующих на поверхности неоднородно нагретой плёнки. Число D является отношением порядков интенсивностей кондуктивных и конвективных потоков тепла в плёнке. Функции $F(t, x, y, \xi)$, $G(t, x, y, \xi)$, $\Phi(t, x, y, \xi)$, $\Gamma(t, x, y, \xi)$, $\varphi(t, x, y)$, $\gamma(t, x, y)$, $\tilde{\theta}(t, x, y)$ определяются в [1].

В работе рассматривается однонаправленное движение жидкой плёнки, стекающей по наклоненной плоской подложке ($\partial/\partial y = 0$) с постоянной вязкостью ($\mu = \text{const}$). Система (1)–(3) примет вид:

$$hD(\theta_t + u\theta_x + \omega\theta_\xi) = \theta_{\xi\xi}, \quad (4)$$

$$-p = h_{xx} - Ah + Cx, \quad (5)$$

$$h_t + \left(Mh^2 \frac{\tilde{\theta}_x}{2} - h^3 \frac{p_x}{3} \right)_x = 0, \quad (6)$$

Далее будем считать, что на поверхности задана температура $\tilde{\theta}(t, x)$. Тогда температура внутри плёнки $\theta(t, x, \xi)$ найдётся как решение первой начально-краевой задачи для уравнения (4):

$$\theta(0, x, \xi) = \theta_0(x, \xi), \quad \theta(t, x, 0) = \theta_1(t, x), \quad \theta(t, x, 1) = \tilde{\theta}(t, x).$$

Поэтому основной является задача (5)–(6). Для неё решается задача групповой классификации по отношению к произвольной функции $\tilde{\theta}(t, x)$ и трёх постоянных A , C , M .

В работе получено стационарное решение рассматриваемой задачи и исследовано частное решение в виде бегущей волны.

Литература

- [1] Кузнецов В. В. Взаимодействие возмущений стекающей плёнки, вызываемых несколькими локальными нагревателями // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2009. – Т. 2. – № 1. – С. 91–104.
- [2] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. – 280 с.
- [3] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. – 400 с.

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К МОДЕЛЯМ ПОЛЕВОЙ НЕЙРОДИНАМИКИ

Клебанов И. И., Иванов С. А.

Челябинский государственный педагогический университет

Челябинский

e-mail: klebanov.igor2010@yandex.ru

Klebanov I. I., Ivanov S. A. Group-theoretic approach to models of the neural fields. Group equivalence of the generalized Jirsa–Haken–Nunez equation calculated. On the basis of the theorem on projections reduced equation has a solution in the form of a traveling wave obtained.

Вычислена группа эквивалентности обобщенного уравнения Хакена. На основе теоремы о проекциях построено редуцированное уравнение, имеющее решение в виде бегущей волны.

Цель настоящей статьи – привлечь внимание специалистов в области группового анализа математических моделей к задачам нейродинамики. Предметом исследования является уравнение:

$$f = u_{tt} - u_{xx} + F(x, t, u)u_t + Q(x, t, u) = 0, \quad (1)$$

обобщающее основное уравнение модели нервной ткани [1], [2] и уравнение Хакена [3] (в англоязычной литературе Jirsa–Haken–Nunez equation), моделирующие пространственно-временную динамику электромагнитного поля нейронной сети в континуальном приближении. Мотивацией для такого рода обобщения является тот факт, что у исходных уравнений группа симметрии отсутствует, в то время как обобщённая модель может допускать группы симметрии и иметь новые физически интересные решения. Как известно, группа симметрии обобщённой модели является подгруппой её группы эквивалентности при наличии “произвольных элементов” [4].

Генератор группы эквивалентности рассчитывается по классическому алгоритму Ли–Овсянникова следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\varepsilon &= \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial F} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial Q}, \\ \xi &= \xi(x, t, u), \\ \tau &= \tau(x, t, u), \\ \varphi &= \varphi(x, t, u), \\ \mu_1 &= \mu_1(x, t, u, F, Q), \\ \mu_2 &= \mu_2(x, t, u, F, Q). \end{aligned}$$

(Возможно более общее определение группы эквивалентности, при котором все компоненты касательного векторного поля зависят от произвольных элементов [5], но в настоящей работе оно не рассматривается). Построим второе продолжение генератора группы эквивалентности:

$$\text{pr}^{(2)} \tilde{X}_\varepsilon = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial F} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial Q} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

где компоненты, отвечающие за преобразование производных, рассчитываются по стандартным формулам продолжения [6].

$$\begin{aligned}\varphi^t &= D_t(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}, \\ \varphi^{xx} &= D_x D_x(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt},\end{aligned}$$

где D – оператор полной производной

$$D_x = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial y''} y''' + \dots$$

Определяющее уравнение имеет вид:

$$\text{pr}^{(2)} \tilde{X}_\varepsilon(f) \Big|_{f=0} = 0.$$

или

$$\varphi^{tt} - \varphi^{xx} + \mu_1 u_t + F \varphi^t + \mu_2 \Big|_{f=0} = 0.$$

Решение определяющего уравнения приводит к следующему результату

$$\begin{aligned}\xi &= C_1 x + C_2, \\ \tau &= C_t t + C_3 \\ \varphi &= \alpha(t) u + \beta(x, t), \\ \mu_1 &= -C_1 F - 2\alpha_t, \\ \mu_2 &= -(\alpha_{tt} u + \beta_t t) + (\alpha(t) - 2C_1) Q + \beta_{xx} - F(\alpha_t u + \beta_t).\end{aligned}$$

Таким образом, алгебра эквивалентности уравнения (1) с генераторами

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1^\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \tilde{X}_2^\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \tilde{X}_3^\varepsilon &= x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - F \frac{\partial}{\partial F} - 2Q \frac{\partial}{\partial Q} \\ \tilde{X}_4^\varepsilon &= \alpha(t) u \frac{\partial}{\partial u} - 2\alpha_t \frac{\partial}{\partial F} + (-\alpha_{tt} u + \alpha(t) Q - \alpha_t u) \frac{\partial}{\partial Q}, \\ \tilde{X}_5^\varepsilon &= \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u} + (-\beta_{tt} + \beta_{xx} - \beta_t F) \frac{\partial}{\partial Q}\end{aligned} \tag{2}$$

бесконечномерна.

Сформулируем теперь теорему о проекциях Ибрагимова [4] применительно к уравнению (1).

Проекция генератора группы эквивалентности на переменные Q, F, x, t, u совпадает в данном случае с самим генератором:

$$\text{pr} \tilde{X}_\varepsilon \Big|_{(Q, F, x, t, u)} = \tilde{X}_\varepsilon. \tag{3}$$

Проекция генератора группы эквивалентности на основные переменные x, t, u :

$$\text{pr} \tilde{X}_\varepsilon \Big|_{(x, t, u)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} = \overline{X}_\varepsilon. \tag{4}$$

Теорема 1. Оператор (4) является инфинитезимальной симметрией уравнения (1) с функциями F и Q тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \tilde{X}_\varepsilon(F - F(x, t, u)) = 0, \\ \tilde{X}_\varepsilon(Q - Q(x, t, u)) = 0. \end{cases}$$

Пример. Возьмем линейную комбинацию генераторов $\tilde{X}_1^\varepsilon$ и $\tilde{X}_2^\varepsilon$.

$$\tilde{X}_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + C \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5)$$

Решив относительно функций F и Q систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{X}_\varepsilon(F - F(x, t, u)) = -\frac{\partial F}{\partial t} - C \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \tilde{X}_\varepsilon(Q - Q(x, t, u)) = -\frac{\partial Q}{\partial t} - C \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

получим $F = F(x - ct, u)$ и $Q = Q(x - ct, u)$. Заменой переменной $\xi = x - Ct$ (инвариант группы с генератором (5)), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(C^2 - 1)u_{\xi\xi} - CF(\xi, u)u_\xi + Q(\xi, u) = 0, \quad (6)$$

имеющее решение в виде бегущей волны. Модельные функции F и Q выбираются исходя из физической постановки задачи. Аналогично можно получить инфинитезимальные симметрии и редуцированные уравнения для любого генератора группы эквивалентности. Предметом дальнейших исследований является групповая классификация уравнения (1).

Литература

- [1] Зозуля Ю. И., Марченко С. Ф., Червов В. Г. Модель информационных процессов в нервной ткани // Материалы к симпозиуму “Модели структурно-функциональной организации биологических систем”. – М (Дубна), 1972.
- [2] Колесников О. А., Марченко С. Ф. К моделированию электрического поля в нервной ткани (Сообщение 1 и 2) // Проблемы бионики, вып. 12, Харьков, 1974, с. 51–64.
- [3] Haken H. Brain dynamics. An introduction to Models and Simulations. – Berlin–Heidelberg: Springer Verlag, 2008. – 335 p.
- [4] Ибрагимов Н. Х., Руденко О. В. Принцип априорного использования симметрии в теории нелинейных волн // Акустический журнал, 2004, том 50, с. 1–15.
- [5] Мелешко С. В. Групповая классификация уравнений двумерных движений газа // ПММ, том 58, вып. 4, 1994, с. 56–62.
- [6] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Н.: ИО НФМИ, 1998. – 632 с.

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Коптев А. В.

Государственный университет морского
и речного флота им. адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург
e-mail: Alex.Koptev@mail.ru

Koptev A. V. A Structure of Solutions for Navier — Stokes Equations. The Navier — Stokes equations for viscous incompressible fluid flow are investigated. An analysis is based on the first integral of these equations. As a result new formulas describes structure of solutions are derived.

Рассматриваются уравнения Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Анализ основывается на первом интеграле этих уравнений. Получены новые формулы, определяющие структуру решений.

1. Уравнения Навье — Стокса. Уравнения Навье — Стокса представляют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Эти уравнения имеют не только практическое значение, но и представляют чисто математический интерес, как пример задачи, в которой сочетаются линейные и нелинейные свойства [1, 2]. На сегодняшний день существует целый перечень вопросов, которые проработаны еще не достаточно и требуют дальнейших исследований [3–5]. Не до конца решена проблема существования гладкого решения, отсутствуют конструктивные методы построения решений, не ясна асимптотика решений при больших временах и при больших значениях числа Рейнольдса, не изучен механизм разрушения ламинарных течений и переход к турбулентности.

На сегодняшний день теоретическое изучение уравнений Навье — Стокса явно отстаёт от потребностей практики. Одна из неисследованных проблем состоит в определении структуры решений.

Некоторые точные решения уравнений Навье — Стокса известны [1, 2]. Они получены различными методами и различаются по форме. Но из каких составляющих комбинаций и как они строятся? Есть ли общие структурные формулы, которые объединяют все решения уравнений Навье — Стокса? Наличие таких формул важно и в теоретическом плане и важно с практической точки зрения, так как они представляют лекала, по которым можно строить новые решения, точные, приближенные или численные.

В данной работе рассматриваются уравнения Навье — Стокса для движения вязкой несжимаемой жидкости и для случая, когда внешние силы имеют потенциал. Предпринимается попытка построения структурных формул первого порядка для решений.

Для случая $2D$ движений безразмерный вид исходных уравнений следу-

ющий

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial (p + \Phi)}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial (p + \Phi)}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь u , v , p суть основные неизвестные – компоненты вектора скорости и давление;

Φ – потенциал внешних сил, заданная функция;

Re – число Рейнольдса, заданный положительный параметр.

2. Метод исследования. Чтобы определить структуру решений, уравнения (1)–(3) следует свести к совокупности более простых задач. Важным шагом на этом пути является первый интеграл. Описание и вывод соотношений, представляющих первый интеграл для общего случая, представлены в работах [6, 7]. Для частного случая $2D$ движений первый интеграл сводится к следующим пяти соотношениям [8]

$$p + \Phi + \frac{U^2}{2} + d + d_t = \alpha_1 + \beta_1, \quad (4)$$

$$u^2 - v^2 + \frac{2}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right) + 2(\alpha_1 - \beta_1), \quad (5)$$

$$uv - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 + \beta_2), \quad (6)$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_2 + \delta), \quad (7)$$

$$v = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta_2 - \delta). \quad (8)$$

В соотношениях (4)–(8) наряду с основными неизвестными u , v , p присутствуют и новые ассоциированные неизвестные Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 . Эти неизвестные отсутствовали в исходных уравнениях (1)–(3), но они появляются в результате первого интегрирования. В работах [5–7] для этих величин введено название псевдофункции тока.

Смысл других обозначений следующий. U – модуль вектора скорости, $U = \sqrt{u^2 + v^2}$.

d и d_t – диссипативные члены, вычисляемые по формулам

$$d = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

$$d_t = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right). \quad (10)$$

Эти величины представляют приведенную стационарную или нестационарную диссипацию вращательной энергии.

$\alpha_j, \beta_j, \delta$ – произвольные функции двух аргументов. Среди аргументов этих функций отсутствует x, y или t соответственно.

Таким образом, имеем систему пяти дифференциальных уравнений (4)–(8) с неизвестными $u, v, p, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$. Преимущество перед исходными уравнениями состоит в том, что порядок производных по основным неизвестным на единицу меньше, чем в уравнениях (1)–(3).

3. Структура решений. Уравнения (4)–(8) также допускают дальнейший анализ и упрощения [9]. Неизвестное p исключается, согласно уравнению (5). В оставшихся четырёх уравнениях (5)–(8) неизвестные $u, v, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ фигурируют по разному. Так Ψ_3 присутствует только в двух уравнениях (5)–(6). Эти уравнения нужно использовать для определения Ψ_3 , когда остальные неизвестные уже найдены.

Имеет место следующая закономерность. Уравнения (5)–(6) можно разрешить относительно Ψ_3 только если выполнено условие совместности. С учетом (7)–(8) это условие сводится к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа по координатам, Δ^2 – бигармонический оператор.

Уравнение (11) представляет нелинейное дифференциальное уравнение пятого порядка с двумя неизвестными Ψ_1 и Ψ_2 . Если неизвестные Ψ_1 и Ψ_2 определены, то все остальные интересующие нас величины можно найти. Неизвестные u, v – по уравнениям (7)–(8), Ψ_3 – по уравнению (6), p – по уравнению (4). В результате уравнение (11) генерирует решение $2D$ уравнений Навье – Стокса.

Полученные соотношения позволяют выявить в первом приближении структуру решений. Она сводится к следующему. Неизвестные u, v имеют вид, который определен уравнениями (7)–(8). Т. е. каждое из них представлено алгебраической суммой вторых производных функций Ψ_1, Ψ_2 .

Для неизвестного p структура определена уравнением (4). Из него следует, что без учёта аддитивных функций неизвестное p должно быть представлено суммой четырёх, различных по своей природе слагаемых. Такими слагаемыми являются: потенциал внешних сил Φ , скоростной напор $\frac{U^2}{2}$, диссипативные члены d, d_t . В сумме с этими слагаемыми давление образует пятичлен, в противоположность трёхчлену Бернулли в теории идеальной жидкости.

Аналогичные закономерности, но с некоторыми уточнениями, имеют место и для более сложного случая $3D$ уравнений. Основных неизвестных для этого случая будет четыре: u, v, w, p . Каждое из них есть функция трёх пространственных координат и времени. Первый интеграл представлен уже девятью соотношениями [6, 7]. Три последние из них определяют структурные

формулы для скоростей u , v , w . Согласно этим формулам скорости представляются, как линейные комбинации вторых производных девяти неизвестных Ψ_j , где $j = 1, 2, \dots, 9$. Указанные неизвестные определяются из двух генерирующих уравнений пятого порядка. Для давления имеем структурную формулу, аналогичную рассмотренному выше случаю $2D$ уравнений, но с той лишь разницей, что d и d_t вычисляются через Ψ_j по более сложным формулам.

Выявленные структурные формулы для основных неизвестных демонстрируют, что уравнения Навье — Стокса сочетают в себе и линейные, и нелинейные свойства. С одной стороны, скорости и давление представимы в виде линейных комбинаций некоторых величин. А с другой, — составляющие эти комбинации величины определяются посредством нелинейных уравнений.

Литература

- [1] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: “Наука”, — 1987. — 833 с.
- [2] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Ч. 2, — М.: Физматлит, — 1967. — 727 с.
- [3] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.
- [4] Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981. — 408 с.
- [5] Charles L. Fefferman. Existence and smoothness of the Navier — Stokes equation. — Preprint. — Princeton Univ., Math. Dept. — Princeton, NJ, USA, 2000, - P. 1–5.
- [6] Коптев А. В. Интегралы уравнений Навье — Стокса // Труды Средневолжского математического общества, 2004, Т. 6, № 1. — С. 215–225.
- [7] Коптев А. В. Первый интеграл и пути дальнейшего интегрирования уравнений Навье — Стокса // Известия РГПУ им. Герцена, 2012, № 147. — С. 7–17.
- [8] Коптев А. В. Как проинтегрировать уравнения Навье — Стокса // Физическая механика. Вып. 8, — Санкт-Петербургский государственный университет, 2004. — С. 218–226.
- [9] Koptev A. V. A new approach to resolution of Navier — Stokes equations // European Science and Technology, Vol. 2. — Vela-Verlag, Munich, Germany, 2013, — P. 708–711.

О РАЗВЕРТЫВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ ШМИДА МАТРИЧНЫХ ПУЧКАХ

Кувшинова А. Н., Логинов Б. В.

Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновск

e-mail: erasya7@rambler.ru, bvllbv@yandex.ru

Kuvshinova A. N., Loginov B. V. On the expanding of characteristic equation in polynomial by E. Schmidt spectral parameter matrix pencils. At the prolongation of our investigations on multiparameter matrix spectral problems of E. Schmidt [1, 2] the necessity arises to expand the relevant characteristic polynomials on spectral parameter degrees. In this article this problem is solved on the base of essential usage of the effective approach, suggested by Prof. I. S. Arzhanykh [3, 4].

Keywords: Schmidt' spectrum; matrices polynomially depending on E. Schmidt spectral parameter; characteristic polynomial; coefficients determination.

При продолжении наших исследований по многопараметрическим матричным спектральным задачам Э. Шмидта [1, 2] возникла необходимость разворачивания соответствующего характеристического многочлена по степеням спектрального параметра. В данной заметке эта задача решается на основе существенного использования эффективного приёма, принадлежащего проф. И. С. Аржаных [3, 4].

Ключевые слова: спектр Шмидта; матрицы, полиномиально зависящие от спектрального параметра Шмидта; характеристический полином; определение коэффициентов.

1. Введение. Рассматривается матричная обобщённая спектральная задача по Э. Шмидту вида

$$\begin{aligned}(A_s + \lambda A_{s-1} + \lambda^2 A_{s-2} + \dots + \lambda^{s-1} A_1)\varphi &= \lambda^s \psi \\ (A_s^* + \lambda A_{s-1}^* + \lambda^2 A_{s-2}^* + \dots + \lambda^{s-1} A_1^*)\psi &= \lambda^s \varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

которую для получения стандартной записи характеристического уравнения удобно записать в матричном виде

$$\begin{aligned}\lambda^s \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & A_s^* \\ A_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \\ &+ \lambda \begin{pmatrix} 0 & A_{s-1}^* \\ A_{s-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \dots + \lambda^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2}$$

В некотором базисе $\{e_k\}_1^n$ n -мерного вещественного (комплексного) простран-

ства $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k e_k$, $\psi = \sum_{k=1}^n d_k e_k$, и уравнение (2) записываются в виде системы

$$\begin{cases} \lambda^s c_k = \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n a_{ik}^1 d_i + \dots + \lambda \sum_{i=1}^n a_{ik}^{s-1} d_i + \sum_{i=1}^n a_{ik}^s d_i, \\ \lambda^s d_k = \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n a_{kj}^1 c_j + \dots + \lambda \sum_{j=1}^n a_{kj}^{s-1} c_j + \sum_{j=1}^n a_{kj}^s c_j. \end{cases} \quad (3)$$

Нашей задачей является представление в явном виде соответствующего (3) характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \det \left[\lambda^s \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \lambda^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} - \dots - \lambda \begin{pmatrix} 0 & A_{s-1}^* \\ A_{s-1} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_s^* \\ A_s & 0 \end{pmatrix} \right] \equiv \\ \equiv \lambda^{2sn} + \alpha_1 \lambda^{2sn-1} + \dots + \alpha_{2sn-1} \lambda + \alpha_{2sn} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

т. е. вычисление коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2sn-1}, \alpha_{2sn}$.

2. Определение коэффициентов характеристического уравнения. Следуя [3], составим систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda^{s+1} c_k &= \sum_{i=1}^n a_{ik}^1 \lambda^s d_i + \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n a_{ik}^2 d_i + \dots + \lambda^2 \sum_{i=1}^n a_{ik}^{s-1} d_i + \lambda \sum_{i=1}^n a_{ik}^s d_i = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ik}^1 \left[\lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}^1 c_j + \dots + \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij}^{s-1} c_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}^s c_j \right] + \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n a_{ik}^2 d_i + \\ &+ \dots + \lambda^2 \sum_{i=1}^n a_{ik}^{s-1} d_i + \lambda \sum_{i=1}^n a_{ik}^s d_i = \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n \left(a_{kj}^{1(2)} c_j + a_{jk}^2 d_j \right) + \dots + \\ &+ \lambda^2 \sum_{j=1}^n \left(a_{kj}^{s-2(2)} c_j + a_{jk}^{s-1} d_j \right) + \lambda \sum_{j=1}^n \left(a_{kj}^{s-1(2)} c_j + a_{jk}^s d_j \right) + \sum_{j=1}^n a_{kj}^{s(2)} c_j \\ \lambda^{s+1} d_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj}^1 \lambda^s c_j + \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n a_{kj}^2 c_j + \dots + \lambda^2 \sum_{j=1}^n a_{kj}^{s-1} c_j + \lambda \sum_{j=1}^n a_{kj}^s c_j = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj}^1 \left[\lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n a_{ij}^1 d_i + \dots + \lambda \sum_{i=1}^n a_{ij}^{s-1} d_i + \sum_{i=1}^n a_{ij}^s d_i \right] + \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n a_{kj}^2 c_j + \\ &+ \dots + \lambda^2 \sum_{j=1}^n a_{kj}^{s-1} c_j + \lambda \sum_{j=1}^n a_{kj}^s c_j = \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n \left(a_{ki}^{1(2)} d_i + a_{ki}^2 c_i \right) + \dots + \\ &+ \lambda^2 \sum_{i=1}^n \left(a_{ki}^{s-2(2)} d_i + a_{ki}^{s-1} c_i \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \left(a_{ki}^{s-1(2)} d_i + a_{ki}^s c_i \right) + \sum_{i=1}^n a_{ki}^{s(2)} d_i. \end{aligned} \right.$$

Затем, используя (3), аналогично вычисляем $\lambda^{s+2} c_k$ и $\lambda^{s+2} d_k, \dots, \lambda^{2sn} c_k$ и $\lambda^{2sn} d_k$.

Возьмем первые уравнения из каждой системы, умноженные, соответственно, на $\alpha_{2sn-s}, \alpha_{2sn-s-1}, \dots, \alpha_1, 1$, и вычислим сумму $c_1(\lambda^{2sn} + \alpha_1 \lambda^{2sn-1} + \dots + \alpha_{2sn-s-1} \lambda^{s+1} + \alpha_{2sn-s} \lambda^s)$, сложив соответствующие правые части. Справа возникают слагаемые, соответственно, с множителями $c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_n$, внутри которых выполняется группировка по степеням λ . Для выполнения полученного равенства необходимо приравнять коэффициенты при $c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_n$ к нулю. Из возникающей системы определяются $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2sn-s}$, которые в результате подстановки в коэффициенты при c_1 в правой части дадут, соответственно, $\alpha_{2sn-s+1}$, как коэффициент при λ^{s-1} , $\alpha_{2sn-s+2}$, как коэффициент при $\lambda^{s-2}, \dots, \alpha_{2sn}$, как коэффициент при нулевой степени λ .

Изложенный прием позволяет определить все коэффициенты характеристического многочлена. В данном случае коэффициент α_1 также известен: $\alpha_1 = \text{Sp} \begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} = 0$. В то же время он определяется из системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2sn-s}$.

3. Пример. Пусть $s = 3, n = 2$. Представим в явном виде следующее уравнение степени $2sn = 12$:

$$\det \left[\lambda^3 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & A_2^* \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_3^* \\ A_3 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \quad (5)$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для этого возьмем эквивалентную систему

$$\begin{cases} \lambda^3 c_1 = \lambda^2 d_1 + \lambda(d_1 + d_2) - d_1, \\ \lambda^3 c_2 = \lambda^2 d_1 + d_2, \\ \lambda^3 d_1 = \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda c_1 - c_1, \\ \lambda^3 d_2 = \lambda c_1 + c_2, \end{cases} \quad (6)$$

и по ней составим

$$\begin{cases} \lambda^4 c_1 = \lambda^2(c_1 + c_2 + d_1 + d_2) + \lambda(c_1 - d_1) - c_1, \\ \lambda^4 c_2 = \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda(c_1 + d_2) - c_1, \\ \lambda^4 d_1 = \lambda^2(2d_1 + c_1) + \lambda(-c_1 + d_1 + d_2) + (-d_1 + d_2), \\ \lambda^4 d_2 = \lambda^2 c_1 + \lambda c_2. \end{cases}$$

Продолжая процесс умножения на λ и используя (6), выпишем только первые уравнения получающихся систем:

$$\begin{aligned} \lambda^5 c_1 &= \lambda^2(2c_1 + c_2 + d_1) + \lambda(c_1 + d_1 + d_2) + (-c_1 + c_2 - d_1 + d_2), \\ \lambda^6 c_1 &= \lambda^2(2c_1 + c_2 + 4d_1 + d_2) + \lambda(c_2 + d_1 + 3d_2) + (-c_1 - 2d_1 + d_2), \\ \lambda^7 c_1 &= \lambda^2(4c_1 + 5c_2 + 4d_1 + 3d_2) + \lambda(4c_1 + 3d_2) + (-4c_1 + c_2 - 2d_1 + d_2), \\ \lambda^8 c_1 &= \lambda^2(8c_1 + 4c_2 + 9d_1 + 3d_2) + \lambda(3c_1 + c_2 + 2d_1 + 5d_2) + (-4c_1 + 3c_2 - 4d_1 + 5d_2), \\ \lambda^9 c_1 &= \lambda^2(12c_1 + 10c_2 + 14d_1 + 5d_2) + \lambda(8c_1 + 3c_2 + 4d_1 + 13d_2) + (-9c_1 + 3c_2 - 8d_1 + 4d_2), \\ \lambda^{10} c_1 &= \lambda^2(22c_1 + 17c_2 + 26d_1 + 13d_2) + \lambda(10c_1 + 3c_2 + 4d_1 + 16d_2) + \\ &\quad + (-14c_1 + 5c_2 - 12d_1 + 10d_2), \\ \lambda^{11} c_1 &= \lambda^2(36c_1 + 29c_2 + 43d_1 + 16d_2) + \lambda(25c_1 + 5c_2 + 10d_1 + 32d_2) + \\ &\quad + (-26c_1 + 13c_2 - 22d_1 + 17d_2), \\ \lambda^{12} c_1 &= \lambda^2(68c_1 + 48c_2 + 85d_1 + 32d_2) + \lambda(33c_1 + 13c_2 + 14d_1 + 53d_2) + \\ &\quad + (-43c_1 + 16c_2 - 36d_1 + 29d_2). \end{aligned}$$

Умножая полученные равенства на $\alpha_9, \alpha_8, \dots, \alpha_1, 1$ и складывая результаты, получим

$$c_1(\lambda^{12} + \alpha_1 \lambda^{11} + \alpha_2 \lambda^{10} + \alpha_3 \lambda^9 + \alpha_4 \lambda^8 + \alpha_5 \lambda^7 + \alpha_6 \lambda^6 + \alpha_7 \lambda^5 + \alpha_8 \lambda^4 + \alpha_9 \lambda^3) =$$

$$\begin{aligned}
&= c_1 [\lambda^2(68 + 36\alpha_1 + 22\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8) + \\
&\quad + \lambda(33 + 25\alpha_1 + 10\alpha_2 + 8\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_8) + \\
&\quad + (-43 - 26\alpha_1 - 14\alpha_2 - 9\alpha_3 - 4\alpha_4 - 4\alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8)] + \\
&\quad + c_2 [\lambda^2(48 + 29\alpha_1 + 17\alpha_2 + 10\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) + \\
&\quad + \lambda(13 + 5\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6) + (16 + 13\alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_7)] + \\
&\quad + d_1 [\lambda^2(85 + 43\alpha_1 + 26\alpha_2 + 14\alpha_3 + 9\alpha_4 + 4\alpha_5 + 4\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9) + \\
&\quad + \lambda(14 + 10\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_8 + \alpha_9) + \\
&\quad + (-36 - 22\alpha_1 - 12\alpha_2 - 8\alpha_3 - 4\alpha_4 - 2\alpha_5 - 2\alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_9)] + \\
&\quad + d_2 [\lambda^2(32 + 16\alpha_1 + 13\alpha_2 + 5\alpha_3 + 3\alpha_4 + 3\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_8) + \\
&\quad + \lambda(53 + 32\alpha_1 + 16\alpha_2 + 13\alpha_3 + 5\alpha_4 + 3\alpha_5 + 3\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_9) + \\
&\quad + (29 + 17\alpha_1 + 10\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7)].
\end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при c_2 , d_1 и d_2 к нулю, получим:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -2, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 2, \alpha_6 = -1, \alpha_7 = -2, \alpha_8 = -1, \alpha_9 = 4.$$

Подставив полученные значения α в равенство

$$\begin{aligned}
&\lambda^{12} + \alpha_1\lambda^{11} + \alpha_2\lambda^{10} + \alpha_3\lambda^9 + \alpha_4\lambda^8 + \alpha_5\lambda^7 + \alpha_6\lambda^6 + \alpha_7\lambda^5 + \alpha_8\lambda^4 + \alpha_9\lambda^3 = \\
&= \lambda^2(68 + 36\alpha_1 + 22\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8) + \\
&\quad + \lambda(33 + 25\alpha_1 + 10\alpha_2 + 8\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_8) + \\
&\quad + (-43 - 26\alpha_1 - 14\alpha_2 - 9\alpha_3 - 4\alpha_4 - 4\alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8),
\end{aligned}$$

найдем $\alpha_{10} = -1$, $\alpha_{11} = -2$, $\alpha_{12} = 1$. Таким образом, уравнение (5) в явном виде имеет представление

$$\lambda^{12} - 2\lambda^{10} - 2\lambda^9 + 2\lambda^7 - \lambda^6 - 2\lambda^5 - \lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Непосредственное вычисление характеристического уравнения подтверждает полученные результаты.

Замечание. Подобно [1] для матричного полинома вида (2) также может быть сформулирована и доказана теорема Гамильтона–Кэли.

Литература

- [1] Кувшинова А. Н. Теорема Гамильтона–Кэли для матриц полиномиальных по спектральному параметру Шмидта // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2013. Материалы научной конференции, 15–20 апреля 2013 г. – СПб: Изд. РГЦУ им. А. И. Герцена, 2013. – С. 81–86.
- [2] Kuvshinova A. N., Loginov B. V. Some consequences of the generalized Hamilton–Cayley theorem for matrices polynomially dependent on E. Schmidt spectral parameter // ROMAI Jornal, 2014 (в печати).

- [3] Аржаных И. С., Гугнина В. И. О разворачивании характеристического уравнения // Труды Института Математики АН Узбекской ССР, 1962. В. 26. – С. 3–12.
- [4] Аржаных И. С., Гугнина В. И. Распространение методов Крылова, Леверрье и Фаддеева на полиномиальные матрицы // Труды Института Математики им. В. И. Романовского. – Ташкент, 1962. В. 24. – С. 33–67.

УДК 517.9

О ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БРЕДЛИ–ХАРПЕРА

Куликов А. Н.

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

Ярославль

e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Kulikov A. N. About two value boundary problems of Bradley–Harper equation. Two value boundary problems was considered. The stability of homogeneous equilibrium is investigated as well as the local bifurcations of the spatial non-homogeneous solutions. For the first problem it is shown that these solutions form two-dimensional local attractor, but all solutions of this manifold are unstable.

Рассматриваются две краевые задачи для уравнения Бредли–Харпера. Изучена устойчивость однородных состояний равновесия, а также локальные бифуркации пространственно неоднородных решений. Для одной из краевых задач показано, что эти решения формируют двумерный локальный аттрактор, состоящий из неустойчивых решений.

Для описания возникновения неоднородного рельефа на поверхности полупроводниковых материалов предложено несколько математических моделей. В настоящее время наибольшую известность приобрела модель, предложенная Бредли и Харпером [1].

Пусть $z = h(t, x, y)$ уравнение поверхности, сформированной под воздействием потока ионов в момент времени t в точке с координатами x, y . Если деформации $h(t, x, y)$ не зависят от y (так называемые “цилиндрические” деформации), то для $h(t, x)$ получаем относительно простой вариант уравнения Бредли–Харпера

$$h_t = -\nu + \gamma_1 h_x + \gamma_2 h_{xx} - dh_{xxx} - \gamma_3 h_x^2, \quad (1)$$

где $\nu, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, d \in R, d > 0$.

Уравнение (1) допускает решение

$$h(t, x) = -\nu t + \text{const}. \quad (2)$$

Решение (2) описывает “плоский” фронт обработки поверхности пластинки потоком ионов. Поэтому целесообразно положить

$$h(t, x) = -\nu t + u(t, x)$$

и для отклонений получаем уравнение

$$u_t = au_x - bu_{xx} - u_{xxx} + cu_x^2, \quad (3)$$

которое приведено уже в перенормированном виде, после замен $x \rightarrow \lambda_1 x$, $t \rightarrow \lambda_2 t$, где λ_1, λ_2 – положительные постоянные.

Уравнения (1) и (3), в том числе и в более общем виде (например, в случае трех независимых переменных), были рассмотрены вместе с периодическими краевыми условиями в работах [2–3].

С физической точки зрения более естественны краевые условия иного вида. Например,

$$u_x(t, x + 2\pi) = u_x(t, x) \quad (x \in R) \quad (4)$$

– “динамические” периодические условия, а также

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 1) = 0, \quad (4')$$

где $x \in [0; 1]$. Последние краевые условия означают, что края мишени свободны от воздействия внешних условий, “свободных” согласно терминологии принятой в теории упругости.

Отметим, что для вспомогательной функции $v = u_x$ краевая задача (3), (4) приводит к классической периодической краевой задаче

$$v_t = av_x - bv_{xx} - v_{xxx} + c \frac{\partial}{\partial x}(v^2), \quad (5)$$

$$v(t, x + 2\pi) = v(t, x), \quad (6)$$

где уравнение (5) “классическая” версия уравнения Курамото–Сивашинского [4]. Добавим, что при рассмотрении вопросов, связанных с деформациями поверхности мишени, то есть краевой задачи (3), (4), именно u_x, u_{xx} имеют прозрачный физический смысл.

Первая краевая задача. Для краевой задачи (3), (4) справедливы следующие результаты.

Теорема 1. Краевая задача (3), (4) имеет двумерное асимптотически устойчивое многообразие V_2 , составленное из решений

$$u(t, x) = \alpha t + \beta x + \gamma,$$

где γ, β – произвольные постоянные, а $\alpha = a\beta + c\beta^2$. Это двумерное многообразие асимптотически устойчиво, если $b < 1$ и неустойчиво при $b > 1$.

Отметим, что при всех вариантах выбора b эти решения, принадлежащие V_2 , неустойчивы в смысле определения Ляпунова.

Пусть $b = 1 - q\varepsilon$, где $q = \pm 1$.

Теорема 2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ и $q = \pm 1$ краевая задача (3), (4) имеет асимптотически устойчивое четырехмерное локально инвариантное многообразие V_4 . Все решения, принадлежащие V_4 , со скоростью экспоненты стремятся к трехмерному многообразию $V_3(\varepsilon; \beta, \gamma)$ сформированного семейства решений

$$u(t, x, \varepsilon; \beta, \gamma) = \alpha t + \beta x + \gamma + 2\varepsilon^{1/2} \frac{c}{\sqrt{3}} \cos(\omega t + x) + o(\varepsilon^{1/2}),$$

где $\omega = \omega(\beta) = a + 2c\beta$, $\alpha = a\beta + c\beta^2$, $\gamma \in R$. Все эти решения неустойчивы по Ляпунову.

Отметим, что для доказательства этой теоремы сначала была рассмотрена вспомогательная краевая задача (5), (6), у которой при выбранных b существуют двумерные асимптотически устойчивые локально инвариантные многообразия, составленные двупараметрическим семейством периодических решений. Индивидуально каждое из них неустойчиво и имеет собственный период, отличный от периода остальных.

Для краевой задачи (3), (4') имеют место аналогичные результаты.

Литература

- [1] Bradley R. M., Harper J. M. E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. 1988. Vol. A6. – P. 2390–2395.
- [2] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // ЖВМиМФ, 2012. Т. 52, №5. С. 930–945.
- [3] Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С. Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки // Вестник Удмуртского ун-та. 2011. В. 4. – С. 86–99.
- [4] Sivashinsky G. Weak turbulence in periodic flow // Physica17D. 1985. – P. 243–255.

УДК 517.9

РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫСОКОМОДОВЫХ БИФУРКАЦИЙ В НЕЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЭРОЗИИ

Куликов Д. А.

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

Ярославль

e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Kulikov D. A. Implementation of highmodal bifurcations in nonlocal model of erosion. The nonlocal equation simulating the process of surface shaping under ionic bombardment is considered. The equation contains the terms with transformed space variable. A periodic boundary value problem for this equation is studied. The possibility of a ripple topography formation is demonstrated by means of bifurcations theory methods.

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными с отклоняющейся (преобразованной) пространственной переменной. В работе изучена периодическая краевая задача. Предложен механизм формирования волнового нанорельефа как результат потери устойчивости плоского рельефа. Волновой рельеф находится в результате решения бифуркационных задач, для исследования которых использован аппарат теории нормальных форм, метод инвариантных многообразий.

Выявление механизма пространственно неоднородных структур на поверхности полупроводниковых материалов – одна из приоритетных задач физики твердого тела, так как этот технологический процесс широко используется в нанoeлектронике. Для его описания был предложен ряд математических моделей. Наибольшую известность приобрела модель Бредли–Харпера [1], составленная на базе теории П. Зигмунда [2]. К сожалению, что неоднократно отмечалось физиками-экспериментаторами, модель Бредли–Харпера мало подходит для описания формирования коротковолновых неоднородных структур. В последнее десятилетие появилась альтернативная модель [3], которую принято называть нелокальным уравнением эрозии. В работе речь идет об одной из её версий.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = au_{xx} - hw_x + b_2hw_x^2 + b_3hw_x^3, \quad (1)$$

где $u = u(t, x)$, $w = u(t, x - h)$. Без нарушения общности можно считать, что $a, b_2, b_3, h > 0$ ($h \ll 1$). Эти коэффициенты зависят от угла между направляющей потока ионов и перпендикуляром к невозмущенной поверхности, интенсивности J (энергии) потока ионов ($a \sim J^{-1}$), а также физических свойств материала мишени. Уравнение (1) приведено уже в перенормированном виде (см., например, [4–5]) и в случае, когда угол падения близок к своему критическому значению.

Это уравнение, как обычно, рассмотрим вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (2)$$

Добавим к краевым условиям (2) начальные условия

$$u(0, x) = f(x) \in H_2^2, \quad (3)$$

где H_2^2 пространство Соболева 2π -периодических функций, у которых конечна норма

$$\|f\|_{H_2^2} = \|f\|_{L_2} + \|f'\|_{L_2} + \|f''\|_{L_2}, \quad \|f\|_{L_2} = \left(\int_0^{2\pi} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

При таком выборе $f(x)$ смешанная задача (1)–(3) локально корректно разрешима [6]. Добавим, что задача (1), (2) имеет семейство однородных состояний равновесия $u(t, x) = \text{const}$, а также инвариантна относительно замены $u \rightarrow u + \text{const}$. В силу последних замечаний достаточно далее рассматривать окрестность состояния равновесия $u = 0$ в метрике H_2^2 – фазового пространства решений.

Лемма. При $a > a_{\text{кр}}$ состояние равновесия $u = 0$ устойчиво и, напротив, при $a < a_{\text{кр}}$ неустойчиво.

При $a = a_{\text{кр}}$ реализуется критический случай 1 в задаче об устойчивости, когда

- (i) $\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma, \quad \sigma > 0;$
- (ii) $\text{Re } \lambda_k < 0, \quad k = \pm 2, \pm 3, \dots$

За счёт выбора вспомогательных параметров возможна реализация критического случая 2, когда

$$(i) \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_{\pm 1} = \pm i\sigma_1, \quad \lambda_{\pm 2} = \pm i\sigma_2, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0;$$

$$(ii) \quad \operatorname{Re} \lambda_k < 0, \quad k = \pm 3, \pm 4, \dots$$

Иных критических случаев в рассмотренной краевой задаче не бывает. При этом

$$a_{\text{кр}} = \frac{-h^2 \sin mh}{mh},$$

где $m = \text{entier}(\eta_{11}/\alpha)$ или $\text{entier}(\eta_{11}/\alpha) + 1$, а η_{11} – наименьший положительный корень уравнения $\eta = \operatorname{tg} \eta$ ($\eta_{11} \approx 4.49$).

Пусть реализуется первый критический случай. Положим

$$a = a_{\text{кр}}(1 - \beta\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0), \quad 0 < \varepsilon_0 \ll 1, \quad \beta = \pm 1.$$

Краевая задача (1)–(3) имеет локально инвариантное многообразие $M_3(\varepsilon)$.

Используя метод интегральных многообразий и аппарат теории нормальных форм [7–8] можно показать, что справедливо утверждение.

Теорема. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ все решения задачи (1)–(3) из достаточно малой окрестности тривиального состояния равновесия $u = 0$ обладают следующими свойствами:

(i) решения краевой задачи (1), (2), не принадлежащие $M_3(\varepsilon)$, приближаются к этому многообразию со скоростью экспоненты или покидают эту окрестность;

(ii) описание динамики решений краевой задачи (1), (2), принадлежащих $M_3(\varepsilon)$, сводится к изучению трёхмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (нормальной форме)

$$\psi'(s) = L_0 \rho^2(s), \quad \varphi'(s) = L_2 \rho^2(s), \quad (4)$$

$$\rho'(s) = q\rho(s) + L_1 \rho_1^3(s), \quad L_0, L_1, L_2 \in R, \quad q = a_{\text{кр}}\beta; \quad (5)$$

(iii) при достаточно малом h и $L_1 > 0$ дифференциальное уравнение (5) при $\beta = -1$ имеет неустойчивое ненулевое состояние равновесия;

(iv) найденному состоянию равновесия уравнения (5) соответствует неустойчивое двухпараметрическое семейство пространственно неоднородных решений краевой задачи (1), (2).

При реализации случая близкого ко второму критическому справедливо аналогичное утверждение с заменой $M_3(\varepsilon)$ на пятимерное инвариантное многообразие $M_5(\varepsilon)$, и системы (4), (5) на пятимерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт №МК-2298.2013.1), а также поддержке гранта РФФИ-14-01-31159 мол_а.

Литература

- [1] Bradley R. M., Harper J. M. E. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. 1988. Vol. A6. – P. 2390–2395.

- [2] Sigmund P. Sputtering by ion bombardement. Theoretical concept. Sputtering by penticle bombardement – Berlin: Springer–Verlag, 1981.
- [3] Рудый А. С., Бачурин В. И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Серия физическая, 2008. – Т. 72, №5. – С. 624–629.
- [4] Куликов Д. А., Рудый А. С. Формирование волнового нанорельефа при распылении поверхности ионной бомбардировкой. Нелокальная модель эрозии // Моделирование и анализ информационных систем, 2012. – Т. 19, №5. – С. 40–49.
- [5] Куликов Д. А. Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа // Динамические системы, 2012. Т. 2(30), №3–4. – С. 259–272.
- [6] Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Московского матем. об-ва, 1961. – Т. 42, № 4. – С. 298–305.
- [7] Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследование по устойчивости и теории колебаний. – Ярославль: ЯрГУ, 1976. – С. 114–129.
- [8] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // ЖВ-МиМФ, 2012. – Т. 52, №5. – С. 930–945.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА СО СТУПЕНЧАТЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Лагодинский В. М.

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

Санкт-Петербург
e-mail: lagvladimir@yandex.ru

Lagodinskiy V. M. The bondary problem for relativistic Schrödinger equation with graded potential. The bondary problem on finit segment of real axes for ordinary differential equation of infinit order — relativistic Schrödinger equation with graded potential is formulated and solved.

Сформулирована и решена краевая задача на конечном отрезке вещественной оси для обыкновенного дифференциального уравнения бесконечного порядка — релятивистского уравнения Шрёдингера со ступенчатым потенциалом.

В работе [1] автором настоящего сообщения было предложено новое определение функции дифференциального оператора, отличающееся от определения, данного Дж. фон Нейманом [2] тем, что оно приводит к локальному оператору, определенному на некотором подмножестве множества бесконечно дифференцируемых функций. Это определение сопоставляет голоморфной ветви

функции $f(z)$ комплексного переменного z и обыкновенному дифференциальному оператору k -го порядка D , определённом на множестве n раз дифференцируемых функций, локальный оператор $f(D)$, сопоставляющий функции $u(x)$ аналитическое продолжение ряда

$$(f(\alpha D)u)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \alpha^n D^n$$

по вещественному параметру α :

$$(f(D)u)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha_{p-1})^i}{i!} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{p-1} - \alpha_{p-2})^j}{j!} \times \dots \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha_1^l}{l!} f^{(i+j+\dots+l)}(0) (D^{i+j+\dots+l}u)(x), \quad (1)$$

если это продолжение существует. В работе [1] такие операторы названы голоморфными функциями дифференциальных операторов. В отличие от псевдодифференциальных операторов [3], они локальны. Например, если

$$f(z) = \sqrt{m^2 + z^2},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, с разрезами по интервалам вещественной оси (m, ∞) и $(-\infty, -m)$, $D = -id/dx$, $\psi(x) = \exp(ipx)$, $\forall x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, то

$$(f(D)\psi)(x) = \sqrt{m^2 - \frac{d^2}{dx^2}} \psi(x) = \sqrt{m^2 + p^2} \exp(ipx), \quad \forall x \in (a, b).$$

Аналогично можно определить и оператор $g(D)$, соответствующий функции $g(z) = [f(z)]^{-1} = (m^2 + z^2)^{-1/2}$:

$$(g(D)\psi)(x) = \left(m^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1/2} \psi(x) = (m^2 + p^2)^{-1/2} \exp(ipx), \quad \forall x \in (a, b)$$

с помощью аналитического продолжения соответствующего степенного ряда по степеням α с областью определения — множеством функций, для которых это продолжение существует. Нам понадобится и оператор

$$V_x(D) = -i \left(m^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1/2} \frac{d}{dx},$$

который можно интерпретировать как оператор x -компоненты скорости частицы.

В работе [1] было также изучено дифференциальное уравнение бесконечного порядка

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m^2 - \frac{d^2}{dx^2}}\right) \psi(x) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение получается разделением переменных из уравнения

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{m^2 - \nabla^2}\right) \Psi(t, \mathbf{r}) = 0,$$

которое является точным релятивистским аналогом нерелятивистского уравнения Шрёдингера [4] (в системе единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ равны единице) и может быть названо релятивистским уравнением Шрёдингера. Оно имеет нетривиальные решения лишь при $\varepsilon > 0$. Если $0 < \varepsilon < m$, общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$\psi(\varepsilon, x) = A_1 \exp(\kappa x) + A_2 \exp(-\kappa x),$$

где $\kappa = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$, $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, а при $\varepsilon > m$ —

$$\psi(\varepsilon, x) = B_1 \exp(ipx) + B_2 \exp(-ipx), \quad \forall x \in [a, c],$$

где $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

В работе [1] были также изучены краевые задачи для уравнения (2), было показано, что они во многом аналогичны задачам Штурма–Лиувилля [3] для дифференциального уравнения второго порядка. Причина этого состоит в том, что для этого уравнения существует аналог вронскиана [4]:

$$W[\psi_1, \psi_2] = \psi_1(x) \left(m^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1/2} \frac{d}{dx} \psi_2(x) - \psi_2(x) \left(m^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1/2} \frac{d}{dx} \psi_1(x). \quad (3)$$

Эта функция обладает следующим свойством вронскиана: если $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — решения уравнения (2), то она постоянна, причем если эти решения линейно зависимы и только в этом случае, она равна нулю. Если $\psi(\varepsilon_i, x)$, $i = 1, 2$ — решение уравнения (2) с $\varepsilon = \varepsilon_i$, то

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_a^b [\psi(\varepsilon_1, x) \psi(\varepsilon_2, x) + \\ & + m^2 (g(D)\psi)(\varepsilon_1, x) (g(D)\psi)(\varepsilon_2, x) + (V_x(D)\psi)(\varepsilon_1, x) (V_x(D)\psi)(\varepsilon_2, x)] dx = \\ & = \psi(\varepsilon_1, x) (V_x(D)\psi)(\varepsilon_2, x) - \psi(\varepsilon_2, x) (V_x(D)\psi)(\varepsilon_1, x). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя это, в работе [1] показано, что краевые задачи, аналогичные регулярным задачам Штурма–Лиувилля, можно поставить, задав краевые условия вида:

$$\psi(a) \cos \alpha + i(V_x \psi)(a) \sin \alpha = 0, \quad \psi(b) \cos \beta + (V_x \psi)(b) \sin \beta = 0, \quad (5)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Из равенства (4) следует, что спектр такой задачи чисто точечный, вещественный, ограниченный снизу, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны в смысле скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\psi_{\varepsilon_1}, \psi_{\varepsilon_2}) &= \int_a^b [\psi_{\varepsilon_1}^*(x) \psi_{\varepsilon_2}(x) + \\ & + m^2 (g(D)\psi_{\varepsilon_1})^*(x) (g(D)\psi_{\varepsilon_2})(x) + (V_x(D)\psi_{\varepsilon_1})^*(x) (V_x(D)\psi_{\varepsilon_2})(x)] dx. \end{aligned} \quad (6)$$

В настоящей работе будет рассмотрена краевая задача для уравнения

$$\left(\varepsilon - U(x) - \sqrt{m^2 - \frac{d^2}{dx^2}} \right) \psi_\varepsilon(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b], \quad (7)$$

где

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & \forall x \in [c, b], \\ 0, & \forall x \in [a, c], \end{cases} \quad (8)$$

где $c \in (a, b)$. Для определенности будем считать $U_0 > 0$.

Обозначим:

$$\psi_\varepsilon(x) \equiv \psi_\varepsilon^1(x), \quad \forall x \in [a, c], \quad \psi_\varepsilon(x) \equiv \psi_\varepsilon^2(x), \quad \forall x \in [c, b].$$

Используя (7) и (8), получаем уравнения для $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$:

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m^2 - \frac{d^2}{dx^2}} \right) \psi_\varepsilon^1(x) = 0, \quad \forall x \in [a, c] \quad (9)$$

$$\left(\varepsilon - U_0 - \sqrt{m^2 - \frac{d^2}{dx^2}} \right) \psi_\varepsilon^2(x) = 0, \quad \forall x \in [c, b] \quad (10)$$

Уравнение (9) имеет нетривиальные решения лишь при $\varepsilon > 0$, а уравнение (10) — лишь при $\varepsilon > U_0$. Если $m > \varepsilon > 0$ и одновременно $\varepsilon < U_0$, нетривиальные решения имеет лишь уравнение (9):

$$\psi_\varepsilon^1(x) = C_1 \exp(\chi x) + C_2 \exp(-\chi x), \quad \forall x \in [a, c], \quad \psi_\varepsilon^2(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [c, b].$$

Потребуем непрерывности решения при $x = c$. Тогда из условий (5) следует система для C_1 и C_2 :

$$(C_1 e^{\chi a} + C_2 e^{-\chi a}) \cos \alpha + i \frac{\chi}{\sqrt{m^2 - \chi^2}} (C_1 e^{\chi a} - C_2 e^{-\chi a}) = 0, \quad C_1 e^{\chi c} + C_2 e^{-\chi c} = 0,$$

где $\chi = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}$. Легко видеть, однако, что эта система совместна лишь при $\chi = 0$, и тогда $C_1 = C_2 = 0$ (решение тривиальное).

Если $U_0 > m$, возможно выполнение неравенства $m < \varepsilon < U_0$. Тогда из условий (5) и условия непрерывности решения при $x = c$ следует система:

$$(C_1 e^{ipa} + C_2 e^{-ipa}) \cos \alpha + \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} (C_1 e^{ipa} - C_2 e^{-ipa}) = 0, \quad C_1 e^{ipc} + C_2 e^{-ipc} = 0,$$

где $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$. Эта система совместна, если p удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}[p(a - c)] = -\frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} \operatorname{tg} \alpha.$$

Можно показать, что это уравнение имеет конечное число решений $p = p_n$, $n = 1, 2, \dots, N$ удовлетворяющих неравенству $\sqrt{m^2 + p_n^2} < U_0$ (эти решения можно найти численно, все они вещественны). Соответствующие значения энергии также вещественны:

$$\varepsilon_n = \sqrt{m^2 + p_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Эти значения составляют подмножество $\sigma_1 = \{\varepsilon_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ чисто точечного спектра задачи. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_{\varepsilon_n}(x) = A \sin p_n(c - x), \quad \forall x \in [a, c], \quad \psi_{\varepsilon_n}(x) = 0, \quad \forall x \in [c, b].$$

Они составляют ортогональную систему функций в смысле скалярного произведения (6). Пусть теперь $\varepsilon > U_0$, тогда нетривиальные решения имеют оба уравнения: и (9), и (10). Теперь необходимо к условиям (5) добавить два условия при $x = c$. Поставим при $x = c$, кроме условия непрерывности решения, еще и условие непрерывности функции $V_x \psi_\varepsilon$:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} [\psi_\varepsilon(c + \delta) - \psi_\varepsilon(c - \delta)] = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} [(V_x \psi_\varepsilon)(c + \delta) - (V_x \psi_\varepsilon)(c - \delta)] = 0 \quad (11)$$

(такие условия уже использовались в работе [5]), Легко видеть, что эти условия приводят к однородной линейной системе алгебраических уравнений, которая имеет ненулевые решения лишь для счетного набора вещественных значений энергии. Эти значения составляют еще одно подмножество чисто точечного спектра σ_2 . Эти условия обеспечивают непрерывность вронскиана этих функций. Отсюда следует, что соответственные собственные функции составляют ортогональную в смысле скалярного произведения (6) систему функций. Чтобы избежать громоздких выражений, проиллюстрируем это, положив в (5) $\alpha = \beta = 0$. Решения, удовлетворяющие условиям равенства нулю при $x = a$ и $x = b$, при $U_0 < \varepsilon < U_0 + m$ имеют вид:

$$\psi_\varepsilon(x) = A \sin[p(x - a)], \quad \forall x \in [a, c], \quad \psi_\varepsilon(x) = B \operatorname{sh}[\nu(b - x)], \quad \forall x \in [c, b], \quad (12)$$

где $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, $\nu = \sqrt{m^2 - (\varepsilon - U_0)^2}$. Используя условия (11), получаем систему:

$$\begin{aligned} A \sin[p(c - a)] &= B \operatorname{sh}[\nu(b - c)], \\ -A \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} \cos[p(c - a)] &= iB \frac{\nu}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} \operatorname{ch}[\nu(b - c)]. \end{aligned}$$

Эта система имеет ненулевые решения, лишь если её определитель равен нулю. Отсюда получаем уравнение:

$$\operatorname{tg}[p(c - a)] = -\frac{p\sqrt{m^2 - \nu^2}}{\nu\sqrt{m^2 + p^2}} \operatorname{th}[\nu(b - c)]. \quad (13)$$

Поскольку p и ν — функции ε , это есть уравнение относительно ε . Можно показать, что оно имеет счетное множество решений (их можно найти численно), все они вещественны, но из них лишь те относятся к спектру задачи, которые не превышают $U_0 + m$.

Пусть теперь $\varepsilon > U_0 + m$. Тогда решения, удовлетворяющие условиям равенства нулю при $x = a$ и $x = b$, имеют вид:

$$\psi_\varepsilon(x) = A \sin[p(x - a)], \quad \forall x \in [a, c], \quad \psi_\varepsilon(x) = B \sin[q(b - x)], \quad \forall x \in [c, b], \quad (14)$$

где $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$, $q = \sqrt{(\varepsilon - U_0)^2 - m^2}$. Используя условия (11), получаем систему:

$$\begin{aligned} A \sin[p(c - a)] &= B \sin[q(b - c)], \\ -A \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} \cos[p(c - a)] &= iB \frac{q}{\sqrt{m^2 + q^2}} \cos[q(b - c)]. \end{aligned}$$

Определитель этой системы равен нулю, если

$$\operatorname{tg}[p(c - a)] = -\frac{p\sqrt{m^2 + q^2}}{q\sqrt{m^2 + p^2}} \operatorname{tg}[q(b - c)]. \quad (15)$$

Подставив сюда выражения p и q через ε , снова получим уравнение относительно ε . Это уравнение также имеет счётное множество решений, все они вещественны и принадлежат спектру нашей задачи. Эти решения вместе с решениями уравнения, следующего из уравнения (13), составляют второе подмножество σ_2 спектра нашей задачи. Собственные функции, соответствующие этому подмножеству составляют ортогональную систему функций в смысле скалярного произведения (6) (это следует из непрерывности функции (3)).

Итак, рассмотренная задача имеет чисто точечный вещественный спектр, ограниченный снизу и неограниченный сверху, состоящий из двух подмножеств σ_1 и σ_2 , а собственные функции, соответствующие каждому из этих подмножеств, составляют две ортогональные системы функций. Однако пары собственных функций, взятых из разных подмножеств, не ортогональны, хотя и линейно независимы. Как известно, любую последовательность линейно независимых функций можно ортогонализировать с помощью процедуры Грама–Шмидта [6]. Таким образом, данная краевая задача позволяет определить ортогональную систему функций. Вопрос о полноте этой системы функций в настоящей работе не рассматривается.

Литература

- [1] Лагодинский В. М. Голоморфные функции дифференциальных операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка. Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. – СПб: 2005.
- [2] Нейман И. фон. Математические основы квантовой механики. – М.: Наука, 1964.
- [3] Трев Ф. Псевдодифференциальные операторы и интегральные операторы Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1983.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, Т. 3. Квантовая механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [5] Головин А. В., Лагодинский В. М. Задача об отражении частицы от потенциального скачка в релятивистской квантовой механике // Вестн. СПбГУ, Сер. 4: Физика, химия, 2011, № 2, С. 3–10.
- [6] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. – М.: Мир, 1982.

“НЕКЛАССИЧЕСКАЯ” ФАКТОРИЗАЦИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 3-ГО ПОРЯДКА

Линчук Л. В.

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Санкт-Петербург

e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru

Linchuk L. V. “Nonclassical” factorization of the 3-rd order ordinary differential equations. We consider factorization of the 3-rd order ordinary differential equations admitting generalized operators. The method of the first integrals construction is proposed.

Рассматривается факторизация обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка с помощью обобщенных операторов. Предлагается метод построения первых интегралов на основании построенных факторсистем.

Одним из методов, позволяющих упростить процесс интегрирования дифференциальных уравнений, является построение факторсистемы исходного уравнения. Для этих целей широко используются симметрии, найденные с помощью как классического, так и неклассического группового анализа. К сожалению, эти методы не лишены недостатков.

В групповом анализе отправной точкой являются оператор и уже как следствие, если уравнение допускает этот оператор, оно факторизуется через его инварианты. Продолжение оператора строится по определенным законам, которые по сути дела накладывают ограничения на структуру старших инвариантов, участвующих в записи факторсистемы. Так, например, выражение $yy'' + x$ не может быть инвариантом никакого точечного оператора, оператора динамической симметрии и даже альтернативного обобщенного оператора [1, 2], хотя оно вполне может быть элементом какой-нибудь факторсистемы. Эта “неуниверсальность” операторов начинает проявляться именно с инвариантов второго порядка, так как инварианты нулевого и первого порядка формального оператора могут быть любой структуры. В результате, начиная с ОДУ 3-го порядка

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad n \geq 3,$$

применяя методы группового анализа, мы находим не все факторсистемы вида

$$\begin{cases} u = u(t) = u(x, y, y', y'') & (\partial u / \partial y'' \neq 0), \\ t = t(x, y, y', y''), \\ G(t, u, u', \dots, u^{(n-2)}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

На языке группового анализа наличие такой факторсистемы означает, что, либо допускаемый оператор имеет только два инварианта не выше первого порядка t и u (что неверно даже для формальных операторов), либо уравнение записывается не через все инварианты допускаемого оператора. На практике примеры

с подобной факторсистемой получаются случайно, так как критерия использования при факторизации не всех инвариантов нет. Но даже если бы такой критерий был, напомним, инвариант второго порядка $u = u(x, y, y', y'')$ может быть только определенной структуры.

Рассмотрим ОДУ 3-го порядка

$$y''' = F(x, y, y'). \quad (2)$$

Это уравнение может иметь факторсистемы двух типов:

- 1) внешним уравнением факторсистемы является ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} u = u(t) = u(x, y, y') & (\partial u / \partial y' \neq 0), \\ t = t(x, y, y'), \\ G(t, u, u', u'') = 0. \end{cases}$$

Для поиска таких факторсистем достаточно рассмотреть альтернативные обобщенные операторы [1];

- 2) внешним уравнением факторсистемы является ОДУ 1-го порядка (факторсистема типа (1))

$$\begin{cases} u = u(t) = u(x, y, y', y'') & (\partial u / \partial y'' \neq 0), \\ t = t(x, y, y', y''), \\ G(t, u, u') = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Найти все факторсистемы для заданного уравнения с помощью известных операторов не представляется возможным ввиду специфики их инвариантов второго порядка. Заметим, что именно эта факторсистема может иметь для приложений большую значимость, так как она определяет первый интеграл уравнения. Действительно, если $G(t, u, u') = u'$, то $u = u(x, y, y', y'')$ будет первым интегралом.

Построим линейные операторы, которые с одной стороны обладают свойством операторов группового анализа, обеспечивающим факторизацию, а с другой стороны, не ограничивают структуру инварианта второго порядка и, как следствие, дают возможность найти **все** факторсистемы вида (3).

Во-первых, заметим, что пара коммутирующих формальных операторов обладает общими инвариантами. Если ограничиться инвариантами не выше третьего порядка, то ими будут один инвариант не выше первого порядка, один инвариант второго порядка и один инвариант третьего порядка. Именно такие по порядку инварианты и в таком количестве нам нужны для построения факторсистемы (3). Поэтому логично предположить, что нужно рассматривать не один оператор, а сразу пару операторов:

$$\begin{aligned} X_1 &= \xi \partial_x + \eta \partial_y + \zeta \partial_{y'} + \varphi \partial_{y''} + \psi \partial_{y'''}, \\ X_2 &= \alpha \partial_x + \beta \partial_y + \gamma \partial_{y'} + \mu \partial_{y''} + \nu \partial_{y'''} \end{aligned} \quad (4)$$

Переменные, от которых зависят координаты операторов, определяются согласно порядку инвариантов, которыми эти операторы должны обладать. Необходимо, чтобы общими инвариантами были: один инвариант не выше второго

порядка $t = t(x, y, y', y'')$, один инвариант в точности второго порядка $u = u(x, y, y', y'')$ ($\partial u / \partial y'' \neq 0$) и один инвариант третьего порядка $w = D_x u / D_x t$. Тогда можно предположить, что

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y, y', y''), & \eta &= \eta(x, y, y', y''), & \zeta &= \zeta(x, y, y', y''), \\ \alpha &= \alpha(x, y, y', y''), & \beta &= \beta(x, y, y', y''), & \gamma &= \gamma(x, y, y', y''), \\ \varphi &= \varphi(x, y, y', y''), & \mu &= \mu(x, y, y', y''), \\ \psi &= \psi(x, y, y', y'', y'''), & \nu &= \nu(x, y, y', y'', y''').\end{aligned}$$

Инварианты t и u функционально независимы, следовательно выполнено одно из следующих условий

$$\Delta_{y'} = \begin{vmatrix} u_{y'} & u_{y''} \\ v_{y'} & v_{y''} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} u_y & u_{y''} \\ v_y & v_{y''} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} u_x & u_{y''} \\ v_x & v_{y''} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрение этих условий позволяет выделить несколько случаев в структуре операторов (4) и доказать следующую теорему:

Теорема 1. Существует пара операторов X_1 и X_2 вида (4), общими инвариантами которых будут произвольно заданные функции $t = t(x, y, y', y'')$, $u = u(x, y, y', y'')$, $w = D_x u / D_x t$ ($\partial u / \partial y'' \neq 0$, $\partial w / \partial y''' \neq 0$). Координаты этих операторов определяются по формулам

1) если $\Delta_{y'} \neq 0$, то

$$\begin{cases} \xi = \beta = 1, \\ \alpha = \eta = 0, \\ \psi = D_x \varphi + \mu \zeta - \frac{y''' - \varphi - y' \mu}{y'' - \zeta - y' \gamma} (D_x \zeta - \varphi + \zeta \gamma), \\ \nu = D_x \mu + \mu \gamma - \frac{y''' - \varphi - y' \mu}{y'' - \zeta - y' \gamma} (D_x \gamma - \mu + \gamma^2), \end{cases} \quad (5)$$

а ζ , φ , γ , μ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \zeta_y + \gamma \zeta_{y'} + \mu \zeta_{y''} - \varphi \gamma_{y''} - \zeta \gamma_{y'} - \gamma_x = 0, \\ \varphi_y + \gamma \varphi_{y'} + \mu \varphi_{y''} - \varphi \mu_{y''} - \zeta \mu_{y'} - \mu_x = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\zeta = -\frac{\Delta_x}{\Delta_{y'}}, \quad \gamma = -\frac{\Delta_y}{\Delta_{y'}}; \quad (7)$$

2) если $\Delta_y \neq 0$, то

$$\begin{cases} \xi = \gamma = 1, \\ \zeta = \alpha = 0, \\ \psi = D_x \varphi + \mu \varphi - \frac{y''' - \varphi - y'' \mu}{y' - \eta - y'' \beta} (D_x \eta + \beta \varphi), \\ \nu = D_x \mu + \mu^2 - \frac{y''' - \varphi - y' \mu}{y' - \eta - y'' \beta} (D_x \beta + \beta \mu - 1), \end{cases} \quad (8)$$

а $\eta, \varphi, \beta, \mu$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \beta \eta_y + \eta_{y'} + \mu \eta_{y''} - \beta_x - \eta \beta_y - \varphi \beta_{y''} = 0, \\ \beta \varphi_y + \varphi_{y'} + \mu \varphi_{y''} - \mu_x - \eta \mu_y - \varphi \mu_{y''} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\eta = -\frac{\Delta_x}{\Delta_y}, \quad \beta = -\frac{\Delta_{y'}}{\Delta_y}; \quad (10)$$

3) если $\Delta_x \neq 0$, то

$$\begin{cases} \eta = \gamma = 1, \\ \zeta = \beta = 0, \\ \psi = D_x \varphi + \mu \varphi - \frac{y''' - y' \varphi - y'' \mu}{1 - y' \xi - y'' \alpha} (D_x \xi + \alpha \varphi), \\ \nu = D_x \mu + \mu^2 + \varphi - \frac{y''' - y' \varphi - y'' \mu}{1 - y' \xi - y'' \alpha} (D_x \alpha + \alpha \mu + \xi), \end{cases} \quad (11)$$

а $\xi, \varphi, \alpha, \mu$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \alpha \xi_x + \xi_{y'} + \mu \xi_{y''} - \xi \alpha_x - \alpha_y - \varphi \alpha_{y''} = 0, \\ \alpha \varphi_x + \varphi_{y'} + \mu \varphi_{y''} - \xi \mu_x - \mu_y - \varphi \mu_{y''} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\xi = -\frac{\Delta_y}{\Delta_x}, \quad \alpha = -\frac{\Delta_{y'}}{\Delta_x}. \quad (13)$$

Замечание. Случаи $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_{y'} \neq 0$ не являются взаимоисключающими. Чтобы получать непересекающиеся классы допускаемых операторов, можно рассмотреть, например, 3 ситуации:

1) $\Delta_{y'} \neq 0$. Формулы (5)–(7) сохраняются;

2) $\Delta_{y'} = 0$, $\Delta_y \neq 0$. Формулы (8)–(10) переходят в

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \gamma = 1, \\ \zeta = \alpha = \beta = 0, \\ \psi = D_x \varphi + \mu \varphi - \frac{y''' - \varphi - y'' \mu}{y' - \eta} D_x \eta, \\ \nu = D_x \mu + \mu^2 + \frac{y''' - \varphi - y' \mu}{y' - \eta}, \end{array} \right. \quad (14)$$

а η , φ , μ удовлетворяют системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{y'} + \mu \eta_{y''} = 0, \\ \varphi_{y'} + \mu \varphi_{y''} - \mu_x - \eta \mu_y - \varphi \mu_{y''} = 0, \end{array} \right. \quad (15)$$

где

$$\eta = -\frac{\Delta_x}{\Delta_y}; \quad (16)$$

3) $\Delta_{y'} = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_x \neq 0$; Формулы (11)–(13) переходят в

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \gamma = 1, \\ \zeta = \beta = \xi = \alpha = 0, \\ \psi = D_x \varphi + \mu \varphi, \\ \nu = D_x \mu + \mu^2 + \varphi, \end{array} \right. \quad (16)$$

а φ , μ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{y'} + \mu \varphi_{y''} - \mu_y - \varphi \mu_{y''} = 0. \quad (17)$$

В этой ситуации операторы имеют общий инвариант x .

Можно показать, что

Теорема 2. Если уравнение $y''' = F(x, y, y', y'')$ допускает операторы X_1 и X_2 , имеющие вид (4) и общие инварианты $t = t(x, y, y', y'')$, $u = u(x, y, y', y'')$, $w = D_x u / D_x t$ ($\partial u / \partial y'' \neq 0$, $\partial w / \partial y''' \neq 0$), то оно может быть представлено в виде факторсистемы (3).

Таким образом, найдя все допускаемые уравнением операторы, структура которых определяется Теоремой 1, мы можем построить все факторсистемы исходного уравнения вида (3). Естественно на практике всё мы найти не сможем в виду различных вычислительных трудностей. Но, как правило, достаточно бывает и одной факторсистемы, искать которую можно используя некий анзац в координатах допускаемого оператора.

Пример. Рассмотрим ОДУ 3-го порядка

$$y''' = F(y). \quad (18)$$

Будем искать факторсистемы этого уравнения вида

$$\begin{cases} u = u(t) = u(x, y, y', y''), \\ t = x, \\ G(t, u, u') = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Для этого нам нужно найти допускаемые операторы X_1 и X_2 , определяемые формулами (16), (17). Так как $X_1(y''' - F)|_{y'''=F} = 0$ и $X_2(y''' - F)|_{y'''=F} = 0$, то определяющая система будет иметь вид

$$\begin{cases} y'\varphi_y + F\varphi_{y''} + y''\varphi_{y'} + \varphi_x + \varphi\mu + F_y = 0, \\ F\mu_{y''} + y''\mu_{y'} + y'\mu_y + \mu_x + \mu^2 + \varphi = 0, \\ \varphi_{y'} + \mu\varphi_{y''} - \mu_y - \varphi\mu_{y''} = 0, \end{cases}$$

где $\varphi = \varphi(x, y, y', y'')$, $\mu = \mu(x, y, y', y'')$. Из второго уравнения системы можно выразить φ и подставить в остальные. Но для дальнейшего успешного решения этой системы необходимо некоторое предположение относительно структуры μ . Пусть, например, μ имеет вид

$$\mu = \frac{[a_1(y')^2 + a_2y' + a_3]y'' + b_1(y')^2 + b_2y' + b_3}{y'' + c_1(y')^2 + c_2},$$

где $a_1 = a_1(y)$, $a_2 = a_2(y)$, $a_3 = a_3(y)$, $b_1 = b_1(y)$, $b_2 = b_2(y)$, $b_3 = b_3(y)$, $c_1 = c_1(y)$, $c_2 = c_2(y)$. В результате подстановки μ , φ и расщепления по y' , y'' определяющая система распадется на 38 уравнений относительно 9 функций. Отбрасывая тривиальные случаи и пренебрегая несущественными константами, мы получим, что уравнение (18) должно иметь вид

$$y''' = y^k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

В зависимости от k могут быть следующие варианты:

1. Если $k = 1$, то

$$X_1 = \partial_y - \partial_{y''} + J_{y'''}, \quad X_2 = \partial_{y'} - \partial_{y''}.$$

Используя общие инварианты этих операторов, запишем факторсистему исходного уравнения $y''' = y$:

$$\begin{cases} u = u(t) = y'' + y' + y, \\ t = x, \\ u' = u. \end{cases}$$

Решая внешнее уравнение факторсистемы, получаем

$$u = Ce^x \quad \text{или} \quad y'' + y' + y = Ce^x.$$

Это уравнение, естественно, можно решать дальше, но можно из него получить первый интеграл

$$U = e^{-x}(y'' + y' + y).$$

2. Если $k = -1$, то

$$X_1 = \partial_y - y^{-1}y''\partial_{y''} - y^{-1}y'''\partial_{y'''}, \quad X_2 = \partial_{y'} + y^{-1}y'\partial_{y''}.$$

Исходное уравнение $y''' = y^{-1}$ записывается через общие инварианты этих операторов следующим образом:

$$\begin{cases} u = u(t) = 2yy'' - (y')^2, \\ t = x, \\ u' = 2. \end{cases}$$

Решая внешнее уравнение факторсистемы, получаем

$$u = 2x + C \quad \text{или} \quad 2yy'' - (y')^2 = 2x + C.$$

Используем полученный результат для записи первого интеграла:

$$U = 2yy'' - (y')^2 - 2x$$

3. Если $k \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} X_1 = \partial_y + \frac{(2k+1)(y'')^2 - (k+2)y^k y'}{3yy'' - (k+2)(y')^2} \partial_{y''} + \\ + \frac{1}{3y} \left\{ \frac{(k+2)(y''' - y^k)y'}{[3yy'' - (k+2)(y')^2]^2} [9y^{k+2} - (2k+1)(k+2)(y')^3] + \right. \\ \left. + (2k+1)y''' + (k-1)y^k \right\} \partial_{y'''}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 = \partial_{y'} - \frac{3y((2k+1)y'y'' - 3y^{k+1})}{3yy'' - (k+2)(y')^2} \partial_{y''} + \\ + \frac{(k+2)(2k+1)(y')^3 - 9y^{k+2}}{(3yy'' - (k+2)(y')^2)^2} (y''' - y^k) \partial_{y'''}, \end{aligned}$$

Этот случай даёт иную факторизацию для $k = \pm 1$. Если $k = 1$, операторы имеют вид

$$X_1 = \partial_y + \frac{y'' - yy'}{yy'' - (y')^2} \partial_{y''}, \quad X_2 = \partial_{y'} + \frac{y^2 - y'y''}{yy'' - (y')^2} \partial_{y''},$$

а соответствующая факторсистема

$$\begin{cases} u = u(t) = 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(y'' - y')}{y'' + y' - 2y} - \ln \left(1 - \frac{3(yy' + yy'' + y'y'')}{(y + y' + y'')^2} \right), \\ t = x, \\ u' = 0 \end{cases}$$

позволяет найти первый интеграл в автономном виде

$$U = 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}(y'' - y')}{y'' + y' - 2y} - \ln \left(1 - \frac{3(yy' + yy'' + y'y'')}{(y + y' + y'')^2} \right).$$

Заметим, что этот первый интеграл выражается через первые интегралы, получающиеся из общего решения исходного уравнения $y''' = y$

$$I_1 = (y + y' + y'')e^x,$$

$$I_2 = e^{x/2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}x}{2} y - \sin \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) y' - \sin \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) y'' \right),$$

$$I_3 = e^{x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} y - \cos \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{\pi}{3} \right) y' - \cos \left(\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) y'' \right),$$

следующим образом

$$U = 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{I_2}{I_3} + \ln \frac{I_1^2}{I_2^2 + I_3^2} + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$ – некоторая константа.

Если $k = -1$, провести вычисления до конца технически не удаётся. Но можно сказать, что в этом случае инвариант в факторсистеме (19) удовлетворяет системе

$$\begin{cases} yy'u_y + yy''u_{y'} + u_{y''} = 0, \\ y(3yy'' - (y')^2)u_y - (y(y'')^2 + y')u_{y''} = 0. \end{cases}$$

Ещё в двух случаях удаётся построить первые интегралы. При $k = -2$ интеграл имеет вид

$$U = \frac{y'f_1(v) - 2^{2/3}f_1'}{y'f_2(v) - 2^{2/3}f_2'},$$

где $f_1(v) = \operatorname{Ai}(v)$, $f_2(v) = \operatorname{Bi}(v)$, $v = 2^{-4/3}((y')^2 - 2yy'')$. При $k = -1/2$ структура первого интеграла такова

$$U = \frac{y'f_1(v) - 2^{2/3}\sqrt{y}f_1'}{y'f_2(v) - 2^{2/3}\sqrt{y}f_2'},$$

где $f_1(v) = \operatorname{Ai}(v)$, $f_2(v) = \operatorname{Bi}(v)$, $v = 2^{-1/3}y''$.

Таким образом, предложенный метод позволяет строить “неклассические” факторсистемы и находить первые интегралы ОДУ 3-го порядка. Заметим, что этот метод применим и для уравнений более высокого порядка.

Литература

- [1] Линчук Л. В. Альтернативные обобщенные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXIII научной конференции “Терценовские чтения – 2010”. – СПб.: БАН, 2010. – С. 46–53.

- [2] Линчук Л. В. Алгебры обобщенных операторов, допускаемых обыкновенными дифференциальными уравнениями // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXIV научной конференции “Герценовские чтения – 2011”. – СПб.: БАН, 2011. – С. 89–97.

УДК 532.516

ГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И РЕШЕНИЕ

Родионов А. А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск

e-mail: aarod@icm.krasn.ru

Rodionov A. A. Hydrostatic model, group properties and solution. Group properties of motion equations of an ideal liquid concerning of function describing a free boundary of liquid were investigated.

Keywords: group analysis, ideal liquid, free boundary

Исследованы групповые свойства уравнений движения идеальной жидкости относительно функции, описывающей свободную границу жидкости.

Ключевые слова: групповой анализ, идеальная жидкость, свободная граница

Часто при изучении процессов в океанологии делается предположение, что давление в жидкости линейно зависит от глубины [1]

$$p(x, y, z, t) = -gz + q(x, y, t). \quad (1)$$

Здесь $g = \text{const} > 0$ — ускорение силы тяжести в направлении оси z . В том случае уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости примут вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + q_x &= 0, & v_t + uv_x + vv_y + wv_z + q_y &= 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= 0, & u_x + v_y + w_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $z = \eta(x, y, t)$ — уравнение свободной границы жидкости, на которой выполнены динамическое и кинематическое условия:

$$p(x, y, \eta(x, y, t), t) = p_a(x, y, t), \quad (3)$$

$$\eta_t + u(x, y, \eta(x, y, t), t)\eta_x + v(x, y, \eta(x, y, t), t)\eta_y = w(x, y, \eta(x, y, t), t), \quad (4)$$

где $p_a(x, y, t)$ — атмосферное давление.

Из выражения (1) с учетом условия (3) на свободной поверхности находим

$$p_a(x, y, t) = -g\eta(x, y, t) + q(x, y, t). \quad (5)$$

Равенство (5) однозначно определяет свободную поверхность через функцию $q(x, y, t)$, которая находится из системы (2).

Используя групповой анализ дифференциальных уравнений [2], доказано, что алгебра Ли для системы уравнений (2) образована операторами

$$\begin{aligned} &\partial_t, \partial_z, t\partial_z + \partial_w, t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2q\partial_q, \\ &y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, f_1(t)\partial_x + f_1'\partial_u - xf_1''\partial_q, f_2(t)\partial_y + f_2'\partial_v - yf_2''\partial_q, f_3(t)\partial_q. \end{aligned}$$

Первый оператор отвечает за перенос по времени t , второй и третий — за перенос и преобразование Галилея вдоль оси z , четвертый и пятый — за преобразования растяжения, шестой — за вращение в плоскости (x, y) . Последние три оператора содержат произвольные функции $f_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, зависящие от времени, и определяют бесконечномерную часть алгебры Ли допустимых операторов.

Рассмотрим приближенную модель, описывающую длинноволновое движение жидкости, когда $z \rightarrow \varepsilon z$, $w \rightarrow \varepsilon w$. В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ система уравнений (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z + q_x &= 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + wv_z + q_y = 0, \\ u_x + v_y + w_z &= 0, \quad q_z = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычисления показывают, что алгебра Ли операторов приближенной модели такова:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad X_3 = -t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + 2q\partial_q, \\ X_4 &= z\partial_z + w\partial_w, \quad X_5 = f(x, y, t)\partial_z + (f'_x u + f'_y v + f'_t)\partial_w, \\ X_6 &= f_1(t)\partial_x + f_1'\partial_u - xf_1''\partial_q, \quad X_7 = f_2(t)\partial_y + f_2'\partial_v - yf_2''\partial_q, \\ X_8 &= 2h(t)\partial_t + h'(x\partial_x + y\partial_y - z\partial_z) + (-h'u + h''x)\partial_u + (-h'v + h''y)\partial_v - \\ &\quad - (4h'w + 2h''z)\partial_w - \left(2h'q + \frac{x^2 + y^2}{2}h'''\right)\partial_q, \end{aligned} \quad (7)$$

где $f(x, y, t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $h(t)$ — произвольные функции.

В стационарном случае, когда функции не зависят от времени, алгебра Ли допустимых операторов для уравнений (6) имеет вид

$$\begin{aligned} &\partial_x, \partial_y, \partial_q, z\partial_z + w\partial_w, u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + 2q\partial_q, x\partial_x + y\partial_y - w\partial_w, \\ &y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \quad f(x, y)\partial_z + (f'_x u + f'_y v)\partial_w. \end{aligned} \quad (8)$$

Пример. Найдем решение системы (6) на операторах $\langle X_5, X_7 \rangle$ из базиса (7) при $f = f(x, t)$, $f_2 \equiv 1$. Инвариантами операторов являются x, t, u, v, q , $wf(x, t) - (uf'_x + f'_t)z$. Поэтому инвариантное решение следует искать в виде

$$(u, v, w, q) = (U(x, t), V(x, t), W(x, t) + (uf'_x/f + f'_t/f)z, Q(x, t)).$$

Система уравнений (6) преобразуется в фактор-систему

$$U_t + UU_x + Q_x = 0, \quad V_t + UV_x = 0, \quad U_x + U\frac{f'_x}{f} + \frac{f'_t}{f} = 0. \quad (9)$$

Последнее уравнение интегрируется:

$$U = \frac{1}{f(x, t)} \left(\int f_t dx + \varphi(t) \right)$$

с произвольной функцией $\varphi(t)$. Функции $V(x, t)$, $Q(x, t)$ определяются из первых двух уравнений системы (9).

Предположим, что $f = f(x)$ не зависит от времени t , тогда получаем следующее решение уравнений (6):

$$\begin{aligned} u = U = \frac{\Phi'(t)}{F'(x)}; \quad v = V[F(x) - \Phi(t)]; \quad w = \frac{\Phi'(t)F''(x)}{(F'(x))^2} z + W(x, t); \\ q = Q = - \int \frac{\varphi'(t)}{f(x)} dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi'(t)}{F'(x)} \right)^2 + \psi(t) \end{aligned} \quad (10)$$

с произвольными функциями $\Phi(t)$, $F(x)$ и $f(x) = F'(x)$, $\varphi(t) = \Phi'(t)$; функции V, W также произвольны.

Из уравнения (5) найдем функцию, определяющую свободную границу

$$\eta(x, y, t) = \frac{1}{g} (Q(x, t) - p_a(x, y, t)), \quad (11)$$

на которой выполняется кинематическое условие (4)

$$\eta_t + U(x, t)\eta_x + V(x, t)\eta_y = \frac{\Phi'(t)F''(x)}{(F'(x))^2} \eta + W(x, t). \quad (12)$$

Подставляя соотношения (10) и (11) в формулу (12), получим требование на $p_a(x, y, t)$:

$$p_{at} + Up_{ax} + Vp_{ay} - \frac{\Phi'F''}{(F')^2} p_a = Q_t + UQ_x - gW. \quad (13)$$

В силу произвольности функции $W(x, t)$ правую часть в выражении (13) можно занулить. Тогда уравнение (13) интегрируется относительно p_a

$$p_a(x, y, t) = F'(x) \cdot P\left(F(x) - \Phi(t), y - (F(x) - \Phi(t))t\right)$$

с произвольной функцией P двух аргументов.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН, междисциплинарный интеграционный проект № 44.

Литература

- [1] Боуден К. Ф. Физическая океанография прибрежных вод. – М.: Мир, 1988. – 324 с. (Bowden K. F. Physical oceanography of coastal waters. Ellis Horwood Limited Publishers. – New York: Halsted Press, 1983. – 324 p.)
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГороВА

Стогний В. И., Копась И. Н., Коваленко С. С.

Национальный технический университет Украины «КПИ» (Киев)

Институт математики НАН Украины (Киев)

e-mail: valeriy_stogniy@mail.ru, innak@net.ua, kovalenko@imath.kiev.ua

Stogniy V. I., Kopas I. M., Kovalenko S. S. Group-theoretic analysis and fundamental solutions of the generalized linear Kolmogorov equations. In this paper, a class of $(2+1)$ -dimensional generalized linear Kolmogorov equations is considered. Using the classical Lie–Ovsyannikov algorithm, we performed the group classification of the class under study. Basing on the operators from the maximal algebra of invariance of the linear Kolmogorov equation, it was constructed the invariant fundamental solution.

Keywords: group classification, linear Kolmogorov equation, equivalence transformations, invariant fundamental solution.

В этой статье рассматривается один класс $(2+1)$ -мерных обобщённых линейных уравнений Колмогорова. Используя классический метод Ли–Овсянникова, проведена групповая классификация исследуемого класса уравнений. С помощью операторов из максимальной алгебры инвариантности линейного уравнения Колмогорова построено его инвариантное фундаментальное решение.

Ключевые слова: групповая классификация, линейное уравнение Колмогорова, преобразование эквивалентности, инвариантное фундаментальное решение.

1. Постановка задачи. В 1934 г. А. Н. Колмогоров [1] для описания неізотропных диффузионных процессов предложил использовать такое уравнение

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0, \quad (1)$$

где $u = u(t, x, y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

В работе [2] было показано, что уравнение (1) имеет нетривиальные симметричные свойства, а именно, допускает 7-параметрическую группу нетривиальных локальных преобразований переменных. Это даёт возможность строить точные частные решения уравнения (1) в явном виде, используя метод симметричной редукции или метод разделение переменных базируясь на операторах максимальной алгебры инвариантности этого уравнения [2].

Возникает естественный вопрос: существуют ли среди уравнений вида

$$u_t - u_{xx} + A(x)u_y = 0, \quad A(x) \neq \text{const} \quad (2)$$

другие, отличные от (1) уравнения с нетривиальными симметричными свойствами?

Отметим, что к уравнениям вида (2) (например, при степенной $A(x) = x^\alpha$ или экспоненциальной $A(x) = e^x$ функциях $A(x)$) точечными заменами переменных сводятся некоторые уравнения финансовой математики (см., например, [3]).

2. Групповая классификация класса дифференциальных уравнений (2). Поставленная задача о выделении из класса дифференциальных уравнений (2) тех уравнений, которые допускают нетривиальные симметричные свойства – это прямая задача групповой классификации классов дифференциальных уравнений. Решение этой задачи было проведено используя классический метод Ли–Овсянникова [4]; при этом, классификация проводилась с точностью до точечных преобразований переменных из группы преобразований эквивалентности класса уравнений (2).

Определение 1. Преобразованием эквивалентности класса уравнений (2) называется невырожденная локальная замена переменных

$$\bar{t} = T(t, x, y, u), \quad \bar{x} = X(t, x, y, u), \quad \bar{y} = Y(t, x, y, u), \quad \bar{u} = U(t, x, y, u),$$

$$\bar{A} = \Phi(t, x, y, u, A),$$

которая переводит каждое уравнение из класса (2) на функцию $u = u(t, x, y)$ с произвольным элементом A в некоторое другое уравнение из этого самого класса на функцию $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ с новым произвольным элементом $\bar{A}$.

Множество преобразований эквивалентности образует группу (псевдогруппу) преобразований эквивалентности, которую мы будем обозначать через E . Непрерывная часть E_c этой группы образует группу Ли, алгебра Ли которой находится по известному алгоритму [4, 5].

Теорема 1. Алгебра Ли непрерывной подгруппы E_c группы преобразований эквивалентности E класса уравнений (2) генерируется такими операторами:

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_x, \quad E_3 = \partial_y, \quad E_4 = u\partial_u, \quad E_5 = t\partial_y + \partial_A, \quad E_6 = y\partial_y + A\partial_A,$$

$$E_7 = 2t\partial_t + x\partial_x - 2A\partial_A, \quad E_\infty = b(t, x)\partial_u,$$

где $b = b(t, x)$ – произвольное гладкое решение линейного уравнения теплопроводности $b_t = b_{xx}$.

Конечные преобразования, которые соответствуют операторам алгебры непрерывной группы преобразований эквивалентности E_c находят решением соответствующих уравнений Ли. Проведя необходимые вычисления, получаем такой результат.

Теорема 2. Группа E_c непрерывных преобразований эквивалентности класса дифференциальных уравнений (2) состоит из таких преобразований:

$$\bar{t} = \alpha^2 t + e_1, \quad \bar{x} = \alpha x + e_2, \quad \bar{y} = \beta y + \delta t + e_3, \quad \bar{u} = \gamma u + b(t, x),$$

$$\bar{A} = \frac{\beta}{\alpha^2} A + \frac{\delta}{\alpha^2},$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, δ , e_i ($i = 1, \dots, 3$) – произвольные действительные постоянные; $b = b(t, x)$ – произвольное гладкое решение линейного уравнения теплопроводности $b_t = b_{xx}$.

Замечание 1. Группа E преобразований эквивалентности исследуемого класса уравнений (2) кроме непрерывной подгруппы E_c содержит также ряд дискретных преобразований, а именно, такие три инверсии:

Таблица 1. Результат групповой классификации класса дифференциальных уравнений (2).

№	$A(x)$	базис конечномерной части МАИ
1.	$\ln x$	$A_0^{\ker}, 2t\partial_t + x\partial_x + (t + 2y)\partial_y$
2.	e^x	$A_0^{\ker}, \partial_x + y\partial_y, 2y\partial_x + y^2\partial_y - (y + e^x)u\partial_u$
3.	$x^k (k \neq -2, 0, 1)$	$A_0^{\ker}, 2t\partial_t + x\partial_x + (k + 2)y\partial_y$
4.	x^{-2}	$A_0^{\ker}, 2t\partial_t + x\partial_x, 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (2t + x^2)u\partial_u$
5.	x	$A_0^{\ker}, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y,$ $t^2\partial_t + (tx + 3y)\partial_x + 3ty\partial_y - (2t + x^2)u\partial_u,$ $3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3(y - tx)u\partial_u, 2t\partial_x + t^2\partial_y - xu\partial_u$

- 1) $x \rightarrow -x$;
- 2) $u \rightarrow -u$;
- 3) $y \rightarrow -y, A \rightarrow -A$.

Результат групповой классификации класса дифференциальных уравнений (2) дают теоремы 3–5.

Теорема 3. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2) в случае произвольной гладкой функции $A(x) \neq \text{const}$ есть такая алгебра Ли:

$$A^{\ker} = \langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u, \beta(t, x)\partial_u \rangle,$$

где $\beta = \beta(t, x)$ – произвольное гладкое решение линейного уравнения теплопроводности $\beta_t = \beta_{xx}$.

Теорема 4. Дифференциальное уравнение (2) допускает расширение симметричных свойств по сравнению со случаем произвольной функции $A(x) \neq \text{const}$ тогда и только тогда, когда функция $A(x)$ (выбранная с точностью до преобразований эквивалентности из группы E) имеет один из таких видов: 1) $A(x) = \ln x$; 2) $A(x) = e^x$; 3) $A(x) = x^k, k \neq 0$.

Теорема 5. Максимальными алгебрами инвариантности уравнений (2) с функциями $A(x)$, определёнными в теореме 4, есть бесконечномерные алгебры Ли вида $A^{\max} = A^{\text{basic}} \oplus_s \langle \beta(t, x, y)\partial_u \rangle$, где A^{basic} – конечномерная часть алгебры $A^{\max}$ (см., табл. 1), $\beta(t, x, y)$ – произвольное гладкое решение соответствующего уравнения (2).

Замечание 2. В табл. 1 были использованы такие обозначения: $A_0^{\ker} = \langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u \rangle$; символом $\oplus_s$ обозначена полупрямая сумма двух алгебр Ли.

3. Инвариантные фундаментальные решения линейного уравнения Колмогорова (1). Одним из применений симметричных свойств линейных дифференциальных уравнений с частными производными есть построение в явном виде их фундаментальных решений.

В статье [1] А. Н. Колмогоров для уравнения (1) получил такое фундаментальное решение:

$$u = \frac{\sqrt{3}\theta(t-t_0)}{2\pi(t-t_0)} \cdot \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)} - \frac{3}{(t-t_0)^3} \left(y-y_0 - \frac{t-t_0}{2}(x+x_0) \right)^2 \right\}, \quad (3)$$

где θ – функция Хевисайда.

Исследуем вопрос построения фундаментального решения (3) на основе использования максимальной алгебры инвариантности уравнения (1).

Определение 2. Фундаментальным решением линейного уравнения Колмогорова (1) называется обобщённая функция $u = u(t, x, y, t_0, x_0, y_0)$, которая зависит от t_0, x_0, y_0 как от параметров и удовлетворяет уравнению

$$u_t - u_{xx} + xu_y = \delta(t-t_0, x-x_0, y-y_0), \quad (4)$$

при дополнительном условии $u|_{t < t_0} = 0$ (δ – функция Дирака).

Конструктивный метод вычисления алгебры инвариантности линейных неоднородных дифференциальных уравнений с δ -функцией в правой части был предложен в работах [6, 7]. В случае уравнения (4), реализация этого метода приводит к такому результату.

Теорема 6. Уравнение (4) допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов симметрии с таким базисом конечномерной части:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 2(t-t_0)\partial_t + (x-x_0)\partial_x - (x_0(t-t_0) - 3(y-y_0))\partial_y - 4u\partial_u, \\ Y_2 &= (t^2-t_0^2)\partial_t + ((tx+3y) - (t_0x_0+3y_0))\partial_x + (3(y-y_0)t - t_0x_0(t-t_0))\partial_y - \\ &\quad - (2(t-t_0) + x^2 - x_0^2)u\partial_u, \\ Y_3 &= 3(t^2-t_0^2)\partial_x + (t^3-3t_0^2t+2t_0^3)\partial_y - 3(tx-y-(t_0x_0-y_0))u\partial_u, \\ Y_4 &= 2(t-t_0)\partial_x + (t-t_0)^2\partial_y - (x-x_0)u\partial_u. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что фундаментальное решение (3) линейного уравнения Колмогорова (1) инвариантно относительно всех операторов алгебры инвариантности уравнения (4). Таким образом, нами получена такая теорема.

Теорема 7. Фундаментальное решение (3) линейного уравнения Колмогорова (1) инвариантно относительно четырёхпараметрической группы преобразований, которая соответствует алгебре Ли $\langle Y_1, \dots, Y_4 \rangle$ операторов симметрии уравнения (4).

Теорема 7 дает возможность конструктивно строить фундаментальное решение (3) уравнения (1) как обобщённое инвариантное решение уравнения (4) используя 2- или 3-мерные подалгебры алгебры $\langle Y_1, \dots, Y_4 \rangle$.

Литература

- [1] Kolmogoroff A. N. Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung) // Ann. Math. 1934. Vol. 35., № 2. – P. 116–117.
- [2] Лагно В. И., Стогний В. И. Симметрия и разделение переменных для уравнения Колмогорова // Материалы научной конференции “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2008”. – СПб., 2008. – С. 79–83.

- [3] Barucci E., Polidoro S., Vespri V. Some results on partial differential equations and Asian options // Math. Models Methods Appl. Sci. 2001. Vol. 11. – P. 475–497.
- [4] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1978. – 400 с.
- [5] Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. – Москва–Ижевск: “Институт компьютерных исследований”, 2004. – 392 с.
- [6] Берест Ю. Ю. Групповой анализ линейных дифференциальных уравнений в обобщённых функциях и построение фундаментальных решений // Дифф. уравнения, 1993. Т. 29, № 11. – С. 1958–1970.
- [7] Аксенов А. В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // ДАН, 1995. Т. 342, № 2. – С. 151–153.

УДК 517.9

ПОЛНЫЙ СПИСОК ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА ИЗ СПРАВОЧНИКОВ Э. КАМКЕ, В. Ф. ЗАЙЦЕВА–А. Д. ПОЛЯНИНА И СПИСКА АЙНСА–ГАМБЬЕ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЮ ПЕНЛЕВЕ II

Тошмуродова Д. Р.

Башкирский государственный университет

Уфа

e-mail: dia9912@yandex.ru

Toshmurodova D. R. Full list of the second order ODE's equivalent to Painlevé II equation from E. Kamke, V. F. Zaitsev–A. D. Polyanin handbooks and from Ince–Gambier list. All the nonlinear ordinary differential equations from handbooks “Handbook of ordinary differential equations” E. Kamke, “Handbook of ordinary differential equations” A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, and also from 50 equations of Ince–Gambier list, equivalent to the Painlevé II equation in the class of point-transformation are found. For equations which satisfy to criteria given changes of variables leading them to canonical form.

Рассматриваются уравнения из справочников Э. Камке, В. Ф. Зайцева–А. Д. Полянина и списка Айнса–Гамбье. Проверяется выполнение условий эквивалентности уравнению Пенлеве II. Составляется полный список эквивалентных уравнений.

Была поставлена задача составления полного списка ОДУ второго порядка из справочников Э. Камке [3], В. Ф. Зайцева–А. Д. Полянина [4] и списка Айнса–Гамбье [5], эквивалентных уравнению Пенлеве II относительно точечных замен переменных

$$y'' = 2y^3 + xy + a. \quad (1)$$

Уравнения Пенлеве – список из 6-ти обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y'' = f(x, y, y')$, где f – рациональная функция от y и y' и

аналитическая от x , которые обладают свойством: их общее решение имеет в качестве подвижных особых точек только полюса. Введены П. Пенлеве и Б. Гамбье. Возникают при сведении к ОДУ некоторых нелинейных уравнений математической физики.

В статье Картак В. В. [1] в терминах инвариантов точечных преобразований сформулированы необходимые и достаточные условия эквивалентности, при которых ОДУ второго порядка точечной заменой переменных сводится к уравнению (1).

Критерий эквивалентности содержится в следующей теореме, доказательство см. [1]. Здесь I_1, I_2, J, I_6 и I_9 – инварианты, $F, \Omega, N, W, V, \Theta, L_1$ – псевдоинварианты, $(B, -A)$ – псевдовекторное поле. Формулы для их вычислений через коэффициенты уравнения

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)(y')^2 + S(x, y)(y')^3. \quad (2)$$

содержатся в работах [1], [2].

Теорема 1. Произвольное уравнение вида (2) эквивалентно уравнению Пенлеве II (1) с параметром $a = \pm J = \text{const}$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства 1) $F = 0$, но $A \neq 0$ или $B \neq 0$, 2) $\Omega = 0$ (что равносильно $I_2 = 0$), 3) $M \neq 0$, 4) $I_1 = \frac{18}{5}$, 5) инварианты I_6 и I_9 функционально независимы, 6) $I_{21} = 0$. Явный вид замены переменных задается формулой

$$\tilde{x} = \frac{5I_6}{\sqrt[6]{2500I_9}} - \frac{3}{2}J\sqrt[6]{2500I_9}, \quad \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt[6]{2500I_9}}.$$

По этому критерию проверены 249 уравнений из Части 3, главы VI “Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка” справочника Э. Камке, 773 уравнений из справочника Зайцева В. Ф., Полянина А. Д. и 50 уравнений из списка Айнса–Гамбье.

Условиям этой теоремы удовлетворяют уравнение 6.6 (само уравнение Пенлеве II), уравнения 6.8 при $b \neq 0$, 6.9 при $b \neq 0$, 6.142, 6.145 при $b \neq 0$, 6.27 при $m \neq 0$, $b \neq 0$, для него $\tilde{a} = J = 0$, из справочника Э. Камке.

$$6.8. \quad y'' = 2a^2y^3 - 2abxy + b, \quad a \neq 0,$$

$$\tilde{a} = \frac{1}{2}, \quad \tilde{x} = -(2ab)^{1/3}x, \quad \tilde{y} = \frac{a^{2/3}y}{(2b)^{1/3}} \longrightarrow \tilde{y}'' = 2\tilde{y}^3 + \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{a}.$$

$$6.9. \quad y'' = -ay^3 - bxy - cy - d, \quad a \neq 0,$$

$$\tilde{a} = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{-2b^2}}, \quad \tilde{x} = \frac{bx + c}{(-b^2)^{1/3}}, \quad \tilde{y} = \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{2}(-b^2)^{1/6}}.$$

$$6.142. \quad y'' = \frac{(y')^2}{2y} + 4y^2 + 2xy,$$

$$\tilde{a} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad \tilde{y} = \sqrt{y}.$$

$$6.145. \quad y'' = \frac{(y')^2}{2y} - \frac{ay^2}{2} - \frac{bxy}{2}, \quad a \neq 0,$$

$$\tilde{a} = 0, \quad \tilde{x} = \frac{bx}{2^{1/3}(-b^2)^{1/3}}, \quad \tilde{y} = \frac{\sqrt{ay}}{2^{7/6}(-b^2)^{1/6}}.$$

$$6.27. \quad y'' = -ay' - bx^m y^n, \quad n = 3, \quad b \neq 0,$$

$$\tilde{x} = \frac{8a^2 x^2 + 2max - 6m - m^2}{2^{4/3}(8a^3 x^3 - 6ma^2 x^2 - 3am(m+3)x + m(m+3)(m+6))^{2/3}},$$

$$\tilde{y} = \frac{3y\sqrt{b}(-x)^{\frac{m+2}{2}}}{2^{1/6}(8a^3 x^3 - 6ma^2 x^2 - 3am(m+3)x + m(m+3)(m+6))^{1/3}}.$$

Из списка Айнса–Гамбье этому критерию удовлетворяют уравнения:

$$\text{IX.} \quad y'' = 2y^3 + yx + a \text{ (само уравнение Пенлеве II),}$$

$$\text{XX.} \quad y'' = \frac{(y')^2}{2y} + 4y^2 + 2xy,$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad \tilde{y} = \sqrt{y}.$$

В справочнике [4] нет уравнений, эквивалентных уравнению (1).

Литература

- [1] Картак В. В. Явное решение проблемы эквивалентности для некоторых уравнений Пенлеве // Уфимский математический журнал. – 2009. Т. 1. №3. – С. 46–56.
- [2] Sharipov R. A. Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3$ // Electronic archive at LANL. (MathDG #9802027, 1998). 1–35.
- [3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976.
- [4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [5] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ Государственное НКТП научно-техническое издательство Украины, 1939.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Филатов О. П.

Самарский государственный университет

Самара

e-mail: filatov_oleg@samaradom.ru

Filatov O. P. The limiting properties of the generalized solution of the third boundary value problem for the heat equation. It is proved the properties of the stabilization with increasing time for generalized solutions of the Sobolev space for the problem with time-dependent parameters. In particular, parameters may be time dependent periodic.

Keywords: stabilization, increasing time, generalized solutions, Sobolev spaces.

Доказаны свойства стабилизации с ростом времени обобщённых решений из пространства Соболева для задачи с зависящими от времени параметрами. В частности, параметры могут зависеть от времени периодически.

Ключевые слова: стабилизация, рост времени, обобщённые решения, пространства Соболева

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = \operatorname{div} (p(t, x) \nabla u) - q(t, x)u + f(t, x), \quad (t, x) \in G_\tau, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in G, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(t, x)u = 0, \quad (t, x) \in S_\tau, \quad (3)$$

где G — ограниченная область из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\Gamma \in C^1$, $G_\tau = (0, \tau) \times G$, $S_\tau = (0, \tau) \times \Gamma$. Здесь $\tau > 0$, $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе Γ . Предполагается, что измеримые функциональные параметры задачи удовлетворяют условиям

$$\varphi \in L_2(G), \quad 0 < \mu_1 \leq p \leq \mu_2, \quad |q| \leq \mu_3, \quad (4)$$

$$f \in L_{1,2}^{t,x}(G_\tau) \quad \forall \tau > 0, \quad |\alpha| \leq \mu_4, \quad |\alpha_t| \leq \mu_5 \quad \forall \tau > 0, \quad (5)$$

где функция $\alpha(t, x)$ абсолютно непрерывна по $t \in [0, \tau]$ для любого $x \in \Gamma$ и для любого $\tau > 0$, α_t — производная по t . Здесь $\mu_1, \dots, \mu_5$ — постоянные. Решением задачи (1)–(3) называется функция $u \in W_2^{1,0}(G_\tau)$, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_{G_\tau} (-u \eta_t + p \langle \nabla u, \nabla \eta \rangle + q u \eta) dx dt + \int_{S_\tau} \alpha p u \eta d\sigma dt = \int_G \varphi(x) \eta(0, x) dx + \int_{G_\tau} f \eta dx dt.$$

по отношению к любой пробной функции $\eta \in W_2^1(G_\tau)$, $\eta(\tau, x) = 0$, где $d\sigma$ — элемент площади поверхности Γ . Из [1, теорема 4.1, с. 178] следует, что существует

единственное решение $u \in W_2^{1,0}(G_\tau)$ задачи (1)–(3) $\forall \tau > 0$. Если функциональные параметры p, q, α не зависят от времени t , а $q, \alpha \geq 0$, то хорошо известно свойство стабилизации решения задачи (1)–(3) при $t \rightarrow \infty$, что следует из метода разделения переменных, который эффективно применяется в этом случае при некоторых требованиях гладкости на параметры [2]–[4]. Естественно возникает вопрос, имеет ли место аналог свойства стабилизации для обобщенных решений в ситуации, когда все параметры задачи могут зависеть от t ? Пусть $G_{\tau,1} = (\tau - 1, \tau) \times G, \tau > 1$.

Определение 1. Функция $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к функции $u_0 \in W_2^{1,0}(G_\infty)$, если для их разности $w = u - u_0$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{G_{\tau,1}} (w^2 + \|\nabla w\|^2) dx dt = 0.$$

Здесь $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ означает, что функция u определена на множестве $(0, \infty) \times G$, а её сужение на G_τ принадлежит $W_2^{1,0}(G_\tau)$ при любом $\tau > 0$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4)–(5) и $q \geq \mu_6 > 0, \alpha \geq 0$. Тогда решение $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ задачи (1)–(3) стремится при $t \rightarrow \infty$ к решению $u_0 \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ этой же задачи с начальной функцией $\varphi = 0$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (4)–(5), и $q \geq \mu_6 > 0, \alpha \geq 0$, а функциональные параметры p, q, f, α являются ω -периодическими функциями времени t . Тогда существует ω -периодическая по t функция $u_\omega \in W_2^{1,0}(G_\infty)$, к которой стремится при $t \rightarrow \infty$ любое решение $u \in W_2^{1,0}(G_\infty)$ задачи (1)–(3).

Схема доказательства этих теорем связана со свойством равномерной по $n = 1, 2, \dots$ асимптотической устойчивостью тривиального решения *определяющей* системы обыкновенных дифференциальных уравнений размерности n , которая используется для построения приближенных решений методом Галеркина в [1, теорема 4.1, с. 178]. Если в теоремах 1, 2 условие $q \geq \mu_6 > 0, \alpha \geq 0$ заменить на $q \geq 0, \alpha \geq \mu_6 > 0$, то эти теоремы остаются справедливыми для любых приближенных решений, при этом свойство равномерной по $n = 1, 2, \dots$ асимптотической устойчивости тривиального решения определяющей системы остается под вопросом, хотя при любом n асимптотическая устойчивость решения имеет место.

Литература

- [1] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. – М: Наука, 1973. – 408 с.
- [2] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1977. – 736 с.
- [3] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1981. – 512 с.
- [4] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М: Наука, 1976. – 392 с.

ЛИЕВСКИЕ СИММЕТРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Шаповал Н. Н.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Киев, Украина

e-mail: natalya.shapoval@gmail.com

Shapoval N. M. Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients. Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant commuting coefficient matrixes are exhaustively described. A constructive procedure for the computation of Lie symmetries and a general formula for the dimensions of the Lie symmetry algebras of such systems are presented.

Исчерпывающе описаны лиевские симметрии систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коммутирующими матрицами коэффициентов. Представлена конструктивная процедура вычисления симметрий и размерностей максимальных алгебр инвариантности таких систем.

Задача исследования максимальных алгебр инвариантности, допускаемых системами дифференциальных уравнений определенного вида, является далеко не новой, но, тем не менее, все ещё актуальной.

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\ddot{\mathbf{x}} = A\dot{\mathbf{x}} + B\mathbf{x} + \mathbf{C}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^T$; $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$; $\ddot{\mathbf{x}} = d\dot{\mathbf{x}}/dt$; $\mathbf{C}$ — гладкая вектор-функция независимой переменной t ; A и B — постоянные коммутирующие комплексные матрицы размерности $n \times n$; $n \geq 2$. Отметим, что выбор поля не является существенным. Все приведенные результаты легко обобщаются на случай вещественного поля. Замена зависимых переменных $\mathbf{x} = \exp(\frac{1}{2}At)\mathbf{y} + \mathbf{x}_p(t)$, где $\mathbf{x}_p(t)$ — частное решение системы (1), сводит (1) к системе

$$\ddot{\mathbf{y}} = D\mathbf{y}, \quad \text{где } D = B - A^2.$$

Пусть J — жорданова нормальная форма матрицы D . Тогда существует невырожденная матрица P такая, что $D = P^{-1}JP$. Точечное преобразование $\mathbf{y} = P\mathbf{z}$ сводит систему $\ddot{\mathbf{y}} = D\mathbf{y}$ к виду $\ddot{\mathbf{z}} = J\mathbf{z}$. Таким образом, для изучения лиевских симметрий систем линейных ОДУ 2-го порядка в нормальной форме с постоянными коммутирующими матрицами коэффициентов достаточно рассмотреть только системы вида

$$\ddot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x}, \quad (2)$$

где J — жорданова матрица; $J = \bigoplus_{l=1}^s J_{\lambda_l}^{k_l}$; $k_1 + \dots + k_s = n$; $J_{\lambda_l}^{k_l}$ — жорданова клетка размерности k_l с собственным значением λ_l .

Замечание 1. Если матрица J пропорциональна единичной матрице, т. е. $J \in \langle E^n \rangle$, то соответствующая ей система (2) сводится к виду $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ заменой переменных, которая называется обобщённым преобразованием Арнольда [1]. Максимальная алгебра инвариантности такой системы изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{C})$ ($\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{R})$) в случае комплексного (вещественного) поля и хорошо известна; см., напр., [1]. Поэтому такие случаи исключаются из дальнейшего рассмотрения.

В недавней серии работ [2–5] были изучены лиевские симметрии некоторых систем n ($n \geq 2$) линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. А именно, в [2] рассмотрены случаи $n = 2$ и $n = 3$. Неточности, допущенные в [2], были исправлены в работах [3, 4]; во второй работе рассмотрен также случай $n = 4$. Некоторые обобщения на случай произвольного n сделаны в работах Р. Кампоамора-Стурсберга [4, 5]. Более детальный обзор литературы и известных результатов по групповому анализу систем ОДУ второго порядка представлен в [6], где задача групповой классификации систем вида (2) решена в случае произвольной размерности n . В частности, доказано следующее утверждение. (Далее используем обозначение $N(D)$ для числа линейно независимых матриц, коммутирующих с матрицей D . Очевидно, что $N(D) = N(\tilde{D})$, если матрицы D и $\tilde{D}$ подобные).

Теорема. Пусть матрица J не пропорциональна единичной матрице. Тогда максимальной алгеброй лиевской инвариантности $\mathfrak{g}^J$ системы $\ddot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x}$ является алгебра Ли

$$\langle \mathcal{X}^m, m = \overline{1, 2n}, \mathcal{H}^\ell, \ell = \overline{1, N}, \mathcal{T} \rangle,$$

если матрица J ненильпотентная, или

$$\langle \mathcal{X}^m, m = \overline{1, 2n}, \mathcal{H}^\ell, \ell = \overline{1, N}, \mathcal{T}, \mathcal{D} \rangle$$

в случае нильпотентной матрицы J . Здесь

$$\mathcal{X}^m = \varphi^{ma}(t) \partial_{x^a}, \quad \mathcal{H}^\ell = (H^\ell)^{ba} x^a \partial_{x^b}, \quad \mathcal{T} = \partial_t, \quad \mathcal{D} = t \partial_t - 2\gamma^{ab} x^b \partial_{x^a},$$

где $\varphi^m = (\varphi^{m1}(t), \dots, \varphi^{mn}(t))^T$, $m = \overline{1, 2n}$, — фундаментальная система решений системы (2), H^ℓ , $\ell = \overline{1, N}$, — линейно независимые матрицы, коммутирующие с матрицей J , $N = N(J)$, а $\gamma = (\gamma^{ab}) = \text{diag}(1, 2, \dots, k_1, 1, 2, \dots, k_2, \dots, 1, 2, \dots, k_s)$.

Следствие. Размерность $d(n, J) = \dim \mathfrak{g}^J$ максимальной алгебры лиевской инвариантности $\mathfrak{g}^J$ системы (2) в случае, когда матрица J не равна нулю и не пропорциональна единичной матрице, зависит от размерности n и от структуры матрицы J и определяется формулой

$$d(n, J) = \begin{cases} 1 + 2n + N + 1, & \text{если матрица } J \text{ нильпотентная,} \\ 1 + 2n + N, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где первое слагаемое соответствует оператору сдвига по переменной t ; $2n$ — размерность пространства решений системы (2); $N = N(J)$ — количество линейно независимых матриц, коммутирующих с J .

Замечание 3. Алгоритм построения матриц, коммутирующих с данной матрицей D , описан в [7]. Там же приведены формулы для определения числа $N(D)$.

Пример. Рассмотрим систему (2) с матрицей $J = J_{\lambda_1}^3 \oplus J_{\lambda_2}^1$, т. е. систему

$$\ddot{x}^1 = \lambda_1 x^1 + x^2, \quad \ddot{x}^2 = \lambda_1 x^2 + x^3, \quad \ddot{x}^3 = \lambda_1 x^3, \quad \ddot{x}^4 = \lambda_2 x^4. \quad (3)$$

Необходимо рассмотреть два случая соотношения собственных значений λ_1 и λ_2 , а именно, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 = \lambda_2$.

Для $\lambda_1 \neq \lambda_2$ существует единственный непостоянный инвариантный многочлен $(\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_2)$ матрицы J . Отсюда $N(J) = 4$, и произвольная матрица, коммутирующая с J , имеет вид (см. главу VIII в [7])

$$H = \begin{pmatrix} \eta^{11} & \eta^{12} & \eta^{13} & \vdots & 0 \\ 0 & \eta^{11} & \eta^{12} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \eta^{11} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \eta^{44} \end{pmatrix}.$$

Используя вышеприведенную теорему и найдя фундаментальную систему решений системы (3), получим 13-мерную максимальную алгебру инвариантности системы (3) (далее μ_i один из квадратных корней собственного числа λ_i , $i = 1, 2$).

$$\begin{aligned} & \langle e^{\mu_1 t} ((\mu_1 t^2 - t)\partial_{x^1} + 4\mu_1^2 t\partial_{x^2} + 8\mu_1^3 \partial_{x^3}), \\ & e^{-\mu_1 t} ((\mu_1 t^2 + t)\partial_{x^1} - 4\mu_1^2 t\partial_{x^2} + 8\mu_1^3 \partial_{x^3}), \\ & e^{\mu_1 t}(t\partial_{x^1} + 2\mu_1 \partial_{x^2}), e^{-\mu_1 t}(t\partial_{x^1} - 2\mu_1 \partial_{x^2}), e^{\mu_1 t}\partial_{x^1}, e^{-\mu_1 t}\partial_{x^1}, \\ & e^{\mu_2 t}\partial_{x^4}, e^{-\mu_2 t}\partial_{x^4}, x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2} + x^3\partial_{x^3}, x^2\partial_{x^1} + x^3\partial_{x^2}, x^3\partial_{x^1}, x^4\partial_{x^4}, \partial_t \rangle, \end{aligned}$$

если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, или

$$\begin{aligned} & \langle e^{\mu_1 t} ((\mu_1 t^2 - t)\partial_{x^1} + 4\mu_1^2 t\partial_{x^2} + 8\mu_1^3 \partial_{x^3}), \\ & e^{-\mu_1 t} ((\mu_1 t^2 + t)\partial_{x^1} - 4\mu_1^2 t\partial_{x^2} + 8\mu_1^3 \partial_{x^3}), \\ & e^{\mu_1 t}(t\partial_{x^1} + 2\mu_1 \partial_{x^2}), e^{-\mu_1 t}(t\partial_{x^1} - 2\mu_1 \partial_{x^2}), e^{\mu_1 t}\partial_{x^1}, e^{-\mu_1 t}\partial_{x^1}, t\partial_{x^4}, \partial_{x^4}, \\ & x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2} + x^3\partial_{x^3}, x^2\partial_{x^1} + x^3\partial_{x^2}, x^3\partial_{x^1}, x^4\partial_{x^4}, \partial_t \rangle \end{aligned}$$

в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2 = 0$, или

$$\begin{aligned} & \langle t^5\partial_{x^1} + 20t^3\partial_{x^2} + 120t\partial_{x^3}, t^4\partial_{x^1} + 12t^2\partial_{x^2} + 24\partial_{x^3}, t^3\partial_{x^1} + 6t\partial_{x^2}, t^2\partial_{x^1} + 2\partial_{x^2}, \\ & t\partial_{x^1}, \partial_{x^1}, e^{\mu_2 t}\partial_{x^4}, e^{-\mu_2 t}\partial_{x^4}, x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2} + x^3\partial_{x^3}, x^2\partial_{x^1} + x^3\partial_{x^2}, x^3\partial_{x^1}, x^4\partial_{x^4}, \partial_t \rangle \end{aligned}$$

в случае $\lambda_2 \neq \lambda_1 = 0$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, непостоянными инвариантными многочленами матрицы J являются $(\lambda - \lambda_1)^3$ и $(\lambda - \lambda_1)$, а поэтому $N = 6$. Матрица H коммутирует с J тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} \eta^{11} & \eta^{12} & \eta^{13} & \vdots & \eta^{14} \\ 0 & \eta^{11} & \eta^{12} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \eta^{11} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \eta^{43} & \vdots & \eta^{44} \end{pmatrix}.$$

В результате, получим 15-мерную максимальную алгебру инвариантности

$$\begin{aligned} & \langle e^{\mu_1 t} ((\mu_1 t^2 - t)\partial_{x^1} + 4\mu_1^2 t\partial_{x^2} + 8\mu_1^3 \partial_{x^3}), \\ & e^{-\mu_1 t} ((\mu_1 t^2 + t)\partial_{x^1} - 4\mu_1^2 t\partial_{x^2} + 8\mu_1^3 \partial_{x^3}), e^{\mu_1 t}(t\partial_{x^1} + 2\mu_1 \partial_{x^2}), \\ & e^{-\mu_1 t}(t\partial_{x^1} - 2\mu_1 \partial_{x^2}), e^{\mu_1 t}\partial_{x^1}, e^{-\mu_1 t}\partial_{x^1}, e^{\mu_1 t}\partial_{x^4}, e^{-\mu_1 t}\partial_{x^4}, \\ & x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2} + x^3\partial_{x^3}, x^2\partial_{x^1} + x^3\partial_{x^2}, x^3\partial_{x^1}, x^4\partial_{x^1}, x^3\partial_{x^4}, x^4\partial_{x^4}, \partial_t \rangle, \end{aligned}$$

если $\lambda_1 \neq 0$, или 16-мерную максимальную алгебру лиевской инвариантности

$$\begin{aligned} & \langle t^5\partial_{x^1} + 20t^3\partial_{x^2} + 120t\partial_{x^3}, t^4\partial_{x^1} + 12t^2\partial_{x^2} + 24\partial_{x^3}, t^3\partial_{x^1} + 6t\partial_{x^2}, t^2\partial_{x^1} + 2\partial_{x^2}, \\ & t\partial_{x^1}, \partial_{x^1}, t\partial_{x^4}, \partial_{x^4}, x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2} + x^3\partial_{x^3}, x^2\partial_{x^1} + x^3\partial_{x^2}, x^3\partial_{x^1}, x^4\partial_{x^1}, \\ & x^3\partial_{x^4}, x^4\partial_{x^4}, \partial_t, t\partial_t - 2x^1\partial_{x^1} - 4x^2\partial_{x^2} - 6x^3\partial_{x^3} - 2x^4\partial_{x^4} \rangle, \end{aligned}$$

если $\lambda_1 = 0$.

Другие примеры, полные доказательства и некоторые нетривиальные следствия можно найти в работе [6].

Литература

- [1] González-López A. Symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations // J. Math. Phys. 1988. Vol. 29. – P. 1097–1105.
- [2] Wafo Soh C. Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2010. Vol. 15. – P. 139–143.
- [3] Meleshko S. Comment on “Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients” // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2011. Vol. 16. – P. 3447–3450.
- [4] Campoamor-Stursberg R. Systems of second-order linear ODE’s with constant coefficients and their symmetries // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2011. Vol. 16. – P. 3015–3023.
- [5] Campoamor-Stursberg R. Systems of second-order linear ODE’s with constant coefficients and their symmetries. II. The case of non-diagonal coefficient matrices // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2012. Vol. 17. – P. 1178–1193.
- [6] Boyko V. M., Popovych R. O, Shapoval N. M. Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 397. – P. 434–440.
- [7] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – Москва: Наука, 1967. — 576 с.

ПОЛНЫЙ СПИСОК ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА ИЗ СПРАВОЧНИКОВ Э. КАМКЕ, В. Ф. ЗАЙЦЕВА–А. Д. ПОЛЯНИНА И СПИСКА АЙНСА–ГАМБЬЕ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЮ ПЕНЛЕВЕ I

Юрьева А. М.

Башкирский государственный университет

Уфа

e-mail: yurievaam@mail.ru

Yurieva A. M. Full list of the second order ODE's equivalent to Painlevé I equation from E. Kamke, V. F. Zaitsev–A. D. Polyanin handbooks and from Ince–Gambier list. All the nonlinear ordinary differential equations from handbooks “Handbook of ordinary differential equations” E. Kamke, “Handbook of ordinary differential equations” A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, and also from 50 equations of Ince–Gambier list, equivalent to the Painlevé I equation in the class of point-transformation are found. For equations which satisfy to criteria given changes of variables leading them to canonical form.

Рассматриваются уравнения из справочников Э. Камке, В. Ф. Зайцева–А. Д. Полянина и списка Айнса–Гамбье. Проверяется выполнение условий эквивалентности уравнению Пенлеве I. Составляется полный список эквивалентных уравнений.

Была поставлена задача составления полного списка ОДУ второго порядка из справочников Э. Камке [3], В. Ф. Зайцева–А. Д. Полянина [4] и списка Айнса–Гамбье [5], эквивалентных уравнению Пенлеве I относительно точечных замен переменных

$$y'' = 6y^2 + x. \quad (1)$$

Уравнения Пенлеве – список из 6-ти обыкновенных дифференциальных уравнений, введенных П. Пенлеве и Б. Гамбье. Возникают при сведении к ОДУ некоторых нелинейных уравнений математической физики.

В статье Картак В. В. [1] в терминах инвариантов точечных преобразований сформулированы необходимые и достаточные условия эквивалентности, при которых ОДУ второго порядка точечной заменой переменных сводится к уравнению (1).

Критерий эквивалентности содержится в следующей теореме, доказательство см. [1]. Здесь I_1, I_2, J, I_6 и I_9 – инварианты, $F, \Omega, N, W, V, \Theta, L_1$ – псевдоинварианты, $(B, -A)$ – псевдовекторное поле. Формулы для их вычислений через коэффициенты уравнения

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3. \quad (2)$$

содержатся в работах [1], [2].

Теорема 1. Уравнение вида (2) эквивалентно уравнению Пенлеве I (1) относительно точечных замен переменных тогда и только тогда, когда выполнены условия: 1) $F = 0$, но $A \neq 0$ или $B \neq 0$, 2) $\Omega = 0$, 3) $N = 0$, 4) $W = 0$,

5) $V = 0$, 6) $\Theta \neq 0$, 7) $L_1 \neq 0$, 8) инварианты I_1 и I_2 функционально независимы. Замена переменных задаётся формулой

$$\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt[5]{12I_1}}, \quad \tilde{y} = \pm \frac{\sqrt{I_2}}{\sqrt[5]{12^3} \sqrt[10]{I_1}}.$$

По этому критерию проверены 249 уравнений из Части 3, главы VI “Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка” справочника Э. Камке, 773 уравнений из справочника Зайцева В. Ф., Полянина А. Д. и 50 уравнений из списка Айнса–Гамбье.

Условиям этой теоремы удовлетворяют уравнение 6.3 (само уравнение Пенлеве I) и уравнение 6.5 $y'' = -ay^2 - bx - c$, $a \neq 0$ при $b \neq 0$ из справочника Э. Камке. Последнее уравнение линейной заменой переменных приводится к каноническому виду:

$$\tilde{x} = \frac{a^{1/5}(bx + c)}{6^{1/5}b^{1/5}}, \quad \tilde{y} = \frac{a^{3/5}y}{6^{3/5}b^{2/5}} \quad \longrightarrow \quad \tilde{y}'' = 6\tilde{y}^2 + \tilde{x}.$$

Из списка Айнса–Гамбье этому критерию удовлетворяет уравнение IV (являющееся уравнением Пенлеве I).

В справочнике [4] нет уравнений, эквивалентных уравнению (1).

Литература

- [1] Картак В. В. Явное решение проблемы эквивалентности для некоторых уравнений Пенлеве // Уфимский математический журнал. – 2009. Т. 1. №3. – С. 46–56.
- [2] Sharipov R. A. Effective procedure of point classification for the equations $y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3$ // Electronic archive at LANL. (MathDG #9802027, 1998). 1–35.
- [3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976.
- [4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
- [5] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ОНТИ Государственное НКТП научно-техническое издательство Украины, 1939.

Современные проблемы теории функций и функционального анализа

УДК 517, 512.562

ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.

Российский университет дружбы народов

Москва

Тамбовский государственный университет

им. Г. Р. Державина

Тамбов

e-mails: arutun@orc.ru, zukovskys@mail.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E., Coincidense points of two mappings in partially ordered sets. The concept of ordered covering is introduced for mappings acting in partially ordered sets. The coincidence points theorems for monotone and orderly covering mappings are obtained.

Введено понятие упорядоченного накрывания для отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах. Получены теоремы о существовании точек совпадения монотонного и упорядоченно накрывающего отображений.

Пусть заданы непустые множества X и Y , отображения $\Psi, \Phi : X \rightarrow Y$. Точкой совпадения отображений Ψ и Φ принято называть решение уравнения

$$\Psi(x) = \Phi(x).$$

Для исследования точек совпадения двух отображений в случае, когда X и Y являются метрическими пространствами используется теория накрывающих отображений (см. [1–3]). Теория накрывающих отображений нашла свое применение в исследовании разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной неизвестной функции (см. [4, 5]), управляемых систем (см. [6]), уравнений Вольтерра (см. [7]). В представленной работе понятие накрывания перенесено на отображения частично упорядоченных пространств, получены достаточные условия существования точек совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений, изучены свойства множества точек совпадения.

Пусть $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$ – частично упорядоченные пространства, заданы отображения $\Psi, \Phi : X \rightarrow Y$, множества $X \subset U$, $W \subset Y$. Напомним, что отображение Φ называется монотонным, если

$$x_1 \preceq x_2 \Rightarrow \Phi(x_1) \preceq \Phi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Для $x_0 \in X$ положим

$$O_X(x_0) = \{x \in X : x \preceq x_0\}.$$

Определение 1. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ будем называть упорядоченно накрывающим множество $W \subset Y$, если для любого $x_0 \in X$ имеет место включение

$$O_Y(\Psi(x_0)) \cap W \subset \Psi(O_X(x_0))$$

или, что тоже самое,

$$\forall x_0 \in X, \forall y \preceq \Psi(x_0) : y \in W \quad \exists x \preceq x_0 : \Psi(x) = y.$$

Если $W = Y$, то Ψ назовем упорядоченно накрывающим.

Сформулируем принцип существования точек совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений. Через $\mathcal{S}(\Psi, \Phi, U, W)$ обозначим множество всех цепей $S \subset X$ таких, что

$$S \subset U, \quad \Psi(S) \subset W, \quad \Psi(x) \succeq \Phi(x) \quad \forall x \in S, \\ \Psi(x_1) \preceq \Phi(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in S : x_1 \prec x_2.$$

Теорема 1. Пусть существует точка $x_0 \in X$ такая, что $\Psi(x_0) \succeq \Phi(x_0)$ и выполнены условия:

- (a) отображение Φ монотонно;
- (b) отображение Ψ упорядоченно накрывает множество $W = \Phi(O_X(x_0))$;
- (c) для произвольной цепи $S \in \mathcal{S}(\Psi, \Phi, O_X(x_0), W)$ существует нижняя граница $u \in X$ цепи S такая, что $\Psi(u) \succeq \Phi(u)$.

Тогда во множестве $O_X(x_0)$ существует точка совпадения отображений Ψ и Φ , т. е. существует точка $\xi \in X$ такая, что

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi) \text{ и } \xi \preceq x_0.$$

Кроме того, во множестве $\{\xi \in O_X(x_0) : \Psi(\xi) = \Phi(\xi)\}$ существует минимальный элемент.

Отметим, что теорема Кнастера–Тарского (см. [8]) о неподвижной точке монотонного отображения $\Phi : X \rightarrow X$ вытекает из теоремы 1. Чтобы показать это, достаточно положить $(X, \preceq) = (Y, \preceq)$, $\Psi(x) \equiv x$. Отметим, что условие (c) вытекает из предположений теоремы Кнастера–Тарского о существовании точной нижней границы у любой цепи $S \subset O_X(x_0)$ и монотонности Φ .

Кроме приведенного результата, авторами получены достаточные условия существования наименьшей точки во множестве точек совпадения, достаточные условия существования точек совпадения двух многозначных отображений, выявлена взаимосвязь упорядоченного накрывания с известным ранее понятием накрывания отображений метрических пространств. Частично перечисленные результаты опубликованы в работах [9, 10].

Литература

- [1] Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // ДАН, 2007. Т. 416, № 2. – С. 151–155.
- [2] Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // Journal of fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5, № 1. – P. 105–127.
- [3] Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86, № 2. – С. 163–169.
- [4] Арутюнов А. В., Аваков Е. Р., Жуковский Е. С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 5. – С. 613–634.
- [5] Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 11. – С. 1523–1537.
- [6] Арутюнов А. В., Жуковский С. Е. Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 11. – С. 1561–1570.
- [7] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis. 2011. V. 75, № 3. – P. 1026–1044.
- [8] Granas A., Dugundji D. Fixed Point Theory. – Springer-Verlag, New York. 2003. – 690 с.
- [9] Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // ДАН, 2013. Т. 453, № 5. – С. 475–48.
- [10] Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // ДАН, 2013. Т. 453, № 6. – С. 595–598.

FRAMES IN NOETHERIAN MAPPING. $\mathcal{K}$ -CLOSE FRAMES

Bilalov B. T., Guliyeva F. A.

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan

B.Vahabzadeh 9, AZ1141, Baku, Azerbaijan

e-mail: b_bilalov@mail.ru, quliyeva-fatima@mail.ru

Билалов Б. Т., Гулиева Ф. А. Фреймы при нётеровом отображении. $\mathcal{K}$ -близкие фреймы. Рассматриваются фреймы в гильбертовых и банаховых пространствах и изучаются их свойства при нётеровом отображении. Рассматриваются также атомарные разложения в банаховых пространствах. Введено понятие $\mathcal{K}$ -близости. Доказываются устойчивости фреймовых свойств и атомарных разложений относительно $\mathcal{K}$ -близости.

Frames in Hilbert and Banach spaces are considered and their properties in the context of Noetherian mapping are studied in this paper. Atomic decompositions in Banach spaces are also considered. The concept of $\mathcal{K}$ -closeness is introduced. The stability of frame properties and atomic decompositions with respect to $\mathcal{K}$ -closeness is proved.

Let us recall the definition of Noetherian operator. Let X, Y be B -spaces and $T : X \rightarrow Y$ be a linear operator. If $\mathcal{R}_T = \mathcal{R}_T$ and $\alpha = \dim \text{Ker } T < +\infty$, $\beta = \dim Y / \mathcal{R}_T < +\infty$, then the operator T is called Noetherian and the number $\varkappa = \alpha - \beta$ is called the index of the operator T . For $\alpha = \beta$, T is called a Fredholm operator.

More details about these and other facts relating to Noetherian operators can be found in [16].

Let's recall some concepts and facts from the theory of frames. First, let us give a definition of atomic decomposition.

Definition 1. Let X be a B -space and $\mathcal{K}$ be a B -space of the sequences of scalars. Let $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X^*$. Then $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}; \{f_k\}_{k \in \mathbb{N}})$ is an atomic decomposition of X with respect to $\mathcal{K}$ if :

- (i) $\{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}$, $\forall f \in X$;
- (ii) $\exists A, B > 0$: $A \|f\|_X \leq \|\{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{K}} \leq B \|f\|_X$, $\forall f \in X$;
- (iii) $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(f) f_k$, $\forall f \in X$.

The concept of frame is a generalization of the concept of atomic decomposition.

Definition 2. Let X be a B -space and $\mathcal{K}$ be a B -space of the sequences of scalars. Let $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X^*$, and $S : \mathcal{K} \rightarrow X$ be some bounded operator. Then $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}; S)$ forms a Banach frame for X with respect to $\mathcal{K}$ if :

- (i) $\{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{K}$, $\forall f \in X$;
- (ii) $\exists A, B > 0$: $A \|f\|_X \leq \|\{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{\mathcal{K}} \leq B \|f\|_X$, $\forall f \in X$;
- (iii) $S [\{g_k(f)\}_{k \in \mathbb{N}}] = f$, $\forall f \in X$.

A and B will be called frame bounds.

The following statement is true.

Statement 1 [5]. Let X be a B -space and $\mathcal{K}$ be a B -space of the sequences of scalars with a canonical basis $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, where $\delta_n \equiv \{\delta_{kn}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Let $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X^*$

and $S \in L(\mathcal{K}; X)$. Then the following statements are equivalent to each other:

- (i) $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}; S)$ forms a Banach frame for X with respect to $\mathcal{K}$;
- (ii) $(\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}; \{S(\delta_k)\}_{k \in \mathbb{N}})$ is an atomic decomposition of X with respect to $\mathcal{K}$.

More details about these and other facts can be found in [1–15].

Future $\mathcal{K}$ will be called as K -space.

Let $X(Y)$ be an H -space with a norm $\|\cdot\|_X (\|\cdot\|_Y)$, the system $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \equiv \vec{x}$ form a frame for it and $A; B > 0$ be the corresponding frame bounds. Let $T \in L(X; Y)$ be a Noetherian operator. Then it is clear that $\mathcal{R}_T$ is closed. It is known that (see, e.g., [3–6]) $\exists \{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^* : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x; x_n^*)_X x_n, \forall x \in X$. Assume $\overline{L[\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}]} \equiv Y_1 \subset Y$, where $y_n = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N}$. It is absolutely clear that $Y_1 \equiv \mathcal{R}_T$. Represent X as a direct sum $X = \text{Ker } T \dot{+} X_1$. Consider the restriction of T on X_1 , and denote it by T_1 , i. e. $T_1 = T|_{X_1}$. It is clear that $T_1 \in L(X_1; Y_1)$, and it is bounded invertible as $\mathcal{R}_{T_1} = \mathcal{R}_T$ (invertibility follows from the Banach theorem). Following [5], we call T_1^{-1} a pseudoinverse of T . Take $\forall y \in Y_1$. Let $x = T_1^{-1}y \in X_1$. Consequently

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (T_1^{-1}y; x_n^*)_X x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y; (T_1^{-1})^* x_n^*)_Y x_n.$$

It follows directly that

$$y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (y; y_n^*)_Y y_n,$$

where $y_n^* = (T_1^{-1})^* x_n^* \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$. Let us show that the system $\vec{y}$ forms a frame for Y_1 . Projectors generated by the decomposition $X = \text{Ker } T \dot{+} X_1$ are denoted by P_0 and P_1 , respectively. It is obvious that the projectors P_0 and P_1 are continuous.

We have $x = P_0x + P_1x$. Consequently

$$Tx = TP_1x = T_1P_1x \Rightarrow P_1x = T_1^{-1}Tx = T_1^{-1}y,$$

where $y = Tx$. Thus

$$\begin{aligned} \sum |(y; y_n)_Y|^2 &= \sum |(y; Tx_n)_Y|^2 = \sum |(T^*y; x_n)_X|^2 \leq \\ &\leq B \|T^*y\|_X^2 \leq B \|T^*\|^2 \|y\|_Y^2, \quad \forall y \in \mathcal{R}_T. \end{aligned}$$

On the other hand, let $y \in \mathcal{R}_T \Rightarrow \exists x \in X : Tx = y$. Hence $Tx = Tx_1$, where $x_1 = P_1x$. We have

$$\begin{aligned} \|y\|_Y^2 &= |(y; y)_Y| = |(Tx_1; y)_Y| = \left| \left(T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_1; x_n^*)_X x_n; y \right)_Y \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |(x_1; x_n^*)_X| |(y_n; y)_Y| \leq \|\{(x; x_n^*)_X\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{l_2} \|\{(y; y_n)_Y\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{l_2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Taking into account that $x_1 = T_1^{-1}y$, from the condition (ii) of Definition 2 we obtain

$$\|\{(x_1; x_n^*)_X\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{l_2} \leq A^{-1} \|T_1^{-1}y\| \leq A^{-1} \|T_1^{-1}\| \|y\|_Y.$$

As a result, it follows from (1) that

$$\|y\|_Y^2 \leq A^{-1} \|T_1^{-1}\| \|\{(y; y_n)_Y\}_{n \in \mathbb{N}}\|_{l_2}.$$

Thus, the following theorem is valid.

Theorem 1. *Let $X; Y$ be H -spaces and $T \in L(X; Y)$ be some Noetherian operator. If $\vec{x} \equiv \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ forms a frame (is an atomic decomposition) for X , then $\vec{y} \equiv \{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is a frame sequence (sequence of atomic decomposition) in Y .*

This theorem has the following corollaries.

Corollary 1. *Let $T \in L(X; Y)$ be a Fredholm operator. If $\vec{x}$ forms a frame (is an atomic decomposition) for X , then $T\vec{x} = \vec{y}$ (i. e. $y_n = Tx_n, \forall n \in \mathbb{N}$) also forms a frame (is an atomic decomposition) for Y , if $\vec{y}$ is complete in it.*

In fact, if all the conditions of this corollary are fulfilled, then it is not difficult to see that the operator T is bounded invertible as $\mathcal{R}_T = X$. The rest follows directly from the definitions of atomic decomposition and frame.

Corollary 2. *Let $T = I_X + K$, where K is a compact operator in X , and the system $\vec{x}$ forms a frame (is an atomic decomposition) for X . Then the system $\vec{y} = T\vec{x}$ also forms a frame (is an atomic decomposition) for X .*

The following corollary is also holds.

Corollary 3. *Let $T \in L(X; Y)$ be a Noetherian operator and the system $\vec{x}$ be a frame sequence in X . Then the system $T\vec{x}$ is also frame sequence in Y .*

If we take $\overline{L[\vec{x}]}$ as X , then the latter corollary will follow from Theorem 1.

Литература

- [1] Daubechies I., *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia. 1992.
- [2] Chui Ch., *Wavelets: a tutorial in theory and applications*, – Academic Press, Boston. 1992. – 724 p.
- [3] Young R., *An introduction to nonharmonic Fourier series*. – Academic Press, New York, 1980.
- [4] Christensen O., *A short introduction to frames, Gabor systems, and wavelet systems* // Azerb. Journal of Mathematics. **4**(1), 2014.
- [5] Christensen O., *An Introduction to Frames and Riesz Base*. – Birkhäuser Boston, 2002.
- [6] Christensen O., *Frames and bases. An introductory course*. – Birkhäuser, Boston. 2008.
- [7] Heil Ch., *A Basis Theory Primer*, Springer, 2011. – 534 p.
- [8] Dremine I. M., Ivanov O. V., Nechitailo V. A., *Wavelets and their uses* // Usp. physics nauk, 2001, **171** (5), p. 465–501.
- [9] Duffin R. J., Schaeffer A. C. *A class of nonharmonic Fourier series* // Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), p. 341–366.
- [10] Aldroubi A., Sun Q., Tang W.–Sh. *p-frames and shift invariant subspaces of L^p* // J Fourier Anal. Appl. **7**(1) (2001), p. 1–22.
- [11] Christensen O., Stoeva D. T., *p-frames in separable Banach spaces*. // Advances in Computational Mathematics. **18** (2003), p. 17–126.
- [12] Rahimi A., *Frames and Their Generalizations in Hilbert and Banach Spaces*. – Lambert Academic Publishing, 2011. – 136 p.

- [13] Bari N. K., *Biorthogonal systems and bases in Hilbert space* // Mathematics. **IV**, Uch. Zap. Mosk. Gos. Univ., 148, Moscow Univ. (Press) Moscow, 1951, p. 69–107.
- [14] Bilalov B. T., Guseinov Z. G., *p-Bessel and p-Hilbert systems and p-bases* // Dokl. NANA, **LXIV (3)** (2008), p. 3–8.
- [15] Bilalov B. T., Guseinov Z. G., *K-Bessel and K-Hilbert systems and K-bases* // Doklady Mathematics. December 2009, **80 (3)**, p. 826–828.
- [16] Presdorf Z., *Some classes of singular equations*. – M.: Nauka, 1979. – 496 p.
- [17] Ilyin V. A., *Necessary and sufficient conditions for the basis in L_p and equiconvergence with trigonometric series of spectral decompositions and decompositions on systems of exponents* // DAN SSSR, **273(4)** (1983) p. 789–793.
- [18] He X., Volkmer H., *Riesz bases of solutions of Sturm-Liouville equations* // J. Fourier Anal. Appl., **7(3)** (2001), p. 297–307.
- [19] Marchenko V. A., *Spectral theory of the Sturm-Liouville operators*. – Naukova Dumka, Kiev. 1972. – 220 p.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ q -МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНА

Виденский В. С.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург
e-mail: ilya@gmail.com

Videnskii V. S. On the approximation of entire functions by q -Bernstein polynomials. In this paper we prove a generalisation of Kantorovich theorem on the approximation of entire functions by the classical Bernstein polynomials.

Приводится обобщение теоремы, доказанной в 1930 г. Л. В. Канторовичем, о приближении классическими многочленами Бернштейна целых функций.

В этой заметке будет доказана теорема о приближении целых функций q -многочленами Бернштейна во всей комплексной плоскости. Для классических многочленов Бернштейна ($q = 1$) эта теорема была открыта в 1930 г. Л. В. Канторовичем [1].

Напомним определение q -многочленов Бернштейна и приведем с доказательствами некоторые основные формулы.

1. Положим $0 < q < 1$,

$$[n]_q = [n] = 1 + q + \dots + q^{n-1}; \quad [0] = 0, \quad (1)$$

$$[n]! = [1][2] \dots [n]; \quad [0]! = 1, \quad (2)$$

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad (3)$$

если $k < 0$ или $k > n$, $\binom{n}{k}_q = 0$. Эти обозначения принадлежат Гауссу и связаны с q -обобщением бинома Ньютона:

$$F_n(z) = \prod_{m=0}^{n-1} (1 + zq^m) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q q^{\frac{(k-1)k}{2}} z^k \quad (4)$$

Из формул (1)–(3) очевидно следуют равенства

$$[k] + q^k[n - k] = [n], \quad (5)$$

$$\binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q = \binom{n}{k}_q, \quad (6)$$

$$\frac{[k]}{[n]} \binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q, \quad \frac{[n-k]}{[n]} \binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q. \quad (7)$$

В 1997 г. для $f \in C[0, 1]$ Г. М. Филлипс ввел следующим образом q -многочлены Бернштейна ($0 < q \leq 1$):

$$B_n(f(t); x; q) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{[k]}{[n]}\right) p_{nk}(x, q), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

$$p_{nk}(x, q) = \binom{n}{k}_q x^k (1-x)(1-xq) \dots (1-xq^{n-k-1}). \quad (9)$$

При $q = 1$ многочлены (8) совпадают с первоначальными многочленами Бернштейна

$$B_n(f(t); x; 1) = B_n(f(t); x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (10)$$

При $0 < q \leq 1$ многочлены (8) являются линейными положительными операторами, так как $p_{nk}(x, q) \geq 0$ на $[0, 1]$.

В статье [2] Г. М. Филлипс рассматривает обобщённые конечные разности и строит обобщённую формулу Ньютона, чтобы установить для q -многочленов (8) тождества, аналогичные тем, которые применял С. Н. Берштейн [3] к многочленам (10), чтобы доказать аппроксимационную теорему Вейерштрасса на основании теории вероятностей.

Здесь, как и в моей заметке [5], я не буду применять построений из статьи [2], а воспользуюсь непосредственно формулами (5)–(7).

2. Докажем сначала, что

$$B_n(1; x; q) = \sum_{k=0}^n p_{nk}(x; q) = 1, \quad (11)$$

$$B_n(t; x; q) = \sum_{k=0}^n \frac{[k]}{[n]} p_{nk}(x; q) = x. \quad (12)$$

Равенство (11) докажем по индукции. Ясно, что

$$B_1(1; x; q) = p_{10}(x; q) + p_{11}(x; q) = x + (1 - x) = 1.$$

Допустим, что $B_{n-1}(1; x; q) = 1$. Тогда из (6) имеем

$$\begin{aligned} B_n(1; x; q) &= \sum_{k=0}^n p_{nk}(x; q) = \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q \right] x^k (1-x) \dots (1-xq^{n-k-1}) = \\ &= x \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1}_q x^{k-1} (1-x) \dots (1-xq^{n-k-1}) + \\ &+ (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}_q (xq)^k (1-qx) \dots (1-(xq)q^{n-1-k}) = \\ &= xB_{n-1}(1; x; q) + (1-x)B_{n-1}(1; xq; q) = x + (1-x) = 1. \end{aligned}$$

Итак, (11) доказано. Равенство (12) легко получается из (11), благодаря (7). В самом деле,

$$\begin{aligned} B_n(t; x; q) &= \sum_{k=0}^n \frac{[k]}{[n]} p_{nk}(x; q) = \\ &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}_q x^{k-1} (1-x) \dots (1-xq^{n-k-1}) = xB_{n-1}(1; x; q) = x. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы воспользуемся доказанной мною ранее в [5] леммой.

Лемма. Справедлива следующая рекуррентная формула

$$B_n(t^{v+1}; x; q) = B_n(t^v; x; q) - \frac{[n-1]^v}{[n]^v} (1-x) B_{n-1}(t^v; xq; q). \quad (13)$$

Действительно, так как

$$B_n(t^{v+1}; x; q) = \sum_{k=0}^n \frac{[k]^{v+1}}{[n]^{v+1}} \binom{n}{k}_q x^k (1-x)(1-qx) \dots (1-xq^{n-k-1}), \quad (14)$$

то из (5)–(7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{[k]^{v+1}}{[n]^{v+1}} \binom{n}{k}_q &= \frac{[k]^v}{[n]^v} \frac{[k]}{[n]} \binom{n}{k}_q = \frac{[k]^v}{[n]^v} \left(1 - q^k \frac{[n-k]}{[n]} \right) \binom{n}{k}_q = \\ &= \frac{[k]^v}{[n]^v} \binom{n}{k}_q - q^k \frac{[n-k]}{[n]} \binom{n}{k}_q \frac{[k]^v}{[n-1]^v} \frac{[n-1]^v}{[n]^v}. \end{aligned} \quad (15)$$

Остается подставить (15) в (14), и (13) доказано.

Для того, чтобы вычислить, при каких условиях последовательность (8) будет аппроксимирующей, вычислим $B_n(t^2; x; q)$, полагая $v = 1$ в (13). Мы получим

$$B_n(t^2; x; q) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}. \quad (16)$$

При фиксированных q и x ($0 < q < 1$; $0 < x < 1$) из (16) имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (B_n(t^2; x; q) - x^2) = x(1-x)(1-q); \quad (17)$$

так что $B_n(t^2; x; q)$ не стремится к x^2 в интервале $(0, 1)$.

Рассмотрим последовательность $\{q_n\}$, $0 < q_n < 1$. Ясно, что $B_n(t^2; x; q_n)$ сходится к x^2 , если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [n]_{q_n} = \infty. \quad (18)$$

Заметим, впрочем, что (18) выполняется тогда и только тогда, когда

$$0 < q_n \leq 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} q_n = 1. \quad (19)$$

В самом деле, если $0 < q < 1$, то, учитывая, что $[n] > nq^n$, получаем неравенства

$$(1-q)[n] < 1 = (1-q)[n] + q^n < \left((1-q) + \frac{1}{n} \right) [n],$$

$$1-q < \frac{1}{[n]} < 1-q + \frac{1}{n}, \quad (20)$$

из которых следует эквивалентность условий (18) и (19).

Из равенств (11), (12) и (16) по теореме П. П. Коровкина следует, что верна следующая аппроксимационная теорема Филлипса.

Теорема 1. Для любой $f \in C[0, 1]$ при условии (19) последовательность её q_n -полиномов Бернштейна $B_n(f(t); x; q_n)$ сходится к ней равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Впрочем, из формул (11), (12) и (16) легко вычислить, что

$$B_n((t-x)^2; x; q) = \frac{x(1-x)}{[n]_q}. \quad (21)$$

Это позволяет для доказательства теоремы Филлипса не пользоваться теоремой П. П. Коровкина, а применить первоначальное рассуждение С. Н. Бернштейна, опирающееся на теорию вероятностей.

3. Л. В. Канторович в статье [1] рассмотрел приближение целых аналитических функций во всей комплексной плоскости при помощи классических многочленов Бернштейна.

Здесь мы обобщим этот результат для случая приближения целых функций q_n -многочленами Бернштейна и докажем следующую теорему.

Теорема 2. Для любой целой аналитической функции f последовательность q_n -многочленов Бернштейна $B_n(f(t); z; q_n)$ при условии (19) сходится равномерно к функции f в любом круге $|z| \leq R$.

Мы дадим доказательство этой теоремы, следуя в основном идеям Л. В. Канторовича. Однако, оценку q -многочленов Бернштейна в круге $|z| \leq R$ проведем иначе, а именно по индукции, используя рекуррентные формулы (13).

При любом фиксированном натуральном n и $R > 1$ из формул (11), (12) и (16) следуют неравенства

$$|B_n(t^2; z; q)| \leq |z|^2 + \frac{|z(1-z)|}{[n]_q} < R^2 + R(1+R) < 3R^2. \quad (22)$$

Аналогично, применяя лемму при $\nu = 2$, получим

$$\begin{aligned} |B_n(t^3; z; q)| &\leq |B_n(t^2; z; q)| + (R+1)|B_n(t^2; zq; q)| < \\ &< 3R^2 + 2R \cdot (3R^2) < 9R^3. \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим по индукции, что при некотором $\nu \geq 3$ имеет место неравенство

$$|B_n(t^\nu; z; q)| \leq 3^{\nu-1} R^\nu, \quad |z| \leq R. \quad (24)$$

Тогда по лемме получим

$$|B_n(t^{\nu+1}; z; q)| \leq 3^{\nu-1} R^\nu + 2R \cdot 3^{\nu-1} R^\nu < 3^\nu R^{\nu+1}. \quad (25)$$

Представим нашу целую функцию f степенным рядом

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad (26)$$

и при фиксированном n применим к нему почленно оператор $B_n(f(t); z; q_n)$:

$$B_n(f(t); z; q_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu B_n(t^\nu; z; q_n) \quad (27)$$

В круге $|z| \leq R$ ряд (27) мажорируется так:

$$|B_n(f(t); z; q_n)| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| 3^\nu R^\nu = S(R). \quad (28)$$

По теореме Монтеля из (28) следует, что последовательность $B_n(f(t); z; q_n)$ относительно компактна в круге $|z| \leq R$. С другой стороны, по аппроксимационной теореме Филлипса эта последовательность сходится равномерно к функции f на отрезке $[0, 1]$. Отсюда по теореме Витали заключаем, что наша последовательность $B_n(f(t); z; q_n)$ сходится равномерно к $f(z)$ в круге $|z| \leq R$ при любом R .

4. Работа Л. В. Канторовича [1] заинтересовала С. Н. Берштейна, который в развитие этой темы написал большую статью [4].

Недавно С. И. Островская [6] исследовала аппроксимацию аналитических функций q -многочленами Берштейна при $q > 1$ и получила ряд результатов в ином направлении, чем в настоящей заметке.

Литература

- [1] Канторович Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // ИАН (ОМОН) 1931. – С. 1103–1115.
- [2] Phillips G. M. Bernstein polynomials based on the q integers // Ann. Nummer Math. 4. 1997. – pp. 511–518.
- [3] Бернштейн С. Н. Сочинения. Т. 1. – М., 1952. Статьи № 3 (с. 80–84), № 4.
- [4] Бернштейн С. Н. Сочинения. Т. 2. – М., 1954. Статья № 81.
- [5] Виденский В. С. О q -многочленах Бернштейна и линейных положительных операторах, с ними связанных // Некоторые актуальные проблемы математики и математического образования. Герценовские чтения–2004. – СПб.: РГПУ, 2004. – С. 118–126.
- [6] Ostrovska S. The approximation of power function by the q -Bernstein polynomials in the case $q > 1$ // Mathematical inequalities applications. Vol. 11. № 3 (2008). – pp. 585–597.

СЕМЕЙСТВО ФУНКЦИЙ $\mathcal{D}(K, \pi)$, ПОРОЖДЁННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕМ π

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург

Koldunov A. V. The family $\mathcal{D}(K, \pi)$ of functions generated by a mapping π . In the report the family of functions $\mathcal{D}(K, \pi)$ is introduced and a particular case of normed lattices is studied.

В сообщении вводится семейство функций $\mathcal{D}(K, \pi)$ и рассматривается случай, когда $C(K)$ является нормированной решёткой, а отображение задаётся следующим образом: $\pi = \|x\|$.

1. Пусть K – компакт; пусть $\pi : C(K) \rightarrow W$, где W является условно полной векторной решёткой, причём выполнены следующие условия: 1) если $0 \leq x \leq y$, то $0 \leq \pi(x) \leq \pi(y)$; 2) $\pi(x \vee y) \leq \pi(x) + \pi(y)$.

Для $x \in C(K)$ полагаем $cz\,x = (t \in K : x(t) \neq 0)$ и $[x] = cl\,cz\,x$. Через $x \vee y$ и $x \wedge y$ обозначаются поточечные супремум и инфимум элементов $x, y \in C(K)$. Считаем, что элемент $e \in C(K)$ тождественно равен единице на K .

Для открытого $G \subset K$ и $m \in N$ полагаем $\text{in}(G, \pi, m) = \sup(\pi x : 0 \leq x \leq me, [x] \in G)$. Из условий 1)–2) следует, что $\text{in}(\bigcup(G_n : n \in N), \pi, m) \leq \sum \text{in}(G_n, \pi, m)$.

Аналогично, для замкнутого $F \subset K$ и $m \in N$ обозначаем $\text{ex}(F, \pi, m) = \inf(\pi(x) : x \geq m \text{ на } F)$. Через $I(\pi)$ обозначается идеал всех замкнутых $F \subset K$ с $\text{ex}(F, \pi, m) = 0$ для любого $m \in N$.

Пусть $\Delta(\pi)$ – семейство всех возрастающих последовательностей $a = (F_s)$ замкнутых множеств $F_s \subset K$, для которых $\inf(K \setminus F_s, \pi, m) \rightarrow 0$ для любого $m \in N$. Для $a = (F_s) \in \Delta(\pi)$ через $\mathcal{D}(a)$ обозначим семейство всех функций $f : \bigcup F_s \rightarrow R$ со свойством: для любого $s \in N$ сужение $f|_{F_s} \in C(F_s)$. Заметим, что если $b = (P_s) \in \Delta(\pi)$ и $g \in \mathcal{D}(b)$, то $c = (F_s \cap P_s) \in \Delta(\pi)$, и функции f, g можно рассматривать на одном множестве $\bigcup(F_s \cap P_s)$ и проводить над ними алгебраические и порядковые операции. Полагаем $\mathcal{D}(K, \pi) = \bigcup(\mathcal{D}(a) : a \in \Delta(\pi))$.

2. Рассмотрим случай, когда $X = (C(K); \|\cdot\|)$ является нормированной решёткой, а $\pi(x) = \|x\|$. В этом случае $\inf(G, \pi, m) = m \inf(G, \pi, 1) = m \inf(G) = m \sup(\|x\| : 0 \leq x \leq e, [x] \subset G)$. Аналогично, $\text{ex}(F, \pi, m) = m \text{ex}(F, \pi, 1) = m \text{ex}(F) = m \inf(\|x\| : x \geq 1 \text{ на } F)$.

Далее, $\Delta = \Delta(\pi) = (a = (F_s) : \inf(K \setminus F_s) \rightarrow 0)$. Для $a = (F_s) \in \Delta$ полагаем $\mathcal{D}(a) = (f : \bigcup F_s \rightarrow R : f|_{F_s} \in C(F_s))$. Обозначим $\mathcal{D}(X) = \bigcup(\mathcal{D}(a) : a \in \Delta)$.

Лемма 1. Пусть F замкнуто в K и $x \in X$, причём $|x| \leq me$ и $|x| \leq r$ на F . Тогда $\|x\| \leq r\|e\| + m \inf(K \cdot F)$.

Лемма 2. Пусть для $n \in N$ замкнутое $H_n \in I$. Тогда существует последовательность $a = (F_s) \in \Delta$, такая, что $H_n \cap H_s = \emptyset$ для $n, s \in N$.

Пусть $(x_n) \subset X$, $a = (F_s) \in \Delta$ и для любого $s \in N$ последовательность сужений $(x_n|_{F_s})$ равномерно сходится к некоторой функции $g_s \in C(F_s)$ (т. е. $x_n|_{F_s} \rightrightarrows g_s$ на F_s). В этом случае будем писать $(x_n) \in M(a, (g_s))$. Заметим, что если $(x_n) \in M(a, (g_s))$, то на $\bigcup F_s$ последовательность (x_n) сходится к некоторой функции, которую будем обозначать через $q((x_n))$.

Пусть $(x_n) \in M(a = (F_s), (g_s))$ и пусть последовательность (y_s) обладает свойством $y_n = g_s$ на F_s . Тогда $(y_s) \in M(a, (g_s))$ и $q((x_n)) = q((y_s))$.

Пусть $(x_n) \in H(a = (F_s), (g_s))$ и $|x_n| \leq me$. Для $\varepsilon > 0$ найдётся $s \in N$ с условием $\inf(K \setminus F_s) \leq \frac{\varepsilon}{4m}$. Существует $n_0 \in N$ с условием: если $n \geq n_0$, то $|x_n|_{F_s} - g_s| \leq \frac{\varepsilon}{4\|e\|}$. Тогда $|x_n|_{F_s} - x_{n+p}|_{F_s}| \leq \frac{\varepsilon}{2\|e\|}$. По лемме 1 выполнено неравенство $\|x_n - x_{n+p}\| \leq \varepsilon$ (при $n \geq n_0$). Эти оценки доказывают следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $(x_n) \in M(a = (F_s), (g_s))$ и $|x_n| \leq me$. Тогда

1) (x_n) является последовательностью Коши;

2) пусть последовательность (y_s) такова, что $y_s|_{F_s} = g_s$ и $|y_s| \leq me$; тогда $\|x_n - y_s\| \rightarrow 0$ при $n, s \rightarrow +\infty$;

3) пусть $|z_n| \leq me$ и $x_n|_{F_s} \rightrightarrows z_n|_{F_s}$ на каждом F_s ; тогда $\|x_n - z_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Предложение 2. Пусть $a = (F_s) \in \Delta$, $b = (P_s) \in \Delta$. Пусть $(x_n) \in H(a, (g_s))$, $(y_n) \in M(b, (h_s))$ и $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. Тогда существует $C = (H_k) \in \Delta$, такая, что сужения $(x_n|_{H_k})$ и $(y_n|_{H_k})$ равномерно сходятся к одной функции на каждом H_k .

Доказательство. Полагаем $Q(s, m) = (t \in F_s \cap P_s : |g_s - h_s|(t) \geq \frac{1}{m})$. Проверим, что $Q(s, m) \in I$ для любого $s, m \in N$. Предполагаем противное и находим $s_0, m_0 \in N$, для которых $\text{ex}(Q(s_0, m_0)) \neq 0$. Тогда существует $n_0 \in N$

со свойством: $|x_n - y_n| > \frac{1}{2m_0}$ на $Q(s, m)$ при $n \geq n_0$. Это означает, что $\|x_n - y_n\| \geq \frac{1}{2m_0} \text{ex}(Q(s_0, m_0)) \neq 0$ при $n \geq n_0$. Противоречие с $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

Таким образом, каждое $Q(s, m) \in I$. По лемме 2 существует $W_l \in W$: $W_l \cap Q(s, m) = \emptyset$ для любых $l, s, m \in N$. Пусть $H_k = W_k \cap F_k \cap P_k$. Тогда $(H_k) \in \Delta$. Проверим, что $g_k = h_k$ на H_k : если бы $t_0 \in H_k$ и $(g_k - h_k)(t_0) \neq 0$, то существует $m_0 \in N$, для которого $|g_k - h_k|(t_0) \geq \frac{1}{m_0}$ и $|x_n - y_n|(t_0) \geq \frac{1}{2m_0}$ при $n \geq n_0$; тогда $t_0 \in Q(k, 2m_0) \cap W_k = \emptyset$. Противоречие доказывает, что (H_k) искомая последовательность.

3. Из предложений 1 и 2 следует, что если $(x_n) \in M(a, (g_s))$, $(y_n) \in M(a, (h_s))$ и $|x_n|, |y_n| \leq me$, то $q((x_n)) = q((y_n))$ тогда и только тогда, когда $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$. Это означает, что на $\mathcal{D}(x)$ целесообразно ввести отношение эквивалентности: $f_1 \sim f_2$ тогда и только тогда, когда существует $a = (F_s) \in \Delta$, такой, что $f_1|_{F_s} = f_2|_{F_s}$ для любого $s \in N$.

Предложение 3. Пусть для последовательности (x_n) выполнено условие: $\|x_n - x_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n}$. Тогда $(x_n) \in M(b, (g_s))$ для некоторых $b = (B_s) \in \Delta$ и $g_s \in C(F_s)$.

Доказательство. Полагаем $u(n, p) = x_n \vee \dots \vee x_{n+p}$, $w(n, p) = x_n \wedge \dots \wedge x_{n+p}$. Тогда $\|u(n, p) - x_n\| \leq \sum \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ и $\|w(n, p) - x_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Поэтому для $y(n, p) = u(n, p) - w(n, p)$ выполнено $\|y(n, p)\| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Пусть $A_n = \bigcap \left(t \in K : y(n, p) \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}} \right)$. Оценим $\text{in}(K \setminus A_n)$: пусть $0 \leq h \leq e$ и $[h] \cap A_n = \emptyset$. Найдётся $q \in N$, для которого $y(n, p) \geq \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ на $[h]$ (здесь используется монотонность $y(n, p)$ при фиксированном $n \in N$). Тогда $h \leq \sqrt{2^n} y(n, p)$ и $\|h\| \leq \frac{4}{\sqrt{2^n}}$. Таким образом, $\text{in}(K \setminus A_n) \leq \frac{4}{\sqrt{2^n}}$.

Полагаем $B_s = \bigcap (A_n : n \geq s)$. Тогда $\text{in}(K \setminus B_s) \leq \sum \left(\frac{4}{\sqrt{2^n}} : n \geq s \right) \leq \frac{4}{\sqrt{2^s}(\sqrt{2}-1)}$. Таким образом, $b = (B_s) \in \Delta$. Кроме того, $|x_n|_{B_s} - x_{n+p}|_{B_s}| \leq y(n, p)|_{B_s}$. Но на B_s выполнено $y(n, p) \geq \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ для любого $n \geq s$. Это означает, что $(x_n|_{B_s})$ является сходящейся последовательностью, т. е. $x_n|_{B_s} \rightrightarrows g_s \in C(B_s)$.

Замечание. Пусть (z_n) является последовательностью Коши. Эта последовательность содержит подпоследовательности (x_n) с условием из предложения 3, т. е. (x_n) поточечно сходится к функции $q((x_n))$ на $\bigcup B_s$ для некоторой $b = (B_s) \in \Delta$. По предложению 2, если (y_n) — другая подпоследовательность (z_n) , для которой определена функция $q((y_n))$, то существует $c = (F_s) \in \Delta$, такая, что $q((x_n)) = q((y_n))$ на каждом F_s ($s \in N$). Другими словами, для каждого класса эквивалентных последовательность Коши строится класс эквивалентных функций вида $q((x_n))$.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИОННОЙ КОНСТАНТЕ $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$

Локоть В. В., Мартынов О. М., Тарасенко Е. А.

Мурманский государственный гуманитарный университет

Мурманск

e-mail: olegmartynov@yandex.ru

Lokot' V. V., Martynov O. M., Tarasenko E. A. On the relative projection constant $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$. In this paper we find lower bound for the relative projection constant $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$, which gives the best lower bound for the projection constant $\lambda(n-5, n)$.

В данной статье находится оценка снизу для относительной проекционной константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$, которая является хорошей оценкой снизу (в смысле близости к точному значению) для константы $\lambda(n-5, n)$.

Пусть Y – замкнутое подпространство банахова пространства X . Линейный ограниченный оператор $\pi : X \rightarrow Y$ называется оператором проектирования (проекцией) X на Y , если $\pi y = y$ для любого $y \in Y$. Множество всех операторов проектирования пространства X на подпространство Y будем обозначать $\pi(X, Y)$. Относительной проекционной константой подпространства Y в пространстве X называется число $\lambda(Y, X) = \inf \{ \|\pi\|; \pi \in \pi(X, Y) \}$.

Минимальными проекциями называются операторы проектирования, нормы которых совпадают с относительной проекционной константой.

Пусть $X = l_1^{(n)}$ – n -мерное линейное нормированное пространство элементов $x = (x_i)_1^n$ с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Пусть также $f = (f_i)_1^n \neq 0$, $g = (g_i)_1^n \neq 0$, $h = (h_i)_1^n \neq 0$, $t = (t_i)_1^n \neq 0$, $w = (w_i)_1^n \neq 0$ – линейные функционалы, определенные в $l_1^{(n)}$,

$$f^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid f(x) = \sum_{i=1}^n f_i x_i = 0 \right\},$$

$$g^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid g(x) = \sum_{i=1}^n g_i x_i = 0 \right\},$$

$$h^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid h(x) = \sum_{i=1}^n h_i x_i = 0 \right\},$$

$$t^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid t(x) = \sum_{i=1}^n t_i x_i = 0 \right\},$$

$$w^{-1}(0) = \left\{ x \in l_1^{(n)} \mid w(x) = \sum_{i=1}^n w_i x_i = 0 \right\}$$

– гиперплоскости в $l_1^{(n)}$.

В случае линейной независимости функционалов f, g, h, t и w пространство $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap w^{-1}(0)$ является подпространством пространства $l_1^{(n)}$ коразмерности 5.

Проекция $l_1^{(n)}$ на Y_{n-5} имеет вид [1]

$$\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta} x = x - \alpha f(x) - \beta g(x) - \gamma h(x) - \zeta t(x) - \eta w(x)$$

при условиях

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= g(\beta) = h(\gamma) = t(\zeta) = w(\eta) = 1; \\ f(\beta) &= f(\gamma) = f(\zeta) = f(\eta) = g(\alpha) = g(\gamma) = g(\zeta) = g(\eta) = \\ &= h(\alpha) = h(\beta) = h(\zeta) = h(\eta) = t(\alpha) = t(\beta) = t(\gamma) = t(\eta) = \\ &= w(\alpha) = w(\beta) = w(\gamma) = w(\zeta) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Норма проекции на подпространство Y_{n-5} в пространстве $l_1^{(n)}$ вычисляется по формуле

$$\| \pi \| = \max_{1 \leq j \leq n} M_j, \quad \text{где} \quad M_j = \sum_{i=1}^n | \delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j - \gamma_i h_j - \zeta_i t_j - \eta_i w_j |.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}$ – оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 31m$, $m \in N$, $m > 2$ на подпространство $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap w^{-1}(0)$, где функционалы f, g, h, t и w имеют вид

$$f = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$g = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$h = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$t = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$w = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

(здесь цифры 1 и 0 означают последовательности из m единиц и нулей соответственно).

Тогда

$$\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)}) \geq \frac{64m^3 + 31m^2 - 182m + 20}{24m^3 + 11m^2 - 62m}.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$A_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \alpha_i, \quad B_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \beta_i, \quad C_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \gamma_i, \quad D_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \zeta_i,$$

$$E_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \eta_i, \quad M_k^* = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} M_i \quad (k = 1, \dots, 31).$$

Условия (1) будут аналогичны условиям (5) из работы [3], а для раскрытия модулей будем использовать условия из работы [4] (см. также [5]). Используя эти условия, оценим снизу M_j ($j = 1, \dots, n$). Например, если $1 \leq j \leq m$, то

$$\begin{aligned}
M_1^* &= \sum_{j=1}^m M_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{31m} |\delta_{ij} - \alpha_i - \beta_i - \gamma_i - \zeta_i - \eta_i| = \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m |\delta_{ij} - \alpha_i - \beta_i - \gamma_i - \zeta_i - \eta_i| + \sum_{i=m+1}^{31m} |\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \zeta_i + \eta_i| \right) = \\
&= \sum_{i=1}^m |1 - \alpha_i - \beta_i - \gamma_i - \zeta_i - \eta_i| + (m-1) \sum_{i=1}^m |\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \zeta_i + \eta_i| + \\
&+ m \sum_{i=m+1}^{31m} |\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \zeta_i - \eta_i| \geq m + (m-2) \sum_{i=1}^m |\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \zeta_i + \eta_i| + \\
&+ m \sum_{i=m+1}^{31m} |\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \zeta_i + \eta_i| \geq m + (m-2)(A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1) + \\
&+ m \sum_{i=2}^{26} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) + \left(\left[1 - \sum_{i=1}^5 (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - \sum_{i=7}^9 (A_i + \right. \right. \\
&+ B_i + C_i + D_i + E_i) - (A_{12} + B_{12} + C_{12} + D_{12} + E_{12}) - \sum_{i=14}^{15} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) + \\
&- \sum_{i=17}^{18} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - \sum_{i=20}^{21} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) \Big] + \left[1 - \sum_{i=1}^4 (A_i + \right. \\
&+ B_i + C_i + D_i + E_i) - \sum_{i=6}^8 (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - (A_{11} + B_{11} + C_{11} + D_{11} + E_{11}) - \\
&- (A_{13} + B_{13} + C_{13} + D_{13} + E_{13}) - \sum_{i=15}^{17} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - (A_{22} + B_{22} + C_{22} + D_{22} + E_{22}) - \\
&- \sum_{i=25}^{26} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) \Big] + \left[1 - \sum_{i=1}^3 (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - \sum_{i=5}^7 (A_i + \right. \\
&+ B_i + C_i + D_i + E_i) - (A_{10} + B_{10} + C_{10} + D_{10} + E_{10}) - \sum_{i=12}^{14} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - \\
&- (A_{16} + B_{16} + C_{16} + D_{16} + E_{16}) - (A_{20} + B_{20} + C_{20} + D_{20} + E_{20}) - \\
&- \sum_{i=23}^{25} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) \Big] + \left[1 - \sum_{i=1}^2 (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - \sum_{i=4}^6 (A_i + \right. \\
&+ B_i + C_i + D_i + E_i) - \sum_{i=9}^{11} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) - \sum_{i=13}^{15} (A_i + B_i + C_i + D_i + E_i) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(A_{19}+B_{19}+C_{19}+D_{19}+E_{19})-(A_{21}+B_{21}+C_{21}+D_{21}+E_{21})-(A_{24}+B_{24}+C_{24}+D_{24}+ \\
& +E_{24})-(A_{26}+B_{26}+C_{26}+D_{26}+E_{26}) + [1-(A_1+B_1+C_1+D_1+E_1)- \\
& -\sum_{i=3}^6(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i)-\sum_{i=8}^{12}(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i)-(A_{16}+B_{16}+C_{16}+D_{16}+E_{16})- \\
& -\sum_{i=18}^{19}(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i)-\sum_{i=22}^{23}(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i)] \Bigg) = \\
& = 6m - (4m+2)(A_1+B_1+C_1+D_1+E_1) - 3m \sum_{i=3}^6(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i) - \\
& - 2m \sum_{i=7}^{16}(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i) - m \sum_{i=17}^{26}(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i).
\end{aligned}$$

Таким образом, получили следующую оценку

$$\begin{aligned}
m \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| & \geq M_1^* \geq 6m - (4m+2)(A_1+B_1+C_1+D_1+E_1) - 3m \sum_{i=3}^6(A_i+B_i+C_i+ \\
& +D_i+E_i) - 2m \sum_{i=7}^{16}(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i) - m \sum_{i=17}^{26}(A_i+B_i+C_i+D_i+E_i).
\end{aligned}$$

Аналогично получим еще четыре группы оценок. Приведем по одному примеру из каждой такой группы:

$$\begin{aligned}
m \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| & \geq M_2^* \geq 5m - 2m((A_1+B_1+C_1+D_1)+(A_7+B_7+C_7+D_7)+ \\
& + \sum_{i=13}^{15}(A_i+B_i+C_i+D_i)) - (3m+2)(A_2+B_2+C_2+D_2) - m \left(\sum_{i=3}^6(A_i+B_i+C_i+ \right. \\
& \left. +D_i) + \sum_{i=8}^{12}(A_i+B_i+C_i+D_i) + \sum_{i=16}^{26}(A_i+B_i+C_i+D_i) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| & \geq M_7^* \geq 4m - m \left(\sum_{i=2}^3(A_i+B_i+C_i) + (A_{17}+B_{17}+C_{17}) + (A_{20}+ \right. \\
& \left. +B_{20}+C_{20}) + (A_{25}+B_{25}+C_{25}) \right) - (2m+2)(A_7+B_7+C_7) + m(A_{19}+B_{19}+C_{19});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| & \geq M_{17}^* \geq 3m - (m+2)(A_{17}+B_{17}) + 2m((A_1+B_1)+(A_{10}+B_{10}))+ \\
& + m \left(\sum_{i=2}^6(A_i+B_i) + (A_9+B_9) + \sum_{i=11}^{14}(A_i+B_i) + (A_{16}+B_{16}) + \sum_{i=18}^{26}(A_i+B_i) \right);
\end{aligned}$$

$$m \|\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}\| \geq M_{27}^* \geq 2m - 2 + (4m+2)A_1 + (3m+2) \sum_{i=2}^5 A_i + 3mA_6 +$$

$$+ (2m+2) \left(\sum_{i=7}^9 A_i + A_{12} + \sum_{i=14}^{15} A_i \right) + 2m \left(\sum_{i=10}^{11} A_i + A_{13} + A_{16} \right) +$$

$$+(m+2) \left(\sum_{i=17}^{18} A_i + \sum_{i=20}^{21} A_i \right) + m \left(A_{19} + \sum_{i=22}^{26} A_i \right);$$

Итак, мы получили пять групп оценок. В первой группе – одно неравенство, во второй – пять неравенств, в третьей – десять неравенств, в четвертой – десять неравенств и в пятой – пять неравенств.

Сложим эти неравенства почленно, предварительно умножив обе части неравенств первой и пятой групп на $4m^2 - 4m - 2$, неравенств второй и четвертой групп – на $m - 2$ и неравенств третьей группы – на $2m - 2$. Получим

$$\begin{aligned} & (6m(4m^2 - 4m - 2) + 15m(m - 2) + 10m(2m - 2)) \|\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}\| \geq \\ & \geq (16m - 10)(4m^2 - 4m - 2) + 55m(m - 2) + 40m(2m - 2). \end{aligned}$$

Откуда

$$\|\pi_{\alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta}^{(0)}\| \geq \frac{64m^3 + 31m^2 - 182m + 20}{24m^3 + 11m^2 - 62m}.$$

Теорема доказана.

Другое доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Замечание. Абсолютной проекционной константой порядков k, n называется число $\lambda(k, n) = \sup \{\lambda(Y_k, X_n) \mid Y_k \subset X_n\}$, где $\dim Y_k = k$, $\dim X_n = n$, $k \leq n$ [6].

В работе [2] получена следующая оценка сверху

$$\lambda(k, n) \leq f(k, n) = \sqrt{k} \left(\frac{\sqrt{k}}{n} + \frac{\sqrt{(n-1)(n-k)}}{n} \right) \quad (2)$$

Найденная оценка снизу константы $\lambda(Y_{n-5}, l_{\infty}^{(n)})$ является хорошей оценкой снизу для константы $\lambda(n-5, n)$ (в смысле близости к точному значению этой константы). Покажем это. Воспользуемся неравенством

$$\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)}) \leq \lambda(n-5, n) = \sup \{\lambda(Y_{n-5}, X_n) \mid Y_{n-5} \subset X_n\} \leq f(n-5, n),$$

где $f(n-5, n)$ определяется с помощью формулы (неравенство (2)):

$$f(k, n) = \frac{k + \sqrt{k(n-1)(n-k)}}{n}.$$

Обозначим значение полученной оценки снизу константы $\lambda(Y_{n-5}, l_1^{(n)})$ через $\varphi(31m-5, 31m)$.

Кроме того,

$$f(31m-5, 31m) = \frac{31m-5 + \sqrt{5(31m-5)(31m-1)}}{31m}.$$

Найдем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f(31m-5, 31m) - \varphi(31m-5, 31m)) \approx 0.57.$$

Литература

- [1] Blatter J., Cheney E. W., Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // Ann. math. pura et appl., 101 (1974), p. 215–227.
- [2] König H. P., Lewis D. R., Lin P.-K. Finite dimensional projections // Stud. math. (PRL), 1983, 75, №3, p. 341–358.
- [3] Мартынов О. М. К вопросу об уточнении оценки снизу абсолютной проекционной константы $\lambda(n-4, n)$ // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXII Герценовские чтения – 2009. – СПб.: БАН, 2009. – С. 136–141.
- [4] Мартынов О. М. Об относительной проекционной константе некоторых классов подпространств коразмерности пять пространства $\lambda(Y_{n-5}, l_{\infty}^{(n)})$ // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXV Герценовские чтения – 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 135–140.
- [5] Локоть В. В., Мартынов О. М. Проекционные константы. – Мурманск: МГГУ, 2013. – 302 с.
- [6] Одинец В. П., Якубсон М. Я. Проекторы и базисы в нормированных пространствах. – М.: Едиториал УРСС, 2004 – 152 с.

НЕРАВЕНСТВО ФРИДРИХСА ДЛЯ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ И. А. КИПРИЯНОВА

Ляхов Л. Н., Райхельгауз Л. Б.

Воронежский государственный университет

e-mail: levnlya@mail.ru, jikol_85@mail.ru

Lyakhov L. N., Raikhelgauz L. B. Friedrichs inequality for weighted Kipriyanov's functional classes. In this paper we consider an analogue of similar inequality for integral norms Friedrichs with power weight.

Keywords: Friedrichs inequality, weight functional class

В работе рассматривается аналог неравенства, подобного неравенству Фридрихса, для интегральных норм, снабжённых степенным весом.

Ключевые слова: Неравенство Фридрихса, весовой функциональный класс.

Неравенство Фридрихса хорошо известно (см. монографии [1–2]) и применяется в теории функций и краевых задачах дифференциальных уравнений. Относительно простая схема его доказательства не может быть перенесена на классы функций с весовой интегральной нормой. Но для исследования сингулярных дифференциальных уравнений в весовых функциональных классах И. А. Киприянова, в которых роль пространства Лебега L_2 играет множество чётных функций с конечной нормой типа

$$\|f\|_{L_2^{\chi}(\Omega)}^2 = \left(\int_{\Omega^+} |f(x)| x^{\chi} dx \right)^{1/2}, \quad \Omega \in (0, +\infty).$$

необходимо подобное неравенство.

Мы получили неравенство, подобное неравенству Фридрихса, для указанных интегральных весовых норм, указанного типа в следующем виде. Пусть $u = u(x) \in C^1(a, b)$ и число m — натуральное, а $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$; $[\gamma] = m - 1$; $\{\gamma\} = \alpha$. Имеет место следующий вариант неравенства Фридрихса:

$$\int_a^b u^2(t) t^\gamma dt \leq \frac{2m b^{2+\alpha}}{a^\alpha} \int_a^b [u'(t)]^2 t^\gamma dt, \quad [a, b] \in (0, +\infty).$$

Наш подход к доказательству этой проблемы основан на методе сферического расширения евклидова пространства (см. [3]) и на неравенстве Фридрихса для функций, определённых в евклидовом пространстве в качестве радиальных.

Литература

- [1] Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988. — 333 с.
- [2] Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
- [3] Ляхов Л. Н. О радиальных функциях и классических стационарных уравнениях в евклидовых пространствах дробной размерности // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений AMADE-2011. — Минск: Издательский центр БГУ. — 2012. — С. 115–126.

УДК 517.5

STATISTICAL CONVERGENCE OF FUNCTIONAL SEQUENCES

Nazarova T. Yu.

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan

B.Vahabzadeh 9, AZ1141, Baku, Azerbaijan

e-mail: tubunazarova@mail.ru

Назарова Т. Ю. О статистической сходимости функциональных последовательностей. В работе рассматривается статистическая сходимость в лебеговых пространствах. Приведен критерий статистической сходимости. Показаны, что ранее известные Тауберовы теоремы в скалярном случае справедливы и в данном случае.

Statistical convergence in Lebesgue spaces is considered in this paper. A criterion for statistical convergence is given. It is shown that the known Tauberian theorems for scalar case are valid in this case, too.

Let $\{f_n(x)\}_{n \in N}$ be some sequence of functions $f_n : M \rightarrow R$, and $M \subset R$ be some set. This sequence is called statistically convergent to A at the point $x_0 \in M$,

if the sequence $\{f_n(x_0)\}_{n \in N}$ statistically converges to A , i. e. $\text{st} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = A$. This sequence is called statistically convergent to $f(x)$ on M if

$$\text{st} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in M. \quad (1)$$

With respect to statistical convergence see [1–6].

Definition 1. We say that $\{f_n\}_{n \in N}$ statistically uniformly converges to f on M if

$$\text{st} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (2)$$

This kind of convergence is denoted as $f_n \xrightarrow{\text{st}} f$ on M .

It is clear that if $f_n \xrightarrow{\text{st}} f$ on M , then the relation (1) holds. But the converse of this statement is not true.

Definition 2. We say that $f_n \xrightarrow{\text{st}} f$ in L_p if

$$\text{st} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0, \quad 1 \leq p < +\infty. \quad (3)$$

Definition 3. We say that $\{f_n\}_{n \in N}$ is statistically fundamental (st-fundamental) in L_p , if $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N : \delta(\Delta_\varepsilon) = 0$, where

$$\Delta_\varepsilon \equiv \left\{ n \in N : \|f_n - f_{n_\varepsilon}\|_p \geq \varepsilon \right\},$$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

The following theorem is true.

Theorem 1. Let $\{f_n\}_{n \in N} \subset L_p$ be some sequence. Then the following statements are equivalent to each other:

- 1) $\exists \text{st} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$;
- 2) $\{f_n\}_{n \in N}$ is st-fundamental;
- 3) $\exists \{g_n\}_{n \in N} \subset L_p : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ and $\{n : f_n = g_n\} \in K$.

This theorem immediately implies the following

Corollary 1. Let $\{f_n\}_{n \in N} \subset L_p$ and $\text{st} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Then $\exists \{n_k\}_{k \in N} \subset N : n_1 < n_2 < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f$ and $\delta(\{n_k\}_{k \in N}) = 1$.

In the case of a sequence of numbers, there is no regular matrix summation method which would include a statistical convergence (see [4]). The same statement stays valid in our case.

More details with respect to the related issues can be found in references [1–19].

Литература

- [1] Fast H. Sur la convergence statistique // Colloq. Math. 2, (1951), pp. 241–244.
- [2] Salat T. On statistically convergent sequences of real numbers // Math. Slovaca, 30, 2, (1980), pp. 139–150.
- [3] Schoenberg I. J. The integrability of certain functions and related summability methods // Amer. Math. Monthly, 66, p. 361–375 (1959).
- [4] Fridy J. A. On statistical convergence // Analysis, 5, pp. 301–313 (1985).
- [5] Fridy J. A. Statistical limit points // Proc. Amer. Math. Soc., v. 118, №4, 1993.
- [6] Zygmund A. Trigonometric series, V. II. – London–New York: Cambridge Univ. Press, 1979.
- [7] Connor J. S. The statistical and p -Cesaro convergence of sequences // Analysis, 8 (1988).
- [8] Connor J. S. R -type summability methods, Cauchy criteria, p -sets, and statistical convergence // Proc. Amer. Math. Soc., 115 (1992), pp. 319–327.
- [9] Fridy J. A., Miller H. I. A matrix characterization of statistical convergence // Analysis, 11 (1991), pp. 59–66.
- [10] Maddox I. J. Statistical convergence in a locally convex space // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 104 (1988).
- [11] Rath D., Tripathy B. C. On statistically convergent and statistically Cauchy sequences // Indian Jour. Appl. Math., 25(4) (1994), pp. 381–386.
- [12] Macaj M., Salat T. Statistical convergence of subsequence of a given sequence // Math. Bohemica, 126 (2001), pp. 191–208.
- [13] Connor J., Grosse-Erdmann K. G. Sequential Definitions of Continuity For Real Functions // Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 33, №1, Spring 2003, pp. 93–121.
- [14] Fridy J. A., Khan M. K. Tauberian theorems via statistical convergence // J. Math. Anal. Appl., 228 (1998).
- [15] Fridy J. A., Miller H. I. A matrix characterization of statistical convergence // Analysis, 11 (1991), pp. 59–66.
- [16] Basu A., Srivastava P. D. Statistical convergence on composite vector valued sequence space // Journal of Mathematics and Applications, 2007, Vol. 29, pp. 75–90.
- [17] Gadjiev A. D., Orhan C. Some approximation theorems via statistical convergence // Rocky Mountain Jour. of Math., v. 32, №1, 2002, pp. 129–138.
- [18] Gadjiev A. D., Ghorbanalizadeh A. M. On the A -statistical approximation by sequence of k -positive linear operators // Proc. of IMM of NAS of Azerb., 2009, pp. 39–50.
- [19] Gadjiev A. D. Simultaneous statistical approximation of analytic functions and their derivatives by k -positive linear operators // Azerbaijan Journal of Mathematics, v. 1, №1, (2011), pp. 57–66.

ON DECOMPOSITION IN BANACH SPACES

Sadigova S. R.¹, Hashimov Ch. M.²¹Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan
B.Vahabzadeh 9, AZ1141, Baku, Azerbaijan² Ganja State University
Ganja, Azerbaijan

e-mail: s_sadigova@mail.ru, chingiz.heshimov.88@mail.ru

Садыгова С. Р., Гашимов Ч. М. О разложении в банаховых пространствах.

Рассматривается вопрос о разложении произвольного элемента по заданной системе. Доказывается, что если произвольный элемент разлагается по этой системе и после исключения конечного числа элементов эта система является полной, то произвольный элемент тоже разлагается по полученной системе. Это свойство верно также относительно t -разложения, порождённого гильбертовым тензорным произведением гильбертовых пространств X и Y . Полученные результаты представляют научный интерес и с точки зрения фреймов.

Decomposition of arbitrary element with respect to the given system is considered. It is proved that if the arbitrary element can be expanded with respect to the given system and if this system becomes complete after exclusion of a finite number of elements, then the arbitrary element can be expanded with respect to the resulting system, too. This property stays true for the t -decomposition generated by the tensor product of Hilbert spaces X and Y . The obtained results are also of interest for the theory of frames.

Let X be a B -space and $\vec{x} \subset X$ be some system. We will call this system nondegenerate if $x_n \neq 0, \forall n \in N \Leftrightarrow \vec{x} \neq 0$. Assume

$$\mathcal{K}_{\vec{x}} \equiv \left\{ \vec{\lambda} \equiv \{\lambda_n\}_{n \in N} \subset K : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n \text{ is convergent in } X \right\}.$$

Define the norm in $\mathcal{K}_{\vec{x}}$ as follows

$$\|\vec{\lambda}\|_{\mathcal{K}_{\vec{x}}} = \sup_m \left\| \sum_{n=1}^m \lambda_n y_n \right\|.$$

The following theorem is true.

Theorem 1. *Let X be a B -space and $\vec{x} \subset X$ be some system. If $\vec{x} \neq 0$, then $\mathcal{K}_{\vec{x}}$ is a K -space, i. e. B -space of sequences of scalars.*

We also give some concepts and facts concerning the Hilbert tensor product. Let $X; Y$ be H -spaces and $Z = X \otimes Y$ be their tensor product. For simplicity, the tensor product $x \otimes y$ of elements $x \in X$ and $y \in Y$ will be denoted by $xy = x \otimes y$. Let $M \subset Y$ be some set. Assume

$$L_t[M] \equiv \left\{ z \in Z : \exists \{x_k; y_k\}_{k=1}^m \subset X \times M \Rightarrow z = \sum_{k=1}^m x_k y_k \right\}.$$

$L_t[M]$ is called a t -span of set M . Let $\vec{y} \subset Y$ be some system. Define

$$\Lambda^{(t)} \equiv \left\{ \vec{x} \subset X : \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k < +\infty \right\},$$

where $\sum(\cdot) < +\infty$ means the convergence of the series in Z .

System $\vec{y} \subset Y$ is said to be t -complete in Z if for $\forall z \in Z, \exists \left\{ x_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{m_n} \subset X, \forall n \in N$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{m_n} x_k^{(n)} y_k = z.$$

Let us define linear operations in $\Lambda^{(t)}$, as usual, componentwise. Let $\vec{x} \in \Lambda^{(t)}$. Put

$$\|\vec{x}\|_{\Lambda^{(t)}} = \sup_m \left\| \sum_{k=1}^m x_k y_k \right\|_Z. \quad (1)$$

It is not difficult to see that $\|\cdot\|_{\Lambda^{(t)}}$ is a norm in $\Lambda^{(t)}$ if the system $\vec{y}$ is nondegenerate.

The following theorem is true.

Theorem 2. *Let $\vec{y} \subset Y$ be a non-degenerate system. Then its t -space of coefficients $\Lambda^{(t)}$ is a B -space with respect to the norm (1).*

Let us state the following theorem on decomposition in B -spaces, which is directly related to the frames and is of interest in itself.

Theorem 3. *Let X be a B -space equipped with the norm $\|\cdot\|$, and suppose that the arbitrary element in X can be expanded with respect to the system $\{x_n\}_{n \in Z_+} \subset X$. If $\{x_n\}_{n \in N}$ is complete in X , then the arbitrary element in X can be expanded with respect to the system $\{x_n\}_{n \in N}$.*

References which are relevant to this work is given in [1–12].

Литература

- [1] Young R. An introduction to non-harmonic Fourier series. – New York: Academic Press, 1980.
- [2] Christensen O. A short introduction to frames, Gabor systems, and wavelet systems // Azerb. Journal of Mathematics. vol. 4, №1 (2014).
- [3] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. – Boston: Birkhauser, 2002.
- [4] Christensen O. Frames and bases. An introductory course. – Boston: Birkhauser, 2008.
- [5] Christensen O. Frames, Riesz bases, and discrete Gabor/wavelet expansions // Bull. Amer. Math. Soc. (ISSN: 1088–9485), vol: 38, issue: 3, pp. 273–291, 2001.
- [6] Heil Ch. A Basis Theory Primer, Springer, 2011. – 534 p.
- [7] Chui Ch. Wavelets: a tutorial in theory and applications. – Boston: Academic Press, 1992. – 724 p.
- [8] Daubechies I. Ten lectures on wavelets, – Philadelphia: SIAM, 1992.

- [9] Dremine I. M., Ivanov O. V., Nechitailo V. A. Wavelets and their uses // Usp. physics nauk, 2001, Vol. 171, №5, pp. 465–501.
- [10] Christensen O., Stoeva D. T. p -frames in separable Banach spaces // Advances in Computational Mathematics 18:2003, 17–126.
- [11] Bilalov B. T., Sadigova S. R. On the space of coefficients in topological spaces // International J. of Math. Sci. & Engg. Appl. (IJMSEA) ISSN 0973–9424, Vol. 7 №I (January, 2013), pp. 353–362.
- [12] Bilalov B. T., Sadigova S. R., Mamedova Z. V. The space of coefficients in a linear topological space // Journal of Mathematics Research, Vol. 4, №6, December 2012, pp. 83–88, doi:10.5539/jmr.v4n6p83

УДК 517.518.82

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ УКЛОНЕНИЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ КУСОЧНО ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, ф-т ВМК

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Exponential estimates for Bernstein polynomials deviations from piecewise linear functions. Bernstein polynomials theory is discussed. Recent results on the approximation of piecewise linear functions are represented.

Обсуждается теория полиномов Бернштейна. Приведены новые результаты о приближении кусочно линейных функций типа модуля.

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0, 1]$ вводятся по правилу

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Как известно, при $n \rightarrow \infty$ последовательность полиномов (1) сходится к $f(x)$ равномерно на $[0, 1]$. Подробное изложение теории полиномов Бернштейна см. в [1]–[3].

В тех точках $x \in (0, 1)$, где есть вторая производная $f''(x)$, формула Вороновской [4] дает закон сходимости

$$B_n(f, x) - f(x) = \frac{f''(x) x(1-x)}{2n} + \frac{\alpha_n(x)}{n}, \quad (2)$$

с условием, что $\alpha_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следует иметь в виду, что стремление $\alpha_n(x)$ к нулю не всегда равномерное, например, оно сильно замедляется, если

рядом с точкой x находится излом функции $f(x)$. Впрочем, если $f \in C^2[0, 1]$, то действует равномерная версия формулы (2), и при этом

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{1}{8n} \left(\max_{0 \leq s \leq 1} |f''(s)| \right), \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Оценка (3) допускает небольшие уточнения, но ничего принципиально лучшего в классе гладких функций сказать нельзя.

При уменьшении гладкости характер сходимости портится. Так, для функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in [0, 1], \quad (4)$$

с константой $L > 0$, верна оценка

$$|B_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{L}{2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

восходящая к работе Поповичу [5]. Простое доказательство (5) при условии (4) дано в [6]. Пример симметричного модуля $f(x) = L|x - 1/2|$ показывает, что при $n \rightarrow \infty$ оценка (5) точна по порядку, а константа $L/2$ достигается в (5) при $n = 1$.

Вообще, функции типа модуля и подобные им кусочно линейные функции играют особую роль в теории аппроксимации. Удивительно, но до недавнего времени в теории полиномов Бернштейна такие функции, как объект исследования, возникали лишь эпизодически, и общих результатов было немного. Отметим только работу Виденского [7], где для функции $f_c(x) = |x - c|$ с фиксированным $c \in (0, 1)$ показано, что

$$0 \leq B_n(f_c, x) - f_c(x) \leq \sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Эта оценка уточняет (5) применительно к конкретной ситуации и, согласно [8], адекватно отражает поведение уклонения в точке излома. Но на прямолинейных участках действуют совсем иные законы.

Проще всего суть дела можно понять на примере симметричного модуля

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1]. \quad (6)$$

Полиномы Бернштейна для функции (6) коротко обозначим через $B_n(x)$. По формуле (1) имеем

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{2k}{n} - 1 \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Подробное исследование полиномов (7) и характера аппроксимации функции (6) проведено в недавней работе [9]. Отметим свойство склеивания

$$B_{2m+1}(x) = B_{2m}(x), \quad m \in \mathbb{N},$$

позволяющее при изучении полиномов (7) ограничиваться четными номерами (см. [9], [10]). Справедливо представление

$$B_{2m}(x) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} C_{2k}^k (x(1-x))^k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

которое назовем разложением Поповичу, поскольку аналогичное соотношение упоминается в [5] для полиномов Бернштейна функции $|x|$ на $[-1, 1]$.

Определим величину

$$R_{2m}(x) \equiv B_{2m}(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

поточечного уклонения полинома $B_{2m}(x)$ от $f(x)$. Введем также максимальное уклонение

$$M_{2m} \equiv \max_{0 \leq x \leq 1} R_{2m}(x), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Нетрудно показать, что

$$M_{2m} = B_{2m}(1/2) = 2^{-2m} C_{2m}^m.$$

Отсюда вытекает известная асимптотика

$$M_{2m} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \rightarrow \infty,$$

и двусторонняя оценка

$$\left(1 - \frac{1}{8m}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi m}} < M_{2m} < \left(1 - \frac{1}{9m}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Оценки уклонения (9) для точек $x \in [0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, т. е. на “крыльях” модуля, были получены в [9]. Эти оценки носили экспоненциальный характер, но портились при приближении точки x к $1/2$. Недавно, используя разложение Поповичу (8), нам удалось установить более точный результат, охватывающий весь отрезок $[0, 1]$. Оценка сверху имеет вид:

$$R_{2m}(x) \leq \frac{1}{2(m+1)\sqrt{\pi m}} \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{(2x-1)^2 + \frac{x(1-x)}{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

Подпирающая оценка снизу выглядит так:

$$\frac{1}{2(m+2)\sqrt{\pi m}} \frac{(4x(1-x))^{m+1}}{(2x-1)^2 + \frac{6x(1-x)}{m+2}} \leq R_{2m}(x), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

По совокупности (12) и (13) получаем точную асимптотику

$$R_{2m}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi} (2x-1)^2} \frac{1}{m\sqrt{m}} (4x(1-x))^{m+1}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (14)$$

действующую при каждом фиксированном $x \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$.

Основной интерес представляет, конечно, оценка сверху. На практике удобно иметь в распоряжении упрощенный вариант, применимый сразу на множестве $x \in (0, \delta] \cup [1 - \delta, 1)$ с вырезанной окрестностью точки $x = 1/2$. Зафиксируем $\delta \in (0, 1/2)$ и обозначим для краткости

$$q = q(\delta) \equiv 4\delta(1 - \delta), \quad 0 < q < 1, \quad 1 - q = (2\delta - 1)^2.$$

Тогда для всех $x \in (0, \delta] \cup [1 - \delta, 1)$ верна оценка

$$0 < R_{2m}(x) \leq \frac{2q}{(4(m+1)(1-q) + q) \sqrt{\pi m}} q^m, \quad m \in \mathbb{N},$$

легко извлекаемая из (12). Например, для $x \in (0, 1/4] \cup [3/4, 1)$ можно утверждать, что

$$0 < R_{2m}(x) \leq \frac{6}{(4m+7) \sqrt{\pi m}} \left(\frac{3}{4}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Итак, на некотором удалении от точки излома очень быстрый, экспоненциальный характер сближения полиномов Бернштейна с функцией (6) становится наглядным.

В самой точке $x = 1/2$ из (12), (13) следует оценка максимального отклонения (10) вида

$$\frac{1}{3\sqrt{\pi m}} \leq M_{2m} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi m}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

что, конечно, грубее, чем (11), но все же сохраняет заложенный там порядок приближения. Фактически, соотношения (12), (13) позволяют проследить, как происходит переход от экспоненциального стремления к нулю отклонения $R_{2m}(x)$ вне точки $x = 1/2$ к поведению, обозначенному формулой (11).

Кроме того, асимптотика (14) выявляет истинный характер остаточного члена $\alpha_{2m}(x)$ в формуле Вороновской (2) для функции $f(x) = |2x - 1|$ там, где $f''(x) = 0$. Характер оказывается экспоненциальным. Это не случайное обстоятельство, а проявление общего принципа, справедливого для функций, имеющих в составе линейный кусок. Для точной формулировки требуется ввести регулятор сходимости вида

$$\Delta_\nu(x) \equiv \left(\frac{x}{\nu}\right)^\nu \left(\frac{1-x}{1-\nu}\right)^{1-\nu}, \quad x \in [0, 1], \quad (15)$$

с фиксированным $\nu \in (0, 1)$. Непосредственно проверяется, что

$$0 < \Delta_\nu(x) < 1, \quad x \in (0, \nu) \cup (\nu, 1),$$

причем $\Delta_\nu(0) = \Delta_\nu(1) = 0$ и $\Delta_\nu(\nu) = 1$. Недавно авторам удалось установить следующий результат.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$ и удовлетворяет условию

$$f(x) = ax + b, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

на некотором отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, 1)$. Пусть $B_n(f, x)$ — полиномы Бернштейна функции $f(x)$ на $[0, 1]$, определенные по формуле (1). Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ для уклонения $R_n(f, x) \equiv |B_n(f, x) - f(x)|$ верна оценка

$$R_n(f, x) \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \left\{ \Theta_\alpha \frac{(\Delta_\alpha(x))^n}{x - \alpha} + \Xi_\beta \frac{(\Delta_\beta(x))^n}{\beta - x} \right\}, \quad x \in (\alpha, \beta),$$

где $\Delta_\alpha(x)$, $\Delta_\beta(x)$ — регуляторы сходимости, определенные посредством (15) для $\nu = \alpha$ и $\nu = \beta$ соответственно, коэффициент $\Theta_\alpha > 0$ зависит лишь от α , коэффициент $\Xi_\beta > 0$ зависит лишь от β , а $M \equiv \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Отсюда следует, что на прямолинейных участках процесс сближения полиномов Бернштейна с исходной функцией происходит быстро — с экспоненциальной скоростью, и если “потребитель”, аппроксимирующий ломаную, готов поступиться точностью приближения вблизи изломов, то вполне разумный полином Бернштейна обеспечит приемлемое качество “картинки”. Это соображение представляется весьма актуальным в связи с задачами современного компьютерного дизайна, куда полиномы Бернштейна активно внедряются через кривые Безье (см. [11]).

Работа подготовлена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00281).

Литература

- [1] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Ленинград: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. — 64 с.
- [2] Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. New York: Chelsea Publishing Company, 1986. — x+134 p.
- [3] DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1993. — x+449 p.
- [4] Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна // ДАН СССР, А. 1932. № 4. — С. 79–85.
- [5] Popoviciu T. Sur l’approximation des fonctions convexes d’ordre supérieur // Mathematica. 1935. Vol. 10. — P. 49–54.
- [6] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Том первый. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 464 с.
- [7] Виденский В. С. О приближении функции $|x - c|$ многочленами Бернштейна и интерполяционными ломаными // “Приближение функций специальными классами операторов”. — Вологда: Вологодский гос. педагогический институт, 1987. — С. 25–28.
- [8] Bojanic R., Cheng F. Rate of convergence of Bernstein polynomials for functions with derivatives of bounded variation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. Vol. 141. № 1. — P. 136–151.
- [9] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского государственного университета. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. — С. 6–40.

- [10] Passow E. Deficient Bernstein polynomials // Journal of Approximation Theory. 1989. Vol. 59. № 3. – P. 282–285.
- [11] Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 2001. – 576 с. (D. Kahaner, C. Moler, S. Nash. Numerical Methods and Software)

УДК 517.548

ФУНКЦИОНАЛЫ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НА ЧАСТИ КОНУСА, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССАХ

Шишкина Э. Л.

Воронежский государственный университет

Воронеж

e-mail: ilina_dico@mail.ru

Shishkina E. L. Functional concentrated on a part of the cone acting in weighted functional spaces. In this paper, integral representations for functionals concentrated on a part of the cone acting in weighted functional spaces are derived.

В работе получены интегральные представления функционалов, сосредоточенных на части конуса, действующих в весовых классах функций.

Функционалы, сосредоточенные на плоскости, действующие в весовых классах функций, применялись в работах [1] и [2] для записи преобразования Киприянова–Радона. Рассматриваемый в этой работе функционал, связанный с невырожденной квадратичной формой и действующий в весовых классах функций (см. формулу (1)) и его производные используются при построении фундаментальных решений для однородных дифференциальных операторов второго порядка, содержащих операторы Бесселя (см. [1], с. 6), с постоянными коэффициентами.

Пусть $\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Рассмотрим квадратичную форму

$$P = |x'|^2 - |x''|^2 = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad n = p + q,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x'')$, $x' = (x_1, \dots, x_p)$, $x'' = (x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$.

Часть конуса $P = 0$, принадлежащую $\mathbb{R}_n^+$, будем обозначать K^+ .

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Следуя [3] (см. с. 275 и далее), рассмотрим весовой функционал, сосредоточенный на части конуса K^+ :

$$(\delta(P), \varphi(x))_\gamma = (\delta(|x'|^2 - |x''|^2), \varphi(x))_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} \delta(|x'|^2 - |x''|^2) \varphi(x) x^\gamma dx, \quad (1)$$

где $x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$, φ – произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, заданная на $\mathbb{R}_n^+$, чётная¹ по каждой из переменных, δ – дельта-функция, сосредоточенная на K^+ .

Пусть сначала $p > 1$, $q > 1$. Перейдем в (1) к сферическим координатам по переменным x' и x'' :

$$x_1 = r\omega_1, \dots, x_p = r\omega_p, \quad x_{p+1} = s\omega_{p+1}, \dots, x_{p+q} = s\omega_{p+q}, \quad (2)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2}, \quad s = \sqrt{x_{p+1}^2 + \dots + x_{p+q}^2},$$

$$|\omega'| = \sqrt{\omega_1^2 + \dots + \omega_p^2} = 1, \quad |\omega''| = \sqrt{\omega_{p+1}^2 + \dots + \omega_{p+q}^2} = 1, \quad \omega = (\omega', \omega''),$$

получим

$$\begin{aligned} & (\delta(P), \varphi(x))_\gamma = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \delta(r^2 - s^2) \varphi(r\omega', s\omega'') r^{p+|\gamma'|-1} s^{q+|\gamma''|-1} \omega^\gamma dS_1^p dS_1^q dr ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где dS_1^p и dS_1^q элементы поверхностей

$$\{|\omega'| = 1\}^+ = \{x \in \mathbb{R}_p^+ : |x| = 1\} \quad \text{и} \quad \{|\omega''| = 1\}^+ = \{x \in \mathbb{R}_q^+ : |x| = 1\},$$

соответственно. Произведя замену переменных $r^2 = u$, $s^2 = v$ в интеграле (3), будем иметь

$$\begin{aligned} & (\delta(P), \varphi(x))_\gamma = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \delta(u - v) \varphi(\sqrt{u}\omega', \sqrt{v}\omega'') u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1} v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1} \omega^\gamma dS_1^p dS_1^q du dv = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \varphi(\sqrt{v}\omega) v^{\frac{n+|\gamma|}{2}-2} \omega^\gamma dS_1^p dS_1^q dv. \end{aligned}$$

Возвращаясь обратно к переменной s с помощью замены $v = s^2$, получим

$$(\delta(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \varphi(s\omega) s^{n+|\gamma|-3} \omega^\gamma dS_1^p dS_1^q ds.$$

Найдем производную порядка k , $k \in \mathbb{N}$ от весового функционала (1):

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} \delta^{(k)}(|x'|^2 - |x''|^2) \varphi(x) x^\gamma dx. \quad (4)$$

¹Следуя [4] (см. с. 21), функции, определенные на $\mathbb{R}_n^+$, будем называть чётными по x_i , если $f'_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$.

После перехода к координатам (2) в выражении (4), получим

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \left(\frac{\partial^k}{\partial P^k} \delta(r^2 - s^2) \right) \varphi(r\omega', s\omega'') \times \\ \times r^{p+|\gamma'|-1} s^{q+|\gamma''|-1} \omega^\gamma dS_1^p dS_1^q dr ds, \quad (5)$$

где $P = r^2 - s^2$.

В (5) от переменной s перейдем к переменной P по формуле $s = \sqrt{r^2 - P}$, будем иметь

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \\ = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{r^2} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \left(\frac{\partial^k}{\partial P^k} \delta(P) \right) \frac{1}{2} \varphi(r\omega', \sqrt{r^2 - P} \cdot \omega'') r^{p+|\gamma'|-1} \times \\ \times (r^2 - P)^{\frac{q+|\gamma''|-2}{2}} \omega^\gamma dS_1^p dS_1^q dP dr = \\ = (-1)^k \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \left(\frac{\partial^k}{\partial P^k} \frac{1}{2} \varphi(r\omega', \sqrt{r^2 - P} \cdot \omega'') (r^2 - P)^{\frac{q+|\gamma''|-2}{2}} \right) \Big|_{P=0} \times \\ \times r^{p+|\gamma'|-1} dS_1^p dS_1^q dr. \quad (6)$$

Используя формулу $P = r^2 - s^2$ и замечая, что $\frac{\partial}{\partial P} = -\frac{\partial}{2s\partial s}$, перейдем в (6) от P к s . Имеем

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \int_0^{+\infty} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \frac{1}{2} \varphi(r\omega', s\omega'') s^{q+|\gamma''|-2} \right] \Big|_{s=r} \times \\ \times r^{p+|\gamma'|-1} dS_1^p dS_1^q dr = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \psi_\gamma(r, s) s^{q+|\gamma''|-2} \right] \Big|_{s=r} r^{p+|\gamma'|-1} dr,$$

где

$$\psi_\gamma(r, s) = \frac{1}{2} \int_{\{|\omega'|=1\}^+} \int_{\{|\omega''|=1\}^+} \varphi(r\omega', s\omega'') \omega^\gamma dS_1^p dS_1^q.$$

Следуя [3], введем обозначение

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s} \right)^k \psi_\gamma(r, s) s^{q+|\gamma''|-2} \right] \Big|_{s=r} r^{p+|\gamma'|-1} dr. \quad (7)$$

Если в (5) перейти к переменной P от переменной r по формуле $r = \sqrt{P + s^2}$, то получим формулу

$$(\delta_2^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = (-1)^k \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{2r\partial r} \right)^k \psi_\gamma(r, s) r^{p+|\gamma'|-2} \right] \Big|_{r=s} s^{q+|\gamma''|-1} ds. \quad (8)$$

Очевидно, что интегралы (7) и (8) сходятся и совпадают при $k < \frac{n+|\gamma|-2}{2}$, где $n=p+q$, $|\gamma|=|\gamma'|+|\gamma''|$ для финитной бесконечно дифференцируемой функции φ .

Если $k \geq \frac{n+|\gamma|-2}{2}$, то интегралы (7) и (8) нужно понимать в смысле регуляризованных значений. Чтобы построить регуляризованное значение интеграла (7) произведем в нем замену переменных $r^2 = u$ и положим $s^2 = v$. Полагая $\varphi_\gamma(u, v) = \psi_\gamma(r, s)$, получим

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial^k}{\partial v^k} \varphi_\gamma(u, v) v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1} \right] \Big|_{v=u} u^{\frac{p+|\gamma'|}{2}-1} dr.$$

Поскольку функция $\varphi_\gamma(u, v)$ является финитной бесконечно дифференцируемой функцией переменных u и v , то

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial v^k} \varphi_\gamma(u, v) v^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1} \right] \Big|_{v=u} = u^{\frac{q+|\gamma''|}{2}-1-k} \Psi(u),$$

где $\Psi(u)$ финитная бесконечно дифференцируемая функция. Будем иметь

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{\frac{n+|\gamma|-2-k}{2}} \Psi(u) du = \frac{1}{2} (u_+^\lambda, \Psi),$$

где

$$u_+^\lambda = \begin{cases} u^\lambda, & u > 0; \\ 0, & u \leq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Регуляризацией функции (9) является обобщённая функция u_+^λ , которая при $\lambda \neq -1, -2, \dots$ получается аналитическим продолжением u_+^λ из области $\text{Re } \lambda > 0$ (см. [1], с. 68–70). При $\lambda = -1, -2, \dots$ эта аналитическая обобщённая функция имеет простые полюса и обобщённая функция u_+^{-m} , $m \in \mathbb{N}$ определяется как свободный член разложения Лорана функции u_+^λ в окрестности точки $\lambda = -m$ (см. [1], с. 113–116).

Пусть теперь $p = q = 1$. Имеем $P = x_1^2 - x_2^2$, $x = (x_1, x_2)$ и

$$(\delta(P), \varphi(x))_\gamma = (\delta(x_1^2 - x_2^2), \varphi(x))_\gamma = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \delta(x_1^2 - x_2^2) \varphi(x) x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} dx_1 dx_2.$$

Произведем замену $x_1^2 = u$, $x_2^2 = v$, получим

$$\begin{aligned} (\delta(P), \varphi(x))_\gamma &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \delta(u - v) \varphi(\sqrt{u}, \sqrt{v}) u^{\frac{\gamma_1-1}{2}} v^{\frac{\gamma_2-1}{2}} du dv = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \varphi(\sqrt{v}, \sqrt{v}) v^{\frac{|\gamma|-1}{2}} dv = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \varphi(t, t) t^{|\gamma|-1} dt. \end{aligned}$$

Для k -й производной $(\delta^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma$ будем иметь

$$(\delta^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{d^k}{dP^k} \delta(x_1^2 - x_2^2) \right) \varphi(x) x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} dx_1 dx_2.$$

Произведя замену $x_1^2 = u$, $x_2^2 = v$, а затем вернувшись снова к переменным x_1 и x_2 , получим

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{2x_2 \partial x_2} \right)^k \varphi(x) x_2^{\gamma_2-1} \right] \Big|_{x_2=x_1} x_1^{\gamma_1} dx_1, \quad (10)$$

и

$$(\delta_2^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \frac{(-1)^k}{2} \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{2x_1 \partial x_1} \right)^k \varphi(x) x_1^{\gamma_1-1} \right] \Big|_{x_1=x_2} x_2^{\gamma_2} dx_2, \quad (11)$$

где интегралы понимаются в смысле регуляризованных значений.

Наконец, при $q = 1$, $p = n - 1 > 1$ имеем $P = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$ и

$$(\delta(P), \varphi(x))_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} \delta(P) \varphi(x) x^\gamma dx. \quad (12)$$

Перейдем в (12) к сферическим координатам $x_1 = r\omega_1, \dots, x_{n-1} = r\omega_{n-1}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, получим

$$(\delta(P), \varphi(x))_\gamma = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\{|\omega|=1\}^+} \delta(r^2 - x_n^2) \varphi(r\omega, x_n) r^{n+|\gamma'|-2} x_n^{\gamma_n} \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i^{\gamma_i} dS dr dx_n, \quad (13)$$

где $|\gamma'| = \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}$, dS – элемент поверхности $\{|\omega|=1\}^+ = \{\omega \in \mathbb{R}_{n-1}^+ : |\omega|=1\}$. В интеграле (13) произведем замену $r^2 = u$, $x_n^2 = v$, $dr = \frac{1}{2}u^{-1/2} du$, $dx_n = \frac{1}{2}x_n^{-1/2} dv$, получим

$$\begin{aligned} (\delta(P), \varphi(x))_\gamma &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\{|\omega|=1\}^+} \delta(u-v) \varphi(\sqrt{u}\omega, \sqrt{v}) u^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}} v^{\frac{\gamma_n-1}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i^{\gamma_i} dS du dv = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\{|\omega|=1\}^+} \varphi(\sqrt{v}\omega, \sqrt{v}) v^{\frac{n+|\gamma'|-2}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i^{\gamma_i} dS dv = \{\sqrt{v} = t\} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\{|\omega|=1\}^+} \varphi(t\omega, t) t^{n+|\gamma'|-3} \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i^{\gamma_i} dS dt. \end{aligned}$$

Для производной k -го порядка обобщённой функции (12) имеем

$$(\delta_1^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{2r \partial r} \right)^k \eta_\gamma(r, x_n) r^{n+|\gamma'|-3} \right] \Big|_{r=x_n} x_n^{\gamma_n} dx_n \quad (14)$$

и

$$(\delta_2^{(k)}(P), \varphi(x))_\gamma = (-1)^k \int_0^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial}{2x_n \partial x_n} \right)^k \eta_\gamma(r, x_n) x_n^{\gamma_n-1} \right] \Big|_{x_n=r} r^{n+|\gamma'|-2} dr, \quad (15)$$

где

$$\eta_\gamma(r, x_n) = \frac{1}{2} \int_{\{|\omega|=1\}^+} \varphi(r\omega, x_n) \prod_{i=1}^{n-1} \omega_i^{\gamma_i} dS.$$

Литература

- [1] Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.
- [2] Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова–Радона // Исследования по теории функций и дифференциальным уравнениям. Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Тр. МИАН, 248. – М.: Наука, 2005. – С. 153–163.
- [3] Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними (Обобщённые функции, выпуск 1) (2-е изд.). – М.: Физматлит, 1959. – 486 с.
- [4] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические задачи. – М.: Наука, 1997. – 199 с.

Актуальные проблемы математического образования

УДК 512,514

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Д. Ю. Волков^{1,2}, К. В. Галунова³

Санкт-Петербургский государственный
университет¹

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена²

Российский государственный политехнический
университет³

e-mail:dmitrivolkov@mail.ru

Volkov D. Yu., Galunova K. V. Rational orthogonal matrices and their applications. An algorithm for generation of orthonormal rational matrices is given. We consider the application of this algorithm.

В статье приводится алгоритм построения ортогональных матриц с рациональными элементами. Рассматриваются различные приложения данного алгоритма.

1. Рациональные ортогональные матрицы. Задача о построении ортогональной матрицы с рациональными коэффициентами рассматривалась в ряде работ (см. [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]). История построения таких матриц очень интересна. Как указано в [8], первые представления были получены Кэли в 1846 году [6]. Отметим, что в то время ещё не было создано матричное исчисление. Удачная параметризация указана в [7]. Подробно вопрос о нахождении матриц рассмотрен в [8]. Эти работы были забыты и примерно через 25 лет к этому вопросу вновь вернулись [9, 10, 11, 12]. Общий способ указан в [11]. Мы рассмотрим двумерный и трёхмерный случай, так как они играют основную роль в преподавании аналитической геометрии и линейной алгебры.

Любая ортогональная матрица 2×2 с определителем, равным 1, может быть задана в виде

$$A = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где a и b произвольные целые числа, $d = a^2 + b^2$. Это следует из того, что произвольное решение диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ может быть найдено по формулам $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$, $z = a^2 + b^2$ и произвольная ортогональная матрица размера 2×2 с определителем, равным 1, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Рассмотрим общий случай. В статье [11] доказано, что любая ортогональная матрица U может быть представлена в виде

$$U = D(L - E)^{-1}(L + E), \quad (3)$$

где S – произвольная кососимметричная $n \times n$ матрица над полем вещественных чисел и E – единичная матрица той же размерности, D – диагональная матрица с коэффициентами на диагонали ± 1 . Для моделирования рациональных матриц небольшого размера нужно указать удобные кососимметричные матрицы. Рассмотрим пример. Пусть

$$S(a, b, c, d) = D(L - E)^{-1}(L + E),$$

где $D = \text{diag}(1, 1 - 1)$ и

$$L = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Укажем явный вид матрицы S . Пусть $N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$:

$$S = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ad) \\ 2(ad + bc) & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Эту параметризацию указал John Cremona [9]. Для $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = -1$ получим самую известную ортогональную матрицу

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Применим полученные результаты к построению ортогональных матриц с заданными собственными числами и симметричных матриц с заданными свойствами.

2. Построение рациональных ортогональных матриц с заданными собственными числами и собственными векторами. Рассмотрим вопрос о построении рациональных ортогональных матриц с рациональными собственными векторами. Такие матрицы удобно предлагать для анализа при изучении ортогональных преобразований в курсе геометрии и алгебры. Формула (4) не позволяет контролировать собственные векторы. Как хорошо известно, любая ортогональная матрица третьего порядка U может быть представлена в виде

$$U = SJS^t, \quad (6)$$

где J – жорданова матрица вида:

$$J = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы S являются либо собственными векторами матрицы U , соответствующим собственным числам ± 1 матрицы U , либо базисом инвариантной плоскости матрицы U . Для построения матрицы U по формуле (6) достаточно взять рациональные матрицы S и J . Приведём примеры построения матриц, задающих движения трёхмерного пространства.

Пример 1. Рассмотрим построение матриц движений пространства. Пусть

$$J_{1,2} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \pm 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица J_1 задает поворот в пространстве, а J_2 – зеркальный поворот. Найдём матрицы $U_{1,2} = SJ_{1,2}S^t$, где S задаётся (5). Выполнив умножение, получим

$$U_1 = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 29 & 20 & -28 \\ -28 & 35 & -20 \\ 20 & 20 & 35 \end{pmatrix}, U_2 = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -5 & 44 & -8 \\ -20 & -5 & 40 \\ 40 & -40 & 19 \end{pmatrix}.$$

3. Построение симметричных матриц. Напомним хорошо известные результаты о собственных числах и собственных векторах симметричных матриц.

Теорема 1. Если A вещественная симметричная матрица размера $n \times n$, то существует вещественная ортогональная матрица S такая, что

$$S^t A S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – собственные числа матрицы A , а столбцы матрицы S являются собственными векторами матрицы A . Доказательство см. в [3, с. 242], [4, с. 369]. Из теоремы вытекает

$$AS = S\Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

и

$$A = S\Lambda S^t. \quad (7)$$

Формула (7) является основной в нашем методе построения. Приведём примеры.

Пример 2. Пусть $p_1 = [\alpha, \beta]^t$, $p_2 = [-\beta, \alpha]^t$ – произвольный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^2$ и пусть λ_1 и λ_2 – произвольные вещественные числа, $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 & (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha \beta \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha \beta & \lambda_1 \beta^2 + \lambda_2 \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Пусть $\mathbf{p}_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^t$, $\mathbf{p}_2 = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^t$, $\mathbf{p}_3 = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^t$ – произвольный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – произвольные вещественные числа. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \beta_1^2 + \lambda_3 \gamma_1^2, & a_{12} &= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_1 \beta_2 + \lambda_3 \gamma_1 \gamma_2, \\ a_{13} &= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_1 \beta_3 + \lambda_3 \gamma_1 \gamma_3, & a_{21} &= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_1 \beta_2 + \lambda_3 \gamma_1 \gamma_2, \\ a_{22} &= \lambda_1 \alpha_2^2 + \lambda_2 \beta_2^2 + \lambda_3 \gamma_2^2, & a_{23} &= \lambda_1 \alpha_2 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_2 \beta_3 + \lambda_3 \gamma_2 \gamma_3, \\ a_{31} &= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_1 \beta_3 + \lambda_3 \gamma_1 \gamma_3, & a_{32} &= \lambda_1 \alpha_2 \alpha_3 + \lambda_2 \beta_2 \beta_3 + \lambda_3 \gamma_2 \gamma_3, \\ a_{33} &= \lambda_1 \alpha_3^2 + \lambda_2 \beta_3^2 + \lambda_3 \gamma_3^2. \end{aligned}$$

Выберем и зафиксируем ортонормированный базис $p_1, p_2, \dots, p_n$, или кратко, матрицу S . Найдем симметричную матрицу A как функцию её собственных чисел (см. (7)). Для поиска $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, при которых A будет целочисленной, нам нужно решить систему $n(n+1)/2$ линейных уравнений с неизвестными $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$a_{ij}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = b_{ij}, \quad i, j = 1 \dots n, \quad j \geq i, \quad b_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

с рациональными коэффициентами при неизвестных. Выбрав n линейно независимых уравнений и решив их, мы получим выражения собственных чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ через n коэффициентов b_{ij} для соответствующих i, j . Подставим найденное решение в (7). Таким образом, можно получить общий вид симметричных матриц, имеющих рациональные собственные числа и собственные векторы с рациональными координатами.

Пример 4. Рассмотрим матрицу, задающую ортонормированный базис на плоскости:

$$S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица A имеет вид:

$$A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9\lambda_1 + 16\lambda_2 & 12\lambda_1 - 12\lambda_2 \\ 12\lambda_1 - 12\lambda_2 & 16\lambda_1 + 9\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$a_{11} = m, \quad a_{21} = n, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Для выбранной матрицы S система примет вид:

$$a_{11} = \frac{1}{25}(9\lambda_1 + 16\lambda_2) = m, \quad a_{21} = \frac{1}{25}(12\lambda_1 - 12\lambda_2) = n, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем решение системы:

$$\lambda_1 = m + \frac{4}{3}n, \quad \lambda_2 = m - \frac{3}{4}n.$$

Подставив найденные решения, получим матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} m & n \\ n & m + \frac{7}{12}n \end{pmatrix}.$$

Выберем $n = 12k$, тогда двухпараметрическое семейство целочисленных матриц с целыми собственными числами:

$$A = \begin{pmatrix} m & 12k \\ 12k & m + 7k \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Рассмотрим простейший ортонормированный базис в пространстве, матрица S задается формулой (5). Матрица A примет вид:

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 & -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 & -2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 & 4\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 & 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= (\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3)/9 = m, \\ a_{1,3} &= (-2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3)/9 = n, \\ a_{2,2} &= (4\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3)/9 = k. \end{aligned}$$

Система имеет решение:

$$\lambda_1 = -3m + 2n + 4k, \quad \lambda_2 = 2n + k, \quad \lambda_3 = 3m - \frac{5}{2}n - 2k.$$

Подставляя решение, получим:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2m - 2n - 2k & n \\ 2m - 2n - 2k & k & -2m + n - 2k \\ n & -2m + n - 2k & -m + \frac{3}{2}n + 2k \end{pmatrix}.$$

Если положить $n = 2p$, $p \in \mathbb{Q}$, то получим явный вид симметричной целочисленной матрицы, зависящей от трёх параметров:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2m - 4p - 2k & 2p \\ 2m - 4p - 2k & k & -2m + 2p - 2k \\ 2p & -2m + 2p - 2k & -m + 3p + 2k \end{pmatrix}.$$

4. Построение центральных квадрик. Уравнения центральных поверхностей удобно выводить в два этапа:

1) построить симметричную матрицу с целыми собственными числами и квадратичную форму, собственные числа которой являются целыми числами и целыми собственными векторами и соответствующую квадратичную форму;

2) применить параллельный перенос и получить уравнение поверхности с линейными слагаемыми.

Первый этап подробно рассмотрен в п. 2. Рассмотрим примеры построения уравнений кривых и поверхностей.

Пример 6. Рассмотрим матрицу, задающую ортонормированный базис на плоскости:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $A = S^T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) S$ имеет вид:

$$A = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1\lambda_1 + k^2\lambda_2 & k\lambda_1 - k\lambda_2 \\ k\lambda_1 - k\lambda_2 & k^2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$a_{11} = m, \quad a_{21} = n, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем решение системы:

$$\lambda_1 = m + kn, \quad \lambda_2 = m - \frac{1}{k}n.$$

Подставив найденные решения, получим матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} m & n \\ n & m - \frac{k^2 - 1}{k}n \end{pmatrix}.$$

Если n делится на k без остатка, то полученная матрица будет целочисленной, и собственные числа тоже будут целыми. При $k = 1$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = m + n, \quad \lambda_2 = m - n.$$

Положим $m = 3$, $n = 2$ и рассмотрим эллипс, заданный в новой системе координат уравнением

$$5x^2 + y^2 = 5.$$

В исходной системе координат уравнение эллипса будет иметь вид

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 = 5.$$

Сделаем параллельный перенос

$$x \rightarrow x - 1, \quad y \rightarrow y - 1$$

получим уравнение:

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y + 5 = 0.$$

Пример 7. Рассмотрим простейший ортонормированный базис (5) в пространстве. Матрица A примет вид (9). Решим уравнение:

$$a_{1,2} = (-2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3)/9 = n$$

относительно λ_3 :

$$\lambda_3 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{9}{2}n.$$

Подставляя решение, получим:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6n & 3n & -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6n \\ 3n & \lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{3}{2}n & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3n \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6n & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3n & 3\lambda_2 - 6n \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Используя явный вид A при $n = 3$. Пусть $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. В исходной системе координат уравнение эллипсоида имеет вид

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz = 162.$$

5. Построение параболических квадрик. Построение параболических уравнений мы проведем в несколько этапов:

1) построим квадратичную форму с одним или несколькими нулевыми собственными числами

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2,$$

которая при преобразовании $x = Qy$ перейдет в квадратичную форму с целыми коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j;$$

2) к квадратичной форме добавим линейные слагаемые переменных, которым соответствуют нулевые собственные числа квадратичной формы

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + 2u_{r+1} x_{r+1} + \dots + 2u_n x_n,$$

и совершим ортогональное преобразование с рациональными коэффициентами $x = Qy$, которое переведет функцию в функцию

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i y_i,$$

где $b_i = Q_{n,i} u$. Выберем целое u так, чтобы b_i стали целыми. В результате получили параболическое уравнение с целыми коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i y_i = 0.$$

Пример 8. Рассмотрим построение уравнения параболы. Рассмотрим уравнение $25(x')^2 = 0$. При замене переменной

$$x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \quad y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$$

уравнение переходит в уравнение $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$. Следовательно, если мы выберем $u = 5$ и видоизменим исходное уравнение $25(x')^2 + 5y' = 0$, тогда при замене оно перейдет в уравнение $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 3x + 4y = 0$. Это уравнение задает параболу.

Пример 9. Рассмотрим матрицу A из примера 7, формула (10). Положим $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 24$, $n = 0$. Из явного вида A и S следует, что уравнение, задающее эллиптический параболоид

$$3y^2 + 6z^2 + 6x = 0,$$

перейдет в уравнение:

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xz + 4yz + 2x - 4y - 4z = 0.$$

Литература

- [1] Волков Д. Ю., Галунова К. В. Целочисленные симметричные матрицы с целыми собственными числами и векторами // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXV научной конференции “Герценовские чтения–2012”. – СПб.: БАН, 2012. – С. 163–168.
- [2] Волков Д. Ю., Галунова К. В. Семейство кривых и поверхностей второго порядка с целочисленными уравнениями // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы LXVI научной конференции “Герценовские чтения–2013”. – СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. – С. 174–179.
- [3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
- [4] Голуб Дж., Лоун Ч. Ван. Матричные вычисления. – М., Мир, 1999. – 548 с.
- [5] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 648 с.
- [6] Caley A. Sur quelques propriétés des déterminants gauches // J. Reine Angew. Math. vol. 32 (1846), pp. 119–123, reprinted in the collected mathematical papers of Caley, Cambridge University Press 1889–1898, vol. 1, pp. 332–336.
- [7] Sholander M. Rational orthogonal matrices // Amer. Math. Monthly, vol. 68 (1961), №4, p. 350.
- [8] Reiersol O. Rational orthogonal matrices // Amer. Math. Monthly, vol. 70 (1963), №1, pp. 63–65.
- [9] Cremona J. Letter to the editor // Amer. Math. Monthly, vol. 94 (1987), №8, pp. 357–358.
- [10] Osborne A., Liebeck H. Orthogonal bases of $(R)^3$ with integer coordinates and integer lengths // Amer. Math. Monthly, vol. 96 (1989), №1, pp. 49–53.
- [11] Osborne A., Liebeck H. The Generation of all rational orthogonal matrices // Amer. Math. Monthly, vol. 98 (1991), №2, pp. 131–133.
- [12] Hemasinha R., Bagui S. Generating all rational orthogonal matrices via Housholder transformations Jahanginagar university // Journal of Science, vol. 32 (2009), №1, pp. 47–56.

“ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ” У СТУДЕНТОВ-ПРИКЛАДНИКОВ

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург

Koldunov A. V. “Numerical methods” for students studying applications. In the report there is a list of items from “Numerical methods” which may be useful for students studying applications.

В сообщении рассматриваются вопросы, связанные с курсом “Численные методы”, и которые могут быть полезны для студентов-прикладников.

1. Основные темы бакалавриатского курса “Численные методы” (ЧМ) рационально сгруппировать в два блока: “Численные методы решения дифференциальных уравнений” (ЧМ ДУ) и “Численные методы оптимизации” (ЧМ ОПТ). Такой подход делает общий курс ЧМ более обозримым и гибким, поскольку всегда есть возможность модификации в изложении курса.

Например, односеместровые курсы ЧМ начинаются обычно с многочленов Лагранжа, численного дифференцирования и численного интегрирования. Затем идут ЧМ ДУ первого и второго порядков. Это занимает половину семестра. Далее рассматриваются ЧМ ОПТ: в качестве введения рассматриваются численные методы решения уравнений с одной переменной (ЧМ У), а затем на их основе изучаются ЧМ ОПТ для функций одной переменной. Заканчивают курс ЧМ вопросы, связанные с ЧМ ОПТ функций нескольких переменных.

Следует иметь в виду, что в разных потоках на односеместровые курсы ЧМ отводятся разные часы: в одних – 18 часов лекций и 18 часов практики, в других – 28 часов лекций и 56 часов практики. Поэтому в первом случае приходится ограничиваться каким-нибудь одним ЧМ ДУ второго порядка точности, а при рассмотрении ЧМ У использовать метод касательных. Это означает, что при изучении ЧМ ОПТ в качестве основного естественно брать метод Ньютона.

Во втором случае можно рассмотреть более широкий круг ЧМ: в частности, ЧМ ОПТ, основанные на процедурах спуска.

2. Иная ситуация у студентов-прикладников. Они изучают два бакалавриатских курса, связанных с ЧМ. Во-первых, это собственно курс ЧМ ($\equiv$ ЧМ 1: 34+34) и, во-вторых, курс ЧМ ДУ ($\equiv$ ЧМ 2: 24+24).

Курс ЧМ 1 полезно начать с многочленов Лагранжа. Их можно использовать при введении сплайнов, но появление сплайнов в этом месте курса задерживает развитие основного материала.

Затем рассматриваются три основные ЧМ У. Обычно они вводятся на основе теорем о монотонной последовательности (т. е. имеет место порядковый подход). Но возможен и метрический подход (с помощью принципа неподвижной точки). Появление в этом месте обоих подходов весьма полезно, так как в ЧМ 1 и в ЧМ 2 рассматриваются и другие применения принципа неподвижной точки.

Порождённые ЧМ У численные процедуры оптимизации дают методы спуска для случая одной переменной. Поэтому в качестве ЧМ ОПТ функций нескольких переменных естественно рассматривать дифференциальные и прямые методы спуска.

Курс ЧМ 2 начинается с процедур численного дифференцирования и интегрирования, которые существенно используются при введении ЧМ ДУ первого и второго порядков. Обычно при рассмотрении ЧМ ДУ ограничиваются методами второго порядка точности. Выход на более точные методы в рамках бакалавриатского курса ЧМ 2 затруднителен.

Курс ЧМ 2 полезно закончить ЧМ решения интегральных уравнений (на основе принципа неподвижной точки, а также на основе квадратурных методов).

3. Материал п. 2 позволяет конкретизировать круг вопросов, которые связаны с ЧМ и которые целесообразно предложить прикладникам-магистрантам.

Заметим, что курсы ЧМ 1 и ЧМ 2 заканчиваются зачётами, и уровень теоретической подготовки по бакалавриатскому курсу остаётся невыясненным. Поэтому возвращение к некоторым теоретическим вопросам ЧМ уже в рамках магистратуры (с присоединением к ним теории ЧМ ОПТ Ньютона) может сформировать серьёзный курс ЧМ ОПТ (для магистрантов).

Кроме того, в п. 1 и 2 были отмечены некоторые дополнительные вопросы курса ЧМ (например, построение квадратичных и кубических сплайнов, рассмотрение методов Рунге–Кутты более высоких порядков, ЧМ ДУ Адамса и методы Милна и другие вопросы), которые также могут быть полезны магистрантам-прикладникам.

О ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Ловягин Ю. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: lovyagin@fromru.com

Lovyagin Yu. N. On the teaching of mathematical logic. We consider the paradox that arises when teaching mathematical logic associated with the need to involve the concept of set. There are two ways to remove this contradiction.

Рассматривается парадокс, возникающий при преподавании математической логики, связанный с необходимостью привлечения понятия множества. Предлагается два пути для снятия этого противоречия.

1. Предварительные замечания. Практически все учебные пособия по курсу математической логики либо с самого начала, либо, начиная с какого-то места изложения, привлекают понятие множества. В идеальном случае множества предполагаются конечными, что не приводит к противоречию, но требует тщательно следить за тем, чтобы рассматриваемые множества были “стро-

имыми”. Иными словами, каждый элемент рассматриваемого множества рассматривается вместе с некоторой “эффективной процедурой” установление факта принадлежности множеству. И, точно так же, должен существовать столь же эффективный способ определить, что тот или иной объект не является элементом данного множества. С другой стороны, использование только конечных множеств не позволяет доказать теорему о полноте исчисления предикатов, ибо есть утверждения, истинные во всех конечных структурах, но ложные в некоторых бесконечных.

Необходимость фактической перечислимости рассматриваемых множеств диктует первоначально привлекать понятие конструктивного множества, что требует введения понятия алгорифма. Привлечение понятия алгорифма, однако, требует рассмотрения алфавитов — по сути дела конечных множеств. С другой стороны, сами свойства алгорифмов являются теоремами, которые следует формализовать в некотором языке. При этом понятие “эффективной процедуры” превращается в понятие алгорифма. Но теоремы об алгорифмах требуют рассмотрения специфической конструктивной логики или, по крайней мере, возможности выразить соответствующие понятия в классической логике. Говоря простым языком, “нужно писать формулы с кванторами и вычислять их истинностную оценку”. То есть мы попадаем в “порочный круг”: для того, чтобы описать логику нужно привлечь некоторую “металогiku”, которая является конструктивной логикой. А тогда “обычная” логика становится “частью” конструктивной, что представляется странным, ибо все факты логики конструктивной могут быть сформулированы в классической логике, а сами конструктивные множества с позиций аксиоматической теории множеств являются частями соответствующих актуальных множеств. Следует, однако, отметить, что конструктивный подход к логике и математике в целом разработан А. А. Мальцевым младшим и его школой [6, 9, 4]

Если же не привлекать понятие алгорифма, то можно аккуратно изложить теорию конечных множеств — например, как комбинаторику — и на её основе начать изложение курса математической логики. Здесь, однако, есть два момента, проявление которых приводит нас к уже описанному порочному кругу. Во-первых, это то, что для изложения теории конечных множеств тоже нужно “писать формулы с кванторами...”, что, как мы уже видели, требует “металогики” с вытекающими последствиями о введении понятия алгорифма, конструктивной логики и так далее... Вторым моментом в понятии конечного множества является связанная с неконструктивным определением множества противоречие “полумножества”. Такие объекты при актуальном подходе к понятию даже конечного множества в духе канторовской (наивной) теории приводят к понятию “первочеловека”. Парадокс заключается в том, что так как любое конечное подмножество множества натуральных чисел содержит первый (и последний) элемент, то в цепочке «Обезьянка Чарли → Сын Чарли → Сын Сына Чарли → ... Чарльз Дарвин» имеется “первый человек”. Но этот человек является “сыном обезьяны”. А так как сын обезьяны сам есть обезьяна, то “первочеловека” не существует. Естественно это противоречие возникает из-за слишком неопределённого понятия “быть человеком”, то есть фактически с неконструктивностью установления факта принадлежности (не принадлежности) объекта множеству. То есть снова мы вынуждены попадать в “порочный круг”.

Таким образом, напрашивается вывод о первичности понятия множества. Но, так как понятие множества требует “формул с кванторами”, требуется сначала изложить аксиоматическую теорию множеств, для которой явно указать алфавит и правила рассуждения, то есть начинать изложение следует с “языка теории множеств”, в котором сформулировать набор аксиом, необходимый для “разумного понимания множества”, а затем правила логического вывода, которые позволят “доказывать свойства множеств”. После этого можно использовать понятие множества так, как это делается в обычных курсах логики.

Снимая частично противоречие в изложении курса математической логики, мы, однако, не снимаем глобального противоречия в основаниях математики, связанного с непротиворечивостью исходной теории множеств. Есть предположение, что можно доказать непротиворечивость того фрагмента теории множеств, который описывает конечные множества. Это приводит нас к теории, аналогичной альтернативной теории множеств Воево́дского [1].

Завершая мотивационную часть, отметим, что большинство авторов руководств (как учебников и учебных пособий, так и книг) по математической логике излагают сначала в той или иной форме некий вариант теории множеств, обещая, что в том месте, где появится аксиоматическая теория множеств, недоговорки и неточности, связанные с “наивным” или недостаточно формализованным понятием множества будут устранены. Автор настоящих строк не является исключением — [5].

Предлагаемое ниже “руководство к руководству” по математической логике должно, по мнению автора, хотя бы частично восполнить описанный пробел и сразу снять противоречия, связанные с недостаточной формализацией понятия множества. По-видимому, данный текст следует либо помещать сразу, с самого начала учебного пособия, что представляется слишком радикальным, либо в каком-то месте основного текста, или даже в качестве приложения к основному пособию. Так, например, обзор аксиом геометрии вставлен в учебник А. П. Киселёва — [2].

1. Логика теории множеств.

2. Язык логики теории множеств. Мы опишем формализованный язык теории множеств. Мы используем конкретные буквы для обозначения переменных для множеств.

Определение 2.1. Язык $\mathcal{L}_{SET}$ содержит:

- переменные: x, y, z, u, v, w ; если мы говорим, что p — переменная, то предполагаем, что p совпадает с одной из букв x, y, z, u, v или w ;
- предикаты: $=, \in$;
- кванторы: $\forall, \exists$;
- логические связки: $\neg, \vee, \&, \supset, \equiv$.

За кванторами и логическими связками мы сохраняем их привычное название, равно как и за предикатами.

Определение 2.2. Формулой теории множеств называется

- атомарная формула — выражение вида $p = q$, $p \in q$, где p и q — переменные;

- выражения вида $\neg A$, $A \vee B$, $A \& B$, $A \supset B$, $A \equiv B$, где A и B — формулы теории множеств;
- выражения вида $\forall p A$, $\exists p A$, где A — формула теории множеств, p — переменная.

В последнем пункте выражение $\forall p$ или $\exists p$ называют кванторной приставкой, а формулу A — областью действия квантора (по переменной p).

Определение 2.3. Вхождение переменной в кванторную приставку или в область действия квантора по этой переменной называется связанным. Не связанное вхождение называется свободным. Переменная называется связанной или свободной в формуле, если она имеет соответствующие вхождения.

Определение 2.4. Переменная p является свободной для подстановки в формулу A вместо переменной q , если ни одно свободное вхождение q не находится в области действия квантора по переменной p .

3. Аксиомы теории множеств. Формулы со свободными переменными соответствуют свойствам — одного, пар, троек ... объектов. Объекты теории множеств называют множествами. Некоторые свойства, описывающие “поведение” множеств формулируются как “изначально заданные”. Они называются аксиомами. Выбор аксиом диктуется теми требованиями, которые накладываются на множества. Аксиомам теории множеств и посвящён настоящий параграф. Мы приводим некоторый минимальный набор аксиом, аналогичный первоначальному набору Цермело.

AE (аксиома экстенциональности) $\forall x \forall y (x = y \equiv \forall z (z \in x \equiv z \in y))$.

AS (аксиома степени) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv z \subset x)$, где $p \subset q$ есть сокращение для формулы $\forall w (w \in p \supset w \in q)$.

AP (аксиома неупорядоченной пары) $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \equiv u = x \vee u = y)$.

A $\emptyset$ (аксиома пустого множества) $\exists x \forall y \neg (y \in x)$.

A ∞ (аксиома бесконечности) $\exists x (\exists y (y \in x) \& \forall y (y \in x \supset \forall z (z \in y \vee z = y \supset z \in x)))$.

A $\cup$ (аксиома объединения) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv \exists u (u \in x \& z \in u))$.

AS (аксиома выделения) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \equiv z \in x \& \varphi(z))$ для каждой формулы теории множеств φ , содержащей единственную свободную переменную.

Приведённые аксиомы постулируют существование некоторых множеств, а также способ их построения. Аксиома выделения на самом деле является схемой. По-видимому, можно обойтись лишь конечным набором формул φ для этой формулы, таких, как формула для понятия декартова произведения, соответствия, функции, отношения и других основных понятий теории множеств. Подробно этот вопрос мы исследовать не будем.

Важной формулой, которой определяется множество с помощью аксиомы выделения является формула

$$\begin{aligned} \Phi(w) := & \forall x (x \in w \supset \forall y (y \in x \vee y = x \supset y \in w)) \& \\ & \& \forall v (\forall z (z \in v \supset \forall y (y \in z \vee y = z \supset y \in v)) \supset \\ & \supset \forall u (u \in w \supset u \in v)). \end{aligned}$$

Далее как в обычных руководствах по теории множеств вводятся стандартные понятия объединения, пересечения, упорядоченной пары, декартова произведения двух множеств.

Определение 3.1. Неупорядоченная пара (существование постулируется аксиомой AP) определяется соотношением $z \in \{x, y\} \equiv z = x \vee z = y$.

Определение 3.2. Упорядоченная пара $\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$, где $\{x\} := \{x, x\}$ — синглетон.

Определение 3.3. Объединение множества x — множество, определяемое соотношением $y \in \bigcup x \equiv \exists z (z \in x \& y \in z)$, $x \cup y := \bigcup \{x, y\}$.

Определение 3.4. Пересечение множества x — множество, определяемое соотношением $y \in \bigcap x \equiv \forall u (y \in x \supset z \in u)$, $x \cap y := \bigcap \{x, y\}$.

Определение 3.5. Понятие подмножества x множества y определяется как новый двухместный предикат $x \subset y \equiv \forall z (z \in x \supset z \in y)$, $\mathfrak{P}(x)$ — множество всех подмножеств множества x .

Определение 3.6. Декартово произведение множеств x и y определяется формулой $z \in x \times y \equiv z \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x \cup y)) \& \exists u \exists v (u \in x \& v \in y \& z = \langle u, v \rangle)$.

Отметим, что для определения пересечения и декартова произведения требуется аксиома выделения.

Общая схема определения (введения) множеств с помощью аксиомы выделения описывает следующее определение. По той же схеме вводятся и понятия пары (неупорядоченной, упорядоченной), объединения, пересечения и других. Для изложения логики и смежных вопросов достаточно введения в рассмотрение лишь конечного набора формул для определения множеств.

Определение 3.7. Пусть φ — формула теории множеств, имеющая по крайней мере одну свободную переменную. Будем фиксировать это записью $\varphi(p)$. Пусть, далее, a — некоторое множество. Аксиома выделения позволяет ввести в рассмотрение множество e (подмножество a), определяемое соотношением $x \in e \equiv x \in a \& \varphi(x)$. Будем обозначать множество e как $\{x \in a : \varphi(x)\}$.

4. Секвенциальное исчисление.

Определение 4.1. Пустой список — это «графичеки пустое место», т. е. набор, не содержащий ни одного знака, формулы, буквы... Пустой список формул будем обозначать Λ .

Определение 4.2. Список формул :: Пустой список | Список формул Формула.

Иными словами, пустой список формул является списком формул и если Γ — список формул, а φ — формула, то $\Gamma\varphi$ — список формул.

Определение 4.3. Секвенцией называется любое выражение вида $\Gamma \longrightarrow \Delta$, где Γ и Δ — списки формул.

Определение 4.4. Аксиомой называется любая секвенция вида $\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \longrightarrow \Theta\varphi\Psi$, где $\Gamma, \Delta, \Theta, \Psi$ — произвольные списки формул.

Определение 4.4. Правилем вывода называется либо фигура вида $\frac{S}{T}$, либо вида $\frac{SR}{T}$, где S, T, R — секвенции. Секвенции над чертой называются посылками, под чертой — заключениями.

Приведём основные правила вывода секвенциального исчисления:

$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Omega\Theta}{\Gamma\Delta \longrightarrow \Omega\neg\varphi\Theta}$	$\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Omega\varphi\Theta}{\Gamma\neg\varphi\Delta \longrightarrow \Omega\Theta}$
$\frac{\Gamma\varphi\psi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\varphi\&\psi\Delta \longrightarrow \Theta}$	$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\Theta \quad \Gamma \longrightarrow \Delta\psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\&\psi\Theta}$
$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta \quad \Gamma\psi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\varphi \vee \psi \longrightarrow \Theta}$	$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \vee \psi\Theta}$
$\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta\varphi\Omega \quad \Gamma\psi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}{\Gamma\varphi \supset \psi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}$	$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\psi\Omega}{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta\varphi \supset \psi\Omega}$
$\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta\psi\varphi\Omega \quad \Gamma\psi\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}{\Gamma\varphi \equiv \psi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}$	$\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\psi\Omega \quad \Gamma\psi\Delta \longrightarrow \Theta\varphi\Omega}{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta \equiv \psi\Omega}$
$\frac{\Gamma\varphi\psi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\psi\varphi\Delta \longrightarrow \Theta}$	$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\psi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\psi\varphi\Theta}$
$\frac{\Gamma\varphi\varphi\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta}$	$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\varphi\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi\Theta}$
$\frac{\Gamma\varphi[p]\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\exists q\varphi[q]\Delta \longrightarrow \Theta}$	$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi[p]\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\exists q\varphi[q]\Theta}$
$\frac{\Gamma\varphi[p]\Delta \longrightarrow \Theta}{\Gamma\forall q\varphi[q]\Delta \longrightarrow \Theta}$	$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi[p]\Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\forall q\varphi[q]\Theta}$

В последних четырёх правилах предполагается, что p и q являются переменными, при этом переменная p не находится в области действия квантора по переменной q . Кроме того, в предпоследнем правиле левого столбца и в последнем правого переменная p не является свободной ни в одной из формул списков заключения.

Таким образом, мы имеем дело со схемой аксиом и схемами правил вывода. Но имеется очевидный эффективный метод определения, является ли заданная секвенция аксиомой или нет. Точно так же есть эффективный способ определить, является ли фигура $\frac{S}{T}$, соответственно фигура $\frac{SR}{T}$ правилом вывода. Смысл правила вывода состоит в том, что секвенцию (пару секвенций) посылки правила вывода заменяют на секвенцию-заключение.

Определение 4.5. Будем говорить, что секвенция T непосредственно следует из секвенции S , соответственно секвенций S и R , если существует правило выбора с посылкой S , соответственно посылками S и R , и заключением T .

Определение 4.6. Вывод — это конечный упорядоченный список секвенций такой, что каждая секвенция в нём является либо аксиомой, либо непосредственно следует из секвенции (пары секвенций), имеющих меньший номер в списке. Секвенция называется доказуемой (выводимой), если она является

последней секвенцией некоторого вывода.

Следующая теорема устанавливает непротиворечивость исчисления секвенций.

Теорема 4.1. Секвенция $\longrightarrow$ не доказуема.

Доказательство. Очевидно, что данная секвенция не является аксиомой. Если бы она непосредственно следовала бы из какой-то секвенции (пары секвенций), то в ней либо появились какие-то логические связки или кванторы, либо оставались бы какие-то формулы. ■

Определение 4.7. Будем говорить, что формула φ доказуема в теории множеств, если существует конечный набор формул T , каждая из которых является с точностью до обозначения переменных и формул аксиомой теории множеств, такой, что доказуема секвенция $T \longrightarrow \varphi$.

Определение 4.8. Формула φ называется выводимой, если выводима секвенция $\longrightarrow \varphi$.

Определение 4.9. Правило вывода $\frac{S_1, S_2, \dots, S_l}{S}$ называется допустимым, если из доказуемости его посылок следует доказуемость его заключения.

Теорема 4.2. Допустимы правила: $\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \& \psi \Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \Theta}, \quad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta\varphi \& \psi \Theta}{\Gamma \longrightarrow \Delta\psi \Theta},$
 $\frac{\Gamma\Delta \longrightarrow \Theta \neg\varphi\Omega}{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta\Omega}.$

Доказательство. Рассмотрим первое правило. Пусть посылка правила доказуема. Тогда возможно, что она является аксиомой. Если как слева так и справа от стрелки имеется некоторая формула χ , отличная от $\varphi \& \psi$, то ясно, что эта же формула присутствует и слева и справа от стрелки в заключении правила. Но тогда и заключение правила является аксиомой. Если же посылка имеет вид $\Gamma_1\varphi \& \psi\Gamma_2 \longrightarrow \Delta\varphi \& \psi\Omega$, то следующая последовательность секвенций даёт вывод заключения нашего правила:

$\Gamma_1\varphi\Gamma_2 \longrightarrow \Delta\varphi\psi\Omega$ (аксиома), $\Gamma_1\psi\Gamma_2 \longrightarrow \Delta\varphi\psi\Omega$ (аксиома), $\Gamma_1\varphi \& \psi\Gamma_2 \longrightarrow \Delta\varphi\psi\Omega$. Последняя секвенция получается по правилу введения конъюнкции слева от стрелки из двух предидущих.

Пусть теперь посылка рассматриваемого правила непосредственно следует из какой-то секвенции (пары секвенций). Если применяемое на этом шаге правило не затрагивает формулу $\varphi \& \psi$ справа от стрелки, то мы можем, «удалив» связку конъюнкции в этой формуле, рассматривая вывод в обратную сторону, проследить за тем, что его построение не изменится, если вместо формулы $\varphi \& \psi$ написать формулу φ . Таким образом, заключение нашего правила получится применением на последнем шаге некоторого правила вывода.

Если же на последнем шаге доказательства посылки «образовалась» формула $\varphi \& \psi$ справа от стрелки, то это может быть тогда и только тогда, когда заключение рассматриваемого правила является посылкой для «образования» его посылки. То есть уже имеется в выводе. Тем самым, как и в предидущем случае, является доказуемым.

Аналогично доказывается и допустимость двух оставшихся правил. ■

Отметим, что можно доказать допустимость и некоторых других «обратных» правил (см., например, [3]).

Теорема 4.3. Допустимо правило $\frac{\Gamma\varphi\Delta \longrightarrow \Theta \quad \Gamma' \longrightarrow \Theta'\varphi\Omega}{\Gamma\Delta\Gamma' \longrightarrow \Theta\Theta'\Omega}$, называемое

правилом сечения.

Доказательство. Правило сечения играет важнейшую роль, однако его доказательство длинно и сложно. Оно проводится рекурсией по строению формулы φ . Для случая атомарной формулы допустимость правила сечения проводится рекурсией по строению вывода. В случае, когда одна из секвенций-посылок является аксиомой «высечение» проводится почти очевидно. Если же секвенция-посылка непосредственно следует из некоторой секвенции (пары секвенций), то «высечение» формулы φ можно провести в этих посылках и проследить за выводом вплоть до секвенции-заключения.

Если же формула φ не является атомарной, то, применяя к секвенциям-посылкам правила сечения обратные правила, исключая логические связки и кванторы, получаем формулу, имеющую более простое строение, чем φ , высекая которую и прослеживая вывод вплоть до секвенции-заключения, убеждаемся в её выводимости.

Однако, аккуратное проведение возвратной индукции требует применения обратных правил вывода, не все из которых являются допустимыми. Это касается правил «исключения» квантора существования справа от стрелки и квантора всеобщности слева. Но для доказательства допустимости правила сечения эти правила не нужны.

Ссылки на более подробное изложение имеются в [3] ■

Приведём без доказательства ещё одно допустимое правило вывода.

Теорема 4.4. Допустимы следующие правила добавления

$$\frac{\Gamma \Delta \longrightarrow \Sigma}{\Gamma \varphi \Delta \longrightarrow \Sigma},$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta \Sigma}{\Gamma \longrightarrow \Delta \varphi \Sigma} \quad \blacksquare$$

Определение 4.10. Формула φ называется **выводимой**, если выводима секвенция $\longrightarrow \varphi$.

Теорема 4.5. Невыводима формула $\varphi \& \neg \varphi$ для любой формулы φ . В частности нельзя доказать обе формулы φ и $\neg \varphi$.

Доказательство. Ясно, что если доказуемы как φ , так и $\neg \varphi$, то доказуема и формула $\varphi \& \neg \varphi$. Из доказуемости этой формулы, то есть доказуемости секвенции $\longrightarrow \varphi \& \neg \varphi$ по правилам «исключения» конъюнкции следует выводимость секвенций $\longrightarrow \varphi$ и $\longrightarrow \neg \varphi$, из которых по правилу сечения следует выводимость секвенции $\longrightarrow$ ■

Формула $\varphi \& \neg \varphi$ с точки зрения классической логики является ни чем иным как тождественно ложным утверждением. Поэтому теорему 4.5 вместе с нижеследующей теоремой 4.6 можно назвать теоремой о семантическом обосновании исчисления секвенций ■

Теорема 4.6. Какова бы ни была формула φ , выводима формула $\varphi \vee \neg \varphi$.

Доказательство. Рассмотрим аксиому $\varphi \longrightarrow \varphi$, применяя к ней правило введения отрицания справа от стрелки, получим секвенцию $\longrightarrow \varphi \neg \varphi$, к которой применим правило введения дизъюнкции слева от стрелки. В результате получим секвенцию $\longrightarrow \varphi \vee \neg \varphi$ ■

Остановимся подробнее на методе доказательства, который использовался в этом параграфе. Он называется методом возвратной индукции. Хотя метод индукции обычно связывают с понятием натурального числа — множество всех натуральных чисел обладает свойством индуктивности: вместе с каждым натуральным числом этому множеству принадлежи и его последователь (результат прибавления единицы); кроме того множество натуральных чисел является наименьшим (по включению) индуктивным множеством. Однако, доказательство методом возвратной индукции предполагает не индуктивность, а возможность из более простых объектов строить более сложные. Эта возможность определяется рекурсией. По рекурсии вводится понятие формулы, списка формул, вывода... Наличие рекурсии позволяет для каждого конкретного объекта повторить его построение «с самого начала»: для формул — это атомарная формула, для вывода — аксиома... Поэтому, если некоторое утверждение имеет место для базисного объекта и из предположения о том, что оно верно для всех объектов «более простого» вида, чем рассматриваемый, следует справедливость этого утверждения для рассматриваемого объекта, то есть, по крайней мере теоретическая, возможность проследить за «возникновением» данного объекта и на каждом шаге его построения проверить справедливость доказываемого утверждения. Это очень близко к методу полной индукции, но является более слабым методом.

Приведённое нами обоснование метода возвратной индукции во многом апеллирует к понятию пошагового построения. Это близко к понятию алгоритма, но не требует введения соответствующего формального понятия, ибо рекурсивные определения по сути и дают некоторый алгоритм. Можно постулировать этот принцип как основной принцип метарассуждений наряду с построением выводов секвенций..

5. Правила естественного вывода.

Определение 5.1. Пусть T — некоторое множество формул языка теории множеств. Если выводима секвенция $T' \rightarrow \varphi$, где T' — конечное подмножество T , то говорят, что формула φ доказуема в T . В этом случае пишем $T \vdash \varphi$.

Обозначим $\mathcal{SET}$ — множество всех аксиом теории множеств. Ясно, что определение 5.1 в частном случае определяет и $\mathcal{SET} \vdash \varphi$.

Докажем несколько метатеорем, которые с одной стороны обоснуют доказательство единственности множества-степени, объединения и других множеств, существование которых гарантируется аксиомами теории множеств, а с другой — являются естественными правилами доказательства фактов в любой теории. Правила естественного вывода применяются практически всегда, когда речь идёт о доказательстве и приравниваются к основным методам метарассуждений точно так же, как и метод возвратной индукции.

Теорема 5.1. Пусть φ и ψ — произвольные формулы теории множеств. Если $\mathcal{SET} \vdash \varphi$ и $\mathcal{SET} \vdash \psi$, то $\mathcal{SET} \vdash \varphi \& \psi$.

Доказательство. Имеем доказуемые секвенции $(T', T''$ — некоторые конечные части $\mathcal{SET})$ $T' \rightarrow \varphi$, $T'' \rightarrow \psi$. Применяя к ним нужное количество раз правило добавления, получим доказуемые секвенции $T'T'' \rightarrow \varphi$, $T'T'' \rightarrow \psi$. К последним двум секвенциям правило введения конъюнкции справа, получаем доказуемую секвенцию $T'T'' \rightarrow \varphi \& \psi$ ■

Аналогично доказываются и следующие утверждения (φ, ψ — произволь-

ные формулы теории множеств, x — переменная).

Теорема 5.2. Если $\mathfrak{SEI} \vdash \varphi$, то $\mathfrak{SEI} \vdash \varphi \vee \psi$ ■

Теорема 5.3. Если $\mathfrak{SEI} \vdash \varphi \vdash \psi$, то $\mathfrak{SEI} \vdash \varphi \supset \psi$. Более общо $\mathfrak{SEI} \vdash \Delta \varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{SEI} \vdash ((\&\Gamma) \supset \varphi) \Delta$ ■

Теорема 5.4. Если $\mathfrak{SEI} \vdash \forall x \varphi(x)$, то $\mathfrak{SEI} \vdash \varphi(x)$ для любой переменной x ■

Несколько более общий результат даёт

Теорема 5.5. $\vdash \forall x \varphi(x) \supset \varphi(x)$ ■

Теорема 5.6. $\vdash \varphi(x) \supset \varphi(x)$ ■

Теорема 5.7. Пусть $\vdash \varphi(x) \equiv \psi(x)$. Тогда для любой формулы теории множеств $\mathcal{A}$

1. $\vdash \mathcal{A} \& \varphi(x) \equiv \mathcal{A} \& \psi(x)$,
2. $\vdash \mathcal{A} \vee \varphi(x) \equiv \mathcal{A} \vee \psi(x)$,
3. $\vdash \neg \varphi(x) \equiv \neg \psi(x)$,
4. $\vdash \mathcal{A} \supset \varphi(x) \equiv \mathcal{A} \supset \psi(x)$,
5. $\vdash (\mathcal{A} \equiv \varphi(x)) \equiv (\mathcal{A} \equiv \psi(x))$.

Доказательство. По условию выводима секвенция

$$\longrightarrow \varphi(x) \equiv \psi(x).$$

Применяя к ней правило исключения эквивалентности получим две секвенции

$$\longrightarrow \varphi(x) \supset \psi(x) \quad \longrightarrow \psi(x) \supset \varphi(x).$$

Рассмотрим левую. К ней применим правило исключения импликации. Получится секвенция

$$\varphi(x) \longrightarrow \psi(x).$$

Применяя к полученной секвенции правило добавления, получим секвенцию

$$\mathcal{A} \varphi(x) \longrightarrow \psi(x),$$

из которой добавлением конъюнкции справа от стрелки получается секвенция

$$\mathcal{A} \& \varphi(x) \longrightarrow \psi(x).$$

Включим в вывод аксиому

$$\mathcal{A} \varphi(x) \longrightarrow \mathcal{A},$$

к которой применением правила введения конъюнкции справа от стрелки получается секвенция

$$\mathcal{A} \& \varphi(x) \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Теперь ясно, как получается секвенция

$$\mathcal{A} \& \varphi(x) \longrightarrow \mathcal{A} \& \psi(x).$$

Аналогично доказывается секвенция

$$\mathcal{A} \& \psi(x) \longrightarrow \mathcal{A} \& \varphi(x).$$

Последние две секвенции дают секвенцию

$$\longrightarrow \mathcal{A} \& \varphi(x) \equiv \mathcal{A} \& \psi(x).$$

Построенный вывод и доказывает первое утверждение. Остальные доказываются аналогично ■

Теорема 5.8. Если $\mathfrak{SEI} \vdash \mathcal{A}$ и $\mathfrak{SEI} \vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ для формул теории множеств, то $\mathfrak{SEI} \vdash \mathcal{B}$.

Доказательство. Имеем

$$T \longrightarrow \mathcal{A},$$

$$T \longrightarrow \mathcal{A} \supset \mathcal{B}.$$

Применяя ко второй секвенции правило исключения импликации получаем секвенцию

$$T\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}.$$

К последней и первой секвенциям применяем правило сечения. В результате выводима секвенция

$$T \longrightarrow \mathcal{B} \quad \blacksquare$$

Единственность множества, определённого некоторой формулой теории множеств и, как следствие единственность множеств, существование которых постулируется аксиомами, является прямым следствием следующей теоремы.

Теорема 5.9. Пусть $\mathfrak{SEI} \vdash \forall x (\varphi(x) \equiv \psi(x))$. Тогда $\mathfrak{SEI} \vdash \{z \in y : \varphi(z)\} = \{z \in y : \psi(z)\}$.

Доказательство. Так как по условию доказуема секвенция $T \longrightarrow \forall x (\varphi(x) \equiv \psi(x))$ для некоторого конечного семейства аксиом теории множеств, то по теоремам 5.5 и 5.8 доказуема секвенция

$$T \longrightarrow \varphi(x) \equiv \psi(x).$$

В силу аксиомы экстенциональности и теорем 5.5 и 5.8

$$\mathfrak{SEI} u = v \equiv \forall z (z \in u \equiv z \in v).$$

Считая, что $u = \{z \in ; : \varphi(z)\}$, $v = \{z \in y : \psi(z)\}$, не умаляя общности доказуемы секвенции

$$T \longrightarrow z \in u \equiv z \in y \& \varphi(z) \text{ и}$$

$$T \longrightarrow z \in v \equiv z \in y \& \psi(z).$$

С другой стороны ясно, что доказуема секвенция

$$T \longrightarrow \varphi(z) \equiv \psi(z),$$

поэтому по теореме 5.7 п. 1 доказуема секвенция

$$T \longrightarrow z \in y \& \varphi(z) \equiv z \in y \& \psi(z).$$

Таким образом доказуема секвенция

$$T \longrightarrow z \in u \equiv z \in v,$$

из которой по правилу введения квантора всеобщности получаем доказуемую секвенцию

$$T \longrightarrow \forall z (z \in u \equiv z \in v).$$

Отсюда ясно, что $\mathfrak{SEI} \vdash u = v$ ■

6. Натуральные числа в теории множеств.

Определение 6.1. Для каждого множества a обозначим $a' := a \cup \{a\}$. Множество a' называется последователем a .

Теорема 6.1. Существует множество $\mathbb{N}$, обладающее свойствами:

1. $\emptyset \in \mathbb{N}$;
2. $\forall x (x \in \mathbb{N} \supset x' \in \mathbb{N})$;
3. для любого множества A , обладающего свойствами 1 и 2 $A \subset \mathbb{N}$.

Доказательство. Существование такого множества следует из аксиомы бесконечности и аксиомы выделения: $\mathbb{N} = \{x \in a : \Phi(x)\}$, где Φ — формула со страницы 164, a — некоторое бесконечное множество ■

Рассмотрим множества $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$. Очевидно, что все эти множества являются элементами $\mathbb{N}$.

Определение 6.2. Обозначим $0 := \emptyset, 1 := \emptyset', 2 := \emptyset'', \dots$. Назовём эти множества натуральными числами.

Теорема 6.2. Элементами множества $\mathbb{N}$ являются натуральные числа и только они.

Доказательство. То, что натуральные числа принадлежат $\mathbb{N}$, следует из свойств 1 и 2. Обратное — из минимальности его по включению ■

Таким образом, множество $\mathbb{N}$ — есть множество всех натуральных чисел. Оправданием этого являются следующие понятия и факты.

Определим для натуральных чисел n и m операции сложения и умножения, а также отношение порядка.

Определение 6.3. $n + 0 = n, n + m' = (n + m)'$.

Определение 6.4. $n \cdot 0 = 0, n \cdot m' = n \cdot m + n$

Определение 6.5. $n \leq m$ тогда и только тогда, когда $\exists x (x \in \mathbb{N} \& n + x = m)$, $n < m$ тогда и только тогда, когда $n \leq m \& \neg (n = m)$.

Следующие утверждения доказываются стандартными методами по правилам естественного вывода.

Теорема 6.3. $\mathfrak{SEI} \vdash \forall x \forall y (x \in \mathbb{N} \& y \in \mathbb{N} \supset (x < y \equiv x \in y))$ ■

Теорема 6.4. С введёнными операциями и отношением порядка множество $\mathbb{N}$ является коммутативным ассоциативным линейно упорядоченным моноидом ■

Формулировка последнего утверждения предполагает, что в теории множеств изложены соответствующие понятия, но, во-первых, этого можно не делать, приводя расшифровки этих понятий, а, во-вторых, здесь уж обещание того, что это может быть выполнено, не является чем-то ошеломляющим и невыполнимым. Такая формулировка вызвана только экономией места и времени читателя.

7. Замечания о дальнейшем изложении. Для дальнейшего изложения требуются понятия отношения и функции, а также «умения» отличать конечные множества от бесконечных.

Определение 7.1. Соответствием между множествами a и b называется произвольное подмножество $s \subset a \times b$, если $a = b$, то соответствие называется отношением.

Определение 7.2. Соответствие f называется функцией, если $\forall x \forall u \forall v ((\langle x, u \rangle \in f \& \langle x, v \rangle \in f \supset u = v))$.

Определение 7.3. Биекцией между множествами a и b называется функция f такая, что

- $\forall x (x \in a \supset \exists y (y \in b \& \langle x, y \rangle \in f))$;
- $\forall y (y \in b \supset \exists x (x \in a \& \langle x, y \rangle \in f))$;
- $\forall u \forall v \forall y ((\langle u, y \rangle \in f \& \langle v, y \rangle \in f \supset u = v))$.

Определение 7.4. Множество называется конечным, если оно не биективно никакому своему собственному (непустому и не равному ему) подмножеству.

Теперь фактически всё готово для изложения основ математической логики в духе любого классического руководства. Изложим основные этапы.

1. Алфавиты и языки. Под алфавитом понимается некоторое конечное множество. Слово определяется рекурсивно, исходя из пустого слова. Используя натуральные числа определяется длина слова. Вводится понятие под слова, начала, конца слова, вхождения, интервала вхождения. Результат замены вхождения одного слова на другое.
2. По желанию можно вводить пропозициональный язык или сразу язык исчисления предикатов. В обоих случаях алфавит содержит переменные, логические связки. Во втором случае добавляются константы, предикаты, функторы и кванторы. Понятие формулы вводится рекурсивно. Далее излагается исчисление секвенций. Можно излагать и исчисление гильбертовского типа.
3. Излагаются понятия, связанные с интерпретациями и семантическим обоснованием исчисления. Желательно полнота исчисления. Для Понятия модели используется понятие множества, отношения и функции.
4. Теории первого порядка, включая формализованную элементарную теорию чисел и аксиоматическую теорию множеств. В последнем случае следует отметить, что множества, возникающие в теории Цермело–Френкеля — это «другие» множества, отличные от «изначальных» множеств. Недззя даже установить какое-либо соответствие между этими понятиями.
5. Отдельно, ввиду важности, выделяем вопросы, связанные с теоремой К. Гёделя о неполноте арифметики.

Дальнейшее изложение зависит от пристрастий излагающего. Но, по-видимому, такие вопросы, как вещественные числа, нестандартные модели арифметики и теории вещественных чисел, вопросы, связанные с теоретико-множественными гипотезами так или иначе следует включить.

Далее может быть переход к изложению теории алгорифмов, включая массовые проблемы и их неразрешимость и элементы теории сложности.

2. Словарные перечислимые множества.

В этой части мы, следуя идеям А. А. Маркова [4, 8], изложим введение в теорию алгорифмов. На основе понятия алгорифма вводится понятие множества как множества слов в некотором алфавите. Алфавиты и слова являются конструктивными объектами. Вводимые в рассмотрение перечислимые множества “заменяют” рассмотренные в части 1. множества. тем самым, отпадает необходимость в предварительном изложении логики теории множеств.

8. Алфавиты и слова.

Определение 8.1. Рассмотрим набор $\{ |, *, a \}$, который будем называть базисным алфавитом.

Мы считаем, что имеется возможность использовать любое потребное количество базисных символов, снимая с них копии.

Определение 8.2. Буквой будем называть конструктивный объект, определяемый схемой

$$\text{БУКВА}:: *a \downarrow \text{БУКВА}a$$

Иными словами, буквой является запись (конструктивный объект) вида

- $*a$;
- если b — буква, то ba является буквой;
- никаких других букв нет.

Определение 8.3. Натуральным числом называется запись (конструктивный объект) вида

- пустая запись (не занимает места, не содержит ни одного знака), обозначаемая для удобства через λ ;
- если n — натуральное число, то $n|$ является натуральным числом;
- никаких других натуральных чисел нет.

Таким образом, буквы образуют потенциально бесконечный набор $*a, *aa, *aaa, \dots$, а натуральные числа — набор $\lambda, |, ||, |||, \dots$.

Возможность использовать любое потребное количество базисных знаков даёт возможность написания любого потребного количества как букв, так и натуральных чисел.

Определение 8.4. Введём обозначения:

$$0 := \lambda, 1 := 0|, 2 := 1|, \dots, n+1 := n|, \dots;$$

$$a_0 := *a, a_1 := x_0a, \dots, a_{n+1} := x_na, \dots$$

Определение 8.5. Алфавитом будем называть произвольный (конечный) набор букв: $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$.

В дальнейшем алфавит будем обозначать символом $\mathcal{A}$, а буквы, из которых он состоит, — $\alpha, \beta, \dots$, если потребуется, то с индексами.

Отметим, что на самом деле достаточно всего двухбуквенного алфавита, но для удобства рассмотрения мы используем произвольные многобуквенные алфавиты.

Определение 8.6. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый алфавит. Словом в алфавите $\mathcal{A}$ называется

пустое слово, обозначаемое символом Λ , которое не содержит букв и не занимает места;
 если P — слово в алфавите $\mathcal{A}$, α — буква этого алфавита, то запись $P\alpha$ является словом в алфавите $\mathcal{A}$;
 других слов в алфавите $\mathcal{A}$ нет.

В силу замечаний о снятии копий с базисных символов имеется возможность любое слово написать любое потребное количество раз.

Тот факт, что конструктивный объект P является словом в алфавите $\mathcal{A}$, будем для удобства записывать $P \in \mathcal{A}^*$. Не следует, однако, отождествлять символ $\in$ с теоретико-множественным знаком принадлежности, ибо здесь речь (пока) не идёт ни о каких множествах. Через $\mathcal{A}^*$ здесь обозначена совокупность (потенциально бесконечная) всех слов в алфавите $\mathcal{A}$, которая в данном контексте тоже не является множеством.

Определение 8.7. Считаем, что $0 = 0$ и $|k| = |l|$ тогда и только тогда, когда $k = l$.

9. Полугруппа слов. Пусть $\mathcal{A}$ — некоторый алфавит. Определим на классе $\mathcal{A}^*$ алгебраические операции.

Определение 9.1. Равенство слов определяется рекурсией по строению:

- $\Lambda = \Lambda$;
- $\alpha = \beta$ тогда и только тогда, когда α и β являются одной и той же буквой алфавита $\mathcal{A}$;
- $P\alpha = Q\beta$ тогда и только тогда, когда $P = Q$ и $\alpha = \beta$.

Определение 9.2. Конкатенацией слов называется слово, определяемое схемой:

- $P\Lambda := P$;
- $P(Q\alpha) := (PQ)\alpha$.

Определение 9.3. Для двух натуральных чисел k, l считаем $k \leq l$ тогда и только тогда, когда для некоторого m $km = l$. Если при этом $m \neq 0$, то считаем $k < l$. Если $k \leq l$ и $l \leq k$, то считаем, что $k = l$.

Теорема 9.1. Для любых двух натуральных чисел k, l либо $k = l$, либо $k < l$, либо $l < k$.

Доказательство. Пусть $k \neq l$. Тогда если $k = 0$, то, очевидно, что $k < l$, ибо, очевидно, что $l \neq 0$ и, следовательно, “содержит по крайней мере одну палочку”. Пусть теперь $k \neq 0$. Если при этом $l = 0$, то $l < k$. Если же и $l \neq 0$, то положим $k = k'|$, $l = l'|$. Теперь следует сравнить k' и l' . Если, например, $k' < l'$, то для некоторого m $k'm = l'$. Тогда, очевидно, что $k'm| = l'|$. Теперь легко проверить, что $k'm| = km$ и, так как $l'| = l$, $k < l$ ■

Определение 9.4. Длина слова определяется рекурсией по строению:

- $|\Lambda| := 0$;
- $|P\alpha| := |P| + 1$.

Следующий принцип известен как метод возвратной математической индукции. За параметр индукции в большинстве случаев берётся некоторое натуральное число, что иногда приводит к путанице с принципом (полной) математической индукции, который сильнее принципа возвратной индукции и не

может быть доказан в рамках понятия натурального числа как “последовательности палочек”. Фактически метод возвратной индукции основан на рекурсивном построении, когда более сложные конструктивные объекты строятся на основе уже построенных конструктивных объектов путём добавления некоторых конструктивных же элементарных составляющих. Так буква строится из базисных букв, натуральное число — из “пустого места” и “палочек”, слово — на основе пустого слова путём приписывания букв... Весь процесс построения конкретного объекта может быть восстановлен пошагово, начиная с элементарного. Поэтому, если что-либо имеет место о начальном объекте (базисной букве, букве, пустом слове нуле...) и можно проверить, что данное свойство сохраняется при переходе от более простого объекта к более сложному, то это свойство имеет место для любого объекта данной категории. В этом и состоит суть доказательства методом возвратной индукции. Например, если мы хотим проверить, что некоторое утверждение справедливо для всех слов, то мы должны проверить его для пустого слова и доказать, что в предположении справедливости утверждения для всех слов строго меньшей длины, это утверждение проверяемо для данного слова. Так как проверка может быть проведена однотипно для любого слова, отсюда следует справедливость утверждения для всех слов.

Теорема 9.2.

1. Для любых натуральных чисел k, l, m
 $k = k$;
 если $k = l$, то $l = k$;
 если $k = l$, $l = m$, то $k = m$.
2. Для любых слов P, Q, R
 $P = P$;
 если $P = Q$, то $Q = P$;
 если $P = Q$, $Q = R$, то $P = R$.

Доказательство. Докажем утверждение 2. первое доказывается аналогично. Для пустого слова равенство $P = P$ есть определение. Если слово P имеет длину n и для всех слов строго меньшей длины равенство $Q = Q$ имеет место. Тогда имеем $P = P'\alpha$ для некоторого, возможно пустого, слова P' . Очевидно, что $|P'| < |P|$ и, следовательно, $P' = P'$. Тогда по определению равенства слов $P'\alpha = P'\alpha$. В силу произвольности P рефлексивность равенства доказана.

Для доказательства симметричности предположим, что $Q = \Lambda$. Тогда $P = Q$, очевидно возможно только, если $P = \Lambda$ и утверждение тривиально: $\Lambda = \Lambda$ влечёт $\Lambda = \Lambda$.

Пусть теперь $|Q| > 0$ и для всех слов строго меньшей длины утверждение доказано. Так как по условию $P = Q$, то $P = P'\alpha$ для некоторой буквы α . В силу непустоты Q $Q = Q'\beta$. В силу равенства $P = Q$ $P' = Q'$ и $\alpha = \beta$. таким образом, $Q' = P'$ по предположению и, следовательно, $Q'\alpha = P'\alpha$, то есть $Q = P$.

Транзитивность доказывать начнём со случая $Q = \Lambda$. Тогда ясно, что $P = \Lambda$ и $R = \Lambda$, ибо, очевидно, пустое и непустое слово не могут быть равны. Транзитивность в рассматриваемом случае становится тривиальностью: $\Lambda = \Lambda$ влечёт $\Lambda = \Lambda$.

Пусть теперь $|Q| > 0$ и для всех слов строго меньшей длины утверждение имеет место. Тогда пусть $Q = Q'\alpha$. Так же, как и в доказательстве симметричности в этом случае проверяется, что $P = P'\alpha$, $R = R'\alpha$. По определению равенства из $P = Q$ следует $P' = Q'$, $Q' = R'$. Отсюда по предположению следует, что $P' = R'$. теперь легко понять, что $P = R$ ■

Теорема 9.3. Для любых слов P , Q и R справедливо равенство $P(QR) = (PQ)R$.

Доказательство. Отметим сначала, что $P\Lambda = \Lambda P$. Пусть $R = \Lambda$. Тогда $P(QR) = PQ$. С другой стороны, $(PQ)R = PQ$. Тем самым транзитивность для базы проверена.

Пусть теперь $|R| > 0$ и для всех слов строго меньшей длины утверждение имеет место. Тогда $P(QR) = P(Q(R'\alpha)) = P(QR')\alpha = ((PQ)R')\alpha = (PQ)(R'\alpha) = (PQ)R$ ■

10. Нормальные алгорифмы. Зафиксируем некоторый алфавит $\mathcal{A}$. Будем считать, что к списку всех букв алфавита добавлен базисный символ $|$ и пустое слово в алфавите $\mathcal{A}$ не совпадает с натуральным числом ноль. Для записи числа ноль будем использовать слово $|$. Запись последующих натуральных чисел определяется естественным правилом: $1 = 0|$, $2 = 1|$, $\dots$

Введём обозначение $\mathcal{A}^-$ для алфавита, из которого удалён символ $|$.

Определение 10.1. Если для некоторых слов X' и X'' имеет место равенство $X = X'YX''$, то говорят, что имеет место вхождение слова Y в слово X .

Определение 10.2. Интервалом вхождения называется сегмент $[|X'|, |X'Y|]$, состоящий из всех натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $|X'| \leq n \leq |X'Y|$.

Таким образом, вхождения одного и того же слова упорядочиваются по левому концу интервала вхождения. В этом смысле ясен термин “первое вхождение”.

Определение 10.2. Простой схемой (правилом) подстановки называется запись $P \longrightarrow Q$, где P , Q — слова в некотором алфавите, $\longrightarrow$ — символ, не содержащийся ни в алфавите, ни являющийся комбинацией базисных букв, ни натуральным числом. Схема подстановки $P \longrightarrow_\bullet Q$ называется заключительной. При этом предполагается, что $\bullet$ не является ни натуральным числом, ни буквой алфавита, ни базисным символом.

Определение 10.3. Пусть X — слово в алфавите $\mathcal{A}$, $\Xi = P \longrightarrow Q$ — схема подстановки. Говорят, что Ξ применима к слову X и пишут $!\Xi X$, если существует по крайней мере одно вхождение P в X .

Определение 10.4. Пусть $!\Xi X$ и $X = X'PX''$ — первое (крайнее левое) вхождение P в X . Результат применения Ξ к X есть слово $\Xi[X] = X'QX''$.

Определение 10.5. Схемой алгорифма называется запись

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi_1 \\ \Xi_2 \\ \vdots \\ \Xi_n \end{array} \right.$$

Определение 10.6. Нормальный алгорифм (алгорифм Маркова) $\mathfrak{A}$, порождается схемой алгорифма по следующему правилу:

1. Пусть X — некоторое слово. Двигаясь по схеме алгоритма сверху вниз, проверяем верно ли, что $!\Xi_1 X, !\Xi_2 X, \dots$.
2. Если ни одна схема не применима к слову X , то алгоритм $\mathfrak{A}$ работу заканчивает и слово X объявляется значением алгоритма $\mathfrak{A}$ на нём и обозначается $\mathfrak{A}[X]$.
3. Пусть Ξ_i — первая (самая верхняя) схема подстановки такая, что $!\Xi_i X$. Тогда вместо слова X рассматриваем слово $\Xi_i[X]$ и, если схема Ξ_i — заключительная, то $\mathfrak{A}$ работу заканчивает, а слово Ξ_i объявляется значением алгоритма на слове X .
4. Если “сработавшее” правило не является заключительным, то полагаем $X := \Xi_i[X]$ и переходим к пункту 1.

Определение 10.7. Возможны три случая соотношения слова X в алфавите $\mathcal{A}$ и нормального алгоритма $\mathfrak{A}$:

- Алгоритм “не приступает” к работе, т. е. на самом первом шаге ни одна из схем подстановки не применима к слову X . В этом случае говорят, что алгоритм не применим к X .
- $!\mathfrak{A}X$ (алгоритм применим к слову X), то есть хотя бы одна схема подстановки применима к X , и “работает” до тех пор, пока либо не встретится заключительное правило, либо не образуется слово, к которому алгоритм не применим. В этом случае значением алгоритма считается получившееся слов, которое обозначается $\mathfrak{A}[X]$.
- Алгоритм “приступает” к работе, но в её процессе всегда образуется слово, к которому применима некоторая подстановка, при этом никогда не встречается заключительное правило. В этом случае говорят, что алгоритм работает вечно и никакого значения исходному слову не придаёт.

Теория нормальных алгоритмов систематически изложена в [4, 8]. В частности, имеет место

Теорема 10.1. Для любых алгоритмов $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ существует алгоритм, действующий по правилу

«if» $\mathfrak{A}[X] = P$ «then» $\mathfrak{B}[Y]$ «else» $\mathfrak{C}[Y]$, осуществляющий разветвление алгоритмов.

Доказательство. Опишем этапы работы алгоритма.

1. Запись слов X и Y через маркер;
2. Работа алгоритма $\mathfrak{A}$ над словом X .
3. Проверка равенства $\mathfrak{A}[X] = P$.
4. Работа либо $\mathfrak{B}$, либо $\mathfrak{C}$ над словом Y ■

Теорема 10.2. Для любых двух алгоритмов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, осуществляющий композицию алгоритмов: $\mathfrak{B}[\mathfrak{A}[X]]$.

Доказательство. Очевидно ■

11. Перечислимые множества.

Определение 11.1. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^-$ — такие же, как и в п. 10. Пусть, далее, $\mathfrak{A}$ — некоторый нормальный алгоритм, применимый к некоторым словам $\mathcal{A}^-$. При этом предположим, что в случае если $!\mathfrak{A}X$, то $\mathfrak{A}[X]$ — некоторое натуральное число. Предположим, далее, что если $!\mathfrak{A}X$ и $!\mathfrak{A}Y$ и $X \neq Y$, то

$\mathfrak{A}[X] \neq \mathfrak{A}[Y]$. В этом случае будем говорить, что алгоритм $\mathfrak{A}$ перечисляет слова алфавита $\mathcal{A}^-$.

В описанной ситуации в алфавите $\mathcal{A}$ выделяются слова, к которым применим алгоритм $\mathfrak{A}$.

Определение 11.2. Множеством (слов в алфавите $\mathcal{A}^-$), порождённым нормальным алгоритмом $\mathfrak{A}$, удовлетворяющим условиям определения 11.1, назовём класс всех слов X таких, что $!\mathfrak{A}X$. Множество, порождённое алгоритмом $\mathfrak{A}$ будем обозначать $\mathbf{A}$.

Отметим, что введённое понятие множества, порождённого нормальным алгоритмом, фактически совпадает с понятием рекурсивного множества — [7], стр. 139. В дальнейшем под термином *множество* понимаем именно множество слов, порождённое некоторым нормальным алгоритмом. Иными словами, $\mathbf{A}$ является множеством тогда и только тогда, когда существует алфавит $\mathcal{A}$ и нормальный алгоритм $\mathfrak{A}$ такой, что:

- каждое слово из $\mathbf{A}$ является словом в алфавите $\mathcal{A}^-$;
- для каждого слова X из $\mathbf{A}$ $!\mathfrak{A}X$ $\mathfrak{A}[X]$ — некоторое натуральное число;
- если $!\mathfrak{A}X$, то X является словом из $\mathbf{A}$;
- если X и Y — слова из $\mathbf{A}$ и $X \neq Y$, то $\mathfrak{A}[X] \neq \mathfrak{A}[Y]$;
- мы пишем $X \in \mathbf{A}$ и говорим, что X является элементом множества $\mathbf{A}$, тогда и только тогда, когда $!\mathfrak{A}X$.

Определение 11.3. Введём теоретико-множественные операции и отношения:

1. $X \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathbf{A}$ или $X \in \mathbf{B}$;
2. $X \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathbf{A}$ и $X \in \mathbf{B}$;
3. $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда каждый элемент $\mathbf{A}$ является и элементом $\mathbf{B}$;
4. $X \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathbf{A}$ и X не является элементом множества $\mathbf{B}$.

Отметим, что точно так же, как и во всех курсах теории алгоритмов можно доказать, что проблема применимости алгоритмически неразрешима, поэтому не существует алгоритма $\mathfrak{D}$ такого, что для любого слова X в алфавите $\mathcal{A}$, множества $\mathbf{A} !\mathfrak{D}X$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathbf{A}$. Следовательно, проблема корректности определения объединения, пересечения и разности множеств, а также понятия подмножества остаётся открытой. С другой стороны, если фиксировано некоторое множество, то существует алгоритм, распознающий свойство принадлежности слова множеству — алгоритм, определяющий данное множество.

Теорема 11.1. Существуют алгоритмы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{C}$ такие, что для любых слов X и Y

- $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}(X, Y)) = X$;
- $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}(X, Y)) = Y$;
- если $X = X'$ и $Y = Y'$, то $\mathfrak{C}(X, Y) = \mathfrak{C}(X', Y')$.

Доказательство. В качестве $\mathfrak{C}$ следует взять алгоритм, реализующий операцию конкатенации слов. Его работа может быть представлена следующими этапами:

побуквенная запись слова X ;

установка маркера;

побуквенная запись слова Y .

Алгоритмы $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ выделяют соответственно левую и правую часть конкатенации (до или после маркера) ■

Определение 11.4. Под функцией, действующей из множества $\mathbf{A}$ в множество $\mathbf{B}$ понимается алгоритм $\mathfrak{F}$ такой, что если $X \in \mathbf{A}$, то $!\mathfrak{F}X$ и $\mathfrak{F}(X) \in \mathbf{B}$.

Теперь, определив понятие эффективно заданного множества и эффективной процедуры преобразования элементов одного множества в элементы другого, можно вводить понятие переменной, константы, предиката и функтора в духе [5]. План реализации изложен в конце первого раздела.

Литература

- [1] Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2004. — 612 с.
- [2] Киселёв А. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1980. — 287 с.
- [3] Косовский Н. К. Элементы математической логики и её приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. – Л.: ЛГУ, 1981. — 192 с.
- [4] Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. – М.: Наука, 1973. — 418 с.
- [5] Ловягин Ю. Н. Элементарная математическая логика. Учебное пособие. – СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2007. — 132 с.
- [6] Марков А. А. О логике конструктивной математики // Вестник МГУ, сер. матем. мех., № 2. — 1970. — С. 7–29.
- [7] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [8] Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгоритмов. – М.: Наука, 1984. — 432 с.
- [9] Шанин Н. А. О конструктивном понятии математических суждений // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Т. 52. — 1952. — С. 226–311.

ИЗ ПРАКТИКИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОДХОДА К РЕАЛИЗАЦИИ СТРАТЕГИЙ

Мельников Ю. Б., Баженова А. В., Владимирова Е. Я.,
Рожин С. А., Русяева А. М., Рябых А. В.,
Тиссен И. И., Третьяков А. И., Христенко И. В.
Уральский федеральный университет
e-mail: UriiMelnikov58@gmail.com

Melnikov Yu. B., Bazhenova A. V., Vladimirova E. Ya., Rozhin S. A., Rusyaeva A. M., Ryabikh A. V., Tissen I. I., Tretyakov A. I., Khristenko I. V. From practice of application of the algebraic approach to realization of strategy. We consider an algebraic approach to realization of difficult strategy, e. g. an approach which includes a) system of basic element; b) system of typical transformations and typical combinations; c) approximation mechanism.

Рассматривается алгебраический подход к реализации сложных стратегий, т. е. подход, включающий в себя а) систему базовых элементов; б) систему типовых преобразований и способов комбинирования; в) механизм аппроксимирования.

До сих пор в сознании большого числа людей математика представляется в виде набора понятий и вычислительных процедур, обычно представленных алгоритмами и правилами. Но такое представление о математике является односторонним, более того, оно совершенно не актуально для людей, не являющихся профессиональными математиками. Даже в случае, когда математический аппарат активно используется для решения “нематематических” задач, как правило, вычислительный компонент математического аппарата “зашит” в программное обеспечение профессиональной деятельности и, таким образом, используется опосредованно.

Итак, с одной стороны, в обучении математике акцент необходимо переносить на другие компоненты математического аппарата: на понятийный аппарат, аппарат контроля адекватности используемых моделей (в частности, корректности процедур и достоверности результатов), и, по возможности, на методологический аппарат математики. С другой стороны, вычислительный аппарат составляет наиболее ценную часть математики, он во многом обеспечил ей авторитет, который вплоть до широкого распространения компьютеров представлялся незыблемым. Отказ от изучения вычислительного аппарата или даже существенное сокращение его объёма неминуемо приведёт к катастрофическим последствиям, в том числе для формирования целостного представления о мире, для формирования мышления, причём не только инженерного.

Предлагаемый нами выход состоит в интерпретации *алгоритма деятельности* как частного случая *плана деятельности*. Пункты такого плана представляются исполнителю либо как ссылки на конкретные последовательности действий (т. е. частные алгоритмы), либо как указание на некоторые цели без конкретизации способа достижения этих целей. Таким образом, процесс постро-

ения плана (например, плана решения задачи) в большинстве случаев можно трактовать как постепенную замену пунктов плана, воспринимаемых как цели, на фрагменты плана, в котором все пункты интерпретируются как ссылки на известные алгоритмы.

В качестве механизма построения плана мы рассматриваем **стратегию** [3], см. табл. 1.

Таблица 1.

Стратегия	Реализация стратегии	План деятельности	Выполнение плана
Механизм создания эталонной модели	Применение стратегии для создания эталонной модели	Эталонная модель деятельности	Деятельность, для которой план является эталонной моделью

Отметим, что применение стратегии не всегда сопровождается чётким разделением фазы построения плана и фазы его выполнения. Нередко процесс собственно построения плана чередуется с периодическим выполнением уже построенного фрагмента плана. Например, если один из пунктов плана представлен целью “решить получившееся уравнение”, то построение плана достижения этой цели возможно только при условии, что будет известен хотя бы тип этого уравнения (например, планы будут разными, если будет получено квадратное алгебраическое уравнение от одной переменной или линейное дифференциального уравнения первого порядка). Более того, даже если известен тип уравнения, конкретный способ его решения может определяться разными факторами. Например, попытка решить уравнение $x^2 - 92133x + 92132 = 0$ с помощью известной формулы приведёт к необходимости громоздких вычислений, в частности, при нахождении дискриминанта: $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{92133^2 - 4 \cdot 92132}$. Однако, использование формул Виета приводит к системе $\begin{cases} p + q = 92133, \\ pq = 92132, \end{cases}$ где p и q — корни исходного уравнения. Последняя система решается буквально “в уме”, в результате получаем решение исходного уравнения $\begin{cases} x = 1, \\ x = 92132. \end{cases}$

Для того, чтобы представлять сложные стратегии и обучать их использованию естественно применить алгебраический подход, который по нашему мнению [3] состоит из трёх компонентов: 1) системы базовых элементов; 2) набора типовых преобразований и способов комбинирования элементов; 3) механизма аппроксимирования, представления объекта в виде результата применения типовых преобразований к базовым объектам и контроля адекватности результата.

Например, алгебраический подход обычно применяется для задания и исследования числовых функций. В роли базисных элементов выступают основные элементарные функции (иногда обогащаемыми некоторыми специальными функциями, например, функциями Бесселя, квадратичными или кубическими сплайнами). К типовым преобразованиям и способам комбинирования относятся алгебраические операции, включая композицию (суперпозицию) функций и др. Механизмы аппроксимирования представлены такими формулами, как

формула Тейлора, формулы для разложения функции в ряд Фурье по ортогональной системе функций, правилами построения сплайнов, правилами использования метода наименьших квадратов для аппроксимирования функций и др. Другим примером применения алгебраического подхода является стратегия построения чертежа для задач школьного курса геометрии. В качестве системы базовых элементов выступают отрезки и дуги окружности. К преобразованиям и способам комбинирования относятся: построение многоугольника в виде замкнутой ломаной или части плоскости, ограниченной этой ломаной, построение окружности и др. Механизм аппроксимирования представлен правилами измерения длины линии или величины угла, правилами построения окружности, вписанной в треугольник или описанной около него, правилами построения биссектрисы угла, методы доказательства, что участок ломаной представляет собой отрезок прямой и т. д.

Для реализации алгебраического подхода к построению стратегий необходимо выделить систему базовых стратегий для соответствующих видов деятельности. Применение стратегии, основанное на алгебраическом подходе, состоит в последовательном комбинировании базовых стратегий. Результат применения каждой стратегии обычно является “стартом” для последующего этапа, т. е. для применения следующей базовой стратегии. Характер комбинирования стратегий зависит от того, насколько детерминированным является выбор стратегии на каждом шаге.

Порядок применения стратегий может быть фиксирован заранее, например, нередко решение текстовой задачи представляют в виде последовательности следующих этапов: 1) построение математической модели; 2) преобразование требования задачи в виде задания на поиск значений переменных; 3) решение полученной математической задачи; 4) интерпретация полученных результатов в терминах из той области, к которой относилась исходная задача. Выполнение этих этапов можно осуществлять в виде реализации соответствующих стратегий. Таким образом, в рассматриваемом примере последовательность применения стратегий предписана заранее. Такую схему комбинирования стратегий мы назовём **последовательной**.

Своеобразным “антиподом” последовательной схемы является такое комбинирование стратегий, при котором на каждом шаге выбор базовой стратегии заранее не фиксируется, этот выбор определяется спецификой сложившейся к этому моменту ситуации. Выбор конкретной стратегии определяется результатами анализа этой ситуации и оценки перспектив применения некоторого набора базовых стратегий. Данный вариант мы назовём **параллельной схемой комбинирования стратегий**.

Для многих классов целей существуют типовые стратегии поиска путей достижения этих целей, т. е. стратегий, предназначенных для построения соответствующих планов деятельности. Например, для типовой цели “найти все корни уравнения” можно построить стратегию построения плана решения уравнения. Для того чтобы описать эту стратегию необходимо определиться с типовыми способами задания стратегии, типовыми моделями стратегии. Примером является *иерархическая модель* [2], в которой стратегия разделена на три уровня.

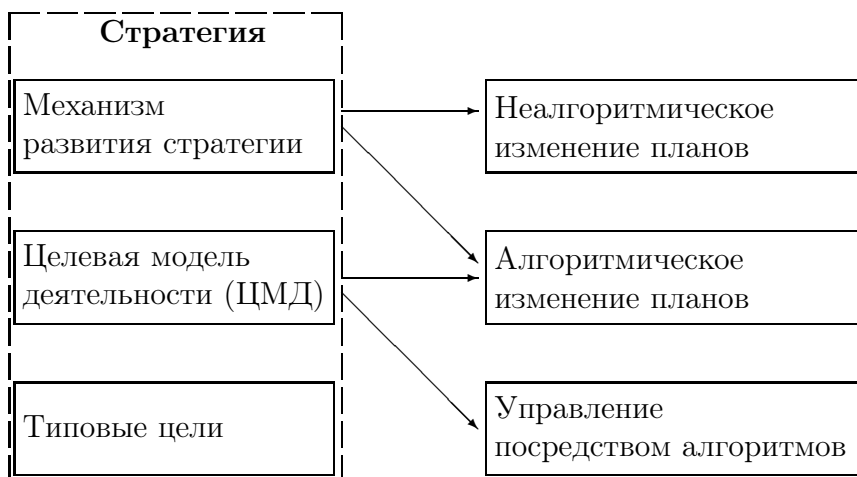


Рис. 1. К иерархической модели стратегии.

Элементами нижнего уровня являются цели, т. е. системы эталонных моделей результата деятельности. Мы будем считать, что эти цели являются типовыми для данного вида деятельности.

Элементы второго (среднего) уровня мы называем **целевыми моделями деятельности** (ЦМД). Целевая модель деятельности состоит из типовых целей, причём каждой типовой цели сопоставляется типовой план достижения этой типовой цели. Отметим, что, как мы отмечали выше, пунктами плана являются: а) вторичные цели, последовательное достижение которых обеспечит достижение исходной типовой цели; б) ссылки на известные алгоритмы достижения типовой цели; в) описания этих алгоритмов.

В случае, когда типовой план включает в себя только ссылки на известные алгоритмы или описание этих алгоритмов, то целевая модель деятельности называется **полной**.

В противном случае осуществляется переход к последнему, третьему уровню стратегии: механизму развития стратегии. Эго элементами являются методы, имеющие достаточноуниверсальный характер, например, метод математической индукции, метод трансфинитной индукции, метод восходящего анализа, метод нисходящего анализа и др.

Например, рассмотрим задачу [1, с. 48] “решить в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$ ”. Изначально цель представлена требованием задачи. Целевая модель деятельности (ЦМД) в этом случае представлена одним из двух планов: 1) свести к уравнению, для которого известен алгоритм решения; 2) подобрать одно или несколько решений и показать, что других решений не существует. Если исполнителю не известен типовой план сведения к уравнению с готовым алгоритмом решения, можно попробовать сначала подобрать решения. Перебор всех небольших (например, меньших шести) значений n позволяет обнаружить одно решение: $(n, k) = (2, 5)$. Остаётся либо найти все остальные решения, либо показать, что других решений нет. В данный момент, в отличие от исходной ситуации, учащемуся либо не известны типовые планы, либо их слишком много и неочевидны критерии выбора. Поэтому, возможно, потребуется применить механизм развития стратегии. В данном случае он включает в себя явный учёт целочисленности корней и связанной с этим типовой цели — уменьшении объёма перебора возможных вариантов до разумного числа вари-

антов, и использовании правил уменьшения объёма перебора: либо получении оценок сверху и снизу для значений переменных, либо использовании условий делимости нацело. Один из типовых планов достижения последней цели состоит в представлении левой или правой частей уравнения в виде произведения выражений. Выражение в левой части равенства нетрудно будет представить в виде произведения, если преобразовать исходное равенство: $n((n-1)! + 5) = k^2 - 13$. Однако дальнейшее применение выбранного типового плана затрудняется отсутствием общеизвестных признаков делимости на произвольное натуральное число. Применение механизма развития стратегии позволяет уточнить вторичную цель: надо представить левую или правую части равенства в виде такого произведения ab , что имеются эффективные признаки делимости, например, на a . Если $n > 5$, то $(n-1)$, делится на 5. Завершение решения задачи требует применения механизма развития стратегии, в данном случае — метода нисходящего анализа: $(k^2 - 13)$ делится на 5 только при условии, что последняя цифра этого числа — это 0 или 5. Значит, последняя цифра числа k^2 равна 3 или 8. Если m — последняя цифра числа k , то $k^2 = (10s + m)^2$, т. е. $k^2 = 10(10s^2 + 2sm) + m^2$, поэтому последняя цифра числа k совпадает с последней цифрой числа m . т. е. с 1, 4, 6 или 9. Ни одно из этих чисел не совпадает с 3 или 8, значит, других корней исходное уравнение не имеет.

Деятельность, управление которой представляется как последовательная реализация некоторых стратегий, имеет следующие особенности.

Во-первых, алгоритм жёстко предписывает последовательность конкретных действий, в то время как при применении стратегии исполнитель сам выбирает возможные последовательности действий и на каждом шаге определяет, выполнять ли то или иное действие.

Во-вторых, исполнитель, применяющий стратегию, должен обладать определённой квалификацией не только в той сфере, в которой действует, но и в области организации деятельности и управления ею. Поэтому самостоятельное планирование деятельности развивает не только компетенции в конкретной предметной области, но и повышает компетентность исполнителя в целом, позволяет, с одной стороны, ставить ему задачи во всё более общем, абстрактном виде, с другой стороны, формирует у него способность самостоятельно ставить цели, комплексно оценивать их адекватность.

В-третьих, алгоритм освобождает от ответственности за сделанные действия, так как исполнитель не имеет права их корректировать. Алгоритм рассчитан на определённый результат без взвешивания действий и их последствий, что может привести к бессмысленности его использования, поскольку не всегда заранее можно достоверно определить, приведёт ли данной алгоритм к достижению цели (говоря языком теории алгоритмов, “поддаётся ли входное слово данному алгоритму”). В противоположность этому успешная реализация стратегии и выполнение плана, разработанного самостоятельно, связана с необходимостью брать на себя ответственность за принимаемые решения.

В-четвёртых, реализация стратегии нередко сопряжена с необходимостью идти на риск, принимать решения, адекватность которых заранее неизвестна, а также с необходимостью постоянно корректировать свою деятельность, иногда даже возвращаться к уже пройденным этапам и выбирать другие решения, изначально представлявшиеся менее перспективными.

Из особенностей применения стратегии следуют следующие условия успешности обучения применению стратегий.

1. Обучаемые должны обладать компетенциями в области комплексного, многостороннего анализа ситуации, а также построения прогноза результатов деятельности, анализа адекватности этого прогноза, т. е. соответствующей системы моделей.

2. У обучаемых должны быть сформированы качества, необходимые для принятия конкретного решения, с учётом принятия ответственности за эти решения и их последствия.

3. Обучение реализации стратегий требует взвешенного отношения к ошибкам обучаемых, не сводящегося к однозначно негативной оценке ошибок. На этапе подготовки решений негативная оценка ошибки неприемлема. Более того, следует обучать совершать действия, чреватые ошибками, а в некоторых случаях идти на преднамеренные ошибки: рассматривать необоснованные предположения, применять метод доказательства “от противного”, рассматривать ситуации, изначально представлявшиеся невозможными.

Литература

- [1] ЕГЭ-2014: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / авт.-сост. И. В. Яценко, И. Р. Высоцкий; под редакцией А. Л. Семёнова, И. В. Яценко. – Москва: АСТ: Астрель, 2014.
- [2] Мельников Ю. Б., Поторочина К. С., Ткаленко Н. В. Стратегия как механизм планирования при обучении математике // Известия Российского государственного педагогического университета имени А. И. Герцена. – 2008. – № 9(48): Естественные и точные науки (физика, химия, современная техника и технология, естествознание, методика преподавания естественных и точных наук, математика). – С. 103–115.
- [3] Мельников Ю. Б., Поторочина К. С. Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и “предматематической” деятельности // Ярославский педагогический вестник, 2010, № 3: Физико-математические и естественные науки. – С. 19–24.

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ПРОФИЛЬНОЙ ШКОЛЕ И В ВУЗЕ

Оразбекова Л. Н.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Алматы

e-mail: orazbekova_ln@mail.ru

Orazbekova L. N. Succession of teaching mathematics in the profile school and in high school. The article discusses the possible solutions to the problem of designing the content of mathematics sectional profile school-high school, in the transition to 12-year education. A brief overview of the concept of succession, considered a manifestation of continuity in the content and methods of teaching mathematics.

Keywords: continuity, continuity of teaching mathematics, methodical system, doing synopsis on mathematics.

В статье рассмотрены возможные пути решения проблемы проектирования содержания математики в разрезе “профильная школа – вуз”, в условиях перехода на 12-летнее обучение. Сделан краткий обзор понятия преемственность, рассмотрено проявление преемственности в содержании и методах обучения математике.

Ключевые слова: преемственность, преемственность обучения математике, методическая система, ведение конспекта по математике.

После присоединения Казахстана к основным международным соглашениям в области высшего образования, в том числе Лиссабонскому “Соглашению по Признанию Квалификаций Относительно Высшего образования” (1997), Болонской Декларации (1999) появилась возможность интеграции в мировое образовательное пространство. При этом уровень школьного образования при поступлении в университет должен соответствовать требованиям этого образовательного пространства. В результате принятого закона “Об образовании” (1991 г.), государственного образовательного стандарта образования (ГОСО РК 2.003–2002) и проведенных реформ школьного образования, созданы разнообразные инновационные учебные заведения и накоплен определённый опыт по организации среднего образования. В мировой образовательной практике существует Европейский стандарт, рассчитанный на 12-летнее обучение. В Казахстане необходимость перехода на 12-летнее обучение определена в Государственной программе развития образования в РК на 2011–2020 годы. Правительством разработан поэтапный План мероприятий по переходу. В рамках данного перехода определено, что среднее образование, определяемое международной классификацией ЮНЕСКО как всеобщее базовое образование, будет состоять из 10 классов, и курсы по окончании последней ступени основной школы в системе 12-летнего обучения должны носить логический, завершённый характер. В старшей школе (11–12 классы) “Бейіндік мектеп” будет осуществляться широкая профилизация, нацеленная на поступление в вуз; они создаются при вузах, узкая профилизация осуществляется в средних специальных учебных заведениях, по окончании которых учащиеся получают какую-нибудь специальность [1, 2].

На перемены в среднем образовании Казахстана, вызванные обновлением научных знаний, быстрым темпом развития техники и технологий, изменени-

ями форм организации труда, многообразием новых узких специальностей и нехваткой тех навыков, которые востребованы на современном рынке труда, вузовское содержание образования должно адекватно реагировать. И эта необходимость возникает в первую очередь в процессе перехода с профильных школ в вузы, так как оно не базируется только на созданных и контролируемых государством стандартах, а должно учитывать интересы и потребности участников образовательного процесса. При разрешении этих вопросов возникает необходимость рассмотрения педагогической системы преемственности обучения математике в профильной школе и в вузе в едином развитии.

В научно-теоретическом плане актуальность данной проблемы определяется необходимостью разрешения следующих противоречий:

- между потребностью в теоретических обоснованиях проблемы преемственности в обучении математике в процессе перехода с профильных школ в вузы и недостаточным уровнем исследования этой проблемы в педагогической теории образования;
- между объективной необходимостью обновления содержания согласно смене парадигмы от “образования на всю жизнь” на “образование в течение всей жизни” и нежеланием отказа от традиционного содержания курса математики;
- между необходимостью адаптирования методов, средств и форм обучения на модель образования, основанного на результатах и не развитой организацией учебного процесса.

В связи с этим становится необходимой разработка принципиально новых подходов к обучению математике, как в профильной школе, так и в вузе, ориентированных на целостное развитие личности. Успешное обучение математике в вузе зависит не только от того, насколько глубоко и прочно овладеют выпускники профильных школ основными математическими знаниями, от степени выработанного у них умения и навыков, но во многом зависит и от степени адаптированности методической системы профильного обучения к вузовской, также от преемственного перехода содержания, организации методов и форм учебного процесса вуза. Это в свою очередь обуславливает выяснение применимости самого понятия преемственности.

Преемственность – связь между явлениями в процессе развития в природе, обществе и познании, когда новое, сменяя старое, сохраняет в себе некоторые его элементы. Преемственность есть одно из проявлений диалектики – закона отрицания отрицания и перехода количественных изменений в качественное [3].

Преемственность – связь между различными этапами или ступенями развития, сущность которой состоит в сохранении тех или иных элементов целого или отдельных сторон его организации при изменении целого как системы [4].

Преемственность в обучении состоит в установлении необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения. Преемственность также характеризует требования к знаниям и умениям учащихся на каждом этапе обучения, формам, методам и приемам объяснения нового материала и по всей последующей работе по его усвоению [5].

В книге “Преемственность в обучении математике” [6] собраны исследования по преемственности обучения в математике, где рассматриваются многообразные аспекты преемственности, начиная со связи между начальным и

средними классами и кончая преемственность в учебной работе школы и вуза. Статьи сгруппированы в направлениях: преемственность и внутрипредметные связи в обучении математике, преемственность и межпредметные связи в обучении, преемственные связи отдельных звеньев системы математического образования. Многие рассмотренные здесь проблемы остаются актуальными по сегодняшний день, так как основные фундаментальные линии в содержании математики не изменились и сохранились основные методы, средства и формы обучения математике. Если в то время основной задачей являлось не столько создание условий для накопления и усвоения определенного круга знаний, умений и навыков по математике, сколько подготовка детей к усвоению этих знаний, то в настоящее время эти задачи выдвигаются в виде парадигмы “образование в течение всей жизни”. В условиях разнообразия образовательных учреждений, интенсивного роста ИКТ и изменения содержания, система образования ещё больше нуждается в сохранении преемственности, о чём свидетельствует дальнейшее углубление и совершенствование этого понятия в исследованиях ученых-педагогов.

Р. М. Зайниев преемственность в образовании, в профессионально-ориентированном математическом образовании и в обучении математике определяет как общепедагогический принцип и во всех трёх сферах он описывает преемственность в связях, расширении, углублении и преобразовании соответствующих объектов. Например, преемственность в обучении математике, по мнению Р. М. Зайниева, – это дидактический принцип, требующий в обучении математике постоянного обеспечения неразрывной связи между отдельными математическими дисциплинами, разделами и темами обучения математике и внутри них; расширения и углубления математической культуры и математических компетенций, приобретенных на предыдущих этапах обучения; преобразования отдельных математических представлений, определений и понятий в стройную систему [7].

В. М. Туркина соглашаясь с мнением Э. А. Баллера, что слова “преемственность” применимо к развивающемуся объекту, выделяет критерии применимости этого понятия: говоря о преемственности, необходимо выделить развивающее целое и анализируя развивающее целое, необходимо установить связи, которые обеспечат целостность объекта при его изменении [8].

Некоторые исследователи преемственность в обучении рассматривают как дидактический принцип. Если исследование С. Я. Батышева направлено на установления преемственных связей в системе непрерывного образования между общим и профессиональным образованием, то в работе Ю. А. Кустова исследуется преемственность средней и высшей школы. Так, Ю. А. Кустов пишет: “Принцип преемственности – это категория дидактики, отражающая закономерности изменения структуры, содержания учебного материала и сочетания методов обучения, направленных на преодоление противоречий линейно-дискретного характера процесса обучения и отражающая способы реализации этих закономерностей в соответствии с целями обучения, развития интеллектуальных способностей молодежи и ее воспитания” [9].

Перегудов А. В. утверждает, что под преемственностью в обучении математике следует понимать принцип построения такого процесса обучения, который требует взаимосвязи и развития содержания, методов и форм обучения

математике, связи между положительным, заложенным у учащихся на предыдущих ступенях обучения математике, и новым знанием, что способствует совершенствованию процесса обучения, личности учащихся. По сути, преемственность – это непрерывность на границах различных этапов или форм обучения [10].

С. Г. Григорьев суть преемственности высшей и средней школы как особого психолого-педагогического явления связывает с тем, что учащийся как объект и субъект учебно-воспитательного процесса резко переходит из одной сферы обучения (деятельности) в другую. Первостепенная роль в сугубо динамическом процессе преемственности принадлежит целостным представлениям о личности старшеклассника, абитуриента, студента [11].

И. А. Иванов принцип преемственности ставит в основу при отборе содержания общего математического образования, говоря, что традиционное содержание обучения математике, сложившегося в течение длительного периода, отражает тот объём математических знаний, который, является фундаментом математической науки и сочетается с современными тенденциями развития отечественной и зарубежной школы [12].

Преемственность школьного содержания математики в исследованиях Н. Т. Темиргалиева заложена в том, что материал учебника должен быть подвергнут самому тщательному осмыслению с точки зрения выделения предельно малого объёма материала и обеспечения доступности, причем с таким расчётом, чтобы усвоивший данный учебник мог успешно обучаться в любом университете мира [13].

Изучая эти и другие исследования, мы пришли к выводу о том, что в вопросе создания методической системы обучения математике в профильной школе и в вузе, все компоненты системы (цели, содержания, методы, средства и формы) нужно рассматривать преемственно. По нашему мнению:

- в становлении личности нужно знать, уметь формировать и преемственно развивать те качества личности, которыми он будет пользоваться при решении конкретных учебных и жизненных ситуаций;
- в содержании обучения математике преемственно обосновать общие цели обучения математике в профильной школе и в вузе, отбирать и корректировать содержание, отражающий деятельность ученика, студента, педагога для достижения цели;
- в методах, средствах и формах использовать адаптированные компоненты вузовского обучения в школьной практике, а в вузе, на начальном этапе, преемственно перенять определённые школьные компоненты, совершенствовать, развивать до состояния, присущей вузу.

Проектирование педагогической системы обучения математике на разрезе “профильная школа – вуз” необходимый процесс, требующий поэтапного решения множества задач различного характера. В частности, на основе педагогической технологии проектирования учебного процесса В. М. Монахова [14] и исследованиям К. Кабдыкайырулы [15], автором проведено исследование, в результате которого было написано учебное пособие “Математика в экономике” для экономических специальностей. В учебном пособии теоретические материалы спроецированы в виде лекций, задания – в виде практических занятий, запланированных в виде аудиторных задач и заданий для самостоятельного ре-

шения (домашних заданий). Выявлены особенности поэтапного проектирования содержания в модуле и показана практическая реализация процесса на примере проектирования содержания теории вероятности и математической статистики для экономического профиля [16].

Рассмотрим проявление преимущества в содержании и методах обучения математике в профильной школе и в вузе. В вузовской практике очень часто наблюдается следующая ситуация. Не имеющий опыта фиксирования полученной новой информации, в частности, конспектирования лекции или решённых задач, первокурсник начинает скрупулезно записывать всё услышанное и написанное на доске. Все его действия будут направлены не на понимание и осмысление новых знаний, являющихся главной целью процесса обучения. Таким конспектом он не только будет пользоваться на последующих практических занятиях, при подготовке самостоятельной работы, при подготовке к коллоквиуму и к экзамену, а наоборот, у него усилится неприязнь к этому конспекту и к тому, кто это читал.

Умение конспектировать относится к личностным качествам студента и учитывая, что у него не один предмет и не одна лекция, нетрудно заметить к каким нервно-психологическим расстройствам это может привести. В учебном же процессе это приводит к цепи нежелательных последствий: нежеланию вести конспект, пропускать лекции, к плохой оценке на практических занятиях, недопуску к экзамену, к потере стипендии, потере гранта или к отчислению из ВУЗа.

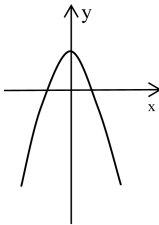
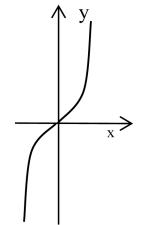
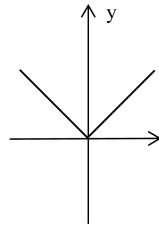
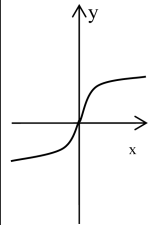
А если у студента сформирован навык вести конспект, он всю услышанную информацию будет записывать осмысленно, пропуская через себя. Этим конспектом он будет успешно пользоваться при решении как аудиторных, так и самостоятельных заданий, при подготовке к коллоквиуму и к экзамену. Главным отличием от разнообразных источников получения информации – учебников, разных учебно-методических пособий, электронных носителей, видео-аудио записи, конспект студента является его собственным продуктом, единственным, личным его творением. Пролистывая конспект, можно увидеть не только то, что было пройдено (содержание) и как было пройдено (метод), но и развитие студента, его деятельность на пути становления как личность. В этом смысле, к тому что было сказано П. М. Эрдниевым “Образование есть то, что остается после того, как будет забыто всё, что было выучено”, мы бы добавили конспекты, как явное отражение образования. Разве не в этом ли кроется секрет хранения наших студенческих конспектов, многократного обращения к нему, будучи уже преподавателями или лекторами. Разве не он был основой написания курсов лекций и методических пособий многими авторами.

Формировать навык ведения конспекта по нашему мнению следует начать на школьных уроках, в привычной для ученика обстановке. Не секрет, что в профильных классах характерно отсутствие единого учебника, полностью удовлетворяющего содержания конкретного направления профиля. И учителя часто используют другие источники. А всему классу это знание нужно будет объяснять в виде лекции, в адаптированной для понимания ученика форме. Объясняя ученику, что эту информацию он нигде не найдет, мотивировать его записать в тетради, а не только смотреть, слушать и понимать. Удивляться хорошему почерку, похвалить за аккуратное введение конспекта, порекомен-

довать другим, прибавить оценки и использовать другие меры, естественные для школьного процесса – всё это стимулирует ученика к ведению хорошего конспекта, и он приобретёт этот навык, столь необходимый ему в вузе.

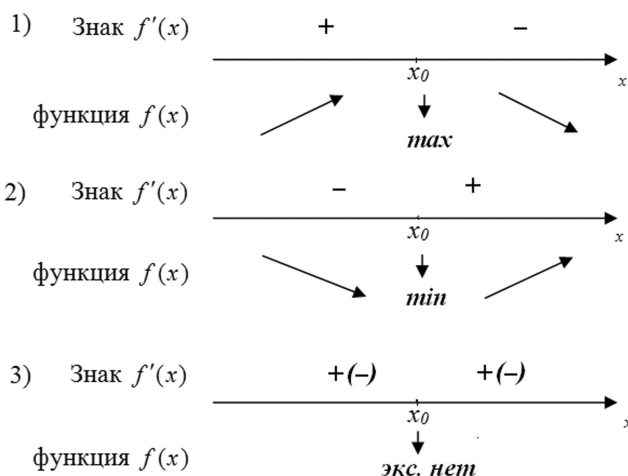
Содержание математики в этом промежутке строится по принципу систематизации полученных знаний и развития методологического мышления учащихся и студентов. Например, при изучении темы “Приложение производной при исследованиях и построении графика функций”, намечена цель – систематизируя знания студентов по функциям и её производным, развить эти знания на следующем уровне, формировать навык написания информации в схематичной форме и умения воспроизводить эту информацию на речевом языке. Для всех четырёх функций, взятых в качестве примера, точка $x_0 = 0$, является критической точкой. Но не во всех критических точках функция достигает экстремума (в таблице такими функциями являются $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt[3]{x}$).

Таблица 1. Исследование на экстремум функций в точке $x_0 = 0$

$y = 1 - x^2$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = x $	$y = \sqrt[3]{x}$
			
$y' = -2x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y'(0) = 0$	$y'(0) = 1$	$y'(0)$ нет	$y'(0)$ нет
Экстремум есть	Экстремума нет	Экстремум есть	Экстремума нет

Рассмотрение в сжатом виде не даёт студенту заскучать, а наоборот, должно заострить и обновить имеющиеся у его знания. Ведь вся таблица заполняется по ответам студентов, в процессе диалога. Показывая студенту возможные случаи при использовании необходимого условия экстремума, нужно вызвать у него потребность изучения достаточного условия экстремума. Внимание студента направлено на нахождение ответа на вопрос “при каком же условии мы однозначно можем определить существование экстремума?” В результате озвучивания теоремы, у студентов появляется запись следующего вида (формулировка теоремы с доказательством есть в учебнике).

Достаточное условие экстремума функций:



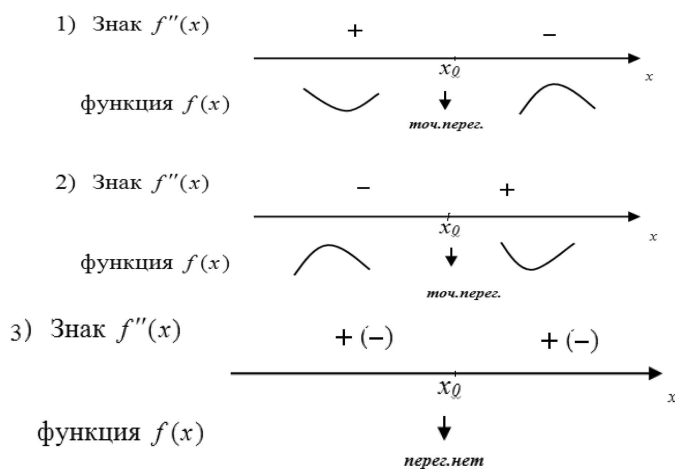
Если такую форму записи он использовал в школьной практике, он легко будет всё это записывать, использовать при исследовании и построении других функций. По этой схеме нетрудно закончить таблицу и получить окончательный ответ.

Продолжение таблицы 1. Исследование на экстремум функций в точке

$y = 1 - x^2$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = x $	$y = \sqrt[3]{x}$
Знак производной			
$y' : \xrightarrow{+ \quad -} \quad x_0=0$	$y' : \xrightarrow{+ \quad +} \quad x_0=0$	$y' : \xrightarrow{- \quad +} \quad x_0=0$	$y' : \xrightarrow{+ \quad +} \quad x_0=0$
$x_0=0$ – точка максимума	Экстремума нет	$x_0=0$ – точка минимума	Экстремума нет

Студенту легко будет исследовать функцию на выпуклость по отработанной схеме. Не вдаваясь в подробности, приводим только схематическое представление достаточного условия выпуклости функции.

Достаточное условие выпуклости функции:



Использование единой терминологий, символов и схем помогает студенту быстрее адаптироваться в вузовской системе обучения, в частности, формиро-

вать и развивать умения записывать информацию в краткой лаконичной форме, ведения конспекта по математике.

Литература

- [1] Концепция 12-летнего образования в Казахстане. – Астана, 2010.
- [2] Государственная программа развития образования Республики Казахстан на 2011–2020 годы. – Астана, 2010.
- [3] Большой энциклопедический словарь, т. 20, 1975.
- [4] Философский энциклопедический словарь, 1989.
- [5] Педагогический энциклопедический словарь, 1989.
- [6] Преемственность в обучении математике. Пособие для учителей. Сборник статей. Сост. А. М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1978. – 239 с.
- [7] Зайниев Р. М. Преемственность профессионально-ориентированного содержания математического образования в системе “школа-колледж-вуз”, автореф. дисс. на соискание учёного звания доктора пед. наук, 42 с.
- [8] Туркина В. М. Установление преемственных связей в преподавании математики в условиях развивающего обучения. Дисс. на соискание учёного звания доктора пед. наук. – СПб, 2010.
- [9] Кустов Ю. А. Преемственность профессионально-технической и высшей школы. – Свердловск. Издательство Уральского университета. – 1990, с. 28.
- [10] Перегудов А. В. Система интегрированных курсов как средство повышения уровня математической подготовки в профильной школе (на примере естественнонаучного профиля). Дисс. на соискание учёного звания кандидата пед.наук. – 178 с.
- [11] Григорьев С. Г. Преемственность в обучении математике учащихся средней школы и студентов экономического вуза. Автореф. дисс. на соискание учёного звания кандидата пед. наук. – М., – 2000. – 29 с.
- [12] Иванов И. А. Модель обучения алгебре и началам анализа для профилей естественнонаучного направления на основе логики прикладной математики. Дисс. на соискание учёного звания доктора пед. наук. – СПб, 2010. – 453 с.
- [13] Выступление Н. Темиргалиева на открытии Республиканской студенческой конференции по математике, информатике и механике. 27.11.2008 (РК, Астана, ЕНУ им. Л. Н. Гумилева)
- [14] Монахов В. М. Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. – Волгоград: Перемена, 1995.
- [15] Кабдыкайырулы К., Монахов В. М. и др. Новая педагогическая технология. Учебное пособие. – Алматы: Казахская академия образования им. Ы. Алтынсарина (РИК), 1999.
- [16] Оразбекова Л. Н. Проектирование содержания теории вероятностей и элементов математической статистики для экономических специальностей // Вестник КазНУ. Серия “Экономические науки”, № 6(88), 2011.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Рукшин С. Е., Суслина М. Е.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: vliuser@gmail.com

Rukshin S. E., Suslina M. E. About some aspects of training solving non-standard problems. Authors propose several methods of teaching high school students solving non-standard mathematical problems.

В статье рассматриваются некоторые методы обучения школьников и студентов решению нестандартных математических задач.

Часто преподаватели говорят о своих школьниках и студентах: “Обычной трудности задачи он решает замечательно, а вот чуть в сторону от программы – и ничего решить не может”! Или: “Эти задачи требуют для решения знаний, далеко выходящих за рамки программы!” Ещё чаще подобные заявления приходится слышать по поводу неудач на школьных и студенческих олимпиадах. В большинстве случаев – это искренние и хорошо растиражированные заблуждения: и на занятиях, как правило, не думают, работая по указанному шаблону, и задачи не требуют никаких специальных знаний. А вот специальной подготовки – действительно требуют. Методической – от педагога и психологической – от обучаемого. Где же взять время на такую подготовку к решению трудных или нестандартных задач, если учебных часов с трудом хватает на прохождение программы и можно ли это делать в рамках обычного школьного урока или студенческих практических занятий и семинаров? Попробуем разобраться с причинами этих заблуждений по порядку и на основе анализа причин сформулируем некоторые рекомендации.

Одна из этих причин связана с психологией и состоит в том, что для решения “олимпиадных” задач требуется гораздо более длительная концентрация внимания, чем на уроках или при выполнении домашних заданий. Если на семинаре или уроке можно успеть обсудить до полутора-двух десятков задач, то, например, на Международной Математической Олимпиаде участникам предлагается решить 3 задачи за 4,5 часа. Таким образом, на одну задачу даётся в 50–60 раз больше времени, чем на школьном уроке! Средства решения этой проблемы лежат в области педагогической психологии и хорошо известны: создание устойчивой внутренней и внешней мотивации, побуждающей к длительной, постоянной концентрации внимания на одной и той же (к тому же не поддающейся решению!) задаче вплоть до её решения или до окончания отведенного на неё времени.

Вторая причина трудностей, возникающих при решении “олимпиадных” задач, представляет малоисследованную область на стыке математики, психологии и методики преподавания. Дело в том, что часть задач относится, пользуясь шахматной терминологией, к “одноходовкам”: для их решения достаточно одной идеи или технического приема, ведущего непосредственно к полному ре-

шению. Но встречаются задачи – “многоходовки”, для решения которых одной, пусть даже самой блестящей идеи не достаточно. Для того, чтобы пройти весь путь от условия задачи до полного решения, необходимо разбить её на более простые задачи – “одноходовки”, каждую из которых приходится решать по отдельности. Искусство такого разбиения весьма редко проявляется стихийно, а задача обучения ему до сих пор не решена. Известен лишь один метод – применение “задач-серий”, описанный первым автором в начале 80-х годов в статье “Задачи-серии во внеклассной работе” (“Математика в школе”, 1982). Решение этой педагогической проблемы, видимо, ещё ждёт своего исследователя и является делом будущего.

Третья причина состоит в том, что обучаемый не ищет метод решения задачи самостоятельно: он обычно подсказан темой занятия, названием параграфа учебника или задачника, из которого взята задача. Именно в этом кроется причина такого явления, как “провал отсроченного контроля”, описанного еще на рубеже 70–80-х годов. Суть этого явления состоит в том, что на обобщающих или итоговых контрольных работах, состоящих из задач нескольких тем, а в еще большей степени – на экзаменах, обучаемый зачастую не может решить задачу, хотя такую же (а то и более сложную!) он без труда решал в домашних заданиях или в процессе изучения темы. Долгое время считалось, что причиной этого является забывание пройденного материала, а естественным “противоядием” – итоговое повторение с целью активизации пройденного материала. Истинная причина – отсутствие “подсказки” – долгое время оставалось в тени, что заводило в тупик попытки радикального решения проблемы. Но именно с этой из трёх указанных причин можно успешно бороться не только средствами педагогической психологии, но и с помощью методики преподавания, т. е. средства для воздействия доступны преподавателю. Вкратце перечислим эти средства:

1. Объединение задач не по принципу похожести условий, а по основной (или первой) идее решения. Особенно успешно работает этот метод при организации итогового повторения. Примером такой организации материала является, скажем, сборник “Теория чисел в задачах”, в котором вместо традиционного раздела “Диофантовы уравнения” задачи на решения уравнений в целых или рациональных числах разбросаны по десяти параграфам в соответствии не с видом задачи, а с методом её решения. В итоге последовательно проводится акцент на идею, на приоритет метода, а не внешний вид задачи и формулировку доказываемого факта.

2. Решение одной и той же задачи разными способами. Принцип “задача одна – решения разные”, последовательно проводимый на протяжении всего курса, нарушает жесткую связь “задача – подсказка – решение”, способствует возникновению новых ассоциативных связей в коре головного мозга. Эти связи впоследствии облегчают поиски решения по виду задачи, направляя поиск метода, идеи или технического приёма не по одному, а сразу по нескольким путям: по мере тренировки происходит всё более и более сознательный поиск метода и подсознательный отсев непродуктивных и “тупиковых” ассоциаций и, как следствие, поиск решения задачи ускоряется пропорционально богатству установленных ассоциативных рядов. Этот же принцип можно использовать при организации итогового повторения: объём необходимого и подлежащего акти-

визации материала настолько велик, что организовать полное, тотальное повторение не представляется возможным. Единственным выходом представляется не активизация знаний, а активизация возможно большего количества ассоциативных связей на основе имеющихся твердых базовых знаний, полученных при изучении отдельных тем. В этом, в своей основе, состоит метод подготовки команд к выступлению на олимпиадах высокого уровня: этап обучения состоит в сообщении базовых знаний, а этап тренировки – в активизации ассоциативных рядов на основе обсуждения всех возможных решений для довольно ограниченного набора задач.

3. Укрепление теоретических единиц в рубрикаторе задачника. В качестве простейшего шага, всё ещё сохраняющего подсказку, но делающего её вариативной, можно рекомендовать укрупнение тем, которым выдаётся набор задач для самостоятельного решения. Так, скажем, общий задачник составляется по теме “Равенство треугольников” или “Признаки подобия треугольников”, а не отдельно по каждому признаку равенства или подобия. При этом дальнейшая детализация подсказки и дифференциация вариантов на продуктивные и непродуктивные остаётся учащимся. Аналогичное укрупнение возможно при изучении большинства тем не только геометрии, но и тригонометрии, алгебры и анализа. Вместо отдельных задач на теорему синусов или теорему косинусов появляется раздел “тригонометрические методы решения треугольников”, а вместо биквадратных, возвратных и однородных уравнений – “решение алгебраических уравнений с помощью понижения их степеней”. В зависимости от целей и возможностей обучаемых, это укрупнение может дополняться тематическим указателем, соответствующим традиционным рубрикаторам. В необходимых случаях учащиеся могут снабжаться этим тематическим указателем в качестве средства индивидуализации и уровневой дифференциации обучения. Особенно эффективным становится последовательное проведение принципа укрупнения теоретических единиц в рубрикаторе задачника, если дополнить его параллельным изучением нескольких тем вместо последовательного общепринятого их изложения. Эта методика, в течении почти 40 лет успешно внедрявшаяся в системе дополнительно математического образования в Ленинграде – Санкт-Петербурге, уже применяется во многих городах России, являясь наиболее успешной методикой обучения одарённых детей и сильных студентов, которым тесно в рамках традиционного изучения математических дисциплин.

4. Построение цепочек задач, соединяющих основную формулу, теорему с её приложениями. Суть этого принципа состоит в том, что для большинства задач можно построить цепочку возрастающих по сложности задач, изложенных в такой последовательности, что каждый шаг от задачи к следующей психологически обоснован, и, несмотря на отсутствие явных подсказок, обучаемый может дойти до завершающих эту цепочку трудных задач. Поясним этот принцип на конкретном примере достаточно трудной задачи.

Задача. *Выясните, является ли простым число $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$?*

Формулировка носит чисто арифметический характер и доступна учащимся 5–6 классов, в которых изучается понятие простого числа, составного числа, признаки делимости и т. д. Однако, попытка решить её чисто арифметическими средствами, скорее всего, обречена на неудачу. Действительно, даже если мы правильно произведём все вычисления, то результат 732931 вряд ли нас

обрадует: таблиц простых чисел до такого значения у нас под рукой нет. Что дальше? Попробуем применить признаки делимости на 2, 3, 5, ... Нет, не делится! А вот ещё на занятиях кружка были признаки делимости на 7, 11, 13, 37. Не помогает! Начнем делить на все простые числа подряд (больше нас ничему не учили): на 2, на 3, на 5, на 7, на 11. Докуда? Неизвестно. Пока не разделится нацело или не дойдем до самого числа 732931. Перспектива не из приятных. Тем более неожиданным является решение: $x = 53$, $y = 83$, $z = 109$.

$$53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96 = xyz + (149 - x)(149 - y)(149 - z) = \\ 149(149^2 + xy + yz + xz - 149x - 149y - 149z) : 149.$$

Так как число имеет простой делитель, отличный от самого числа, то оно является составным. Всё!

У непосвящённых вид такого решения вызывает ужас – как до этого додуматься?! И как этому научить??? Тем не менее, в этом решении можно выделить несколько ключевых моментов:

- алгебраический вид решения;
- разбиение чисел на пары с равными суммами;
- обозначение известных чисел буквами;
- раскрытие скобок для разложения на множители.

Если каждая (или какие-то) из этих идей уже отрабатывались, то путь к такому решению не представляет никаких затруднений.

Если мы построим цепочку задач, формирующих по виду условия “нежёсткие алгоритмы”, применяющиеся в решении, то сама задача станет вполне доступной. Тогда в процессе обучения решению задач решения появляются не в “стерильном” виде, а сопровождаемые психологически достоверными мотивировками применяемых приёмов, и, независимо от условий, рано или поздно обучаемый сам начнет подсознательный поиск в условии задачи моментов истины, наталкивающих его на идеи решения.

Пример такой психологической мотивировки первого из ключевых моментов решения мы привели перед тем, как изложить решение. Действительно, если решение арифметической природы невозможно без сверхдлинных вычислений, то следует искать решение за пределами арифметики. Где? Естественно, в алгебре! Как можно установить, является ли число простым или составным? Разложить на множители! Как разложить? Если решение алгебраическое, то нужны алгебраические обозначения! Где их взять? Проанализировать характер и взаимосвязи чисел, входящих в наше выражение! Какие связи проще всего? Парные! У подготовленного ученика эти вопросы с естественными ответами проносятся настолько мгновенно, что он не успевает осознать, как он пришел к решению. В итоге мы не только обучим решению одной конкретной задачи, но и создадим прецедент для самостоятельного построения таких умозаключений, позволяющих по виду задачи определить неалгоритмические средства её решения.

А пройдя через цепочку задач, в которой каждый раз прибавляется ровно одна новая психологически достоверная идея, ученик приобретает ещё и чрезвычайно полезную иллюзию самостоятельности, которая пробуждает его к

решению более трудных задач, т. е. работает на повышение внутренней мотивации. Примеры построения таких цепочек для конкретных задач заслуживают отдельной подробной статьи, относящейся уже не к теоретическим основам, а к практическому обучению решению нестандартных. А, возможно, и цикла статей по различным темам школьного и университетского курса.

В заключение мы хотели бы привести лишь несколько простых задач и цепочек для учащихся 7 класса, которые иллюстрируют возможность проложить путь от школьной формулы до содержательной задачи. И, если уж разобранная выше задача показала нам возможности, которые предоставляет раскрытие скобок и вынесение за скобки общего множителя, то не меньшие возможности таит тема “Разложение на множители и формулы сокращенного умножения”. Начнем с самых простых задач – в шаге от учебника.

1. Какая из дробей больше: $\frac{101^2 - 99^2}{201^2 - 199^2}$ или $\frac{201^2 - 199^2}{301^2 - 299^2}$?
2. Сравните с 1 дробь $\frac{5932 \cdot 6001 - 69}{5932 + 6001 \cdot 5931}$.

Действительно ли это задачи на вычисления и на сравнение дробей с различными знаменателями?

3. Докажите что число $100^2 - 1$ составное.
4. Докажите что число 8999 составное.
5. Простое или составное число 359999? Если простое – докажите это утверждение, если составное – разложите его на простые множители.
6. Является ли число 57599 простым?

Интересно, что традиционными средствами сделать это весьма затруднительно – оба простых множителя – и 239, и 241, – достаточно велики, чтобы найти их за обозримое время руками.

7. Докажите, что число $100^2 + 201$ составное.
8. Докажите, что число $200^2 - 399$ составное.
9. Простое или составное число 8001? Если простое – докажите, если составное – разложите его на простые множители.
10. Докажите что число 27001 составное.
11. Докажите что число 343001 составное.
12. Найдите все простые p такие, что число $p^2 - 4$ тоже простое.
13. Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что $x^2 - y^2 = 19$.
14. Найдите все пары натуральных чисел x и y таких, что $x^2 - y^2 = 15$.
15. Докажите, что уравнение $x^2 = y^2 + 38$ не имеет натуральных решений.
16. При каких натуральных n уравнение $x^2 = y^2 + n$ имеет натуральные решения?

17. Докажите, что число $2^8 + 2^5 + 1$ является точным квадратом.
18. Докажите, что число $2^8 - 2^5 + 1$ составное.
19. Докажите, что число $2^{16} + 2^9 + 1$ составное и разложите его на простые множители.
20. Докажите, что число $2^{16} - 2^9 + 1$ составное.
21. Простое или составное число $2^8 + 2^5 \cdot 7^3 + 7^6$?

КОНЦЕПЦИЯ КОГНИТИВНОГО УЧЕБНИКА ПО “ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ” ДЛЯ СТУДЕНТОВ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Светлаков А. Н.

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: asas70@rambler.ru

Svetlakov A. N. The concept of cognitive books on “Ordinary differential equations” for students of non-mathematical specialties of Universities. The concept of cognitive books on “Ordinary differential equations” for students of non-mathematical specialties of Universities based on the ideas of A. M. Beloselsky-Belozersky, V. I. Arnold and D. Hilbert is considered.

Предлагается концепция когнитивного учебника по “Обыкновенным дифференциальным уравнениям” для студентов нематематических специальностей ВУЗов, основанная на идеях А. М. Белосельского-Белозерского, В. И. Арнольда и Д. Гильберта.

Преподавание высшей математики в техническом ВУЗе напоминает работу в условиях полного хаоса, когда процент непредусмотренных ситуаций становится более 20, так как мы имеем:

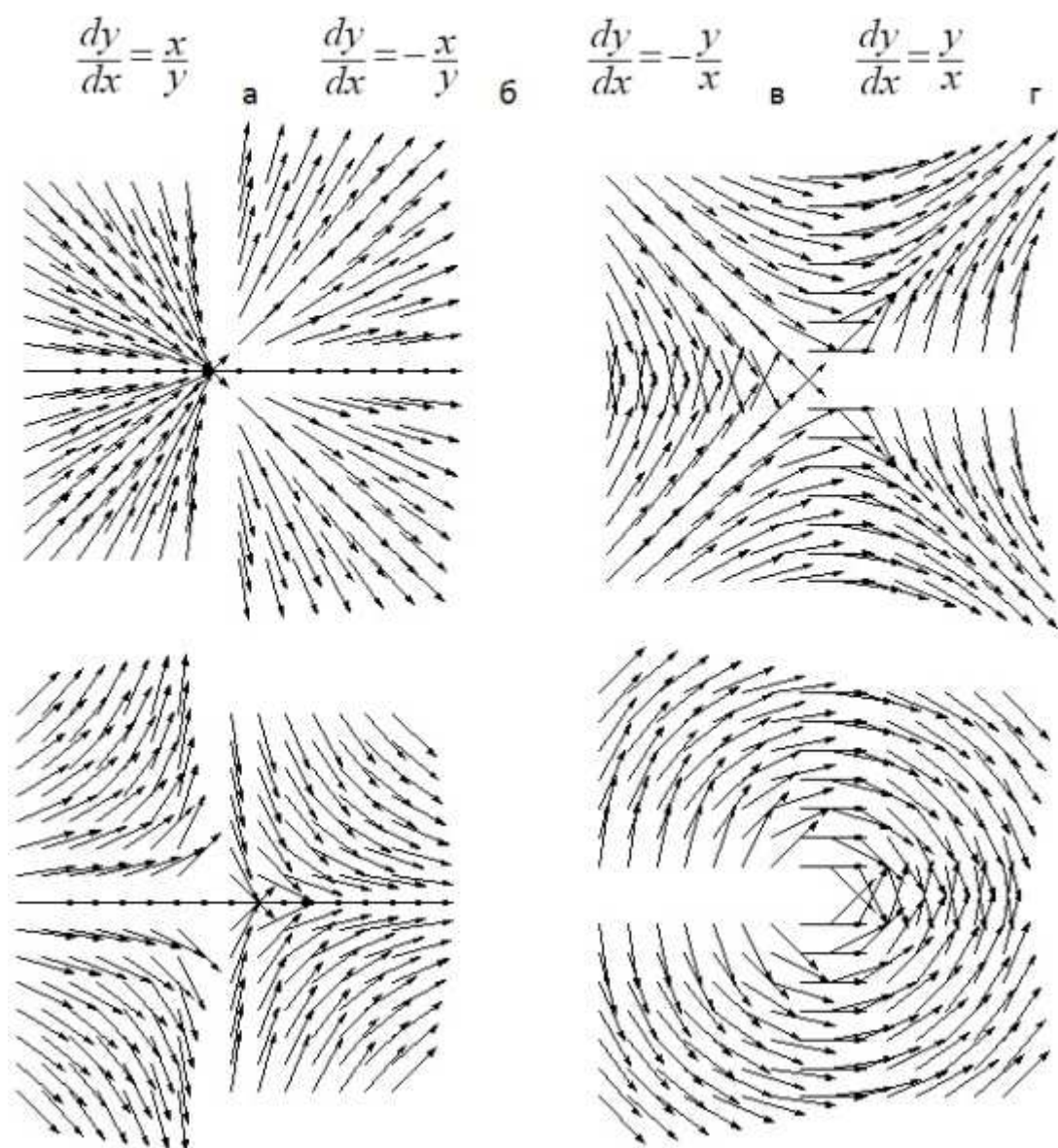
- очень широкий спектр начальной математической подготовки студентов, несмотря на наличие выпускных и прочих испытаний (это показывают данные десятилетнего тестирования);
- различные уровни мотивации студентов (боязнь отчисления, самолюбие, семейные традиции, а также существенную разницу их социально-бытовых условий);
- различную лево-правополушарную ориентацию мозга обучающихся (женщины и жители северных широт – люди преимущественно правополушарные; наличие переученных правополушарников);
- отсутствие у большинства обучаемых междисциплинарных связей;
- студенты находятся на разных уровнях знаний и умений (круги умений и навыков А. М. Белосельского-Белозерского [2]).

Анализируя сложившуюся ситуацию в преподавании, полагаем целесообразным прибегнуть к теории неформализуемых понятий [1], в частности, теории мягких модулей. Следующая предпосылка возникла из теории уровней знаний и умений кн. Белосельского-Белозерского [2] и, наконец, концепция призраков и подпорок Д. Гильберта также играет важную роль в исследовании ситуации полного хаоса. Для оценки ситуации на начальном этапе обучения важную роль играют периодические сьюпервижн-анкеты, помогающие осуществить обратную связь [5].

Был проведён статистический анализ учебников по “Обыкновенным дифференциальным уравнениям” на предмет наличия относительного количества

иллюстративного материала на единицу объёма пособия. Указанный коэффициент меняется в пределах от нуля до 15. В предложенном пособии на 150 страниц текста более 100 рисунков. Что касается тестов с рисунками, то, несмотря на достаточно широкое распространение математических систем, способных рисунки продуцировать, их практически нет. В предлагаемом пособии этому вопросу уделялось значительное внимание. Примеры таких тестов имеются в портале Матдиалог [6].

1. Какое уравнение соответствует СЗ картинке?
2. Какое уравнение соответствует СВ картинке?
3. Какое уравнение соответствует ЮЗ картинке?
4. Какое уравнение соответствует ЮВ картинке?



Отметим другие особенности обсуждаемого пособия:

– обращая внимание на то, что студенты с большим трудом связывают исходную задачу решения обыкновенных дифференциальных уравнений с полученным ответом, решения всех предлагаемых задач можно достаточно легко нарисовать. Для этого использовалась, в частности, теория инвариантов кривых второго порядка. Примеры применения этих идей имеются в работе [3];

– большое внимание уделяется предварительному анализу дифференциальных уравнений, в частности методу изоклин, а также нахождение характеристик уравнения по методу Вродецкого и Вада [7];

– выделяются методически важные дифференциальные уравнения, как-то уравнение Клеро и его модификации [3];

– в учебнике приводится решение некоторых научных проблем, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из области оптики, тепло- и массообмена.

Литература

- [1] Арнольд В. И. Жесткие и мягкие математические модели. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.
- [2] Непейвода Н. Н. Об уровнях знаний и умений. Логические исследования, вып. 8, 1999.
- [3] Светлаков А. Н. О роли когнитивной составляющей в преподавании высшей математики в технических вузах // Теория и практика: сб. науч. тр. / редкол.: А. Н. Берёза [и др.]. – Шахты: ГОУ ВПО “ЮРГУЭС”, 2009. – с. 176–185.
- [4] Светлаков А. Н., Куликов В. Н. Когнитивные ресурсы в преподавании естественнонаучных дисциплин // Международный конгресс по интеллектуальным системам и информационным технологиям AIS-IT’09. Труды конгресса. – М.: Физматлит, 2009, Т. 2., с. 212–214.
- [5] Светлаков А. Н. Обратная связь при обучении высшей математике // Сборник докладов Международной конференции “Физика в системе современного образования” ФССО-2013. – Петрозаводск, Изд-во ПетрГУ, 2013. – С. 341–345.
- [6] Пиаджио Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. – М.: ГТИ, 1929. – 347 с.
- [7] <http://mathdialogue.livejournal.com/>
- [8] <http://mathdialogue2.livejournal.com/>

Актуальные информационные системы и технологии моделирования

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Алифатдаева В. К., Кондрашков А. В.

Санкт-Петербургский государственный экономический университет

Санкт-Петербург

e-mail: ankon69@mail.ru

Alifatdaeva V. K., Kondrashkov A. V. On computational experiment with nonlinear dynamic model. In the paper some questions of realizing computational experiment on the base of nonlinear dynamic model by means of computer mathematics system are considered.

Рассматриваются некоторые вопросы реализации вычислительного эксперимента на основе нелинейной динамической модели средствами системы компьютерной математики.

Динамические модели (как с дискретным, так и с непрерывным временем) встречаются в различных предметных областях. Для определённости можно говорить о моделировании процессов в экономике [1] или в биологии [2]. Нередко авторы работ по математическому моделированию экономических процессов [3] заимствуют подходящие динамические модели из биологии.

Пусть некоторый процесс допускает описание с помощью 2-х наблюдаемых предметных величин x_1 и x_2 . В этом случае динамическая модель (с использованием непрерывной шкалы времени) приобретает вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = F(x; b), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2)$ — вектор «*переменных состояния*», $F = (F_1, F_2)$ — гладкое векторное поле в $\mathbb{R}_x^2$, $\dot{x} = dx/dt$, t — время, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ — вектор «*параметров идентификации*». Выбор общего вида выражений F_1 и F_2 с учётом специфики предметной области является прерогативой предметного исследования. Для пользы дела введём «*пространство состояний*» $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}_x^2$ и «*пространство идентификаций*» $\mathbb{I} = \mathbb{R}_b^m$. Ниже через $x = \varphi(t; y)$ обозначается теоретическое решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0; y) = y \in \mathbb{S}$ при $t = 0$.

Основным источником фактической информации о моделируемом процессе служат данные наблюдений, представимые в виде таблиц чисел (временных рядов). После достижения определённости в выборе общего вида системы (1) возникают дальнейшие задачи, каждая из которых может оказаться трудоёмкой в связи с большим объёмом вычислений.

В частности, одна из таких задач состоит в идентификации динамической модели (1). В этой задаче требуется определить оптимальное значение вектора

$b \in \mathbb{I}$ с использованием имеющихся наблюдаемых данных о процессе. Требуемая оценка $\hat{b} \in \mathbb{I}$ может быть получена путем применения *метода наименьших квадратов* (МНК).

Другая задача связана с получением разбиения пространства состояний $\mathbb{S}$ на фазовые траектории данной системы (1). Здесь точным ответом служит «теоретический фазовый портрет системы» (1) как семейство фазовых траекторий $P_b := \{x = \varphi(t; y) : y \in \mathbb{S}\}$. Математические методы исследования моделей вида (1) в значительной мере основываются на качественной теории дифференциальных уравнений [4]. Качественная структура фазового портрета определяется *особыми решениями* (состояниями равновесия, предельными циклами, сепаратрисами), а также поведением траекторий вблизи этих объектов и в окрестности бесконечно удаленной точки.

Если система (1) нелинейная, то аналитические методы её исследования могут оказаться малоэффективными. В связи с этим имеет смысл рассмотреть некоторые полезные возможности исследования на основе вычислительного эксперимента (ВЭ). Очевидно, что с использованием численных методов всегда можно определить отображение вида

$$\mathbb{I} \ni b \mapsto \tilde{P}_b,$$

где $\tilde{P}_b$ — это множество, составленное из конечного числа «приближённых траекторий» $x = \tilde{\varphi}(t; y)$, каждая из которых может быть получена как решение дискретного аналога задачи Коши для системы (1), с последующей интерполяцией. Объект $\tilde{P}_b$ дает некое «приближённое» представление о фазовом портрете P_b при фиксированном значении вектора b .

Чтобы несколько систематизировать вычисления, целесообразно выделить такое семейство $\{M_k\}$ открытых областей $M_k \subset \mathbb{I}$, что каждому условию принадлежности $b \in M_k$ отвечает определённый вариант поведения фазовых траекторий. Фактически такие области $\{M_k\}$ могут быть получены с помощью некоторого семейства $\{H_l\}$ гладких гиперповерхностей $H_l : h_l(b) = 0$. При этом каждая из областей $\{M_k\}$ рассматривается как множество с гладкой или кусочно-гладкой границей ∂M_k , которая составлена из кусков гиперповерхностей $\{H_l\}$. Тем самым выделенное семейство $\mathcal{M} := \{M_k\}$ становится «почти разбиением» пространства идентификаций $\mathbb{I}$. Одна из задач ВЭ может состоять в получении одного или нескольких приближенных фазовых портретов $\tilde{P}_b$ ($b \in M_k$) для каждой компоненты $\{M_k\}$ почти разбиения $\mathcal{M}$.

В порождающее семейство $\{h_l(b)\}$ входят те или иные числовые характеристики особых решений. (Полный состав семейства определяется конкретными целями предметного исследования.) Ниже в качестве примера рассматриваются числовые характеристики отдельно взятого состояния равновесия.

При фиксированном $b \in \mathbb{I}$ состояние равновесия $z = (z_1, z_2)$ определяется как решение уравнения $F(z, b) = 0$. Введем матрицу Якоби $F'(x; b) := (\partial F_i / \partial x_j)$ и её инварианты

$$J_1(x; b) := \text{tr } F'(x; b), \quad J_2(x; b) := \det F'(x; b), \quad \Delta := J_1^2 - 4J_2,$$

где $\Delta(x; b)$ — дискриминант квадратного уравнения $\det(F'(x; b) - \lambda E) = 0$. Пусть имеется гладкое векторное выражение $z(b)$, которое удовлетворяет урав-

нению $F(z(b); b) = 0$ (в некоторой области пространства $\mathbb{I}$). Этой ветви состояний равновесия отвечает тройка числовых характеристик:

$$h_1(b) := J_1(z(b); b), \quad h_2(b) := J_2(z(b); b), \quad h_3(b) := \Delta(z(b); b).$$

По теории устойчивости комбинация знаков выражений $h_1(b)$, $h_2(b)$, $h_3(b)$ определяет характер поведения фазовых траекторий вблизи состояния равновесия $z(b)$. Аналогичные тройки числовых характеристик могут быть составлены для всех остальных состояний равновесия, находящихся как внутри пространства $\mathbb{S}$, так и на его границе $\partial\mathbb{S}$.

Данный ВЭ может быть реализован эффективно с использованием одной из систем компьютерной математики (СКМ). Сюда относятся такие широко известные системы, как *Mathematica*, *Mathcad*, *Maple*, *MATLAB*, и др. Для целей ВЭ выбор конкретной СКМ не имеет принципиального значения, коль скоро все эти системы реализуют компьютерные технологии в математике, и предназначены для решения математических задач.

В настоящее время программный продукт *Mathematica* (от компании Wolfram Research) является наиболее эффективным и «прозрачным» для пользователя. Первоначальные представления о возможностях системы можно получить на главном сайте www.wolfram.com. Кроме того, на другом сайте Wolfram Demonstrations Project (<http://demonstrations.wolfram.com>) можно найти широкий набор небольших «демонстраций», визуализирующих и представляющих в интерактивном режиме различные идеи целого ряда областей науки.

Для программирования рассматриваемого ВЭ система *Mathematica* может предложить широкий выбор тех или иных средств в формате встроенных функций. В частности, сюда относятся:

Численные решатели систем алгебраических уравнений;

Численные решатели систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием начальных условий;

Средства визуализации различных геометрических объектов 2D (в том числе отдельных кривых, и потоков интегральных кривых векторных полей);

Средства динамической интерактивности (интерактивные манипуляторы, элементы управления, язык динамической интерактивности, ...).

Данные технологии позволяют эффективно строить интерфейс ВЭ в соответствии с требованиями проводимого предметного исследования. В заключение стоит выделить возможные области применения: обеспечение учебного процесса демонстрационными материалами по ряду дисциплин; обеспечение ВЭ при моделировании конкретного процесса.

Литература

- [1] Колемаев В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 399 с.
- [2] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. – М.: Физматлит, 2010. – 400 с.
- [3] Лебедев В. В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. – М.: «Изограф», 1997. – 222 с.

- [4] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.
- [5] Воробьев Е. М. Введение в систему символьных, графических и численных вычислений «Математика-5». – М.: «ДИАЛОГ-МИФИ», 2005. – 368 с.

УДК 004.942

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Батюков А. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: batsun@gmail.com

Batyukov A. M. About one of the picture's analysis method. An optimization of the algorithm to construct a stationary flow on a graph, which is applied to classification of digital images, is considered. An adaptation of the algorithm for multicore systems by the image partitioning is discussed. The dependence of calculation rate on the number of partition elements is investigated. We also estimate the algorithm time complexity and give the results of numerical experiments.

В работе рассмотрена оптимизация алгоритма построения стационарного потока на графе, применяемого для классификации изображений. Указан способ адаптации алгоритма к использованию на многоядерных вычислительных системах путем разбиения исходного изображения на смежные области. Исследован вопрос зависимости скорости вычислений от числа областей. Дана оценка сложности базового и оптимизированного алгоритмов. Приведены результаты численных экспериментов.

Введение. Для исследования и классификации изображений могут быть использованы различные методы, основанные на текстурном, морфологическом и фрактальном анализе, а также их всевозможных сочетаниях. Примеры таких классификаций можно найти в [1]. Одним из используемых для классификации методов является метод построения стационарного потока на графе, описанный в [2]. Этот метод основан на представлении исследуемого изображения в виде ориентированного графа и построения на нем марковской цепи, определяемой по интенсивности пикселей. В работе [3] представлен алгоритм классификации изображений методом построения стационарного потока на графе, рассмотрено видоизменение этого алгоритма для организации параллельных вычислений и приведено сравнение адаптированного алгоритма с базовой реализацией. В данной работе исследован вопрос об эффективных параметрах указанного алгоритма распараллеливания вычислений.

Постановка задачи. Рассмотрим изображение как решётку пикселей $x(i, j)$. Каждой точке решетки сопоставляется значение интенсивности пикселя $0 < I(i, j) < 256$. Рассмотрим окрестность ближайших соседей пикселя,

состоящую из 4 пикселей (можно рассмотреть окрестности и из другого числа пикселей). По изображению строится ориентированный граф, каждая вершина которого соответствует пикселю решётки. Всем вершинам приписывается вес, соответствующий значению интенсивности пикселя. Вершины графа соединены двумя разнонаправленными ребрами, если соответствующие этим вершинам пиксели – соседние. Всем выходящим из узла дугам приписывается значение интенсивности узла, делённое на число соседей. Значения в вершинах и дугах графа нормируются таким образом, чтобы сумма $I(i, j)$ была равна 1. Получаем марковскую цепь на графе. Обозначим начальный поток на графе p_{ij} . Нас интересует такое распределение u_{ij} значений на дугах, при котором построенная цепь будет стационарной, т. е. в каждом узле сумма значений входящих дуг будет равна сумме значений выходящих. При заданном начальном распределении найденное стационарное распределение максимизирует взвешенную энтропию, определяемую как $\sum_{ij} u_{ij} \ln \frac{p_{ij}}{u_{ij}}$.

Значение взвешенной энтропии выбирается как классификационный признак при анализе изображений, соответствующих различным классам.

Базовый алгоритм. Для построения стационарного распределения можно воспользоваться методом Брэгмана–Шелейховского, описанному в [3]. Одна из реализаций этого метода, описанная в [2], основана на построении приоритетной очереди вершин, приоритетом в которой является её дисбаланс $q(n) = |\mu_{out}(n) - \mu_{in}(n)|$, где $\mu_{out}(i)$ – сумма мер исходящих из вершины рёбер, а $\mu_{in}(i)$ – сумма мер входящих. На каждом шаге для вершины n с максимальным приоритетом вычисляется коэффициент $\gamma = \sqrt{\frac{\mu_{out}(n)}{\mu_{in}(n)}}$. Меры всех дуг, исходящих из n , делятся на γ , меры всех дуг, входящих в n , умножаются на γ . После этого производится нормировка потока и пересчёт значений в вершинах. Критерием остановки алгоритма является то, что дисбаланс всех вершин становится меньше некоторого заданного ϵ . Сходимость указанного алгоритма была доказана в [3]. На основе этого алгоритма была реализована программа, вычисляющая максимизированную энтропию по изображению. По результатам экспериментов [4], метод может быть успешно применён для классификации изображений (разным классам изображений соответствуют разные значения максимизированной энтропии).

Оценим сложность предложенного алгоритма. Предположим, что изначально дано изображение размера $M \times N$. Это означает, что число вершин в рассматриваемом графе равно MN . Вычисления состоят из шагов, на каждом шаге производится пересчёт значений в вершинах, который занимает $(MN)^2$ операций. Изначально очередь состоит из MN вершин, но после каждого шага обрабатываемая вершина кладётся вновь в очередь обработки. Критерий остановки не зависит от M и N , число шагов, которые нужны для достижения нужной точности зависят от характера изначального изображения. По этой причине дать точную оценку числа шагов не представляется возможным.

Модифицированный алгоритм. Идея модификации алгоритма состоит в том, чтобы разделить исходные данные на некоторое число подмножеств, вычисления для которых можно производить независимо друг от друга. Изображение для этого рассматривается не как единая решётка пикселей, а как набор из таких решёток. Обратим внимание, что пиксели, находящиеся на гра-

нице двух решёток (в дальнейшем будем называть их граничными точками) входят в обе из них.

На каждой из таких решёток строится свой собственный граф. На каждом таком графе дальнейшие вычисления производятся независимо от вычислений на других графах. Полученные стационарные распределения на графах объединяются в одно общее. При объединении в качестве значения рёбрам, входящим и выходящим из граничных точек, присваивается вес, равный сумме весов соответственно входящих и исходящих рёбер каждой из частей.

Обратим внимание, что стационарное распределение при таком объединении остается стационарным. Действительно, для неграничных ячеек каждого из объединяемых множеств неравенство $q(n) < \varepsilon$ выполнено (это критерий остановки алгоритма балансировки на соответствующем подмножестве). Для граничных точек, в которых объединяются 2 подмножества, выполнено следующее соотношение

$$q(n) \leq \sum_{i=1}^2 q_i(n) < 2\varepsilon.$$

Как видно распределение осталось стационарным, правда в граничных точках условие балансировки выполнено с меньшей точностью – не превышающей 2ε . В работе [4] показано, что при достаточно малых ε увеличением погрешности можно пренебречь вследствие того, что это очень мало влияет на полученное значение взвешенной энтропии.

Для оценки сложности модифицированного алгоритма предположим, как и ранее, что размер изначального изображения $M \times N$ и для вычислений мы разбиваем его на K частей. Тогда у нас имеется K графов, в каждом из которых (MN/K) вершин. На каждом шаге алгоритма пересчёт значений в вершинах каждого графа занимает $(MN/K)^2$ операций. Дать точную оценку числа шагов, необходимых для достижения требуемой точности, не представляется возможным и зависит от характеристик изображения. Можно вспомнить, что для модифицированного алгоритма мы разрезали картинку на части. При $MN \gg K$ можно предположить, что подобное разрезание не меняет указанных характеристик, поэтому число шагов, требуемых для стабилизации изображения, имеет один и тот же порядок в обоих случаях. В рамках этого предположения можно утверждать, что модифицированный алгоритм работает быстрее классического в $\frac{(MN)^2}{K \times (MN/K)^2} = K$ раз. С учётом распараллеливания на X ядер, время вычислений в случае модифицированного алгоритма должно быть быстрее в KX раз.

Выбор оптимальных параметров. Как показывает оценка сложности модифицированного алгоритма, число операций, требуемых для обеспечения нужной точности, линейно зависит от K . Но это не означает, что при неограниченном увеличении K мы получим неограниченное ускорение работы алгоритма. Во-первых, потому что должно выполняться условие $MN \gg K$, а, во-вторых, из-за того, что с увеличением K растёт количество точек изображения, в которых точность будет составлять 2ε вместо нужных ε . Вследствие этого точность вычисленного приближенного значения максимизированной энтропии будет падать. Поэтому необходимо выбирать не слишком большое значение K (иначе его будет невозможно использовать для классификации).

Отклонение вычисленной приближенной максимизированной энтропии от точного значения в зависимости от ϵ можно оценить с помощью численного эксперимента.

Численный эксперимент. Были проведены несколько серий испытаний, для каждой из них были использованы одни и те же классы изображений растворов серебра. Каждый класс изображений состоял примерно из 10 представителей, всего было 3 класса. Для первой серии испытаний максимизированная энтропия была вычислена для всех указанных изображений с помощью немодифицированного алгоритма. Результаты и время работы этого алгоритма можно принимать как эталонные. Для второй серии испытаний было равно 4, и максимизированная энтропия была посчитана по модифицированному алгоритму. Третья серия испытаний отличалась от второй значением K , равным 16. Для каждой серии испытаний было проведено по три эксперимента: в первом из них для расчетов было использовано 1 ядро, во втором – 2 ядра, в третьем – все 4 ядра процессора одного и того же компьютера. Результаты вычислений для типичного представителя одного из классов представлены в Таблице 1. Для остальных изображений всех классов результаты похожи на представленные.

	Энтропия	t , 1 ядро	t , 2 ядра	t , 4 ядра
Базовый алгоритм	5.57271	13:26	13:25	13:26
$K = 4$	5.56537	3:52	1:57	1:01
$K = 16$	5.54088	0:54	0:31	0:18

Таблица 1: Результаты численных экспериментов.

Результаты, представленные в таблице, согласуются с оценкой, данной выше. Достаточно большое отклонение от ожидаемого результата в случае вычислений с использованием 4 ядер можно объяснить тем, что кроме вычислений, связанных с задачей, те же ядра были заняты вспомогательными задачами, такими как распределение задач по ядрам. Как видно при увеличении K значение максимизированной энтропии уменьшается вследствие падения точности вычислений.

Заключение. В статье представлена оценка скорости работы базового и оптимизированного алгоритмов, которая согласуется с результатами, полученными с помощью эксперимента. Показано, что время работы оптимизированного алгоритма уменьшилось, но полученное в результате вычислений значение энтропии было посчитано с меньшей точностью. Использование оптимизированного алгоритма оправдано даже при вычислениях на одноядерной машине, но максимальное быстродействие достигается при многопоточной обработке.

Литература

- [1] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: “Техносфера”, 2005. – 1072 с.
- [2] Ампилова Н. Б. Стационарные процессы на графах и анализ изображений // Компьютерные инструменты в образовании, №2. – СПб., 2013. – С. 31–36.

- [3] Брэгман Л. М. Доказательство сходимости метода Г. В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // ЖВМиМФ. – 1967. – Т. 7, № 1. – С. 147–156.
- [4] Батюков А. М. Классификация изображений биомедицинских препаратов адаптированным для параллельных вычислений алгоритмом построения стационарного потока // Материалы конф. “Актуальные проблемы математики, информатики и механики” – М.: Физматлит. – 2014.

УДК 004.94

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В УСТРОЙСТВАХ МАГНИТОТЕРАПИИ

Кудрин Б. К.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: bogdan.kudrin@gmail.com

Kudrin B. K. Interpolation of the magnetic field in magnetotherapy devices.

For a given space grid (base) the algorithm of the interpolation of electromagnetic field in 3D using the Lagrange method for each coordinate is described. The values obtained by direct calculation for a base grid are used. Working times for the interpolation algorithm and the direct calculation of electromagnetic field values are compared. The algorithm is implemented on Java. The results of numerical experiments are given.

В работе описан алгоритм интерполяции значений электромагнитного поля в 3D на заданной сетке с помощью метода Лагранжа по каждой из координат. Используются значения, полученные непосредственным вычислением на базовой сетке. Сравниваются время работы алгоритма интерполяции и алгоритма непосредственного вычисления значений электромагнитного поля. Алгоритм реализован на Java. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Введение. На сегодняшний день в мире существует несколько десятков успешно функционирующих магнитотерапевтических аппаратов.

В рамках сотрудничества с Техническим Университетом Софии была поставлена задача разработать приложение для моделирования магнитного поля, генерируемого магнитотерапевтическим аппаратом, представляющим специальную кровать, вокруг которой достаточно произвольным образом расположены 6 катушек индуктивности.

Поставленная задача была решена успешно – было реализовано приложение на языке программирования Java, реализующее алгоритм вычисления значений электромагнитного поля, создаваемого несколькими несоосными катушками [1,2].

Предполагается следующее применение данного приложения: врач получает графическое изображение распределения поля. Изменение положения

катушек, расстояния между ними, силы тока позволяет подобрать режим, при котором может быть достигнут наилучший лечебный эффект при уменьшении продолжительности курса лечения.

Ядром разработанного приложения является алгоритм вычисления векторов электромагнитной индукции в узлах базовой трёхмерной сетки. Результатом работы данного алгоритма является трёхмерный массив векторов электромагнитной индукции, в котором каждая ячейка массива соответствует узлу базовой трёхмерной сетки. Данный алгоритм является ресурсоемким, так как используется принцип суперпозиции и общее магнитное поле представляется в виде суммы магнитных полей, генерируемых отдельными контурами катушки. В связи с этим, возникает задача интерполяции полученных значений, так как интерполяция, возможно, позволит повысить скорость вычисления без существенной потери точности.

2. Математическая модель. В качестве интерполяционного метода предлагается использовать покоординатный метод интерполяции Лагранжа, т. е. интерполировать каждую из координатных функций векторного поля электромагнитной индукции как функцию от координат точки.

Базисные полиномы Лагранжа для интерполяции функции от трех переменных будут иметь вид:

$$l_{nmp}(x_i, y_j, z_k) = 0, \quad i \neq n \vee j \neq m \vee k \neq p,$$

$$l_{nmp}(x_n, y_m, z_p) = 1,$$

$$l_{nmp}(x, y, z) = \prod_{i=0, i \neq n}^N \prod_{j=0, j \neq m}^M \prod_{k=0, k \neq p}^P \frac{(x - x_i)(y - y_j)(z - z_k)}{(x_n - x_i)(y_m - y_j)(z_p - z_k)},$$

где (x_i, y_j, z_k) , (x_n, y_m, z_p) – узлы интерполяции (точки базовой сетки).

Соответственно, интерполяционный многочлен будет иметь вид:

$$L(x, y, z) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^P f_{nmp} \cdot l_{nmp}(x, y, z)$$

3. Алгоритм интерполяции.

1. Для заданной точки выбирается набор узлов базовой сетки – это будут узлы интерполяции.

2. Выбирается одна из координатных функций векторного поля электромагнитной индукции, для которой будет производиться интерполяция.

3. Строится интерполяционный многочлен Лагранжа от трёх переменных, интерполирующий выбранную координатную функцию векторного поля электромагнитной индукции.

4. Алгоритм повторяется для каждой точки заданной новой сетки.

Литература

- [1] Kudrin B., Dimitrov A. An algorithm for visualization of low-frequency magnetic signals in systems for magnetotherapy. Proc. 8 Int. Conf. CEMA13, 17–19 Oct. 2013, Sofia, Bulgaria. – P.31–35.

- [2] Kudrin B., Dimitrov A. Computer visualization of low frequency magnetic signals in systems for magnetotherapy with variable parameters. Proc. 8 Int. Conf. CEMA13, 17–19 Oct. 2013, Sofia, Bulgaria. – P.36–39.

УДК 517.9

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ДОПУСТИМЫХ СБРОСОВ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ ДЛЯ МНОГОВИДОВОЙ МОДЕЛИ

Ляпина А. А., Мамедова Т. Ф.

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

Саранск

e-mail: lyapina.rm@gmail.com

Lyapina A. A., Mamedova T. F. Nonlinear system of differential equations of Lotka–Volterra, method reference function, permissible pollutant discharges, three-branch system of Volterra type. We generalized Lotka–Volterra model for the study of the allowed discharges of pollutants. Shows the numerical implementation of the algorithm for calculating allowable discharges of pollutants to multispecies models.

Исследована обобщенная модель Лотки–Вольтерра для исследования оценки допустимых сбросов загрязняющих веществ. Приведена численная реализация алгоритма расчета допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений Лотки–Вольтерра [2], описывающую динамику взаимодействия двух загрязняющих веществ и водной биомассы.

$$\begin{cases} \frac{dP_i}{dt} = P_i(t) \left(r_i - \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^n P_j(t) a_{ij} \right), & i = \overline{1, m}; \\ \frac{dP_i}{dt} = P_i(t) \left(r_i - \frac{1}{k_i} \sum_{j=1}^n P_j(t) a_{ij} + u_i(t) \right), & i = \overline{m+1, n}; \end{cases} \quad (1)$$

где функции $u_i(t)$ обозначают управление. Управление удовлетворяет двум типам ограничений:

$$1) 0 \leq u_i(t) \leq b_i,$$

$$2) 0 \leq u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_i(t) \leq B, \quad u_i \geq 0.$$

$P_i, i = 1 \dots 8$ – допустимая концентрация i -ого загрязняющего вещества;

Q – биологически активная окружающая среда (плотность водной биомассы);

dQ/dt – описывает динамику водной биомассы в отсутствии загрязнителей;

c_i – предельно допустимая концентрация i -ого загрязняющего вещества в воде соответственно, концентрация вещества в воде, выше которой вода непри-

годна для одного или нескольких видов водопользования. Предельно допустимые концентрации определяются исходя из Перечня нормативов качества воды водных объектов рыбохозяйственного значения, в том числе нормативов предельно допустимых концентраций вредных веществ в водах водных объектов рыбохозяйственного значения (приказ Федерального агентства по рыболовству от 12 января 2010 года № 20) [5];

k_i – коэффициенты неконсервативности (скорости разрушения) по нефтепродуктам и нитритам соответственно, зависящий от характера веществ. Значения коэффициентов неконсервативности принимаются по данным натурных наблюдений или по справочным данным и пересчитываются в зависимости от температуры и скорости течения реки;

q – расход воды, расчетный расход в водотоке в фоновом створе;

φ – коэффициент извилистости (отношение расстояния до контрольного створа по фарватеру к расстоянию по прямой);

χ – коэффициент, зависящий от места выпуска сточных вод;

s – емкость среды;

b – продолжительность пробега воды от места выпуска сточных вод до расчетного створа (коэффициент смещения, характеризующий долю расхода воды в реке, которая смешивается со сточными водами);

n_w – коэффициент шероховатости (шероховатость ложа реки). Величина численно характеризующая сопротивление, оказываемое руслом протекающему потоку, интегральная характеристика гидравлических сопротивлений. Точное определение коэффициентов местных сопротивлений затруднительно, поэтому коэффициент шероховатости целесообразно определять по таблице М. Ф. Срибного (классификации естественных русел и нормы сопротивления движению по данным М. Ф. Срибного) [1, 4].

Гидрологические характеристики реки Мокша представлены государственным учреждением “Мордовский республиканский центр по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды”.

Нормативы допустимых концентраций вредных веществ в водных объектах и сточных водах устанавливаются исходя из условий целевого использования водного объекта. Река Мокша объект рыбохозяйственного назначения 2 категории, поэтому нормы предельно допустимых сбросов устанавливаются по “Перечню предельно допустимых концентраций и ориентировочно безопасных условий воздействия вредных веществ для воды рыбохозяйственных водоемов”.

Сточные воды после очистных сооружений сбрасываются в реку Мокша.

Сточная вода загрязнена:

- нитритами – 0,14 мг/л;
- солями железа – 0,67 мг/л;
- органическими веществами (по БПК-5) – 11,3 мг/л;
- нефтепродуктами – 0,25 мг/л ;
- фосфатами – 0,66 мг/л;
- аммонием солевым – 0,86 мг/л;
- взвешенными веществами – 11,3 мг/л.

Гидрологические характеристики реки Мокша представлены ГУ “Мордовским ЦГМС”:

- расход воды 95 ВП – 5,06 м³/сек;

- средняя глубина реки – 0,52 м;
- средняя скорость течения – 0,16 м/с;
- коэффициент шероховатости – 0,04;
- коэффициент извилистости – 1,2.

Для численной реализации системы (1) определены следующие параметры: $c_1 = 0,08$, $c_2 = 0,08$, $c_3 = 2,18$, $c_4 = 0,05$, $c_5 = 0,1$, $c_6 = 0,5$, $c_7 = 20,75$, $k_1 = 10,8$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0,23$, $k_4 = 0,1$, $k_5 = 0$, $k_6 = 0,07$, $k_7 = 0$, $q = 5,06$, $\chi = 1$, $s = 30$, $r_1 = 0,0096$, $r_2 = 0,00042$, $\varphi = 1,2$, $n_w = 0,04$, $b = 0,0003$.

Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = P_1(t) \left(0,08 + 10,8P_1(t) + \frac{5,06P_1(t)}{Q(t) + 30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_2}{dt} = P_2(t) \left(-0,08 + \frac{5,06P_2(t)}{Q(t) + 30} \right) + 0,00042; \\ \frac{dP_3}{dt} = P_3(t) \left(-2,18 - 0,23P_3(t) + \frac{5,06Q(t)}{Q(t) + 30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_4}{dt} = P_4(t) \left(-0,05 + 0,1P_4(t) + \frac{5,06Q(t)}{Q(t) + 30} \right) + 0,00042; \\ \frac{dP_5}{dt} = P_5(t) \left(-0,1 + \frac{5,06Q(t)}{Q(t) + 30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_6}{dt} = P_6(t) \left(-0,5 + 0,07P_6(t) + \frac{5,06Q(t)}{Q(t) + 30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dP_7}{dt} = P_7(t) \left(-20,75 + \frac{5,06Q(t)}{Q(t) + 30} \right) - 0,00042; \\ \frac{dQ}{dt} = 0,048 (P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + P_4(t) + P_5(t) + P_6(t) + P_7(t) - Q(t)). \end{cases}$$

Заменим переменные $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, Q$ на традиционные $x_1, x_2, x_3, x_4,$

x_5, x_6, x_7, x_8 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_1(t) \left(0.08 + 10.8x_1(t) + \frac{5.06x_1(t)}{x_8(t) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(t) \left(-0.08 + \frac{5.06x_2(t)}{x_8(t) + 30} \right) + 0.00042; \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3(t) \left(-2.18 - 0.23x_3(t) + \frac{5.06x_8(t)}{x_8(t) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_4}{dt} = x_4(t) \left(-0.05 + 0.1x_4(t) + \frac{5.06x_8(t)}{x_8(t) + 30} \right) + 0.00042; \\ \frac{dx_5}{dt} = x_5(t) \left(-0.1 + \frac{5.06x_8(t)}{x_8(t) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_6}{dt} = x_6(t) \left(-0.5 + 0.07x_6(t) + \frac{5.06x_8(t)}{x_8(t) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_7}{dt} = x_7(t) \left(-20.75 + \frac{5.06x_8(t)}{x_8(t) + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dx_8}{dt} = 0.048 (x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) + x_6(t) + x_7(t) - x_8(t)). \end{array} \right.$$

Точка $(-0,001; 0,001; -0,001; 0,001; -0,001; -0,001; -0,001; 0)$ – положение равновесия системы.

Сделаем замену переменных и перейдём к исследованию нулевого решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = (y_1 - 0.001) \left(0.08 + 10.8(y_1 - 0.001) + \frac{5.06(y_1 - 0.001)}{y_8 + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dy_2}{dt} = (y_2 + 0.001) \left(-0.08 + \frac{5.06(y_2 + 0.001)}{y_8 + 30} \right) + 0.00042; \\ \frac{dy_3}{dt} = (y_3 - 0.001) \left(-2.18 - 0.23(y_3 - 0.001) + \frac{5.06y_8}{y_8 + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dy_4}{dt} = (y_4 + 0.001) \left(-0.05 + 0.1(y_4 + 0.001) + \frac{5.06y_8}{y_8 + 30} \right) + 0.00042; \\ \frac{dy_5}{dt} = (y_5 - 0.001) \left(-0.1 + \frac{5.06y_8}{y_8 + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dy_6}{dt} = (y_6 - 0.001) \left(-0.5 + 0.07(y_6 - 0.001) + \frac{5.06y_8}{y_8 + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dy_7}{dt} = (y_7 - 0.001) \left(-20.75 + \frac{5.06y_8}{y_8 + 30} \right) - 0.00042; \\ \frac{dy_8}{dt} = 0.048((y_1 - 0.001) + (y_2 + 0.001) + (y_3 - 0.001) + (y_4 + 0.001) + \\ + (y_5 - 0.001) + (y_6 - 0.001) + (y_7 - 0.001) - y_8). \end{array} \right. \quad (2)$$

Первое линейное приближение системы (2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = 0.06y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -0.08y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} = -2.18y_3, \\ \frac{dy_4}{dt} = -0.05y_4, \\ \frac{dy_5}{dt} = -0.1y_5, \\ \frac{dy_6}{dt} = -20.75y_6, \\ \frac{dy_7}{dt} = -0.08y_7, \\ \frac{dy_8}{dt} = 0.048(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 - y_8). \end{array} \right. \quad (3)$$

Фундаментальная матрица системы (3) и обратная к ней имеют вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\frac{3t}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2t}{25}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{109t}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{83t}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{2t}{25}} & 0 \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & e^{-\frac{6t}{125}} \end{pmatrix},$$

где $a_{81} = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6t}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3t}{50}}$, $a_{82} = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2t}{25}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_{83} = -\frac{12}{533}e^{-\frac{109t}{50}} + \frac{12}{533}e^{-\frac{6t}{125}}$,
 $a_{84} = -24e^{-\frac{t}{20}} + 24e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_{85} = -\frac{12}{13}e^{-\frac{t}{10}} + \frac{12}{13}e^{-\frac{6t}{125}}$, $a_{86} = -\frac{24}{10351}e^{-\frac{83t}{4}} + \frac{24}{10351}e^{-\frac{6t}{125}}$,
 $a_{87} = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2t}{25}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{6t}{125}}$.

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3s}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2s}{25}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{109s}{50}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s}{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{s}{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{83s}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2s}{25}} & 0 \\ a^{81} & a^{82} & a^{83} & a^{84} & a^{85} & a^{86} & a^{87} & e^{-\frac{6s}{125}} \end{pmatrix}.$$

где $a^{81} = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{4}{9}e^{-\frac{2911s}{125}} - \frac{4}{9}e^{-\frac{1159s}{50}} \right)$, $a^{82} = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{3}{2}e^{-\frac{5787s}{250}} \right)$,
 $a^{83} = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{12}{533}e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{12}{533}e^{-\frac{2631s}{125}} \right)$, $a^{84} = e^{\frac{5807}{250}} \left(24e^{-\frac{1159s}{50}} - 24e^{-\frac{11589s}{500}} \right)$,

$$a^{85} = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{12}{13} e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{12}{13} e^{-\frac{2891s}{125}} \right), \quad a^{86} = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{24}{10351} e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{24}{10351} e^{-\frac{1239s}{500}} \right),$$

$$a^{87} = e^{\frac{5807}{250}} \left(\frac{3}{2} e^{-\frac{1159s}{50}} - \frac{3}{2} e^{-\frac{5787s}{250}} \right).$$

Множество $N = \{1, \dots, 8\}$, $\bar{M}_0 = N$, тогда справедливы оценки [3,4]:

$$||f_1(t, x)|| \leq |-0.00008 + 10.8(x_1 - 0.001)^2 + \frac{5.06(x_1 - 0.001)^2}{x_8 + 30} - 0.00042| \leq \lambda_1(0, |x|),$$

$$||f_2(t, x)|| \leq |-0.00008 + \frac{5.06(x_2 + 0.001)^2}{x_8 + 30} + 0.00042| \leq \lambda_2(0, |x|),$$

$$||f_3(t, x)|| \leq |0.00218 - 0.23(x_3 - 0.001)^2 + \frac{5.06x_8(x_3 - 0.001)}{(x_8 + 30)} - 0.00042| \leq \lambda_3(0, |x|),$$

$$||f_4(t, x)|| \leq |-0.00005 + 0.1(x_4 + 0.001)^2 + \frac{5.06x_8(x_4 + 0.001)}{x_8 + 30} + 0.00042| \leq \lambda_4(0, |x|),$$

$$||f_5(t, x)|| \leq |0.0001 + \frac{5.06x_8(x_5 - 0.001)}{x_8 + 30} - 0.00042| \leq \lambda_5(0, |x|),$$

$$||f_6(t, x)|| \leq |0.0005 + 0.07(x_6 - 0.001)^2 + \frac{5.06x_8(x_6 - 0.001)}{x_8 + 30} - 0.00042| \leq \lambda_6(0, |x|),$$

$$||f_7(t, x)|| \leq |0.02075 + \frac{5.06y_8(x_7 - 0.001)}{x_8 + 30} - 0.00042| \leq \lambda_7(0, |x|),$$

$$||f_8(t, x)|| \leq |-0.000048| \leq \lambda_8(0, |x|),$$

поэтому $M_0 = \{1, \dots, 8\}$, $M = M_0$, $B = N - M = \emptyset$. Тогда эталонные функции сравнения $\mu_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1$, $m_i : [T, +\infty) \rightarrow R_+^1$ удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|$, $T \leq t_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ если $N_0 \neq \emptyset$; если $N_0 = \emptyset$, то $\mu_i \geq 0$, $m_i(t) \geq \max_{j \in \bar{M}_0} \{ \max\{|y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\} \}$, $T_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ и будет иметь вид:

$$\mu_1(t) = e^{\frac{3t}{50}}, \mu_2(t) = e^{-\frac{2t}{25}}, \mu_3(t) = e^{-\frac{109t}{50}}, \mu_4(t) = e^{-\frac{t}{20}}, \mu_5(t) = e^{-\frac{t}{10}}, \mu_6(t) = e^{-\frac{83t}{4}},$$

$$\mu_7(t) = e^{-\frac{2t}{25}}, \mu_8(t) = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6t}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3t}{50}}.$$

$$m_1(t) = e^{\frac{3s}{50}}, m_2(t) = e^{-\frac{2s}{25}}, m_3(t) = e^{-\frac{109s}{50}}, m_4(t) = e^{-\frac{s}{20}}, m_5(t) = e^{-\frac{s}{10}}, m_6(t) = e^{-\frac{83s}{4}},$$

$$m_7(t) = e^{-\frac{2s}{25}}, m_8(t) = -\frac{4}{9}e^{-\frac{6s}{125}} + \frac{4}{9}e^{\frac{3s}{50}}.$$

Рассмотрим

$$J_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^t \sum_{\substack{j \in N \\ k \in B}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \int_t^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds.$$

Выражение $J_i(t, \varphi)$ существует $\forall i \in N$, $c \in R_+^1$ и $J_i(t, \varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \rightarrow +\infty$. Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T; +\infty)$.

Все решения уравнения $\frac{dz}{dt} = \sum_{\substack{k \in N \\ j \in N}} |y^{jk}(t)| \lambda_j(t, z m(t))$ определены на компакте $[T_0, t_0]$. Отсюда следует, что каждое решение системы (3) определено на множестве $[T_0, +\infty)$. Таким образом, условия 2–7 алгоритма выполняются.

Так как система уравнений (3) асимптотически устойчива по переменным y_1, y_3, y_5, y_6, y_7 , то тривиальное решение системы уравнений (2) обладает этим же свойством по переменным x_1, x_3, x_5, x_6, x_7 . Следовательно, концентрации нитритов, органических веществ, фосфатов, аммония солевого, взвешенных веществ в воде не превышает нормы сброса загрязняющих веществ в реку, а концентрация нефтепродуктов и солей железа – превышает.

Литература

- [1] Вода России. Математическое моделирование в управлении водопользованием (под редакцией А. М. Черняева). Оценка допустимых сбросов загрязняющих веществ в поверхностные водные объекты суши. – Екатеринбург: «Аква-пресс». – 2001. – 520 с.
- [2] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 287 с.
- [3] Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: Теория и приложения. – Саранск: Средневолжское математическое общество, 2001. – 300 с.
- [4] Ляпина А. А., Мамедова Т. Ф. Об исследовании устойчивости модели вольтерровского типа // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сборник статей VI Международной научно-технической конференции. – Пенза: Приволжский Дом знаний. – 2011. – С. 44–46.
- [5] Семчуков А. Н., Квон В. И. Определение интенсивности сброса загрязняющих веществ в реку по данным наблюдениям в расположенном ниже створе // Метеорология и гидрология, 1999. – № 7. – С. 84–91.

УДК 517.9

МЕТОД ПАССИВНОЙ МНОГОПОЗИЦИОННОЙ РАДИОЛОКАЦИИ

Макшаков В. В.

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
e-mail: v.v.makshakov@gmail.com

Makshakov V. V. Method passive multiposition radiolocation. A method is proposed to perform passive multi-positional radiolocation of radio emission sources which generate impulse signals repeated with high precision. The method is aimed at non-synchronized signal receiving from mobile positions with large distances between them.

Предлагается метод пассивной многопозиционной радиолокации источников радиоизлучения, генерирующих повторяющиеся с большой точностью импульсные сигналы. Метод ориентирован на использование не синхронизированного приема сигналов в подвижных позициях, разнесенных на большие расстояния.

Многопозиционные пассивные системы радиолокации с разнесенными на большие расстояния (тысячи км) приёмными позициями (ПП) сталкиваются с трудностями применения традиционных методов пеленгования (разностно-дальномерный, разностно-доплеровский) при пеленговании современных радиотехнических средств (РТС), имеющих антенны с узкой диаграммой (единицы градусов) направленности и малым уровнем боковых лепестков, так как эти методы требуют синхронного приёма сигнала на нескольких позициях [1]. В условиях, когда необходимая синхронность приёма сигнала не может быть

достигнута, традиционные методы пеленгования не обеспечивают требуемой точности определения местоположения источника излучения. В этой связи актуальна разработка методов обработки данных, принимаемых в разнесенных позициях в различные, но близкие моменты времени.

Поскольку большинство рассматриваемых РТС работают в режиме излучения импульсных сигналов [2], ниже рассматриваются методы обработки данных, применимые, прежде всего, к таким сигналам.

Современные РТС характеризуются высокой стабильностью параметров излучаемых сигналов [3]. В таблице 1 приведены данные, характеризующие один из основных таких параметров – фазовые шумы двух наиболее важных с точки зрения поставленной задачи подсистем любого РТС, а именно, передатчика и синхронизатора (опорного генератора).

Таблица 1. Характеристики фазовых шумов подсистем РТС

Подсистема	Фазовый шум, dBc/Hz
Передатчик	– 128,6
Синхронизатор	– 134,6

Здесь единица измерения шума – это отношение мощности шума к мощности несущей, измеренное в полосе 1 Гц.

Столь высокие значения параметров излучаемых сигналов определяются тем, что в основу работы РТС положен когерентный приём отраженных сигналов [4]. Отсюда следует, что в принятых в разные моменты времени одинаковых последовательностей импульсов соседние импульсы имеют один и тот же фазовый сдвиг, и одинаковые импульсы излучаются на одной и той же частоте. Это позволяет при определении местоположения источника радиоизлучения (ИРИ) использовать разностно-доплеровский метод, в котором:

- разности частот одинаковых импульсов, принятых в разное время, используются для разрешения неоднозначности разности фаз;
- разности фаз соседних импульсов двух одинаковых пачек, принятых в разное время, используются для точного определения разности доплеровских сдвигов частот.

Одинаковые последовательности импульсов могут быть охарактеризованы следующим образом. Каждый импульс определяется:

- τ – длительностью;
- ω – несущей частотой;
- φ – начальной фазой;
- m – некоторым типом внутриимпульсной модуляции.

Пусть имеются две последовательности импульсов с одинаковым их числом n :

$$\begin{aligned} & \dots, u_i^1(\tau_i^1, \omega_{0i}^1, \varphi_i^1, m_i^1), \dots \\ & \dots, u_i^2(\tau_i^2, \omega_{0i}^2, \varphi_i^2, m_i^2), \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

и таких, что:

$$\tau_i^1 = \tau_i^2, \quad \omega_{0i}^1 = \omega_{0i}^2, \quad \varphi_i^1 = \varphi_i^2, \quad m_i^1 = m_i^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Время начала каждого импульса в первой последовательности обозначим t_i^1 , во второй – t_i^2 , $i = 1, \dots, n$. Использование разности фаз соседних импульсов в одинаковых пачках, принятых в разное время, для уточнения местоположения ИРИ основано на следующих выкладках. Пусть устройство обработки данных (УОД) на ПП для каждого импульса вычисляет фазу, как:

$$\psi_i = \arctg \left(\frac{S}{C} \right), \quad (3)$$

где

$$S = \int_0^{\tau} x(t) \sin(\omega_{\text{calc}} t) dt, \quad (4)$$

$$C = \int_0^{\tau} x(t) \cos(\omega_{\text{calc}} t) dt. \quad (5)$$

Здесь:

- $x(t)$ – принятый УОД сигнал;
- ω_{calc} – измеренная УОД частота несущей импульса;
- τ – длительность импульса.

Результат измерений эквивалентен измерениям синусоидального импульса

$$x(t) = A \sin(\omega_{\text{calc}} t + \psi), \quad t \in [0, \tau], \quad (6)$$

где A – амплитуда импульса.

Частота ω_{calc} может быть представлена в виде:

$$\omega_{\text{calc}} = \omega_0 + \Omega \quad \text{и} \quad \Omega = \Omega_{\text{error}} + \Omega_{\text{doppler}}. \quad (7)$$

Тогда

$$S = \int_0^{\tau} A \sin(\omega_{\text{calc}} t + \psi) \sin(\omega_{\text{calc}} t) dt \quad \text{и} \quad (8)$$

$$C = \int_0^{\tau} A \cos(\omega_{\text{calc}} t + \psi) \cos(\omega_{\text{calc}} t) dt.$$

Отсюда

$$\psi = \arctg \left(\frac{S}{C} \right) = \varphi + \Omega \tau, \quad (9)$$

$$\varphi = \varphi_o + \Delta \varphi_L, \quad (10)$$

где $\Delta\varphi_L$ – набег фазы на расстоянии L от ИРИ до ПП.

$$\Delta\varphi_L = \frac{L\omega_0}{c}, \quad (11)$$

c – скорость света.

Пусть

- ψ_i^1 и ψ_{i+1}^1 – измеренные фазы пары соседних импульсов первой последовательности;
- ψ_i^2 и ψ_{i+1}^2 – измеренные фазы соответствующей пары второй последовательности.

Рассмотрим разность $\Delta\psi^j = \psi_{i+1}^j - \psi_i^j$, где j – номер последовательности (условный номер ПП) $j = 1, 2$.

После подстановки значений

$$\begin{aligned} \Delta\psi^j = & \varphi_{0i+1} - \varphi_{0i} + \frac{1}{c}(\omega_{0i+1}L_{i+1}^j - \omega_{0i}L_i^j) + (t_{i+1}^j - t_i^j)\Omega_{\text{doppler } i+1}^j + \\ & + (\Omega_{\text{error } i+1}^j + \Omega_{\text{doppler } i+1}^j)\tau_{i+1} - (\Omega_{\text{error } i}^j + \Omega_{\text{doppler } i}^j)\tau_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда разность $\Delta\psi = \Delta\psi^2 - \Delta\psi^1$ после подстановки будет равна

$$\begin{aligned} \Delta\psi = & \frac{1}{c}(L_{i+1}^2 - L_{i+1}^1)\omega_{0i+1} - \frac{1}{c}(L_i^2 - L_i^1)\omega_{0i} + (\Omega_{\text{doppler } i+1}^2 - \Omega_{\text{doppler } i+1}^1)T + \\ & + ((\Omega_{\text{error } i+1}^2 - \Omega_{\text{error } i+1}^1)\tau_{i+1} + (\Omega_{\text{doppler } i+1}^2 - \Omega_{\text{doppler } i+1}^1)\tau_{i+1}) - \\ & - ((\Omega_{\text{error } i}^2 - \Omega_{\text{error } i}^1)\tau_i + (\Omega_{\text{doppler } i}^2 - \Omega_{\text{doppler } i}^1)\tau_i), \end{aligned} \quad (13)$$

где $T = t_{i+1}^2 - t_i^2 = t_{i+1}^1 - t_i^1$.

Введем также обозначения:

- $\vec{V}^j$ – вектор скорости j -ой ПП;
- α^j – угол между $\vec{V}^j$ и направлением $\vec{O}^j$ на ИРИ от j -ой ПП.

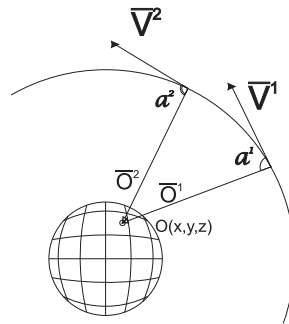


Рис. 1. Приём импульсных последовательностей на двух ПП.

Пусть соседние импульсы одинаковы, т. е. $\tau_{i+1} = \tau_i$ и $\omega_{0i+1} = \omega_{0i}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\psi = & (\Omega_{\text{doppler}}^2 - \Omega_{\text{doppler}}^1)T + (\Omega_{\text{doppler}}^2 \cos \alpha^2 - \Omega_{\text{doppler}}^1 \cos \alpha^1)T + \\ & + (\Omega_{\text{error } i+1}^2 - \Omega_{\text{error } i}^2 - \Omega_{\text{error } i+1}^1 + \Omega_{\text{error } i}^1). \end{aligned} \quad (14)$$

Если УОД на обеих ПП, приняв импульс u_i , дождутся прихода импульса u_{i+1} и затем измерят фазы двух импульсов на одной частоте, то ошибки измерения частоты будут одинаковы (считаем, что каждая ПП будет иметь одинаковую радиальную скорость относительно ИРИ в моменты t_{i+1}^j и t_i^j). Отсюда окончательно

$$\Delta\psi = (\Omega_{\text{doppler}}^2 - \Omega_{\text{doppler}}^1) T + (\Omega_{\text{doppler}}^2 \cos \alpha^2 - \Omega_{\text{doppler}}^1 \cos \alpha^1) T. \quad (15)$$

Считаем, что на обоих УОД в состав эталонных описаний входит одно и то же время, так что разности фаз на обеих ПП мы будем измерять на одном и том же расстоянии между импульсами .

$$\Omega_{\text{doppler}}^j = \omega_0 \frac{\vec{V}^j}{c} \cos \alpha^j, \quad j = 1, 2; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \left(\omega_0 \frac{\vec{V}^2}{c} \cos \alpha^2 - \omega_0 \frac{\vec{V}^1}{c} \cos \alpha^1 \right) T + \\ &+ \left(\omega_0 \frac{\vec{V}^2}{c} \cos \alpha^2 \cos \alpha^2 - \omega_0 \frac{\vec{V}^1}{c} \cos \alpha^1 \cos \alpha^1 \right) T = \\ &= \frac{\omega_0 T}{c} \left(\cos \alpha^2 \vec{V}^2 - \cos \alpha^1 \vec{V}^1 + \cos^2 \alpha^2 \vec{V}^2 - \cos^2 \alpha^1 \vec{V}^1 \right), \quad (17) \end{aligned}$$

где $\cos \alpha = \frac{(\vec{V}, \vec{O})}{|\vec{V}| |\vec{O}|}$, где $\vec{V}$ – вектор скорости ПП, а $\vec{O}$ – вектор направления на ИРИ. Вектор направления на ИРИ выражается через координаты точки $O(x, y, z)$ местоположения ИРИ. При приеме последовательностей импульсов на 5-ти ПП, получим систему из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными: тремя координатами точки $O(x, y, z)$ и несущей частотой ω_0 .

Таким образом, исходя из вышеописанного, для некоторых типов РТС их местоположение, в отличии от традиционных подходов в пассивной многопозиционной радиолокации, может быть определено при приёме сигналов в разные моменты времени.

Литература

- [1] Черняк В. С. Многопозиционная радиолокация. – М.: Радио и связь, – 1993. – 416 с.
- [2] Рембовский А. М., Ашихмин А. В., Козьмин В. А. Радиомониторинг: задачи, методы, средства. – М.: “Торячая линия - Телеком”, – 2006. – 492 с.
- [3] Верба В. С., и др. Радиолокационные системы землеобзора космического базирования. – М.: Радиотехника, – 2010. – 680 с.
- [4] Бакулев П. А. Радиолокационные системы. Учебник для вузов. – М.: Радиотехника, – 2004. – 320 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВАРИАЦИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЯМИ ШАРА В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Маламанов С. Ю., Павловский В. А.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: stevmal@mail.ru

Malamanov S. Yu., Pavlovsky V. A. Mathematical modeling of the magnetic field variations due to fluctuations in the bowl of a conducting fluid. The problem of the oscillatory motion of a non-conducting sphere in a conducting fluid. Examines the validity of simplifying assumptions.

Keywords: modeling of the magnetic field, the conducting medium, oscillatory motion.

Решается задача о колебаниях непроводящего шара в проводящей жидкости, находящегося в магнитном поле. Анализируется обоснованность упрощающих предположений.

Ключевые слова: моделирование, магнитное поле, проводящая среда, колебательное движение.

Рассматривается задача о колебательном движении непроводящего шара в поверхностном слое проводящей жидкости, находящейся в магнитном поле Земли. Жидкостью является морская вода. Решение осуществляется на основе уравнений магнитной гидродинамики (МГД), представляющих собой совокупность уравнений Максвелла и уравнений гидродинамики (связь этих групп уравнений диктуется необходимостью учета генерации тока и магнитных вариаций, вызванных движением среды). Связь вариаций магнитного поля Земли с волнением моря экспериментально обнаружена многими учеными. Так, например, при высоте волн 0,5 м. и среднем периоде 3 с. вариация составляет 1 γ.

Расчет вариаций магнитного поля зависит от конкретной гидродинамической ситуации, описание которой – в силу нелинейности уравнений гидродинамики – чрезвычайно сложная задача. В этой связи теоретический анализ проводится на упрощенной модели, вводя те или иные допущения, используя аналогии. В основном, «стараяются» отделить решение электродинамической задачи от гидродинамической.

Так, например, ввиду малости магнитного числа Рейнольдса R_m (составляет 10^{-5} для морских ветровых волн), из уравнения для индукции магнитного поля (получается из уравнений Максвелла и закона Ома)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \Delta \vec{B} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v},$$

$\vec{B}$ – индукция индуцированного магнитного поля, $\vec{F}$ – индукция магнитного поля Земли («внешнее» поле), $\vec{v}$ – скорость среды, следует, что величина $|\vec{B}|$ в объеме жидкости совершает периодические движения с той же частотой, с какой их совершает гидродинамический источник.

В данной работе исследована обоснованность допущения о возможности пренебрежения влиянием магнитного поля на движение жидкости. Численное моделирование осуществляется на основе уравнений МГД, реализованных в комплексе ANSYS. При этом использовались вычислительные средства Ресурсного Центра «Вычислительный центр СПбГУ».

УДК 519.688

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПОЛУЧЕНИЯ И ПЕРЕДАЧИ ВИДЕОИНФОРМАЦИИ СРЕДСТВАМИ МОБИЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ПОД УПРАВЛЕНИЕМ ANDROID ОС

Овсянников А. А.

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Санкт-Петербург

e-mail: ov.sasha@gmail.com

Ovsyannikov A. A. Actual problems of obtaining and transmitting video data through mobile devices running Android OS. Video information receive/transmission problems and its' solving algorithms are reviewed in this report. Video information receive source (system camera) settings approaches are offered. Qualitative video information improvement and system optimization approaches are also reviewed. Audio and video signal flows received from different video sources are also offered.

В данной статье рассмотрены основные задачи получения и передачи видеoinформации средствами мобильных технологий и алгоритмы их решения. Предложены подходы к настройке источника получения видеoinформации (камеры системы). Рассмотрены подходы к оптимизации работы системы качественного улучшения видеoinформации. Предложены алгоритмы синхронизации аудио и видео потоков, полученных с разнооснащённых видеoinформационных источников.

1. Введение. Современные мобильные технологии позволяют дополнять информацию любого вида (видео, аудио, текст и т. д.). Но при этом всегда существует проблема разнооснащённости самих мобильных устройств (отсутствие того или иного аппаратного расширения, недостаточное разрешение камеры и т. д.). Одним из решений представляется создание такой системы, которая смогла бы самостоятельно определять недостатки того или иного устройства и за счёт других устройств их исправлять.

Аналитик компании Asymco Хорас Дедью опубликовал исследование, согласно которому количество активированных устройств на операционной системе Android перевалило за миллиард (<http://www.macdigger.ru/iphone-ipod/kolichestvo-android-ustrojstv-prevysilo-1-milliard.html>).

В данной статье исследованы некоторые проблемы, возникающие из-за фрагментарности устройств под управлением Android ОС при разработке описанной выше системы.

2. Настройка источника видеoinформации (камеры). Известно,

что данная операционная система достаточно фрагментарна (под данным термином будем понимать “разнородность”) с точки зрения множества устройств, различных по многим критериям. Поэтому для начала рассмотрим алгоритм, который поможет решить проблемы инициализации камеры устройства.

Для удобства разработчику предоставлены некоторые “вшитые” в систему данные о камере: поддерживаемые разрешения, данные об возможности увеличения/уменьшения изображения и т. д. Проблема состоит в том, что не всегда можно абсолютно доверять этим данным. Таким образом, нельзя гарантировать, что настроенная система на данном устройстве будет работать на другом.

Помимо этого необходимо всегда помнить, что многие производители устройств недостаточно часто выпускают обновление операционной системы, что порождает потребность в установке пользователем сторонних прошивок. Это, в свою очередь, приводит, в большинстве случаев, к нестабильности работы устройства и проблемам настройки компонентов.

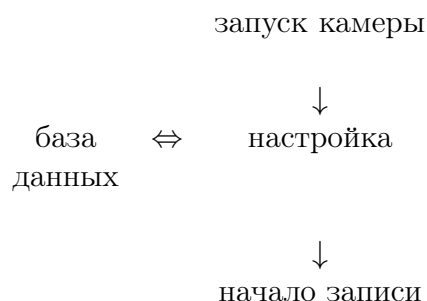
К таким компонентам настройки относятся:

1. Поддерживаемое разрешение камеры.
2. Степень и направление поворота кадра.
3. Настройки кодировщика и формата для записи.

Одним из возможных решений является не хранить всех настройки на локальном устройстве, а создать определенную базу данных (БД) с привязкой не столько к модели устройства, сколько в IMEI коду (потому что на одной и той же модели могут стоять как официальная, так “сторонняя” прошивки операционной системы). Рассмотрим следующий алгоритм.

1. Перед настройкой камеры, посылается запрос в БД с данными об устройстве.
2. Если для данного устройства данных в БД нет, то происходит настройка методом перебора, основанная на стандартных разрешениях, настройках и т. д. Если после подстановки камера настроилась, то на сервер отправляется положительный ответ, а настройка устройства добавляется в БД, если нет – перебор продолжается.
3. Если настройка все же существует в базе, то на устройство отправляются остальные данные необходимые для записи: time-stamp и другие идентификаторы.

Ниже представлена схема алгоритма.



Данный подход гарантирует более гибкую настройку и устраняет в достаточной степени проблему фрагментации устройств. Из минусов же стоит учесть, что для реализации необходим доступ в Интернет, что не всегда возможно.

3. Синхронизация видео и аудио потока средствами мобильной системы. Иногда возникает ситуация, когда полученное видео не соответствует критериям качества со стороны записанной аудио-дорожки. Например, возникают посторонние шумы. Тогда необходимо записывать видео и аудио в разных потоках с дальнейшей синхронизации.

В настоящее время не существует таких систем, которые бы автоматически справлялись бы с задачей синхронизации двух отдельных потоков на мобильном устройстве. И это связано со следующими особенностями реализации записи на мобильной операционной системе:

1. Асинхронность начала записи. На предоставляемых разработчику инструментах фактически невозможно не только точно определить время начала записи, но и ее окончания.
2. Разнооснащенность мобильных устройств.
3. Разнонастраиваемость необходимых инструментов записи.

Введем следующие понятия:

0-audio — аудио дорожка, записанная во время съемки и которую можно получить из самого видео-файла;

r-audio (raw audio) — исходное аудио, которые следует синхронизовать;

delta Δ — разница в миллисекундах между началом проигрывания видео и началом проигрывания *r*-аудио.

Проблема состоит в том, что реализованные методы, доступные для работы с медиа ресурсами на мобильном устройстве на базе ОС Android, выполняются асинхронно и на уровне самого ядра ОС, из-за чего происходит рассинхронизация при старте записи и старте проигрывания аудио. Главная задача, стоящая перед разработчиком это определить так называемую “сдвигку” — разницу между началом записи видео и начало проигрывания *r*-аудио. Определив ее, в конечном счете, можно синхронизировать видео и аудио.

Предполагается несколько возможных подходов к данной проблеме:

- Очевидный подход: замерять время начала записи, время начала проигрывания, время окончания записи и время окончания проигрывания.
- Метод прерывания: периодическое прерывания записи звука и сравнения амплитудно-частотных колебаний видео и исходного аудио.
- Метод библиотек: использования сторонних библиотек для работы с медиа ресурсами.

1. Очевидный подход.

Алгоритм подхода: Весь процесс записи можно разделить на несколько пунктов. Инициализация видео-рекордера, инициализация плеера, начало записи t_{0n} , начало проигрывания аудио, окончание записи, окончание проигрывания.

Таким образом, если знать все timestamp каждого из пункта, то delta вычисляется следующим образом:

$$L_0 = t_{0k} - t_{0n}, \quad L_r = t_{rk} - t_{rn}, \quad \Delta = |L_0 - L_r|,$$

где L_0 — длина видеозаписи, L_r — длина *r*-аудио.

Недостаток данного метода состоит в том, что фактически невозможно с достаточной точностью определить t из-за асинхронной реализации методов `MediaRecorder.start()` и `MediaRecorder.stop()`.

2. Метод прерывания.

Состоит в прерывании записи звука каждые 10 секунд для получения “точек тишины”, которые будут использоваться в дальнейшем при синхронизации с *r*-аудио при помощи сравнения амплитудно-частотных колебаний.

3. Метод библиотек.

Подход является комбинацией двух предыдущих и рассчитан на устранение недостатков обоих. Для решения поставленной задачи были использованы следующие библиотеки: JavaCV; FFMPEG;; OpenCV. Такая комбинация позволяет более гибко настроить необходимые инструменты.

4. Основной алгоритм. Если в предыдущих методах нам не нужно было четко представлять, что такое видео само по себе, то для реализации этого подхода необходимо понимать, что видео это упорядоченное множество фреймов. От частоты фреймов будет зависеть, насколько полученное видео будет плавным. Таким образом, помимо главной задачи синхронизации, перед разработчиком также необходимо обеспечить визуальную сторону (подобрать словосочетание).

Метод основан на получении необходимых фреймов непосредственно с камеры и при помощи библиотек формировать файл. Главным плюсом данного подхода является то, что мы можем достаточно точно определить timestamp начала записи. Он будет равен времени помещения первого фрейма в файл. Таким образом, дальнейшая синхронизация значительно упрощается. Минусом же будет то, что подход подразумевает от разработчика глубокого понимания создания видео, так как следующие шаги (поворот фреймов, их декодирование, обеспечение достаточной скорости получения фреймов и т. д.) полностью зависят от разработчика.

Алгоритмы отправки видео на сервер Одной из главных задач, которую должен решить разработчик клиент-серверной системы, является отправка файла на сервер. Хотя в наше время развитие сетей происходит бурными темпами, нужно так же осознавать, что с каждым годом размер данных, которыми будет оперировать система, тоже будет расти. Это обусловлено в первую очередь ростом показателей мобильного телефона. В области разработки медиа-приложения, нас, главным образом, интересует рост показателей камеры.

Общая идея состоит в том, чтобы не загружать весь файл целиком, а разделять его на куски, куски (Frame) группировать в пакеты(PocketFrame) и отправлять. Данный подход гарантирует гибкую настройку и дает возможность реализации порционной загрузки на сервер.

Алгоритм обработки и отправки 1.

1. Получение фреймов.

В операционной системе Android существует несколько подходов к получению видео данных. Первый подход реализуется средствами класса MediaRecorder, использующий камеру на native уровне. Второй – через непосредственное получение фреймов в callback-методе onPreviewFrame в виде byte[] и дальнейшей группировки их в видео. Для наших целей подойдет второй, так как класс MediaRecorder не дает возможности работы с фреймами в realtime режиме.

2. Формирования пакета и очереди фреймов.

После получения фреймов необходимо создать цикл обработки событий, который подготавливает отправленные ему данные для использования на этапе 3. На данном этапе происходит формирование списка. В связи с необходимостью многопоточной работы со списком используется очередь `ConcurrentLinkedQueue<E>`. Это неограниченная ориентированная на многопоточное исполнение очередь, основанная на соединенных узлах. Эта очередь упорядочивает FIFO элементов (первым прибыл – первым убыл). Глава очереди – то, что элемент, который был на очереди самым долгим временем. Хвост очереди – то, что элемент, который был на очереди самым коротким временем. Новые элементы вставляются в хвосте очереди, и операции извлечения очереди получают элементы во главе очереди. Таким образом, `ConcurrentLinkedQueue` будет предоставлять совместный доступ к списку из разных потоков. (<http://spec-zone.ru/RU/Java/Docs/7/api/java/util/concurrent/ConcurrentLinkedQueue.html>)

3. Обработка (Processing).

На этой стадии происходит преобразование фрейма из формата YUV в JPG. Так как преобразование из одного формата в другой – задача ресурсоемкая, то полученные на этапе 2 данные обрабатываются не в главном потоке, что гарантирует отсутствие как визуальных неудобств со стороны GUI, так и возможность дальнейшей многопоточковой работы. Необходимость внедрения этого этапа в алгоритм обусловлена тем, что без данной обработки на каждый фрейм выделялось на порядок больше памяти:

	До (байт)	После (байт)
720p	1382400	135053
480p	460800	56526

4. Отправка на сервер. При работе с устройствами под управлением Android ОС необходимо понимать, что из-за разноснащённости растёт вероятность переполнения памяти. Помимо этого, не всегда пользователю предоставляется высокоскоростное Интернет-соединение. В совокупности, это может привести к ситуации, когда устройство физически не сможет обработать всю очередь фреймов. Управление фреймами происходит автоматически, т. е. данный подход будет обрабатывать столько фреймов, сколько ему передаст callback-метод. Таким образом, необходимо создать такой алгоритм, который бы более эффективно работал с памятью.

Данный алгоритм обусловлен необходимостью постоянного контроля над потребляемой памятью, в использовании callback-метода был добавлен подход с буфером. Такой подход повышает частоту получаемых фреймов, что, в свою очередь, увеличивает качество изображения и позволяет переиспользовать память.

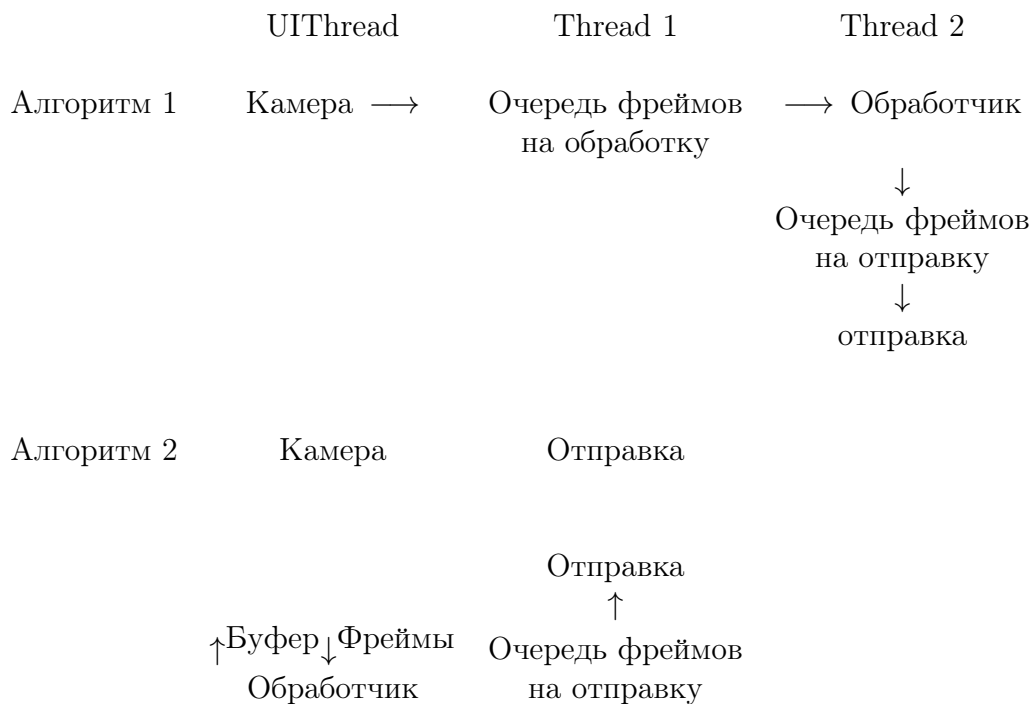
Алгоритм обработки и отправки 2.

• Получение фреймов.

Если в предыдущем алгоритме под каждый фрейм создавался новый буфер, то теперь используется тот буфер, который возвращает камера.

- Проверка на переполненность очереди и на достаточность памяти. В целях лучшего контроля над памятью используется интерфейс `BlockingQueue<E>`. Он предпочтительнее, так как `ConcurrentLinkedQueue<E>` не имеет лимита и не блокирует доступ. Проверка на разноудалённость фреймов друг от друга. Т. е. фреймы, которые приходят слишком часто – отбрасываются.
- Обработка.
Аналогично, как и в алгоритме 1, но выполняется только для оставшихся после пункта 3 фреймов.
- Обработанный фрейм отправляется загрузчику и возврат буфера камере. После обработки фрейма, он помещается в новую область памяти, а буфер от камеры возвращается ей обратно.
- Группировка фреймов в пакеты.
- Отправка на сервер.

Сравнительные схемы представлены на нижеприведенной диаграмме.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Пичугин Ю. А.*, Кондрашков А. В.**

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена*

Санкт-Петербургский государственный экономический университет**

Санкт-Петербург

e-mail: yury-pichugin@mail.ru*, ankon69@mail.ru**

Pichugin Yu. A., Kondrashkov A. V. Geometrical aspects of the statistical hypotheses testing in problems of mathematical modelling. Geometrical aspects of testing the statistical hypothesis that a vector of model parameters belongs to some open subset of Euclidean space are considered. Stochastic factors are assumed to have normal multivariate distribution.

Рассмотрены геометрические аспекты проверки статистической гипотезы о принадлежности вектора параметров модели некоторому открытому подмножеству евклидова пространства. Предполагается, что стохастические факторы подчиняются многомерному нормальному распределению.

При построении математических моделей каких-либо реальных процессов основными этапами, как хорошо известно, являются этап спецификации и идентификации. Учёт стохастических факторов на этапе идентификации или оценки параметров модели приводит к необходимости проверки статистических гипотез относительно истинных (в гипотетическом смысле) значений параметров. Так, например, в моделях эконометрики, в основном, проверяются гипотезы о равенстве тех или иных параметров нулю, что позволяет определить как целесообразность включения соответствующих переменных в модель, так и целесообразность модели в целом. Проверка статистических гипотез такого рода осуществляется посредством достаточно хорошо разработанного аппарата математической статистики. Однако на практике нередко возникает ситуация, когда встает вопрос о принадлежности вектора параметров некоторой области. Поскольку этот вопрос в настоящий момент нельзя отнести к достаточно исследованным, именно его мы и рассмотрим ниже, предполагая, что в основе всех стохастических факторов, влияющих на исходные данные, лежит нормальное распределение.

1. Общая идея. При проверке статистической гипотезы вида $H_0: \theta = \theta_*$, где θ — оцениваемый одномерный параметр модели, выбирается уровень значимости проверки гипотезы α , которому ставится в соответствие симметричный относительно значения θ_* доверительный интервал, в соответствии с симметрией плотности распределения Стьюдента, а критическая область в этом случае будет внешность этого доверительного интервала. При верной гипотезе H_0 вероятность попадания величины $(\hat{\theta} - \theta_*)/\hat{\sigma}$ в эту критическую область равна α . Квантили, определяющие границы доверительной и критической области, бе-

рутся по распределению Стьюдента, но могут быть взяты и по нормальному распределению в случае, когда параметр масштаба σ известен, или размер выборки, а, соответственно, и число степеней свободы при оценке $\hat{\sigma}^2$ достаточно велико (более 120, например).

Мы предполагаем, что именно такая ситуация имеет место, когда оценивается k -мерный вектор параметров Θ . В этом случае доверительная область есть внутренность эллипсоида $W_\alpha = \{\Theta : f(\Theta) = c\}$, имеющая вероятностную меру $1 - \alpha$. Этот эллипсоид известен как *эллипсоид рассеяния*, при этом [1]

$$f(\Theta) = f(\Theta; \Theta_*, V_\Theta) := (2\pi)^{-k/2} |\det V_\Theta|^{-1/2} \exp(-0.5(\Theta - \Theta_*)^T V_\Theta^{-1} (\Theta - \Theta_*)) \quad (1)$$

— плотность многомерного нормального распределения, V_Θ — матрица вариаций (дисперсий) и взаимных ковариаций компонент Θ .

Предположим теперь, что требуется проверить гипотезу вида $H_0: \Theta \in G$, где G — некоторая область пространства параметров. Если эту гипотезу рассматривать как совокупность простых гипотез $H_0: \Theta = \Theta_*$, где $\Theta_* \in G$, то общей границей пересечения всех критических областей будет огибающая семейства эллипсоидов W_α при условии, что центры эллипсоидов Θ_* пробегают границу ∂G области G . Проверку такой гипотезы можно осуществить по следующему алгоритму, основанному на том, что аргумент и параметр сдвига в функции плотности распределения занимают симметричное положение. (Геометрически последнее означает, что если Θ лежит на W_α с центром Θ_* , то Θ_* лежит на W_α с центром Θ .)

Пусть $\hat{\Theta}$ — оценка вектора параметров. Найдем точку касания Θ_* с границей ∂G некоторого эллипсоида W_γ , с центром в $\hat{\Theta}$, при том же значении матрицы V_Θ . Тогда, если вероятностная мера области, ограниченной этим эллипсоидом, будет больше, чем $(1 - \alpha)$, т. е. $(1 - \gamma) > (1 - \alpha)$ или $\gamma < \alpha$ (γ — вероятностная мера внешней для эллипсоида части k -мерного пространства), гипотеза $H_0: \Theta = \Theta_*$ может быть отвергнута, и тем более отвергнута для всякой иной точки $\tilde{\Theta}_* \in G$.

2. Нахождение точки касания Θ_* . Геометрическая задача нахождения точки касания Θ_* эллипсоида W_γ с границей ∂G области G имеет стандартное решение по методу множителей Лагранжа, основанное на том, что в точке касания нормали к W_γ и ∂G коллинеарны. Пусть граница ∂G области G гладкая или кусочно-гладкая, т. е. имеется такой набор $w = \{w_j : j = \overline{1, l}\}$ гладких функций $w_j(\Theta)$, что ∂G может быть задана как объединение $\partial G = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_l$ замкнутых кусков K_j , причём каждый кусок K_j расположен на гиперповерхности с уравнением $w_j(\Theta) = 0$. Каждому $w_j(\Theta)$ соответствует своя функция Лагранжа

$$L_j(\Theta, \lambda) = \ln f(\Theta) - \lambda w_j(\Theta) \quad (f(\Theta) = f(\Theta; \Theta_*, V_\Theta)),$$

для которой имеем систему из $k + 1$ уравнения:

$$\frac{\partial L_j(\Theta, \lambda)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, k), \quad w_j(\Theta) = 0. \quad (2)$$

За окончательное решение Θ_* принимаем такое, которое дает большее значение правдоподобия $f(\Theta_*, \hat{\Theta}, V_\Theta) = f_\gamma$, соответственно меньший размер эл-

липсоида $W_Y = \{\Theta : f(\Theta) = f_Y\}$, а вероятностную меру (с теми же параметрами распределения) области, ограниченной этим эллипсоидом, сравниваем с выбранным уровнем доверия $(1 - \alpha)$.

3. Вырожденность распределения и относительно малый размер выборки. Матрица V_Θ может оказаться вырожденной. В этом случае необходимо найти ортогональную матрицу Q такую, что $Q^T V_\Theta Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$. При этом столбцы матрицы Q можно расположить в таком порядке, чтобы выполнялось условие $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$. Вырожденность матрицы V_Θ равносильна тому, что, по крайней мере, $\lambda_k = 0$. В этом случае в формуле (1) вместо V_Θ^{-1} будет стоять матрица $Q_m \Lambda_m^{-1} Q_m^T$, где Λ_m — матрица порядка m ($1 \leq m \leq k$, равенство справа соответствует невырожденному случаю). Матрица Λ_m на главной диагонали содержит только ненулевые значения Λ (т. е. $m = \text{rank } V_\Theta$), а Q_m содержит только столбцы Q , отвечающие этим ненулевым значениям.

Вырожденность распределения, в свою очередь, приводит к тому, что вероятностную меру эллипсоида W_Y придется вычислять в пространстве вектора меньшей размерности $Q_m^T \Theta$.

В случае оценивания V_Θ по выборке относительно небольшого объема для проверки гипотезы $H_0: \Theta \in G$ (фактически мы проверяем $H_0: \Theta = \Theta_*$) можно воспользоваться, например, статистикой $r = (\Theta_* - \hat{\Theta})^T Q_m \Lambda_m^{-1} Q_m^T (\Theta_* - \hat{\Theta})$, которая при верной гипотезе H_0 имеет распределение достаточно близкое к хи-квадрат с m степенями свободы, т. е. $r \sim \chi_m^2$. Компоненты s_i ($i = \overline{1, m}$) вектора $S = \Lambda_m^{-1/2} Q_m^T (\Theta_* - \hat{\Theta})$ будут независимы и, при верной H_0 , будут иметь распределение Стьюдента $s_i \sim t_\nu$ с числом степеней свободы $\nu = n - 1$, где n — объем исходной выборки наблюдений. Когда оценки получаются на основе регрессионной схемы, то число степеней свободы равно $\nu = n - h$, где h — общее число параметров регрессии, $h \geq k$. При этом, как будет показано ниже, мы можем получить распределение $F_{m, \nu}$. Независимо от выбора критерия вычисление точки касания Θ_* является необходимым, так как указанные распределения (хи-квадрат, Стьюдента и F -распределение) строятся на основе нормального распределения, а геометрические свойства последнего в этой ситуации играют ключевую роль. Именно эти геометрические свойства и позволяют сводить проверку гипотезы $H_0: \Theta \in G$ к проверке гипотезы $H_0: \Theta = \Theta_*$. Рассмотрим примеры.

4. Альтмановские оценки экономической стабильности. Согласно Э. Альтману [2, 3], предприятие оценивается как экономически стабильное, если линейная форма $\varphi(X) = C^T X$, $C^T = (c_1, c_2, \dots, c_k)$, от вектора экономических показателей $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ($k = 5$) превышает некоторый заранее указанный уровень φ_C , и как нестабильное (несостоятельное), когда оказывается ниже уровня φ_R ($\varphi_C > \varphi_R$). Компоненты C , а также значения φ_C и φ_R определяются статистически по общей массе предприятий.

Оптимистично предположим, что X подчиняется многомерному нормальному распределению $X \sim N(\Theta, V_X)$, что допустимо в случаях, когда вероятностное распределение X достаточно локализовано в центральной части области допустимых значений. Предположим, что по выборке наблюдений по-

лучены несмещенные оценки параметров распределения

$$\hat{\Theta} = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{V}_X = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\Theta})(X_i - \hat{\Theta})^T.$$

В данном случае проверка гипотезы о экономической несостоятельности предприятия $H_0: \Theta \in G_R$, $G_R = \{X : \varphi(X) < \varphi_R\}$, сводится к проверке гипотезы $H_0: \Theta = \Theta_*$, при условии $\Theta_* = X_R$. Здесь X_R — точка касания эллипсоида $W_\gamma = \{X : f(X) = f_R\}$ с гиперплоскостью $\varphi(X) = \varphi_R$ (т. е. с ∂G) вычисляется непосредственно по формулам [4]

$$X_R = \hat{\Theta} + \lambda \hat{V}_X C, \quad \lambda = (\varphi_R - C^T \hat{\Theta})(C^T \hat{V}_X C)^{-1}. \quad (3)$$

Величина $C^T \hat{V}_X C$ обращается в ноль только в случаях, когда распределение X вырождено (вырождена и матрица $\hat{V}_X$) и дисперсия X в направлении вектора C равна нулю (относительная стабильность). Гипотеза H_0 будет отвергнута, если вероятностная мера области, ограниченной W_γ , больше $(1 - \alpha)$. При относительно небольшом объеме выборки (n) для проверки H_0 можно воспользоваться статистикой $r = (X_R - \hat{\Theta})^T Q_m \Lambda_m^{-1} Q_m^T (X_R - \hat{\Theta}) \sim \chi_m^2$, или, распределенными по Стюденту с числом степеней свободы $\nu = n - 1$ компонентами $S = \Lambda_m^{-1/2} Q_m^T (X_R - \hat{\Theta})$ (см. выше). В полной экономической состоятельности можно убедиться, проверяя гипотезу $H_0: \Theta \in G_N \cup G_R$, где $G_N = \{X : \varphi_R(X) < \varphi_C\}$ — область неопределенности. В этом случае $Q_* = X_C$, где X_C вычисляется по формулам (3) при замене φ_R на φ_C .

5. Устойчивость модели Вольтерры. Предположим, что ставится задача по рядам наблюдений двух величин x и y построить модель их динамического взаимодействия, известную как модель Вольтерры и имеющую следующий вид [5, 6]

$$\frac{\dot{x}}{x} = \alpha_1 + \beta_{11}x + \beta_{12}y, \quad \frac{\dot{y}}{y} = \alpha_2 + \beta_{21}x + \beta_{22}y. \quad (4)$$

Начнем с идентификации (4). В зависимости от точности разностной аппроксимации производных в левой части (4) объем выборки n может сократиться на одну-две единицы. Реализации левых частей системы (4) обозначаем через φ_i и ψ_i , соответственно, а реализации переменных x и y — через x_i и y_i , где $i = \overline{1, n}$. Перейдем к центрированным значениям $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}$ — среднее арифметическое (с остальными переменными поступим аналогично). Построим выборочную матрицу левых частей системы (4):

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\varphi}_2 & \cdots & \tilde{\varphi}_n \\ \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_n \end{pmatrix}.$$

Пусть P — ортогональная матрица, такая, что $P^T A A^T P$ диагональная. Тогда в строках матрицы $D = P^T A$ стоят реализации независимых нормально распределенных величин, которые мы обозначим через z_1 и z_2 . Рассмотрим систему регрессионных уравнений

$$z_1 = b_{11}x + b_{12}y + \varepsilon_1, \quad z_2 = b_{21}x + b_{22}y + \varepsilon_2. \quad (5)$$

Обозначим через B_z 2×2 -матрицу параметров системы (5). Тогда МНК-оценка матрицы этих параметров равна

$$\hat{B}_z = DY^T(YY^T)^{-1}, \quad Y = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_m \\ \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \dots & \tilde{y}_m \end{pmatrix}.$$

Здесь Y матрица центрированных реализаций переменных x и y . Остатки регрессии (5) ε_j ($j = 1, 2$) имеют нулевое среднее значение, а несмещенные оценки дисперсий этих остатков равны:

$$\hat{\sigma}_j^2 = (n-3)^{-1} \sum_{i=1}^n (z_{ji} - \hat{b}_{j1}x_i - \hat{b}_{j2}y_i)^2 = (n-3)^{-1} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{ji})^2.$$

МНК-оценка матрицы коэффициентов при переменных в правой части (4) равна

$$\hat{B} = AY^T(YY^T)^{-1} \quad (\hat{\alpha}_1 = \bar{\varphi} - \hat{\beta}_{11}\bar{x} - \hat{\beta}_{12}\bar{y}, \quad \hat{\alpha}_2 = \bar{\psi} - \hat{\beta}_{21}\bar{x} - \hat{\beta}_{22}\bar{y}).$$

Из соотношения $\hat{B} = P\hat{B}_z$ следует, что векторы $\hat{\beta}^T = (\hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{12}, \hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{22})$ и $\hat{b}^T = (\hat{b}_{11}, \hat{b}_{12}, \hat{b}_{21}, \hat{b}_{22})$ связаны соотношением $\hat{\beta} = R\hat{b}$, где ортогональная матрица R составлена из элементов P , т. е.

$$R = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & p_{21} & 0 & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже, для какой-либо матрицы $B = (\beta_{ij})$ размера 2×2 через β обозначается ее развертка в столбец, так что $\beta^T = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22})$.

Матрица взаимных ковариаций компонент вектора $\hat{b}$, в силу независимости z_1 и z_2 , имеет блочную структуру и равна

$$V_{\hat{b}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2(YY^T)^{-1} & O \\ O & \hat{\sigma}_1^2(YY^T)^{-1} \end{pmatrix},$$

где каждый блок относится к паре коэффициентов соответствующего уравнения, а матрица взаимных ковариаций $\hat{\beta}$ равна $V_{\hat{\beta}} = RV_{\hat{b}}R^T$.

Убедиться в устойчивости решения системы (4) можно проверкой гипотезы, что вектор истинных значений принадлежит некоторой области пространства параметров $H_0: \beta \in G$ при условии, что $\hat{\beta} \sim N(\beta, V_{\hat{\beta}})$. В этом случае граница области параметров, приводящих к неустойчивым решениям, ∂G представляется, как указано выше в задаче (2), некоторым набором гладких поверхностей $\{w_j(\beta) = 0 : j = \overline{1, l}\}$.

Одно из толкований устойчивости может быть связано с признаками устойчивости основной стационарной точки $\rho_*(\beta) = (x_*(\beta), y(\beta)_*)$, которая определяется как решение системы уравнений:

$$\alpha_1 + \beta_{11}x_* + \beta_{12}y_* = 0, \quad \alpha_2 + \beta_{21}x_* + \beta_{22}y_* = 0.$$

Чтобы выполнить линеаризацию в окрестности точки $\rho_*(\beta)$, достаточно представить систему (4) в следующем виде:

$$\dot{\zeta} = \Gamma(\beta)\zeta + O(|\zeta|^2), \quad \zeta^T = (x - x_*(\beta), y - y(\beta)_*).$$

В результате будет получена некоторая матрица $\Gamma(\beta)$ размера 2×2 . Далее, если ввести функции

$$w_1(\beta) := \det \Gamma(\beta), \quad w_2(\beta) := \operatorname{tr} \Gamma(\beta), \quad w_3(\beta) := \beta_{12}, \quad w_4(\beta) := \beta_{21},$$

то одна из областей устойчивости (обозначим её через G) определяется неравенствами:

$$w_1(\beta) > 0, \quad w_2(\beta) < 0, \quad w_3(\beta) < 0, \quad w_4(\beta) > 0.$$

Другая область устойчивости (обозначим её через G') отличается следующими изменениями: $w_3(\beta) > 0$, $w_4(\beta) < 0$.

Решив (2) и выбрав в качестве β_* точку, дающую максимальное значение $f(\beta_*, \hat{\beta}, V_{\hat{\beta}}) = f_Y$, сравниваем вероятностную меру W_Y (см. выше) с $(1 - \alpha)$. В случае относительно небольшого объёма выборки для проверки H_0 здесь также можно воспользоваться хи-квадрат статистикой $r = (\beta_* - \hat{\beta})^T V_{\hat{\beta}}^{-1} (\beta_* - \hat{\beta})$ с числом степеней свободы равном 4, так как вырожденность $V_{\hat{\beta}}$ в этом случае означала бы линейную связь между x и y , т. е. нецелесообразность модели (4). Компоненты вектора $S = V_{\hat{\beta}}^{-1/2} (\beta_* - \hat{\beta})$ здесь будут иметь распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 3$.

В данном случае, как было отмечено выше, когда параметры оцениваются по регрессионной схеме, кроме хи-квадрат статистики и статистики Стьюдента для проверки исходной гипотезы можно построить F -статистику.

Пусть имеет место условие $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, статистическая проверка которого сводится к F -критерию и является хорошо известным хрестоматийным примером; тогда исходная гипотеза может быть проверена посредством статистики

$$\mu = \frac{(\beta_* - \hat{\beta})^T R M R^T ((\beta_* - \hat{\beta})/4)}{(\sum_{i=1}^n (\varepsilon_{1i})^2 + \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{2i})^2)/(2n - 6)} \sim F_{4, 2n-6}, \quad M = \begin{pmatrix} Y Y^T & O \\ O & Y Y^T \end{pmatrix}.$$

В знаменателе статистики μ стоят суммы квадратов остатков регрессионных уравнений (5). Если же условие $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ не проходит статистическую проверку, то для $j = 1, 2$ имеем:

$$\mu_j = \frac{(\beta_{*j} - \hat{\beta}_j)^T Y Y^T ((\beta_{*j} - \hat{\beta}_j)/2)}{(p_{j1}^2 \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{1i})^2 + p_{j2}^2 \sum_{i=1}^n (\varepsilon_{2i})^2)/(n - 3)} \sim F_{2, n-3},$$

где $\beta_{*j} = (\beta_{*j1}, \beta_{*j2})^T$, $\hat{\beta}_j = (\hat{\beta}_{j1}, \hat{\beta}_{j2})^T$.

Заключение. Предложенный подход к проверке статистических гипотез относительно вектора параметров позволяет решать достаточно широкий класс задач математического моделирования, что, в свою очередь, иллюстрируют и приведенные выше примеры.

Литература

- [1] Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980. – 456 с.
- [2] Altman E. Managing Credit Risk, 2nd Edition. – John Wiley and Sons, 2008.
- [3] Altman E. Corporate Financial Distress and Bankruptcy, 3rd edition. – John Wiley and Sons, 2005.
- [4] Пичугин Ю. А. Вероятностные оценки риска и надежности в экономике // Научная сессия ГУАП: Сб. докл.: В 3-х ч. Ч. 1. Технические науки. – СПб.: ГУАП, 2013. – С. 195–196.
- [5] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. – М.: Физматлит, 2010. – 400 с.
- [6] Кондрашков А. В. О средствах анализа экономических процессов с использованием непрерывной шкалы времени // Сб. научных статей Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы предпринимательства в условиях кризиса», 30 сентября 2010. Том 1. – СПб.: СПбГУСЭ, 2010. – С. 330–332.

АВТОГЕНЕРАЦИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: aflegontoff@herzen.spb.ru

Prosenkova Yu. B., Flegontov A. V. The Autogenerate of test tasks. In the represented work are considered the original approaches to the creation of software able to structure training materials, to generate test questions and answers, as well as to assist students in finding information in the database of training materials.

В представленной работе рассматриваются оригинальные подходы к созданию программного продукта, способного структурировать имеющиеся учебные материалы, генерировать тестовые вопросы и ответы, а также оказать помощь обучающимся при поиске информации в базе учебных материалов.

В рамках проводимых научно-образовательным центром «Информационные технологии и системы моделирования» РГПУ им. А. И. Герцена прикладных и научных исследований по автоматизации аналитической поддержки принятия экспертных решений, одним из приоритетных направлений работ было определено развитие методов и технологий на основе алгоритмов обработки текстов [1, 2].

Рассматривается программная разработка по автогенерации тестовых заданий из произвольного текстового файла, содержащего какие-либо определения. Исходный файл берется из произвольного учебного материала представленного в электронном виде в текстовом формате. Первая версия программного продукта реализована средствами языка программирования C#, вторая –

средствами языка программирования Qt/C++. Осуществлена проверка достоверности работы программы для различных предметных областей. Произведена оценка эффективности работы алгоритма по временным показателям и оценка сложности.

Разработанная программа по автогенерации тестов является уникальной, так как для проведения тестирования нет необходимости специального формирования вопросов к тесту или поиска уже существующих тестов. Для составления теста достаточно подать на вход программе текст учебного материала, по которому программа сама составит вопросы с вариантами ответов и представит полученные тестовые задания в удобной для проведения тестирования форме. При каждом вызове программы создается новый тест – вопросы с вариантами ответов по определениям, встречающимся в учебном материале. На данный момент программа работает со структурированными текстами, но ведутся исследования по расширению возможностей для составления вопросов. Программа автогенерации тестов может быть использована в процессе обучения в средних и высших учебных заведениях для контроля усвоения материала обучающимися.

Программа адаптирована под операционную систему Windows XP/Vista /7/8, в связи с этим, кодировка текста не должна отличаться от кодировки, используемой по умолчанию в данной операционной системе для русскоязычных текстов (Windows–1251). Сами учебные материалы должны быть представлены в текстовом формате, обычно это документы с расширением *.txt, однако подходит и любое расширение, использующееся для хранения текстовых данных без форматирования (например, *.ini, *.sgml, *.html, *.xml, *.cpp и др.)

Алгоритм обработки полученного текста состоит из следующих этапов:

- 1) создается список со всеми определениями по тексту;
- 2) по всем определениям из списка создается список понятий;
- 3) из списка определений выбирается n определений для создания базовых, где n – это количество вопросов. Для каждого из этих определений:
 - а) берется описание понятие и переформулируется в вопрос;
 - б) берется понятие и помещается на произвольную позицию варианта ответа (к каждому вопросу предлагается 4 варианта ответов);
 - в) остальные варианты ответов заполняются произвольными понятиями из списка понятий.

По данному алгоритму формируется список из n различных вопросов, к каждому из которого есть 4 варианта ответов с единственным правильным ответом на произвольной позиции.

При выборе некорректного исходного текста программа завершает свою работу. Под некорректным текстом понимается:

- 1) текстовый файл, сохраненный в кодировке, отличной от Windows–1251;
- 2) текстовый файл, в форматированном виде, т. е. в виде, где к каждому символу может быть применено форматирование (шрифт, начертание, размер и т. п.);
- 3) в текстовом файле отсутствуют определения или их меньше n ;
- 4) в тексте присутствуют определения, но их структура не удовлетворяет структуре, описанной выше.

После составления вопросов и ответов программа отображает их в виде

тестовых заданий на экране, с возможностью ответов на каждый вопрос. Каждый вопрос отображается в отдельном окне. Необходимо ответить на текущий вопрос, чтобы перейти к следующему вопросу. При переходе к следующему вопросу учитывается правильность полученного ответа на текущий вопрос. Таким образом по завершении тестирования будет известно общее количество вопросов и количество правильных ответов, на основании чего может быть выставлена оценка за прохождение теста.

Литература

- [1] Фомин В. В., Флегонтов А. В., Лаптев В. В. Смена парадигмы в области новых технологий интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки. № 3 (15). 2012. – С. 3–12.
- [2] Флегонтов А. В. Направления совершенствования программного инструментария интеллектуального анализа данных // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2012. Материалы научной конференции, 16–21 апреля 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 246–249.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОСТРОЕНИЮ ЗАПРОСОВ В SQL-ОРИЕНТИРОВАННОЙ СУБД

Фомин В. В.*, Фомина И. К.**

* Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

** Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург
e-mail: fominga@list.ru

Fomin V., Fomina I. Recommendations for building queries in SQL-oriented database. Presented problems and tasks of optimization SQL-oriented languages of database management under development and translation.

Представлены проблематика и задачи оптимизации SQL-ориентированных языков управления базами данных и пути их решения на стадии проектирования и трансляции.

Достаточно полный и актуальный в настоящее время обзор подходов к оптимизации запросов в SQL-ориентированных СУБД приведен у Кузнецова [1].

Будем выделять два направления оптимизации запросов в рамках реляционных SQL СУБД (системы управления базами данных): на стадии трансляции и на стадии проектирования и разработки.

Первое направление связано с автоматизацией процесса трансляции и получения эффективных алгоритмов выполнения. Существующие проблемы и задачи этого направления решаются в рамках теорий алгоритмов, формальных языков и трансляторов.

Обработка запроса состоит из нескольких этапов. На начальном этапе запрос подвергается обязательному лексическому и синтаксическому анализу. На выходе мы имеем прото-структуру его внутреннего строения, отражающую структуру запроса и содержащую информацию, которая характеризует объекты базы данных (отношения, атрибуты и константы). Внутреннее представление является исходным данным для последующих оптимизационных преобразований, что предъявляет особые требования к его организации.

На втором этапе запрос в своем внутреннем представлении подвергается логической оптимизации. Среди проводимых преобразований могут быть эквивалентные преобразования, после проведения которых, получается внутреннее представление, семантически эквивалентное начальному (например, приведение запроса к некоторой канонической форме). Преобразования могут быть и семантическими, когда получаемое представление не является эквивалентным начальному, но гарантирует, что результат выполнения преобразованного запроса совпадает с результатом запроса в начальной форме при соблюдении ограничений целостности, существующих в базе данных.

Третий этап обработки запроса состоит в выборе на основе априорной информации набора альтернативных процедурных планов выполнения данного запроса. Из полученных альтернативных планов выбирается наиболее эффективный. При оценках используется статистическая информация о состоянии базы данных. В конце обработки запроса происходит его реальное выполнение – это либо выполнение соответствующей подпрограммы, либо вызов интерпретатора с передачей ему выполняемого плана.

Некоторые методы оптимизации (и даже подходы к оптимизации) довольно сильно зависят от общей организации обработки запроса. При отрыве во времени процесса компиляции от реального выполнения запроса оптимизатор располагает меньшей и менее достоверной информацией, чем в том случае, когда этап компиляции тесно привязан к этапу выполнения (выполняется в рамках транзакции пользователя).

При классическом подходе к организации оптимизаторов запросов на этапе логической оптимизации производятся некоторые эквивалентные преобразования внутреннего представления запроса, которые «улучшают» начальное внутреннее представление по некоторым фиксированным в оптимизаторе плане. При этом «улучшение» носит достаточно условный характер, т. е. тесно связано со спецификой общей организации оптимизатора, в частности, с тем, как устроена третья фаза обработки запроса.

В силу указанной специфики достаточно трудно привести полную характеристику и классификацию методов логической оптимизации. Очевидный класс логических преобразований составляют преобразования, связанные с приведением предикатов, задающих условие выборки в данном запросе, к каноническому представлению. Приведение предикатов к каноническому виду оправдано всегда, но сами канонические представления могут быть различными для предикатов, обладающих разными свойствами.

Отметим, что хотя немногие реляционные системы имеют языки запросов, основанные в чистом виде на реляционной алгебре, приведенные правила преобразований алгебраических выражений могут быть полезны и в других системах. Довольно часто реляционная алгебра используется в качестве основы внутреннего представления запроса, т. е. запрос в начальном представлении преобразуется к алгебраической форме, и следующие стадии оптимизации производятся над этим представлением. Естественно, что после этого можно выполнять и алгебраические преобразования.

Завершающий этап оптимизации – семантическая оптимизация. Семантическая оптимизация основана на наличии в базе данных семантической информации, применение которой может привести к его более оптимальному выполнению. При семантической оптимизации производится множество преобразованных внутренних представлений запроса; в каждом преобразовании используется некоторый поднабор ограничений целостности.

Каждое из полученных внутренних представлений подвергается полной дальнейшей обработке, включая логическую оптимизацию и выбор оптимального плана выполнения. Затем из полученных планов (все они семантически эквивалентны, т. е. вырабатывают один и тот же результат) выбирается наиболее дешевый, который и становится реальным планом выполнения исходного запроса.

Проблема построения полного набора семантически эквивалентных представлений запроса на основе заданного набора правил в общем случае является весьма сложной. Точное решение этой проблемы может потребовать затрат, соизмеримых с затратами на выполнение запроса по наиболее оптимальному плану. Поэтому здесь применяют эвристические алгоритмы, сокращающих пространство поиска, задающие условие прекращения генерации новых представлений. Эвристики основываются на минимизации взвешенной суммы стоимостей семантической оптимизации и выполнения запроса. Примером грубой эвристики может быть следующий: оптимизация производится до тех пор, пока затраты на нее не превзойдут оценочную стоимость наиболее эффективного из всех найденных планов выполнения запроса. Во всех существующих направлениях, связанных с оптимизацией, наряду с определенными достижениями остается множество нерешенных проблем.

Вторым, существенным направлением повышения эффективности СУБД, является проблема учёта и использования процедур, методик, подходов формулирующих процесс прагматического проектирования. К сожалению, на сегодняшний день, большинство задач решаемых в данном направлении с трудом поддаётся формализации и зависит от умения и опыта разработчика информационной системы и относятся к разряду задач программной инженерии [2, 3].

1. Информационный фонд. Одним из факторов некачественной информационной системы построенной на основе реляционной модели данных является неадекватность логической структуры базы данных (таблиц и их отношений) требуемой структуре запросов. Это обусловлено, как правило, двумя основными причинами:

1. Ошибки проектирования информационного фонда на начальном этапе разработки. При синтезе структуры базы данных, как правило, включаются

только структуры входных данных и элементы описания предметной области и часто не учитываются и не интегрируются структуры выходных данных. Таким образом, изначально закладывается эффект нарушения целостности данных и, как следствие, – доделка, доработка, корректировка в авральном режиме уже сформированной и нормализованной информационной системы за счет разработки и изменений алгоритмов обработки.

2. Эволюция запросов. Со временем структура выходных данных претерпевает изменения при неизменной структуре базы данных, и чем значительнее изменение в запросах, тем больше усилий по построению и применению адекватных процедур обработки.

В целом, согласно теории реляционных моделей данных, «идеально» спроектированный информационный фонд никогда не должен претерпевать логической перестройки – ни в структуре хранилища данных (файлов) ни в структуре порождаемых запросами таблиц.

Типичными показателями такой неадекватности информационного фонда являются команды SQL-запросов с элементами синтаксиса:

- Объединение двух и более таблиц (FROM t1,t2..).
- Наличие соединения по ключам (WHERE t1.key=t2.key, JOIN).

Основная характеристика оптимизации – общее время выполнения запросов.

Класс рекомендаций: **оптимизация исходной структуры баз данных.**

2. Процедуры обработки. Значительную нагрузку на процесс извлечения данных оказывает неэффективная последовательность действий или отдельных команд.

Причины неэффективности:

1. Многократное повторение одних и тех же операций над одними и теми же данными.

Показателями являются: подряд идущие запросы, в каждом из которых стоит группировка (DISTINCT или GROUP BY) и (или) индексация по одним и тем же атрибутам, но, допустим, с разными предикатами (WHERE).

Пример.

```
Select distinct  a,b,c  from  t1  OREDER BY  a  where  b > 10
Select distinct  a,b,c  from  t1  OREDER BY  a  where  c = «HORS»
..
Select distinct  a,b,c  from  t1  OREDER BY  a  where  a < 1000
```

В таких случаях лучше изначально один раз произвести обработку данных с формированием промежуточных данных (CURSOR или TAG или CREATE TABLE tmpFile).

```
Select distinct  a,b,c  from  t1  OREDER BY  a  INTO  Cursor  curTMP
Select  *  from  curTMP  where  b > 10
Select  *  from  curTMP  where  c = «HORS»
..
Select  *  from  curTMP  where  a < 1000
```

2. Неэффективное применение последовательности предиката.

Показателями являются подряд или (почти подряд) идущие сопоставимые предикаты.

Пример.

```
Select * from t1 where a < 100
Select * from t1 where a < 1000
```

Если массив данных таблицы *t1* большой, то можно выиграть значительно во времени обработки, применив ту же идею промежуточных данных и поменяв местами предикаты:

```
Select * from t1 where a < 1000 INTO Cursor curTMP
Select * from t1 where a < 100
```

Класс рекомендаций: оптимизация последовательности запросов.

Вообще, здесь есть, что применить из теории алгоритмов и семиотического моделирования [2]. Но ряд прогнозных тем (с разными подсказками и сообщениями) и так очевиден.

3. Синтаксис команд. Иногда для выполнения одних и тех же операций обработки данных можно использовать разные команды SQL, с изначально декларируемой разной скоростью выполнения. Остается только указать на выбор оптимальной команды.

К синтаксически «оптимальным» командам можно отнести.

1. Внешнее соединение таблиц (JOIN) в противовес внутреннему соединению (WHERE).

Пример.

```
Select t1.a, t2.b from t1,t2 where t1.c = t2.d
```

Лучше поменять на адекватную, но более быструю по исполнению команду:

```
Select t1.a, t2.b from t1 [INNER] JOIN t2 ON t1.c = t2.d
```

Как правило, в трансляторах SQL декларируется предпочтение по скорости выполнения именно команды JOIN

2) Некоторые функции.

Пример.

```
Select * from t1 where 0 < (select count (*) from t2..)
```

Лучше когда функция «EXISTS»

```
Select * from t1 where EXIST (select * from t2..)
```

3. Нерациональное построение предиката с позиции булевой алгебры.

Пример.

```
Select * from t1 where (a > 100 and a < 1000) and a > 600
```

Сокращаем.

```
Select * from t1 where a > 600 and a < 1000
```

За счет сокращения суммарных логических операций можно достигнуть повышения эффективности отдельного запроса.

Класс рекомендаций: оптимизация методики использования выборки данных на уровне формирования отдельных запросов. Данный подход не очень эффективен и зависит от достоверности заявленных возможностей трансляторов. В одних трансляторах одни операторы могут быть быстрее, в других – другие, а про некоторые ничего не известно. Эффективность внедрения сильно зависит от профессиональности эксперта по применению и знанию самих этих языков.

Литература

- [1] Кузнецов С. Методы оптимизации выполнения запросов в реляционных СУБД. Центр информационных технологий.
URL: [http: www.citforum.ru/database/articles/art_26.shtml](http://www.citforum.ru/database/articles/art_26.shtml)
(дата обращения: 20.02.2014).
- [2] Фомин В. В. Методологические основы автоматизации проектирования информационных систем управления // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2010. Материалы научной конференции, 12–17 апреля 2010. – СПб.: БАН, 2010. – С. 157–160.
- [3] Фомина И. К. Повышение эффективности управления автоматизированными корпоративными системами // Экономическое возрождение России, № 4 (34), 2012. – М.: Издание Института нового индустриального развития (ИНИР), 2012. – С. 265–269.

ТРЕХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА АДАПТИВНОГО АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Чертовской В. Д.

Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург

Chertovskoy V. D. The three-levels system for adaptive automatized control.

The possibility to use three-levels structure for research multilevel adaptive automatized control systems.

Рассмотрены возможности использования трёхуровневой структуры для исследования многоуровневых адаптивных автоматизированных систем управления.

Введение. С переходом к рыночным отношениям стала актуальной проблема исследования систем управления производством с оперативным переходом на выпуск новой продукции [1]. Такие системы являются новым классом адаптивных автоматизированных систем, в которых цель изменяется в процессе функционирования. Компенсация таких изменений осуществляется модификацией структуры системы.

Постановка задачи. Известно, что адаптивные системы имеют не менее двух структурных уровней. Автоматизированная система имеет в общем случае много уровней, совместное изучение которых слишком сложен. Это связано прежде всего с уменьшением масштаба по времени на нижних уровнях. Целесообразно поэтому общую задачу исследования упростить каким-либо образом.

Системный анализ процедуры адаптации в автоматизированных системах с серийным типом производства позволил выявить универсальную трёхуровневую структуру. Если её заставить «скользить» по многоуровневой системе, то общую задачу удаётся декомпозировать.

В частности, возможно предложить две связанные трехуровневые структуры:

руководство (уровень $h = 3$) – диспетчер ($h = 2$) – начальники цехов ($h = 1$) – цехи ($h = 0$);

цех – технологическая линия участков – начальники участков – участки.

При серийном производстве исследование каждой из структур может быть осуществлено одними и теми же методами. В силу этого результаты изучения пригодны для любой структуры.

Решение задачи. Решение «многоуровневой задачи» целесообразно выполнить однородным методом [1, 2]. Описание как процесса планирования, так и процесса управления проводится с использованием задачи динамического линейного программирования (ДЛП), представляющего сочетание задачи известного статического программирования (СЛП) и совокупности дифференциальных (разностных) уравнений.

Даже при такой декомпозиции задача остается сложной и одним из способов ее решения является компьютерное моделирование системы. Здесь возник-

кает проблема получения для указанных задач числовых данных, что связано с информационной неопределённостью и наличием человеческого фактора. В силу этого предложено моделировать числовые данные.

Дифференциальные уравнения задачи ДЛП моделируются элементарными звеньями, принятыми в теории автоматического управления. Для составляющей СЛП полезно использовать так называемую обратную задачу.

Задача СЛП в общем случае имеет вид

$$\mathbf{D}\mathbf{N}_k \leq \mathbf{X}_k \leq \mathbf{D}\mathbf{V}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{N}_k \leq \mathbf{A}_k\mathbf{X}_k \leq \mathbf{B}_k, \quad (2)$$

$$G = \mathbf{C}_k \mathbf{X}_{k \rightarrow \max}, \quad (3)$$

где $\mathbf{X}_k$ – вектор–столбец искомого плана; $\mathbf{DN}_k$, $\mathbf{DV}_k$ – вектор–столбцы нижнего и верхнего ограничений на план; $\mathbf{A}_k$ – матрица размерности $M_k \times N_k$ норм расходов ресурсов; C_k – вектор–строка прибыли от единицы плановой продукции; $\mathbf{BN}_k$, $\mathbf{BV}_k$ – вектор–столбцы нижней и верхней границ ресурсов; $k = 1, \dots, K$ – номер структурного элемента в последовательной цепочке диспетчерского уровня. В дальнейшем полагаем $\mathbf{DN}_k = \mathbf{BN}_k = 0$. Выходом является вектор $\mathbf{X}_k$, входом – векторы $\mathbf{BV}_k = \mathbf{B}_k$.

В часто применяемой прямой задаче исходными являются векторы $\mathbf{DN}_k$, $\mathbf{DV}_k$, $\mathbf{BN}_k$, $\mathbf{BV}_k$, C_k , матрица $\mathbf{A}$, ищется вектор $\mathbf{B}_k$.

В качестве компьютерного генератора отдельной задачи выбран алгоритм Р. Габасова.

Обратная задача позволяет, как показано в работе [2], построить модели всех уровней как процесса планирования (рис. 1 для диспетчерского уровня), так и процесса управления.

Сложнее обстоит дело с моделированием в рамках пакета MatLab процесса управления.

1. Ввод в элемент MATLAB Function две внешние переменные (целевая функция и ресурсы).
2. Преобразование непрерывных переменных ввода в дискретный вид, который требуется в программе.

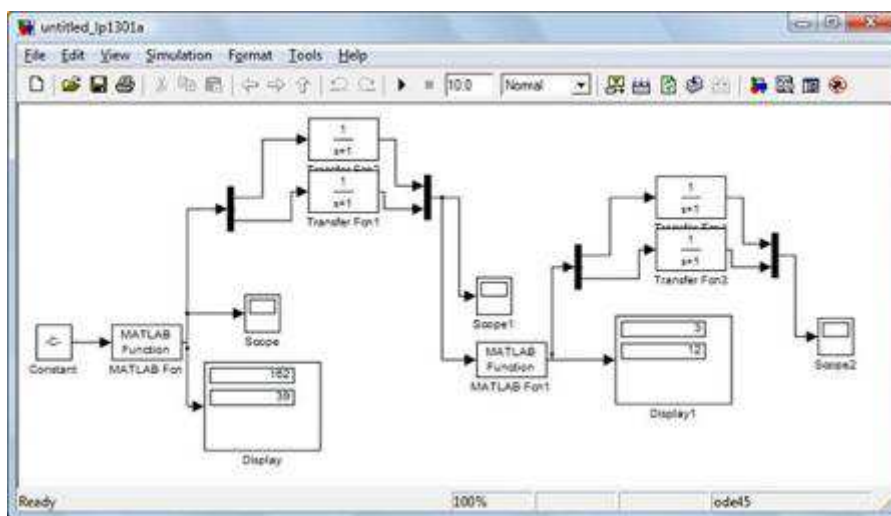


Рис. 1. Модель диспетчерского уровня процесса планирования.

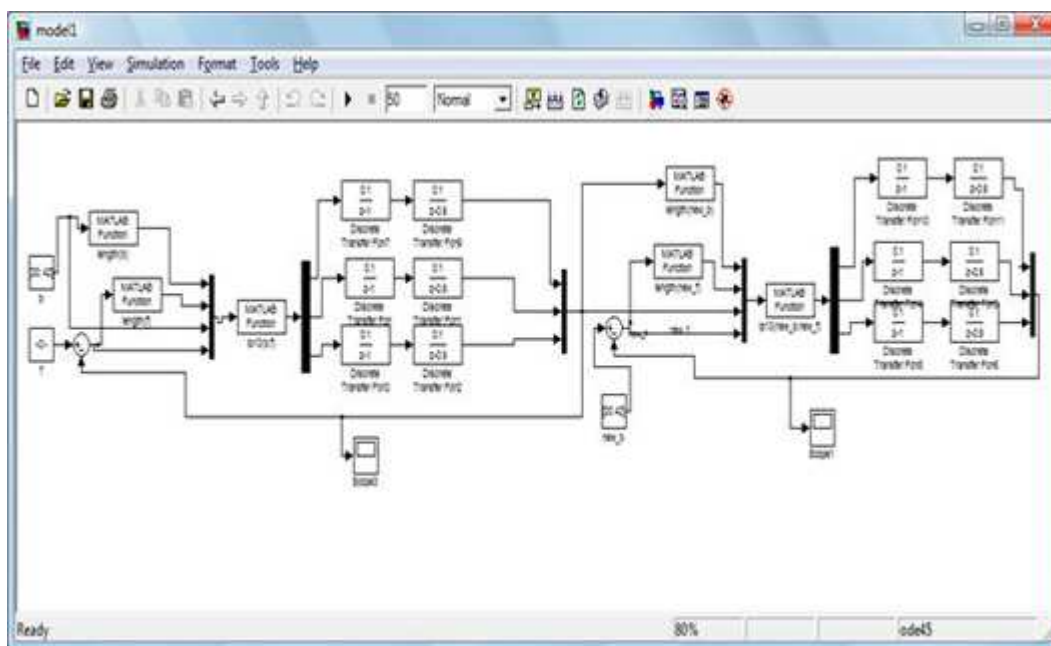


Рис. 2. Модель процесса управления для диспетчерского уровня.

Здесь пришлось рассмотреть следующие вспомогательные задачи.

Эти задачи были успешно решены, что позволило автору реализовать модель, представленную на рис. 2. Вместе с ней была смоделирована задача уровня руководства ($h = 3$).

Заключение. Показаны возможности исследования многоуровневых систем автоматизированного управления с помощью моделирования системы с трёхуровневой структурой. В ней легко учитывается наличие склада, решаются задачи совместного изучения процессов управления, согласования экономических интересов; изучения динамики в многоуровневой системе.

Литература

- [1] Чертовской В. Д. Интеллектуализация автоматизированного управления производством. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 164 с.
- [2] Чертовской В. Д. Решение обратной задачи линейного программирования // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2013. Материалы научной конференции. – СПб.: РГПУ, 2013. – С. 276–279.

О МЕТОДЕ ПРЯМОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО СПЕКТРА ДЛЯ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Шуплецов Ю. В.

Санкт-Петербургский Государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: yury.shupletsov@gmail.com

Shupletsov Yu. V. On some aspects of direct calculation of the multifractal spectrum. One of the methods to obtain statistical characteristics of an digital image is so called multifractal formalism. The method relies on the assumption that most of images can be considered as phase portraits of complex dynamical systems and can be described by a measure distribution. This distribution can be set using not one but several scales (measures). Multifractal formalism describes the statistical properties of the measure in terms of singular spectrum or generalized dimensions. In this paper we investigate the possibility of applying the method of direct calculation of multifractal spectrum to analysis of certain classes of biomedical preparations images. This method offers an image partition on a specially constructed subsets and calculation of fractal dimensions for each of them. In some cases the method is more preferable than the calculation of generalized dimensions.

Одним из методов получения статистических характеристик является так называемый мультифрактальный формализм. В основе метода лежит предположение о том, что многие процессы, особенно биологические, развиваются по степенным законам и, следовательно, их фазовые портреты характеризуются таким неоднородным распределением некоторой меры, которое может быть описано с использованием не одной, а нескольких шкал (масштабов). Мультифрактальный формализм описывает статистические свойства этих мер в терминах сингулярных спектров или в терминах обобщённых размерностей.

В данной работе исследуется возможность применения метода вычисления прямого мультифрактального спектра к анализу изображений некоторых классов биомедицинских препаратов. Этот метод предлагает разбиение изображения на набор уровней, в каждом из которых будет происходить вычисление фрактальной размерности изображения. Большим преимуществом метода является то, что получаемый спектр инвариантен относительно билипшицевых отображений.

Введение. Статья посвящена применению метода прямого вычисления мультифрактального спектра для классификации изображений биомедицинских препаратов.

Анализируемые изображения часто имеют структуру, которая не моделируется одним фрактальным множеством, а представляет собой объединение нескольких взаимопроникающих фракталов, каждый из которых имеет свою собственную размерность. Подобные изображения, как правило, характеризуют поведение сложных динамических систем и могут рассматриваться как их фазовые портреты, полученные в различные промежутки времени. Для характеристики свойств таких систем применяются статистические описания, например, распределение некоторой меры по фазовому объёму.

Одним из методов получения статистических характеристик изображения является так называемый мультифрактальный формализм. В основе метода лежит предположение о том, что многие процессы, особенно биологические, развиваются по степенным законам и, следовательно, их фазовые портреты характеризуются таким неоднородным распределением некоторой меры, которое может быть описано с использованием не одной, а нескольких шкал (масштабов). Мультифрактальный формализм описывает статистические свойства этих мер в терминах сингулярных спектров или в терминах обобщённых размерностей. Описание этого формализма можно найти в [3, 4]. Известно, что мультифрактальный спектр и спектр обобщённых размерностей представляют собой два способа описания одной динамики. Они связаны между собой преобразованием Лежандра. Поскольку обобщённые размерности (спектр Реньи) появились в литературе раньше, то часто используется их вычисление, а затем получение мультифрактального спектра с помощью преобразования Лежандра. Однако, как было показано в [2], такая схема может приводить к большим погрешностям, поэтому иногда предпочтительнее использовать прямое вычисление мультифрактального спектра. Авторы [2] рассмотрели метод, основанный на вычислении статистической суммы. Мы используем подход, основанный на вычислении функции плотности в точке изображения [5]. Все точки изображения разбиваются на множества уровня (категоризация) – множества точек с близкой плотностью. Фрактальные размерности множеств уровня дают нам мультифрактальный спектр. В данной работе прямое вычисление мультифрактального спектра было использовано для классификации изображений некоторых классов биомедицинских препаратов. На основе численных экспериментов можно сделать выводы о применимости метода к определенным классам изображений.

Метод прямого вычисления мультифрактального спектра.

Описание метода. Покроем носитель меры ячейками размера l и определим $P_i(l)$ как вероятность находиться в i -ой ячейке. Тогда мы можем определить показатель (силу сингулярности) α_i следующим образом: $P_i(l) \sim l^{\alpha_i}$. E_α – наборы ячеек с близкими значениями α . Пусть число ячеек, где сила сингулярности меняется в пределах от α до $\alpha + d\alpha$ есть $N(\alpha)$. Определим $f(\alpha)$ как фрактальную размерность множества E_α следующим способом: $N(\alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$. Таким образом, изображение может быть представлено в виде взаимопроникающих множеств, каждое из которых имеет свою собственную фрактальную размерность. Набор этих размерностей называется мультифрактальным спектром.

Пусть $B(\bar{x}, r)$ – квадрат с центром в точке $\bar{x} \in R^2$ и стороной r . Тогда $\mu(B(\bar{x}, r)) = kr^{d(\bar{x})}(\bar{x})$, где $d(\bar{x})$ – функция плотности и k – некоторая константа. Определим функцию плотности:

$$d(\bar{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(\bar{x}, r))}{\log r}. \quad (1)$$

Множество всех точек $\bar{x}$ с плотностью α :

$$E_\alpha = \{\bar{x} \in R^2 : d(\bar{x}) = \alpha\}. \quad (2)$$

Таким образом, мы получили категоризацию $E_\alpha : \alpha \in R$ изображения. Тогда его мультифрактальный спектр:

$$\{f(\alpha) : \alpha \in R\} = \{\dim(E_\alpha) : \alpha \in R\}. \quad (3)$$

Для подсчёта размерности множества E_α используется ёмкостная размерность:

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\delta(E_\alpha)}{-\log_2 \delta}, \quad (4)$$

где $N_\delta(E_\alpha)$ — количество ячеек диаметра меньше δ для покрытия E_α . Функция плотности точки $\bar{x}$ показывает неравномерность областей, содержащих $\bar{x}$. Мера $\mu(B(\bar{x}, r))$ может быть представлена различными способами, в этой работе мы рассматриваем два из них:

1. $\mu(B(\bar{x}, r))$ — сумма яркостей пикселей.

$$\mu(B(\bar{x}, r)) = \iint_{B(\bar{x}, r)} I(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (5)$$

где $I(\bar{x})$ — значение яркости пикселя.

- 2.

$$\mu(B(\bar{x}, r)) = \iint_{B(\bar{x}, r)} (\nabla^2(I)) d\bar{x}, \quad (6)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа [1].

При работе с изображениями вычисление меры сводится к следующему:

- 1.

$$\mu(B(\bar{x}, r)) = \sum_{B(\bar{x}, r)} I(\bar{x}), \quad (7)$$

где $I(\bar{x})$ — значение яркости пикселя.

- 2.

$$\mu(B(\bar{x}, r)) = \sum_{B(\bar{x}, r)} L(\bar{x}), \quad (8)$$

где $L(\bar{x}) = 8I(\bar{x}) - \sum_{B(\bar{x}, 2) \setminus \bar{x}} I(\bar{x})$

Разные определения функции плотности ведут к разным мультифрактальным спектрам.

Алгоритм вычисления мультифрактального спектра. Пусть у нас есть полутоновое изображение R .

В цикле по α от 1 до 2 с шагом 0.1;

1. Вычисляем меру $\mu(B(\bar{x}, r))$ для каждого пикселя изображения по формуле (7) или (8) для $r = 1, 2, 3, 4, 5$;

2. Вычисляем функцию плотности $d(\bar{x})$ с помощью метода наименьших квадратов по формуле (1);

3. Подсчитываем $N_\delta(E_a)$ для $a \in [\alpha; \alpha + 0.1)$ и $\delta = 1, 2, 3, 4, 5$;
4. Подсчитываем ёмкостную размерность с помощью метода наименьших квадратов.

Результаты экспериментов. Программное средство реализовано на языке Java, что делает его независимым от платформы, на которой выполняется приложение, а простой и понятный интерфейс обеспечивает удобство использования для широкого круга пользователей. Приложение писалось и тестировалось на среде разработки Eclipse 3.5 под Windows XP и Windows 7. В качестве тестовых образцов были рассмотрены снимки биомедицинских препаратов следующих классов: костная и соединительная ткани, кровь, гистологические препараты.

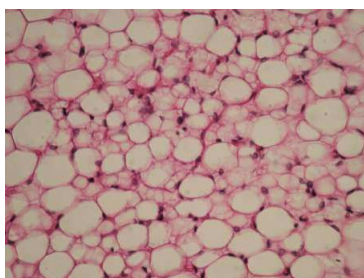


Рис. 1: Жировая ткань

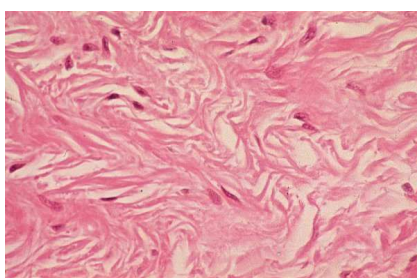


Рис. 2: Тучные клетки

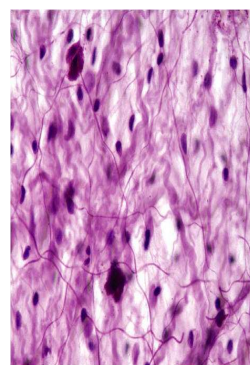
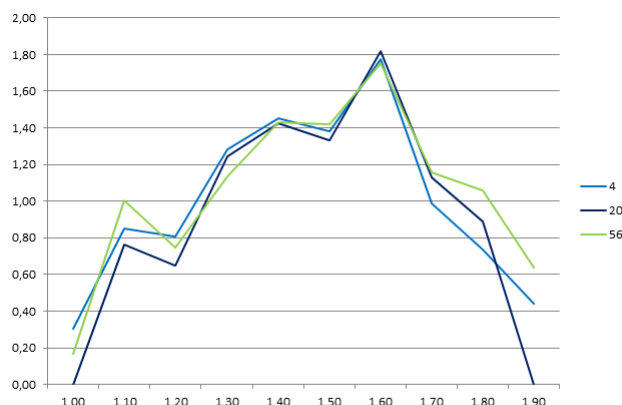


Рис. 3: Рыхлая ткань

Ниже приведены таблица и график значений мультифрактальных спектров (для $\alpha = 1..2$) для изображений соединительной ткани: жировой ткани, рыхлой ткани и тучных клеток. Мера $\mu(B(\bar{x}, r)) = \sum_{B(\bar{x}, r)} I(\bar{x})$.

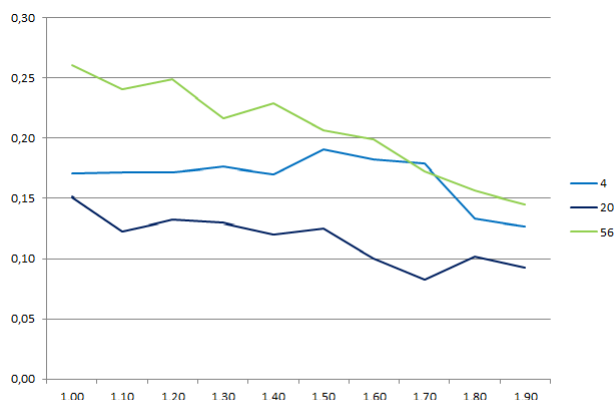
1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
0.306	0.858	0.806	1.282	1.453	1.379	1.774	0.985	0.737	0.440
0	0.765	0.648	1.244	1.425	1.331	1.816	1.130	0.889	0
0.168	1.001	0.745	1.137	1.428	1.420	1.751	1.154	1.156	0.635



Ниже приведены таблица и график значений мультифрактальных спектров (для $\alpha=1..2$) для изображений соединительной ткани: жировой ткани, рых-

лой ткани и тучных клеток. Мера $\mu(B(\bar{x}, r)) = \iint_{B(\bar{x}, r)} (\nabla^2(G_r * I)) d\bar{x}$.

1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
0.170	0.171	0.171	0.176	0.169	0.196	0.182	0.179	0.133	0.127
0.151	0.122	0.132	0.129	0.120	0.124	0.099	0.082	0.101	0.092
0.260	0.240	0.249	0.216	0.228	0.206	0.198	0.172	0.156	0.144



Заключение. Из четырёх классов биомедицинских препаратов (гистологические препараты, клетки крови, соединительная и костная ткань) для двух (гистологические препараты и костная ткань) метод прямого вычисления мультифрактального спектра показал хорошие результаты: при использовании в качестве меры ячейки суммы интенсивности пикселей, графики мультифрактальных спектров хорошо разделялись. В то же время для изображений клеток крови и соединительной ткани оказалось необходимым использовать дополнительно другую меру ячейки, чтобы решить вопрос о классификации.

Литература

- [1] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005.
- [2] Chhabra Ashvin B, Meneveau Charles, Jensen Roderick V. and Sreenivasan K. R. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularities spectrum and its application to fully developed turbulence // Physical Review A, 40 (9), 1989, – pp. 5284–5294.
- [3] Falconer K. J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. – New-York: John Wiley & Sons, 1990.
- [4] Halsey T., Jensen M. Fractal measures and their singularities // Physical Review A, 33, 1986, pp. 1141–1151.
- [5] Yong Xu, Hui Ji, Cornelia Fermuller. Viewpoint Invariant Texture Description Using Fractal Analysis // International Journal of Computer Vision, №83, 2009, – pp. 85–100.

EqWorld

Мир математических уравнений

<http://eqworld.ipmnet.ru>

Редактор: А. Д. Полянин



Уравнения занимают центральное место в современной математике и являются основой для математического моделирования многочисленных явлений и процессов в науке и технике.

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны также некоторые методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники и монографии, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук и является бесплатным для его пользователей.

- Точные решения
- Методы решения
- Вспомогательные разделы
- Программы
- Образование
- Об этом сайте
- Для авторов
- Информация

СОДЕРЖАНИЕ

История и современность

Виденский В. С. О доказательстве теоремы Вейерштрасса посредством полиномов Бернштейна	3
Галкина В. Г., Галунова К. В. К 100-летию со дня рождения Н. М. Матвеева	11
Одинец В. П. О работе Г. М. Фихтенгольца в педагогическом институте им. А. И. Герцена к 125-летию со дня рождения	14

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

Андреев В. К. Об одном частично инвариантном решении уравнений гидродинамики	20
Васильев Ю. А., Смирнов А. В. Построение уравнения траекторий системы с предельным циклом	25
Вдовина Е. К., Пугина Л. В., Волосов К. А. Моделирование «пульсирующих» режимов	27
Вельмисов П. А., Киреев С. В. Исследование устойчивости решений одного класса краевых задач аэрогидроупругости	33
Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Асимптотические уравнения трансзвуковых течений газа	41
Волков Д. Ю., Галунова К. В. Хопф–Хопф бифуркация при 2:1 резонансе. Хаотические решения	49
Жестков С. В., Новашинская В. С. О существовании нетопологических солитонов $(2+1)$ -мерного уравнения Шрёдингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности	56
Зайцев В. Ф., Мхитарян М. Г. Обратная задача для неэкспоненциальных нелокальных операторов, допускаемых ОДУ 3-го порядка	58
Зайцев В. Ф., Подклетнова А. А. Электронные пучки в криволинейных координатах	63
Зотов И. Н. Симметрии уравнений однонаправленного движения тонкой плёнки	66
Клебанов И. И., Иванов С. А. Теоретико-групповой подход к моделям полевой нейродинамики	68
Коптев А. В. Структура решений уравнений Навье–Стокса	71
Кувшинова А. Н., Логинов Б. В. О разворачивании характеристического уравнения в полиномиальных по спектральному параметру Шмидта матричных пучках	75
Куликов А. Н. О двух краевых задачах для уравнения Бредли–Харпера .	79
Куликов Д. А. Реализация высокомодовых бифуркаций в нелокальной модели эрозии	81
Лагодинский В. М. Краевая задача для релятивистского уравнения Шрёдингера со ступенчатым потенциалом	84

Линчук Л. В. “Неклассическая” факторизация обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка	90
Родионов А. А. Гидростатическая модель, групповые свойства и решение	98
Стогний В. И., Копась И. Н., Коваленко С. С. Теоретико-групповой анализ и фундаментальные решения обобщённых линейных уравнений Колмогорова	101
Тошмуродова Д. Р. Полный список ОДУ второго порядка из справочников Э. Камке, В. Ф. Зайцева–А. Д. Полянина и списка Айнса–Гамбье, эквивалентных уравнению Пенлеве II	105
Филатов О. П. Предельные свойства обобщённого решения третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности	108
Шаповал Н. Н. Лиевские симметрии систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами	110
Юрьева А. М. Полный список ОДУ второго порядка из справочников Э. Камке, В. Ф. Зайцева–А. Д. Полянина и списка Айнса–Гамбье, эквивалентных уравнению Пенлеве I	114
<i>Современные проблемы теории функций и функционального анализа</i>	
Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. Точки совпадения двух отображений в частично упорядоченных пространствах	116
Билалов Б. Т., Гулиева Ф. А. Фреймы при нётеровом отображении. $\mathcal{H}$ -близкие фреймы (англ.)	119
Виденский В. С. О приближении целых функций q -многочленами Бернштейна	122
Колдунов А. В. Семейство функций $\mathcal{D}(K, \pi)$, порождённое отображением π	127
Локоть В. В., Мартынов О. М., Тарасенко Е. А. Об относительной проекционной константе $\lambda(Y_{n-5}, l_1^n)$	130
Ляхов Л. Н., Райхельгауз Л. Б. Неравенство Фридрихса для весовых функциональных классов И. А. Киприянова	135
Назарова Т. Ю. О статистической сходимости функциональных последовательностей (англ.)	136
Садыгова С. Р., Гашимов Ч. М. О разложении в банаховых пространствах (англ.)	139
Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Экспоненциальные оценки уклонений полиномов Бернштейна от кусочно линейных функций	141
Шишкина Э. Л. Функционалы, сосредоточенные на части конуса, действующие в весовых функциональных классах	146
<i>Актуальные проблемы математического образования</i>	
Волков Д. Ю., Галунова К. В. Рациональные ортогональные матрицы и их применение	152
Колдунов А. В. “Численные методы” у студентов-прикладников	160
Ловягин Ю. Н. О преподавании математической логики	161

Мельников Ю. Б., Баженова А. В., Владимирова Е. Я., Рожин С. А., Русяева А. М., Рябых А. В., Тиссен И. И., Третьяков А. И., Христенко И. В. Из практики применения алгебраического подхода к реализации стратегий	181
Оразбекова Л. Н. Преемственность обучения математике в профильной школе и в вузе	187
Рукшин С. Е., Суслина М. Е. О некоторых проблемах обучения решению нестандартных задач	195
Светлаков А. Н. Концепция когнитивного учебника по “Обыкновенным дифференциальным уравнениям” для студентов нематематических специальностей	200
<i>Актуальные информационные системы и технологии моделирования</i>	
Алифатдаева В. К., Кондрашков А. В. О вычислительном эксперименте на основе нелинейной динамической модели	203
Батюков А. М. Об одном методе анализа изображений	206
Кудрин Б. К. Интерполяция электромагнитного поля в устройствах магнитотерапии	210
Ляпина А. А., Мамедова Т. Ф. Численная реализация алгоритма расчета допустимых сбросов загрязняющих веществ для многовидовой модели ...	212
Макшаков В. В. Метод пассивной многопозиционной радиолокации	218
Маламанов С. Ю., Павловский В. А. Математическое моделирование вариаций магнитного поля, обусловленных колебаниями шара в проводящей жидкости.	223
Овсянников А. А. Актуальные проблемы получения и передачи видеoinформации средствами мобильных устройств под управлением ANDROID ОС	224
Пичугин Ю. А., Кондрашков А. В. Геометрические аспекты проверки статистических гипотез в задачах математического моделирования	230
Просенкова Ю. Б., Флегонтов А. В. Автогенерация тестовых заданий .	236
Фомин В. В., Фомина И. К. Рекомендации по построению запросов в SQL-ориентированной СУБД.	238
Чертовской В. Д. Трёхуровневая система адаптивного автоматизированного управления	244
Шуплецов Ю. В. О методе прямого вычисления мультифрактального спектра для полутоновых изображений	247
EqWorld	252
Содержание	253

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной конференции
ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2014
14–18 апреля 2014 г.

Печатается с готового оригинал-макета, предоставленного авторами

Подписано в печать 26.03.2014. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 16,0 уч. изд. л. 16,0 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ №126ц

Издательство РГПУ им. А. И. Герцена
191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Типография РГПУ. 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48