

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

Институт информатизации образования
Кафедра математического анализа
Кафедра информационных систем и программного обеспечения

**НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Материалы научной конференции
ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2013

15–20 апреля 2013 г.

LXVI

Санкт-Петербург
2013

Редакционная коллегия: д. ф. -м. н., профессор **Зайцев В. Ф.**
д. ф. -м. н., профессор **Будаев В. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Флегонтов А. В.**

Рецензенты: д. ф. -м. н., профессор **Ханин С. Д.**
д. ф. -м. н., профессор **Широков Н. А.**

Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2013. Материалы научной конференции, 15–20 апреля 2013 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. – 292 с.

ISBN 978–5–8064–1812–9

Материалы 66-ой научной конференции “Герценовские чтения”, проходившей при кафедре математического анализа и кафедре информационных систем и программного обеспечения РГПУ им. А. И. Герцена 15–20 апреля 2013 г. Представленные статьи подготовлены по наиболее содержательным докладам четырех основных секций: “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений”, “Современные проблемы теории функций и функционального анализа”, “Актуальные проблемы математического образования”, “Актуальные информационные системы и технологии моделирования”.

Результаты работ рекомендуется использовать при чтении спецкурсов, а также как материал для научной работы аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов математических факультетов.

История и современность

К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ПРОФЕССОРА Б. З. ВУЛИХА

Будаев В. Д., Колдунов А. В., Корсакова О. С.
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: matanaliz-56@mail.ru

В феврале 2013 года исполнилось сто лет со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Бориса Захаровича Вулиха (20 февраля 1913, Ленинград – 1 сентября 1978, Ленинград), известного математика и педагога, чья научная и учебная деятельность была во многом связана с кафедрой математического анализа Ленинградского педагогического института имени А. И. Герцена. Борис Захарович Вулих учился на математическом факультете Ленинградского государственного университета с 1931 по 1936 г. Характерны воспоминания профессора кафедры алгебры РГПУ им. А. И. Герцена Евгения Сергеевича Ляпина, который учился вместе с Борисом Захаровичем: “Конечно, не всем студентам форма работы в ЛГУ была по плечу (подготовка по элементарной математике у многих была совершенно не достаточна). Чтобы выйти из весьма трудного положения, такие студенты обращались к своим более сильным товарищам. И вот тогда студент первого курса Б. З. Вулих превращался на время в лектора для своих собственных товарищей по курсу. И надо сказать, что лекции получались у него совсем неплохие”. И это неудивительно: Б. З. Вулих родился в семье профессора математики Захара Захаровича Вулиха, принимавшего активное участие в организации физико-математического факультета Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена и являвшегося деканом этого факультета с 1929 г. до своей смерти в 1942 г.

В 1937 году Борис Захарович начал свою преподавательскую деятельность в Ленинградском педагогическом институте им. А. И. Герцена. В 1947 году он стал профессором, а с 1957 – заведующим кафедрой математического анализа ЛГПИ имени А. И. Герцена. Важно было то, что специфика преподавательской работы на математическом факультете педагогического вуза удачным образом соответствовала внутреннему настрою Б. З. Вулиха с его чёткой продуманностью всех деталей курса математического анализа, умением организовать деятельность молодых ассистентов, которые вели практические занятия. Ясное и доступное изложение безупречного в научном и методическом отношении материала, прекрасная дикция, красивая чёткая запись на доске – все давало молодым сотрудникам кафедры прекрасный пример для подражания. Как отмечали И. А. Егорова и И. Я. Бакельман, “Борис Захарович неустанно растил кадры молодых работников. Он требовательный, умелый и внимательный научный руководитель, и его аспиранты сохраняют навсегда чувство благодарности за те знания, которые он им прививает”.

И на посту заведующего кафедрой математического анализа ЛГПИ им. А. И. Герцена Б. З. Вулих продолжал и развивал педагогические традиции сво-

их учителей и предшественников – профессоров Г. М. Фихтенгольца и И. П. Натансона. Б.З. Вулих – крупный ученый в области функционального анализа. Всего им опубликовано свыше 80 статей и монографий. Борис Захарович внес огромный вклад в теорию упорядоченных (ранее говорили – полуупорядоченных) пространств. Им написаны несколько монографий в этой области. Так, появившаяся в 1950 г. монография “Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах” (написанная совместно с Л. В. Канторовичем и А. Г. Пинскером) представляет собой первое полное и систематическое изложение этой теории. Заметим, что одновременно вышли две монографии японского математика Х. Накано, посвященные тому же предмету. При несомненной глубине изложения, они вместе взятые явно уступают монографии советских авторов по широте охвата материала. В 1961 г. вышла монография Бориса Захаровича “Введение в теорию полуупорядоченных пространств”. Благодаря своему высокому научному уровню и несомненным методическим достоинствам, она способствовала широкому ознакомлению математиков с теорией упорядоченных пространств. Обе эти монографии Б. З. Вулиха были переведены за рубежом.

В последние годы жизни сферой научных интересов Бориса Захаровича стала теория конусов, по которой он опубликовал в Калининском университете монографию в двух частях: “Введение в теорию конусов в нормированных пространствах” (1978) и “Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах” (1978).

Б. З. Вулих был организатором и бессменным руководителем городского семинара по теории упорядоченных пространств. Этот семинар был центром всех исследований ленинградских математиков в данном направлении и привлекал многих ученых из других городов СССР и из-за рубежа. Сначала (с 1958 г.) семинар функционировал в ЛГПИ им. А. И. Герцена, затем был переведен в ЛГУ. В научном плане семинар Б. З. Вулиха был оживленным и притягательным местом, куда приходили постоянные участники, были также математики, приходившие на отдельные выступления, которые их особенно интересовали. Бывали гости из других городов, приезжавшие, в частности, по диссертационным делам. Здесь же происходил обмен новостями и мнениями о новых научных публикациях и результатах. Не все сообщения на семинаре были близки научным интересам Бориса Захаровича, но каждый докладчик мог рассчитывать на благожелательное внимание, на полезные вопросы и обсуждение. В работе семинара принимали участие разные математики, у которых научные обстоятельства сложились по-разному. Наверное, наиболее ярким из них был Григорий Яковлевич Лозановский. К его работам Борис Захарович относился с особым вниманием. Б. З. Вулих руководил семинаром до конца своей жизни (1978 г.).

Из воспоминаний профессора А. И. Векслера, бывшего аспиранта Б. З. Вулиха: “Борис Захарович был настоящим русским интеллигентом. Он владел несколькими иностранными языками. Будучи очень занят своей профессиональной деятельностью, он всё же выкраивал время для регулярных посещений Филармонии и оперных театров, являясь тонким ценителем музыки. Этим отнюдь не исчерпывался круг его интересов. Например, в его архиве было найдено несколько таблиц крупных шахматных турниров, заполненных его собственной рукой. Борис Захарович был неизменно доброжелательным и

корректным, никогда не принимал участия ни в каких интригах и скандалах. Может быть, тем, кто его знал недостаточно хорошо, он мог показаться застегнутым на все пуговицы. Я полагаю, что это была лишь защитная реакция: он явно не хотел, чтобы кто-нибудь бесцеремонно влез в его внутренний мир. Ну, и нельзя не сказать, что Борис Захарович всегда был гостеприимным хозяином для приглашенных гостей”.

Б. З. Вулих награжден десятью медалями Советского Союза, среди которых имеются как награды, связанные с его фронтовым прошлым, так и награды за научную и педагогическую деятельность.

За 35 лет работы в ЛГПИ им. А. И. Герцена Борис Захарович Вулих внес неоценимый вклад в развитие математической науки, в педагогическую деятельность математического факультета и кафедры математического анализа, в дело подготовки молодых научных и педагогических кадров.

В этой статье были использованы материалы из воспоминания профессоров Е. С. Ляпина, И. Я. Бакельмана и А. И. Векслера, а также доцента Ирины Александровны Егоровой (1915–2005), много лет проработавшей вместе с Б. З. Вулихом.

К СТОЛЕТИЮ ОТКРЫТИЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Виденский В. С.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: ilya.viden@gmail.com

Videnskii V. S. The centenary of the discovery of Bernstein polynomials. In 1912 S. Bernstein found a very elegant explicit representation for approximation polynomials $B_n f$. In our paper we discuss the history of this discovery.

В 1912 г. С. Н. Бернштейн опубликовал конструкцию своих знаменитых полиномов и при помощи соображений из теории вероятностей доказал теорему Вейерштрасса о приближении непрерывных функций. В настоящей статье сделана попытка проследить почти десятилетний путь к этому открытию.

В феврале 2012 г. в СПбГУ состоялась международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения Л. В. Канторовича. В частности, я делал доклад о его работах по полиномам Бернштейна. Тогда же я заметил, что эти полиномы были открыты ровно 100 лет тому назад. Мне показалось, впрочем, что не стоит отвлекать внимание слушателей и смешивать обе темы, а лучше обсудить вторую из них отдельно.

Эти полиномы были введены в очень краткой заметке С. Н. Бернштейна “Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей”.

Как известно, они определяются так:

$$B_n(f(t); x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x), \quad (1)$$

$$p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (2)$$

Опираясь на эти полиномы, С. Н. Бернштейн доказал теорему Вейерштрасса в такой форме.

Теорема 1. Если f – функция, непрерывная на отрезке $[0, 1]$, то последовательность полиномов $B_n f$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к ней равномерно на $[0, 1]$.

Доказательство получилось простое, понять его легко. По биному Ньютона имеем

$$\sum_{k=0}^n p_{nk}(x) = 1; \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} p_{nk}(x) = x, \quad (3)$$

Из (3) легко выводится тождество

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{nk}(x) = \frac{x(1-x)}{n}. \quad (4)$$

Остаётся воспользоваться неравенством Чебышева, применяемым для вывода закона больших чисел.

Рассуждение ясно и красиво, однако, оно совершенно неожиданно – как будто с неба свалилось.

К концу марта или началу апреля 1952 г. первый том Собрания сочинений С. Н. Бернштейна был вполне готов, и наступило время подписать его к печати. В какой-то момент редактор издательства профессор Д. А. Райков, по-видимому, чтобы заполнить паузу, возникшую в деловой беседе, спросил Сергея Натановича, как ему удалось построить такие оригинальные полиномы для доказательства теоремы Вейерштрасса. Сергей Натанович на мгновение задумался, а затем сухо и иронично ответил, что в 1911 году имело место такое прогрессивное явление, как студенческие забастовки, благодаря чему у него оставалось довольно много времени для размышлений. Разумеется, мы ожидали, что Сергей Натанович войдёт в какие-нибудь интересные подробности или расскажет о каком-нибудь поразительном озарении. Но он не открыл нам никакой великой тайны, – быть может, её и не было.

Во всяком случае, С. Н. Бернштейн начал думать и публиковать статьи о приближении непрерывных функций рядами, по форме сходными с полиномами (1), ещё в 1903 г., когда приступил к решению 19-ой проблемы Гильберта. Мы попытаемся восстановить в общих чертах его дорогу к полиномам, которые носят его имя и которые привели к принципиально новому доказательству теоремы Вейерштрасса.

Девятнадцатая проблема Гильберта относится к дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка эллиптического типа, задаваемых аналитическими функциями, с двумя независимыми переменными. Иными словами, речь идёт об уравнении

$$F(r, s, t, p, q, u, x, y) = 0, \quad (5)$$

где F – аналитическая функция всех восьми переменных, и выполняется неравенство

$$4F'_r F'_t - (F'_s)^2 > 0. \quad (6)$$

Требовалось доказать, что все решения этого уравнения являются аналитическими функциями, причём предполагается, что решение уравнения u непрерывно дифференцируемо σ раз, $\sigma \geq 2$. Уравнение Лапласа было рассмотрено ещё Коши, а случай линейных уравнений – Пикаром. Оба они применяли метод последовательных приближений, что при переходе от декартовых координат к полярным приводило к некоторым степенным рядам. Лично Гильберт предложил молодому Бернштейну заняться проблемой в общем случае. Естественно было начать с метода последовательных приближений и дальнейшего перехода к полярным координатам. Однако оказалось, что это приводит не к степенным рядам, а к более сложным двойным рядам вида

$$f(x) = \sum_{l,m} a_{lm} x^l (1-x)^m.$$

Если они сходятся абсолютно и равномерно, то С. Н. Бернштейн назвал их нормальными рядами.

Число σ непрерывных производных от решения u уравнения (5), которое нужно потребовать первоначально, зависит от класса функций f , разлагаемых в нормальные ряды. Если бы оказалось, что любая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция f представима суммой нормального ряда, то было бы достаточно требовать от решения u , чтобы его вторые частные производные удовлетворяли условию Липшица с $\alpha > 0,5$.

Но представимость любой непрерывной функции f нормальным рядом удалось доказать не сразу. Сначала приходилось требовать от функции f большей гладкости. Приведём рассуждение для дважды непрерывно дифференцируемой функции, данное в магистерской диссертации (1908 г., Сочинения, т. 3, стр. 49). Проверим, что справедливо тождество

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f''(t) |x-t| dt + A + Bx, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Действительно, если мы напишем

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f''(t) |x-t| dt = \frac{1}{2} \int_0^x f''(t)(x-t) dt - \frac{1}{2} \int_x^1 f''(t)(x-t) dt$$

и проинтегрируем по частям, то получим

$$\frac{1}{2} \int_0^1 f''(t) |x-t| dt = f(x) - \frac{1}{2}(f(1) + f(0) - f'(1)) - \frac{1}{2}(f'(1) + f'(0))x.$$

Разложим функцию $|x - t|$ при $0 \leq x \leq 1$ в ряд

$$\begin{aligned} |x - t| &= (1 - (1 - (x - t)^2))^{1/2} = \\ &= (1 + t^2 - (1 - x^2 + 2tx))^{1/2} = (1 + t^2)^{1/2} \left(1 - \frac{1 - x^2 + 2tx}{1 + t^2}\right)^{1/2} = \\ &= (1 + t^2)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1 - x^2 + 2tx}{1 + t^2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k - 3)!!}{k! 2^k} \frac{(1 - x^2 + 2tx)^k}{(1 + t^2)^k}\right), \quad (8) \end{aligned}$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \sum_{p,q} A_{pq} x^p (1 - x^2)^q. \quad (9)$$

Ясно, что (9) – нормальный ряд, так как

$$(1 - x^2)^q = (1 - x)^q \sum_{k=0}^q C_q^k x^k.$$

Затем С. Н. Бернштейн показывает, что приведенный результат остаётся справедливым для любой непрерывно дифференцируемой (только один раз) функции.

Вернёмся, однако, к плодотворному 1911 г., как сказано в ответе Д. А. Райкову. Как раз в 1910 г. академия наук Бельгии объявила конкурс по теме, предложенной Валле Пуссенем, – о наилучшем приближении функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, +1]$ полиномами степени $\leq n$. Эта задача была в стиле проблем Гильберта: просто формулируется; не кажется ни слишком лёгкой, ни совершенно неприступной; можно надеяться, что её решение будет полезным также для исследования иных тем.

С. Н. Бернштейн с большой скоростью – к лету 1911 года – дал полное решение поставленной проблемы. Для этой цели он создал общую теорию наилучшего приближения непрерывных функций многочленами, приведя во взаимодействие идеи и методы Вейерштрасса и Чебышева. Работа была премирована бельгийской академией наук.

На Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 г. С. Н. Бернштейн в своём докладе сказал: “Пример задачи о наилучшем приближении $f(x) = |x|$, предложенный Валле Пуссенем, даёт ещё одно подтверждение того факта, что хорошо поставленный частный вопрос способен быть отправной точкой для далеко идущих теорий”.

Эти исследования С. Н. Бернштейна составили также его докторскую диссертацию, защищённую в Харьковском университете (Сочинения, т. 1, № 3). В неё было включено Добавление, в котором доказывалось, что любая непрерывная на $[0, 1]$ функция f представима нормальным рядом. В основу была положена простая идея. Так как система функций $\{x^k(1 - x)^{n-k}\}_{k=0}^n$ линейно независима, то любой многочлен

$$P_m(x) = \sum_{\nu=0}^m a_{\nu} x^{\nu}$$

степени $m \leq n$ можно однозначно представить в виде

$$P_m(x) = \sum_{\nu=0}^m a_\nu x^\nu ((1-x) + x)^{n-\nu} = \sum_{k=0}^n A_{nk} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (10)$$

У С. Н. Бернштейна явно вычислены A_{nk} через a_ν , но проще рассматривать отдельно

$$x^\nu = x^\nu ((1-x) + x)^{n-\nu} = \sum_{k=\nu}^n C_{n-\nu}^{k-\nu} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (11)$$

Для применения к (10) удобно формулу (11) переписать по полиномам p_{nk} (2):

$$x^\nu = \sum_{k=\nu}^n \frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k} p_{nk}(x). \quad (12)$$

Мы имеем

$$\frac{C_{n-\nu}^{k-\nu}}{C_n^k} = \frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)} = \left(\frac{k}{n}\right)^\nu \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)}. \quad (13)$$

Учитывая формулы (12) и (13) и применяя обозначения, принятые в наше время, можем написать приближающий полином для x^ν так:

$$B_n(t^\nu; x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\nu p_{nk}(x). \quad (14)$$

При помощи (13) и достаточно тонких вычислений С. Н. Бернштейн получает такую оценку разности

$$|x^\nu - B_n(t^\nu; x)| < \frac{K_\nu}{n}, \quad \nu \leq m,$$

где K_ν зависит только от ν . Отсюда для многочлена P_m (10) имеем

$$B(P_m(t); x) = \sum_{k=0}^n P_m\left(\frac{k}{n}\right) p_{nk}(x),$$

$$|B_n(P_m(t); x) - P_m(x)| < \frac{K_m}{n}, \quad m \leq n. \quad (15)$$

Заметим, между прочим, что неравенство (15) можно получить почти без вычислений и без применения неравенства Чебышева. Воспользуемся для этого одним тождеством, которое я недавно вывел для других целей. $B_n(1; x)$ и $B_n(t; x)$ даются формулами (3). Покажем, что при $\nu \geq 1$ справедливо тождество

$$B_n(t^{\nu+1}; x) = B_n(t^\nu; x) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu (1-x) B_{n-1}(t^\nu; x). \quad (*)$$

Напишем явно

$$B_n(t^{\nu+1}; x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{\nu+1} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

и преобразуем общий член, стоящий под знаком суммы

$$\begin{aligned} \left(\frac{k}{n}\right)^{\nu+1} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= \left(\frac{k}{n}\right)^\nu \left(1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^\nu C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu (1-x) \left(\frac{k}{n}\right)^{\nu-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Равенство (*) доказано. При $\nu = 1$, используя (3), получим

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \quad (**)$$

Предположим по индукции, что имеет место

$$B_n(t^\nu; x) = x^\nu + O\left(\frac{x(1-x)}{n}\right) \quad \text{при } \nu = 1, 2, \dots, m,$$

где константа в O зависит только от m , и применим (*). Тогда

$$\begin{aligned} B_n(t^{m+1}; x) &= x^{m+1} + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m\right) x^m (1-x) + \\ &\quad + O\left(\frac{x(1-x)}{n}\right) = x^{m+1} + O\left(\frac{x(1-x)}{n}\right). \end{aligned}$$

Напомним, что теорема о приближении непрерывных функций полиномами самим Вейерштрассом была доказана как теорема существования. Используя её в такой форме и применяя неравенство (15), С. Н. Бернштейн доказал два важных следствия.

Теорема 2. Любая непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция f разлагается в нормальный ряд.

В самом деле, по теореме Вейерштрасса для любого натурального s существует полином P_{m_s} ($m_s > m_{s-1}$) такой, что

$$|f(x) - P_{m_s}(x)| < \frac{1}{2^{s+2}}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

а по неравенству (15) существует $n_s > n_{s-1}$ такое, что

$$|B_{n_s}(P_{m_s}; x) - P_{m_s}(x)| < \frac{1}{2^{s+2}},$$

$$|B_{n_s}(P_{m_s}; x) - f(x)| < \frac{1}{2^{s+1}}.$$

Значит, f разлагается в нормальный ряд

$$f(x) = \sum B_{n_{s+1}}(P_{m_{s+1}}; x) - B_{n_s}(P_{m_s}; x).$$

Теорема 3. Для любой непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции f последовательность $B_n(f; x)$ сходится к ней равномерно.

Для доказательства теоремы 3 применяется теорема Вейерштрасса, так что теорема 3 слабее теоремы 1. Обозначим через (P_m) последовательность полиномов, которая сходится к f . По теореме Вейерштрасса и неравенству (15) для фиксированного $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n и m имеем

$$|P_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |B_n(P_m; x) - P_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|B_n(f, x) - f(x)| < B(|f - P_m|; x) + |B_n(P_m; x) - P_m(x)| + |P_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f; x) = f(x). \quad (16)$$

В тексте С. Н. Бернштейном сказано, что “формула (16) выведена мною при помощи теории вероятностей в заметке, помещённой в «Сообщениях Харьковского математического общества, т. 13, № 1, 1912 г.»”.

Мне кажется несомненным, что С. Н. Бернштейн доказал теорему 1 после теоремы 3, но следует признать, что он этого нигде не пишет!

Литература

- [1] С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений. – М.: АН СССР. – Т. 1, № 3, с. 79–84; № 4. Т. 2, №№ 57, 64, 65, 81. Т. 3, № 1, № 9, с. 49–53.

УДК 517.9

О РАБОТЕ Л. В. КАНТОРОВИЧА В ЛГПИ ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА

Одинец В. П.

Коми государственный педагогический

институт

Сыктывкар

e-mail:w.p.odyniec@mail.ru

Odyniec W. P. On L. V. Kantorovich work at Herzen institute. Some facts on L. V. Kantorovich work at Herzen institute since 1938 to 1945 are considered.

Рассматриваются некоторые факты о работе Л. В. Канторовича в ЛГПИ им. А. И. Герцена с 1938 по 1945 гг.

В биографической карте, приведённой в [1, с. 91–94] в графе “5. Служебная деятельность.”, перечислены разные вузы и институты, где работал, зачастую по совместительству, Леонид Витальевич Канторович (1912–1986). Однако там нет вуза, в котором Л. В. Канторович впервые представил свое самое известное открытие, где работали его ученики и где работал и он сам тоже, хотя и по совместительству.

Речь идет о кафедре математического анализа Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена (ЛГПИ), где Леонид Витальевич работал по совместительству с сентября 1938 г. по июнь 1941 г. и с августа 1944 г. по январь 1945 г.

В архиве в довоенных документах ЛГПИ сохранились лишь те приказы, которые не были связаны с приемом и увольнением с работы, поскольку эти документы не были взяты в эвакуацию. Во время основной эвакуации института¹ документы отдела кадров попали под бомбёжку.

Из документов 1938 г. сохранился приказ о проведении осенней научной сессии ЛГПИ, где перечислялись докладчики и названия докладов. В том числе по кафедре математического анализа назван профессор Л. В. Канторович с докладом «О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта» [1, с. 52]. Отмечу, что в этом докладе, по существу, был изложен симплекс-метод. Метод разрешающих множителей, давший возможность решать вручную задачи рационального раскроя, был предложен Леонидом Витальевичем в январе 1939 г.

По 1939–41 гг. сохранились только частично документы о поощрениях к праздникам 7 Ноября и 1 Мая, где по кафедре математического анализа встречается и фамилия Л. В. Канторовича.

Наконец, после возвращения вуза из эвакуации в 1944 г. в августовском приказе о приеме на работу по совместительству (по январь 1945 г.) есть и фамилия Л. В. Канторовича (см. также [2, с. 161]).

Заметим, что первым заведующим кафедрой математического анализа² ЛГПИ был человек, которого Л. В. Канторович называл своим учителем – Григорий Михайлович Фихтенгольц (1888–1959). На кафедру в 1937–38 учебном году были распределены ученики Л. В. Канторовича Борис Захарович Вулих (1913–1978) и Марк Константинович Гавурин (1911–1992). Третий знаменитый ученик Л. В. Канторовича – Арон Григорьевич Пинскер (1905–1985) пришел на эту кафедру в 1946 г., а четвертый – Глеб Павлович Акилов (1921–1986), будет возглавлять эту кафедру в 1954–1956 гг.

Остается добавить, что главный научный семинар кафедры математического анализа, не случайно называемый семинаром Фихтенгольца–Канторовича, работает до сих пор. Последние 40 лет его возглавляет профессор Виктор Соломонович Виденский (р. 1922 г.) (подробнее см. [3]).

Литература

- [1] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Том 1. (Составители: Канторович В. Л., Кутателадзе С. С., Фет Я. И.). – Новосибирск: Изд-во СО РАН. Филиал «Гео», 2002. – 542 с.

¹Основная эвакуация института (19 марта 1942 г. по льду Ладожского озера), когда на Большую Землю эвакуировали более 3000 преподавателей и студентов вместе с архивом отдела кадров, была только первым этапом эвакуации. Далее был Кисловодск, откуда пришлось бежать, потеряв архив отдела кадров, через Каспий, Среднюю Азию в г. Кыштым Челябинской области.

²Кафедра математического анализа была образована в ЛГПИ в 1937 г.



Л.В. Канторович

- [2] Профессора Российского Государственного Педагогического Университета им. А. И. Герцена в XX веке. Справочник. (Под ред. Г. А. Бордовского и В. А. Козырева. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000. – 391 с.
- [3] Одинец В. П. К 75-летию кафедры математического анализа РГПУ им. А. И. Герцена. Зарисовки истории. Век XX // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2012. Т.LXV. – СПб.: Изд-во БАН, 2012. – С. 3–19.

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

УДК 517.9

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕДУКЦИЙ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Аксенов А. В., Козырев А. А.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Москва

e-mail: aksenov.av@gmail.com; anatoly.kozyrev@gmail.com

Aksenov A. V., Kozyrev A. A. Method for obtaining reductions of boundary layer equation. A method for obtaining reductions of partial differential equations with two independent variables is proposed. The equation of the steady laminar boundary layer with a pressure gradient is considered. All reductions of this equation are obtained. It is shown that this equation have reductions, not obtained by means of symmetries. It is shown that this equation has a reductions, not obtainable by means of symmetries.

Предложен метод нахождения редукций уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными. Рассмотрено уравнение, описывающее ламинарный стационарный плоский пограничный слой с градиентом давления. Получены все редукции рассмотренного уравнения. Показано, что рассматриваемое уравнение имеет редукции, не получаемые с помощью симметрий.

Введение. Для данного дифференциального уравнения с частными производными с двумя независимыми переменными важной является задача построения редукций этого уравнения, т.е. построение таких анзацев (видов решений), нахождение которых сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Редукция позволяет свести решение уравнения с частными производными к решению ОДУ. Редукции широко используются в приложениях. Наиболее используемыми являются автомодельные решения [1]. Автомодельные решения имеют вид

$$u = x^\alpha \varphi(\zeta), \quad \zeta = y/x^\beta,$$

где u – зависимая переменная; x, y – независимые переменные; α, β – постоянные величины. Автомодельные решения являются частным случаем инвариантных решений (или симметричных редукций), получаемых с помощью симметрий [2]. Симметричные редукции находятся стандартными методами группового анализа.

В работе [3] был предложен метод нахождения редукций уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. В этой работе для уравнений Буссинеска

$$u_{yy} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0 \tag{1}$$

были получены все редукции вида

$$u = U(x, y, w(z)), \tag{2}$$

где $z = z(x, y)$ и функция $w(z)$ является решением ОДУ. Было показано, что существуют редукции, отличные от редукций, получаемых с помощью симметрий. Было также показано, что для уравнения (1) редукции (2) имеют следующий вид

$$u = \alpha(x, y) + \beta(x, y)w(z). \quad (3)$$

В настоящей работе рассмотрено уравнение

$$u_{yyy} - u_y u_{xy} + u_x u_{yy} - f(x) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) описывает движение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном стационарном плоском пограничном слое с градиентом давления [4]. Автомодельные решения уравнения (4) рассмотрены в классических монографиях [1, 4, 5]. Симметричные редукции уравнения (4) могут быть получены на основе результатов работы [2]. В работе [6] были найдены и исследованы частные редукции вида (3). В работе [7] на основе использования метода неклассических симметрий [8] и рассмотрения его обобщения, были получены новые редукции уравнения (4) вида (3).

Метод построения редукций. Подставляя решение вида (2) в уравнение (4), получим следующее соотношение

$$\begin{aligned} & U_w z_y^3 w''' + 3U_{ww} z_y^3 w' w'' + z_y (3U_{yw} z_y + U_x U_w z_y - U_y U_w z_x + 3U_w z_{yy}) w'' + \\ & + U_{www} z_y^3 (w')^3 + (3U_{yww} z_y^2 - U_w U_{xw} z_y^2 + U_w U_{yw} z_x z_y + U_x U_{ww} z_y^2 - \\ & - U_y U_{ww} z_x z_y + U_w^2 z_x z_{yy} - U_w^2 z_y z_{xy} + 3U_{ww} z_y z_{yy}) (w')^2 + (3U_{yyy} z_y - \\ & - U_w U_{xy} z_y + U_w U_{yy} z_x - U_y U_{xw} z_y - U_y U_{yw} z_x + 2U_x U_{yw} z_y + U_x U_w z_{yy} - \\ & - U_y U_w z_{xy} + 3U_{yw} z_{yy} + U_w z_{yyy}) w' + U_{yyy} - U_y U_{xy} + U_x U_{yy} - f(x) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Поделим обе части соотношения (5) на коэффициент при старшей производной, т. е. на $U_w z_y^3$. Условием того, что полученное соотношение является ОДУ, является зависимость каждого из нормированных коэффициентов при производных функции $w(z)$ только от переменных z и w . Рассмотрим нормированный коэффициент при слагаемом, содержащем $w' w''$. Он имеет вид

$$\frac{3U_{ww}}{U_w} = \Gamma(z, w). \quad (6)$$

Из (6) следует, что редукции уравнения (4) можно искать в виде (3). Подставляя (3) в уравнение (4), получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \beta z_y^3 w''' + \beta z_y (\beta_x z_y - \beta_y z_x) w w'' + z_y (3\beta z_{yy} + 3\beta_y z_y + \alpha_x \beta z_y - \alpha_y \beta z_x) w'' + \\ & + \beta (\beta z_x z_{yy} - \beta z_y z_{xy} + \beta_y z_x z_y - z_y^2 \beta_x) (w')^2 + \\ & + (\beta_x \beta z_{yy} + \beta z_x \beta_{yy} - \beta_y^2 z_x + \beta_y \beta_x z_y - \beta_y \beta z_{xy} - \beta z_y \beta_{xy}) w w' + \\ & + (\beta z_{yyy} - \alpha_y \beta_x z_y - \alpha_y \beta_y z_x - \alpha_y \beta z_{xy} - \beta z_y \alpha_{xy} + 2\alpha_x \beta_y z_y + \\ & + \alpha_x \beta z_{yy} + \beta z_x \alpha_{yy} + 3\beta_y z_{yy} + 3\beta_{yy} z_y) w' + \\ & + (\beta_x \beta_{yy} - \beta_y \beta_{xy}) w^2 + (\beta_{yyy} + \alpha_x \beta_{yy} - \beta_y \alpha_{xy} - \alpha_y \beta_{xy} + \beta_x \alpha_{yy}) w + \\ & + \alpha_{yyy} - \alpha_y \alpha_{xy} + \alpha_x \alpha_{yy} - f(x) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие того, что соотношение (7) есть ОДУ, означает, что нормированные коэффициенты, зависящие от функций $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $z(x, y)$ и их производных, должны быть функциями переменной z . Откуда получаем следующую переопределенную систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_x z_y - \beta_y z_x}{z_y^2} &= \Gamma_1(z), & \frac{\beta_x \beta_{yy} - \beta_y \beta_{xy}}{\beta z_y^3} &= \Gamma_2(z), \\
\frac{3\beta z_{yy} + 3\beta_y z_y + \alpha_x \beta z_y - \alpha_y \beta z_x}{\beta z_y^2} &= \Gamma_3(z), \\
\frac{\beta(\beta z_x z_{yy} - \beta z_y z_{xy} + \beta_y z_x z_y - z_y^2 \beta_x)}{\beta z_y^3} &= \Gamma_4(z), \\
\frac{\beta_x \beta z_{yy} + \beta z_x \beta_{yy} - \beta_y^2 z_x + \beta_y \beta_x z_y - \beta_y \beta z_{xy} - \beta z_y \beta_{xy}}{\beta z_y^3} &= \Gamma_5(z), & (8) \\
\frac{\beta z_{yyy} - \alpha_y \beta_x z_y - \alpha_y \beta_y z_x - \alpha_y \beta z_{xy} - \beta z_y \alpha_{xy}}{\beta z_y^3} + \\
+ \frac{2\alpha_x \beta_y z_y + \alpha_x \beta z_{yy} + \beta z_x \alpha_{yy} + 3\beta_y z_{yy} + 3\beta_{yy} z_y}{\beta z_y^3} &= \Gamma_6(z), \\
\frac{\beta_{yyy} + \alpha_x \beta_{yy} - \beta_y \alpha_{xy} - \alpha_y \beta_{xy} + \beta_x \alpha_{yy}}{\beta z_y^3} &= \Gamma_7(z), \\
\frac{\alpha_{yyy} - \alpha_y \alpha_{xy} + \alpha_x \alpha_{yy} - f(x)}{\beta z_y^3} &= \Gamma_8(z).
\end{aligned}$$

На примере решения системы уравнений (8) изложим основные соображения, лежащие в основе предлагаемого метода построения редукций:

1. Каждое из уравнений (8) эквивалентно условию равенства нулю якобиана левой части уравнения и функции $z(x, y)$. В результате можно получить переопределенную систему уравнений (\mathcal{A} -система) для определения неизвестных функций $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $z(x, y)$ (она не приводится ввиду ее громоздкости).

2. Вводятся в рассмотрение вспомогательные функции $\mu_1 = \mu_1(x, y)$, $\mu_2 = \mu_2(x, y)$, $\mu_3 = \mu_3(x, y)$, определяемые из следующих соотношений

$$\begin{aligned}
z_x + \mu_1(x, y) z_y &= 0, \\
\beta_x + \mu_1(x, y) \beta_y + \mu_2(x, y) \beta &= 0, & (9) \\
\alpha_x + \mu_1(x, y) \alpha_y + \mu_2(x, y) \alpha + \mu_3(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

Введение вспомогательных функций является ключевым для предлагаемого метода. Нахождение вспомогательных функций решает задачу о нахождении редукций. Как было отмечено в работе [3], редукции вида (3) допускают следующие преобразования, переводящие редукцию в редукцию:

$$z \rightarrow F_1(z), \quad \beta \rightarrow \frac{\beta}{F_2(z)}, \quad \alpha \rightarrow \alpha + \frac{\beta}{F_3(z)}, \quad (10)$$

где $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$ – произвольные функции. Эти преобразования связаны с произволом в нахождении ОДУ на функцию $w(z)$. Можно показать, что введенные вспомогательные функции являются инвариантами преобразований (10). Также можно показать, что \mathcal{A} -система допускает преобразования (10).

3. Находя из соотношений (9) производные α_x , β_x , z_x и подставляя их в \mathcal{A} -систему, получим следующую переопределенную систему уравнений для определения вспомогательных функций

$$\begin{aligned}
\mu_{1y}\mu_2 - \mu_{1xy} - \mu_{1y}^2 - \mu_1\mu_{1yy} &= 0, \\
\mu_2^2 - \mu_{2x} - \mu_2\mu_{1y} - \mu_1\mu_{2y} &= 0, \\
\mu_2\mu_3 - 3\mu_{1yy} - 3\mu_{2y} - \mu_{3x} - \mu_1\mu_{3y} - \mu_{1y}\mu_3 &= 0, \\
\mu_{2y}(2\mu_{1y} - \mu_2) = 0, \quad \mu_2\mu_{2yy} = \mu_{2y}^2, & \tag{11} \\
4\mu_{1yyy} + 6\mu_{2yy} + \mu_2\mu_{3y} - 2\mu_{2y}\mu_3 + 2\mu_{1y}\mu_{3y} &= 0, \\
\mu_{2yyy} + 2\mu_{2y}\mu_{3y} - \mu_{2yy}\mu_3 - \mu_2\mu_{3yy} &= 0, \\
\mu_{3yyy} + \mu_{3y}^2 - \mu_3\mu_{3yy} + 3f(x)\mu_{1y} + f(x)\mu_2 + f'(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, \mathcal{A} -система сводится к более простой системе уравнений (11). Запись \mathcal{A} -системы только через инварианты преобразований (10) следует из инвариантности ее относительно этих преобразований.

4. Решение переопределенной системы уравнений (11) легко находится (решение здесь не приводится). Отметим, что система уравнений (11) имеет решение только при следующих функциях $f(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) = \lambda(x + \kappa)^\delta, \quad \lambda \neq 0, \quad \delta \neq 0; \quad f(x) = \lambda e^{\delta x}, \quad \lambda \neq 0, \quad \delta \neq 0; \\
f(x) = \lambda; \quad f(x) = \lambda_1(x + \kappa)^{-5/3} + \lambda_2(x + \kappa)^{-1/3}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь λ , κ , δ , λ_1 , λ_2 – постоянные величины. Отметим также, что последний из представленных в формуле (12) видов функции $f(x)$ приводит к редукциям, отличным от редукций, получаемых с помощью симметрий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00188 и 12-01-00940).

Литература

- [1] Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [3] Clarkson P. A., Kruskal M. D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30. № 10. – P. 2201–2213.
- [4] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
- [5] Laminar boundary layers (ed. L. Rosenhead). – Oxford: Clarendon Press, 1963. – 708 p.
- [6] Бурдэ Г. И. Об одном классе решений уравнения пограничного слоя // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. – С. 45–51.
- [7] Burde G. I. New similarity reductions of the steady-state boundary layer equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1996. Vol. 29. № 8. – P. 1665–1683.
- [8] Bluman G. W., Cole J. D. The general similarity solution of the heat equation // Journal of Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 18. № 11. – P. 1025–1042.

СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ТРАЕКТОРИИ–ПОТЕНЦИАЛ ВЕБЕРА

Андреев В. К.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск
e-mail: andr@icm.krasn.ru

Andreev V. K. Symmetries of two-dimensional fluid motions equations in terms of trajectories and Weber's potential. Let's consider the of 2D perfect fluid motions equations in Lagrange's coordinates. If a body forces are potential one then there is the general integral called Weber's integral and the resulting system includes an initial data which in fact makes the problem of group-theoretical classification actual. It was established that the basic group becomes infinite-dimensional with respect to the space variable too as we pass to Lagrangian coordinates. The exceptional values of arbitrary initial velocities were obtained at which we can be observed further extension of the group.

Рассматриваются уравнения идеальной несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа. При условии потенциальности внешних сил они имеют общий интеграл — интеграл Вебера. Начальное поле скоростей непосредственно входит в новую систему, что делает актуальной задачу групповой классификации. Установлено, что группа преобразований является бесконечномерной и по пространственным переменным. Получены исключительные выражения начального поля скоростей, расширяющих основную группу.

1. Уравнения двумерных движений идеальной жидкости в переменных траектории–потенциал Вебера. Для таких движений система уравнений имеет вид [1]

$$x_t = y_\eta(\varphi_\xi + u(\xi, \eta)) - y_\xi(\varphi_\eta + v(\xi, \eta)); \quad (1)$$

$$y_t = -x_\eta(\varphi_\xi + u(\xi, \eta)) + x_\xi(\varphi_\eta + v(\xi, \eta)); \quad (2)$$

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1; \quad (3)$$

$$u_\xi + v_\eta = 0, \quad v_\xi - u_\eta = \omega(\xi, \eta) \neq 0; \quad (4)$$

$x(\xi, \eta, t)$, $y(\xi, \eta, t)$ — траектории, $\varphi(\xi, \eta, t)$ — потенциал Вебера, $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ — начальное поле скоростей.

Уравнения (1)–(3) эквивалентны двум следующим: $\varphi_\xi = x_t x_\xi + y_t y_\xi - u$, $\varphi_\eta = x_t x_\eta + y_t y_\eta - v$. Условия их совместности даёт закон сохранения вихря в частице $x_\xi x_{\eta t} - x_\eta x_{\xi t} + y_\xi y_{\eta t} - y_\eta y_{\xi t} = \omega(\xi, \eta)$, который вместе с законом сохранения массы (3) образует замкнутую систему уравнений. Её групповые свойства изучены в работе [2].

Рассмотрим произвольные гладкие преобразования, сохраняющие площадь на плоскости переменных (ξ, η) :

$$\alpha = \alpha(\xi, \eta), \quad \beta = \beta(\xi, \eta), \quad \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\xi, \eta)} = 1. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что при этом система (1)–(3) сохраняет свою дифференциальную структуру, а функции $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ заменяются на

$$u_1(\alpha, \beta) = \beta_\eta u - \beta_\xi v, \quad v_1(\alpha, \beta) = -\alpha_\eta u + \alpha_\xi v, \quad (6)$$

где в правых частях следует считать, согласно (5), $\xi = \xi(\alpha, \beta)$, $\eta = \eta(\alpha, \beta)$. Таким образом [3], преобразование (5) есть преобразование эквивалентности для системы уравнений (1)–(3).

Что касается условий (4), то второе из них выполняется всегда, так как $v_\xi - u_\eta = v_{1\alpha} - u_{1\beta} = \omega(\xi(\alpha, \beta)) \equiv \omega_1(\alpha, \beta) \neq 0$. Лёгкий подсчёт с учётом формул (6) даёт равенство

$$u_\xi + v_\eta = u_1 \Delta \alpha + u_2 \Delta \beta + |\nabla \alpha|^2 u_{1\alpha} + |\nabla \beta|^2 v_{1\beta} + \nabla \alpha \cdot \nabla \beta (u_{1\beta} + v_{1\alpha}) = 0.$$

Для системы (1)–(3) ищем оператор

$$Y = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

с неизвестными координатами ξ^i , η^i , зависящими от всех переменных t , ξ , η , x , y , φ , $i = 1, 2, 3$.

Продолжив оператор Y на производные, из критерия инвариантности многообразия [3], задаваемого уравнениями (1)–(3), после довольно длинных вычислений приходим к системе определяющих уравнений

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \xi^1(t), \quad \xi^2 = \xi^2(\xi, \eta), \quad \xi^3 = \xi^3(\xi, \eta), \\ \eta^1 &= C_1 x + C_2 y + n(t), \quad \eta^2 = C_1 y - C_2 x + m(t), \\ \eta^3 &= (2C_1 - \xi_t^1) \varphi + n_t x + m_t y + h(\xi, \eta) + d(t), \\ \xi_\xi^2 + \xi_\eta^3 &= 2C_1, \quad u(\xi_\eta^3 - \xi_t^1) - \xi^2 u_\xi - \xi^3 u_\eta - \xi_\xi^3 v - h_\xi = 0, \\ v(\xi_\xi^2 - \xi_t^1) &- \xi^2 v_\xi - \xi^3 v_\eta - \xi_\eta^2 u - h_\eta = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $n(t)$, $m(t)$, $d(t)$ — произвольные класса C^∞ функции; C_1 , C_2 — постоянные.

Ясно, что последние два уравнения в (7) могут быть удовлетворены только при $\xi_t^1 = C_3$, т. е. $\xi^1 = C_3 t + C_4$ с новыми постоянными C_3 , C_4 . Кроме того, эти же уравнения дают соотношение совместности

$$\xi^2 \omega_\xi + \xi^3 \omega_\eta + C_3 \omega = 0, \quad (8)$$

где $\omega = v_\xi - u_\eta = \omega(\xi, \eta)$ — начальная завихренность жидкости. Уравнение (8) и является определяющим; при его выполнении функция $h(\xi, \eta)$ восстанавливается из (7) с помощью криволинейного интеграла

$$h = \int [u(\xi_\eta^3 - C_3) - \xi^2 u_\xi - \xi^3 u_\eta - \xi_\xi^3 v] d\xi + [v(\xi_\xi^2 - C_3) - \xi^2 v_\xi - \xi^3 v_\eta - \xi_\eta^2 u] d\eta, \quad (9)$$

не зависящего от пути интегрирования.

Можно видеть, что основная алгебра Ли (алгебра, допускаемая системой (1)–(3) для произвольной функции ω , или u, v) образована операторами

$$\begin{aligned} L_0 : Y_1 &= \partial_t, & Y_2 &= y\partial_x - x\partial_y, & Y_n &= n(t)\partial_x + n_t(t)x\partial_\varphi, \\ Y_m &= m(t)\partial_y + m_t(t)y\partial_\varphi, & Y_d &= d(t)\partial_\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Если $\omega = \omega_0 = \text{const}$, то $C_3 = 0$ и алгебра L_0 расширяется операторами

$$Y_\psi = \psi_\eta\partial_\xi - \psi_\xi\partial_\eta + h\partial_\varphi, \quad Y_3 = \xi\partial_\xi + \eta\partial_\eta + x\partial_x + y\partial_y + (2\varphi + h)\partial_\varphi \quad (11)$$

с произвольной гладкой функцией $\psi(\xi, \eta)$. Функция $h(\xi, \eta)$ определяется равенством (9), где надо положить $C_3 = 0$, $\xi^2 = \psi_\eta$, $\xi^3 = -\psi_\xi$, $u = \bar{u}(\xi, \eta) + \omega_0\eta$ для оператора Y_ψ и $C_3 = 0$, $\xi^2 = \xi$, $\xi^3 = \eta$, $u = \bar{u}(\xi, \eta) + \omega_0\eta$ — для оператора Y_3 . В обоих случаях функции $\bar{u}(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ есть решение системы Коши–Римана: $\bar{u}_\xi + v_\eta = 0$, $\bar{u}_\eta - v_\xi = 0$.

Для любой заданной начальной завихренности $\omega(\xi, \eta) \neq \text{const}$ базис алгебры Ли, расширяющей L_0 , также представляется двумя операторами:

$$Y_F = \frac{\partial F(\omega)}{\partial \eta} \partial_\xi - \frac{\partial F(\omega)}{\partial \xi} \partial_\eta, \quad Y_4 = \delta t \partial_t + \xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta + x \partial_x + y \partial_y + (2 - \delta)\varphi \partial_\varphi. \quad (12)$$

В случае оператора Y_F функция F является произвольной; $h(\xi, \eta)$ находится из (9), где $C_1 = C_3 = 0$, $\xi^2 = \partial F(\omega)/\partial \eta$, $\xi^3 = -\partial F(\omega)/\partial \xi$. Что касается оператора Y_4 , то здесь δ — произвольная постоянная, завихренность,

$$\omega(\xi, \eta) = \eta^{-\delta} f(\xi/\eta). \quad (13)$$

Компоненты начального поля скоростей имеют представления

$$u = \eta^{1-\delta} u_1(\zeta), \quad v = \eta^{1-\delta} v_1(\zeta), \quad \zeta = \xi/\eta, \quad (14)$$

причём функции u_1, v_1 связаны соотношением (следствие уравнения сохранения массы)

$$u_{1\zeta} + (1 - \delta)v_1 - \zeta v_{1\zeta} = 0. \quad (15)$$

При этом функция $f(\zeta)$, определяющая завихренность в формуле (13) по известным $u_1(\zeta), v_1(\zeta)$, дается равенством

$$f(\zeta) = (1 - \delta)u_1 - \zeta u_{1\zeta} - v_{1\zeta}. \quad (16)$$

С помощью формул (14) легко показывается, что $h_\xi = h_\eta = 0$, и, без ограничения общности, можно положить $h = 0$.

2. Инвариантность начальных условий. При решении системы уравнений (1)–(3), не являющейся нормальной по временной переменной, необходимо учитывать начальные условия

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad t = 0. \quad (17)$$

Инвариантность данных (17) относительно оператора Y упрощает систему определяющих уравнений (7) до следующей:

$$\xi^1 = C_3 t, \quad \xi^2 = C_1 \xi + C_2 \eta + n(0), \quad \xi^3 = C_1 \eta - C_2 \xi + m(0),$$

$$\begin{aligned}
\eta^1 &= C_1x + C_2y + n(t), & \eta^2 &= C_1y - C_2x + m(t), \\
\eta^3 &= (2C_1 - C_3)\varphi + n_t x + m_t y + h(\xi, \eta) + d(t), \\
h_\xi &= (C_1 - C_3)u - \xi^2 u_\xi - \xi^3 u_\eta + C_2 v, \\
h_\eta &= (C_1 - C_3)v - \xi^2 v_\xi - \xi^3 v_\eta - C_2 u.
\end{aligned} \tag{18}$$

Классифицирующее уравнение (8) здесь таково:

$$(C_1\xi + C_2\eta + n(0))\omega_\xi + (C_1\eta - C_2\xi + m(0))\omega_\eta + C_3\omega = 0. \tag{19}$$

Основная алгебра L_{00} состоит из операторов

$$\begin{aligned}
Z_n &= n(t)\partial_x + n_t(t)x\partial_\varphi, & Z_m &= m(t)\partial_y + m_t(t)y\partial_\varphi, \\
Z_d &= d(t)\partial_\varphi, & n(0) &= m(0) = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Для проведения групповой классификации запишем уравнение (19) в виде

$$(A\xi + B\eta + C)\omega_\xi + (A\eta - B\xi + D)\omega_\eta + H\omega = 0 \tag{21}$$

с некоторыми постоянными A, B, C, D, H . Любая конкретная функция $\omega(\xi, \eta)$, с которой возможно расширение ядра L_{00} , должна быть решением уравнения (21). Общее преобразование эквивалентности состоит из всех преобразований, соответствующих ядру алгебр Ли (20), и из преобразований $(a_i, i = 1, \dots, 4, - \text{ постоянные})$

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= a_1 t, & \bar{x} &= a_1(x \cos a_2 + y \sin a_2) + a_3, & \bar{y} &= a_1(-x \sin a_2 + y \cos a_2) + a_4, \\
\bar{\xi} &= a_1(\xi \cos a_2 + \eta \sin a_2) + a_3, & \bar{\eta} &= a_1(-\xi \sin a_2 + \eta \cos a_2) + a_4, \\
\bar{\varphi} &= a_1\varphi + d(t).
\end{aligned} \tag{22}$$

При этом произвольный элемент ω изменяется так:

$$\bar{\omega}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = a_5 \omega(\xi, \eta) \neq 0, \quad a_5 = \text{const}. \tag{23}$$

Можно проверить, что уравнение (21) инвариантно относительно преобразований эквивалентности (22), (23), дополненных преобразованием постоянных A, B, C, D, H вида

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= A, & \bar{B} &= B, & \bar{C} &= \cos a_2 C - \sin a_2 D - a_3 A - a_4 B, \\
\bar{D} &= \cos a_2 D - \sin a_2 C - a_4 A + a_3 B, & \bar{H} &= H.
\end{aligned}$$

Результат классификации. Указаны представители и операторы, расширяющие основную алгебру L_{00} .

$$1. \quad \omega = e^{\gamma_2 \arctg(\xi/\eta)} f((\xi^2 + \eta^2)^{1/2} e^{\gamma_1 \arctg(\xi/\eta)});$$

$$Z_1 = \gamma_2 t \partial_t + (\xi - \eta) \partial_\xi + (\xi + \eta) \partial_\eta + (x - y) \partial_x + (x + y) \partial_y + [(2 - \gamma_2)\varphi + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi.$$

$$1.1. \quad f = 1.$$

$$Z_2 = \xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta + y \partial_y + (2\varphi + h(\xi, \eta)) \partial_\varphi;$$

$$Z_3 = -\gamma_2 t \partial_t + \eta \partial_\xi - \xi \partial_\eta + y \partial_x - x \partial_y + [\gamma_2 \varphi + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi.$$

1.2. $f = \zeta^{\gamma_8}$, $\gamma_8 \neq 0$, $\zeta = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} e^{\gamma_1 \arctg(\xi/\eta)}$.

$$Z_4 = -\gamma_8 t \partial_t + \xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta + x \partial_x + y \partial_y + [(2 + \gamma_8) \varphi + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi;$$

$$Z_5 = -(\gamma_2 + \gamma_8) t \partial_t + \eta \partial_\xi - \xi \partial_\eta + y \partial_x - x \partial_y + [(\gamma_2 + \gamma_8) \varphi + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi.$$

1.3. $f = \zeta^{\gamma_2}$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_1 = 1$.

$$Z_1 = \gamma_2 t \partial_t + (\xi - \eta) \partial_\xi + (\xi + \eta) \partial_\eta + (x - y) \partial_x + (x + y) \partial_y + [(2 - \gamma_2) \varphi + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi;$$

$$Z_6 = a(0) \partial_\xi - a(0) \partial_\eta + a(t) \partial_x - a(t) \partial_y + [a_t(x + y) + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi.$$

2. $\omega = (\eta + \gamma_3)^{\gamma_4} f\left(\frac{\xi}{\eta + \gamma_3}\right)$, L_{00} .

2.1. $f = 1$.

$$Z_7 = -\gamma_4 t \partial_t + \xi \partial_\xi + (\eta + \gamma_3) \partial_\eta + x \partial_x + (y + \gamma_3 a(t)) \partial_y + [(2 + \gamma_4) \varphi + \gamma_3 a_t y + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi.$$

2.2. $f = (\zeta + \gamma_6)^{\gamma_4}$, $\gamma_4 \neq 0$, $\zeta = \xi/(\eta + \gamma_3)$.

$$Z_8 = -\gamma_6 \partial_\xi - \gamma_6 a(t) \partial_x + \partial_\eta + a(t) \partial_x + (-\gamma_6 a_t x + a_t y + h(\xi, \eta)) \partial_\varphi.$$

3. $\omega = \exp\left[\gamma_6 \arcsin\left(\frac{\gamma_5 - \xi}{\sqrt{\eta^2 + (\gamma_5 - \xi)^2}}\right)\right] f(2\gamma_5 \xi - \xi^2 - \eta^2)$, L_{00} .

3.1. $f = 1$.

$$Z_9 = (\xi - \gamma_5) \partial_\xi + \eta \partial_\eta + (x - \gamma_5 a(t)) \partial_x + y \partial_y + (2\varphi - \gamma_5 a_t x + h(\xi, \eta)) \partial_\varphi.$$

3.2. $f = (\zeta - \gamma_5^2)^{\gamma_7}$, $\gamma_7 \neq 0$, $\zeta = 2\gamma_5 \xi - \xi^2 - \eta^2$.

$$Z_{11} = -2\gamma_7 t \partial_t + (\xi - \gamma_5) \partial_\xi + \eta \partial_\eta + (x - \gamma_5 a(t)) \partial_x + y \partial_y + [2(\gamma_7 + 1) \varphi - \gamma_5 a_t x + h(\xi, \eta)] \partial_\varphi;$$

$$Z_{12} = \gamma_6 t \partial_t + \eta \partial_\xi - (\xi - \gamma_5) \partial_\eta + y \partial_x - (x - \gamma_5 a(t)) \partial_y + (-\gamma_6 \varphi + \gamma_5 a_t y + h(\xi, \eta)) \partial_\varphi.$$

4. $\omega = e^{-\gamma_7 \xi} f(\gamma_8 \xi - \gamma_9 \eta)$, L_{00} .

4.1. $f = 1$.

$$Z_{13} = \gamma_7 t \partial_t + \partial_\xi + a(t) \partial_x + (-\gamma_7 \varphi + a_t x) \partial_\varphi.$$

4.2. $f = e^{\gamma_{10} \zeta}$, $\gamma_{10} \neq 0$, $\zeta = \gamma_8 \xi - \gamma_9 \eta$, $\gamma_8^2 + \gamma_9^2 \neq 0$.

$$Z_{15} = \gamma_{10} \gamma_9 t \partial_t + \partial_\eta + a(t) \partial_y + (-\gamma_{10} \gamma_9 \varphi + a_t y + h(\xi, \eta)) \partial_\varphi.$$

4.3. $f = (\zeta + \gamma_{11})^{\gamma_{12}}$.

4.3.1. $\gamma_{11} = 0$, $\gamma_9 \neq 0$.

$$Z_{16} = -\gamma_{12} t \partial_t + \xi \partial_\xi + a(t) x \partial_x + [(2 + \gamma_{12} \varphi + a_t x + h(\xi, \eta))] \partial_\varphi;$$

$$Z_{17} = \partial_\xi - \gamma_9^{-1} \gamma_8 \partial_\eta + a(t) \partial_x - \gamma_9^{-1} \gamma_8 a(t) \partial_y + (a_t x - \gamma_9^{-1} \gamma_8 a_t y + h(\xi, \eta)) \partial_\varphi.$$

4.3.2. $\gamma_{11} \neq 0, \gamma_9 \neq 0$.

$$Z_{18} = -\gamma_{12}t\partial_t + \xi\partial_\xi + (\eta - \gamma_9^{-1}\gamma_{11})\partial_\eta + x\partial_x + [y - \gamma_9^{-1}\gamma_{11}a(t)]\partial_y + \\ + (\varphi\partial_\varphi - \gamma_9^{-1}\gamma_{11}a_t y + h(\xi, \eta))\partial_\varphi;$$

$$Z_{19} = \partial_\xi + a(t)\partial_x + \gamma_9^{-1}\gamma_8 a(t)\partial_y + \gamma_9^{-1}\gamma_8\partial_\eta + [\gamma_9^{-1}\gamma_8 a_t y + h(\xi, \eta)]\partial_\varphi.$$

Замечание 1. Для потенциальных движений $u = \varphi_{0\xi}, v = \varphi_{0\eta}$, и замена $\varphi \rightarrow \varphi + \varphi_0$ позволяет считать в системе (1), (2) $u = v = 0$. Из системы определяющих уравнений (9) получим основную алгебру Ли операторов

$$\mu(t)\partial_t - \mu_t(t)\varphi\partial_\varphi, y\partial_x - x\partial_y, n(t)\partial_x + n_t(t)x\partial_\varphi, m(t)\partial_y + m_t(t)y\partial_\varphi, \\ d(t)\partial_\varphi, \psi_\eta\partial_\xi - \psi_\xi\partial_\eta, \xi\partial_\xi + \eta\partial_\eta + x\partial_x + y\partial_y + 2\varphi\partial_\varphi$$

с произвольными класса C^∞ функциями $\mu(t), n(t), m(t), d(t), \psi(\xi, \eta)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН, междисциплинарный интеграционный проект № 44.

Литература

- [1] Андреев В. К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: ВО "Наука". Сибирская изд. фирма, 1992. 136 с.
- [2] Андреев В. К., Родионов А. А. Групповой анализ уравнений плоских течений идеальной жидкости в лагранжевых координатах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 6. С. 1358-1361.
- [3] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

УДК 517.95; 533.6.013.42

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Судаков В. А.

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновск

e-mail: ankil@ulstu.ru, velmisov@ulstu.ru, sseevva@inbox.ru

Ankilov A. V., Velmisov P. A., Sudakov V. A. Stability of a class of boundary value solutions for differential equations with partial derivatives. Stability analysis of solutions of a class of boundary value problems for differential equations with partial derivatives, describing a dynamics of elastic structures in an interaction with a gas flow or a fluid flow.

Determination of stability of the elastic structure with the concept of stability of dynamical systems Lyapunov. A sufficient conditions for a stability, imposing restrictions on a flow rate, a compressive (tensile) force, a flexural rigidity of the elastic element, and other parameters of a mechanical system. A numerical method of solving initial value problems, based on the Galerkin method, and the numerical experiment.

Исследуется устойчивость решений одного класса начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику упругих элементов конструкций при взаимодействии с потоком газа или жидкости. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость потока, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Разработан также численный метод решения указанных начально-краевых задач, основанный на методе Галёркина, и проведен численный эксперимент.

Введение. При проектировании конструкций, обтекаемых потоком газа или жидкости, важное значение имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к увеличению амплитуды или частоты колебаний до значений, при которых нарушается надежность эксплуатации конструкций.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий и подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например, [8]).

Таким образом, при проектировании конструкций и устройств, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В работе исследуется устойчивость класса начально-краевых задач, моделирующих обтекание упругих элементов конструкций (крыла, проточного канала) дозвуковым потоком идеальной жидкости (газа). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование устойчивости проводится в линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного дозвукового потока. На основе построения функционалов для дифференциальных уравнений в частных производных получены условия устойчивости решений этих уравнений.

Задача об устойчивости упругого элерона крыла. Пусть на плоскости xOy , в которой происходят совместные колебания упругого закрылка (элерона) и дозвукового потока идеального газа (жидкости), крылу соответствует на оси xOy отрезок $[a, b]$, а закрылку – отрезок $[b, c]$ (на рис. 1 обозначено $\bar{y} = \frac{y}{\varepsilon}$, где ε – малый параметр).

В бесконечно удалённой точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox . Будем считать, что прогиб упругого

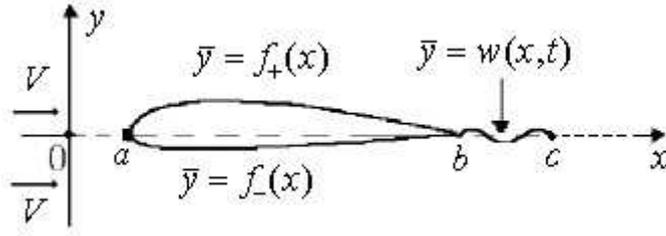


Рис. 1: Крыловой профиль

закрылка и возмущение однородного потока малы.

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция прогиба упругого закрылка; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока газа.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2/[a, c] \quad (1)$$

$$\varphi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \varphi_y(x, y, t) = \begin{cases} V f'_\pm(x), & x \in (a, b), \\ w_t(x, t) + V w_x(x, t), & x \in (b, c), \end{cases} \quad (2)$$

$$|\nabla \varphi|_\infty^2 \equiv (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_\infty = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M(x)\ddot{w}(x, t) + (D(x)w''(x, t))'' + \beta_0(x)w(x, t) + \\ + \beta_1(x)\dot{w}(x, t) + (\beta_2(x)\dot{w}''(x, t))'' = \rho(\varphi_t^+(x, 0, t) - \varphi_t^-(x, 0, t)) + \\ + \rho V(\varphi_x^+(x, 0, t) - \varphi_x^-(x, 0, t)), \quad x \in (b, c). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих обозначает производную по x и τ , а точка – производную по t ; ρ – плотность газа; $D(x)$ – изгибная жесткость закрылка; $M(x)$ – погонная масса закрылка; $\beta_1(x), \beta_2(x)$ – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; $\beta_0(x)$ – коэффициент жесткости основания; $f_\pm(x)$ – функции, определяющие форму верхней (+) и нижней (–) недеформируемых частей профиля крыла. Изгибная жесткость и погонная масса закрылка вычисляются по формулам:

$$D(x) = \frac{Eh^3(x)}{12(1-\nu^2)}, M(x) = h(x)\rho_n, \quad (5)$$

где $h(x)$ – переменная толщина закрылка; E, ρ_n – модуль упругости и плотность материала закрылка; ν – коэффициента Пуассона.

Используя методы теории функций комплексного переменного [9], решение задачи можно свести к исследованию интегро-дифференциального уравнения для неизвестной функции перемещений w закрылка:

$$\begin{aligned} M(x)\ddot{w}(x, t) + (D(x)w''(x, t))'' + \beta_0(x)w(x, t) + \beta_1(x)\dot{w}(x, t) + (\beta_2(x)\dot{w}''(x, t))'' + \\ + \frac{\rho}{\pi} \int_b^c [\ddot{w}(\tau, t) + V\dot{w}'(\tau, t)]K(\tau, t) d\tau + \frac{V\rho}{\pi} \int_a^b [\dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)] \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{V^2 \rho}{\pi} \int_a^b [f'_+(\tau) + f'_-(\tau)] G(\tau, x) d\tau, \quad x \in (b, c), \quad (6)$$

где

$$K(\tau, x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{(x-a)(c-\tau)} + \sqrt{(\tau-a)(c-x)}}{\sqrt{(x-a)(c-\tau)} - \sqrt{(\tau-a)(c-x)}} \right|$$

$$G(\tau, x) = \frac{\sqrt{(x-a)(c-x)} + \sqrt{(\tau-a)(c-\tau)}}{\sqrt{(x-a)(c-x)}(x-\tau)}, \quad \tau \neq x.$$

Если профиль крыла симметричный, т. е. $f_+(x) = -f_-(x)$, то получим однородное уравнение, т. е. уравнение (6) без правой части. Граничные условия на концах пластин при $x = b$ и $x = c$ имеют вид:

$$w(b, t) = 0, \quad w''(b, t) = \alpha w'(b, t), \quad w''(c, t) = 0, \quad w'''(c, t) = 0, \quad (7)$$

что соответствует упругому закреплению левого конца и свободному правому концу. Параметр α – коэффициент жесткости упругой связи между крылом и элероном.

Зададим также начальные условия:

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad (8)$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями.

Исследование устойчивости: Получим достаточные условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения интегро-дифференциального уравнения (6) без правой части по отношению к возмущениям начальных параметров. Введем функционал

$$\Phi = \int_b^c \{M(x)\dot{w}^2 + D(x)w'^2 + \beta_0(x)w^2\} dx + \alpha D(b)w'^2(b, t) + I(t) + J(t), \quad (9)$$

$$I(t) = \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t)\dot{w}(\tau, t)K(\tau, t) d\tau,$$

$$J(t) = -\frac{\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c w'(x, t)w'(\tau, t)K(\tau, t) d\tau. \quad (10)$$

Предположим, что выполняются условия:

$$\alpha \geq 0, \quad \inf_x (\mu_1 \beta_2(x) + \beta_1(x)) \geq 0, \quad V^2 < \frac{2\pi \alpha \inf_x D(x)}{(c-b)\rho K_0(2 + \alpha(c-b))} \quad (11)$$

где μ_1 – наименьшее собственное значение начально-краевой задачи для уравнения $\psi^{(4)}(x) = \mu\psi(x)$, $x \in [b, c]$ с краевыми условиями (7),

$$K_0 = \sup_{x \in (b, c)} \int_b^c K(\tau, x) d\tau.$$

Тогда на основе исследования функционала (9) можно получить неравенство:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\pi \inf_x D(x) - \rho K_0 V^2 (c-b)^2}{\pi (c-b)^2} - \frac{4 \inf_x D(x)}{(c-b)^2 (2 + \alpha(c-b))} \right) \frac{w^2(x, t)}{c-b} \leq \\ & \leq \int_b^c \left\{ \left(\sup_x M(x) + \frac{\rho K_0}{\pi} \right) \dot{w}^2(x, 0) + \sup_x \left(D(x) + \frac{\beta_0(x)}{\mu_1} \right) w'^2(x, 0) \right\} dx + \\ & + \alpha \sup_x \left(D(x) + \frac{\beta_0(x)}{\mu_1} \right) w^2(b, 0), \end{aligned} \quad (12)$$

из которого следует:

Теорема 1. Пусть выполнены условия (11). Тогда решение $w(x, t)$ уравнения (6) без правой части устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений $\dot{w}(x, 0)$, $\ddot{w}(x, 0)$, $\dot{w}(b, 0)$, если $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (7).

Численный эксперимент: Решение уравнения (6) без правой части будем искать методом Бубнова–Галеркина, подчинив искомую функцию $w(x, t)$ краевым условиям (7).

Согласно этому методу, решение уравнения ищется в виде

$$w(x, t) = w_n(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) g_k(x), \quad (13)$$

где $g_k(x)$ – базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия, при этом функции $a_k(t)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения ко всем базисным функциям $\int_b^c L(w_n(x, t)) g_k(x) dx = 0$,

а L – дифференциальный оператор, определяемый левой частью уравнения (6).

Условия ортогональности невязки начальных условий (8) к базисным функциям позволяют найти начальные значения $a_m(0)$.

Таким образом, получили задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая решается с помощью математической системы Mathematica. Были получены графики функции $w(x, t) = \sum_{k=1}^4 w_k(t) g_k(x)$ в точке $x = \frac{b+c}{2}$ и прогибы упругого элемента в различные фиксированные моменты времени (при различных скоростях V набегающего потока и различных законах изменения толщины элерона $h(x)$).

Задача об устойчивости упругого элемента проточного канала.

Рассмотрим плоское течение в прямолинейном канале $J = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного однородного дозвукового потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругой является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$ (рис. 2).

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации упругого элемента стенки канала; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

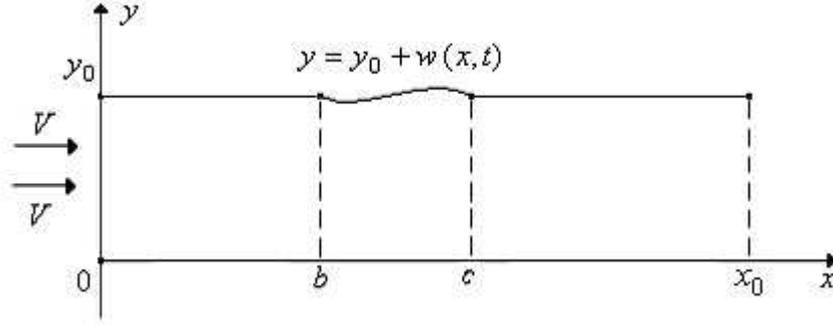


Рис. 2: Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (15)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (17)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (18)$$

$$L(w) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (19)$$

Дифференциальный оператор $L(w)$ задается выражением

$$L(w) \equiv Dw''''(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t). \quad (20)$$

Предположим, что концы упругого элемента закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x = b$ и $x = c$ выполняется одно из условий

$$1) w = w' = 0, \quad 2) w = w'' = 0. \quad (21)$$

Таким образом, получили связанную задачу (14)–(21) для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала $w(x, t)$ и потенциала скорости жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$.

Исследование устойчивости. Исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi(x, y, t) \equiv 0$, $w(x, t) \equiv 0$ задачи (14)–(21) по Ляпунову. Введем “смешанный” функционал, включающий как $\varphi(x, y, t)$, так и $w(x, t)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy - 2V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2) dx. \quad (22) \end{aligned}$$

Можно доказать, что при выполнении условий:

$$\beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0, \quad \lambda_1 D - N > 0, \quad V^2 < \frac{2\pi^2 y_0 (\lambda_1 D - N)}{\rho(\pi^2 y_0^2 + 2x_0^2)} \quad (23)$$

имеет место неравенство

$$w^2(x, t) \leq \frac{\Delta_2(c-b)}{\Delta_3 y_0} \left[\iint_J (\varphi_{x_0}^2 + \varphi_{y_0}^2) dx dy + \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}^2(x, 0) + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w''^2(x, 0)) dx \right], \quad (24)$$

где $\Delta_2 = \frac{2\pi^2}{x_0^2 y_0^2}$, $\Delta_3 = \frac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0} \frac{2\pi^2}{x_0^2 y_0^2} - \frac{V^2}{y_0^2} \left(\frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2}{y_0^2} \right)$, из которого следует

Теорема 2. Пусть выполняются условия (23). Тогда решение $w(x, t)$ системы уравнений (14)–(21) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных $\varphi_x(x, y, 0)$, $\varphi_y(x, y, 0)$, $\varphi(x, y_0, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $w''(x, 0)$.

При выполнении условий (23) имеет место также неравенство:

$$\iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy \leq \frac{d_{22} d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3} \left[\iint_J (\varphi_{x_0}^2 + \varphi_{y_0}^2) dx dy + \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}^2(x, 0) + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w''^2(x, 0) \right) dx \right], \quad (25)$$

где $d_{22} = \frac{2}{y_0^2}$, $d_{33} = \frac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0}$, $d_{23} = -\frac{V}{y_0^2}$, из которого следует

Теорема 3. Пусть выполняются условия (23). Тогда решение $\varphi(x, y, t)$ системы уравнений (4)–(21) устойчиво в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных $\varphi_x(x, y, 0)$, $\varphi_y(x, y, 0)$, $\varphi(x, y_0, 0)$, $\dot{w}(x, t)$, $w''(x, 0)$.

Литература

- [1] Ankilov A. V., Velmisov P. A. Stability of the solutions of one class of aerohydroelasticity problems // J. "Applications of Mathematics in Engineering and Economics". – American Institute of Physics, USA, 2008. – P. 414–426.
- [2] Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. – Ульяновск: УлГТУ, 2000. – 115 с.
- [3] Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – 220 с.
- [4] Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование динамики и устойчивости упругих элементов крыла // Вестник Саратовского государственного технического университета. – Саратов, 2009. – №1(37), Вып. 1. – С. 7–16.
- [5] Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Сагдеева Ю. К. Устойчивость упругого элемента проточного канала // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – С. 75–82.

- [6] Анкилов А. В., Сагдеева Ю. К. Исследование динамики и устойчивости упругой стенки резервуара. – Ульяновск: УлГТУ, 2011. – С. 39–46.
- [7] Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Захарова А. Б. Динамика и устойчивость упругого элерона крыла при дозвуковом обтекании // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сборник статей VI Международной научно-технической конференции. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2011. – С. 107–111.
- [8] Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель / Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К.; заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – № 5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. №18.
- [9] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
- [10] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503 с.

УДК 531.36:534.1

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИОННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА О ДИВЕРГЕНТНОЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Бадюкина Т. Е.
НОУ ВПО “МГИ”, г. Саранск
e-mail: badokinate@gmail.com

Badokina T. E. Three-parameter bifurcation boundary problem of divergence stability loss of elongated plate in supersonic gas flow. On the example of the boundary conditions (the left edge is fixed, the right one is rigidly fixed) it is considered the problem on bifurcating solutions computation to nonlinear eigenvalue problems for the fourth-order ordinary differential equation of the divergence of the elongated plate in a supersonic gas flow, extending or compressing by external boundary conditions and subjected to a small normal load. Computations are based on the representation of bifurcation parameters in terms of roots of the characteristic equation of corresponding linearized differential equation.

На примере граничных условий (левый край свободно закреплен, правый край жестко закреплен) рассматривается задача о вычислении разветвляющихся решений нелинейной задачи на собственные значения для ОДУ 4-го порядка о дивергенции удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа, сжимаемой (растягиваемой) внешними краевыми усилиями, подверженной малой нормальной нагрузке. Вычисления основываются на представлении бифуркационных параметров через корни характеристического уравнения соответствующего линеаризованного уравнения.

1. Введение. Рассматривается задача [1, 2] о дивергенции (прогибе) тонкой гибкой удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа на упругом осно-

вании, сжимаемой(растягиваемой) внешними краевыми усилиями, подверженной малой нормальной нагрузке. В безразмерных переменных задача описывается уравнением:

$$\chi^2 \left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \right)'' - Tw'' + \sigma w' + \beta_0 w + \varepsilon_0 q(x) = kK(w', M, \kappa) + \theta w'' \int_0^1 [(1+w'^2)^{1/2} - 1] dx \quad (1)$$

с граничными условиями

$$w'(0) = w^{(3)}(0) = 0, \quad w(1) = w'(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь $w = w(x)$ – прогиб пластины, $K(w'_x, M, \kappa) = 1 - [1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'_x]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ – для одностороннего обтекания, $K(w'_x, M, \kappa) = [1 - \frac{\kappa-1}{2} M w'_x]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - [1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'_x]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ – для двустороннего обтекания; $0 \leq x_1 \leq d$, $-\infty < y_1 < \infty$, $x = \frac{x_1}{d}$, $0 < x < 1$ – прямоугольные координаты; $\chi^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$, $T = \frac{qd}{Eh}$ и $k = \frac{p_0 d}{Eh}$, где d – ширина пластины, h – её толщина, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, $M = \frac{v}{c_\infty}$ – число Маха (v – скорость потока газа, c_∞ , p_∞ – скорость и давление в невозмущенном газе), κ – показатель политропы, β_0 – коэффициент жесткости основания, $\varepsilon_0 q(x)$ – малая нормальная нагрузка.

Для вычисления малых изгибных форм в окрестностях критических значений бифуркационных параметров (число Маха $M = M_0 + \varepsilon_1$, сжимающее (растягивающее) усилие $T = T_0 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_0 q(x)$ – малая нормальная нагрузка) применяются методы теории бифуркаций [3]. Всюду далее использованы обозначения и терминология монографии [3]. Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассматривается нелинейное уравнение

$$Bx = R(x, \lambda), \quad R(0, 0) = 0, \quad R'(0, 0) = 0. \quad (3)$$

Здесь $B : E_1 \rightarrow E_2$ – замкнутый фредгольмов оператор ($R(B) = \overline{R(B)}$, $R(B)$ – область значений оператора B) с плотной в E_1 областью определения $D(B)$, $N(B) = \text{span} \{ \varphi(x) \}$ – его подпространство нулей, $N^*(B) = \text{span} \{ \psi(x) \}$ – дефектное подпространство. Нелинейный оператор $R(x, \lambda)$ предполагается определенным и достаточно гладким по x и λ в окрестности $(0, 0) \in E_1 + \Lambda$, Λ – пространство параметров. По теореме Хана–Банаха существуют биортогональные системы $\{ \gamma_j \}_1^n \in E_1$, $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ и $\{ z_k \}_1^n \in E_2$, $\langle z_k, \psi_l \rangle = \delta_{kl}$, порождающие проекторы $P = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j : E_1 \rightarrow N(B)$, $Q = \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \gamma_j \rangle \varphi_j : E_2 \rightarrow E_{2,n} = \text{span} \{ z_1, \dots, z_n \}$ и разложение банаховых пространств в прямые суммы $E_1 = E_1^n + E_1^{\infty-n}$, $E_1^n = N(B)$, $E_2 = E_{2,n} + E_{2,\infty-n}$, $E_{2,\infty-n} = R(B)$. Тогда метод Ляпунова–Шмидта позволяет свести задачу (3) к построению малых решений нелинейной конечномерной системы, называемой уравнением разветвления. Действительно, согласно лемме Э. Шмидта, оператор $\tilde{B} = B + \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k$ непрерывно обратим, и уравнение (3) может быть записано в виде системы

$$\tilde{B}x = R(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n \xi_i z_i, \quad \xi_i = \langle x, \gamma_i \rangle, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

По теореме о неявных операторах первое уравнение (4) имеет единственное решение $x = x(\xi, \lambda)$, подстановка которого во второе дает уравнение разветвления (УР)

$$f(\xi, \lambda) \equiv \xi_i - \langle x(\xi, \lambda), \gamma_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Уравнения (2) и (4) имеют одно и то же число малых решений, которые представимы в виде рядов по одинаковым дробным степеням малых параметров.

В этой статье метод Ляпунова-Шмидта применяется к нелинейной задаче (1)–(2) в окрестностях критических значений параметров T_0 , M_0 и $\varepsilon_0 = 0$.

Нелинейный оператор R аналитичен по своим переменным, малое решение (1)–(2) представимо в виде сходящихся рядов по трём малым параметрам в малой окрестности точек бифуркации. Наибольшие трудности возникают при исследовании линеаризованной спектральной задачи, фредгольмовость которой, подобно [4], доказывается построением соответствующей функции Грина, выполненным по стандартной схеме монографии [5]. При этом представление бифуркационных параметров через корни соответствующего характеристического уравнения, которые могут быть вычислены с любой точностью, позволяет рассматривать бифуркационную задачу в точной постановке. Здесь оказывается полезным использование теоремы Виета. Отметим, что этот прием может быть реализован при исследовании бифуркационных нелинейных задач на собственные значения для ОДУ высоких порядков при ненулевом значении хотя бы одного из коэффициентов характеристического уравнения.

Полученные результаты соответствуют плану проекта РФФИ №13-01-00188а.

2. Вычисление разветвляющихся решений. Линеаризованной двухточечной граничной задаче на собственные значения

$$\chi^2 w^{(4)} - Tw'' + \sigma w' + \beta_0 = 0, \quad \sigma = 1(2)k\kappa M, \quad T = T_0 + \varepsilon_2, \quad \varepsilon_0 = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями (2), отвечает характеристическое уравнение

$$\chi^2 \lambda^4 - T\lambda^2 + \sigma\lambda + \beta_0 = 0. \quad (7)$$

Здесь множитель 1(2) в параметре σ соответствует одно(дву-)стороннему обтеканию пластины сверхзвуковым потоком газа.

При исследовании алгебраического уравнения (7) с двумя параметрами T и σ использован метод Штурма разделения корней алгебраического уравнения. Подобно [6], возникают следующие возможности наборов корней характеристического уравнения:

- А. $-\gamma \pm \delta_1 i, \gamma \pm \delta_2 i$ ($\gamma, \delta_1, \delta_2 > 0, \delta_2 > \delta_1$);
- В. $-\alpha, -2\gamma + \alpha, \gamma \pm \delta i$ ($\alpha, \gamma, \delta > 0, \gamma < \alpha < 2\gamma$);
- С. $-\alpha \pm \beta_1, \alpha \pm \beta_2$ ($\alpha, \beta_1, \beta_2 > 0, \beta_2 < \beta_1 < \alpha$);
- А – В. $-\alpha, -\alpha$ ($\alpha \pm \delta i, \alpha, \delta > 0$);
- В – С. $-\alpha, -2\gamma + \alpha, \gamma, \gamma$ ($\alpha, \gamma > 0, \gamma < \alpha < 2\gamma$).

Вид корней характеристического уравнения скорректирован с учетом равенства нуля суммы корней таким образом, что в невырожденных случаях все искомые

коэффициенты и функции являются функциями трех аргументов, в вырожденных случаях – двух аргументов.

Асимптотика разветвляющихся решений по малым параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в точке бифуркации (T_0, M_0) вычислена для всех случаев существования бифуркационных кривых. Влияние третьего бифуркационного параметра ε_0 описывается методами теории катастроф и будет представлено в другой работе.

Линеаризованная в точке бифуркации задача (3)–(2) определяет фредгольмов оператор $B : C^{4+\alpha}[0, 1] \rightarrow C^\alpha[0, 1]$ с одномерным подпространством нулей $N(B) = \text{span} \{\varphi(x)\}$ и дефектным подпространством $N^*(B) = \text{span} \{\psi(x)\}$. Для одностороннего обтекания асимптотика разветвляющихся решений имеет вид:

$$X(x) = \frac{L_{110}^1 \varepsilon_1 + L_{101}^1 \varepsilon_2}{L_{200}^1} \varphi(x) + o(|\varepsilon|), \quad L_{200}^1 \neq 0$$

и для двустороннего обтекания $X(x) = \pm \sqrt{\frac{L_{110}^2 \varepsilon_1 + L_{101}^2 \varepsilon_2}{L_{300}^2}} \varphi(x) + O(|\varepsilon|)$, $L_{300}^2 \neq 0$ знаки $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ определяются неотрицательностью подкоренного выражения.

Коэффициенты уравнения разветвления вычисляются согласно [3] методом Некрасова–Назарова неопределенных коэффициентов. В виду ограниченности объема статьи, значение коэффициентов уравнения разветвления не приводятся, они вычислены с помощью пакета Maple 12.

3. Исследование спектральной задачи.

А. Характеристическое уравнение имеет две пары комплексно-сопряжённых корней $(-\gamma \pm \delta_1 i, \gamma \pm \delta_2 i)$. Использование теоремы Виета и равенство нулю определителя матрицы граничных условий позволило выделить в множестве $\Omega = \{(\gamma, \delta_1, \delta_2) | \delta_2 > \delta_1, \gamma > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0\}$ множество точек бифуркации.

$$\begin{aligned} \Delta = & 2\gamma\delta_1\delta_2((\gamma^2 + \delta_2^2)e^{-2\gamma} - (\gamma^2 + \delta_1^2)e^{2\gamma}) - ((\gamma\delta_2^4 + 4\gamma^3\delta_2^2 - 4\delta_1^2\gamma^3 - \delta_1^4\gamma) \sin \delta_2 + \\ & + \delta_2 \cos \delta_2(\delta_1^4 + (3\gamma^2 - \delta_2^2)\delta_1^2 + 4\gamma^4 + \gamma^2\delta_2^2)) \sin \delta_1 + \\ & + \delta_1(((\gamma^2 - \delta_2^2)\delta_1^2 + 4\gamma^4 + 3\gamma^2\delta_2^2 + \delta_2^4) \sin \delta_2 - 2\gamma\delta_2 \cos \delta_2(\delta_1^2 - \delta_2^2)) \cos \delta_1 = 0. \end{aligned}$$

Существуют такие значения $(\alpha, \delta_1, \delta_2)$ при фиксированных значениях коэффициента жесткости основания, на которых $\Delta(\alpha^1, \delta_1^1, \delta_2^1) \cdot \Delta(\alpha^2, \delta_1^2, \delta_2^2) < 0$ (например при $c = 32, 237$, $\alpha^1 = 1$, $\delta_1^1 = 1, 1971$, $\delta_2^1 = 3, 5$, $\alpha^2 = 1$, $\delta_1^2 = 1, 1972$, $\delta_2^2 = 3, 5$).

Выпишем значения базисных элементов φ и ψ подпространств $N(B)$ и $N^*(B)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{\Delta_0} \left[\delta_2(\delta_1 \cos \delta_1 x + \gamma \sin \delta_1 x) e^{\gamma(2-x)} + \delta_1(\delta_2 \cos \delta_2 x - \gamma \sin \delta_2 x) e^{-\gamma(2-x)} - \right. \\ & - e^{-\gamma x} ((2\gamma^2 + \delta_2^2) \sin \delta_2 - \gamma \delta_2 \cos \delta_2) \sin \delta_1 (1-x) - \\ & - \delta_1(\gamma \sin \delta_2 - \delta_2 \cos \delta_2) \cos \delta_1 (1-x) - e^{\gamma x} (\delta_2(\gamma \sin \delta_1 + \delta_1 \cos \delta_1) \cos \delta_2 (1-x) + \\ & \left. + ((2\gamma^2 + \delta_1^2) \sin \delta_1 + \gamma \delta_1 \cos \delta_1) \sin \delta_2 (1-x)) \right], \end{aligned}$$

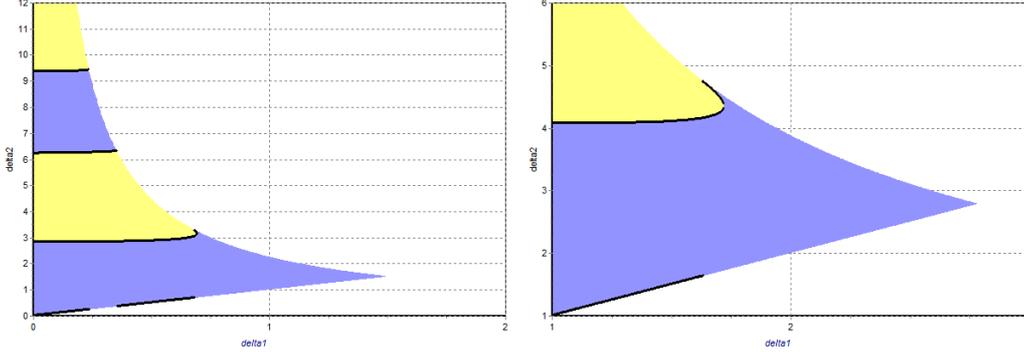


Рис. 1. Визуализация Δ при а) $\frac{\beta_0}{\chi^2} = 5$; б) $\frac{\beta_0}{\chi^2} = 60$.

$$\begin{aligned} \psi(x) = \frac{-1}{\Delta_0^*} & \left[\delta_2(\gamma \sin \delta_1 x - \delta_1 \cos \delta_1 x) e^{-\gamma(2+x)} - \delta_1(\gamma \sin \delta_2 x + \delta_2 \cos \delta_2 x) e^{\gamma(2+x)} + \right. \\ & + e^{-\gamma x} \left(((2\gamma^2 + \delta_2^2) \sin \delta_2 + \gamma \delta_2 \cos \delta_2) \sin \delta_1 (1-x) + \right. \\ + \delta_1(\gamma \sin \delta_2 + \delta_2 \cos \delta_2) \cos \delta_1 (1-x) & + e^{\gamma x} \left(((2\gamma^2 + \delta_1^2) \sin \delta_1 - \gamma \delta_1 \cos \delta_1) \sin \delta_2 (1-x) - \right. \\ & \left. \left. - \delta_2(\gamma \sin \delta_1 - \delta_2 \cos \delta_1) \cos \delta_2 (1-x) \right) \right]. \end{aligned}$$

где Δ_0 – отличный от нуля минор 3-го порядка определителя матрицы граничных условий $\Delta_0 = ((2\gamma^2 + \delta_1^2) \cos \delta_2 - \gamma \delta_2 \sin \delta_2) \sin \delta_1 + \delta_1(\gamma \cos \delta_2 - \delta_2 \sin \delta_2) \cos \delta_1 - \gamma \delta_1 e^{-2\gamma}$, $\Delta_0^* = ((2\gamma^2 + \delta_1^2) \cos \delta_2 + \gamma \delta_2 \sin \delta_2) \sin \delta_1 - \delta_1(\gamma \cos \delta_2 + \delta_2 \sin \delta_2) \cos \delta_1 + \gamma \delta_1 e^{2\gamma}$, отметим что $\Delta_0^* = \Delta_0(-\gamma)$.

Замечание. Для всех наборов корней, при которых имеет место дивергенция, доказательство её существования выполняется аналогичным способом. В силу ограниченности работы, мы не будем указывать значения конкретных точек, в которых происходит смена знака у определителя матрицы граничных условий, и тем более приводить значения соответствующих базисных элементов подпространств $N(B)$ и $N^*(B)$.

В. Корнями характеристического уравнения являются два отрицательных и пара комплексно-сопряженных чисел $(-\alpha, -2\gamma + \alpha, \gamma \pm \delta i)$. Равенство

$$\begin{aligned} \Delta = 4\gamma\delta(\alpha - \gamma)((\gamma^2 + \delta^2)e^{-2\gamma} - \alpha(2\gamma - \alpha)e^{2\gamma}) + \\ + \alpha e^{\alpha-\gamma} \{ (3\gamma^4 - \alpha\gamma^3 - 3\gamma^2(\alpha^2 + 2\delta^2) + \gamma\alpha(\alpha^2 + 3\delta^2) - \delta^2(\alpha^2 + \delta^2)) \sin \delta - \\ - \delta(8\gamma^3 - 3\alpha\gamma^2 - 2\alpha^2\gamma + \alpha(\alpha^2 + \delta^2)) \cos \delta \} + \\ + (2\gamma - \alpha)e^{-\alpha+\gamma} \{ (3\gamma^4 - \alpha\gamma^3 - \gamma^2(3\alpha^2 - 4\delta^2) + \gamma\alpha(\alpha^2 - \delta^2) + \delta^2(\alpha^2 + \delta^2)) \sin \delta + \\ + \delta(2\gamma^3 - \alpha\gamma^2 + 2\gamma(2\alpha^2 + \delta^2) - \alpha(\alpha^2 + \delta^2)) \cos \delta \} = 0 \end{aligned}$$

определяет бифуркационные кривые. Вычислительный эксперимент показывает возможность существования точек бифуркации, в которых $\Delta = 0$.

С. Характеристическое уравнение имеет два отрицательных и два положительных корня $(-\alpha \pm \beta_1, \alpha \pm \beta_2)$. Из теоремы Виета следует, что $\beta_1 > \beta_2$, $\beta_1 < \alpha$. Равенство нулю определителя матрицы граничных условий определяет

возможные точки бифуркации:

$$\begin{aligned}\Delta = & 8\alpha\beta_1\beta_2((\alpha^2 - \beta_2^2)e^{-2\alpha} - (\alpha^2 - \beta_1^2)e^{2\alpha}) + \\ & + (\alpha - \beta_1)e^{-\beta_1}((\alpha + \beta_2)(\beta_1 + \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2)e^{-\beta_2} - \\ & - (\alpha - \beta_2)(\beta_1 - \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2)e^{\beta_2}) + \\ & + (\alpha + \beta_1)e^{\beta_1}((\alpha + \beta_2)(\beta_1 - \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2)e^{-\beta_2} - \\ & - (\alpha - \beta_2)(\beta_1 + \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2)e^{\beta_2}) = 0.\end{aligned}$$

Лемма 1. На рассматриваемом множестве $\Omega = \{(\alpha, \beta_1, \beta_2) | \beta_1 \in (0, \alpha), \beta_2 \in (0, \alpha), \beta_1 > \beta_2\}$ дивергенция отсутствует.

Доказательство. Введем обозначения $\Delta_1 = 8\alpha\beta_1\beta_2(\alpha^2 - \beta_2^2)e^{-2\alpha}$, $\Delta_2 = (\alpha - \beta_1)e^{-\beta_1}((\alpha + \beta_2)(\beta_1 + \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2)e^{-\beta_2}$, $\Delta_3 = -(\alpha - \beta_1) \times (\alpha - \beta_2)(\beta_1 - \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2)e^{-\beta_1 + \beta_2}$, $\Delta_4 = (\alpha + \beta_1)e^{\beta_1}(\alpha + \beta_2)(\beta_1 - \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2)e^{-\beta_2}$, $\Delta_5 = -(\alpha + \beta_1)e^{\beta_1}(\alpha - \beta_2)(\beta_1 + \beta - 2)(4\alpha^2 - (\beta_1 - \beta_2)^2)e^{\beta_2}$ и $\Delta_6 = -8\alpha\beta_1\beta_2(\alpha^2 - \beta_1^2)e^{2\alpha}$ части определителя Δ , содержащие множителем экспоненту в различных степенях.

Используя ограничения, полученные из теоремы Виета, получаем, что $\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 < 2(\alpha + \beta_1)e^{\beta_1}(-4\alpha^3\beta_2 + 4\alpha^2\beta_1\beta_2 - \alpha\beta_1^2\beta_2 - \beta_1^3\beta_2 + \beta_1\beta_2^3 + \alpha\beta_2^3) + 2(\alpha - \beta_1)e^{-\beta_1}(4\alpha^3\beta_2 + 4\alpha^2\beta_1\beta_2 + \alpha\beta_1^2\beta_2 - \beta_1^3\beta_2 + \beta_1\beta_2^3 - \alpha\beta_2^3)$. Применяя неравенства $-e^{\beta_1} < -1$, $e^{-\beta_1} < 1$ и учитывая отрицательность коэффициента перед e^{β_1} имеем $\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 < 8\alpha\beta_1\beta_2(\beta_2^2 - \beta_1^2) < 0$.

Другая часть определителя $\Delta_1 + \Delta_6 < 8\alpha\beta_1\beta_2((\alpha^2 - \beta_2^2)e^{-2\alpha} - (\alpha^2 - \beta_1^2)e^{2\alpha})$. Учитывая, что $e^{-2\alpha} < 1$ и $-e^{2\alpha} < -1$, $\Delta_1 + \Delta_6 < 8\alpha\beta_1\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2) < 0$.

Суммируя полученные неравенства, получаем $\Delta < 8\alpha\beta_1\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2) + 8\alpha\beta_1\beta_2(\beta_2^2 - \beta_1^2) = 0$, т. е. $\Delta < 0$. Следовательно, дивергенция отсутствует.

А-В. Вырожденный случай, когда характеристическое уравнение имеет отрицательный корень кратности 2 и пару комплексно-сопряжённых корней $(-\alpha, -\alpha, \alpha \pm \delta i)$. Определитель матрицы граничных условий определяет как функция двух переменных:

$$\begin{aligned}\Delta = & 2\alpha\delta((\alpha^2 + \delta^2)e^{-2\alpha} - \alpha^2e^{2\alpha}) - (4\alpha^4 + 4\alpha^3\delta^2 + 3\alpha^2\delta^2 + \alpha\delta^4 + \delta^4) \sin \delta - \\ & - \alpha\delta(4\alpha^3 + \alpha\delta^2 + 2\delta^2) \cos \delta.\end{aligned}$$

Бифуркационная кривая $\rho = \rho(\alpha, \delta)$ состоит из точек (α, δ) , в которых $\Delta = 0$. При фиксированных значениях коэффициента жесткости основания, существуют такие значения α, δ , на которых $\Delta(\alpha^1, \delta^1) \cdot \Delta(\alpha^2, \delta^2) < 0$: например при $c = 17, 554$, $\alpha^1 = 1, 25$, $\delta^1 = 3, 11$, $\alpha^2 = 1, 253$, $\delta^2 = 3, 1$.

Замечание. Контроль правильности вычислений осуществляется с помощью предельного перехода в соответствующих функциях от **А** при $\delta_1 \rightarrow 0$ либо от **В** при $\alpha \rightarrow \gamma$.

В-С. Характеристическое уравнение имеет два отрицательных и положительный корень кратности 2 $(-\alpha, -2\gamma + \alpha, \gamma, \gamma)$. Возможные точки бифуркации определяются равенством:

$$\begin{aligned}\Delta = & 4\gamma(\alpha - \gamma)(\gamma^2e^{-2\gamma} - \alpha(2\gamma - \alpha)e^{2\gamma}) + \\ & + \alpha e^{\alpha - \gamma}(3\gamma^4 - (\alpha + 8)\gamma^3 + 3\alpha(1 - \alpha)\gamma^2 + \alpha^2(\alpha + 2)\gamma - \alpha^3) + \\ & + (2\gamma - \alpha)e^{-\alpha + \gamma}(3\gamma^4 + (2 - \alpha)\gamma^3 - \alpha(3\alpha + 1)\gamma^2 + \alpha^2(\alpha + 4)\gamma - \alpha^3) = 0.\end{aligned}$$

Лемма 2. На рассматриваемом множестве $\Omega = \{(\alpha, \gamma) | \alpha \in (\gamma, 2\gamma)\}$ дивергенция отсутствует.

Подобно пункту С, отсутствия дивергенции доказывается оценками коэффициентов при экспонентах.

Литература

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
- [2] Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 339 с.
- [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений – М.: Наука, 1969. – 524 с.
- [4] Loginov V. V., Badokina T. E., Makeeva O. V. Green functions construction for divergence problems in aero-elasticity, ROMAI Jornal v.4, №2, (2008), – С. 33–44.
- [5] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
- [6] Бадокина Т. Е. Бифуркационное множество в модельных задачах аэроупругости // Труды третьей международной научной конференции “Математическое моделирование и дифференциальные уравнения” (г. Брест, 17–22 сентября 2012 г.). – Минск, Издательский центр БГУ. – С. 47–57.

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ГИДРОЗАТВОРЫ

Васин А. В.

Государственный университет морского и речного флота
Санкт-Петербург

e-mail: andrejvasin@gmail.com

Vasin A. V. Mathematical modeling of hydrodynamic loads on the hydraulic locks bypass galleries. Consider the linear approximation of the nonlinear Goldshtik problem of separated flow of an ideal fluid. A numerical solution of this problem in the application to the calculation of flat water seal to bypass galleries of lock chambers is given.

Рассматриваются линейные аппроксимации нелинейной задачи Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости. Предлагается численное решение данной задачи в приложении к расчету плоских гидрозатворов в обводных галереях шлюзовых камер.

В работах [1, 2] рассматривается математическая модель Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости, а в работе [3] непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика. Математическая постановка задачи заключается

в том, чтобы определить дважды дифференцируемую функцию ψ в области, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta\psi = -\omega(\operatorname{sgn}(\psi) + 1)/2$$

со смешанными граничными условиями (на части границы заданы значения Дирихле, а на части границы – условия Неймана). В работах [2, 3] для решения задачи (1) используется метод непрерывной аппроксимации. Аппроксимирующая задача получается из исходной возмущением спектрального параметра и представляет собой нелинейное эллиптическое дифференциальное уравнение с краевым условием. Нелинейность в аппроксимирующем уравнении непрерывная и зависит от малого параметра. В данной работе главным объектом приложения является расчет гидродинамических нагрузок на водопропускные ворота в обводных галереях шлюзовых камер. В отличие от [2, 3] применяется несколько другой метод аппроксимации линейными разрывными задачами. Этот метод по своей сути ближе к исходным исследованиям Гольдштика [4, 5] и удобнее для численной реализации, поскольку на каждом итерационном шаге предполагается решение линейного уравнения Пуассона. Для решения уравнения Пуассона применяется метод граничных интегральных уравнений без использования каких-либо развитых пакетов на основе метода конечных элементов типа ANSYS или Flow 3d.

При использовании схемы склеивания течений с различными завихренностями в реальных водопроводных галереях будем конструктивно строить оператор Грина, а по сути, численно решать граничные интегральные уравнения. В работах [1, 2] доказано, что задача Гольдштика имеет нетривиальное решение (с непустой областью завихренности) при достаточно больших величинах завихренности $\omega > 4e/R^2$, где R – радиус наибольшего круга, который можно вписать в область камеры. Кратко схема доказательства состоит в следующем. Выберем начальную область D_0 вихревого течения, расположенную непосредственно за затвором. Пусть D_1 – дополнение D_0 до области всей камеры. Определим функцию

$$\psi = \varphi_0 - \frac{\omega}{2\pi} \int_{D_0} G(\cdot, z) dA(z),$$

в которой G – функция Грина задачи Дирихле для области D , а интегрирование совершается по площади. Всюду в области D_0 функция ψ_1 удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\psi = -\omega$, а во внутренних точках D_1 соответственно имеем $\Delta\psi = 0$. Функция ψ непрерывно дифференцируема и удовлетворяет граничным условиям. Кроме того на линии раздела, которая является линией тока областей D_0 и D_1 , ψ должна быть равна величине потока. Последнее дает нам еще одно нелинейное интегральное уравнение для нахождения неизвестной линии раздела. Сложность итеративного процесса обусловлена в первую очередь отсутствием явного вида функции Грина для задачи Дирихле в галереях общего вида. Решение уравнения Пуассона обычно ищется в виде суммы потенциала площади и решения конкретной задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В изучаемом случае удобнее представить решение как сумму четырех функций:

$$\psi = \omega(\psi_1 + \psi_2) + \varphi,$$

где функция ψ_1 — потенциал площади

$$\psi_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_0} \ln \frac{1}{\zeta - z} dA(\zeta),$$

и для неё выполняется

$$\Delta\psi_1 = \begin{cases} 0, & z \in D_1, \\ -1, & z \in D_0, \end{cases}$$

а остальные функции удовлетворяют нижеследующим уравнениям с граничными условиями:

1). $\Delta\psi_2 = 0$ в области D с граничными условиями $\psi_2|_{\Gamma} = -\psi_1|_{\Gamma}$ (напоминаем, что это граничные условия общего вида, на части границы заданы значения функции, а на остальной части — ее нормальной производной);

2). $\Delta\varphi = 0$ в области D с исходными граничными условиями.

Такое представление предпочтительней, поскольку есть возможность корректировать величину завихренности, которая изначально неизвестна и подбирается опытным путем.

Алгоритм решения был реализован в математическом пакете Maple [8]. На рис. 1 показана полученная картина течения при следующих исходных данных: высота камеры равна 3 м, общее количество точек границы области равно 220, на нижней стенке функция тока $\psi = 0$, на верхней стенке функция тока $\psi = 12$, на входе/выходе функция тока меняется линейно, средняя скорость на входе и на выходе равна 2.4 м/с, затвор поднят на 30%. Максимально допустимая погрешность значения функции тока на линии раздела 0.001. Исходная величина завихренности $\omega = 10$, в процессе итераций данная величина изменилась до $\omega = 5.66$. Полученная картина течения позволяет вычислить скорости

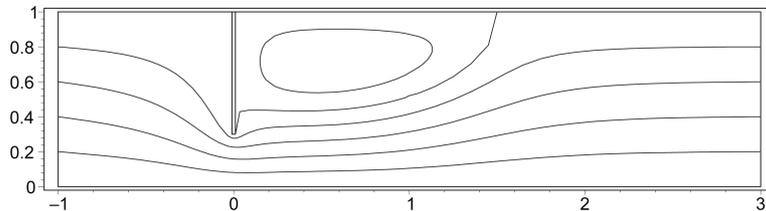


Рис. 1: Построенная при моделировании картина линий тока.

за затвором и перед ним, что даёт возможность определить величину гидродинамического давления на затвор. Важность вычисления данного параметра обусловлена тем, что при затопленной галерее гидростатические нагрузки с разных сторон на затвор уравниваются. Кроме того, использование схемы потенциального течения (без учёта вихревых течений) так же даёт, ввиду симметрии, одинаковое распределение скоростей на разных сторонах затвора. На самом деле, схема Лаврентьева–Шабата даёт несимметричное распределение скоростей, что ведет к несимметричным гидродинамическим нагрузкам на затвор. Для определения результирующей силы гидродинамического давления на затвор водопроводной галереи воспользуемся интегралом Бернулли для установившегося течения, откуда для разности давлений с разных сторон затвора получим

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (v_2^2 - v_1^2)/2.$$

На рис. 2 приведены величины гидродинамических нагрузок для различных значений относительной высоты поднятия затвора. В нашем случае рассмотрены относительные высоты составляют 10%, 20%, 30%, 40% и 50%, соответственно. Анализ результатов даёт, что наибольшее результирующее давление перед затвором сосредоточено на уровне середины затвора и возникает в момент открытия затвора. С другой стороны наибольшее результирующее давление за затвором сосредоточено на нижней кромке и увеличивается по мере открытия затвора. Отметим, что найденные величины давлений достаточны велики для

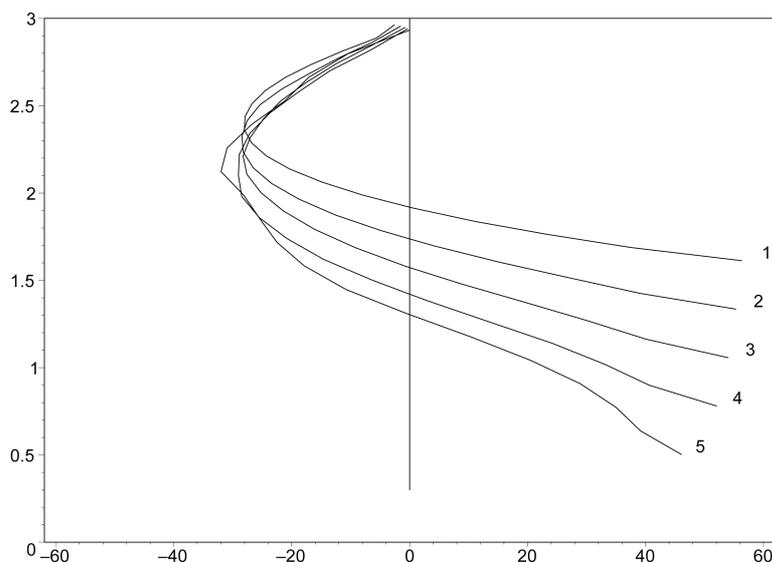


Рис. 2: Величины гидродинамических нагрузок при различных режимах открытия затвора.

учета нагрузок на гидрозатвор, поскольку наибольшие результирующие давления соизмеримы по величине с гидростатическими нагрузками на гидрозатвор. С другой стороны в затопленной галерее гидростатические давления с разных сторон на затвор уравниваются, поэтому важным является расчет именно динамических нагрузок на затвор. Представленная неоднородность распределения давлений приводит к вибрациям при подъеме затвора.

Литература

- [1] Вайнштейн И. И. Решение двух дуальных задач о склейке вихревых и потенциальных течений вариационным методом М. А. Гольдштика // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, 2011, 4(№ 3). – С. 320–331.
- [2] Потапов Д. К. Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Математические заметки, 2010. 87, вып. 2, – С. 262–266.
- [3] Потапов Д. К. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Известия РАН серия МММИУ, 2004, 8, №3–4. – С. 163–170.
- [4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

- [5] Гольдштик М. А. Вихревые потоки. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1981.
- [6] Васин А. В., Тимофеева О. А. Нахождение линии раздела областей с потенциальным и вихревым течением // Журнал Университета водных коммуникаций, 2012, Вып.2(№14). – С. 8–13.
- [7] Васин А. В. Математическое моделирование опыта Н. Б. Городенского о вихревых течениях в плюзовых камерах // Журнал Университета водных коммуникаций, 2012, Вып.3(№15). – С. 42–47.
- [8] Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе MAPLE. СПб: Питер, 2004. – 539 с.

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А.

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновск

e-mail: velmisov@ulstu.ru, kazakovaua@mail.ru

Velmisov P. A., Tamarova Yu. A. About some solutions of the equations of aerogydromechanics. We consider the method of constructing a parametric solution of polynomial form for systems of nonlinear partial differential equations. As an example the parametric solutions are constructed and their classification is carried out for the systems of equations, describing the plane incompressible flows of the ideal fluid.

Предложен метод построения параметрических решений полиномиального вида для систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. В качестве примера построены параметрические решения и проведена их классификация для систем уравнений, описывающих плоские течения идеальной жидкости.

1. Однопараметрический метод. Рассматривается система дифференциальных уравнений с частным производными

$$F_k \left(x, y, t, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial y}, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = 0, \quad k = 1 \div n, \quad (1)$$

где $u_k(x, y, t)$ – функции переменных x, y, t .

Решение системы (1) отыскивается в параметрическом виде

$$u_k = U_k(\xi, y, t), \quad k = 1 \div n, \quad x = X(\xi, y, t). \quad (2)$$

Производные пересчитываются по формулам

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial U_k}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{\partial U_k}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{\partial U_k}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial t} \right),$$

где Δ – якобиан преобразования, $\Delta = \frac{\partial X}{\partial \xi} \neq 0$. Тогда система уравнений (1) преобразуется к виду:

$$F_k \left(\xi, y, t, X, U_1, \dots, U_n, \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial U_1}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial U_n}{\partial \xi}, \frac{\partial U_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial U_n}{\partial y}, \frac{\partial U_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial U_n}{\partial t} \right) = 0, \quad (3)$$

где $k = 1 \div n$. В системе (3) функции $X, U_k, (k = 1 \div n)$ являются функциями переменных ξ, y, t . Поэтому имеем n уравнений для $(n + 1)$ функции, одну из которых можно выбрать произвольным образом. Решение системы (3) отыскивается в виде многочленов по степеням y :

$$U_k = \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi, t)y^i, \quad X = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t)y^k, \quad (4)$$

где $\alpha_k, \gamma \in N$; u_{ki}, x_k – искомые функции, зависящие от ξ, t . Для квазилинейных уравнений первого порядка, а именно для уравнений газовой динамики, разработана программа (см. [1]), позволяющая определить параметры $\alpha_k, \gamma \in N$, для которых система дифференциальных уравнений для функций u_{ki}, x_k является определенной или недоопределенной. Пусть r_k – максимальная степень переменной y , возникающая в уравнении $F_k = 0$ ($k = 1 \div n$) при подстановке в него выражений (4). Число уравнений r и число неизвестных функций s находятся следующим образом

$$r = \sum_{k=1}^n r_k + n, \quad s = \gamma + \sum_{k=1}^n \alpha_k + n + 1.$$

Тогда степень недоопределенности есть $j = s - r$. Определив все возможные параметры $\alpha_k, \gamma \in N$ и подставив полученные решения (4) в систему (3), получим систему уравнений для функций $u_{ki}(\xi, t), x_k(\xi, t)$, в которой j функций могут быть выбраны произвольно. Заметим, что в стационарном случае (когда в (3) функции X, U_k ($k = 1 \div n$) не зависят от t), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций u_{ki}, x_k , зависящих от ξ .

Пример 1. Установившиеся течения несжимаемой идеальной жидкости описываются системой уравнений

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $u(x, y), v(x, y)$ – проекции вектора скорости, $p(t, x, y)$ – давление, ρ – плотность, $\rho = \text{const}$. После перехода к переменным ξ, y система (5) принимает

вид:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы (6) ищется в виде многочленов по степеням y :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{\alpha} u_k(\xi) y^k, & v &= \sum_{k=0}^{\beta} v_k(\xi) y^k, & w &= \sum_{k=0}^{\theta} w_k(\xi) y^k, \\ x &= \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi) y^k, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, \theta, \gamma$ – натуральные числа. При подстановке выражений (7) в систему (6) получим следующие максимальные степени переменной y :

$$\begin{cases} J_1 = 2\alpha, & J_2 = \beta + \alpha + \gamma - 1, & J_3 = \theta, \\ J_4 = \alpha + \beta, & J_5 = 2\beta + \gamma - 1, & J_6 = \theta + \gamma - 1, \\ J_7 = \alpha, & J_8 = \beta + \gamma - 1. \end{cases}$$

Параметры J_1, J_2, J_3 соответствуют первому уравнению системы (6), J_4, J_5, J_6 – второму уравнению системы (6), J_7, J_8 – третьему уравнению системы (6). Число коэффициентов в (7) равно $s = \alpha + \beta + \theta + \gamma + 4$, а число уравнений в системе (6) определяется соотношением: $r = I_1 + I_2 + I_3 + 3$, где $I_1 = \max(J_1, J_2, J_3)$, $I_2 = \max(J_4, J_5, J_6)$, $I_3 = \max(J_7, J_8)$. Максимальные значения I_1, I_2, I_3 можно выбрать 18 способами. С помощью программы, описанной в [1], получены возможные значения переменных $\alpha, \beta, \theta, \gamma \in N$, для которых система обыкновенных дифференциальных уравнений будет определенной или недоопределенной (j – степень недоопределенности). Результаты классификации представлены сводной таблицей 1.

Таблица 1. Допустимые значения параметров для системы (6).

№	α	β	θ	γ	j	№	α	β	θ	γ	j
1	0	0	0	0	1	16	0	1	1	1	0
2	0	0	0	1	2	17	0	0	1	2	0
3	0	1	0	0	1	18	0	0	1	0	1
4	1	0	0	2	0	19	0	1	1	0	1
5	1	0	1	1	0	20	0	1	2	0	1
6	1	0	2	0	0	21	1	1	3	0	0
7	1	1	1	1	0	22	1	2	3	0	0
8	1	1	2	0	0	23	1	2	4	0	0
9	1	1	2	1	1	24	0	1	2	1	0
10	1	2	2	0	0	25	0	0	1	1	1
11	2	2	4	1	0	26	0	0	2	0	0
12	1	0	1	2	0	27	0	0	2	1	0
13	1	0	2	1	0	28	0	1	3	0	0
14	1	0	2	2	0	29	1	1	3	1	0
15	0	0	0	2	0	-	-	-	-	-	-

Рассмотрим вариант 9, когда $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $\theta = 2$, $j = 1$:

$$\begin{cases} u = u_0(\xi) + u_1(\xi)y, & v = v_0(\xi) + v_1(\xi)y, \\ x = x_0(\xi) + x_1(\xi)y, & p = p_0(\xi) + p_1(\xi)y + p_2(\xi)y^2. \end{cases} \quad (8)$$

Подставив (8) в (6), получим систему из восьми обыкновенных дифференциальных уравнений для девяти функций $u_0(\xi)$, $u_1(\xi)$, $v_0(\xi)$, $v_1(\xi)$, $p_0(\xi)$, $p_1(\xi)$, $p_2(\xi)$, $x_0(\xi)$, $x_1(\xi)$, одна из которых может быть выбрана произвольно. Полагая $x_1(\xi) = \xi$, $\rho = 1$, получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_0(\xi) = -\frac{-\xi p_1(\xi) - \xi^2 u_1(\xi) v_0(\xi) - u_0(\xi) v_1(\xi)}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))}, \\ u'_1(\xi) = \frac{2\xi p_2(\xi) + u_1(\xi) v_1(\xi) + \xi^2 u_1(\xi) v_1(\xi)}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))}, \\ v'_0(\xi) = -\frac{(-p_1(\xi) - \xi u_1(\xi) v_0(\xi) + \xi u_0(\xi) v_1(\xi))}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))} - \\ - \frac{v_0(\xi) v_1(\xi) + \xi^2 v_0(\xi) v_1(\xi)}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))}, \\ v'_1(\xi) = -\frac{-2p_2(\xi) - v_1^2(\xi) - \xi^2 v_1^2(\xi)}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))}, \\ p'_0(\xi) = -\frac{(-u_0(\xi) + \xi v_0(\xi))(\xi p_1(\xi) - u_1(\xi) v_0(\xi) + u_0(\xi) v_1(\xi))}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))}, \\ p'_1(\xi) = \frac{-2\xi p_2(\xi) u_0(\xi) + \xi p_1(\xi) u_1(\xi) - 2\xi^2 p_2(\xi) v_0(\xi) - u_1^2(\xi) v_0(\xi)}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))} - \\ - \frac{\xi^2 p_1(\xi) v_1(\xi) - u_0(\xi) u_1(\xi) v_1(\xi) - \xi u_1(\xi) v_0(\xi) v_1(\xi) + \xi u_0(\xi) v_1^2(\xi)}{(1 + \xi^2)(-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi))}, \\ p'_2(\xi) = \frac{2\xi p_2(\xi)}{1 + \xi^2}, \\ x'_0(\xi) = -\frac{u_0(\xi) - \xi v_0(\xi)}{-u_1(\xi) + \xi v_1(\xi)}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Для решения задач обтекания используется граничное условие непротекания. Если обтекаемая линия задается уравнением $y = f(x)$, то условие непротекания в стационарном случае имеет вид: $v(x, f(x)) - u(x, f(x)) \frac{df}{dx} = 0$. В параметрической форме условие запишется в виде

$$\left(-u + v \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial \xi} + v \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0, \quad (10)$$

где линия обтекания задается параметрическими уравнениями: $x = X(\xi)$, $y = F(\xi)$. В рассматриваемом варианте параметрические уравнения обтекаемой линии имеют вид $x = x_0(\xi) + x_1(\xi)F(\xi)$, $y = F(\xi)$. Подставив их и (8) в граничное условие (10), получим

$$F'(\xi) = \frac{(v_0(\xi) + F(\xi)v_1(\xi))(F(\xi) + x'_0(\xi))}{u_0(\xi) + F(\xi)u_1(\xi) - \xi(v_0(\xi) + F(\xi)v_1(\xi))}. \quad (11)$$

Решение задачи, в том числе уравнение обтекаемой линии, определяется в результате решения задачи Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9), (11). Были получены численные решения этой системы в пакете Mathematica.

2. Двухпараметрический метод. В случае двухпараметрического метода решение системы (1) отыскивается в виде:

$$u_k = U_k(\xi, \eta, t), \quad k = 1 \div n, \quad x = X(\xi, \eta, t), \quad y = Y(\xi, \eta, t). \quad (12)$$

Формулы перехода к новым переменным ξ, η имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial U_k}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial U_k}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right), & \frac{\partial u_k}{\partial y} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial U_k}{\partial \eta} \frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{\partial U_k}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} &= \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial U_k}{\partial \xi} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial X}{\partial t} \right) + \frac{\partial U_k}{\partial \eta} \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial \xi} \right) \right), \end{aligned}$$

где Δ – якобиан преобразования, $\Delta = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \neq 0$. Система уравнений (1) преобразуется к системе

$$F_k \left(\xi, \eta, t, X, Y, U_1, \dots, U_n, \frac{\partial X}{\partial \xi}, \frac{\partial X}{\partial \eta}, \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial \xi}, \frac{\partial Y}{\partial \eta}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial U_1}{\partial \xi}, \dots, \frac{\partial U_n}{\partial t} \right) = 0, \quad (13)$$

где $k = 1 \div n$. В системе (13) X, Y так же, как и U_k ($k = 1 \div n$), являются функциями переменных ξ, η, t . Поэтому имеем n уравнений для $(n+2)$ функций, две из которых можно выбрать произвольным образом. Решение системы (13) отыскивается в виде многочленов по степеням η :

$$U_k = \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi, t)\eta^i, \quad X = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t)\eta^k, \quad Y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi, t)\eta^k, \quad (14)$$

где $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$; u_{ki}, x_k, y_k – искомые функции, зависящие от ξ, t . Для квазилинейных уравнений первого порядка, а именно для уравнений газовой динамики, разработана программа [1], позволяющая определить параметры $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$, для которых система дифференциальных уравнений для функций $x_k(\xi, t), y_k(\xi, t), u_{ki}(\xi, t)$ является определенной или недоопределенной. Если r_k – максимальная степень переменной η , возникающая в уравнении $F_k = 0$ ($k = 1 \div n$) при подстановке в него выражений (14), то число уравнений r и число неизвестных функций s находятся по формулам

$$r = \sum_{k=1}^n r_k + n, \quad s = \gamma + \omega + \sum_{k=1}^n \alpha_k + n + 2.$$

Тогда степень недоопределенности есть $j = s - r$.

Решения вида (12), (14) удобно использовать в случаях, когда граничные условия задаются на линиях $\xi = \xi_0, \eta = 0$. Например, в задачах газовой динамики уравнение $\xi = \xi_0$ может быть уравнением обтекаемой поверхности, а уравнение $\eta = 0$ – уравнением ударной волны, взаимодействующей с поверхностью, или наоборот.

Замечание. Однопараметрический и двухпараметрический методы применялись для классификации и построения решений систем уравнений в аэрогидромеханике [2–4], а именно:

$$\begin{aligned}
 a) & \begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = -\frac{1}{\rho}p_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -\frac{1}{\rho}p_y, \\ u_x + v_y = 0, \quad \rho = \text{const}; \end{cases} \\
 b) & \begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = -\lambda z_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -\lambda z_y, \\ z_t + uz_x + vz_y + u_x + v_y = 0, \quad \lambda = \text{const}; \end{cases} \\
 c) & \begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = -\zeta w_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -\zeta w_y, \\ w(u_x + v_y) + \mu(w_t + uw_x + vw_y) = 0, \quad \zeta, \mu = \text{const}; \end{cases} \\
 d) & \begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = -2c\rho_x, \\ v_t + uv_x + vv_y = -2c\rho_y, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0, \quad c = \text{const}; \end{cases} \\
 e) & \begin{cases} \rho(u_t + uu_x + vv_y) = -p_x, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y, \\ \rho_t + \rho_x u + \rho_y v + \rho(u_x + v_y) = 0, \\ \rho(p_t + up_x + vp_y) - \gamma p(\rho_t + u\rho_x + v\rho_y) = 0, \quad \gamma = \text{const}; \end{cases} \\
 f) & \begin{cases} u_t + uu_x - v_y = 0, \\ u_y - v_x = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Здесь $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ – проекции вектора скорости; $\rho(t, x, y)$ – плотность; $w(t, x, y) = \rho^{x-1}$, $z(t, x, y) = \ln \rho$; $p(t, x, y)$ – давление.

Литература

- [1] Velmisov P. A., Todorov M. D., Kazakova J. A. Some classes of the solutions of aerohydrodynamic equations // Applications of Mathematics in Engineering and Economics. – Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2008. – P. 427–441.
- [2] Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., Васильева А. А. Некоторые классы решений уравнений газовой динамики // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании: сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 232–242.
- [3] Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., Сагдеева Ю. К. О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 285–291.
- [4] Казакова Ю. А. О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2011, №2(23). – С. 289–294.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ДВУХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ 3-ГО ПОРЯДКА

Гайнетдинова А. А.
Уфимский государственный авиационный
технический университет
Уфа
e-mail: aliya.oct@gmail.com

Gainetdinova A. A. The classification of systems of two second-order ODEs, admitted four-dimensional Lie algebras The classification problem for systems of two second-order ODEs is solved. The methods of integration of them is investigated.

Проводится классификация систем двух ОДУ второго порядка, допускающих четырёхмерные алгебры Ли. Исследуются методы интегрирования полученных систем.

В задаче классификации обыкновенных дифференциальных уравнений одним из способов является использование алгебр Ли операторов.

В основе классификации неподобных алгебр Ли операторов лежат классификации неизоморфных алгебр Ли. Задача классификации неизоморфных алгебр Ли, как нам известно, полностью решена для действительных алгебр Ли до шестого порядка включительно (см., например, [1–3]).

Классическим примером классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

является использование алгебр Ли дифференциальных операторов от двух переменных: была проведена классификация двумерных (С. Ли) и трёхмерных (С. Ли, Л. Бианки) (см., например, [4]) алгебр Ли операторов вида

$$X_i = \xi_i \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 1, \dots, k, \quad k = 2, 3, \quad (2)$$

и показаны способы интегрирования дифференциальных уравнений вида (1).

Для классификации систем двух ОДУ второго порядка вида

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, z, y', z'), \\ z'' = g(x, y, z, y', z'), \end{cases} \quad (3)$$

допускающих четырёхмерные алгебры Ли, необходимо сначала провести классификацию неподобных алгебр Ли 4-го порядка.

Классификация неподобных четырёхмерных алгебр Ли дифференциальных операторов проведена на основе 11 вещественно неизоморфных структур четырёхмерных алгебр Ли, которая приведена в [2].

Рассмотрим общий вид базисных операторов от трёх переменных четырёхмерной алгебры Ли

$$X_i = \xi_i(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i^1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \eta_i^2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Две алгебры, связанные заменой переменных вида

$$t = t(x, y, z), \quad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad (5)$$

такой, что $J \neq 0$, называются подобными. Поэтому будем искать базисные операторы с точностью до замены переменных вида (5).

Также введём в рассмотрение матрицу

$$R = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1^1 & \eta_1^2 \\ \xi_2 & \eta_2^1 & \eta_2^2 \\ \xi_3 & \eta_3^1 & \eta_3^2 \\ \xi_4 & \eta_4^1 & \eta_4^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Согласно [5], две алгебры Ли одинаковой структуры от одного и того же числа переменных, для которых общие ранги матриц вида (6) меньше размерности алгебр, подобны тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) эти ранги равны;
- 2) любая пара соответствующих миноров имеет одинаковые ранги;
- 3) соответствующая система уравнений, связывающая базисы этих алгебр, совместна.

Процесс нахождения неподобных алгебр Ли рассмотрим на примере алгебры с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, & [X_2, X_3] &= 0, & [X_3, X_1] &= 0, \\ [X_1, X_4] &= \varepsilon X_1, & [X_2, X_4] &= k X_2, & [X_3, X_4] &= l X_3. \end{aligned}$$

Заменой переменных вида (5) один из операторов вида (4) приводится к оператору переноса

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Из коммутационных соотношений

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_1, X_4] = \varepsilon X_1$$

получим

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi_2(y, z), & \eta_2^1 &= \eta_2^1(y, z), & \eta_2^2 &= \eta_2^2(y, z), \\ \xi_3 &= \xi_3(y, z), & \eta_3^1 &= \eta_3^1(y, z), & \eta_3^2 &= \eta_3^2(y, z), \\ \xi_4 &= \varepsilon x + \alpha(y, z), & \eta_4^1 &= \eta_4^1(y, z), & \eta_4^2 &= \eta_4^2(y, z). \end{aligned}$$

Из остальных коммутационных соотношений образуется система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_2^1 \xi_{3y} + \eta_2^2 \xi_{3z} - \eta_3^1 \xi_{2y} - \eta_3^2 \xi_{2z} = 0, \\ \eta_2^1 \eta_{3y}^1 + \eta_2^2 \eta_{3z}^1 - \eta_3^1 \eta_{2y}^1 - \eta_3^2 \eta_{2z}^1 = 0, \\ \eta_2^1 \eta_{3y}^2 + \eta_2^2 \eta_{3z}^2 - \eta_3^1 \eta_{2y}^2 - \eta_3^2 \eta_{2z}^2 = 0, \\ \xi_2 + \eta_2^1 \alpha_y + \eta_2^2 \alpha_z - \eta_4^1 \xi_{2y} - \eta_4^2 \xi_{2z} = k \xi_2, \\ \eta_2^1 \eta_{4y}^1 + \eta_2^2 \eta_{4z}^1 - \eta_4^1 \eta_{2y}^1 - \eta_4^2 \eta_{2z}^1 = k \eta_2^1, \\ \eta_2^1 \eta_{4y}^2 + \eta_2^2 \eta_{4z}^2 - \eta_4^1 \eta_{2y}^2 - \eta_4^2 \eta_{2z}^2 = k \eta_2^2, \\ \xi_3 + \eta_3^1 \alpha_y + \eta_3^2 \alpha_z - \eta_4^1 \xi_{3y} - \eta_4^2 \xi_{3z} = l \xi_3, \\ \eta_3^1 \eta_{4y}^1 + \eta_3^2 \eta_{4z}^1 - \eta_4^1 \eta_{3y}^1 - \eta_4^2 \eta_{3z}^1 = l \eta_3^1, \\ \eta_3^1 \eta_{4y}^2 + \eta_3^2 \eta_{4z}^2 - \eta_4^1 \eta_{3y}^2 - \eta_4^2 \eta_{3z}^2 = l \eta_3^2. \end{array} \right.$$

Решив эту систему, получим 3 алгебры Ли 4-го порядка, относящиеся к данному типу алгебры:

$$\begin{array}{l} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = z \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} - (k - \varepsilon)y \frac{\partial}{\partial y} - (l - \varepsilon)z \frac{\partial}{\partial z}; \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} - (k - \varepsilon)y \frac{\partial}{\partial y} + lz \frac{\partial}{\partial z}; \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = \varepsilon x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y} + lz \frac{\partial}{\partial z}. \end{array}$$

Аналогичным образом можно найти все неподобные четырёхмерные алгебры Ли в пространстве трех переменных.

Замечание. В данной работе использовалась классификация неизоморфных четырёхмерных алгебр Ли, приведенная в [2]. Аналогичная работа с использованием классификации Г. М. Мубаракзянова неизоморфных четырёхмерных алгебр Ли (см. [1]) проведена в [6]. Легко показать, что структуры, приведенные в этих классификациях, можно перевести друг в друга подходящей заменой базиса.

Системы двух дифференциальных уравнений второго порядка, допускающие четыре симметрии. Для каждой из найденных алгебр можно построить систему двух дифференциальных уравнений второго порядка, допускающей эту алгебру.

Рассмотрим, например, случай, когда система (3) допускает алгебру с базисом

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \varepsilon x \partial_x + ky \partial_y + lz \partial_z.$$

Действуя продолженными операторами на каждое уравнение системы, получим новую систему из восьми уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \\ (k - 2\varepsilon)f = (k - \varepsilon)y' \frac{\partial f}{\partial y'} + (l - \varepsilon)z' \frac{\partial f}{\partial z'}, \\ (l - 2\varepsilon)g = (k - \varepsilon)y' \frac{\partial g}{\partial y'} + (l - \varepsilon)z' \frac{\partial g}{\partial z'}, \end{array} \right.$$

Решая полученную систему, найдем f и g :

$$\begin{cases} f(x, y, z, y', z') = y'^{\alpha}\Phi_1(z'y'^{\beta}), & g(x, y, z, y', z') = y'^{\gamma}\Phi_2(z'y'^{\beta}), \\ \alpha = \frac{k-2\varepsilon}{k-\varepsilon}, & \beta = \frac{\varepsilon-l}{k-\varepsilon}, & \gamma = \frac{l-2\varepsilon}{k-\varepsilon}. \end{cases}$$

Следовательно, система, допускающая алгебру Ли указанного типа, имеет вид

$$\begin{cases} y'' = y'^{\alpha}\Phi_1(z'y'^{\beta}), & \alpha = \frac{k-2\varepsilon}{k-\varepsilon}, & \beta = \frac{\varepsilon-l}{k-\varepsilon}, \\ z'' = y'^{\gamma}\Phi_2(z'y'^{\beta}), & \gamma = \frac{l-2\varepsilon}{k-\varepsilon}. \end{cases}$$

Интегрирование систем двух ОДУ второго порядка. Если система двух ОДУ второго порядка допускает разрешимую четырёхмерную алгебру Ли, то сперва необходимо привести систему к каноническому виду. Заметим, что преобразование, приводящее систему к каноническому виду, – это преобразование, которое переводит его симметрии в одну из полученных ранее реализаций. Если мы можем решить систему в ее инвариантной форме, то мы делаем обратное преобразование и получаем решение исходной системы. Таким образом, задача интегрирования систем, допускающих четырёхмерные алгебры Ли, сводится к интегрированию систем в канонической форме. В [6] сформулировано следующее

Утверждение 1. Если система двух ОДУ допускает не более чем четырёхмерную алгебру Ли, то эта алгебра имеет один или два функционально независимых дифференциальных инварианта первого порядка. Кроме того, исходные уравнения, записанные в терминах инвариантов, либо интегрируемы в квадратурах, либо их интегрирование зависит от полученного скалярного ОДУ первого порядка.

Для иллюстрации метода рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} y'' = y'^{\alpha}\Phi_1(z'y'^{\beta}), & \alpha = \frac{k-2\varepsilon}{k-\varepsilon}, & \beta = \frac{\varepsilon-l}{k-\varepsilon}, \\ z'' = y'^{\gamma}\Phi_2(z'y'^{\beta}), & \gamma = \frac{l-2\varepsilon}{k-\varepsilon}. \end{cases}$$

допускает алгебру $L_{4,\text{VI}}^{3(2)}$ с операторами

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \varepsilon x \partial_x + ky \partial_y + lz \partial_z.$$

Заметим, что операторы X_1, X_2, X_3 образуют подалгебру алгебры $L_{4,\text{VI}}^{3(2)}$. Для этой подалгебры дифференциальные инварианты первого порядка имеют вид

$$u = y', \quad v = z'.$$

В переменных x, u, v система запишется в виде

$$\begin{cases} u' = u^{\alpha}\Phi_1(u^{\beta}v), \\ v' = u^{\gamma}\Phi_2(u^{\beta}v). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\frac{dv}{du} = u^{\gamma-\alpha} \frac{\Phi_2(u^\beta v)}{\Phi_1(u^\beta v)}, \quad u^\beta v$$

являются инвариантами относительно X_4 . Сделаем замену переменных $w = u^\beta v$:

$$\frac{dw}{du} = u^{\beta+\gamma-\alpha} \frac{\Phi_2(w)}{\Phi_1(w)}.$$

Таким образом, мы свели исходную систему двух ОДУ второго порядка к системе

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = u^\alpha \Phi_1(w), \\ \frac{dw}{du} = u^{\beta+\gamma-\alpha} \frac{\Phi_2(w)}{\Phi_1(w)}. \end{cases}$$

Эта система, очевидно, интегрируется в квадратурах.

Заключение. Всего получено 41 неподобная четырёхмерная алгебра Ли, для 23 из них найдены инвариантные системы ОДУ вида (3). В настоящее время проводится проверка полученных данных и исследование новых методов интегрирования.

Литература

- [1] Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем., 1963. – № 1. – С. 114–123.
- [2] Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, Физматлит, 1966. – 495 с.
- [3] Джекобсон Н. Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. – 355 с. (N. Jacobson. Lie algebras.)
- [4] Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи математических наук, 1992. – Т. 47, № 4. – С. 83–144.
- [5] Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947. – 357 с. (L. P. Eisenhart. Continuous groups of transformations.)
- [6] Wafo Soh C., Mahomed F. M. Canonical forms for systems of second-order ordinary differential equations // Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001. – P. 2883–2911.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Ганжа Е. И.

Красноярский государственный педагогический
университет им. В. П. Астафьева
Красноярск
e-mail: eiganzha@mail.ru

Ganzha E. I. Laplace transformations of PDEs in the multidimensional case.

We propose a generalization of Laplace transformations to the case of linear partial differential operators of second order in \mathbb{R}^3 (and more generally in \mathbb{R}^n). We describe the classes of operators in \mathbb{R}^n suitable for this transformation. Keywords: Integration, linear partial differential equations.

В данной работе предложено обобщение теории преобразований Лапласа на дифференциальные операторы второго порядка в \mathbb{R}^3 (и более общо, в \mathbb{R}^n). Описаны классы операторов в \mathbb{R}^n , к которым они применимы. Ключевые слова: Интегрирование, уравнения с частными производными

Для линейного гиперболического уравнения вида

$$Lu = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (1)$$

хорошо известно классическое преобразование Лапласа [1-3]. Оно основано на представлении уравнения (1) в виде

$$(D_x + b)(D_y + a) - h(x, y) = 0, \quad (2)$$

или

$$(D_y + a)(D_x + b) - k(x, y) = 0, \quad (3)$$

где $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$, $h = a_x + ab - c$, $k = b_y + ab - c$. Если представить (2) в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} (D_y + a)u = u_1, \\ (D_x + b)u_1 = hu, \end{cases} \quad (4)$$

то, если $h \neq 0$, выражая из 2-го уравнения системы (4) функцию u и подставляя ее в 1-ое уравнение системы, получим уравнение

$$L_1 u_1 = (u_1)_{xy} + a_1(x, y)(u_1)_x + b(x, y)(u_1)_y + c_1(x, y)u_1 = 0, \quad (5)$$

которое называется X -преобразованием Лапласа уравнения (1). Аналогично, если инвариант $k \neq 0$, определяется Y -преобразование Лапласа, используя представление (3). Вышеописанные преобразования лежат в основе каскадного метода Лапласа [1-3], позволяющего получать в явном виде решения для

некоторого класса уравнений (1). Именно, проделав преобразование Лапласа несколько раз, можно в некоторых случаях получить уравнение вида

$$(D_x + b)(D_y + \hat{a})u = 0,$$

которое интегрируется в квадратурах, и воспользовавшись обратными преобразованиями Лапласа, получить решения исходного уравнения (1).

Для гиперболических уравнений с произвольным главным символом

$$Lu = u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = 0 \quad (6)$$

был предложен простой способ совершать преобразование Лапласа [4–6]. Как очевидно, уравнение (6) всегда можно записать в характеристической форме

$$Lu = (X_1X_2 - H)u = 0, \quad (7)$$

где коэффициенты операторов $X_i = D_x + \lambda_i(x, y)D_y + \alpha_i(x, y)$ и функция $H(x, y)$ выражаются через коэффициенты исходного уравнения (6) (см. [6]). Из (7) видим, что уравнение (6) эквивалентно системе

$$\begin{cases} X_2u = v, \\ X_1v = Hu. \end{cases} \quad (8)$$

Если в данном случае $H = h(x, y)$ - ненулевая функция, то из 2-го уравнения системы (8) получаем $u = H^{-1}v$. Подставим это выражение в 1-ое уравнение системы (8):

$$L_1v = (X_2X_1 + \omega_1X_1 - H)v = 0, \quad (9)$$

где

$$\omega_1 = -[X_2, H]H^{-1} \quad (10)$$

Оператор L_1 называется X_1 -преобразованием Лапласа оператора L . Нетрудно проверить, что операторы L и L_1 связаны соотношением сплетения

$$M_1L = L_1M, \quad (11)$$

где $M = X_2$, $M_1 = X_2 + \omega_1$.

В [6] было описано обобщение теории преобразований Лапласа на дифференциальные операторы 2-го порядка в \mathbb{R}^3 с разложимым главным символом. Оно основано на том, что такие операторы всегда можно представить в виде (7), но при этом коэффициенты α_i операторов X_i и слагаемое H лежат в некоммутативном кольце дифференциальных операторов.

Для работы с операторами вида (7) с некоммутативными коэффициентами естественно использовать некоммутативное тело Оре [7, 8] формальных отношений дифференциальных операторов $\mathbf{F}(D_z) = \{R \mid R = P^{-1}Q; P, Q \in \mathbf{F}[D_z]\}$, (где \mathbf{F} — некоторое конструктивное алгебраически замкнутое дифференциальное поле функций) с отношением эквивалентности: $P^{-1}Q \sim K^{-1}N$, если существуют такие $S, T \in \mathbf{F}[D_z]$, $S \neq 0$, $T \neq 0$, что $SP = TK$, $SQ = TN$.

Более общо, любое некоммутативное кольцо \mathbf{K} , для которого выполнены условия Оре (см. ниже), изоморфно вкладывается в тело $\mathbf{T} = \{R \mid R = P^{-1}Q; P, Q \in \mathbf{K}\}$ с приведенным выше отношением эквивалентности.

Условия Оре на исходное некоммутативное кольцо \mathbf{K} заключаются в следующем:

1. \mathbf{K} не содержит делителей нуля, т. е. $\forall A, B \in \mathbf{K}$, если $AB = 0$, то либо $A = 0$, либо $B = 0$;
2. $\forall A, B \in \mathbf{K}$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $\exists P \neq 0$, $Q \neq 0$, такие, что $PA = QB$, и $\exists M \neq 0$, $N \neq 0$, такие, что $AM = BN$.

Нетрудно показать, что в кольце $\mathbf{F}[D_z]$ (а также в кольцах операторов с частными производными $\mathbf{F}[D_x, D_y, D_z]$) выполнены условия Ore, поэтому $\mathbf{F}[D_z]$ изоморфно вкладывается в определенное выше тело Ore $\mathbf{F}(D_z)$. Тем самым мы можем производить с коэффициентами оператора (7) все арифметические операции, учитывая свойство некоммутативности. Результатом всегда будет дифференциальный оператор того же вида с коэффициентами из тела $\mathbf{F}(D_z)$. Тело $\mathbf{F}(D_z)$ имеет внешние дифференцирования D_x, D_y , очевидным образом продолжаемые с исходного кольца $\mathbf{F}[D_z]$. В теле $\mathbf{F}(D_z)$ корректно определен порядок элемента по формуле $\text{ord}(P^{-1}Q) = \text{ord}(Q) - \text{ord}(P)$. В [6] было показано, что формулы (7)–(11) имеют место и для операторов 2-го порядка в \mathbb{R}^n . Однако конструктивные результаты были получены лишь для операторов с разложимым главным символом, то есть предполагалось, что главный символ, рассматриваемый как многочлен второго порядка от формальных коммутативных переменных $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, разлагается в произведение двух линейных по ξ_i многочленов. Это ограничение соответствует случаю, когда оператор H в (7) является оператором только 1-го порядка и лежит в кольце $\mathbf{F}[D_z]$.

Целью данной работы является определение естественного обобщения преобразования Лапласа для операторов второго порядка в \mathbb{R}^n без ограничения на разложимость главного символа оператора и выяснение общей структуры такого преобразования.

1. Определение сплетающего преобразования Лапласа. Рассмотрим оператор в \mathbb{R}^n общего вида

$$L = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{k=1}^n A_k D_{x_k} + A_0 \quad (12)$$

с коэффициентами $A_* = A_*(x_1, \dots, x_n)$ из некоторого конструктивного дифференциально замкнутого дифференциального поля функций \mathbf{F} . В дальнейшем для упрощения обозначений мы положим $n = 3$. Однако все результаты будут верны при произвольном $n \geq 3$. Пусть X_1, X_2 — произвольные дифференциальные операторы первого порядка из $\mathbf{F}[D_x, D_y, D_z]$, тогда оператор (12) всегда можно представить в виде

$$L = X_1 X_2 - H, \quad (13)$$

где $H = X_1 X_2 - L$ — некоторый дифференциальный оператор из $\mathbf{F}[D_x, D_y, D_z]$, вообще говоря, второго порядка. Предположим, что оператор

$$L_1 = X_2 X_1 + \omega_1 X_1 - H, \quad (14)$$

с $\omega_1 = -[X_2, H]H^{-1}$, является дифференциальным оператором (в теле Ore $\mathbf{F}(D_x, D_y, D_z)$). Легко проверить, что тогда автоматически выполняется соотношение сплетения (11) с указанными операторами M, M_1 .

Определение. Будем говорить, что в этом случае дифференциальные операторы L и L_1 , заданные выше формулами (13) и (14), связаны *сплетающим преобразованием Лапласа*.

Легко видеть, что это преобразование является обобщением преобразования Лапласа в двумерном случае. Следует отметить, что даже в двумерном случае существуют другие преобразования, отличные от преобразования Лапласа, задаваемые сплетением (11) с некоторыми дифференциальными операторами M и M_1 первого порядка. Подобные преобразования описаны в [1].

Лемма 1. Элемент $\omega_1 = -[X_2, H]H^{-1}$ тела Оре $\mathbf{F}(D_x, D_y, D_z)$ является дифференциальным оператором (а следовательно, и L_1, M_1 — дифференциальные операторы) тогда и только тогда, когда операторы H и X_2 удовлетворяют соотношению

$$HX_2 = (X_2 + \psi(x, y, z))H \quad (15)$$

с некоторой функцией $\psi \in \mathbf{F}$.

Как известно (теорема о выпрямлении векторного поля в окрестности неособой точки), произвольный оператор 1-го порядка X_2 с помощью замены переменной можно локально привести к виду $X_2 = D_x + \alpha(x, y, z)$ с $\alpha \in \mathbf{F}$. Соотношение (15) тогда примет вид

$$H(D_x + \alpha) = (D_x + \alpha + \psi)H. \quad (16)$$

Теперь, домножая (16) слева и справа на некоторые функции $\mu(x, y, z)$ и $\rho(x, y, z)$ соответственно, получаем

$$(\mu H \rho)(D_x + \alpha + \rho^{-1}\rho_x) = (D_x - \mu^{-1}\mu_x + \alpha + \psi)(\mu H \rho).$$

Тем самым функции μ и ρ можно выбрать такими, что соотношение (16) примет вид условия коммутирования

$$\tilde{H}D_x = D_x\tilde{H} \quad (17)$$

для оператора $\tilde{H} = \mu H \rho$. Легко проверить явным вычислением, что верны следующие два утверждения.

Лемма 2. Дифференциальный оператор \tilde{H} в \mathbb{R}^n удовлетворяет условию коммутирования (17) если и только если коэффициенты \tilde{H} не зависят от x .

Утверждение. Главные символы операторов L и L_1 , связанных сплетающим преобразованием Лапласа (11), совпадают.

2. Примеры сплетающих преобразований Лапласа в многомерном случае. На основе доказанных результатов получаем *алгоритм построения примеров сплетающих преобразований Лапласа* в \mathbb{R}^n :

1. Берем оператор \tilde{H} второго порядка в \mathbb{R}^n с коэффициентами, не зависящими от переменной x .
2. Образует оператор $H = \theta_1 \tilde{H} \theta_2$, где θ_i — произвольные функции от n переменных из \mathbf{F} . Находим из соотношения (16) функции α и ψ .
3. Делаем произвольную замену переменных \mathbb{R}^n и находим образы операторов $(D_x + \alpha)$ и H в новых переменных. Это и есть операторы X_2 и H в (15) с $\omega_1 = \psi$.

4. Беря операторы $L = X_1X_2 - H$ и $L_1 = X_2X_1 + \omega_1X_1 - H$ с произвольным оператором первого порядка X_1 , и соответствующие M, M_1 , получаем общий пример сплетающего преобразования Лапласа.

Приведем пример операторов второго порядка в \mathbb{R}^3 , связанных сплетающим преобразованием Лапласа. Оператор X_1 выбирается произвольно: $X_1 = x^2D_y + xyD_z + 1$. Следуя алгоритму, положим $H = xD_zx^2$, и найдем $X_2 = D_x + \frac{2}{x}$ и $\omega_1 = -\frac{3}{x}$. Замену переменных (шаг 3) делать не будем. Получаем операторы

$$L = X_1X_2 - H = x^2D_xD_y + xyD_zD_x - x^3D_z^2 + D_x + 2xD_y + 2yD_z + 2/x,$$

$$L_1 = X_2X_1 + \omega_1X_1 - H = x^2D_xD_y + xyD_zD_x - x^3D_z^2 + D_x + xD_y - 1/x.$$

Соотношение сплетения при этом имеет вид $(D_x - 1/x)L = L_1(D_x + 2/x)$.

3. Существование сплетающего преобразования Лапласа.

Теорема. Для дифференциального оператора L второго порядка общего положения в \mathbb{R}^n при $n > 2$ не существует сплетающего преобразования Лапласа.

Действительно, из приведенного выше алгоритма видим, что количество произвольных функций n переменных (функции меньшего количества переменных не учитываем), возникающих в ходе построения сплетающих преобразований Лапласа не превосходит $2n + 3$, а количество коэффициентов в операторе 2-го порядка в \mathbb{R}^n равно $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 > 2n + 3$ при $n > 2$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Литература

- [1] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, Т. 2. Gauthier-Villars, 1889. – 579 с.
- [2] Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 182 с.
- [3] Ганжа Е. И., Царев С. П. Классические методы интегрирования гиперболических систем и уравнений второго порядка. Учебное пособие. – Красноярск: КГПУ, 2007. – 116 с.
- [4] Tsarev S. P. Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations // Proc. ISSAC'2005 (July 24–27, 2005, Beijing, China). ACM Press. 2005. – P. 325–331.
- [5] Ganzha E. I., Loginov V. M., Tsarev S. P. Exact solutions of hyperbolic systems of kinetic equations. Application to Verhulst model with random perturbation // Mathematics of Computation. 2008. Vol. 1, № 3. – P. 459–472.
- [6] Ганжа Е. И. О преобразованиях Лапласа и Дини многомерных уравнений с разложимым главным символом // Программирование. 2012. № 3. – С. 57–64.
- [7] Ore O. Linear equations in non-commutative fields // Annals of Mathematics. 1931. Vol. 32. – P. 463–477.
- [8] Ore O. Theory of non-commutative polynomials // Annals of Mathematics. 1933. Vol. 34. – P. 480–508.

РЕИНВЕСТИЦИЯ — ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ДИВИДЕНДНОЙ ПОЛИТИКИ

Дранко О. И., Яковенко Г. Н.

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Долгопрудный

e-mail: olegdranko@gmail.com

Dranko O. I., Yakovenko G. N. Reinvestment — a tool for optimization of the dividend policy. The work is devoted to finding the optimal dividend policy. Optimization methods: group analysis and principle Pontryagin maximum. The optimal solution involves stages accumulation and consumption.

Работа посвящена поиску оптимальной дивидендной политики. Методы оптимизации: групповой анализ и принцип максимума Понтрягина. Оптимальное решение предполагает этапы накопления и потребления.

Для развития предприятий в разные периоды использовались разные целевые показатели: для Советского периода формальным показателем являлась прибыль, для бурных 1990х — денежный поток. На новом этапе предстоит задача увеличения стоимости бизнеса. Эта задача существенно более сложная, так как требует управления гораздо более широким перечнем параметров. Доклад посвящён поиску оптимальной дивидендной политики для максимизации стоимости бизнеса. Рассматривается модель развития бизнеса за счет самофинансирования, стоимость определяет денежный поток дивидендов для акционеров.

1. Математическая модель.

Обозначения:

x_1 — активы;

F — постоянные затраты;

u — доля чистой прибыли на накопление (реинвестиция — управление);

m — маржинальная рентабельность;

$V = \int_0^T (1 - u)(mx_1 - F) dt$ — стоимость бизнеса.

$x_2 = -V$ — минимизируемая величина.

Оптимальная задача:

$$\dot{x}_1 = (mx_1 - F)u \quad (1)$$

— прирост активов,

$$\dot{x}_2 = -(mx_1 - F)(1 - u) \quad (2)$$

— прирост стоимости как вывод прибыли;

$$0 = t_0 \leq t \leq T;$$

$$mx_1^0 > F > 0; \quad x_2^0 = 0; \quad (3)$$

$$0 < u < 1; \quad (3)$$

$$x_2(T) \rightarrow \min. \quad (4)$$

2. Групповой анализ.

Дифференциальным уравнениям процесса соответствует семейство операторов дифференцирования по t в силу этой системы:

$$X(zu) = uX_1 + X_2,$$

где обозначено

$$X_1 = (mx_1 - F) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad X_2 = -(mx_1 - F) \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (5)$$

Вычисление коммутатора приводит к результату

$$[X_1, X_2] = -m(mx_1 - F) \frac{\partial}{\partial x_2} = mX_2.$$

Таким образом, операторы (5) есть базис алгебры Ли с ненулевыми структурными постоянными $C_{12}^2 = m$, а система (1, 2) является групповой [3]. По уравнениям системы вычисляется 2-параметрическая группа — группа сдвигов по решениям системы (1, 2) при различных управлениях $u(t)$. А также 2-параметрическая группа симметрий — группа, преобразования которой переводят решения $x(t), u(t)$ системы (1, 2) в её же решения. Уравнения групп опущены.

3. Решение оптимальной задачи.

При решении оптимальной задачи (1–4) будем следовать формализму принципа максимума Л. С. Понтрягина [4]. Задаче соответствует функция Гамильтона

$$H = \{p_1(mx_1 - F) + p_2(mx_1 - F)\} u - p_2(mx_1 - F), \quad (6)$$

уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -m \{(p_1 + p_2)u - p_2\}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

условия трансверсальности:

$$p_1(T) = -\left. \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right|_{t=T} = 0, \quad p_2(T) = -\left. \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \right|_{t=T} = -1. \quad (8)$$

Вследствие того, что система (1, 2) является групповой, у системы (1, 2, 7) имеется два первых интеграла [3]

$$\begin{aligned} w_1 &= p_1(mx_1 - F) + p_2mx_2, \\ w_2 &= p_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая в (9) $t = T$, с учётом (8) получим выражения (введено обозначение $x_2(T) = \tilde{x}_2$)

$$\begin{aligned} p_1(mx_1 - F) + p_2mx_2 &= -m\tilde{x}_2, \\ p_2 &= -1, \end{aligned}$$

из которых следует

$$p_1(mx_1 - F) = m(x_2 - \tilde{x}_2), \quad p_2 = -1.$$

Учёт этих зависимостей в (6) приводит к формуле

$$H = \{m(x_2 - \tilde{x}_2) - mx_1 + F\}u + mx_1 - F$$

или

$$H = m(x_2 - x_1 + a)u + mx_1 - F, \quad (10)$$

обозначено

$$a = \frac{F}{m} - \tilde{x}_2. \quad (11)$$

В силу принципа максимума с учётом ограничения (3) для оптимального управления получаем необходимое условие

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } x_2 - x_1 + a < 0, \\ 1 & \text{при } x_2 - x_1 + a > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из условия видно, что по одну сторону прямой $x_2 - x_1 + a = 0$ управление принимает значение $u = 0$, а по другую $u = 1$. Рассмотрим варианты в зависимости от начальных условий.

1. $x_1^0 > a$, В силу (12) при $t = 0$ выполняется $u = 0$, а в силу уравнений (1, 2) при $t > 0$: $x_1(t) = x_1^0$, $x_2(t) = -(mx_1^0 - F)t$, то есть условие, приводящее к $u = 0$ продолжает выполняться, и к моменту $t = T$ функционал достигает своего минимального значения $x_2 = -(mx_1^0 - F)T$.

2. $x_1^0 < a$, $x_2^0 = 0$. В силу (12) при $t = 0$ выполняется $u = 1$, а в силу уравнений (1,2) при $t > 0$: $mx_1 - F = (mx_1^0 - F)e^{mt}$, $x_2(t) = 0$. Пусть в момент $(0 \leq t_1 \leq T)$ выполнилось $x_1 = a$ и произошло переключение. При $t \geq t_1$ справедливо $u = 0$, и в силу уравнений (1), (2):

$$mx_1 - F = (mx_1^0 - F)e^{mt_1}, \quad x_2(t, t_1) = -(mx_1^0 - F)e^{mt_1}(t - t_1).$$

Спрашивается, в какой момент t_1 ($0 \leq t_1 \leq T$) должно произойти переключение, чтобы функционал

$$x_2(T, t_1) = -(mx_1^0 - F)e^{mt_1}(T - t_1) \quad (13)$$

достиг своего минимального значения. Исследование на экстремум приводит к соотношению

$$\frac{dx_2(T, t_1)}{dt_1} = (mx_1^0 - F)e^{mt_1}\{-m(T - t_1) + 1\} = 0$$

и к нужному результату

$$t_1 = T - \frac{1}{m}. \quad (14)$$

Для того, чтобы результат не покинул границы $0 \leq t_1 \leq T$, требуется для конечного момента выполнения

$$mT \geq 1. \quad (15)$$

В противном случае минимум будет достигаться на границе $t_1 = 0$, что соответствует варианту 1. Подставим результат (14) в функционал (13)

$$x_2(T, t_1) = -(mx_1^0 - F) \frac{1}{m} e^{mT-1}.$$

Несложный анализ показывает, что это значение при условии (15) лучше, чем граничное значение $x_2 = -(mx_1^0 - F)T$.

4. Заключение.

Исходя из представленного в работе исследования видно, что одним из основных параметров управления стоимостью компании является коэффициент реинвестирования прибыли.

Результаты моделирования показывают целесообразность активного развития на начальном этапе и вывода прибыли на этапе зрелости компании.

Оптимизационная дивидендная политика компаний в прогнозный период для максимизации акционерной стоимости не подтверждается практикой (фактическими данными) крупнейших компаний США.

Данный результат показывает или необходимость уточнения модели (что будет проходить из-за уточнения различных факторов), или инерционность (компромиссность, а не оптимальность) действий менеджмента.

Для дальнейших исследований целесообразно развитие модели:

– Анализ влияния ставки дисконтирования. Ставка дисконтирования принята нулевой для упрощения получения оптимального решения. Дисконтирование будущих денежных потоков только усилит эффект ускоренного потребления.

– Анализ заемной политики, влияния структуры капитала на стоимость компании и оптимальную дивидендную политику.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-00288.

Литература

- [1] Дранко О. И., Яковенко Г. Н. Оптимизация дивидендной политики // Вестник БГУ. Вып. 10. Математика и информатика. – 2012. – С. 17–25.
- [2] Дранко О. И. Экспресс-модель оценки стоимости бизнеса // “Проблемы управления”. – М.: Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, №4, 2012.
- [3] Яковенко Г. Н. Теория управления регулярными системами. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 264 с.
- [4] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1961. – 394 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОЙ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЙ С ДИФУЗИЕЙ И ЗАКОНОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ УДВОЕННОЙ СТЕПЕНИ

Жестков С. В. Кочегарова М. А.

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова
Могилев

e-mail: zhestkov_s@rambler.ru, marinakochegarova@mail.ru

Zhestkov S. V., Kochegarova M. A. On existence of topological solitons of complex model reaction-diffusion equations with dual-power law of nonlinearity. The direct method of constructing topological solitons of reaction-diffusion equations with dual-power law of nonlinearity is developed.

Развит прямой метод построения топологических солитонов уравнений реакций с диффузией и законом нелинейности удвоенной степени.

Известно [1], что комплекснозначные модели уравнений реакций с диффузией представляют интерес для приложений. В отличие от действительных моделей, описываемых нелинейными уравнениями параболического типа, к которым применяются методы группового анализа [2], комплекснозначные модели обладают специфическими свойствами, аналогичными свойствам обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). В частности, комплекснозначные модели со степенными законами нелинейности обладают солитонными решениями [3].

Цель настоящей работы — построение топологических солитонов в случае закона нелинейности удвоенной степени.

Рассмотрим (1+1)-мерное уравнение

$$W_t = DW_{xx} + AW + B|W|^{2m}W + C|W|^{4m}W, \quad m > 0 \quad (1)$$

с комплексными коэффициентами. Решение уравнения (1) строится в виде [3]

$$W(t, x) = V(\xi) \exp(i\eta), \quad \xi = \alpha t + \beta x + \phi, \quad \eta = \gamma t + \varepsilon x + \psi, \quad (2)$$

где $V(\xi)$ — неизвестная действительная волновая функция, $\alpha, \beta, \phi, \gamma, \varepsilon, \psi$ — произвольные действительные числа. Подставляя (2) в (1), найдем

$$\begin{aligned} \alpha V'(\xi) + i\gamma V(\xi) &= D[\beta^2 V''(\xi) + 2i\varepsilon\beta V'(\xi) - \varepsilon^2 V(\xi)] + \\ &+ AV(\xi) + BV^{2m+1}(\xi) + CV^{4m+1}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть

$$A = a_1 + ia_2, \quad B = b_1 + ib_2, \quad C = c_1 + ic_2, \quad D = d_1 + id_2.$$

Тогда из (3) получим

$$\gamma V(\xi) = a_2 V(\xi) + b_2 V^{2m+1}(\xi) + c_2 V^{4m+1}(\xi) + 2\varepsilon\beta d_1 V'(\xi) + d_2 [\beta^2 V''(\xi) - \varepsilon^2 V(\xi)], \quad (4)$$

$$\alpha V'(\xi) = a_1 V(\xi) + b_1 V^{2m+1}(\xi) + c_1 V^{4m+1}(\xi) + d_1 [\beta^2 V''(\xi) - \varepsilon^2 V(\xi)] - 2\varepsilon\beta d_2 V'(\xi). \quad (5)$$

Система (4), (5) является определяющей системой уравнений для волновой функции $V(\xi)$, т. е. справедлива

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) имело решение (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (4), (5).

Пусть выполняются условия

$$a_2 - a_1 = \gamma, \quad b_1 = b_2 = b, \quad c_1 = c_2 = c, \quad d_1 = d_2 = d, \quad \alpha = -4\varepsilon\beta d. \quad (6)$$

Тогда уравнения (4), (5) совпадают и имеют вид

$$\begin{aligned} H_2 V''(\xi) + H_1 V'(\xi) + H_0 V(\xi) + b V^{2m+1}(\xi) + c V^{4m+1}(\xi) &= 0, \\ H_2 &\equiv d\beta^2, \quad H_1 \equiv 2\varepsilon\beta d, \quad H_0 \equiv a_1 - d\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для построения топологического солитона к уравнению (7) добавим краевые условия

$$V(+\infty) = V_+, \quad V(-\infty) = V_-, \quad V_+ \neq V_-. \quad (8)$$

Тогда кривая $V(\xi)$ на фазовой плоскости будет соединять два положения равновесия. Решение задачи (7), (8) строится в виде

$$V(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{th} \xi]^\mu, \quad (9)$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_0 \geq |\lambda_1|$, $\mu > 0$ — неизвестные параметры. Подставляя (9) в (7), найдем

$$\begin{aligned} &H_2 [\mu(\mu-1)\lambda_1^2 \{\lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{th} \xi\}^{\mu-2} (1 - \operatorname{th}^2 \xi)^2 - \\ &\quad - 2\mu\lambda_1 \{\lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{th} \xi\}^{\mu-1} (\operatorname{th} \xi - \operatorname{th}^3 \xi)] + \\ &\quad + H_1 [\mu\lambda_1 \{\lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{th} \xi\}^{\mu-1} (1 - \operatorname{th}^2 \xi)] + \\ &\quad + H_0 \{\lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{th} \xi\}^\mu + b [\lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{th} \xi]^{\mu(2m+1)} + \\ &\quad + c [\lambda_0 + \lambda_1 \operatorname{th} \xi]^{\mu(4m+1)} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из анализа уравнения (10) следует, что $\mu = \frac{1}{2m}$. В этом случае из (10) получим

$$\begin{cases} H_2 \mu(\mu-1)\lambda_1^2 + H_1 \mu\lambda_0\lambda_1 + H_0 \lambda_0^2 + b\lambda_0^3 + c\lambda_0^4 = 0, \\ -2\mu\lambda_0\lambda_1 H_2 + \mu\lambda_1^2 H_1 + 2\lambda_0\lambda_1 H_0 + 3\lambda_0^2 \lambda_1 b + 4\lambda_0^3 \lambda_1 c = 0, \\ -2\mu^2 \lambda_1^2 H_2 - \mu\lambda_0\lambda_1 H_1 + \lambda_1^2 H_0 + 3\lambda_0\lambda_1^2 b + 6\lambda_0^2 \lambda_1^2 c = 0, \\ 2\mu\lambda_0\lambda_1 H_2 - \mu\lambda_1^2 H_1 + b\lambda_1^3 + 4\lambda_0\lambda_1^3 c = 0, \\ (\mu^2 \lambda_1^2 + \mu\lambda_1^2) H_2 + c\lambda_1^4 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы задача (7), (8) имела решение (9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (11).

Для упрощения анализа предположим, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda > 0$. Тогда из (11) найдем следующие соотношения:

$$\lambda^2 = -\frac{d\beta^2(\mu^2 + \mu)}{c}, \quad \lambda = \frac{d(2\mu(2\mu + 1)\beta^2 + 2\varepsilon\beta\mu)}{b},$$

$$a_1 = d(\varepsilon^2 - 4\mu\varepsilon\beta - 4\mu^2\beta^2) \quad \left(\frac{d}{c} < 0\right). \quad (12)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. Пусть $\mu = \frac{1}{2m}$ и выполнены условия (12). Тогда уравнение (1) имеет топологический солитон вида

$$W(t, x) = \lambda^\mu [1 + \text{th}(\alpha t + \beta x + \phi)]^\mu \exp\{i(\gamma t + \varepsilon x + \psi)\},$$

причем

$$V_- = 0, \quad V_+ = (2\lambda)^\mu.$$

Это типичный кинк, в котором функция $V(\xi)$ соединяет два положения равновесия уравнения (7): $V = 0$ и $V = (2\lambda)^\mu$.

Литература

- [1] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: “Мир”, 1983. – 400 с.
- [2] Serov M. I., Cherniha R. M. Lie symmetries, Q – conditional symmetries, and exact solutions of nonlinear systems of diffusion-convection equations // Ukr. Math. J. – 2003. – Vol. 55. № 10. – P. 1619–1638.
- [3] Жестков С. В., Кочегарова М. А. О построении солитонных решений систем комплексных уравнений реакций с диффузией // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. № 3. – С. 61–64.

УДК 517+530.1

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЗАКОНОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ УДВОЕННОЙ СТЕПЕНИ

Жестков С. В., Новашинская В. С.

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова
Могилев

e-mail: zhestkov_s@rambler.ru, vichka-2468397@yandex.ru

Zhestkov S. V., Novashinskaya V. S. Constructing of optical solitons of (2+1)-dimensional Schrodinger’s equation with time-dependent coefficients and dual-power law nonlinearity. The direct method of constructing solitons of (2+1)-dimensional Schrodinger’s equation with time-dependent coefficients and dual-power law nonlinearity is developed.

Развит прямой метод построения солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и законом удвоенной степени нелинейности.

В [1] приведен ряд законов нелинейности, описываемых обобщенным уравнением Шредингера,

$$iq_t + \frac{1}{2}q_{xx} + F(|q|^2)q = 0, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (1)$$

где $F(s)$ — действительная алгебраическая функция. В случае, когда $F(s) = as^p + bs^{2p}$, $p > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, уравнение (1) обладает законом нелинейности удвоенной степени (dual-power law), который представляет интерес для приложений. В [2, 3] исследованы классические и киральные уравнения Шредингера со степенным законом нелинейности.

Цель настоящей работы — построение оптических солитонов в случае закона нелинейности удвоенной степени.

Рассмотрим (2+1)-мерное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i[u_t + p(t)u_x + q(t)u_y] + a(t)[u_{xx} + u_{yy}] + b_1(t)|u|^{2m}u + b_2(t)|u|^{4m}u = ic(t)u, \quad m > 0, \quad (2)$$

где $a(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c(t)$, $p(t)$, $q(t)$ — действительные, непрерывные, интегрируемые на \mathbb{R} функции.

Решение уравнения (2) строится в виде [2, 3]

$$u(t, x, y) = I(t, x, y) \exp(i\eta), \quad \eta = k_1x + k_2y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где $I(t, x, y)$ — огибающая солитона, $\omega(\tau)$ — частота солитона. Подставляя (3) в (2) и отделяя мнимую и действительную части, найдем

$$I_t + p(t)I_x + q(t)I_y + 2a(t)[k_1I_x + k_2I_y] = c(t)I, \quad (4)$$

$$a(t)[I_{xx} + I_{yy}] - [\omega(t) + k_1p(t) + k_2q(t) + k^2a(t)]I + b_1(t)I^{2m+1} + b_2(t)I^{4m+1} = 0, \quad (5)$$

$$k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (2) имело решение (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (4), (5).

Решение системы (4), (5) строится в виде

$$I(t, x, y) = A(t)f(\xi), \quad \xi = B_1x + B_2y - \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где $A(t)$, $f(\xi)$ — неизвестные гладкие функции, $v(\tau)$ — скорость солитона. Подставляя (6) в (4), получим

$$\dot{A}(t) = c(t)A(t) \quad \text{или} \quad A(t) = A_0 \exp \left(\int_0^t c(\tau) d\tau \right), \quad (7)$$

$$v(t) = B_1 p(t) + B_2 q(t) + 2a(t)[k_1 B_1 + k_2 B_2]. \quad (8)$$

Подставляя (6) в (5), найдем

$$f''(\xi) = H_0(t)f(\xi) - H_1(t)f^{2m+1}(\xi) - H_2(t)f^{4m+1}(\xi), \quad (9)$$

где

$$H_0(t) \equiv \frac{\omega(t) + k_1 p(t) + k_2 q(t) + k^2 a(t)}{B^2 a(t)}, \quad H_1(t) \equiv \frac{b_1(t) A^{2m}(t)}{B^2 a(t)},$$

$$H_2(t) \equiv \frac{b_2(t) A^{4m}(t)}{B^2 a(t)}, \quad B^2 \equiv B_1^2 + B_2^2, \quad a(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Чтобы проинтегрировать уравнение (9) предположим, что функции $H_0(t)$, $H_1(t)$, $H_2(t)$ являются постоянными, т. е.

$$H_0(t) \equiv \lambda_0, \quad H_1(t) \equiv \lambda_1, \quad H_2(t) \equiv \lambda_2, \quad (10)$$

причем $\lambda_0 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Кроме того, к уравнению (9) добавим краевые условия

$$f(-\infty) = f(+\infty) = 0. \quad (11)$$

Решение задачи (9), (11) дается формулой [4]

$$f(\xi) = \left[\frac{4\lambda_0 s(\xi)}{\left(s(\xi) + \frac{\lambda_1}{m+1} \right)^2 + \frac{4\lambda_0 \lambda_2}{2m+1}} \right]^{\frac{1}{2m}}, \quad s(\xi) \equiv \exp \left\{ -2m\sqrt{\lambda_0}(\xi - \xi_0) \right\}, \quad (12)$$

где ξ_0 — произвольная постоянная.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7), (8), (10). Тогда уравнение (2) имеет решение вида

$$u(t, x, y) = A(t) f \left(B_1 x + B_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau \right) \exp \left\{ i \left(k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right) \right\},$$

где $f(\xi)$ определяется формулой (12).

Литература

- [1] Biswas A. Theory of non-Kerr law generalized vector solitons // Appl. Math. and Comput. – 2003. – Vol. 136. – P. 443–452.
- [2] Жестков С. В., Новашинская В. С. О существовании оптических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и степенным законом нелинейности // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXV Герценовские чтения – 2012. – СПб. : БАН, 2012. – С. 55–57.
- [3] Жестков С. В., Новашинская В. С. О существовании (1+2)-мерных солитонов кирального уравнения Шредингера со степенным законом нелинейности // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 4. – С. 38–42.
- [4] Жестков С. В., Новашинская В. С. О построении солиноподобных решений (2+1)-мерного уравнения Захарова–Кузнецова со степенными законами нелинейности // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXIV Герценовские чтения – 2011. – СПб. : ООО “ПаркКом”, 2011. – С. 54–56.

АНАЛОГИ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y''' = F(y, y'')$

Зайцев В. Ф., Хоанг Нгы Хуан

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru

Zaitsev V. F., Hoang Ngu Huan. Analogues of variational symmetry of an equation of the form $y''' = F(y, y'')$. We discuss the problem of search of the “variational” symmetries of 3d-order ODEs. 4 inverse problems solved.

Обсуждается задача поиска симметрий уравнений 3-го порядка $y''' = F(y, y'')$, аналогичных вариационным симметриям. Решены 4 обратные задачи.

В предыдущей работе [1] нами рассматривались подклассы уравнений 3-го порядка, не содержащих “предстаршую” производную y'' . В случаях, когда правая часть уравнения содержит вторую производную, алгоритм решения обратной задачи становится существенно иным.

В силу принципа подобия мы будем рассматривать класс **автономных** уравнений 3-го порядка

$$y''' = F(y, y''), \quad (1)$$

имеющих **автономные** первые интегралы, которые, естественно, будут “наследовать” симметрию $X = \partial_x$ исходного уравнения. Класс (1) допускает точечную группу эквивалентности

$$y = \alpha(t)u + \beta(t), \quad x = \gamma(t), \quad (2)$$

где $\gamma(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\gamma'')^2 = C_1(\gamma')^3$, $\alpha(t) = C_2\sqrt{\gamma t}$, функция $\beta(t)$ произвольна. Заметим, что в общем случае функция $\gamma(t)$ представима через интегралы от эллиптических функций Вейерштрасса. Применение группы эквивалентности (2) к найденным уравнениям (1) позволит нам получить решение нашей обратной задачи. Выпишем условия, при выполнении которых уравнение (1) будет иметь автономный первый интеграл

$$P = P(y, y', y''). \quad (3)$$

По определению первого интеграла,

$$D_x(P) = R(y, y', y'')[y''' - F(y, y', y'')]; \quad (4)$$

здесь R – интегрирующий множитель, D_x – символ полной производной. Из определения следует, что $R = P_{y''}$, и для поиска класса функций F остаётся одно уравнение

$$y' \frac{\partial P}{\partial y} + y'' \frac{\partial P}{\partial y'} + F \frac{\partial P}{\partial y''} = 0. \quad (5)$$

1. Рассмотрим класс уравнений

$$y''' = F(y)(y'')^2 + G(y)y'' + H(y) \quad (6)$$

и будем искать автономный первый интеграл, линейный по старшей производной (y'')

$$P = R(y, y')y'' + Q(y, y'). \quad (7)$$

Теорема 1. Существует единственное нетривиальное автономное уравнение (6) с $F \equiv 0$ (т. е. линейное по второй производной), имеющее автономный первый интеграл вида (7), а именно

$$y''' = \frac{cy''}{ay + b}, \quad (8)$$

где a, b, c – произвольные константы.

Доказательство. Подставляя (6), (7) в (5) и расщепляя по y'' , получим систему

$$\begin{cases} R_{y'} + RF = 0, \\ Q_{y'} + R_y y' + RG = 0, \\ Q_y y' + RH = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Так как $F \equiv 0$, из первого уравнения системы следует, что интегрирующий множитель зависит только от y : $R = R(y)$. Из оставшихся уравнений получаем

$$Q = -\frac{1}{2}R'(y')^2 - RGy' + \omega(y),$$

где $\omega(y)$ – произвольная функция y . Наконец, из последнего уравнения следует выражение

$$-\frac{1}{2}R''(y')^3 - (G'R - GR')(y')^2 + \omega'y' + RH = 0,$$

откуда (после расщепления по y') с необходимостью следует

$$R'' = 0, \quad (GR)' = 0, \quad \omega' = 0, \quad RH = 0.$$

Поэтому, если $R \neq 0$, то $H \equiv 0$, $R = ay + b$, $G = \frac{c}{ay + b}$, $\omega = C$. Окончательно получаем первый интеграл в виде

$$P = (ay + b)y'' - \frac{a}{2}(y')^2 - cy' \quad \blacksquare$$

Пусть теперь $F \neq 0$. Тогда из первого уравнения системы (9) находим $R = S(y)e^{-Fy'}$, из второго уравнения – функцию Q :

$$Q = -\frac{e^{-Fy'}}{F^3} \left[SF^2 F'(y')^2 + F(2SF' - S'F)y' + 2SF' - S'F - SF^2 G \right].$$

Очевидно, третье уравнение (после сокращения на $e^{-Fy'}$) примет вид

$$A_4(y)(y')^4 + A_3(y)(y')^3 + A_2(y)(y')^2 + A_1(y)y' + SH = 0,$$

поэтому при $S \neq 0$ оказывается, что $H \equiv 0$, и все $A_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$. Из равенства $F_4 = 0$ следует $F' = 0$, т. е. $F = \alpha$. Из остальных условий без труда получаем $S = ay + b$, $G = \frac{c}{ay + b}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Уравнение

$$y''' = \alpha(y'')^2 + \frac{cy''}{ay + b} \quad (10)$$

является единственным уравнением вида (6) с $F \neq 0$, имеющее автономный первый интеграл вида (7), а именно,

$$P = \left[(ay + b)y'' + \frac{\alpha ay' + a + \alpha c}{\alpha^2} \right] e^{\alpha y'} \quad \blacksquare \quad (11)$$

2. Будем теперь для уравнения (6) искать автономный первый интеграл, квадратичный по старшей производной (y'')

$$P = R(y, y')(y'')^2 + Q(y, y')y'' + S(y, y'). \quad (12)$$

Рассуждая аналогично п. 1, приходим к системе

$$\begin{cases} R_{y'} + 2RF = 0, \\ Q_{y'} + R_y y' + QF + 2RG = 0, \\ S_{y'} + Q_y y' + QG + 2RH = 0, \\ S_y y' + QH = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Если $F \equiv 0$, интегрирующий множитель зависит только от y : $R = R(y)$, из второго уравнения находим Q :

$$Q = -\frac{1}{2}R'(y')^2 - 2RGy' + \omega(y).$$

Из третьего уравнения находится S , а четвертое расщепляется по степеням y' до системы

$$\begin{cases} R''' = 0, \\ (5R'G + 4RG')' = 0, \\ (2RG^2 - \omega')' = 0, \\ 2(\omega G)' + 5R'H + 4RH' = 0, \\ (\omega H)' + 2RGH = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Системы (13) и (14) при $H \equiv 0$ имеют несколько “серий” решений, но соответствующие им уравнения тривиальны (линейные либо с коэффициентами F , G , H , вообще не зависящими от y).

Теорема 3. Не существует нетривиальных уравнений класса (6) с $H \equiv 0$, имеющих квадратичный по второй производной первый интеграл вида (12) ■

Замечание 1. Для уравнений (8) и (10) легко найти квадратичные первые интегралы, но они представляют собой квадратичные формы линейных первых интегралов, указанных в теоремах 1, 2.

При $H \neq 0$ система (13) имеет единственное нетривиальное решение, и справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Существует единственное уравнение класса (6) с $F \equiv 0$, $H \neq 0$, а именно,

$$y''' = \frac{cy''}{ay + b} + \frac{k}{(ay + b)^{5/2}},$$

имеющее первый интеграл вида (12):

$$P = \left[(ay + b)y'' + \frac{1}{2}a(y')^2 - cy' \right]^2 - \frac{2k}{a} \frac{ay' + 2c}{(ay + b)^{1/2}},$$

и единственное уравнение класса (6) с $F, H \neq 0$, а именно,

$$y''' = \alpha(y'')^2 - \frac{ay''}{\alpha(ay + b)} + \frac{c}{(ay + b)^4},$$

имеющее первый интеграл вида (12):

$$P = \left\{ [\alpha(ay + b)y'' + ay']^2 + \frac{\alpha c}{(ay + b)^2} \right\} e^{-2\alpha y'} \quad \blacksquare$$

Замечание 2. Легко видеть, что алгоритм решения обратной задачи для классов уравнений, содержащих “предстаршую” производную, существенно отличается от метода [1]: если в уравнении имеются только младшие производные, мы в конечном итоге приходим к системе двух уравнений, в которых вспомогательная функция (один из коэффициентов первого интеграла) входит в виде частных производных по разным переменным. Тогда условие совместности приводит к получению уравнения в частных производных для искомой функции – правой части уравнения. В рассматриваемом в настоящей работе случае младшие (в данном случае – первая y') производные отсутствуют, и окончательное уравнение, к которому приводится определяющая система, необходимо расщеплять по y' , в результате чего возникает новая система.

В заключение отметим, что для уравнений 3-го (и вообще нечётного) порядка свойство “наследования” первым интегралом симметрии исходного уравнения (т. е. свойство, аналогичное свойству вариационной симметрии) оказывается существенно более “редким”, чем для уравнений чётных порядков. Это может объясняться рядом причин – отсутствием самосопряжённых форм для уравнений нечётных порядков и для их симметрий; отсутствием аналогий в уравнениях механики и вообще в вариационных задачах (уравнение Эйлера–Лагранжа может иметь только чётный порядок); отсутствием простых интегрируемых комбинаций с младшими производными (для сравнения: если k – целое, то выражение $y'y^{(2k)}$ является точной производной, а выражение $y'y^{(2k+1)}$ – нет). Исследование этих вопросов, безусловно, представляет значительный интерес.

Литература

- [1] Хоанг Нгы Хуан, Зайцев В. Ф. Аналогии вариационных симметрий ОДУ нечётных порядков // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”, материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2012” (16–21 апреля 2012 г.). – СПб: Издательство БАН, 2012. – С. 116–120.

УДК 517.95

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Каримова Е. Н.

Уфимский государственный авиационный
технический университет

Уфа

e-mail: lenchik9191@mail.ru

Karimova E. N. We consider a task of the group classification of the linear wave equation with variable coefficients of the form

$$u_{tt} - a(t)b(x)u_{xx} = 0 \tag{1}$$

and the special case

$$u_{tt} - a(x)u_{xx} = 0. \tag{2}$$

These equations are a special case of hyperbolic equations of Laplace coefficients equal to zero. At non-zero coefficients of the Laplace equations (1) and (2) use group classification (L. V. Ovsyannikov [1] and Bluman, G. and Kumei, S. [2]).

Исследованы симметричные свойства линейных волновых уравнений:

$$u_{tt} - a(t)b(x)u_{xx} = 0, \tag{3}$$

$$u_{tt} - a(x)u_{xx} = 0. \tag{4}$$

Эти уравнения являются частным случаем гиперболических уравнений, когда коэффициенты Лапласа нулевые. Уравнение (2) было рассмотрено Ибрагимовым Н. Х. [1] и Bluman, G и Kumei, S. [2].

Рассматривается уравнение

$$u_{tt} - a(x)^2 b(t)^2 u_{xx} = 0. \quad (5)$$

Запишем точечные преобразования в виде:

$$\begin{aligned} X &= x + e\xi^1(x, t) + O(e^2), \\ T &= t + e\xi^2(x, t) + O(e^2), \\ U &= u + ef(x, t)u + O(e^2). \end{aligned}$$

Тогда получим систему определяющих уравнений:

$$\xi_x^1 - \xi_t^2 - \frac{a'(x)}{a(x)}\xi^1 - \frac{b'(t)}{b(t)}\xi^2 = 0, \quad (6)$$

$$a(x)^2 b(t)^2 \xi_x^2 - \xi_t^1 = 0, \quad (7)$$

$$\xi_{tt}^1 - a(x)^2 b(t)^2 \xi_{xx}^1 + 2a(x)^2 b(t)^2 f_x = 0, \quad (8)$$

$$\xi_{tt}^2 - a(x)^2 b(t)^2 \xi_{xx}^2 - 2f_t = 0, \quad (9)$$

$$f_{tt} - a(x)^2 b(t)^2 f_{xx} = 0. \quad (10)$$

Дифференцируя (6) по x и подставляя в неё (7), получаем:

$$\xi_{tt}^1 - a(x)^2 b(t)^2 \xi_{xx}^1 - K(t)\xi_t^1 + a(x)^2 b(t)^2 (H(x)\xi^1)_x = 0, \quad (11)$$

где $H(x) = \frac{a'(x)}{a(x)}$, $K(t) = \frac{b'(t)}{b(t)}$. Решение уравнений (11), (8) и (9) относительно функции $f(x, t)$ даёт:

$$f = \frac{1}{2}H(x)\xi^1 - \frac{1}{2}K(t)\xi^2 + s, \quad s = \text{const}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), получаем классифицирующее соотношение:

$$a(x)^2 b(t)^2 \xi^2 [(2H'(x) + H(x)^2)(\xi^1)^2]_x + \xi^1 [(2K'(t) - K(t)^2)(\xi^2)^2]_t = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следуют некоторые случаи:

$$\text{Случай 1. } 2H'(x) + H(x)^2 = 0, \quad 2K'(t) - K(t)^2 = 0.$$

В этом случае

$$a(x) = (Ax + B)^2, \quad b(t) = \frac{1}{(Ct + D)^2},$$

где A, B, C, D константы. Это верно для любых ξ^1 , ξ^2 и f , удовлетворяющих уравнениям (11), (7) и (12).

$$\text{Случай 2. } \xi^1 = 0, \quad \xi^2 = 0.$$

В этом случае из (12) следует, что $f = \text{const}$ для любых $a(x), b(t)$, и мы имеем один оператор $X_1 = u\partial_u$.

Случай 3. $\xi^1 = 0$.

В этом случае $\xi^2 = \frac{A}{2}t^2 + Bt + C$, $f = At + B$, для любых $a(x)$ и заданном $b(t) = \frac{1}{At^2+Bt+C}$, где A, B, C – константы.

Случай 4. $\xi^2 = 0$.

В этом случае $\xi^1 = \frac{A}{2}x^2 + Bx + C$, $f = Ax + B$ для любых $b(t)$ и заданном $a(x) = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C – константы.

Случай 5. $[(2H'(x) + H(x)^2)(\xi^1)^2]_x = 0$, $[(2K'(t) - K(t)^2)(\xi^2)^2]_t = 0$.

$$\xi^1 = \sqrt{\frac{\beta(t)}{2H'(x) + H(x)^2}}, \quad (14)$$

$$\xi^2 = \sqrt{\frac{\alpha(x)}{2K'(t) - K(t)^2}}. \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (6), (7), получаем:

$$\alpha'(x) = \frac{2aa'' - a'^2}{a^2a''' - 4aa'a'' + 2a'^3}, \quad (16)$$

$$\beta'(t) = \frac{b^4(b^2b''' - 6bb'b'' + 6b'^3)}{2bb' - 3b'^2}. \quad (17)$$

Случай 6. $\xi^1 \neq 0$, $\xi^2 \neq 0$, $2H'(x) + H(x)^2 \neq 0$, $2K'(t) - K(t)^2 \neq 0$.

Исходя из (13), возьмём

$$\xi^1 = \alpha(x)\beta(t), \quad (18)$$

$$\xi^2 = \gamma(x)\sigma(t). \quad (19)$$

Подставляя (18), (19), (12) в (8), (9), получаем:

$$\frac{\gamma_{xx}}{\gamma} = \frac{1}{a^2b^2\sigma} \left(\sigma_t - K\sigma - \frac{H\alpha\beta}{\gamma} \right)_t = \psi^2, \quad (20)$$

$$\frac{\beta_{tt}}{\beta} = \frac{a^2b^2}{\alpha} \left(\alpha_x - H\alpha - \frac{K\gamma\sigma}{\beta} \right)_x = \varphi^2. \quad (21)$$

Случай 6.1. $\psi^2 = 0$, $\varphi^2 = 0$.

Тогда из (20), (21)

$$\beta = p + qt, \quad (22)$$

$$\gamma = i + jx. \quad (23)$$

где p, q, i, j – константы. Подставляя (18), (19), (12), (22), (23) в (10), получим:

$$(K\sigma)_{tt} = 0, \quad (24)$$

$$(H\alpha)_{xx} = 0. \quad (25)$$

Из (24), (25), (20), (21):

$$\begin{aligned}\alpha &= mx^2 + nx + r, \\ \beta &= p + qt, \\ \gamma &= i + jx, \\ \sigma &= gt^2 + lt + w,\end{aligned}$$

где $p, q, i, j, m, n, r, g, l, w$ – константы.

Случай 6.2. $\psi^2 \neq 0, \varphi^2 \neq 0$.

Из (20), (21) получаем:

$$\begin{aligned}\left(\sigma_t - K\sigma - \frac{H\alpha\beta}{\gamma}\right)_t &= a^2b^2\sigma\psi^2, & \left(\alpha_x - H\alpha - \frac{K\gamma\sigma}{\beta}\right)_x &= \frac{\alpha\varphi^2}{a^2b^2}, \\ \beta &= pe^{\varphi t} + qe^{-\varphi t}, & \gamma &= ie^{\psi x} + je^{-\psi x}.\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \alpha (pe^{\varphi t} + qe^{-\varphi t}), \\ \xi^2 &= \sigma (ie^{\psi x} + je^{-\psi x}), \\ f &= \frac{1}{2} [H\alpha (pe^{\varphi t} + qe^{-\varphi t}) - K (ie^{\psi x} + je^{-\psi x})] + const,\end{aligned}$$

где p, q, i, j – константы.

В настоящее время проводится исследование наиболее общего случая.

Литература

- [1] Ibragimov N. H. Exercises for courses based on Lie group analysis // Archivas of ALGA. ALGA Publications. 2008. – P. 66–70.
- [2] Bluman G. and Kumei S. On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. 28 (1987), P. 307–318.
- [3] Ibragimov N. H. Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. – CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996. – Vol. 1. – 380 p.
- [4] Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа. – М.: “Знание”, сер. “Математика и кибернетика”, №7. – 1991. – 48 с.

SMOOTHNESS PROPERTIES OF SEMIGROUPS FOR ABSTRACT ELLIPTIC OPERATORS

Kim-Tyan L. R.

National University of Science and Technology «MISiS», Moscow, Russia

e-mail:kim-tyan@yandex.ru

On the base of n. 31.5 [1] and some conditions of operator B for the equation $\dot{x} = Bx$ the smoothness properties for abstract elliptic operators are established. These results correspond to the project plan RFBR №13-01-00188a.

Key words: differential equations in Banach space, abstract elliptic operator, semigroups, smoothness.

Ким-Тян Л. Р. Свойства гладкости полугрупп для абстрактных эллиптических операторов. На основе результатов В. А. Треногина ([1], п. 31.5) обобщаются свойства гладкости полугрупп для абстрактных эллиптических операторов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве, абстрактный эллиптический оператор, полугруппы, гладкость.

Let $B : D(B) \rightarrow E, \overline{D(B)} = E$ be closed linear densely defined operator in a Banach space E , the generator of strongly continuous semigroup $U(t)$, i. e.

1) for any $x \in E$ the abstract function $U(t)x$ is continuous on $(0, +\infty)$ and $\lim_{t \rightarrow +0} U(t)x_0 = x_0, \forall x_0 \in D(B)$;

2) there exist $M > 0$ and ω for which $\|U(t)\| \leq M e^{\omega t}, t \in (0, +\infty)$;

3) $U(t+s) = U(t)U(s), t, s > 0$.

Lemma 1.

1°. If $D(B)$ is dense in E and the operator B has regular points, then the domain $D(B^p)$ is dense in E for any $p = 2, 3, \dots$

2°. For $x_0 \in D(B^p)$, the solution $U(t)x_0$ of the equation

$$\dot{x} = Bx, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

for $t \geq 0$ has $p-1$ continuous derivatives and the derivative of the order p continuous for $t > 0$.

Proof. 1°. The bounded operator $R_\lambda(B) = (B - \lambda I)^{-1}, \lambda \in \rho(B)$ maps E on $D(B)$, $D(B)$ – on $D(B^2)$, $D(B^2)$ – on $D(B^3)$ and so on. 2°. On $D(B)$ the operator commutes with semigroup, whence the continuity $U'(t)x_0$ for $t > 0$ follows and if $x_0 \in D(B^2)$, then $U'(t)x_0 = BU(t)x_0 = U(t)Bx_0$ is the solution of Cauchy problem (1) with the initial value $Bx_0 \in D(B)$, i. e. $U(t)x_0$ is continuous at $t \geq 0$, and $U'(t)$ is continuous at $t > 0$. Further by induction.

Thus the belonging of x_0 to domain of some degree of the closed operator B increases this smoothness of the solution $U(t)x_0$ of the equation (1).

Let for real numbers α and $\varphi \in (0, \pi/2)$ the domain $\Omega_\alpha = \Omega(\alpha; \varphi)$ be lying outside the acute angle formed by two rays originated from the point $(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$ composed the angles φ and $-\varphi$ with negative direction of the real axis.

Definition 1[1]. The operator $B : D(B) \rightarrow E$ is called abstract elliptic, if there exist the constant $c > 0$ and the domain $\Omega_\alpha = \Omega(\alpha; 0), \alpha \geq \omega$, such that $\Omega_\alpha \subset \rho(B)$ and for all $\lambda \in \Omega_\alpha$ the inequality

$$\|(B - \lambda I)^{-1}\| = \|R_\lambda(B)\| < \frac{c}{1 + |\lambda|} \quad (2)$$

is fulfilled.

Theorem 1. Let Γ_α be the boundary $\partial\Omega(\alpha)$ of the domain $\Omega(\alpha)$ and B be abstract elliptic operator which is the generator of strongly continuous semigroup $U(t)$. Then for $t > 0$ the semigroup $U(t)$ is $p = 1, 2, 3, \dots$ times continuously differentiable and for any $x_0 \in D(B^p)$

$$U^{(p)}(t)x_0 = B^p U(t)x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \lambda^p e^{\lambda t} R_\lambda(B)x_0 d\lambda, \quad (3)$$

for $t > 0$ the following estimate

$$\|U^{(p)}(t)\| \leq M e^{\alpha t} t^{-p} \quad (4)$$

is true, and $x^{(p)}(0) = B^p x_0$.

Proof. In the monograph [1] the proof of this theorem for $p = 1$ is given. The proof by induction is made by the same scheme. Let this assertion is true for $p = k$, i. e.

$$U^{(k)}(t)x_0 = B^k U(t)x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \lambda^k e^{\lambda t} R_\lambda(B)x_0 d\lambda, \quad (5)$$

and for $t > 0$ $\|U^{(k)}(t)\| \leq M e^{\alpha t} t^{-k}$ with $x^{(k)}(0) = B^k x_0$. The further differentiation is in low, since the arising integral

$$U^{(k+1)}(t)x_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\alpha} \lambda^{k+1} e^{\lambda t} R_\lambda(B)x_0 d\lambda$$

is uniformly converged by t on any segment $[t_0, t_1], t_0 > 0$. In fact, when $x_0 \in D(B^{k+1})$, there exists $z_0 \in E, x_0 = R_\lambda^{k+1}(B)z_0$, and on $\Gamma_\lambda = \partial\Omega_\alpha$

$$\|\lambda^{k+1} R_\lambda^{k+1}(B)z_0\| \leq \frac{|\lambda|^{k+1} c^{k+1}}{(1 + |\lambda|)^{k+1}} \|z_0\| \leq C_1$$

with the estimate

$$\|e^{\lambda t} R_\lambda(B)\| \leq c e^{\alpha t} e^{-|\rho|t \cos \varphi}, \quad (6)$$

Present the curve Γ_α in the parametric form [1]: its lower ray has the equation $\lambda = \alpha + \rho e^{i\varphi}, \rho \in (-\infty, 0]$ and the upper one has the equation $\lambda = \alpha + \rho e^{i(\pi-\varphi)}, \rho \in [0, +\infty)$, consequently on the both rays $\operatorname{Re} \lambda = \alpha - |\rho| \cos \varphi$. Since on Ω $\|R_\lambda(B)\| \leq c$, then on Γ_α the inequality (6) is true. Whence if $t \in [t_0, t_1], t_0 > 0$, from (6) on Γ_α the estimate $\|e^{\lambda t} R_\lambda(B)\| \leq c e^{\alpha t_1} e^{-|\rho|t_0 \cos \varphi}$ follows, which is uniform by t on $[t_0, t_1]$. Consequently $U^{(k+1)}(t)$ is continuous on $(0, +\infty)$ in the sense of uniform convergence of operators.

Operator B^k is closed since B is closed. Consequently the differentiation is commuted with B^k and from (5) at $k = 1$ it follows

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U^{(k)}(t)x_0 &= \frac{d}{dt}B^kU(t)x_0 = B^k\frac{d}{dt}U(t)x_0 = B^{k+1}U(t)x_0 = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha}\lambda^{k+1}e^{\lambda t}R_\lambda(B)x_0 d\lambda, \end{aligned}$$

i. e. the equality (5) for $k \rightarrow k + 1$ and $x_0 \in D(B^{k+1})$ is proved.

If $x_0 \in D(B^{k+1})$, then $U^{(k+1)}(t)x_0 = B^{k+1}U(t)x_0 \rightarrow B^{k+1}x_0$ for $t \rightarrow +0$ and the function $U^{(k+1)}(t)x_0$ is continuous on $[0; +\infty)$.

The proof of the estimate $\|U^{(k+1)}(t)\| \leq Me^{\alpha t}t^{-(k+1)}$ will be given for $t \in (0, 1)$ and $t \geq 1$ separately. Let at first $t \in (0, 1)$. In this case the following assertion will be applied.

Lemma 2 [1, n. 31.5]. Let $\Gamma_\alpha(t)$ be broken line passing through the point $(\alpha t^{-1}, 0)$ with the rays parallel to rays of $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$. If $\psi(\lambda)$ is an abstract analytic function bounded in Ω_α with values in E , then

$$\int_{\Gamma_\alpha} e^{\lambda t} \psi(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_\alpha(t)} e^{\lambda t} \psi(\lambda) d\lambda.$$

After the change of the variable $\lambda t = \mu$ according to lemma 2 the integral representation of

$$U^{(k+1)}(t)x_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha}\lambda^{k+1}e^{\lambda t}R_\lambda(B)x_0 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha(t)}\lambda^{k+1}e^{\lambda t}R_\lambda(B)x_0 d\lambda,$$

takes the form

$$-\frac{1}{2\pi i t^{k+2}}\int_{\Gamma_\alpha}\mu^{k+1}e^\mu R_{\mu t^{-1}}(B)x_0 d\mu.$$

By virtue of the inequality (2)

$$\|R_{\mu t^{-1}}(B)\| \leq \frac{c}{1 + |\mu t^{-1}|} \leq \frac{ct}{|\mu|},$$

whence for $t \in (0, 1)$

$$\|U^{(k+1)}(t)x_0\| \leq \frac{c}{2\pi} \frac{\|x_0\|}{t^{k+1}} \int_{\Gamma_\alpha} |\mu|^k |e^{\operatorname{Re} \mu}| d|\mu| = \frac{cc_2}{t^{k+1}} e^{\alpha t} \|x_0\|$$

since as earlier on Γ_α $\operatorname{Re} \mu = \alpha t - |\rho| \cos \varphi$ and $|\mu| \leq \alpha + |\rho|$.

By virtue of the same lemma 2 this estimate can be prolonged on all $t \geq 1$ by successive its applications.

Литература

- [1] Trenogin V. A. D'Analyse fonctionnelle. – М.: Mir, 1989 (Функциональный анализ. – М., 1980. – 495 с.).

УДК 517.958:532.516

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА

Коптев А. В.

Государственный университет морского
и речного флота им. адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург
e-mail: Alex.Koptev@mail.ru

Koptev A. V. A construction principles of solutions for the Navier—Stokes equations. General principles of construction for solution of Navier—Stokes equations for viscous incompressible fluid flow are formulated on the paper. These provisions are valid for both 2D and 3D options equations.

В работе сформулированы общие принципы построения решений уравнений Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Эти положения одинаково справедливы для 2D и для 3D вариантов уравнений.

Введение. Уравнения Навье—Стокса являются основой при решении самых разнообразных гидромеханических задач при наличии вязкости. Эти уравнения представляют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одной из главных их особенностей является наличие нелинейных членов, что значительно усложняет исследование.

Несмотря на почти двухвековую историю этих уравнений и большую практическую значимость, на сегодняшний день существует большой перечень нерешенных вопросов.

Отсутствует общий подход к решению, как самих уравнений, так и начальных и граничных задач для них. Не решены в полной мере вопросы существования гладкого решения. Не ясна асимптотика решения при больших временах и при больших значениях числа Рейнольдса [1, 2]. Нет полного исследования вопроса единственности. Для нестационарного решения нет надежного способа определения времени его существования (“времени жизни”).

Среди множества направлений теоретического исследования уравнений Навье—Стокса выделяется одно, которое оформилось, как одна из семи главных проблем третьего тысячелетия. Постановка предложена Математическим институтом Клэя (Clay Mathematical institute, USA) в 2000 году [6]. Согласно этой постановке проблема сводится к доказательству в общем случае гладкого решения при заданных граничных и начальных условиях.

Оставляя в стороне вопрос о том, можно ли представить такое доказательство в общем случае, и какие нужны для этого дополнительные условия, отметим следующее. Все перечисленные теоретические вопросы не исключают и вопрос практического плана – как разрешить уравнения Навье–Стокса. Наличие решения в замкнутой форме позволяет существенно упростить моделирование реального явления и делает более эффективной процедуру вычисления. Было бы очень полезно знать, как строить частные решения уравнений Навье–Стокса, как их комбинируя находить более сложные решения граничных и начальных задач. Все это представляет серию практически важных вопросов, которые стоят перед исследователями.

Несмотря на большое разнообразие задач, связанных с уравнениями Навье–Стокса, представляется очевидным, что должны быть выработаны некоторые общие принципы построения решений. С тем, чтобы их можно было бы применять к различным вариантам уравнений Навье–Стокса, $2D$ и $3D$, стационарным и нестационарным. Представить такие общие принципы – цель данной работы. Некоторые из них были сформулированы ранее в работах [3–5].

При построении решений предлагается основываться на следующих основных положениях.

Положение первое. Исходить следует не из уравнений Навье–Стокса, а из первого интеграла этих уравнений [3–4]. Первый интеграл представляет соотношения более низкого порядка по основным неизвестным, но вводит в рассмотрение новые ассоциированные неизвестные Ψ_i – псевдофункции тока. В результате относительно скоростей имеем в уравнениях производные первого порядка и квадратически нелинейные члены. Относительно ассоциированных неизвестных имеем линейные комбинации вторых производных. Давление входит аддитивно, причем только в одно уравнение. Использование первого интеграла изначально упрощает задачу.

Положение второе. Во всех уравнениях, за исключением уравнения для давления, нужно произвести разделение разнородных переменных. То есть члены с основными и с ассоциированными неизвестными расположить в разных частях уравнений и приравнять каждую некоторой функции координат $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, и т. д. В результате для каждого вида неизвестных получаем уравнения определенного вида. Так, для ассоциированных неизвестных Ψ_i получаем систему линейных неоднородных уравнений второго порядка. Для неизвестных скоростей u , v , w получаем уравнения, содержащие первые производные по координатам, квадратически нелинейные члены u^2 , v^2 , w^2 , uv , vw , wu и свободные члены $f_i(x, y, z)$, т. е. для этого типа неизвестных имеем аналогии уравнения Риккати в частных производных. В результате задача еще более упростилась.

Положение третье. Функции $f_i(x, y, z)$ можно выбрать удобным образом так, чтобы получить дальнейшие упрощения. Во-первых, нужно, чтобы разрешались бы неоднородные линейные уравнения относительно Ψ_i . Для этого необходимо, чтобы неоднородные члены f_i удовлетворяли бы условиям совместности. Так, для варианта $2D$ уравнений необходимо равенство

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

Во-вторых, нужно, чтобы уравнения Риккати относительно скоростей или разрешались бы в квадратурах, или обладали некоторыми удобными свойствами, например, удовлетворяли бы определенным граничным условиям. Удачный выбор f_i позволяет не только найти u, v, w, Ψ_i , но в некоторых случаях и удовлетворить граничным и начальным условиям.

Положение четвертое. Нужно найти все комбинации, фигурирующие в уравнении для p . Таким комбинациями являются скоростной напор $\frac{U^2}{2}$ и диссипативный член d . Первое есть полусумма квадратов скоростей, а второе есть некоторая комбинация вторых производных Ψ_i и U^2 . И то, и другое легко вычисляется через уже найденные величины. В результате последнее из основных неизвестных p также может быть найдено.

Таким образом, все основные неизвестные u, v, w, p определены и задача построения решения решена. Кроме того, также найдены и все ассоциированные неизвестные Ψ_i , но они играют лишь вспомогательную роль.

Заключение. Сформулированные положения могут являться основой для построения решений различных задач для уравнений Навье—Стокса. Они позволяют представить процедуру построения решений, как последовательность более простых операций.

Используя эти положения, автором были найдены новые частные решения уравнений Навье—Стокса и решены некоторые граничные и начальные задачи.

Литература

- [1] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
- [2] Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
- [3] Коптев А. В. Интегралы уравнений Навье—Стокса // Труды Средне-волжского математического общества. 2004. Т.6, № 1 – С. 215–225.
- [4] Коптев А. В. Первый интеграл и пути дальнейшего интегрирования уравнений Навье—Стокса // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2012. № 147. – С. 7–17.
- [5] Коптев А. В. Проблемы и перспективы решения уравнений Навье—Стокса // Материалы III Международной конференции “Математическая физика и ее приложения”. – МИАН им. В.А. Стеклова, СамГТУ, 2012. – С. 170.
- [6] Charles L. Fefferman. Existence and Smoothness of the Navier—Stokes equation. – Preprint. Princeton Univ., Math. Dept. – Princeton, USA, 2000. – P. 1–5.

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТАХ ПО ФУНКЦИЯМ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Краснова Д. А.

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск

e-mail: krasnova-d@mail.ru

Krasnova D. A. Group properties of the equations an ideal liquid in Lagrangian coordinates on functions of initial velocity distribution. The group analysis of the equations of movement is carried out ideal liquid in Lagrangian coordinates. Transition to any Lagrangian coordinates, keeping volume, is equivalence transformation for the equations was shown. The classifying equations on function of initial distribution speeds were received.

Проводится групповой анализ уравнений движения идеальной жидкости в лагранжевых координатах. Показано, что переход к произвольным лагранжевым координатам, сохраняющее объем, является преобразованием эквивалентности для уравнений. Получены классифицирующие уравнения на функции начального распределения скорости.

При описании движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей задача сводится к отысканию решения уравнений Эйлера с выполнением кинематического и динамического условий на свободной границе. Кинематическое условие позволяет преобразовать эту задачу к другой задаче, в которой область определения фиксирована. Это достигается переходом к лагранжевым координатам $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ как значения координат частиц жидкости в начальный момент времени $t = 0$ $\mathbf{x} = \xi$. Закон движения частиц определяется в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ решением уравнения $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Рассматривается система уравнений следующего вида [1]

$$x_t = (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta)(\varphi_\xi - u_0) + (-y_\xi z_\zeta + z_\xi y_\zeta)(\varphi_\eta - v_0) + (y_\xi z_\eta - z_\xi y_\eta)(\varphi_\zeta - w_0), \quad (1)$$

$$y_t = (-x_\eta z_\zeta + z_\eta x_\zeta)(\varphi_\xi - u_0) + (x_\xi z_\zeta - z_\xi x_\zeta)(\varphi_\eta - v_0) + (-x_\xi z_\eta + z_\xi x_\eta)(\varphi_\zeta - w_0), \quad (2)$$

$$z_t = (x_\eta y_\zeta - y_\eta x_\zeta)(\varphi_\xi - u_0) + (-x_\xi y_\zeta + y_\xi x_\zeta)(\varphi_\eta - v_0) + (x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta)(\varphi_\zeta - w_0), \quad (3)$$

$$x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) + x_\eta(-y_\xi z_\zeta + y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) = 1, \quad (4)$$

где $(x, y, z) = \mathbf{x}(\xi, t)$ – координаты частиц жидкости, $\varphi((\xi, t))$ – искомая функция, возникающая при преобразованиях уравнений движения, $u_0(\xi, \eta, \zeta)$, $v_0(\xi, \eta, \zeta)$, $w_0(\xi, \eta, \zeta)$ – компоненты вектора скорости частиц при $t = 0$. Преобразование уравнений движения к переменным \mathbf{x} , φ впервые было найдено Г. Вебером. Уравнение (4) представляет собой уравнение сохранения объема, $\det M = 1$, где $M = \partial(\mathbf{x})/\partial(\xi)$ – матрица Якоби.

Доказано, что переход к произвольным лагранжевым координатам $(\alpha, \beta, \gamma) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$, сохраняющий объем ($\det J = 1$, где $J = \partial(\boldsymbol{\alpha})/\partial(\boldsymbol{\xi})$ – матрица Якоби), является преобразованием эквивалентности для уравнений (1) – (4). Структура уравнений (1) – (4) не меняется при таких преобразованиях, изменяются только компоненты начального распределения вектора скорости по формулам

$$\begin{aligned} U_0 &= (\beta_\eta \gamma_\zeta - \beta_\zeta \gamma_\eta) u_0^1 - (\beta_\xi \gamma_\zeta - \gamma_\xi \beta_\zeta) v_0^1 + (\beta_\xi \gamma_\eta - \beta_\eta \gamma_\xi) w_0^1, \\ V_0 &= (\gamma_\eta \alpha_\zeta - \gamma_\zeta \alpha_\eta) u_0^1 - (\gamma_\xi \alpha_\zeta - \alpha_\xi \gamma_\zeta) v_0^1 + (\gamma_\xi \alpha_\eta - \gamma_\eta \alpha_\xi) w_0^1, \\ W_0 &= (\alpha_\eta \beta_\zeta - \alpha_\zeta \beta_\eta) u_0^1 - (\alpha_\xi \beta_\zeta - \beta_\xi \alpha_\zeta) v_0^1 + (\alpha_\xi \beta_\eta - \alpha_\eta \beta_\xi) w_0^1, \end{aligned}$$

где $(u_0^1, v_0^1, w_0^1) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\xi}(\alpha, \beta, \gamma))$.

Ставится задача групповой классификации для уравнений (1)–(4) относительно функций $u_0(\boldsymbol{\xi})$, $v_0(\boldsymbol{\xi})$, $w_0(\boldsymbol{\xi})$. Необходимо получить ядро основной алгебры Ли операторов, допускаемых системой (1)–(4) при произвольной выборе функции u_0 , v_0 , w_0 , и выделить спецификации функций, при которых ядро алгебры Ли расширяется [2].

Введем индексные обозначения: $x^1 = \xi$, $x^2 = \eta$, $x^3 = \zeta$, $x^4 = t$, $u^1 = x$, $u^2 = y$, $u^3 = z$, $u^4 = \varphi$ и перепишем систему (1)–(4) в индексных обозначениях:

$$u_4^1 = (u_2^2 u_3^3 - u_3^2 u_2^3)(u_1^4 + u_0) + (-u_1^2 u_3^3 + u_1^3 u_2^2)(u_2^4 + v_0) + (u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2)(u_3^4 + w_0), \quad (5)$$

$$u_4^2 = (-u_2^1 u_3^3 + u_2^3 u_1^1)(u_1^4 + u_0) + (u_1^1 u_3^3 - u_1^3 u_1^1)(u_2^4 + v_0) + (-u_1^1 u_2^3 + u_1^3 u_2^1)(u_3^4 + w_0), \quad (6)$$

$$u_4^3 = (u_2^1 u_2^3 - u_2^2 u_1^1)(u_1^4 + u_0) + (-u_1^1 u_2^3 + u_1^2 u_1^1)(u_2^4 + v_0) + (u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_1^1)(u_3^4 + w_0), \quad (7)$$

$$u_1^1(u_2^2 u_3^3 - u_2^3 u_2^2) + u_2^1(-u_1^2 u_3^3 + u_1^3 u_2^2) + u_3^1(u_1^2 u_2^3 - u_1^3 u_2^2) - 1 = 0. \quad (8)$$

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой (5)–(8), ищем в виде [2]

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

где $i, \alpha = 1, 2, 3, 4$. Предполагается, что координаты оператора ξ^i , $i = 1, 2, 3$ зависят от (x^1, x^2, x^3) ; ξ^4 зависит только от x^4 ; η^α зависят от всех зависимых и независимых переменных (по повторяющимся индексам проводится суммирование).

Продолжая оператор X на первые производные и действуя им на уравнения (5)–(8), приходим к системе определяющих уравнений

$$\eta^1 = C_1 - C_2 u^2 - C_3 u^3 + C_4,$$

$$\eta^2 = C_2 u^1 + C_1 u^2 + C_5 u^3 + C_6,$$

$$\eta^3 = C_3 u^1 - C_5 u^2 + C_1 u^3 + C_7,$$

$$\eta^4 = (2C_1 - \xi_{x^4}^4) u^4 + \Phi(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

$$\xi_{x^1}^1 + \xi_{x^2}^2 + \xi_{x^3}^3 = 3C_1,$$

$$\xi^1 \frac{\partial u_0}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial u_0}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial u_0}{\partial x^3} + u_0 \left(-2C_1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} \right) + v_0 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + w_0 \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = 0, \quad (9)$$

$$\xi^1 \frac{\partial v_0}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial v_0}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial v_0}{\partial x^3} + u_0 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + v_0 \left(-2C_1 + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} \right) + w_0 \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

$$\xi^1 \frac{\partial w_0}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial w_0}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial w_0}{\partial x^3} + u_0 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} + v_0 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} + w_0 \left(-2C_1 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = 0, \quad (11)$$

здесь $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ – групповые постоянные, $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$.

Уравнения (9)–(11) являются классифицирующими уравнениями на функции $u_0(\boldsymbol{\xi}), v_0(\boldsymbol{\xi}), w_0(\boldsymbol{\xi})$ вида

Базис операторов основной алгебры Ли (ядро преобразования) содержит операторы

$$L_0 : \left\{ \frac{\partial}{\partial t}, u^1 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^1}, u^1 \frac{\partial}{\partial u^3} - u^3 \frac{\partial}{\partial u^1}, u^3 \frac{\partial}{\partial u^2} - u^2 \frac{\partial}{\partial u^3}, \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^3}, h(t) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}.$$

Анализ системы (9)–(11) сводится к исследованию трёх уравнений относительно компонент начального вихря $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}_0$. Найдены преобразования вихря, для которых происходит расширение алгебры L_0 .

Литература

- [1] Андреев В. К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. – Новосибирск: Наука, 1992. – 136 с.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

УДК 512.831

MSC Classif. 15A22

ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА–КЭЛИ ДЛЯ МАТРИЦ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ ШМИДТА

Кувшинова А. Н.

Ульяновский государственный технический университет

Ульяновск

e-mail: erasya7@rambler.ru

Kuvshinova A. N. Hamilton–Cayley theorem for matrices polynomial by E. Schmidt spectral parameter. At the beginning of previous century E. Schmidt had introduced for integral operators eigenvalue systems $\{\lambda_k\}_1^\infty$, counting with their multiplicities and relevant sets of eigenelements $\{\varphi_k\}_1^\infty, \{\psi_k\}_1^\infty$, such that $A\varphi_k = \lambda_k\psi_k, A^*\psi_k = \lambda_k\varphi_k$. In this article generalized matrix spectral problems polynomially depending on Schmidt’s spectral parameter are considered. I. S. Arjanykh (1951) has proved the generalized Hamilton–Cayley

theorem for polynomial matrices with identity matrix at the parameter highest degree with the aim of application to numerical methods of linear algebra. Below it is given the extension of Hamilton–Cayley theorem on matrix E. Schmidt spectral problems polynomially depending on spectral parameter with identity matrices at the highest spectral parameter degree.

Keywords: E. Schmidt spectrum; E. Schmidt eigenvalues; polynomial matrices on E. Schmidt spectral parameter; Hamilton–Cayley theorem.

В начале прошлого столетия Э. Шмидт ввёл для интегральных операторов систему собственных чисел $\{\lambda_k\}$, засчитываемых с их кратностью, и наборы собственных элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, для которых $A\varphi_k = \lambda_k\psi_k$, $A^*\psi_k = \lambda_k\varphi_k$. В работе рассматриваются обобщённые матричные спектральные задачи, полиномиально зависящие от спектрального параметра Шмидта. И. С. Аржаных в 1951 году доказал обобщённую теорему Гамильтона–Кэли для полиномиальных матриц с единичной матрицей при старшей степени спектрального параметра с целью применения в численных методах линейной алгебры. Ниже дано распространение теоремы Гамильтона–Кэли для матричных спектральных задач по Э. Шмидту, полиномиально зависящих от спектрального параметра с единичной матрицей при старшей степени параметра.

Ключевые слова: спектр Шмидта; собственные числа Шмидта; полиномиальные матрицы по спектральному параметру Шмидта; теорема Гамильтона–Кэли.

1. Введение. В цикле работ начала двадцатого столетия по линейным и нелинейным интегральным уравнениям [1] Э. Шмидт ввёл системы собственных чисел λ_k , засчитываемых с их кратностями в гильбертовом пространстве H , и собственных элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих соотношениям $B\varphi_k = \lambda_k\psi_k$, $B^*\psi_k = \lambda_k\varphi_k$ и позволивших обобщить теорию Гильберта–Шмидта на несамосопряженные вполне непрерывные операторы в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H [2], [3]. Под названием s -чисел эта система нашла многие применения в вычислительной математике и теории некорректно поставленных задач. Поскольку никто из применявших s -числа не дает ссылок на Э. Шмидта, для восстановления справедливости в наших работах мы говорим о спектральных задачах по Э. Шмидту. В данной работе рассматривается матричная обобщённая спектральная задача по Э. Шмидту вида

$$\begin{aligned} (A_s + \lambda A_{s-1} + \lambda^2 A_{s-2} + \dots + \lambda^{s-1} A_1)\varphi &= \lambda^s \psi, \\ (A_s^* + \lambda A_{s-1}^* + \lambda^2 A_{s-2}^* + \dots + \lambda^{s-1} A_1^*)\psi &= \lambda^s \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Далее удобно использовать матричные обозначения, т. е. записать обобщённую задачу на собственные значения по Э. Шмидту в виде уравнения

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} &= \left[\lambda^s \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \lambda^{s-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix} - \dots - \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_s^* \end{pmatrix} \right] = \\ &= \left[\lambda^s I - \sum_{1 \leq k \leq s} \lambda^{s-k} \mathbf{a}_k \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Обобщённая теорема Гамильтона–Кэли. Следуя [4], введём символические степени матричных операторов: $\mathbf{a}^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{J}$, $\mathbf{a}^{(-k)} =$

$= 0$, $\mathbf{a}^t = \sum_{0 < m \leq t} \mathfrak{I} \mathbf{a}_m \mathbf{a}^{t-m} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_t \mathbf{a}^0$, $t > 0$, $\mathbf{a}_r^t = \sum_{r \leq m \leq s} \mathbf{a}_m \mathbf{a}^{t-(m-r)}$, $0 < r \leq s$, $t > 0$. Положим также $\varphi_t(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^t + \sum_{0 < m \leq t} \alpha_t \mathbf{a}^{t-m}$, где α_t – коэффициенты характеристического полинома соответствующего $\Phi(\lambda)$, т. е. $\det \Phi(\lambda) = \lambda^{2ns} + \sum_{0 < t \leq 2ns} \alpha_t \lambda^{2ns-t}$.

Теорема 1. (Обобщенная теорема Гамильтона–Кэли). Матрицы \mathbf{a}_r , $0 < r \leq s$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \varphi_{(2n-1)s}(\mathbf{a}) + \mathbf{a}_2 \varphi_{(2n-1)s-1}(\mathbf{a}) + \dots + \mathbf{a}_s \varphi_{(2n-2)s+1}(\mathbf{a}) + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+1} &= 0, \\ \mathbf{a}_2 \varphi_{(2n-1)s}(\mathbf{a}) + \mathbf{a}_3 \varphi_{(2n-1)s-1}(\mathbf{a}) + \dots + \mathbf{a}_s \varphi_{(2n-2)s+2}(\mathbf{a}) + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+2} &= 0, \\ \dots & \\ \mathbf{a}_{s-1} \varphi_{(2n-1)s}(\mathbf{a}) + \mathbf{a}_{s-1} \varphi_{(2n-1)s-1}(\mathbf{a}) + \mathbb{I} \alpha_{2ns-1} &= 0, \\ \mathbf{a}_s \varphi_{(2n-1)s}(\mathbf{a}) + \mathbb{I} \alpha_{2ns} &= 0, \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\lambda)$ – матрица, присоединенная к матрице $\Phi(\lambda)$, т. е.

$$\Phi(\lambda) \cdot \Psi(\lambda) = \mathbb{I} \cdot \det \Phi(\lambda), \quad (4)$$

где, очевидно, что $\Psi(\lambda) = \lambda^{(2n-1)s} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \lambda^{(2n-1)s-1} \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots +$

$$+ \lambda \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s)} \end{pmatrix}.$$

Метод неопределённых коэффициентов приводит к следующим трем группам равенств:

I группа ($1 < t \leq s$):

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{I} + \alpha_1 \mathfrak{I},$$

$$\mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{I} + \alpha_2 \mathfrak{I},$$

.....

$$\mathfrak{B}^{(s)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(s-1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{(s-2)} + \dots + \alpha_s \mathfrak{I}.$$

II группа ($s < t \leq (2n-1)s$):

$$\mathfrak{B}^{(s+1)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(s)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{(s-1)} + \dots + \mathfrak{I} \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{(1)} + \alpha_{s+1} \mathfrak{I},$$

$$\mathfrak{B}^{(s+2)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(s+1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{(s)} + \dots + \mathfrak{I} \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{(2)} + \alpha_{s+2} \mathfrak{I},$$

.....

$$\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-2)} + \dots + \mathfrak{I} \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s)} + \alpha_{(2n-1)s}.$$

III группа ($(2n-1)s + r < t \leq 2ns$, $0 < r \leq s$):

$$-\mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} - \dots - \mathbf{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} - \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+1)} = \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+1},$$

$$-\mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathbf{a}_3 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} - \dots - \mathbf{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+3)} - \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} = \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$-\mathbf{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} = \mathbb{I} \alpha_{2ns-1},$$

$$-\mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathbb{I} \alpha_{2ns}.$$

Первые две группы равенств определяют матрицы $\mathfrak{B}^{(t)}$, $1 < t \leq (2n-1)s$:

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{I} + \alpha_1 \mathfrak{I} = \mathbf{a}^1 + \alpha_1 \mathbf{a}^0 = \varphi_1(\mathbf{a}^{\cdot}),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{(2)} &= \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{I} + \alpha_2 \mathfrak{I} = \{\mathfrak{I} \mathbf{a}_1\}^2 \mathfrak{I} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{I} \alpha_1 + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{I} + \mathfrak{I} \alpha_2 = \\ &= \mathbf{a}^{\cdot 2} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot 2} = \varphi_2(\mathbf{a}^{\cdot}), \end{aligned}$$

.....

$$\mathfrak{B}^{(s)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(s-1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{(s-2)} + \dots + \alpha_s \mathfrak{I} =$$

$$= \mathbf{a}^{\cdot s} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot s-2} + \dots + \alpha_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_s \mathbf{a}^{\cdot} = \varphi_s(\mathbf{a}^{\cdot}),$$

$$\mathfrak{B}^{(s+1)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(s)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{(s-1)} + \dots + \mathfrak{I} \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{(1)} + \alpha_{s+1} \mathfrak{I} =$$

$$= \mathbf{a}^{\cdot s+1} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot s} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot s-1} + \dots + \alpha_s \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s+1} \mathbf{a}^{\cdot} = \varphi_{s+1}(\mathbf{a}^{\cdot}),$$

$$\mathfrak{B}^{(s+2)} = \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{(s+1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{(s)} + \dots + \mathfrak{I} \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{(2)} + \alpha_{s+2} \mathfrak{I} =$$

$$= \mathbf{a}^{\cdot s+2} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot s+1} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot s} + \dots + \alpha_{s+1} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s+2} \mathbf{a}^{\cdot} = \varphi_{s+2}(\mathbf{a}^{\cdot}),$$

.....

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} &= \mathfrak{I} \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \mathfrak{I} \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-2)} + \dots + \mathfrak{I} \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s)} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{I} = \\ &= \mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathbf{a}^{\cdot} = \varphi_{(2n-1)s}(\mathbf{a}^{\cdot}). \end{aligned}$$

Подстановка $\mathfrak{B}^{(1)} = \varphi_1(\mathbf{a}^{\cdot})$, $\mathfrak{B}^{(2)} = \varphi_2(\mathbf{a}^{\cdot})$, $\mathfrak{B}^{(3)} = \varphi_3(\mathbf{a}^{\cdot})$, ..., $\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \varphi_{(2n-1)s}(\mathbf{a}^{\cdot})$ в третью группу формул дает равенства (3), т. е. обобщённую теорему Гамильтона-Кэли. \square

Следствие 1. (Явный вид теоремы Гамильтона-Кэли). Матрицы \mathbf{a}_r , $0 < r \leq s$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^{\cdot (2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_1^{\cdot (2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}_1^{\cdot (2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{I} \alpha_{(2n-1)s+1} &= 0, \\ \mathbf{a}_2^{\cdot (2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_2^{\cdot (2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}_2^{\cdot (2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_2^{\cdot 1} + \mathfrak{I} \alpha_{(2n-1)s+2} &= 0, \\ \dots \dots \dots & \\ \mathbf{a}_{s-1}^{\cdot (2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_{s-1}^{\cdot (2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}_{s-1}^{\cdot (2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_{s-1}^{\cdot 1} + \mathfrak{I} \alpha_{2ns-1} &= 0, \\ \mathbf{a}_s^{\cdot (2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_s^{\cdot (2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}_s^{\cdot (2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_s^{\cdot 1} + \mathfrak{I} \alpha_{2ns} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Доказательство. Для $0 < r \leq s$ имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} + \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} + \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+1)} + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+1} = \\ &= \mathbf{a}_1 \left[\mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \\ &+ \mathbf{a}_2 \left[\mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s-1} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s-2} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot (2n-1)s-3} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-2} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \mathbf{a}_s \left[\mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s} + \dots + \alpha_{(2n-2)s} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s+1} \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+1} = \\
& = \left[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} \right] + \\
& + \alpha_1 \left[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s} \right] + \\
& + \alpha_2 \left[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s-1} \right] + \dots + \\
& + \alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^{\cdot 1} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+1} = \\
& = \mathfrak{J} \left[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} \right] + \\
& + \mathfrak{J} \alpha_1 \left[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s} \right] + \\
& + \dots + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^{\cdot 1} + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s+1} = \\
& = \mathbf{a}_1^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_1^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}_1^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 & = \mathbf{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} + \mathbf{a}_3 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+3)} + \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+2} = \\
& = \mathbf{a}_2 \left[\mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \\
& + \mathbf{a}_3 \left[\mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-2} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \\
& + \dots + \mathbf{a}_s \left[\mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \dots + \alpha_{(2n-2)s+1} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-2)s+2} \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+2} = \\
& = \left[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+3} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+2} \right] + \\
& + \alpha_1 \left[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} \right] + \dots + \\
& + \alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot 1} + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \mathbb{I} \alpha_{(2n-1)s+2} = \\
& = \mathfrak{J} \left[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+3} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+2} \right] + \\
& + \mathfrak{J} \alpha_1 \left[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-2)s+1} \right] + \\
& + \dots + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^{\cdot 1} + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s+2} = \\
& = \mathbf{a}_2^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_2^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}_2^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_2^{\cdot 1} + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s+2},
\end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
0 & = \mathbf{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} + \mathbb{I} \alpha_{2ns} = \\
& = \mathbf{a}_s \left[\mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathbf{a}^{\cdot 0} \right] + \\
& + \mathbb{I} \alpha_{2ns} = \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot 1} + \mathbb{I} \alpha_{2ns} = \\
& = \mathfrak{J} \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathfrak{J} \alpha_1 \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \dots + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_s \mathbf{a}^{\cdot 1} + \mathfrak{J} \alpha_{2ns} = \\
& = \mathbf{a}_s^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathbf{a}_s^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathbf{a}_s^{\cdot(2n-1)s-2} + \dots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathbf{a}_s^{\cdot 1} + \mathfrak{J} \alpha_{2ns}. \square
\end{aligned}$$

Замечание. Вместо тождества (4) можно использовать тождество

$$\Psi(\lambda) \Phi(\lambda) = \mathbb{I} \cdot \det \Phi(\lambda). \quad (6)$$

На этом пути возникают символические степени матриц $\cdot \mathbf{a}^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{J}$,

$$\cdot \mathbf{a}^{(-t)} = 0, \quad \cdot \mathbf{a}^{(t)} = \sum_{0 < m \leq t} \cdot \mathbf{a}^{(t-m)} \mathbf{a}_m \mathfrak{J} + \cdot \mathbf{a}^0 \mathbf{a}_t \mathfrak{J}, \quad t > 0,$$

$\cdot \mathbf{a}_r^t = \sum_{r \leq m \leq s} \cdot \mathbf{a}_r^{t-(m-r)} \mathbf{a}_m$, $0 < r \leq s$, $t > 0$, позволяющие сформулировать аналоги теоремы 1 и следствия 1.

Теорема 2. Матрицы \mathbf{a}_r , $0 < r \leq s$ удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_{r \leq m \leq s} \varphi_{(2n-1)s-(m-r)}(\cdot \mathbf{a}) \mathbf{a}_m + \mathbb{I} \alpha_{(2n-s)+r} = 0.$$

Следствие 2. Матрицы \mathbf{a}_r , $0 < r \leq s$ удовлетворяют уравнениям:

$$\cdot \mathbf{a}_r^{(2n-1)s} + \sum_{1 \leq q \leq (2n-1)s} \alpha_q \cdot \mathbf{a}_r^{(2n-1)s-q} + \mathfrak{J} \alpha_{(2n-1)s-q} = 0.$$

Полученные результаты поддержаны проектом РФФИ 13-01-00188а.

Литература

- [1] Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teilen 1–3 // *Mathematische Annalen*. 1905–1908. Bd. 63–65. Bd. 65, P. 370–399.
- [2] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 2. Интегральные уравнения. – М.: ОНТИ. – 1935.
- [3] Пустыльник Е. И. Об одном представлении линейных вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве Банаха // *Известия ВУЗов. Математика*. 1960. №2 (15). – С. 149–153.
- [4] Аржаных И. С., Гугнина В. И. Распространение метода Крылова, Леверрье и Фаддеева на полиномиальные матрицы // *Труды Института Математики им. В. И. Рамановского*. – Ташкент, 1962. В. 24. – С. 33–67.

НЕКОТОРЫЕ БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ МИКРО И НАНОЭЛЕКТРОНИКИ. ФОРМИРОВАНИЕ НАНОРЕЛЬЕФА

Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С.

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова
Ярославль

e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Kulikov D. A., Kulikov A. N., Rudy A. S. Any bifurcation problems of the micro and nanoelectronics. Formation of nanorelief. The formation of an inhomogeneous topography on the surface of a plate during ion bombardement was considered. That fenomen is described by the Bradley-Harper equation and the nonlocal equation of the erosion. These problems were solved using the theory of dynamical systems.

В сообщении речь идёт о двух математических моделях процесса формирования наноструктур на поверхности мишени под воздействием ионной бомбардировки. Выявлен механизм их формирования. Для исследования двух нелинейных краевых задач для уравнения Бредли–Харпера и нелокального уравнения эрозии использованы методы качественной теории дифференциальных уравнений. Среди них можно назвать метод нормальных форм, асимптотические методы, метод инвариантных многообразий.

При взаимодействии потока ионов с поверхностью твёрдого тела возникает изменение топографии поверхности. В процессе бомбардировки плоской мишени пучком ионов достаточно часто наблюдается формирование неоднородных пространственных структур (волновых структур).

Одной из самых популярных математических моделей следует считать уравнение Бредли–Харпера (УРБХ). Иногда его называют обобщенным уравнением Курамото–Сивашинского [1–3].

В простейшем варианте после перенормировок УРБХ имеет вид

$$u_t = Au + c_1(u_x)^2 + c_2(u_y)^2, \quad (1)$$

где $u = u(t, x, y)$ – отклонение поверхности от плоской формы $c_1, c_2 \in R$, а линейный дифференциальный оператор (ЛДО) A определён равенством

$$Au = au_x - b_1u_{xx} - b_2u_{yy} - d_1u_{xxx} - d_2u_{yyy} - d_3u_{xyy},$$

где $a, b_1, b_2, d_1, d_2, d_3 \in R$. Уравнение (1) будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y). \quad (2)$$

Отметим, что краевая задача (1), (2) имеет решение $u(t, x) = H, H \in R$. Это означает, что плоский профиль обработки существует всегда. Без нарушения общности можно считать, что $H = 0$, так как уравнение (1) инвариантно относительно замены $u \rightarrow u + C$.

Лемма 1. ЛДО A имеет собственные значения

$$\lambda_{nk} = ain + b_1n^2 + b_2k^2 - (d_1n^4 + d_2k^4 + d_3n^2k^2),$$

где $n, k \in Z$ – кольцо целых чисел.

Из леммы 1, в частности, вытекает наличие СЗ $\lambda_{00} = 0$ при всех значениях параметров. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$u_t = Au, \quad (3)$$

где $u = u(t, x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (2).

Лемма 2. Решения краевой задачи (3), (2) устойчивы, если $b_1 < d_1$, $b_2 < d_2$. В задаче об устойчивости нулевого решения краевой задачи (1), (2) могут реализоваться 3 критических случая, а также близкие к ним.

В работах [4–5] показано, что при потере устойчивости нулевого состояния равновесия у краевой задачи (1), (2) могут появиться (бифуркировать из состояния равновесия) устойчивые пространственно неоднородные решения, имеющие волновую структуру. Применительно к приложениям эти решения описывают те структуры, которые последнее время называют волновой нанорельефом.

Для исследования локальных бифуркаций в случаях, близких к критическим, использованы методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Здесь речь идет о методе интегральных (инвариантных) многообразий и нормальных форм. Подчеркнем, что критические случаи в задаче об устойчивости состояний равновесия для краевой задачи (1), (2) выделяются следующими условиями:

$$a) \ b_1 = d_1, b_2 < d_2; \quad b) \ b_1 < d_1, b_2 = d_2; \quad c) \ b_1 = d_1, b_2 = d_2.$$

Так, если $b_1 = d_1 + \gamma_1\varepsilon$, $b_2 = d_2 + \gamma_2\varepsilon$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in R$, а $0 \ll \varepsilon \ll 1$, задача о существовании пространственно неоднородных решений в окрестности состояния равновесия $u(t, x, y) = \text{const}$ может быть сведена к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (нормальной форме)

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= c_1|z_1(s)|^2 + c_2|z_2(s)|^2, \\ z_1'(s) &= \gamma_1 z_1(s) + z_1(s)(a_{11}|z_1(s)|^2 + a_{12}|z_2(s)|^2), \\ z_2'(s) &= \gamma_2 z_2(s) + z_2(s)(a_{21}|z_1(s)|^2 + a_{22}|z_2(s)|^2), \end{aligned}$$

где $a_{jk} \in C$, $z_j(s) \in C$, $j = 1, 2$ при всех $s = \varepsilon t$.

Аналогичные задачи могут быть рассмотрены в рамках второй модели эрозии поверхности при ионной бомбардировке. Эта модель была предложена в работе [6] (см. также [7]) и носит название нелокального уравнения эрозии. В простейшем варианте соответствующее уравнение имеет вид

$$u_t = au_{xx} - cw_x + (u - w) + b_1(u - w)w_x + b_2(w_x)^2 + b_3w_x^2(u - w), \quad (4)$$

где $a > 0$, $c, b_1, b_2, b_3 \in R$, $u = u(t, x)$, $w = w(t, x) = u(t, x - h)$, $h > 0$. Нелинейное уравнение (4) входит в класс дифференциальных уравнений с преобразованным аргументом. Такие уравнения встречаются также в некоторых разделах нелинейной оптики. Нелокальное уравнение эрозии призвано уточнить некоторые

моменты при описании формирования наноструктур и дополняет уравнение Бредли–Харпера. В работах [8–9] для уравнения (4) была рассмотрена периодическая краевая задача т. е.

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (5)$$

Для эволюционной периодической краевой задачи (4), (5) был исследован тот же круг вопросов, который изучается и для краевой задачи (1), (2). В частности, рассмотрены некоторые локальные бифуркации от состояний равновесия при смене ими устойчивости.

Работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательской работы Центра коллективного пользования научным оборудованием “Диагностика микро- и наноструктур” при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, а также при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт №МК-2298.2013.1).

Литература

- [1] Sigmund P. Sputtering by ion bombardement. Theoretical concept. Sputtering by penticle bombardement // Berlin.Springer-Verlag. 1981.
- [2] Bradley R. M., Harper J. M. Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vac. Sci. Technol. 1988. V. A6. – P. 2390–2395.
- [3] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. 2010. Т.1., №2. – С. 151–158.
- [4] Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С. Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки // Вестник Удмуртского ун-та. 2011. В. 4. – С. 86–99.
- [5] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. – С. 930–945.
- [6] Рудый А. С., Бачурин В. И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Серия физическая. 2008. Т. 72, № 5. – С. 624–629.
- [7] Рудый А. С., Куликов А. Н., Метлицкая А. В. Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении поверхности ионной бомбардировкой // Микроэлектроника. 2011. Т. 40, № 2. – С. 109–118.
- [8] Куликов Д. А., Рудый А. С. Формирование волнового нанорельефа при распылении поверхности ионной бомбардировкой. Нелокальная модель эрозии // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, №5. – С. 39–48.
- [9] Куликов Д. А. Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа // Динамические системы. 2012. Т. 2(30), № 3–4. – С. 259–272.

ЭВОЛЮЦИЯ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ТРЁХ ВЯЗКИХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

Лемешкова Е. Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск

e-mail: lena_lemeshkova@mail.ru

Lemeshkova E. N. Evolution of the joint motion of the three viscous heat-conducting liquids in a flat layer. The joint unidirectional motion of three viscous liquids under the influence of thermocapillarity forces and pressure difference has been researched. An exact stationary solution of the problem has been found. The solution of the non – stationary problem has been obtained in the form of final analytical formulas in the image using the method of Laplace transformation. By the numerical inversion of Laplace transformation the evolution of the velocity fields and of the temperature perturbation to the stationary regime for specific liquids has been obtained.

Исследовано совместное однонаправленное движение трёх вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления. Найдено точное стационарное решение задачи. Решение нестационарной задачи получено в виде конечных аналитических формул методом преобразования Лапласа в изображениях. Путём численного обращения преобразования Лапласа получена эволюция полей скоростей и возмущений температур к стационарному режиму для конкретных жидких сред.

1. Постановка задачи. Предположим, что имеются три слоя вязких несжимаемых жидкостей толщины с границами раздела $y = 0$, $y = l_2$ и твёрдыми неподвижными стенками $y = -l_1, l_3$. Движение в слоях описывается системой уравнений вязких теплопроводных жидкостей в отсутствии внешних сил ($j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} + \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j &= \nu_j \Delta \mathbf{u}_j, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0, \\ \frac{d\Theta_j}{dt} &= \chi_j \Delta \Theta_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{u}_j, p_j – вектор скорости и давление; Θ_j – отклонение от среднего значения температуры; ρ_j – плотность; ν_j – кинематическая вязкость; χ_j – теплопроводность, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_j \cdot \nabla$. Будем считать движение однонаправленным, так что $\mathbf{u}_j = (u_j(y, t), 0, 0)$. Тогда давление в каждой из жидкостей представимо в виде $p_j = \rho_j f_j(t)x + \alpha_j(t)$ с произвольными f_j, α_j , а температура – $\Theta_j = -A_j x + T_j(y, t)$ с постоянными A_j . Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела линейно зависит от температуры: $\sigma_j(\Theta) = \sigma_j^0 - \alpha_j(\Theta - \Theta_j^0)$, $\alpha_j, \sigma_j^0, \Theta_j^0 = \text{const} > 0$, $j = 1, 2$. После подстановки в уравнения (1) функции $u_j(y, t), T_j(y, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy} - f_j(t), \quad (2)$$

$$T_{jt} = \chi_j T_{jyy} + A_j u_j. \quad (3)$$

Условия непрерывности скоростей и температур на поверхностях раздела (в общем виде условия на поверхности раздела приведены в [1, с. 31]) дают равенства

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_2(l_2, t) = u_3(l_2, t), \quad (4)$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad T_2(l_2, t) = T_3(l_2, t). \quad (5)$$

Кроме того, на них равны потоки тепла

$$k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t), \quad k_2 T_{2y}(l_2, t) = k_3 T_{3y}(l_2, t), \quad (6)$$

и имеется скачок касательных напряжений

$$\mu_2 u_{2y}(0, t) - \mu_1 u_{1y}(0, t) = A \alpha_1, \quad \mu_3 u_{3y}(l_2, t) - \mu_2 u_{2y}(l_2, t) = A \alpha_2, \quad (7)$$

где k_j — коэффициенты теплопроводностей, $\mu_j = \nu_j \rho_j$ — динамические вязкости. В уравнении (3) и граничном условии (7) $A \equiv A_1 = A_2 = A_3$ (это следствие равенства температур при $y = 0$ и $y = l_2$, см. (5)). Условия для нормальных напряжений сводятся к равенству давлений в жидкостях, а кинематические условия при $y = 0, y = l_2$ выполняются тождественно.

Так как стенки $y = -l_1, y = l_3$ твёрдые и неподвижные, то условия прилипания запишутся в виде

$$u_1(-l_1, t) = 0, \quad u_3(l_3, t) = 0, \quad (8)$$

кроме того считаем, что на них применен только постоянный градиент температуры, т. е.

$$T_1(-l_1, t) = 0, \quad T_3(l_3, t) = 0. \quad (9)$$

Далее предполагается, что движение возникает под действием градиента давления и термокапиллярных сил из состояния покоя, поэтому

$$u_j(y, 0) = 0, \quad (10)$$

$$T_j(y, 0) = 0. \quad (11)$$

Видно, что уравнения (2)—(11) образуют две последовательно решаемые задачи для скоростей u_j и возмущений температур T_j .

Замечание 1. Рассматриваемое решение уравнений (1) является инвариантным относительно однопараметрической подгруппы непрерывных преобразований, соответствующей оператору $\partial/\partial x + \rho f(t)\partial/\partial p - A\partial/\partial \Theta$.

2. Решение нестационарной задачи методом преобразования Лапласа. Применим преобразование Лапласа к задаче (2)—(9). Учитывая начальные условия (10), (11), получим для изображений скоростей $\hat{U}_j(y, p)$ и возмущений температур $\hat{T}_j(y, p)$ уравнения

$$p\hat{U}_j(y, p) = \nu_j \hat{U}_{jyy}(y, p) - F_j(p), \quad p\hat{T}_j(y, p) = \chi_j \hat{T}_{jpp}(y, p) + A\hat{U}(y, p). \quad (12)$$

К (12) добавляются преобразованные условия (4)–(9)

$$\mu_2 \hat{U}_{2y}(0, p) - \mu_1 \hat{U}_{1y}(0, p) = A\alpha_1/p, \quad (13)$$

$$\mu_3 \hat{U}_{3y}(l_2, p) - \mu_2 \hat{U}_{2y}(l_2, p) = A\alpha_2/p, \quad (14)$$

$$\hat{U}_1(0, p) = \hat{U}_2(0, p), \quad \hat{U}_2(l_2, p) = \hat{U}_3(l_2, p), \quad (15)$$

$$\hat{T}_1(0, p) = \hat{T}_2(0, p), \quad \hat{T}_2(l_2, p) = \hat{T}_3(l_2, p), \quad (16)$$

$$\hat{U}_1(-l_1, p) = 0, \quad \hat{U}_3(l_3, p) = 0, \quad (17)$$

$$\hat{T}_1(-l_1, p) = 0, \quad \hat{T}_3(l_3, p) = 0, \quad (18)$$

$$k_1 \hat{T}_{1y}(-l_1, p) = k_2 \hat{T}_{2y}(-l_1, p), \quad k_2 \hat{T}_{2y}(0, p) = k_3 \hat{T}_{3y}(0, p). \quad (19)$$

Общее решение первого уравнения (12), $j = 1, 2, 3$ имеет вид

$$\hat{U}_j = C_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}}(y + l_1) + C_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}}(y + l_1) - \frac{F_j}{p}, \quad (20)$$

второго

$$\hat{T}_j(y, p) = \hat{C}_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + \hat{C}_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + \hat{T}_{jr}, \quad (21)$$

где

$$\hat{T}_{jr} = \frac{A}{\sqrt{p\chi_j}} \int_{\Omega_j} \hat{U}_j(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}}(z - y) dz$$

есть частное решение.

Постоянные $C_j^1, C_j^2, \hat{C}_j^1, \hat{C}_j^2$ определяются из граничных условий (13)–(19), и получим

$$\bar{U}_1(\xi, \bar{p}) = \frac{N\bar{F}_1(\bar{p})}{\bar{p}} \left[C_1^1 \operatorname{sh} \sqrt{\bar{p}}(\xi + 1) + \operatorname{ch} \sqrt{\bar{p}}(\xi + 1) - 1 \right] + \left[\tilde{C}_1^1 \operatorname{sh} \sqrt{\bar{p}}\xi + \tilde{C}_1^2 \operatorname{ch} \sqrt{\bar{p}}\xi \right];$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_2(\xi, \bar{p}) = \frac{N\bar{F}_1(\bar{p})}{\bar{p}} \left[C_2^1 \operatorname{sh} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{p}}(\xi + 1) + C_2^2 \operatorname{ch} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{p}}(\xi + 1) - \bar{\rho}_1 \right] + \\ + \left[\tilde{C}_2^1 \operatorname{sh} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{p}}\xi + \tilde{C}_2^2 \operatorname{ch} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{p}}\xi \right]; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_3(\xi, \bar{p}) = \frac{N\bar{F}_1(\bar{p})}{\bar{p}} \left[C_3^1 \operatorname{sh} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{p}}(\xi + 1) + C_3^2 \operatorname{ch} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{p}}(\xi + 1) - \bar{\rho}_2 \right] + \\ + \left[\tilde{C}_3^1 \operatorname{sh} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{p}}\xi + \tilde{C}_3^2 \operatorname{ch} \sqrt{\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{p}}\xi \right], \end{aligned}$$

где $\xi = y/l_1, \bar{p} = pl_1^2/\nu_1, \bar{\nu}_1 = \nu_1/\nu_2, \bar{\nu}_2 = \nu_2/\nu_3, N = f_1^0 l_1 l_3^2 / 2\nu_1^2$ — безразмерный градиент давления.

В силу громоздкости выражений, представления для возмущений температур в изображениях и постоянных $C_j^1, C_j^2, \hat{C}_j^1, \hat{C}_j^2$ не приводятся.

Путем численного обращения преобразования Лапласа можно доказать предельные равенства $\lim_{p \rightarrow 0} p \hat{T}_j(y, p) = \bar{T}_j^0(y)$ и $\lim_{p \rightarrow 0} p \hat{U}_j(y, p) = \bar{u}_j^0(y)$, где $\bar{T}_j^0(y), \bar{u}_j^0(y)$ — стационарные распределения [2], и показать, что если преобладают термокапиллярные силы, то имеем почти линейный профиль скоростей

– течение Куэтта. В случае, когда главными становятся градиенты давления в слоях, то профили являются параболическими – течение Пуазейля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 11-01-00283 и интеграционного проекта СО РАН № 38.

Литература

- [1] Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. – Новосибирск: Наука, 2000. – 280 с.
- [2] Лемешкова Е. Н. Стационарное течение трёх жидкостей в плоском слое под действием термокапиллярных сил и перепада давления // Журнал сибирского федерального университета. Математика и физика, 2012 № 5 (1). – С. 91–96.

УДК 517.988.67

AMS Class 37G05, 34C23

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ СУЩЕСТВОВАНИИ ЖОРДАНОВОЙ ЦЕПОЧКИ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Логинов Б. В., Русак Ю. Б., Ким-Тян Л. Р.
УлГТУ, Канберра Университет, НИТУ МИСИС
e-mail: bvllbv@yandex.ru, irousak@gmail.com, kim-tyan@yandex.ru

Loginov B. V., Rousak Yu. B., Kim-Tyan L. R. The normal forms of differential equations with degenerated matrix at the derivative at the existence of the maximal length Jordan chain. Standard methods of normal forms construction is adapted for degenerated differential equations in \mathbb{R}^n of the forms $Ax' = B(\mu)x + R(x, \mu)$, $\|R(x, \mu)\| = o(\|x\|)$ in the case of the existence of maximal length Jordan chain. For $n = 2, 3, 4$ examples are given. Some of indicated normal forms are obtained for non autonomous systems at the usage of determined in the article differential Jordan chains.

Стандартная методика построения нормальных форм адаптирована для вырожденных дифференциальных уравнений в \mathbb{R}^n вида $Ax' = B(\mu)x + R(x, \mu)$, $\|R(x, \mu)\| = o(\|x\|)$ в случае существования жордановой цепочки максимальной длины. Для $n = 2, 3, 4$ приведены примеры. Некоторые из приведенных нормальных форм получены в случае неавтономных систем при использовании определяемых в работе дифференциальных жордановых цепочек.

Введение. В n -мерных пространствах E_1, E_2 рассматриваются диффе-

ренциальные уравнения (ДУ) вида

$$Ax' = F(x, \mu), \quad F(0, \mu) = 0 \quad (1)$$

с вырожденным линейным оператором A при производной, $\dim N(A) = 1$, $N(A) = \varphi^{(1)}$ и достаточно гладкой нелинейностью

$$Ax' = B(\mu)x + R(x, \mu), \quad \|R(x, \mu)\| = o(\|x\|). \quad (2)$$

Известна роль обобщенной жордановой структуры (ОЖС) в задачах теории ветвления [1] и качественной теории ОДУ [2,3]. Следуя [1], определим B -жорданову цепочку (B -ЖЦ) $\{\varphi^{(k)}\}_1^p$ нуля $\varphi = \varphi^{(1)}$ оператора A соотношениями

$$A\varphi^{(k+1)} = B\varphi^{(k)}, \quad \langle B\varphi^{(k)}, \psi^{(1)} \rangle = 0, \quad k = \overline{1, p-1}; \quad \langle B\varphi^{(p)}, \psi^{(1)} \rangle = 1 \quad (3)$$

B -ЖЦ оператора A максимальна, если $p = n$.

Целью работы является развитие методики построения нормальных форм для вырожденных систем ДУ вида (1). Для сокращения объема работы опущены результаты для систем с максимальной ЖЦ длины четыре и максимальной равномерной дифференциальной цепочкой длины три. Полученные результаты соответствуют плану проекта РФФИ №13-01-00188а.

1. Нормальные формы для вырожденных автономных дифференциальных уравнений зависящих от параметров. Общая теория при возмущениях, не меняющих жорданову структуру.

Определение 1.1. Назовем оператор-функцию $B(\mu)$ A -деформацией $B_0 = B(0)$, если для любого малого μ оператор – функция $A - \varepsilon B(\mu)$ имеет ту же жорданову структуру что и $A - \varepsilon B_0$.

Всюду далее оператор-функция $A - \varepsilon B_0$ имеет максимальную жорданову цепочку $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}$, т. е. $p = n$.

Лемма 1.1. Если оператор-функция $A - \varepsilon B_0$ имеет максимальную жорданову цепочку, то оператор B_0 обратим.

Доказательство. Выбирая базис в пространстве E_1 в виде элементов жордановой цепочки $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ и предполагая, что $\xi_1 B_0 \varphi^{(1)} + \dots + \xi_{n-1} B_0 \varphi^{(n-1)} + \xi_n B_0 \varphi^{(n)} = 0$, согласно условию (3), находим, что $\xi_n = 0$. Но тогда $\xi_1 A \varphi^{(2)} + \dots + \xi_{n-1} A \varphi^{(n)} = 0$, т. е. $\xi_1 \varphi^{(2)} + \dots + \xi_{n-1} \varphi^{(n)} = \lambda \varphi^{(1)}$. Так как $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ образует базис пространства $\xi_1 = 0, \dots, \xi_{n-1} = 0$.

Следствие 1.1. Если $B(\mu)$ A -деформация B_0 , то уравнение (2) можно записать в виде

$$A(\mu)x' = x + R_1(x, \mu), \quad (4)$$

где матрица оператора $A(\mu) = B^{-1}(\mu)A$ имеет вид $[A(\mu)] = [C(\mu)]J[C(\mu)]^{-1}$. Здесь матрица $[C(\mu)]$ образована столбцами $[\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}(\mu), \dots, \varphi^{(n)}(\mu)]$, а J – жорданова клетка.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $[C(\mu)]^{-1}[B^{-1}(\mu)A][C(\mu)]$, примененную к вектору $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ $[C(\mu)]^{-1}[B^{-1}(\mu)A][C(\mu)]e_i = [C(\mu)]^{-1}[B^{-1}(\mu)A]\varphi^{(i)}(\mu) = [C(\mu)]^{-1}\varphi^{(i-1)}(\mu) = e_{i-1}$, если $i > 1$. Если $i = 1$, то $[C(\mu)]^{-1}[B^{-1}(\mu)A][C(\mu)]e_1 = 0$. Таким образом, $[C(\mu)]^{-1}[B^{-1}(\mu)A][C(\mu)] = J$.

Лемма 1.2. $[C(\mu)]$ – деформация матрицы E , у которой первый столбец имеет вид $[C(\mu)]e_1 = a(\mu)\varphi$, $a(\mu) \neq 0$, $a(0) = 1$ определяет оператор-функцию $B(\mu)$ – A -деформацию B_0 – с точностью до деформации нулевого вектора $X(\mu)$, $X(0) = 0$.

Действительно, пусть матрица $[C(\mu)]$ такова, что $[C(0)] = [\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n)}]$. Тогда при достаточно малых μ она не вырождена, и векторы $\varphi^{(i)}(\mu) = [C(\mu)]e_i$ образуют базис пространства E_1 . Зададим отображение $B(\mu)$ формулами, умножив предварительно на $1/a(\mu)$: $B(\mu)\varphi^{(i)}(\mu) = A\varphi^{(i+1)}(\mu)$ при $i < n$, $B(\mu)\varphi^{(n)}(\mu) = B(0)\varphi^{(p)} + X(\mu)$, где $X(\mu)$ произвольная деформация нулевого вектора. Оператор-функция $A - \varepsilon B(\mu)$ имеет максимальную жорданову цепочку $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}(\mu), \dots, \varphi^{(n)}(\mu)$.

Далее вместо операторов будем рассматривать их матрицы в каком-нибудь базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Определение 1.2. Назовем $B(\mu)$ версальной A -деформацией $B_0 = B(0)$, если любая A -деформация $B_0 - \beta(\nu)$ – может быть получена из $B(\mu)$ заменой параметра, т. е. существуют дифференцируемое отображение $\mu = \kappa(\nu)$, $\kappa(0) = 0$ и деформация единичной матрицы $[S(\nu)]$, такие что

$$[\beta^{-1}(\nu)A] = [S(\nu)][B^{-1}(\kappa(\nu))A][S(\nu)]^{-1} \quad (5)$$

Замечание 1.1. Из формулы (5) вытекает, что $\varphi^{(1)}$ является собственным вектором матрицы $[S(\nu)]$: $A\varphi^{(1)} = 0 \Rightarrow A[S(\nu)]^{-1}\varphi^{(1)} = 0 \Rightarrow [S(\nu)]^{-1}\varphi^{(1)} = \lambda\varphi^{(1)}$.

Лемма 1.3. Пусть W подгруппа группы $GL(n, R)$ – обратимых матриц, растягивающих вектор φ ($\forall S \in W : S\varphi = \lambda\varphi, \lambda \neq 0$) и E_φ – подпространство $\mathfrak{gl}(n, R)$ всех матриц, для которых φ является собственным вектором. Через $\gamma_W(B)$ обозначим орбиту матрицы B под действием группы W : $\gamma_W(B) = \{SBS^{-1}, S \in W\}$. Тогда

$$T_B(\gamma_W(B)) = \text{Im}(L_B|E_\varphi), \quad (6)$$

где $T_B(\gamma_W(B))$ – касательное пространство к орбите $\gamma_W(B)$ в точке B и $L_B|E_\varphi$ отображение определяемое формулой $[\nu, B]$, где $\nu \in E_\varphi$, $L_B = [\nu, B]$ – коммутатор ν и B (скобка Ли).

Доказательство. Матрица S принадлежит W при S близких к E тогда и только тогда, когда $S = E + u$, $u \in E_\varphi$ мало, матрица S обратима $S\varphi = (1 + \mu)\varphi$, $1 + \mu \neq 0$. Тогда $(E + \varepsilon u)B(E + \varepsilon u)^{-1} = (E + \varepsilon u)B(E - \varepsilon u + \dots) = B + \varepsilon[u, B] + \dots$, что доказывает (6)

Замечание 1.2. $\text{codim}(\gamma_W(B)) = \dim(Z_B \cap E_\varphi) + \text{codim}(E_\varphi)$, где $Z_B = \ker L_B$ – централизатор матрицы B .

Действительно, $\text{codim}(\gamma_W(B)) = \dim \mathfrak{gl}(n, R) - \dim(\gamma_W(B)) = \dim \mathfrak{gl}(n, R) - \dim \text{Im}(L_B|E_\varphi)$, но $\dim \text{Im}(L_B|E_\varphi) = \dim E_\varphi - \dim \ker(L_B|E_\varphi) = \dim E_\varphi - \dim(Z_B \cap E_\varphi)$. Следовательно, $\text{codim}(\gamma_W(B)) = \dim \mathfrak{gl}(n, R) - \dim E_\varphi + \dim(Z_B \cap E_\varphi) = \dim(Z_B \cap E_\varphi) + \text{codim}(E_\varphi)$.

Следствие 1.2. Если V многообразие принадлежащее E_φ , проходящее через нулевую матрицу и трансверсальное к $Z_B \cap E_\varphi$ в нуле, то $\text{Im} L_B(T_0V) =$

$= T_B(\gamma_W(B))$, т. е. $L_B(T_0V) = T_B(\gamma_W(B))$. Здесь T_0V – касательное многообразие к V в нуле.

Доказательство. В силу трансверсальности, $\forall u \in E_\varphi \exists u_1 \in T_0V$ и $u_2 \in T_0(Z_B \cap E_\varphi)$, такие что $u = u_1 + u_2 \Rightarrow L_B(u) = L_B(u_1 + u_2) = L_B(u_1)$ и так как $u_2 \in Z_B$, $\text{Im}(L_B|T_0V) = \text{Im}(L_B|E_\varphi) = T_B(\gamma_W(B))$ ю

Замечание 1.3. Если $B = J$, то пространство E_φ состоит из матриц, у которых первый столбец имеет вид $(a, 0, \dots, 0)$ и, таким образом, $\dim E_\varphi = n^2 - n + 1$. С другой стороны, известно [2], что Z_J является линейной оболочкой матриц $E, J, J^2, \dots, J^{n-1}$, каждая из которых принадлежит E_φ и поэтому $\dim T_J(\gamma_W(J)) = n^2 - 2n + 1$. В качестве V можно выбрать подпространство матриц v вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & v_{n-11} & \dots & v_{n-1n-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Таким образом, пространство $T_J(\gamma_W(J))$ состоит из матриц вида $vJ - Jv$.

Действительно, по следствию 1.2, $\text{Im}(L_J|T_0V) = \text{Im}(L_J|E_\varphi) = T_J(\gamma_W(J))$, где V подмногообразие E_φ проходящее через нулевую матрицу и трансверсальное к $Z_J \cap E_\varphi$ в нуле.

Лемма 1.4. Пусть $B : \Lambda \rightarrow \text{gl}(n, R) \in C^1$, где Λ – окрестность нуля в \mathbb{R}^k , $B = B(\lambda)$, $B(0) = B_0$ трансверсально к $\gamma_W(B_0)$ в точке $\lambda = 0$ и $k = \text{codim}(\gamma_W(B_0))$, а V – многообразие, принадлежащее E_φ проходящее через нулевую матрицу, трансверсальное к $Z_B \cap E_\varphi$ в нуле и, такое что $\dim V = \dim \gamma_W(B_0)$. Тогда отображение $\Phi(v, \lambda) : V \times \Lambda \rightarrow \text{gl}(n, R)$, определяемое формулой $\Phi(v, \lambda) = (E + v)B(\lambda)(E + v)^{-1}$, задает локальный диффеоморфизм окрестности $(0, 0)$ в $V \times \Lambda$.

Доказательство. Производная отображения $\Phi(v, \lambda)$ по v в точке $(0, 0)$ $(E + \varepsilon v)B(\lambda)(E + \varepsilon v)^{-1} = (E + \varepsilon v)B(\lambda)(E - \varepsilon v + \dots) = B(\lambda) + \varepsilon[v, B(\lambda)] + \dots$ равна $[\cdot, B]$ и согласно следствию 1.2 отображает касательное пространство к многообразию V на касательное пространство к $\gamma_W(B_0)$. Производная по λ в точке $(0, 0)$ дает $B'(0)$ – матрицу из касательного пространства к $B(\lambda)$. В силу трансверсальности V к $Z_B \cap E_\varphi$ в $(0, 0)$ производная от $\Phi(v, \lambda)$ в $(0, 0)$ отображает $V \times \Lambda$ на все пространство $\text{gl}(n, R)$, а так как, согласно равенствам $k = \text{codim}(\gamma_W(B_0))$ и $\dim V = \dim(\gamma_W(B_0))$, то $\dim V + \dim \Lambda = \dim \text{gl}(n, R)$ и это отображение является локальным диффеоморфизмом.

Лемма 1.5. Если $B = B_0^{-1}A$, U – подпространство E_φ , такое что $E_\varphi = (Z_B \cap E_\varphi) \oplus U$, то отображение $\Psi(u) : U \rightarrow \text{gl}(n, R)$, определяемое формулой $\Psi(u) = (E + u)B(E + u)^{-1}$ задает локальный диффеоморфизм окрестности нуля в U на окрестность B в $\gamma_W(B)$.

Доказательство. Как и в лемме 1.4 производная отображения $\Psi(u)$ равна $[\cdot, B]$ и, в силу равенства (6), отображает U на $T_B(\gamma_W(B))$. По построению она не имеет нулей в U и потому является изоморфизмом. Тогда $\Psi(u)$ – локальный диффеоморфизм.

Теорема 1.1. $B(\mu)$ является A -деформацией $B_0 = B(0)$ тогда и только тогда, когда $[B^{-1}(\mu)A]$ принадлежит подмногообразию $\gamma_W(B_0^{-1}A)$.

Необходимость. В силу следствия 1.1 матрица $[B^{-1}(\mu)A]$ представляется в виде $[C(\mu)]J[C(\mu)]^{-1}$ и соответственно $[B^{-1}(0)A] = [C(0)]J[C(0)]^{-1}$, т. е. $[B^{-1}(\mu)A] = [C(\mu)][C(0)]^{-1}[B_0^{-1}A][C(0)][C(\mu)]^{-1}$. При этом $[C(\mu)][C(0)]^{-1}\varphi = \lambda(\mu)\varphi$, $\lambda(\mu) \neq 0$ и, следовательно, $[B^{-1}(\mu)A]$ принадлежит подмногообразию $\gamma_W(B_0^{-1}A)$

Достаточность. Если $[B^{-1}(\mu)A]$ принадлежит подмногообразию $\gamma_W(B_0^{-1}A)$, то для любого μ $[B^{-1}(\mu)A] = [C(\mu)][B_0^{-1}A][C(\mu)]^{-1} = [C(\mu)][C(0)]^{-1} \times [B^{-1}(0)A][C(0)][C(\mu)]^{-1} = [S(\mu)]J[S(\mu)]^{-1}$, откуда по лемме 1.2, $B(\mu)$ является A -деформацией B_0 . Непрерывность (или дифференцируемость, если $B(\mu)$ дифференцируемо) $C(\mu)$ следует из леммы 1.5. При этом $C(\mu)$ имеет вид $E + u(\mu)$, где $u(\mu)$ принадлежит выбранному выше подпространству U .

Следствие 1.3. Любая A -деформация $B_0 = B(0)$, $-B(\mu)$, $-$ является версальной A -деформацией.

Действительно, пусть $\Delta(\nu)$ – другая A -деформация $B_0 = \Delta(0)$, т. е. существует $\mu = \kappa(\nu)$, такое что $[\Delta^{-1}(\nu)A] = [C(\nu)][B_0^{-1}A][C(\nu)]^{-1}$. Вводя функцию $\kappa(\nu)$, получаем $[\Delta^{-1}(\nu)A] = [C(\nu)][B(\kappa(\nu))^{-1}A][C(\nu)]^{-1}$.

Следствие 1.4. Если $B_0^{-1}A = J$, и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ – векторный параметр, то для того, чтобы $B(\mu)$ являлось версальной A -деформацией, необходимо, чтобы все $\partial B^{-1}(0)A/\partial \mu_i$ имели описываемый далее вид. Пусть U – произвольная матрица (7) размера $(n-1)^2$. Обозначим \check{U}_i – n -столбец вида $(u_{1i}, \dots, u_{n-1i}, 0)$, а \hat{U}_i – n -столбец вида $(0, u_{1i}, \dots, u_{n-1i})$. Тогда согласно описанию $T_J(\gamma_W(J))$ в замечании 1.3 матрицы, принадлежащие $T_J(\gamma_W(J))$ должны иметь вид $[0, -\check{U}_1, \hat{U}_1 - \check{U}_2, \dots, \hat{U}_{n-2} - \check{U}_{n-1}]$.

Замечание 1.4. Это условие не является достаточным.

Действительно, матрица $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ порождает матрицу третьего порядка $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не приводящуюся к единственной жордановой клетке, поскольку она имеет два разных собственных значения 0 и 1.

Теорема 1.2. Если $B_0^{-1}A = J$ и E_{is} матрица, у которой 1 стоит на месте (i, s) и нули на остальных местах, причем $s > i + 1$. Тогда, при малых ε матрица $J + \varepsilon E_{is}$ принадлежит $\gamma_W(J)$, а матрица E_{is} принадлежит касательному подпространству $T_J(\gamma_W(J))$.

Действительно, в стандартном базисе матрица $J + \varepsilon E_{is}$ действует на нем следующим образом: $0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow \dots \leftarrow e_{s-1}; e_{s-1} + \varepsilon e_i \leftarrow e_s; \dots; e_{n-1} \leftarrow e_n$, а в базисе $\varphi_1 = e_1; \dots; \varphi_{s-1} = e_{s-1}; \varphi_s = e_s - \varepsilon e_{i+1}; \dots; \varphi_{2s-i-2} = e_{2s-i-2} - \varepsilon e_{s-1}; \varphi_{2s-i-1} = e_{2s-i-1} - \varepsilon e_s + \varepsilon^2 e_{i+1}; \dots$ превращается в жорданову клетку.

Замечание 1.5. Любая матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

принадлежит $\gamma_W(J)$.

Действительно, она имеет одно собственное значение – ноль и один соб-

ственный вектор $-e_1$, следовательно, она приводится к жордановой клетке.

Определение 1.3. Назовем A -деформацию $B_0 = B(0), -\Delta(\nu), -$ индуцированной из A -деформации $B_0, -B(\mu), -$ с помощью отображения $\mu = \kappa(\nu)$, если $[\Delta^{-1}(\nu)A] = [B^{-1}(\kappa(\nu))A]$.

Определение 1.4. Назовем A -деформацию $B_0 = B(0), -B(\mu), -$ порождающей, если любая другая A -деформация $B_0, -\Delta(\nu), -$ индуцируется из неё с помощью некоторого отображения $\mu = \kappa(\nu)$.

Теорема 1.3. Если размерность касательного пространства к орбите $B^{-1}(\mu)A$ в точке $\mu = 0$ равна размерности подпространства U , введенного в лемме 1.5, то деформация $B_0^{-1}A$ является порождающей.

Доказательство. Так как размерность касательного пространства к орбите $B^{-1}(0)A$ равна размерности подпространства U , то по лемме 1.5 отображение $B^{-1}(\mu)A$ задает локальный диффеоморфизм окрестности нуля в пространстве параметров μ на окрестность $B_0^{-1}A$ в орбите $\gamma_W(B_0^{-1}A)$. Обозначим через Γ обратное отображение $\mu = \Gamma(L)$, $L = [\cdot, B_0^{-1}A]$, такое что в окрестности $\mu = 0$, $\mu \equiv \Gamma(B^{-1}(\mu)A)$. Тогда, если $\Delta(\nu)$ – произвольная A -деформация $B_0 = B(0)$, то построим отображение $\mu = \kappa(\nu)$ в виде $\mu = \Gamma(\Delta^{-1}(\nu)A)$. Получаем $[\Delta^{-1}(\nu)A] = [B^{-1}(\kappa(\nu))A]$

Если возмущение $B^{-1}(\mu)A$ оператор-функции $B_0^{-1}A$ известно, то построить соответствующее возмущение $B(\mu)$ оператора B_0 можно следующим образом.

Пусть $B^{-1}(\mu)A = B_0^{-1}A + S(\mu)$, или $A = B(\mu)(B_0^{-1}A + S(\mu))$. Так как возмущение $B_0^{-1}A + S(\mu)$ соответствует некоторой A -деформации оператора B_0 , то существует максимальная жорданова цепочка $\varphi^{(1)}(\mu), \varphi^{(2)}(\mu), \dots, \varphi^{(n)}(\mu)$, для которой $(B_0^{-1}A + S(\mu))\varphi^{(1)} = 0$, $\varphi^{(i)}(\mu) = (B_0^{-1}A + S(\mu))\varphi^{(i+1)}(\mu)$ ($1 < i < n$). Поэтому, если $\gamma(\mu)$ – функционал, определяемый условиями $\langle \varphi^{(1)}, \gamma(\mu) \rangle = 1$, $\langle \varphi^{(k)}, \gamma(\mu) \rangle = 0$, $k = 2, \dots, n$, то оператор $D(\mu) = B_0^{-1}A + S(\mu) + \langle \cdot, \gamma(\mu) \rangle \varphi^{(n)}(\mu)$, – как регуляризатор Шмидта $B^{-1}(\mu)A$, – обратим [1]. Тогда $A = B(\mu)[D(\mu) - \langle \cdot, \gamma(\mu) \rangle \varphi^{(n)}(\mu)] = B(\mu)D(\mu) - \langle \cdot, \gamma(\mu) \rangle B(\mu)\varphi^{(n)}(\mu)$, откуда по лемме 1.2 $B(\mu) = AD^{-1}(\mu) + \langle D^{-1}(\mu)\cdot, \gamma(\mu) \rangle (B_0\varphi^{(n)}(0) + X(\mu))$.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

2. Нормальные формы и бифуркации для случая максимальной жордановой цепочки малой длины.

А. Поскольку $\|R(x, \mu)\| = o(\|x\|)$, в случае максимальной жордановой цепочки длины 2, а также и в непараметрическом случае вырожденное ДУ применением редукции Ляпунова–Шмидта [1], в базисе $\varphi^{(1)}(\mu), \varphi^{(2)}(\mu)$ приводится к системе, $x'_2 = x_1 + f(x_1, x_2, \mu)$, $0 = x_2 + g(x_1, x_2, \mu)$, где функции f и g удовлетворяют условиям $f(0, 0, \mu) \equiv 0$, $g(0, 0, \mu) \equiv 0$ и $Df(0, 0, \mu) \equiv 0$, $Dg(0, 0, \mu) \equiv 0$, которая после замены переменных $y_1 = x_1 + f(x_1, x_2)$, $y_2 = x_2$ приводится к виду $y'_2 = y_1$, $y_2 = h(y_1, y_2, \mu)$. Если функция $h(y_1, y_2, \mu)$ гладкая (аналитическая) и не зависит от y_1 , то в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ будет единственным решением этой системы. В общем случае зависимости функции $h(y_1, y_2, \mu)$ от y_1 теорема о неявной функции дает $y_2 = G(y_1, \mu)$, $G(0, \mu) = 0 =$

$= G'(0, \mu)$ и, таким образом,

$$y_2' = y_1, \quad y_2 = y_1^2 h(y_1, \mu), \quad |h(y_1, \mu)| = o(|y_1| + |\mu|). \quad (8)$$

В простейшем случае $h(y_1, \mu) = y_1 + \mu$ получаем нормальную форму бифуркации потери единственности $y_2' = y_1, y_2 = y_1^2(y_1 + \mu)$. При $\mu = 0, y_1(t) \equiv 0, y_2(t) \equiv 0$ является единственным решением при нулевых начальных условиях. При $\mu \neq 0$ эта система приводится к ДУ: $(3y_1^2 + 2\mu y_1)y_1' = y_1$ или при $y_1 \neq 0, -$ к $(3y_1 + 2\mu)y_1' = 1$. Замена $z = 3y_1 + 2\mu, z' = 3y_1$ дает уравнение $zz' = 3$, имеющее гладкое решение в окрестности точки $t = 0$ с начальным условием $z(0) = 2\mu$. Таким образом, единственность нарушается.

Теорема 2.1. Для того чтобы в системе (8) в точке $\mu = 0$ происходила бифуркация “потери единственности” решения, начинающегося в точке $(0, 0)$, необходимо, а если $\partial h(0, 0)/\partial \mu \neq 0$, то и достаточно, чтобы $h(0, 0) = 0$.

Необходимость. Предположим противное: $h(0, 0) \neq 0$. Тогда в окрестности $(0, 0)$ $h(y_1, \mu) = A + y_1 h_1(y_1, \mu) + \mu h_2(y_1, \mu), A \neq 0$. Дифференцирование $y_2 = y_1^2 h_1(y_1, \mu)$ по t , с последующей заменой y_2' на y_1 и сокращением на y_1 приводит к уравнению не вырожденному в окрестности точки $y_1 = 0$ при малых μ

$$y_1' = [2A + 3y_1 h_1(y_1, \mu) + y_1^2 h_1'(y_1, \mu) + 2\mu h_2(y_1, \mu) + \mu y_1 h_2'(y_1, \mu)]^{-1}.$$

Таким образом, $\mu = 0$ является точкой бифуркации, так как при любом малом μ существует два малых решения системы (8), выходящих из точки $(0, 0)$.

Достаточность. Пусть выполнены условия: $h(0, 0) = 0, \partial h(0, 0)/\partial \mu \neq 0$. Тогда $h(y_1, \mu) = y_1 h_1(y_1, \mu) + \mu h_2(y_1, \mu)$, где $h_2(0, 0) \neq 0$, откуда $y_2 = y_1^3 h_1(y_1, \mu) + \mu y_1^2 h_2(y_1, \mu)$, т. е. при $\mu = 0$ $y_2 = y_1^3 h(y_1, 0) = y_1^3 h(y_1)$. Поэтому первое уравнение системы (8) приводится к виду: $[3y_1^2 h(y_1) + y_1^3 h'(y_1)]y_1' = y_1$. Это уравнение имеет только одно решение с начальным значением $y_1(0) = 0$, а именно $y_1(t) \equiv 0$.

Если же $\mu \neq 0$, то при малых y_1 и μ $y_2 = A(\mu)y_1^2 + y_1^3 h_3(y_1, \mu), A(\mu) \neq 0$. Подстановка в первое уравнение системы (8) при $y_1 \neq 0$ дает $[2A(\mu)y_1 + y_1^2 h_4(y_1, \mu)]y_1' = y_1 \Rightarrow y_1' = [2A(\mu)y_1 + y_1^2 h_4(y_1, \mu)]^{-1}$. Последнее уравнение имеет ненулевое решение с начальным условием $y_1(0) = 0$. Итак, $\mu = 0$ является точкой бифуркации.

В. В случае максимальной ЖЦ длины 3, подобно п. **А**, вырожденное ДУ, в базисе $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}(\mu), \varphi^{(3)}(\mu)$ приводится к виду

$$y_2' = y_1, \quad y_3' = y_2 + y_1^2 f_2(y_1, y_2, \mu), \quad y_3 = f_3(y_1, y_2, \mu). \quad (9)$$

Здесь f_3 удовлетворяет условиям $f_3(0, 0, \mu) \equiv 0$ и $Df_3(0, 0, \mu) \equiv 0$.

Рассмотрим частный случай системы (9)

$$y_2' = y_1, \quad y_3' = y_2, \quad y_3 = \mu y_1^2 + y_2^2 \quad (10)$$

и покажем, что $\mu = 0$ для этой системы является точкой бифуркации “изменения области существования решения”. Рассмотрим прежде систему (10) в проколотовой окрестности точки $\mu = 0, (\mu \neq 0)$. Эта система приводится к виду:

$$y_2' = y_1, \quad 2\mu y_1 y_1' + 2y_2 y_1 = y_2, \quad (11)$$

при $y_1 \neq 0$ эквивалентному системе (раздувание особенности [2])

$$y_2' = y_1^2, \quad 2\mu y_1' = y_2 - 2y_2 y_1. \quad (12)$$

Последняя по теореме существования и единственности имеет решение, начинающееся в любой точке (y_1^0, y_2^0) , $y_1^0 \neq 0$, окрестности $(0, 0)$. Для уточнения поведения решений в окрестности $y = 0$, $\mu = 0$ выполним ещё раз раздувание особенности [2], полагая $y_2 = uy_1^2$; $y_2' = u' \cdot y_1^2 + u \cdot 2y_1(1/2\mu)(y_2 - 2y_2 y_1) = u' \cdot y_1^2 + u \cdot y_1(1/\mu)(u \cdot y_1^2 - 2u \cdot y_1^3)$.

Подстановка в (12) дает систему:

$$u' = 1 - u \cdot (1/\mu)(u \cdot y_1 - 2u \cdot y_1^2), \quad 2\mu y_1' = u \cdot y_1^2 - 2u \cdot y_1^3, \quad (13)$$

для которой точка $(0, 0)$ является неособой. Её решения в малой окрестности $(0, 0)$ – “почти” параллельные прямые. Для исследования решения исходной системы вернемся назад к переменным $y_1, y_2 = u \cdot y_1^2$. При $\mu = 0$ система (10) примет вид $y_2' = y_1, y_3' = y_2, y_3 = y_2^2 \Rightarrow y_2' = y_1, 2y_1 y_2 = y_2$. При $y_2 \neq 0$ эти системы имеют решение: $y_1 = 1/2, y_2 = y_2^0 + t/2, y_3 = (y_2^0 + t/2)^2$.

Таким образом, в первом случае ($\mu \neq 0$) многообразии начальных значений, через которые проходят решения системы, было двумерным, а во втором – одномерным.

Замечание 2.1. Если в вырожденном ДУ с максимальной жордановой цепочкой длины 3 нелинейность системы не зависит от переменной y_1 , то оно не имеет решений в некоторой проколотой окрестности точки $y = 0$.

Действительно, система (9) тогда принимает вид $y_2' = y_1, y_3' = y_2, y_3 = f_3(y_2, \mu) \Rightarrow y_2' = y_1, f_3'(y_2, \mu)y_1 = y_2$ и так как $Df_3(0, \mu) \equiv 0$, то второе уравнение при $y_2 \neq 0$ сократится на y_2 , что дает $f_4(y_2, \mu)y_1 = 1$. Однако, в малом это уравнение удовлетворяться не может, т. е. $y \equiv 0$ является единственным малым решением системы.

Замечание 2.2. Последний результат для вырожденного уравнения с максимальной жордановой цепочкой длины четыре уже неверен, что показывает пример:

$$y_2' = y_1, \quad y_3' = y_2, \quad y_4' = y_3, \quad y_4 = y_2 \cdot y_3 \Rightarrow y_2' = y_1, \quad y_3' = y_2, \quad y_1 \cdot y_3 + y_2^2 = y_3.$$

Подстановка во второе уравнение исходной системы, даёт $y_2' = y_1, 2y_1 y_2(1 - y_1)^{-1} + y_2^2(1 - y_1)^{-2} y_1' = y_2$. Если $y_2 \neq 0$, то эта система принимает вид $y_2' = y_1, y_2 y_1' = (1 - y_1)^2 - 2y_1(1 - y_1)$. Такая система имеет решение, начинающееся в любой точке (y_1^0, y_2^0) , $y_2^0 \neq 0$.

Лемма 2.1 (достаточное условие возникновения бифуркации “изменения области существования решений”). Для того чтобы в системе (9) $\mu = 0$ была точкой бифуркации “изменения области существования решений” в окрестности точки $y = 0, \mu = 0$, достаточно чтобы функция $f_3(y_1, y_2, \mu)$ имела вид $h_1(y_2, \mu) + \mu h_2(y_1, y_2, \mu)$, где $\partial h_1(0, \mu)/\partial y_2 = 0, Dh_2(0, 0, \mu) = 0$ и $D(\partial h_2/\partial y_1)(0, 0, \mu) \neq 0$.

Действительно, если $\mu = 0$, то система (9) принимает вид: $y_2' = y_1, y_3' = y_2 + y_1^2 f_2(y_1, y_2, 0), y_3 = h_1(y_2, 0)$. Подставим третье уравнение во второе $y_1 \partial h_1(y_2, \mu)/\partial y_2 = y_2 + y_1^2 f_2(y_1, y_2, 0)$, откуда по теореме о неявной функции находим $y_2 = F(y_1)$. Таким образом, при $\mu = 0$ решение системы (9) может быть

только на кривой $(y_1, F(y_1))$. Если же $\mu \neq 0$, то второе уравнение системы (9) запишется в виде $(\partial h_1/\partial y_2)y_1 + \mu(\partial h_2/\partial y_2)y_1 + \mu(\partial h_2/\partial y_1)y'_1 = y_2 + y_1^2 f_2(y_1, y_2, \mu)$. Система $\mu(\partial h_2/\partial y_1)y'_1 = y_2 + y_1^2 f_2(y_1, y_2, \mu) - (\partial h_1/\partial y_2)y_1 - \mu(\partial h_2/\partial y_2)y_1$, $y'_2 = y_1$ при $\mu \neq 0$, имеет решение в окрестности точки $(0, 0)$ начинающееся в любой точке (y_1^0, y_2^0) , для которой $(\partial h_2/\partial y_1)(y_1^0, y_2^0, \mu) \neq 0$. Так как $(\partial h_2/\partial y_1)(0, 0, \mu) = 0$ и $D(\partial h_2/\partial y_1)(0, 0, \mu) \neq 0$, то по теореме о неявной функции множество решений уравнения $(\partial h_2/\partial y_1)(y_1^0, y_2^0, \mu) = 0$ одномерно, т. е. имеет место бифуркация “изменения области существования решений”.

3. Нормальные формы для вырожденных автономных дифференциальных уравнений в пространствах размерности 2,3,4 – непараметрический вариант.

Далее будут рассматриваться вырожденные ДУ

$$Ax' = F(x) \equiv Bx + R(x), \quad \|R(x)\| = o(\|x\|), \quad F(0) = 0. \quad (14)$$

При этом в размерностях 3 и 4 будет существенно использоваться техника работы [4]. Однако для сокращения объема работы результаты для размерности 4 опущены.

А. Максимальная жорданова цепочка длины два. Пусть $\dim E_1 = 2$ и элементы $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ образуют базис E_1 . Тогда, применением редукции Ляпунова–Шмидта, уравнение (14) приводится к системе:

$$x'_2 = x_1 + f(x_1, x_2), \quad 0 = x_2 + g(x_1, x_2), \quad (15)$$

где функции f и g удовлетворяют условиям: $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$ и $Df(0, 0) = 0$, $Dg(0, 0) = 0$.

Заменой переменных $y_1 = x_1 + f(x_1, x_2)$, $y_2 = x_2$ система (15) приводится к виду

$$y'_2 = y_1, \quad 0 = y_2 + h(y_1, y_2) \quad (16)$$

Если функция $h(y_1, y_2)$ аналитична и не зависит от y_1 , то в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ будет единственным решением системы (16). Если функция $h(y_1, y_2)$ зависит от y_1 , то в некоторой окрестности точки $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ по теореме о неявной функции

$$y_2 = G(y_1), \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 0. \quad (17)$$

Поэтому она может быть записана в виде: $y_2 = G(y_1) = y_1^2 H(y_1)$. График функции $G(y_1)$ в окрестности $(0, 0)$ плоскости y_1, y_2 назовем многообразием решений системы (16). Подставив $G(y_1)$ в первое уравнение системы (16), построим векторное поле на многообразии решений

$$(2y_1 H(y_1) + y_1^2 H'(y_1))y'_1 = y_1 \quad (18)$$

или

$$(2H(y_1) + y_1 H'(y_1))y'_1 = 1, \quad \text{при } y_1 \neq 0. \quad (19)$$

Если $H(0) \neq 0$, то уравнение (19) имеет решение $y_1 = f(t)$, $f(0) = 0$. В этом случае для исходного вырожденного уравнения нарушается единственность решений в точке $(0, 0)$. Если $H(0) = 0$, то $y_1 = 0$ является особой точкой для векторного поля на многообразии решений.

В. Максимальная жорданова цепочка длины три. При $\dim E_1 = 3$ уравнение (14) редуцируется к системе:

$$x'_2 = x_1 + f_1(x_1, x_2, x_3), \quad x'_3 = x_2 + f_2(x_1, x_2, x_3), \quad 0 = x_3 + f_3(x_1, x_2, x_3). \quad (20)$$

Замена переменных $y_1 = x_1 + f_1(x_1, x_2, x_3)$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ приводит систему (20) к виду

$$y'_2 = y_1, \quad y'_3 = y_2 + g_2(y_1, y_2, y_3), \quad 0 = y_3 + g_3(y_1, y_2, y_3), \quad (21)$$

где, как и прежде, $g_2(0, 0, 0) = 0$, $g_3(0, 0, 0) = 0$ и $Dg_2(0, 0, 0) = 0$, $Dg_3(0, 0, 0) = 0$. Для построения нормальной формы (21) определим, какие мономы второй степени функции $g_2(y_1, y_2, y_3)$ могут быть уничтожены подходящей заменой переменных

$$y_1 = z_1 + h_1(z_1, z_2, z_3), \quad y_2 = z_2 + h_2(z_2, z_3), \quad y_3 = z_3 + h_3(z_2, z_3). \quad (22)$$

Дифференцируя y_2, y_3 по t , $y'_2 = z'_2 + \partial h_2/\partial z_2 \cdot z'_2 + \partial h_2/\partial z_3 \cdot z'_3$, $y'_3 = z'_3 + \partial h_3/\partial z_2 \cdot z'_2 + \partial h_3/\partial z_3 \cdot z'_3$, и обозначая через H вектор-функцию $(h_2, h_3)^T$, запишем

$$\begin{pmatrix} y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = (I + DH) \begin{pmatrix} z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } DH = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial z_2} & \frac{\partial h_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial z_2} & \frac{\partial h_3}{\partial z_3} \end{pmatrix}, \quad \text{что даёт } \begin{pmatrix} z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix} = (I + DH)^{-1} \begin{pmatrix} y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = (I + DH)^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + g_2 \end{pmatrix} = (I + DH)^{-1} \begin{pmatrix} z_1 + h_1 \\ z_2 + h_2 + g_2 \end{pmatrix}.$$

Так как при малых значениях $Z : (I + DH)^{-1} = (I - DH) + O(\|Z\|^2)$, то система примет вид:

$$\begin{pmatrix} z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + h_1 \\ z_2 + h_2 + g_2 \end{pmatrix} - DH \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + o(\|Z\|^2). \quad (23)$$

Если мы рассмотрим однородные полиномы второй степени, то из (23) получим:

$$\partial h_2/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_2/\partial z_3 \cdot z_2 - h_1 = 0, \quad (24)$$

$$\partial h_3/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_3/\partial z_3 \cdot z_2 - h_2 = g_2^{(2)}. \quad (25)$$

Здесь $g_2^{(2)}$ – полином второй степени из струи функции g_2 . Поскольку h_1 произвольный полином второго порядка зависящий от переменных z_1, z_2, z_3 его выбор позволяет всегда удовлетворить уравнение (24). Таким образом, остается установить для каких многочленов $g_2^{(2)}$ можно (нельзя) подобрать многочлены h_2, h_3 , так чтобы удовлетворялось уравнение (25). Многочлены h_2, h_3 являются линейными комбинациями мономов: $z_2^2, z_3^2, z_2 \cdot z_3$, тогда как $g_2^{(2)}$ являются линейной комбинацией мономов: $z_2^2, z_3^2, z_2 \cdot z_3, z_1^2, z_1 \cdot z_2, z_1 \cdot z_3$. Подставляя возможные значения полиномов h_2, h_3 в левую часть (25), находим, что она может принимать следующие значения: $z_1 \cdot z_2, z_1 \cdot z_3, z_2^2, z_3^2, z_2 \cdot z_3$. Таким образом, только моном z_1^2 не может быть устранен заменой переменных вида (22).

Перейдем теперь к устранению мономов третьей степени. Повторяя предыдущие рассуждения, мы придем к системе

$$\partial h_2/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_2/\partial z_3 \cdot z_2 - h_1 = 0, \quad (26)$$

$$\partial h_3 / \partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_3 / \partial z_3 \cdot z_2 - h_2 = g_2^{(3)}, \quad (27)$$

в которой h_1, h_2, h_3 и $g_2^{(3)}$ – полиномы третьего порядка. Как и выше первое уравнение всегда можно удовлетворить подходящим выбором h_1 , поэтому рассмотрим второе уравнение. Возможные варианты для h_2, h_3 теперь: $z_2^3, z_3^3, z_2^2 \cdot z_3, z_3^2 \cdot z_2$, тогда как для $g_2^{(3)}$ это: $z_1^3, z_2^3, z_3^3, z_2^2 \cdot z_3, z_3^2 \cdot z_2, z_1^2 \cdot z_3, z_1^2 \cdot z_2, z_2^2 \cdot z_1, z_3^2 \cdot z_1, z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$. Нетрудно проверить, что мономы $z_1^3, z_1^2 \cdot z_2, z_1^2 \cdot z_3$ не уничтожаются при любом выборе h_2 и h_3 .

Рассмотрим теперь мономы степени n . Интерес представляет только уравнение:

$$\partial h_3 / \partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_3 / \partial z_3 \cdot z_2 - h_2 = g_2^{(n)}, \quad (28)$$

в котором h_2, h_3 и $g_2^{(n)}$ – полиномы n -го порядка. Возможные варианты для $g_2^{(n)}$ это: $z_1^n, z_1^{n-1}Q_1(z_2, z_3), z_1^{n-2}Q_2(z_2, z_3), \dots, z_1Q_{n-1}(z_2, z_3)$, где $Q_s(z_2, z_3)$ – моном степени s . Остальные варианты можно не рассматривать, так как они уничтожаются выбором h_2 . Так как z_1 входит в левую часть уравнения (28) в первой степени, то мономы: $z_1^n, z_1^{n-1}Q_1(z_2, z_3), z_1^{n-2}Q_2(z_2, z_3), \dots, z_1^2Q_{n-2}(z_2, z_3)$ не могут быть уничтожены никаким выбором h_2 и h_3 . С другой стороны, мономы $z_1Q_{n-1}(z_2, z_3)$ уничтожаются с помощью выбора: $h_3 = az_2Q_{n-1}(z_2, z_3), h_2 = bz_2z_3\partial Q_{n-1}/\partial z_3$.

Таким образом, для аналитической функции f система (20) приводится к нормальной форме:

$$z_2' = z_1, \quad z_3' = z_2 + z_1^2 f_2(z_1, z_2, z_3), \quad 0 = z_3 + f_3(z_1, z_2, z_3) \quad (29)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи системы (29):

1. Предположим, что функция f_3 зависит только от z_2 . Тогда второе уравнение (29) превращается в уравнение:

$$z_2 = f_3'(z_2)z_1 - z_1^2 f_4(z_1, z_2) \quad (30)$$

(здесь функция f_4 получена из f_2 подстановкой $z_3 = -f_3(z_2)$). По теореме о неявной функции из уравнения (30) находим: $z_2 = f_5(z_1)$ и, учитывая третье уравнение системы (29), $z_3 = f_6(z_1)$. Эти два уравнения определяют “многообразие решений” (29) в окрестности нуля. Векторное поле на этом многообразии получается переносом векторного поля:

$$f_5'(z_1)z_1' = z_1. \quad (31)$$

В точке $z_1 = 0$ могут осуществляться особенности двух типов: если $f_5'(z_1) = z_1$ нарушается единственность: существуют решения $z_1 \equiv 0$ и $z_1 = t$. Этот случай осуществляется например для системы (29) вида:

$$z_2' = z_1, \quad z_3' = z_2 + z_1^2, \quad z_3 = z_2^2. \quad (32)$$

Во втором случае, когда $f_5'(z_1)$ имеет 0 выше первого порядка, производная на решении стремится к бесконечности при приближении к $z_1 = 0$.

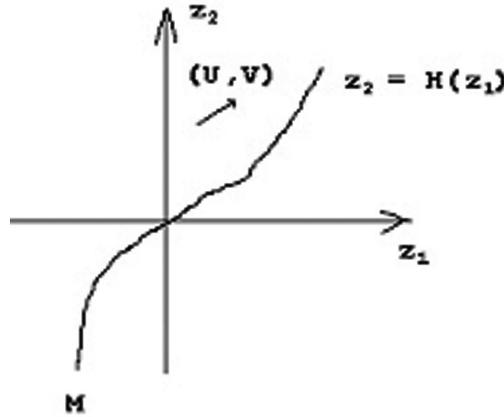
2. Предположим, что функция f_3 зависит только от z_1 . Тогда (29) превращается в систему:

$$z_2' = z_1, \quad -f_3'(z_1)z_1' = z_2 + z_1^2 f_4(z_1, z_2), \quad (33)$$

для которой прямая $z_1 = 0$ является линией вырождения (за исключением случая $f_3 \equiv 0$, когда решение существует только в точке $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0$). Для любой точки (z_1, z_2) $z_1 \neq 0$ система (33) имеет единственное решение выходящее из этой точки. Исследуем поведение такого решения в окрестности оси $z_1 = 0$. Будем предполагать, что

$$-f_3'(z_1) = z_1^k F(z_1), \quad F(0) > 0,$$

случай $F(0) < 0$ рассматривается аналогично. Уравнение $z_2 + z_1^2 f_4(z_1, z_2) = 0$ в силу теоремы о неявной функции определяет кривую M (график $(z_1, H(z_1))$ неявной функции $z_2 = H(z_1)$, $H(0) = 0$ в окрестности точки $(0, 0)$). Векторное поле, задаваемое системой (33), можно переписать в виде $(U, V) = (z_2 + z_1^2 f_4(z_1, z_2)/z_1^k F(z_1), z_1)$. В первом квадранте над кривой M оно будет направлено, как показано на рисунке от оси z_2 . В первом и четвертом квадрантах под кривой M оно будет направлено по направлению к оси z_2 . Таким образом, верхняя половина оси z_2 отталкивает поток справа, а нижняя половина — его притягивает. Ситуация в левой полуплоскости зависит от четности числа k . Если число k четно, то верхняя полуось притягивает поток слева, а нижняя полуось его отталкивает, а если число k нечетно, то наоборот.



Для исследования поведения решений уравнения

$$z_2' = z_1, \quad z_1^k F(z_1) z_1' = z_2 + z_1^2 G(z_1, z_2) \quad (34)$$

в окрестности точки $(0, 0)$ можно использовать технику “раздувания” особенности. Сделаем замену: $z_2 = u \cdot z_1$ и перейдем от переменных z_1, z_2 к переменным z_1, u : $u' \cdot z_1 + u \cdot z_1' = z_1$, $z_1^k F(z_1) z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$. Умножим первое уравнение системы на $z_1^k F(z_1)$ и вычтем второе уравнение, умноженное на u . Получим $u' \cdot z_1^{k+1} F(z_1) = z_1^{k+1} F(z_1) - u^2 \cdot z_1 - u \cdot z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$, $z_1' \cdot z_1^k F(z_1) = u \cdot z_1 + z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$. Эта система имеет тот же фазовый портрет, что и система $u' = z_1^k F(z_1) - u^2 - u \cdot z_1 G(z_1, u \cdot z_1)$, $z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$, так как они при $z_1 \neq 0$ “делением” сводятся к одному и тому же уравнению первого порядка. Последняя система имеет неэлементарную особенность в точке $(0, 0)$ поэтому для ее исследования проведем еще одно “раздувание”: от переменных z_1, u перейдем к переменным z_1, v : $u = v \cdot z_1$, $v' \cdot z_1 + v \cdot z_1' = z_1^k F(z_1) - v^2 \cdot z_1^2 - v \cdot z_1^2 G(z_1, v \cdot z_1^2)$, $z_1' = v \cdot z_1^2 + z_1^2 G(z_1, v \cdot z_1^2)$, или $v' \cdot z_1 =$

$= z_1^k F(z_1) - 2v^2 \cdot z_1^2 - 2v \cdot z_1^2 G(z_1, v z_1^2)$. Таким образом, система приводится к виду: $v' = z_1^{k-1} F(z_1) - 2v^2 \cdot z_1 - 2v \cdot z_1 G(z_1, v z_1^2)$, $z_1' = v \cdot z_1^2 + z_1^2 G(z_1, v \cdot z_1^2)$, который по приведенным выше соображениям имеет тот же фазовый портрет, что и система: $[v' = z_1^{k-2} F(z_1) - 2v^2 - 2v \cdot G(z_1, v z_1^2)]$, $z_1' = v \cdot z_1 + z_1 G(z_1, v \cdot z_1^2)$. В случае $G(0, 0) \neq 0$ эта система имеет невырожденную линейную часть и мы можем применить теорему Гробмана–Хартмана. Если $G(0, 0) = 0$, то для исследования особенности потребуются дальнейшие “раздувания”. Например, если $G(z_1, z_2) = z_1$, то система $v' = z_1^{k-2} F(z_1) - 2v^2 - 2v \cdot z_1$, $z_1' = v \cdot z_1 + z_1^2$ упрощается после перехода к переменным $z_1, w : v = w \cdot z_1, w' \cdot z_1 + w \cdot z_1' = z_1^{k-2} F(z_1) - 2w^2 \cdot z_1^2 - 2w \cdot z_1^2$, $z_1' = w \cdot z_1^2 + z_1^2 \Rightarrow w' \cdot z_1 = z_1^{k-2} F(z_1) - 3w^2 \cdot z_1^2 - 3w \cdot z_1^2$. Как и выше система $w' = z_1^{k-3} F(z_1) - 3w^2 \cdot z_1 - 3w \cdot z_1$, $z_1' = w \cdot z_1^2 + z_1^2$ имеет тот же фазовый портрет, что и система $w' = z_1^{k-4} F(z_1) - 3w^2 - 3w$, $z_1' = w \cdot z_1 + z_1$, для которой справедлива теорема Гробмана–Хартмана.

3. Рассмотрим теперь общий случай, когда функция $f_3(z_1, z_2)$ зависит от обеих переменных z_1 и z_2 . Здесь через f_3 снова обозначена функция выражающая z_3 через z_1 и z_2 из уравнения (29), которая существует в силу теоремы о неявной функции. Система (29) перепишется в виде:

$$z_2' = z_1, \quad \partial f_3 / \partial z_1 \cdot z_1' = z_2 + z_1^2 f_2(z_1, z_2) - \partial f_3 / \partial z_2 \cdot z_1. \quad (35)$$

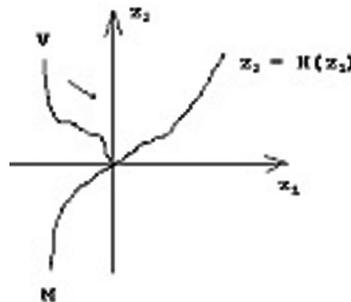
Уравнение $\partial f_3(z_1, z_2) / \partial z_1 = 0$ определяет множество (не обязательно многообразие) вырождения системы (35). Однако если точки этого множества являются одновременно нулями правой части второго уравнения (35) вырождения может не быть. Это иллюстрирует следующий пример:

$$z_2' = z_1, \quad z_3' = z_2 + z_1^2, \quad z_3 = z_2 \cdot z_1 \quad (36)$$

который имеет решения $z_1 = z_1^0 + t, z_2 = z_2^0 + t \cdot z_1^0 + t^2/2, z_3 = z_2 \cdot z_1$. При этом в точке $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0$ нарушается единственность решения, так как помимо указанных уравнению (36) удовлетворяет тривиальное решение.

Для каждой ветви $z_2 = V(z_1), V(0) = 0$ (если такие найдутся) решений уравнения $\partial f_3 / \partial z_1(z_1, z_2) = 0$ можно провести исследование поведения потока в окрестности этой ветви аналогично тому как это было сделано в предыдущем пункте. Кривая M здесь является графиком неявной функции определяемой уравнением

$$z_2 + z_1^2 f_2(z_1, z_2) - \partial f_3 / \partial z_2 \cdot z_1 = 0.$$



Случай, когда ветвь V лежит на кривой M , требует дополнительного рассмотрения.

Поведение решений системы (35) в окрестности точки $(0, 0)$ в случае, когда точки (z_1, z_2) не являются решениями уравнения $\partial f_3(z_1, z_2)/\partial z_1 = 0$, не лежат на кривой M и осях координат, можно, как и выше, исследовать “раздувая” особенность. Для системы (35) сделаем замену координат $z_2 = u \cdot z_1$ и перейдем от переменных z_1, z_2 к переменным $z_1, u : u' \cdot z_1 + u \cdot z_1' = z_1, \partial f_3/\partial z_1 \cdot z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 f_2(z_1, u \cdot z_1) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1$. Умножим первое уравнение системы на $\partial f_3/\partial z_1$ и вычтем второе уравнение, умноженное на $u : u' z_1 \partial f_3/\partial z_1 = z_1 \partial f_3/\partial z_1 - u^2 z_1 - u z_1^2 f_2(z_1, u z_1) + u z_1 \partial f_3/\partial z_2$, или $u' \partial f_3/\partial z_1 = \partial f_3/\partial z_1 - u^2 - u z_1 f_2(z_1, u z_1) + u \partial f_3/\partial z_2$, $z_1' \partial f_3/\partial z_1 = u \cdot z_1 + z_1^2 f_2(z_1, u \cdot z_1) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1$. Как и выше, эта система имеет тот же фазовый портрет, что и система $u' = \partial f_3/\partial z_1 - u^2 - u z_1 f_2(z_1, u z_1) + u \partial f_3/\partial z_2$, $z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 f_2(z_1, u \cdot z_1) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1$, которая может быть далее упрощена одним или несколькими “раздуваниями” в зависимости от вида функций f_2 и f_3 .

Замечание 3. Исследование случая максимальной ЖЦ длины четыре опускается для сокращения объема статьи. Здесь как и для максимальной ЖЦ длины три используется техника работы [4].

4. Вырожденные неавтономные дифференциальные уравнения.

4.1. Линейные неавтономные дифференциальные уравнения.

Рассматривается один частный случай для уравнения

$$Ax' = B(t)x, \quad t \in (a, b). \quad (37)$$

В предположении, что $A, B(t) : E_1 \rightarrow E_2$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, A – вырожденный оператор такой, что $\dim N(A) = 1$ и $N(A) = \{\varphi\}$, $N(A^*) = \{\psi\}$, функция $B(t)$ обладает нужной степенью гладкости.

Определение 4.1. Элементы $\varphi^{(k)}(t)$ образуют $B(t)$ – дифференциальную жорданову цепочку (ДЖЦ) нуля оператора A , если они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} A\varphi^{(k+1)}(t) &= B(t)\varphi^{(k)}(t) - A\{\varphi^{(k)}(t)\}', \\ k &= 1, \dots, p(t), \quad \varphi^{(1)} = \varphi \quad \text{и} \quad \langle B(t)\varphi^{(p(t))}, \psi \rangle \neq 0, \end{aligned} \quad (38)$$

здесь первые $p(t) - 1$ уравнений предполагаются разрешимыми, а последнее неравенство является условием обрыва ДЖЦ.

Замечание 4.1. Элементы ДЖЦ являются дифференцируемыми функциями.

Определение 4.2. $B(t)$ – ДЖЦ нуля оператора $A : \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(p(t))}(t)$ называется равномерной, если $p(t) = p$.

Определение 4.3. $B(t)$ – равномерная ДЖЦ нуля оператора $A : \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(p)}(t)$ называется максимальной, если при любом t ее элементы образуют базис пространства E_1 т. е. $p = n$.

В этом разделе будем считать, что существует максимальная равномерная дифференциальная жорданова цепочка нуля оператора $A : \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)$.

Лемма 4.1. Существует набор функционалов $\gamma^{(1)}(t), \dots, \gamma^{(n)}(t)$, гладко зависящий от t и биортогональный к элементам $\varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)$.

Пусть векторы e_1, \dots, e_n образуют базис пространства E_1 и u_1, \dots, u_n набор биортогональных к нему функционалов. Разложим векторы $\varphi^{(k)}(t)$ по базису e_1, \dots, e_n .

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n, \\ \varphi^{(2)}(t) &= a_{21}(t)e_1 + \dots + a_{2n}(t)e_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n)}(t) &= a_{n1}(t)e_1 + \dots + a_{nn}(t)e_n.\end{aligned}$$

В силу формул $a_{ks}(t) = \langle \varphi^{(k)}(t), u_s \rangle$ функции $a_{ks}(t)$ являются дифференцируемыми по t . Определяя функционалы $\gamma^{(s)}(t)$ в виде: $\gamma^{(s)}(t) = b_{s1}(t)u_1 + \dots + b_{sn}(t)u_n$, получим систему

$$\begin{aligned}0 &= a_{11}b_{s1}(t) + \dots + a_{1n}b_{sn}(t), \\ &\dots\dots\dots \\ 1 &= a_{s1}(t)b_{s1}(t) + \dots + a_{sn}(t)b_{sn}(t), \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= a_{n1}(t)b_{s1}(t) + \dots + a_{nn}(t)b_{sn}(t),\end{aligned}$$

для определения функций $b_{sm}(t)$. Так как $\det[a_{sk}(t)] \neq 0$, $t \in [a, b]$ из формул Крамера следует, что функции $b_{sm}(t)$ дифференцируемы.

Следствие. Если $x(t)$ – решение вырожденного ДУ (37) и $x(t) = \xi_1(t)\varphi^{(1)} + \dots + \xi_n(t)\varphi^{(n)}(t)$, то функции $\xi_s(t)$ – дифференцируемы. Это следует из формул $\xi_s(t) = \langle x(t), \gamma^{(s)}(t) \rangle$.

Теорема 4.1. Если существует максимальная равномерная ДЖЦ нуля оператора $A : \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}(t)$, то вырожденное ДУ (37) имеет только нулевое решение.

Пусть $x(t)$ – решение вырожденного ДУ (37) и

$$x(t) = \xi_1(t)\varphi^{(1)} + \dots + \xi_n(t)\varphi^{(n)}(t). \quad (39)$$

Подставляя (39) в (37) $A(\xi_1'(t)\varphi^{(1)} + \xi_2'(t)\varphi^{(2)} + \xi_2(t)\{\varphi^{(2)}(t)\}' + \dots + \xi_n'(t)\varphi^{(n)} + \xi_n(t)\{\varphi^{(n)}(t)\}') = B(t)(\xi_1(t)\varphi^{(1)} + \dots + \xi_n(t)\varphi^{(n)}(t))$, перепишем это уравнение в виде: $\xi_2'A\varphi^{(2)} + \xi_3'A\varphi^{(3)} + \xi_4'A\varphi^{(4)} + \dots + \xi_n'A\varphi^{(n)} + \xi_2A\{\varphi^{(2)}\}' + \xi_3A\{\varphi^{(3)}\}' + \dots + \xi_{n-1}A\{\varphi^{(n-1)}\}' + \xi_nA\{\varphi^{(n)}\}' - \xi_1B(t)\varphi^{(1)} - \xi_2B(t)\varphi^{(2)} - \xi_3B(t)\varphi^{(3)} - \dots - \xi_{n-1}B(t)\varphi^{(n-1)} - \xi_nB(t)\varphi^{(n)} = 0$.

Сравнивая элементы, стоящие в одной колонке по формулам (38), получаем:

$$\begin{aligned}(\xi_2' - \xi_1)A\varphi^{(2)} + (\xi_3' - \xi_2)A\varphi^{(3)} + \dots + \\ + (\xi_n' - \xi_{n-1})A\varphi^{(n)} + \xi_nA\{\varphi^{(n)}\}' - \xi_nB(t)\varphi^{(n)} = 0.\end{aligned} \quad (40)$$

Применяя к равенству (40) функционал ψ , находим, что $\xi_n(t) \equiv 0$. Тогда $(\xi_2' - \xi_1)A\varphi^{(2)} + (\xi_3' - \xi_2)A\varphi^{(3)} + \dots + (\xi_n' - \xi_{n-1})A\varphi^{(n)} = 0$, и так как элементы $A\varphi^{(2)}(t), \dots, A\varphi^{(n)}(t)$ линейно независимы, то $\xi_2' - \xi_1 = 0$, $\xi_3' - \xi_2 = 0, \dots, \xi_n' - \xi_{n-1} = 0$. Откуда следует $\xi_{n-1}(t) \equiv 0, \dots, \xi_2(t) \equiv 0, \xi_1(t) \equiv 0$ или $x(t) \equiv 0$.

образуют базис E_1 . Функция R достаточно гладкая и $R(x, t) \equiv 0$, $R_x(x, t) \equiv 0$. Тогда, согласно (44), уравнение (45) приводится к системе

$$x_2' = x_1 + f(x_1, t), \quad 0 = x_2 + g(x_1, t), \quad (46)$$

где функции f и g удовлетворяют условиям $f(0, t) = g(0, t) = 0$ и $Df(0, t) = Dg(0, t) = 0$.

Замена переменных $y_1 = x_1 + f(x_1, t)$, $y_2 = x_2$, приводит систему (46) к виду:

$$y_2' = y_1, \quad 0 = y_2 + h(y_1, t), \quad h(0, t) = 0 \quad (47)$$

Если функция $h(y_1, t)$ не зависит от y_1 , то в некоторой окрестности точки $t = 0$, $y_2 = Y(t)$ и $y_1 = Y'(t)$. Если $Y(t) \neq 0$, то это не единственное решение системы (46) при условиях $y_1(0) = 0$ и $y_2(0) = 0$, – другим будет $y_1(t) \equiv 0$ и $y_2(t) \equiv 0$.

Если функция $h(y_1, t)$ зависит от y_1 , то $y_2 = -h(y_1, t)$ и, так как $h(0, t) = 0$ и $D_y h(0, t) = 0$, она записывается в виде: $h(y_1, t) = -y_1^2 H(y_1, t)$. Подставляя выражение для y_2 в первое уравнение системы (47), находим

$$\begin{aligned} \{2y_1 H(y_1, t) + y_1^2 \partial H(y_1, t) / \partial y_1\} y_1' &= y_1 - y_1^2 \partial H(y_1, t) / \partial t \Rightarrow \\ \Rightarrow \{2H(y_1, t) + y_1 \partial H(y_1, t) / \partial y_1\} y_1' &= 1 - y_1 \partial H(y_1, t) / \partial t. \end{aligned} \quad (48)$$

Если $H(0, 0) \neq 0$, то уравнение (48) имеет решение $y_1 = f(t)$ такое что $f(0) = 0$. Тогда для исходного вырожденного уравнения нарушается единственность решений в точке $(0, 0)$. Если $H(0, 0) = 0$, то $y_1 = 0$ является особой точкой для уравнения (48).

Замечание 4.2. Исследование неавтономного ДУ с максимальной ДЖЦ длин три и четыре опущено для сокращения объёма статьи. Здесь также использована техника работы [4], но в векторных пространствах над кольцами многочленов (модулями).

Литература

- [1] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.
- [2] Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: МЦНМО, 1999.
- [3] Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. – М.: МЦНМО, 2005.
- [4] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M. E., Coulet, P., and Iooss, G. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields // Physica 29D, 95–127. 1987.

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ляхов Л. Н., Райхельгауз Л. Б.
Воронежский государственный университет
email: lyakhov@box.vsi.ru, jikol_85@mail.ru

Lyakhov L. N., Raikhelgauz L. B. Fundamental solutions of Laplace's operator with in a course of mathematical physics. Lecturing methods are given in work on the equations of mathematical physics with use of the harmonious analysis of radial functions. The theorem of the fundamental solution of the ordinary differential equation is taken for a basis with D_B Bessel's operator with constant coefficients.

Keywords: Fundamental solution, singular differential operator, The mixed full direct and inverse Fourier–Bessel transformations, Schwartz space of basic functions.

В работе приведены методы чтения лекций по уравнениям математической физики с использованием гармонического анализа радиальных функций. За основу взята теорема о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с D_B -оператором Бесселя с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: фундаментальное решение, сингулярный дифференциальный оператор, полное прямое и обратное смешанное преобразование Фурье Бесселя, пространство Шварца основных функций.

1. Введение. Хорошо известно, что фундаментальным решением оператора Лапласа является радиальная функция, которую удобно трактовать как функцию одного переменного. Поэтому естественно попытаться свести поиск такого решения к поиску фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения. Но здесь возникают сложности, связанные с тем, что сферическое преобразование координат $x = r\Theta$, $|\Theta| = 1$ в R^n сводит уравнение

$$\Delta u(|x|) = \delta(|x|), \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

к уравнению с оператором Бесселя

$$B_{n-1}u(r) = \delta_{n-1}(r), \quad B_{n-1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr}$$

(пояснение чуть ниже), для которого в классических курсах математической физики не приводятся формулы фундаментальных (иногда говорят — элементарных) решений. В то же время широко используется теорема о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, позволяющая в купе с преобразованием Фурье легко находить фундаментальное решение классических нестационарных уравнений. Последняя теорема имеет простое и, главное, просто доказываемое обобщение для уравнений, содержащих оператор Бесселя, применяя которую можно быстро и просто получить фундаментальное решение (одномерного) оператора Бесселя и, следовательно, фундаментальные решения стационарных уравнений в R^n . Общие вопросы сингулярных уравнений математической физики, использующие теорему о фундаментальном решении обыкновенного сингулярного диф-

ференциального уравнения с постоянными коэффициентами, рассматривались в работах [1–3].

Может показаться странным, что долгое время такая теорема не была востребована в курсах дифференциальных уравнений. Возможно простое объяснение — теорема не верна для степеней (целых) оператора Бесселя, а верна для степеней более общего оператора, возникающего в научных исследованиях достаточно редко. Степени (целые) этого оператора $D_{B_{n-1}}$ задаются формулой

$$D_{B_\gamma}^\alpha = \begin{cases} B_\gamma^{\alpha/2}, & \alpha = 2k, \\ \frac{d}{dx} B_\gamma^{(\alpha-1)/2}, & \alpha = 2k + 1, \end{cases} \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}, \quad (1)$$

где $\gamma = n - 1$, а $k \in Z^+$.

Предварительно сделаем несколько замечаний:

1. Легко установить, что обычное скалярное произведение для радиальных функций принимает вид

$$(f, g) = \int_{R^n} f(|x|) g(|x|) dx = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r) g(r) r^{n-1} dr,$$

поэтому мы рассматриваем скалярное произведение функций заданное весовой линейной формой

$$(f, g)_\gamma = \int_0^\infty f(t) g(t) t^\gamma dt, \quad \gamma = n - 1. \quad (2)$$

2. Если считать δ -функцию Дирака пределом соответствующей δ -образной последовательности радиальных функций в R^n , то

$$f(0) = (f, \delta) = \int_{R^n} f(|x|) \delta(|x|) dx = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r) \delta(r) r^{n-1} dr.$$

Можем положить

$$\delta_{n-1} = |S_1(n)| r^{n-1} \delta(r),$$

что приводит к следующему определению функционала Дирака в смысле весового скалярного произведения (2):

$$f(0) = (f, \delta_\gamma)_\gamma. \quad (3)$$

2. Теорема о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при D_B -операторе Бесселя.

Ограничимся лишь уравнением второго порядка. Общий вариант доказываемой здесь теоремы приведен в [2].

Рассмотрим сингулярный дифференциальный оператор второго порядка

$$L(D_{B_\gamma})u(t) = B_\gamma u(t) + a_1 \frac{d}{dt} u(t) + a_2 u(t).$$

где D_B^α — оператор (1), $\alpha = 0, 1, 2$. Интегрированием по частям находим оператор $L^*(D_B)$, сопряженный к $L(D_{B_\gamma})$ относительно скалярного произведения (2) (см. также работу [3]):

$$L^*(D_{B_\gamma}) = B_\gamma - \frac{a_1}{t^\gamma} \frac{d}{dt} t^\gamma + a_2. \quad (4)$$

Фундаментальное решение оператора $L(D_B)$ определяется как распределение E , удовлетворяющее равенству

$$(L(D_{B_\gamma})E)(t) = \delta_\gamma(t)$$

или, что тоже самое,

$$(E, L^*(D_{B_\gamma}), \varphi)_\gamma = \varphi(0), \quad \varphi \in S_{ev}([0, +\infty)), \quad (5)$$

где $S_{ev}([0, \infty))$ подпространство пространства Шварца основных функций, состоящее из четных функций одного переменного.

Теорема 1. Пусть $Z(x)$ — четная функция, имеющая особенность в точке $t = 0$ такую, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} x^\gamma Z(x) = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\gamma \frac{d}{dt} Z(t) = 1, \quad (7)$$

и пусть $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\gamma D_B^\alpha Z(x) < \infty$.

Если в области $\{x > 0\}$ функция $Z = Z(x)$ удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению второго порядка

$$L(D_B) Z(x) = 0, \quad (8)$$

то в смысле весовых обобщенных функций S_{ev}' функция Z — фундаментальное решение оператора $L(D_{B_\gamma})$.

Замечание. Как видим, здесь роль начальных условий играют весовые начальные условия, а поскольку одно из них не нулевое, то решение обязано иметь особенность в начале координат, порядок которой определен условием (7). Другая особенность, отличающая данную теорему от известной теоремы о виде фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения, заключается в четности решения, что заменило продолжение нулем функции на отрицательную полуось в классической теореме.

Доказательство. Будем доказывать равенство (5). Оператор Бесселя в выражении (4) удобно записать в виде (дивергентная форма оператора Бесселя)

$$B_\gamma = \frac{1}{t^\gamma} \frac{d}{dt} t^\gamma \frac{d}{dt}.$$

Пусть $\varphi \in S_{ev}$. Рассмотрим первое слагаемое в выражении сопряженного оператора (4). Интегрируя по частям, получим

$$(Z, B_\gamma \varphi)_\gamma = \lim_{t \rightarrow +0} t^\gamma \varphi'(t) Z(t) - \int_0^\infty Z'(t) t^\gamma \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = - \int_0^\infty Z'(t) t^\gamma \frac{d\varphi(t)}{dt} dt.$$

Здесь мы воспользовались условием (6). Снова интегрируя по частям и принимая во внимание условие (7), получим

$$\begin{aligned} (Z, B_\gamma \varphi)_\gamma &= - \lim_{t \rightarrow +0} t^\gamma \varphi(t) Z'(t) + \int_0^\infty (B_\gamma Z)(t) \varphi(t) t^\gamma dt = \\ &= \varphi(0) + \int_0^\infty (B_\gamma Z)(t) \varphi(t) t^\gamma dt. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в выражении сопряженного оператора (4). Точно также получим равенство

$$\left(Z, -\frac{a_1}{t^\gamma} \frac{d}{dt} (t^\gamma \varphi(t)) \right)_\gamma = \int_0^\infty Z'(t) \varphi(t) t^\gamma dt.$$

Таким образом,

$$(Z, L^*(D_{B_\gamma}) \varphi)_\gamma = \varphi(0) + \int_0^\infty (L(D_{B_\gamma})Z)(t) \varphi(t) t^\gamma dt.$$

Остается воспользоваться тем, что $Z(t)$ является решением однородного уравнения (8) и мы получим (5).

Доказательство закончено.

3. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Пусть $\varphi = \varphi(|x|) \in S_{ev}(R^n)$. Уравнение $\Delta E = \delta$, записанное в обобщенной форме

$$(\Delta E(|x|), \varphi(|x|)) = (\delta, \varphi) = \varphi(0),$$

сферическим преобразованием координат приводится к уравнению

$$|S_1(n)| (B_\gamma E(r), \varphi(r))_{n-1} = (\delta_{n-1}(r), \varphi(r))_{n-1} = \varphi(0).$$

Тем самым фундаментальное решение оператора Лапласа оказывается (разумеется, с точностью до константы $|S_1(n)|^{-1}$) фундаментальным решением сингулярного дифференциального оператора Бесселя

$$B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}, \quad \gamma = n - 1.$$

Методика поиска фундаментального решения, использующая теорему 1, очень проста. Решение уравнения

$$B \mathcal{E}(t) = \delta_\gamma, \quad \delta_\gamma : (\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \varphi(0)$$

определяется как функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, т. е. эта функция должна удовлетворять однородному уравнению $B \mathcal{E}(t) = 0$ и $\mathcal{E}(t) = O(x^{1-\gamma})$, $t \rightarrow 0$.

Легко проверяется, что функция $\mathcal{E}(t) = A_\gamma |t|^{1-\gamma}$ удовлетворяет однородному уравнению $B_\gamma \mathcal{E} = 0$ при $\gamma \neq 1$ в области $R_1 \setminus \{0\}$. Весовое начальное условие (6), очевидно, выполняется, а условие (7) позволяет легко определить константу $A_\gamma = \frac{1}{1-\gamma}$. Поэтому при $\gamma \neq 1$ функция $\mathcal{E}(t) = \frac{t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ — фундаментальное решение оператора Бесселя. Полагая здесь $\gamma = n - 1$, $n > 2$, находим фундаментальное решение оператора Лапласа в R^n ($n > 2$):

$$E_n(|x|) = -\frac{|x|^{2-n}}{|S_1(n)|(n-2)}, \quad n > 2.$$

В полученной формуле случай $n = 2$ требует отдельного рассмотрения. Пусть $n = 2$, т. е. $\gamma = 1$. Опять же легко проверить, что однородному уравнению $B_1 \mathcal{E}(x) = 0$ удовлетворяет функция $\mathcal{E}(x) = \ln |x|$. Эта же функция удовлетворяет и весовым условиям теоремы 1 и, следовательно, есть фундаментальное решение оператора Бесселя $B_1 = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt}$. Следовательно, фундаментальным решением оператора Лапласа в R^2 является функция

$$E_2(|x|) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|.$$

В заключении отметим, что в курсах лекций по математической физике тема “фундаментальные решения” читается (как правило, конечно, возможны исключения) после изучения метода Фурье разделения переменных. Метод разделение переменных в задачах со сферической и осевой симметриями приводит к оператору Бесселя и функциям Бесселя. Следовательно, нет временных затрат на то, что бы читать тему “фундаментальные решения” классических уравнений математической физики с использованием теоремы 1 (о фундаментальных решениях обыкновенных сингулярных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами при D_B -операторами Бесселя). Эта методика так же просто переносится на исследование и построение радиальных решений уравнения Гельмгольца. Кроме того, в работе [4] показано, что такая методика может быть перенесена на задачи более общие, которые можно поминать как осесимметрические задачи в евклидовых пространствах дробной размерности.

Литература

- [1] Райхельгауз Л. Б. Полное преобразование Фурье–Бесселя и сингулярные дифференциальные операторы с D_B -оператором Бесселя. Диссерт. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, ВГУ. 2011. – 110 с.
- [2] Ляхов Л. Н. О радиальных функциях и классических стационарных уравнениях в евклидовых пространствах дробной размерности // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений AMADE–2011. – Минск: Издательский центр БГУ. 2012. – С. 115–126.
- [3] Lyakhov L. N., Raykhelgauz L. B. Even and odd Fourier–Bessl transformations and some singular differential equations // Cambridge Scientific Publishers. 2012 / Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE–2009. – С. 107–112.

- [4] Ляхов Л. Н. О радиальных функциях и классических стационарных уравнениях в евклидовых пространствах дробной размерности // Минск: Издательский центр БГУ, 2012 / Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений AMADE–2011. – С. 115–126.

УДК 532.61.096

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СОПРЯЖЁННОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ В ЦИЛИНДРАХ

Магденко Е. П.

Институт вычислительного моделирования
Сибирского отделения Российской академии наук
Красноярск
e-mail: mag_djin@mail.ru

Magdenko E. P. Solution of the linear conjugate the convection problem in cylinders. The arising convection problem in a two-layers cylindrical system was considered, to seek for it solution the method of variables separation was used. As a result obtained a two homogeneous equations of sixth order with complicated boundary conditions. For monotone disturbances in case weightlessness the analytical expression for the critical Marangoni numbers were found, depending on the dimensionless physical parameters and geometry of the fluid container. For a system of transformer oil – formic acid, the dependences of the Marangoni number on the wave number is plotted. Thus stability of the system is defined in dependence on the parameters.

Рассмотрена задача о возникновении конвекции в двухслойной цилиндрической системе, для решения которой был применён метод разделения переменных. В результате получено два однородных уравнения шестого порядка со сложными граничными условиями. Для монотонных возмущений в условиях невесомости были найдены аналитически критические числа Марангони, зависящие от безразмерных параметров жидкости и геометрии контейнеров. Для системы трансформаторное масло – муравьиная кислота построены зависимости числа Марангони от волнового числа. Тем самым определены, в зависимости от параметров, области устойчивости рассматриваемой системы.

Пусть цилиндрический контейнер заполнен двумя несмешиваемыми покоящимися жидкостями с общей поверхностью раздела. Обозначим через $\Omega_1 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (-h_1, 0)$ и $\Omega_2 = (0, a) \times (0, 2\pi) \times (0, h_2)$ области, занятые жидкостями. Линеаризованная на равновесном состоянии задача о малых возмущениях системы в рамках модели Обербека-Буссинеска в цилиндрической системе координат r, z для осесимметрического случая в безразмерных пере-

менных описывается уравнениями

$$P_{jr} - \frac{iC\rho_{oj}}{\rho_{o2}}U_j = \frac{\rho_{oj}\nu_j}{\rho_{o2}\nu_2} \left(U_{jrr} + \frac{1}{r}U_{jr} + U_{jzz} - \frac{U_j}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$P_{jz} - \frac{\beta_j\rho_{oj}G}{\beta_2\rho_{o2}}T_j - \frac{iC\rho_{oj}}{\rho_{o2}}W_j = \frac{\rho_{oj}\nu_j}{\rho_{o2}\nu_2} \left(W_{jrr} + \frac{1}{r}W_{jr} + W_{jzz} \right), \quad (2)$$

$$U_{jr} + \frac{U_j}{r} + W_{jz} = 0, \quad (3)$$

$$-iCT_j + \frac{k_2}{k_j}W_j = \frac{\chi_j}{\chi_2 Pr} \left(T_{jrr} + \frac{1}{r}T_{jr} + T_{jzz} \right). \quad (4)$$

где P_j, T_j, U_j, W_j – возмущения для давлений, температур, нормальной и касательной скоростей j -ой жидкости; C – комплексный декремент; $Pr = \nu_2/\chi_2$, $G = g\beta_2 a_2 h_2^4/\nu_2^2$ – числа Прандтля и Грасгофа.

Граничные условия на поверхности раздела таковы [1]

$$T_1 + kN = T_2 + N, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2, \quad (6)$$

$$P_1 - P_2 + 2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial z} - \frac{1}{\rho_o \nu} \frac{\partial W_1}{\partial z} \right) = \left\{ \left(1 - \frac{1}{\rho_o \beta} \right) G' + \left(\frac{1}{\rho_o} - 1 \right) Ga \right\} N + We \left(N_{rr} + \frac{1}{r}N_r \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial r} + \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{1}{\rho_o \nu} \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) = -\frac{M}{Pr} (kN_r + T_{1r}), \quad (8)$$

$$(9)$$

$$M \left(\frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{1}{k} \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) = M_1 Pr \left(U_{2r} + \frac{U_2}{r} \right), \quad (10)$$

$$-iCN = W_2, \quad (11)$$

где $We = \sigma h_2/\rho_{o2}\nu_2^2$, $M = \alpha a_2 h_2^2/\rho_{o2}\nu_2\chi_2$, $Ga = gh_2^3/\nu_2^2$, $G' = g\beta_2 b_2 h_2^3/\nu_2^2$ – числа Вебера, Марангони, Галилео и Грасгофа; $M_1 = \alpha^2 b_2/k_2\rho_{o2}\nu_2$ – характеризует энергию, затрачиваемую на деформацию поверхности раздела; N – отклонение амплитуды по нормали; $\rho_o = \rho_{o2}/\rho_{o1}$; $\nu = \nu_2/\nu_1$; $\beta = \beta_2/\beta_1$; $\chi = \chi_2/\chi_1$; $k = k_2/k_1$; $\sigma = \sigma(\Theta_j) = \sigma^o - \alpha\Theta$ – поверхностное натяжение; $a_2 = (\Theta_{02} - \Theta_{01})/(h_2 + kh_1)$, $b_2 = (kh_1\Theta_{02} + h_2\Theta_{01})/(h_2 + kh_1)$ – температурные коэффициенты, Θ_{01} , Θ_{02} – температуры на верхнем и нижнем основании соответственно.

На боковых стенках и основаниях цилиндра справедливы следующие условия ($h = h_1/h_2$, $\alpha = h_2/a$)

$$U_j(1/\alpha, 0) \neq 0, \quad W_j(1/\alpha, 0) = 0, \quad T_j(1/\alpha, 0) = 0, \quad (12)$$

$$U_1(r, -h) = 0, \quad W_1(r, -h) = 0, \quad T_1(r, -h) = 0, \quad (13)$$

$$U_2(r, 1) = 0, \quad W_2(r, 1) = 0, \quad T_2(r, 1) = 0. \quad (14)$$

Задача (1)–(13) допускает разделение переменных, именно

$$U_j = \frac{1}{r} R(r) F_{jz}(z), \quad W_j = -\frac{1}{r} R_r(r) F_j(z), \quad (15)$$

$$T_j = \frac{1}{r} R_r(r) D_j(z), \quad (16)$$

где

$$R = R_n(r) = r J_1(mr), \quad (17)$$

здесь $m = \alpha \delta_n$, а δ_n , $n = 1, 2, \dots$ есть решение уравнения $J_0(\delta) = 0$.

Используя данный метод, получаем два однородных уравнения шестого порядка

$$\frac{\nu_j \chi_j}{\nu_2 \chi_2 Pr} L^3 D_j + iC \left(\frac{\nu_j}{\nu_2} + \frac{\chi_j}{\chi_2 Pr} \right) L^2 D_j - C^2 L D_j - \frac{m^2 k_2 \beta_j G}{k_j \beta_2} D_j = 0. \quad (18)$$

где $L = d^2/dz^2 - m^2$. При $j = 1$, $-h < z < 0$, а при $j = 2$, $0 < z < 1$.

Предположим, что система находится в состоянии невесомости ($g = 0$); возмущения монотонны ($C = 0$). Тогда, решая для этого случая уравнения (17), и, используя условия (5)–(10), получаем выражение для критических чисел Марангони

$$M = \frac{4m^2 Pr (A - k\mu S_1 S_2 M_1 (m^2 - S_2^2) (m^2 h^2 - S_1^2))}{Pr Z - QW e^{-1}}, \quad (19)$$

где

$$A = 2(kS_1 C_2 + S_2 C_1) (m^3 h^2 \mu + m^3 h - m^2 S_1 C_1 - m^2 h^2 \mu S_2 C_2 - m h S_2^2 - m \mu S_1^2 + \mu S_2 S_1^2 C_2 + S_2^2 S_1 C_1); \quad (20)$$

$$Z = k\mu (m^5 h^3 \chi S_2 C_1 - m^3 h^3 \chi S_2^3 C_1 + m^3 S_1^3 C_2 + m^2 h^2 S_2^3 S_1 - m^5 h^2 S_1 C_2 - m^2 \chi S_1^3 S_2 + \chi S_1^3 S_2^3 - S_1^3 S_2^3); \quad (21)$$

$$Q = 8km^3 (S_1 C_2 + S_2 C_1) (m^2 h^2 \mu - m^2 h^2 + h^2 S_2^2 - \mu S_1^2); \quad (22)$$

$$\mu = \rho_{o2} \nu_2 / \rho_{o1} \nu_1; \quad S_1 = \text{sh } mh; \quad C_1 = \text{ch } mh; \quad S_2 = \text{sh } m; \quad C_2 = \text{ch } m. \quad (23)$$

Замечание 1. Если $a \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ таким образом, что $m = \delta_n h_2 / a \rightarrow m_0 = \text{const}$, то выражение (18) в точности совпадает с числом Марангони для контактирующих жидкостей в бесконечных слоях [2].

Для (18) получены следующие асимптотические формулы:

— при $m_0 \rightarrow \infty$ (использованы асимптотические выражения $S_1 \sim e^{m_0 h} / 2$, $C_1 \sim e^{m_0 h} / 2$, $S_2 \sim e^{m_0} / 2$, $C_2 \sim e^{m_0} / 2$)

$$M \sim \frac{4(2(k+1)(\mu+1) - k\mu M_1)}{k\mu(\chi-1)} m_0^2; \quad (24)$$

— при $\chi = 1$ асимптотическая формула запишется в следующем виде

$$M \sim \begin{cases} \frac{2(k+1)(\mu+1) - k\mu M_1}{k\mu(Pr(m_0-1) + 8km_0 W e^{-1})} e^{2m_0}, & h > 1, \\ \frac{2(k+1)(\mu+1) - k\mu M_1}{16k^2 m_0 W e^{-1}(\mu-1)} e^{2m_0}, & h = 1, \\ \frac{2(k+1)(\mu+1) - k\mu M_1}{kh^2(\mu Pr(1-m_0 h) - 8km_0 W e^{-1})} e^{2m_0 h}, & h < 1. \end{cases} \quad (25)$$

Замечание 2. Если $\mu = 1$ и $\chi = 1$, то поверхность раздела отсутствует. при $m_0 \rightarrow 0$ (также $S_1 \sim m_0 h + m_0^3 h^3/6$, $C_1 \sim 1 + m_0^2 h^2/2$, $S_2 \sim m_0 + m_0^3/6$, $C_2 \sim 1 + m_0^2/2$)

$$M \sim \frac{2Prh(h\mu + 1)(hk + 1)}{3kWe^{-1}(h + 1)(h^2\mu - 1)}m_0^2; \quad (26)$$

— если $h^2\mu = 1$, то

$$M \sim \frac{8Pr(hk + 1)}{k^2We^{-1}(h - 1)(h + 1)}; \quad (27)$$

— при $h = 1$ и $\mu = 1$, имеем

$$M \sim \frac{128(k + 1)}{k(\chi - 1)}. \quad (28)$$

В случае недеформируемой поверхности раздела ($We = \infty$) при $m_0 \rightarrow 0$ получим

$$M \sim \frac{64(h\mu + 1)(hk + 1)}{k\mu h^2(\chi h^2 - 1)}m_0^{-2}; \quad (29)$$

— если $h^2\chi = 1$, то

$$M \sim -\frac{2304(h\mu + 1)(hk + 1)}{k\mu h^2(h - 1)(h + 1)}m_0^{-4}. \quad (30)$$

Замечание 3. Рассмотрим конкретные жидкости, когда в верхней части цилиндра расположена муравьиная кислота, а в нижней трансформаторное масло. Их физические параметры таковы: $\rho_{o1} = 0.86 \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_{o2} = 1.2196 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu_1 = 18.49 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\nu_2 = 1.2 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\chi_1 = 1.21 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\chi_2 = 1.7 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $k_1 = 0.63519 \cdot 10^{-4}$ кг м/с³К, $k_2 = 1.55 \cdot 10^{-4}$ м/с³К, $\beta_1 = 0.7 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹, $\beta_2 = 1.025 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹, $\varkappa = 0.0022$ Н/мК, $\sigma = 3.81 \cdot 10^{-2}$ Н/м. Возьмём $n = 1$ ($\delta_1 = 2.40482$), $a = 1$, $We = 10^4$ и пусть подогрев цилиндра осуществляется сверху: $\Theta_{01} = 283$ К, $\Theta_{02} = 303$ К. Так как $M \sim \Theta_{02} - \Theta_{01}$, то, например, при $h = 0.01$ получим $\Theta_{02} - \Theta_{01} \approx -52.4992$ К, то есть при данном h для разности температур большей полученной, система будет неустойчива. Далее, при $h = 1$ имеем $\Theta_{02} - \Theta_{01} \approx 5.7156 \cdot 10^{-8}$ К. Здесь уже система будет устойчивой, когда разность температур будет меньше данного значения. Для $h = 100$, $\Theta_{02} - \Theta_{01} \approx 0.0007$ К ситуация аналогична второму случаю.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю В. К. Андрееву за постановку задачи и ценные советы.

Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН №38 и проекта РФФИ №11-01-00283

Литература

- [1] Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. – Новосибирск: Наука, 2000. – 280 с.
- [2] Smith K. A. On convective instability induced by surface-tension gradients // J. Fluid Mech. 1966. Vol. 24. № 2. – P. 401–414.

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Миронов А. Н., Миронова Л. Б.
Елабужский филиал Казанского (Приволжского)
федерального университета
Елабуга
e-mail: lbmironova@yandex.ru, miro73@mail.ru

Mironov A. N., Mironova L. B. On the Laplace invariants for one equation with leading partial derivative. We construct classes of third-order differential equations with two independent variables admitting four-dimensional Lie algebras.

Выделены классы уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными, допускающих четырехмерные алгебры Ли.

Приложения инвариантов Лапласа для уравнения

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0$$

широко известны и изложены, в частности, в работах [1, с. 116–125], [2], [3, с. 175–186].

Инварианты Лапласа для уравнения

$$u_{xxy} + a_{20}(x, y)u_{xx} + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = 0 \quad (1)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} h_1 &= 2a_{20x} + a_{20}a_{11} - a_{10}, & h_2 &= a_{11y} + a_{20}a_{11} - a_{10}, & h_3 &= a_{11x} + \frac{a_{11}^2}{2} - 2a_{01}, \\ h_4 &= 2a_{20xx} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}, \\ h_5 &= a_{11xy} - a_{20}a_{11}^2 + 2a_{20}a_{01} + a_{11}a_{10} - 2a_{00}. \end{aligned}$$

Уравнение (2) с различных точек зрения исследовалось в [4]–[7]. Оно относится к одному из канонических видов, выделенных в [8]. В работе [9] построены инварианты Лапласа для уравнения Бианки третьего порядка, а также обсуждается возможность построения аналогов инвариантов Лапласа для (2) путем факторизации дифференциального оператора.

Алгебра Ли уравнения (2) есть $L = L^r \oplus L^\infty$, где алгебра L^r размерности r образована операторами вида

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y + \sigma(x, y)u\partial_u, \quad (2)$$

а L^∞ — типичная для линейных уравнений абелева подалгебра с оператором $\omega(x, y)\partial_u$, где ω — решение уравнения (2). Ясно, что оператор $u\partial_u$ допускается любым уравнением (2), поэтому указанный оператор можно включить в L^∞ и далее будем считать, что $\sigma(x, y)$ определяется в (2) с точностью до постоянного слагаемого.

Введем обозначения

$$p_{12} = \frac{h_1}{h_2}, \quad p_{21} = \frac{h_2}{h_1}, \quad q_i = \frac{(\ln h_i)_{xy}}{h_i}, \quad i = 1, 2.$$

Система определяющих уравнений для (2) содержит равенства

$$(h_1\xi)_x + (h_1\eta)_y = 0, \quad (h_2\xi)_x + (h_2\eta)_y = 0.$$

Дословно повторяя рассуждения из [1, с. 122], приходим к выводу, что если хотя бы одна из функций p_{12} , p_{21} , q_1 , q_2 не равна тождественно постоянной, то алгебра Ли L^r операторов (2) не более чем одномерна.

Отметим, что если q_i постоянны, то инварианты h_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют уравнению Лиувилля

$$(\ln h_i)_{xy} = q_i h_i,$$

общее решение которого известно [1, с. 123].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполняется условие $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$. Тогда уравнение (2) допускает более чем одномерную алгебру Ли операторов (2) если и только если функции p_{ij} , q_i ($i, j = 1, 2$) тождественно постоянны. Если p_{ij} и q_i постоянны, то максимальная размерность допускаемой уравнением (2) алгебры Ли L^r операторов (2) равна трем.

Литература

- [1] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
- [2] Ибрагимов Н. Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи матем. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4. — С. 83–144.
- [3] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957. — 443 с.
- [4] Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.
- [5] Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 73–76.
- [6] Джохадзе О. М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // Матем. заметки. — 2003. — Т. 74, вып. 4. — С. 517–528.
- [7] Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных с сингулярными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 9. — С. 67–70.
- [8] Джураев Т. Д., Попёлек Я. О канонических видах уравнений с частными производными третьего порядка // УМН — 1989. — Т. 44, вып. 4. — С. 237–238.
- [9] Джохадзе О. М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 58–68.

О ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОДНОЙ МОДЕЛИ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН

Пугина Л. В., Волосов К. А.

Московский государственный университет путей сообщения

Москва

e-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

Pugina L. V., Volosov K. A. About the correct of one model of spiral waves. In the papers by S. P. Kurdumov and his pupils have been studied one models of the spiral waves by numerical methods. We find new family of exact solutions of spiral waves in this mathematical models.

В работах С. П. Курдюмова и его учеников численными методами исследована модель спиральных волн. В данной работе построено новое семейство точных решений, описывающее структуру спиральной волны и многие ранее обнаруженные эффекты. В решении присутствует произвольная функция.

1. Введение. В работе [1] проведен большой объем численных вычислений для исследования свойств одной модели, связанной со спиральными волнами. В [2] показано, что эта модель связана с уравнениями распределенной модели гиперцикла. Метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНЕФКЗП), разработанный в [3]–[5] является новым и поэтому необходимо сравнить его результаты с результатами работ других авторов, полученные другими методами.

Рассмотрим распределенную систему гиперцикла в случае однородной диффузии и двух видов макромолекул [2]. Запишем систему уравнений в полярной системе координат

$$\begin{aligned} Q'_t - d\Delta Q + (f - k_1 S(t, \varphi, r))Q(t, \varphi, r) &= 0, \\ S'_t - d\Delta S + (f - k_2 Q(t, \varphi, r))S(t, \varphi, r) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ω – угловая скорость и d – коэффициент диффузии, а $S(\varphi, r, t)$, $Q(\varphi, r, t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных.

Система (1) дополняется краевыми условиями второго рода на круге радиуса r_1 . Запишем систему (1) в вращающейся с постоянной угловой скоростью ω полярной системе координат r, φ вокруг начала координат, где $\theta = \varphi - \omega t$, $r = \exp(\chi)$.

$$\begin{aligned} -d \exp(-2\chi) \tilde{\Delta} W - \omega W'_\theta + (f - k_1 H)W &= 0, \\ -d \exp(-2\chi) \tilde{\Delta} H - \omega H'_\theta + (f - k_2 W)H &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Оператор Лапласа, записанный в переменных θ, χ , имеет вид

$$\Delta M(\theta, \chi) = \exp(-2\chi) [M''_{\theta\theta} + M''_{\chi\chi}] = \exp(-2\chi) \tilde{\Delta} M.$$

Введём новую функция $Z(\theta, \chi) = k_1 H(\theta, \chi) - k_2 W(\theta, \chi)$.

Умножим первое уравнение системы (3) на коэффициент k_2 , второе уравнение системы (3) на коэффициент k_1 , а затем вычтем полученные уравнения.

Тогда получим параболическое уравнение с переменными коэффициентами

$$-d \exp(-2\chi) \tilde{\Delta} Z - \omega Z'_\theta + f Z = 0. \quad (3)$$

Это частный случай уравнения в модели, исследованной численными методами в [1]. Асимптотика решений (3) описана в [2]. В уравнении (3) сделаем нефиксированную конструктивную замену переменных

$$Z(\theta, \chi) \Big|_{\theta=\theta(\xi, \delta), \chi=\chi(\xi, \delta)} = U(\xi, \delta). \quad (4)$$

При этом существуют формулы пересчёта производных старых переменных $\chi(\xi, \delta)$, $\theta(\xi, \delta)$ по новым неизвестным функциям $\xi(\theta, \chi)$, $\delta(\theta, \chi)$, которые подлежат определению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} &= \frac{1}{\det J} \frac{\partial \chi}{\partial \xi}, & \frac{\partial \delta}{\partial \chi} &= -\frac{1}{\det J} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\det J} \frac{\partial \chi}{\partial \delta}, & \frac{\partial \xi}{\partial \chi} &= \frac{1}{\det J} \frac{\partial \theta}{\partial \delta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\det J = \theta'_\delta \chi'_\xi - \theta'_\xi \chi'_\delta$ – якобиан неопределённого преобразования. Введём «дифференциальные связи» [3]–[5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \chi} \Big|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} &= Y(\xi, \delta), \\ \frac{\partial Z}{\partial \theta} \Big|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} &= T(\xi, \delta), \end{aligned} \quad (6)$$

После преобразований, проведенных с учетом (4), (5) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) &= Y(\xi, \delta) [\chi'_\xi \theta'_\delta - \theta'_\xi \chi'_\delta], \\ \left(-\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= T(\xi, \delta) [\chi'_\xi \theta'_\delta - \theta'_\xi \chi'_\delta]. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (3) принимают вид

$$\begin{aligned} -\omega T + fU + d \exp(-2\chi) \frac{1}{\det J} \left(-\frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} \right) + \\ + d \exp(-2\chi) \frac{1}{\det J} \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее система уравнений дополняется равенством смешанных производных в переменных ξ, δ , аналогично [3]–[5]. Их можно записать в виде

$$-\frac{\partial \chi}{\partial \delta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \delta} - \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \delta} = 0. \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть в (7)–(9) дважды непрерывно дифференцируемые функции имеют вид

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \delta) &= X(\xi, U(\xi, \delta)), & \theta(\xi, \delta) &= \Theta(\xi, U(\xi, \delta)), \\ Y(\xi, \delta) &= G(\xi, U(\xi, \delta)) = \exp(\Omega(\xi, U)), & T(\xi, \delta) &= U(\xi, \delta). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда функция $\Omega(\xi, U)$ имеет вид

$$\Omega(\xi, U) = \Psi(\tau) + \ln(U), \quad \tau = \Theta(\xi, U(\xi, \delta)) - \ln(U), \quad (11)$$

где $\Psi(\tau)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Точное решение системы (7)–(9) и, как следствие, решение уравнения (3) в неявной, параметрической форме имеет вид

$$\Psi'(\tau) = \exp(-2\Psi(\tau))[(\omega - f) \exp(2X(\xi, U)) + d]/d + 1. \quad (12)$$

Якобиан имеет вид

$$\det J = -d\Omega'_\xi U'_\delta \exp(\Omega(\xi, U))/Z_1, \\ Z_1 = d[\exp(2\Omega) + U^2] + \exp(2X(\xi, U))U^2(\omega - f).$$

Доказательство. Одним из важных результатов работ [3]–[5] является, то что доказано, что система (7)–(9) является линейной системой функциональных алгебраических уравнений относительно переменных

$$\mathbf{X}_0 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi}, \frac{\partial \chi}{\partial \delta}, \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right).$$

СФЛАУ имеет единственное точное решение, которое явно точно выписывается. Построение СФЛАУ $\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_0 = \mathbf{b}_1$ относительно переменных описано в цитируемых работах.

Теорема 2. Пусть дана система уравнений с частными производными первого порядка (7)–(9) и справедлива теорема 1. Тогда система (7)–(9) приводится к упрощенному СФЛАУ, и имеет единственное решение

$$\frac{\partial X(\xi, U)}{\partial \xi} = g_1(\xi, U), \quad \frac{\partial X(\xi, U)}{\partial U} = g_2(\xi, U), \\ \frac{\partial \Theta(\xi, U)}{\partial \xi} = g_3(\xi, U), \quad \frac{\partial \Theta(\xi, U)}{\partial \delta} = g_4(\xi, U). \quad (13)$$

Это новая система с формально известной правой частью, относительно функций $X(\xi, U)$, $\Theta(\xi, U)$. Правая часть имеет вид

$$g_1(\xi, U) \stackrel{\text{def}}{=} -[d \exp(\Psi(\tau))\Psi'(\tau)\tau\Theta(\xi, U)'_\xi]/Z_2, \\ g_2(\xi, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} -[d \exp(\Psi) \Psi'(\tau)\tau(U\Theta'_U - 1)]/(UZ_2), \\ g_4(\xi, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} [U(d + \exp(2X(\xi, U))(\omega - f) + d \exp(2\Omega)\Omega'_U(\xi, U)]/Z_1, \\ g_3(\xi, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} d \exp(2\Omega)\Omega'_\xi/Z_1, \quad (14)$$

где функция $\Omega(\xi, U)$ определена равенством (11). Здесь знаменатели имеют вид $Z_1 = d(\exp(2\Omega(\xi, U)) + U^2) + U^2(\omega - f) \exp(2X(\xi, U))$, $Z_2 = d(1 + \exp(2\Psi(\xi, U)) + (\omega - f) \exp(2X(\xi, U)))$ □

Комментарии к доказательству. Далее надо найти способ удовлетворить равенство смешанных производных

$$\chi''_{\xi\delta} = \chi''_{\delta\xi}, \quad \theta''_{\xi\delta} = \theta''_{\delta\xi}. \quad (15)$$

Для этого, учитывая опыт, [4]–[6] положим (10). Из условий разрешимости следует одно уравнение первого порядка с частными производными

$$-\Theta'_\xi + U\Omega'_U\Theta'_\xi + (1 - U\Theta'_U)\Omega'_\xi = 0. \quad (16)$$

Интеграл уравнения (16) имеют вид (11).

Система (13)–(14) интегрируется. Точное решение приведено в теореме 1 (12). Для системы (13)–(14) выполнены условия разрешимости в переменных ξ , U .

Таким образом, все введенные в (4), (6) функции определены однозначно. Из (12) следует выражение для коэффициента диффузии. Далее задаем функцию $\Psi(\tau)$ и строим графики. Если $\Psi(\tau)$ содержит тригонометрические функции или функции Бесселя, то решение имеет вид спиральных волн. Построенные формулы позволяют описать и получить графики эффектов обнаруженных в [1], [2]. Становится очевидным зависимость времени жизни структуры от параметров задачи, зависимость скорости убывания решения по направлениям от параметров задачи, возникновение вторичных структур и описывается эффект коллективного «локального» вращения.

Литература

- [1] Курдюмов С. П. Режимы с обострением. Эволюция идей. Под ред. Г. Г. Малинецкого. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.
- [2] Димова С. Н., Касчиев М. С., Колева М. И., Васильева Д. П. Численное исследование радиально-несимметричных структур в нелинейной теплопроводной среде. – С. 157–165.
- [3] Волосова А. К. Математическое моделирование нелинейной динамики системы открытого гиперцикла. Дисс. на соиск. уч. степени к. ф.-м. н. – МИИТ, 2011. www.aplsmath.ru. <http://vteorii.ru/?book=cat&cat=fizmat&str=22208nomer=2221>
- [4] Волосов К. А. Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами. Дисс. на соискание уч. степени д. ф.-м. н. – МИЭМ, 2007. <http://eqworld.ipmnet.ru>, www.aplsmath.ru
- [5] Волосова А. К., Волосов К. А. Construction solutions of PDE in Parametric Form // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. V.2009, Article ID, 319268, 17 p. <http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html>.doi:10.1155./2009/319269
- [6] Волосов К. А. Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сибирский журнал индустриальной математики 2008, Vol. 11, №. 2(34). – С. 29–39. English transl. in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2009, Vol. 3, No. 4, P. 519–527.

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ СОПРЯЖЁННОЙ ТЕПЛОВОЙ ЗАДАЧИ В ШАРОВОЙ ОБЛАСТИ

Резникова И. А.

Сибирский федеральный университет

Красноярск

e-mail: ilona_reznikova@mail.ru

Reznikova I. A. On the prior estimates of solutions of a joint heat problem in spherical area. Spherically symmetric adjoint initial-boundary value problem of heat propagation in closed bounded spherical regions has been researched. A priori estimates of temperature have been obtained subject to internal heat sources. Friedrichs inequality has been generalized for such areas. Keywords: initial-boundary value problem, a priori estimates, Green function, interface.

Исследована сферически симметричная сопряжённая начально-краевая задача распространения тепла в замкнутых ограниченных шаровых областях. Получены априорные оценки температуры в зависимости от внутренних источников тепла. Дано обобщение неравенства Фридрихса на такие области. Ключевые слова: начально-краевая задача, априорные оценки, функция Грина, поверхность раздела.

1. Обобщение неравенства Фридрихса на составные шаровые области.

Пусть $u_1(r, \theta, \varphi)$ — функция, определённая в шаре

$$\bar{\Omega}_1 = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq R_1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

а $u_2(r, \theta, \varphi)$ — в шаровом слое

$$\bar{\Omega}_2 = \{(r, \theta, \varphi) | R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Предположим, что функции $u_{1,2}$ удовлетворяют граничным условиям

$$|u_1(0, \theta, \varphi)| < \infty, \quad (1.1)$$

$$u_1|_{r=R_1} = u_2|_{r=R_1}, \quad (1.2)$$

$$k_1 u_{1r}|_{r=R_1} = k_2 u_{2r}|_{r=R_1}, \quad (1.3)$$

$$u_2|_{r=R_2} = 0, \quad u_j \in W_2^1(\Omega_j), \quad j = 1, 2. \quad (1.4)$$

Тогда для функций u_j справедливо неравенство типа Фридрихса

$$\int_{\Omega_1} u_1^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} u_2^2 d\Omega_2 \leq M_0 \left(k_1 \int_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 d\Omega_1 + k_2 \int_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 d\Omega_2 \right), \quad (1.5)$$

где k_j — известные положительные постоянные — коэффициенты теплопроводностей. В ходе доказательства последнего неравенства возникают уравнения Эйлера вариационной задачи [1]

$$-k_j \Delta u_j = M_0^{-1} u_j, \quad (r, \theta, \varphi) \in \Omega_j. \quad (1.6)$$

Положительность числа M_0 легко доказывается. Обозначим $\lambda = 1/M_0$; если $\lambda = 0$, то $u_j \equiv 0$. Поэтому далее считаем $\lambda > 0$ ($M_0 > 0$) и нетривиальные решения уравнения (1.6) получаем методом разделения переменных [2, 3]

$$u_{jn}(r, \theta, \varphi) = R_{jn}(r)T_n(\theta, \varphi),$$

$$R_{1n} = r^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\lambda/k_1}\right), \quad R_{2n} = r^{-\frac{1}{2}}\left(C_1J_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\lambda/k_2}\right) + C_2Y_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\lambda/k_2}\right)\right),$$

$$T_n(\theta, \varphi) = a_0P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos\theta),$$

где P_n — полиномы Лежандра, $P_n^{(k)}$ — присоединённые полиномы Лежандра. Подставляя решение в граничные условия (1.2)–(1.4), можно найти C_1, C_2 и уравнение на λ . Перейдём к безразмерным переменным $k = k_1/k_2$, $\omega^2 = \lambda R_1^2/k_1$, $R = R_1/R_2$, тогда характеристическое уравнение на λ примет вид:

$$F(\omega, n, k, R) \equiv (k-1)nJ_{n+\frac{1}{2}}(\omega) - k\omega J_{n+\frac{3}{2}}(\omega) + \omega\sqrt{k}J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}/R)Y_{n+\frac{3}{2}}(\omega\sqrt{k}) - J_{n+\frac{3}{2}}(\omega\sqrt{k})Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}/R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}/R)Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}) - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k})Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega\sqrt{k}/R)} = 0. \quad (1.7)$$

Рассмотрим тонкий слой, тогда $1 - R = \varepsilon \ll 1$, $1/R = (1 - \varepsilon)^{-1} \approx 1 + \varepsilon$. Используя разложение в ряд Тейлора и формулы для производных функций Бесселя [4], из уравнения (1.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в нулевом приближении получим: $J_{n+\frac{1}{2}}(\omega_0) \approx 0$, то есть приближенное значение $\omega \approx \omega_0^{(n)}$ такое же, как если бы шар был однородным. Если ω_{\min} — минимальный положительный корень уравнения (1.7), то постоянная в неравенстве (1.5) такова $M_0 = R_1^2/(k_1\omega_{\min}^2)$.

При $n = 0$ (сферически-симметричный случай) выражение (1.7) допускает упрощение до следующего

$$F = \left(\frac{1-k}{\omega\sqrt{k}} - \operatorname{ctg}\left(\frac{R-1}{R}\omega\sqrt{k}\right)\right) \sin\omega + \sqrt{k} \cos\omega = 0. \quad (1.8)$$

Нам необходимо найти $\omega_{\min} = R_1\sqrt{\lambda_{\min}/k_1}$. Если ω является корнем уравнения (1.8), то и $-\omega$ — тоже его корень. Поэтому достаточно считать $\omega \geq 0$. Легко доказывается, что первый положительный корень функции F лежит в интервале $(0; \pi) \forall k \neq 0$ и $0 < R < 1$. С ростом R минимальное значение корня близко к π . Это и неудивительно, поскольку при $R \rightarrow 1$ (тонкий внешний слой) уравнение (1.8) эквивалентно $\sin\omega \approx 0$, что и даёт $\omega_{\min} \approx \pi$.

2. Основные уравнения и граничные условия.

Предположим, что функции $u_j(r, t)$ определены соответственно в областях $\bar{\Omega}_1 = \{r | 0 \leq r \leq R_1\}$, $\bar{\Omega}_2 = \{r | R_1 \leq r \leq R_2\}$ и удовлетворяют уравнениям

$$u_{jt} = \chi_j \left(u_{jrr} + \frac{2}{r}u_{jr}\right) + f_j(r, t), \quad t > 0, \quad r \in \Omega_j. \quad (2.1)$$

Функции u_j представляют собой поля температур, f_j — заданные внутренние источники тепла; χ_j — известные положительные постоянные — коэффициенты теплопроводностей, $j = 1, 2$.

Кроме того, имеются начальные и граничные условия

$$u_1|_{t=0} = u_2|_{t=0} = 0; \quad (2.2)$$

$$u_1|_{r=R_1} = u_2|_{r=R_1}, \quad (2.3)$$

$$k_1 u_{1r}|_{r=R_1} = k_2 u_{2r}|_{r=R_1}, \quad (2.4)$$

$$u_2|_{r=R_2} = 0, \quad (2.5)$$

$$|u_1(0, t)| < \infty. \quad (2.6)$$

Условие (2.3) представляет собой равенство температур, а (2.4) — равенство потоков тепла на границе раздела $r = R_1$. Известно [5], что $\chi_j = k_j/c_j\rho_j$, где c_j — удельные теплоёмкости, ρ_j — плотности сред.

Требуется найти функции $u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1(\Gamma_1) \cap C(\Gamma_2)$, $\Gamma_j = \{r|R_j\}$, $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1(\Gamma_1)$, удовлетворяющие уравнениям (2.1) и условиям (2.2)—(2.6).

3. Априорные оценки решения.

Введём функцию времени

$$E(t) = \frac{c_1\rho_1}{2} \int_0^{R_1} r^2 u_1^2 dr + \frac{c_2\rho_2}{2} \int_{R_1}^{R_2} r^2 u_2^2 dr. \quad (3.1)$$

Из (2.1)—(2.5) при помощи (3.1), неравенств (1.5) и Гёльдера, получаем $\forall t \geq 0$

$$E(t) \leq e^{-2\delta t} \left(\int_0^t g(\tau) e^{\delta\tau} d\tau \right)^2, \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (R_1 \sqrt{c_1\rho_1} \|f_1\| + R_2 \sqrt{c_2\rho_2} \|f_2\|). \quad (3.2)$$

Замечание. Из неравенства (3.2) следует единственность решения задачи (2.1)—(2.6).

Из определения $E(t)$ (3.1) следуют оценки ru_j в норме $L_2(\Omega_j)$

$$\|ru_j\| \leq e^{-\delta t} \sqrt{\frac{2}{c_j\rho_j}} \int_0^t g(\tau) e^{\delta\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

Предположим, что (всюду далее $A_{01}, A_{02}, A_1, \dots, A_{13}$ — положительные постоянные)

$$\left(\int_{\Omega_j} f_j^2(\xi, t) d\xi \right)^{1/2} \leq A_{0j} e^{-\gamma t}, \quad \gamma > \delta. \quad (3.4)$$

Пользуясь неравенствами Гёльдера, (3.3), (3.4) и интегрированием по частям, из (2.1)—(2.5) имеем оценку для u_2 :

$$|u_2| \leq A_1 e^{-\frac{\delta t}{2}}, \quad \forall r \in [R_1, R_2], \quad t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Для получения оценки функции $u_1(r, t)$ можно воспользоваться представлением решения 1-ой краевой задачи в шаре Ω_1 [6]:

$$u_1(r, t) = -\chi_1 \int_0^t u_2(R_1, \tau) \Lambda(r, t - \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^{R_1} f_1(\xi, \tau) G(r, \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (3.6)$$

где G есть функция Грина, причём

$$G(r, \xi, t) = \frac{2\xi}{R_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi r}{R_1}\right) \sin\left(\frac{n\pi \xi}{R_1}\right) \exp\left(-\frac{\chi_1 n^2 \pi^2 t}{R_1^2}\right), \quad (3.7)$$

$$\Lambda(r, t) = \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=R_1} = \frac{2\pi}{R_1 r} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin\left(\frac{n\pi r}{R_1}\right) \exp\left(-\frac{\chi_1 n^2 \pi^2 t}{R_1^2}\right). \quad (3.8)$$

Легко заметить, что $G(r, R_1, t) = 0$.

Ряды (3.7), (3.8) быстро сходятся при больших t [5]. При малых t быстро сходятся ряды для эквивалентных представлений G и Λ [5]:

$$G(r, \xi, t) = \frac{\xi}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G_0(r, 2nR_1 + \xi, t) - G_0(r, 2nR_1 - \xi, t)], \quad (3.9)$$

а $G_0(r, \xi, t) = (2\sqrt{\pi\chi_1 t})^{-1} \exp(-(r - \xi)^2/(4\chi_1 t))$ есть функция источника. При такой записи

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=R_1} &= \frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (r - (2n+1)R_1) \exp\left(-\frac{(r - (2n+1)R_1)^2}{4\chi_1 t}\right) + \\ &+ \frac{R_1}{4r\sqrt{\pi\chi_1^3 t^3}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (r - (2n-1)R_1) \exp\left(-\frac{(r - (2n-1)R_1)^2}{4\chi_1 t}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вернёмся к формуле (3.6) и представим $\int_0^t = \int_0^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^t$ при произвольном $0 < \varepsilon < t$. При $0 \leq \tau \leq t - \varepsilon$ имеем $t - \tau \geq \varepsilon > 0$. Значит на $[0, t - \varepsilon]$ надо пользоваться формулами (3.7), (3.8), а при $0 < t - \varepsilon \leq \tau \leq t$ — использовать представление (3.9), (3.10).

С помощью неравенств Гёльдера, (3.4) и (3.5), $\forall r \in [0, R_1]$ получаем [7]

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t-\varepsilon} \int_0^{R_1} f_1(\xi, \tau) G(r, \xi, t - \tau) d\xi d\tau \right| &\leq \begin{cases} A_2(t - \varepsilon) \exp\left(-\frac{\chi_1 \pi^2 t}{R_1^2}\right), & \gamma = \frac{\chi_1 \pi^2}{R_1^2} \\ A_3 \left| A_4 e^{-\gamma t} - \exp\left(-\frac{\chi_1 \pi^2 t}{R_1^2}\right) \right|, & \gamma \neq \frac{\chi_1 \pi^2}{R_1^2} \end{cases} \equiv h_1(t), \\ \left| -\chi_1 \int_0^{t-\varepsilon} u_2(\tau) \Lambda(r, t - \tau) d\tau \right| &\leq \begin{cases} A_5(t - \varepsilon) \exp\left(-\frac{\chi_1 \pi^2 t}{R_1^2}\right), & \delta = \frac{2\chi_1 \pi^2}{R_1^2} \\ A_6 \left| A_7 e^{-\frac{\delta t}{2}} - \exp\left(-\frac{\chi_1 \pi^2 t}{R_1^2}\right) \right|, & \delta \neq \frac{2\chi_1 \pi^2}{R_1^2} \end{cases} \equiv h_2(t). \end{aligned}$$

Теперь оценим $|u_1(0, t)|$. Из формул (3.9), (3.10), неравенств (3.4), (3.5), пользуясь правилом Лопиталья и считая $\varepsilon \leq R_1^2/2\chi_1$, выводим

$$\left| \int_{t-\varepsilon}^t \int_0^{R_1} f_1(\xi, \tau) G(0, \xi, t - \tau) d\xi d\tau \right| \leq A_8 e^{-\gamma t}, \quad \left| -\chi_1 \int_{t-\varepsilon}^t u_2(\tau) \Lambda(0, t - \tau) d\tau \right| \leq A_9 e^{-\frac{\delta t}{2}}.$$

По непрерывности G $\exists \varepsilon_1 > 0$ такое, что $\forall r \in [0, \varepsilon_1]$ справедлива оценка

$$\left| \int_{t-\varepsilon}^t \int_0^{R_1} f_1(\xi, \tau) G(r, \xi, t - \tau) d\xi d\tau \right| \leq A_8 e^{-\gamma t}.$$

По непрерывности Λ $\exists \varepsilon_2 > 0$, что $\forall r \in [0; \varepsilon_2]$ справедлива оценка

$$\left| -\chi_1 \int_{t-\varepsilon}^t u_2(\tau) \Lambda(r, t-\tau) d\tau \right| \leq A_9 e^{-\frac{\delta t}{2}}.$$

Пусть теперь $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, тогда для $\varepsilon_3 \leq r \leq R_1$ из формулы (3.10) при помощи неравенств Гёльдера и (3.4) выводим

$$\left| \int_{t-\varepsilon}^t \int_0^{R_1} f_1(\xi, \tau) G(r, \xi, t-\tau) d\xi d\tau \right| \leq A_{10} e^{-\gamma t}, \quad \left| -\chi_1 \int_{t-\varepsilon}^t u_2(\tau) \Lambda(r, t-\tau) d\tau \right| \leq A_{11} e^{-\frac{\delta t}{2}}.$$

Таким образом $\forall r \in [0, R_1], t \in [0, T]$ получена оценка

$$\boxed{|u_1| \leq h_1(t) + h_2(t) + A_{12} e^{-\gamma t} + A_{13} e^{-\frac{\delta t}{2}}} \quad (3.11)$$

$T > 0$ — произвольное число; оценим число δ для Земли, имеем

$$\delta = \frac{1}{M_{0\min}} \min\left(\frac{\chi_1}{k_1}, \frac{\chi_2}{k_2}\right) = \frac{\omega_{\min}^2}{R_1^2} \min(\chi_1, k\chi_2) \approx 1.08 \cdot 10^{-18}/c, \quad (3.12)$$

$\omega_{\min} \approx 2.134565$, $k_1 = 20$ Вт/м \cdot °С, $k_2 = 50$ Вт/м \cdot °С, $\chi_j = 2 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $R_1 = 2.9 \cdot 10^6$ м, $R_2 = 6.37 \cdot 10^6$ м. Таким образом величина δ зависит от геометрии области и физических параметров контактирующих сред.

Обратимся теперь к оценкам температур (3.5) и (3.11). Они получены при условии сходимости интеграла (3.4) с постоянной δ из (3.12). Значит при $t \rightarrow \infty$ температуры в средах стремятся к нулю. Заметим, что условие (3.4) влечёт экспоненциальное затухание интенсивности внутренних источников тепла.

Автор выражает благодарность профессору В. К. Андрееву за постановку задачи, ценные замечания и постоянное внимание при выполнении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00283).

Литература

- [1] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. — М.: “Наука”, 1979. — 429 с.
- [2] Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. — М.: “Физматгиз”, 2003. — 400 с.
- [3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: “Лань”, 2003. — 576 с.
- [4] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган — М.: “Наука”, 1979. — 832 с.
- [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: “Наука”, 1972. — 736 с.
- [6] Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: “Физматлит”, 2001. — 575 с.

- [7] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: “Физматлит”, 2001. — 680 с.

УДК 517.95

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Созонтова Е. А.

Казанский (Приволжский) федеральный университет (г. Казань)

e-mail: sozontova-elena@rambler.ru

Sozontova E. A. Characteristic problems for a hyperbolic system in three-dimensional space. We consider characteristic problems for a hyperbolic system with three independent variables. Using the Riemann method and the theory of integral equations we obtain conditions of one-valued solvability for this problems.

Исследованы характеристические задачи для системы гиперболического типа с тремя независимыми переменными. С помощью метода Римана и теории интегральных уравнений получены условия однозначной разрешимости поставленных задач.

Рассмотрим в области $G = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$ систему

$$\begin{cases} u_{xy} + a_1u_x + b_1u_y + c_1u + d_1v + e_1w = f_1, \\ v_{yz} + a_2v_y + b_2v_z + c_2v + d_2u + e_2w = f_2, \\ w_{xz} + a_3w_x + b_3w_z + c_3w + d_3u + e_3v = f_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_i, b_i \in C^2(\overline{G})$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1(\overline{G})$ ($i = \overline{1,3}$). Решение системы (1) класса $u, v, w \in C^1(G)$, $u_{xy}, v_{yz}, w_{xz} \in C(G)$ назовем регулярным в G .

Введем обозначения: $u_1 = u_y + a_1u$, $v_1 = v_z + a_2v$, $w_1 = w_x + a_3w$.

Задача 1. Найти в области G регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x, y_0, z) &= \varphi_1(x, z), & u_1(x_0, y, z) &= \psi_1(y, z), \\ v(x, y, z_0) &= \varphi_2(x, y), & v_1(x, y_0, z) &= \psi_2(x, z), \\ w(x_0, y, z) &= \varphi_3(y, z), & w_1(x, y, z_0) &= \psi_3(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi_1, \psi_1 \in C^1(\overline{X})$, $\varphi_2, \psi_2 \in C^1(\overline{Y})$, $\varphi_3, \psi_3 \in C^1(\overline{Z})$ (X, Y, Z — грани характеристического параллелепипеда G $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ соответственно.)

Теорема 1. Если в замыкании области G выполняются включения $a_i, b_i \in C^2(\overline{G})$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1(\overline{G})$ ($i = \overline{1,3}$), то решение задачи 1 существует и единственно.

Задача 2. Найти в области G регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x, y_0, z) &= \varphi_1(x, z), & u_1(x_1, y, z) &= \chi_1(y, z), \\ v(x, y, z_0) &= \varphi_2(x, y), & v_1(x, y_1, z) &= \chi_2(x, z), \\ w(x_0, y, z) &= \varphi_3(y, z), & w_1(x, y, z_1) &= \chi_3(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi_1 \in C^1(\overline{X})$, $\varphi_2 \in C^1(\overline{Y})$, $\varphi_3 \in C^1(\overline{Z})$, $\chi_1 \in C^1(\overline{X_1})$, $\chi_2 \in C^1(\overline{Y_1})$, $\chi_3 \in C^1(\overline{Z_1})$.

Исследуем разрешимость задачи 2 путем сведения её к задаче 1. Для этого по данным (3) необходимо получить $u_1(x_0, y, z) = \psi_1(y, z)$, $v_1(x, y_0, z) = \psi_2(x, z)$, $w_1(x, y, z_0) = \psi_3(x, y)$. Используя решение задачи 1, записанное в терминах матрицы Римана [1], получим систему трех интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
u_1(x_0, y, z) &+ \int_{z_0}^z r_{22\zeta}(x_0, y, \gamma, x_1, y, z) u_1(x_0, y, \gamma) d\gamma + \\
&+ \int_{y_0}^y r_{22\eta}(x_0, \beta, z, x_1, y, z) u_1(x_0, \beta, z) d\beta + \\
&+ \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z r_{22\eta\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x_1, y, z) u_1(x_0, \beta, \gamma) d\beta d\gamma + \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} r_{24\eta}(\alpha, y_0, z, x_1, y, z) v_1(\alpha, y_0, z) d\alpha + \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} \int_{z_0}^z r_{24\eta\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x_1, y, z) v_1(\alpha, y_0, \gamma) d\alpha d\gamma + \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} r_{26\zeta}(\alpha, y, z_0, x_1, y, z) w_1(\alpha, y, z_0) d\alpha + \\
&+ \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^y r_{26\eta\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x_1, y, z) w_1(\alpha, \beta, z_0) d\alpha d\beta = F_1(y, z) + \chi_1(y, z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1(x, y_0, z) &+ \int_{x_0}^x r_{44\xi}(\alpha, y_0, z, x, y_1, z) v_1(\alpha, y_0, z) d\alpha + \\
&+ \int_{z_0}^z r_{44\zeta}(x, y_0, \gamma, x, y_1, z) v_1(x, y_0, \gamma) d\gamma + \\
&+ \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z r_{44\xi\zeta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y_1, z) v_1(\alpha, y_0, \gamma) d\alpha d\gamma + \\
&+ \int_{y_0}^{y_1} r_{42\xi}(x_0, \beta, z, x, y_1, z) u_1(x_0, \beta, z) d\beta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^z r_{42\xi\zeta}(x_0, \beta, \gamma, x, y_1, z) u_1(x_0, \beta, \gamma) d\beta d\gamma + \\
& \quad + \int_{y_0}^{y_1} r_{46\zeta}(x, \beta, z_0, x, y_1, z) w_1(x, \beta, z_0) d\beta + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^{y_1} r_{46\xi\zeta}(\alpha, \beta, z_0, x, y_1, z) w_1(\alpha, \beta, z_0) d\alpha d\beta = F_2(x, z) + \chi_2(x, z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1(x, y, z_0) & + \int_{y_0}^y r_{66\eta}(x, \beta, z_0, x, y, z_1) w_1(x, \beta, z_0) d\beta + \\
& \quad + \int_{x_0}^x r_{66\xi}(\alpha, y, z_0, x, y, z_1) w_1(\alpha, y, z_0) d\alpha + \\
& \quad + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y r_{66\xi\eta}(\alpha, \beta, z_0, x, y, z_1) w_1(\alpha, \beta, z_0) d\alpha d\beta + \\
& \quad + \int_{z_0}^{z_1} r_{62\xi}(x_0, y, \gamma, x, y, z_1) u_1(x_0, y, \gamma) d\gamma + \\
& \quad + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^{z_1} r_{62\xi\eta}(x_0, \beta_0, \gamma, x, y, z_1) u_1(x_0, \beta_0, \gamma) d\beta d\gamma + \\
& \quad + \int_{z_0}^{z_1} r_{64\eta}(x, y_0, \gamma, x, y, z_1) v_1(x, y_0, \gamma) d\gamma + \\
& \quad + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^{z_1} r_{64\xi\eta}(\alpha, y_0, \gamma, x, y, z_1) v_1(\alpha, y_0, \gamma) d\alpha d\gamma = F_3(x, y) + \chi_3(x, y).
\end{aligned}$$

Функции $F_1(y, z)$, $F_2(x, z)$, $F_3(x, y)$ известны.

Решение данной системы $(u_1(x_0, y, z), v_1(x, y_0, z), w_1(x, y, z_0))$ существует и единственно в классе непрерывных функций. Таким образом, задача 2 редуцируется к задаче 1 и, следовательно, справедливо утверждение

Теорема 2. Если в замыкании области G выполняются включения $a_i, b_i \in C^2(\overline{G})$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1(\overline{G})$ ($i = \overline{1, 3}$), то существует единственное решение задачи 2.

Литература

- [1] Миронова Л. Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. 2006. № 1.– С. 34–39.

ТЕОРЕМА ОБ УСРЕДНЕНИИ В УСЛОВИЯХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ СКОРОСТЕЙ

Филатов О. П.

Самарский государственный университет

Самара

e-mail: filatov_oleg@samaradom.ru

Filatov O. P. The theorem of averaging in unlimited speeds. The limit of the maximal mean coincides with the maximum value continuous real-valued function defined on a multi-dimensional torus, if the convex hull of the right side of the differential inclusion contains a ray with a direction vector, which is independent coordinates. The maximum mean is calculated over all solutions of the Cauchy problem for differential inclusion.

Keywords: limit of maximal mean, theorem of average, differential inclusion, unlimited right hand side, periodic function, independent coordinates.

Предел максимального среднего совпадает с максимальным значением непрерывной вещественной функции, заданной на многомерном торе, если выпуклая оболочка правой части дифференциального включения содержит луч с направляющим вектором, который имеет независимые координаты. Максимальное среднее вычисляется по всем решениям задачи Коши для дифференциального включения.

Ключевые слова: предел максимального среднего, теорема усреднения, дифференциальное включение, неограниченная правая часть, периодическая функция, независимые координаты.

Теорема усреднения в классической постановке изложена, например, в [1]. Рассмотрим следующее обобщение. Пусть непрерывная вещественная функция $f(y)$ задана на n -мерном торе \mathbb{T}^n , $y = (y_1, \dots, y_n) \bmod 2\pi$ – угловые координаты. Введем предел максимального среднего

$$M(f) = \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y(y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(y(t)) dt.$$

Здесь $Y(y_0)$ – множество всех решений задачи Коши

$$\dot{y} \in G, \quad y(0) = y_0,$$

где неограниченное множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Под решением дифференциального включения понимается функция $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y(0) = y_0$, абсолютно непрерывная на любом отрезке $[0, \Delta]$, $\Delta > 0$, производная которой $\dot{y}(t) \in G$ почти всюду по времени $t \in [0, \infty)$.

Основной вопрос связан с достаточными условиями, которые влекут независимость предела максимального среднего $M(f)$ от начального вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

В классической постановке множество G содержит единственный вектор $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Если его координаты независимы ($k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0$ для целочисленных k_1, \dots, k_n , то теорема усреднения гласит [1], что временное среднее от функции $f(y_0 + t\omega)$ на полупрямой $[0, \infty)$ совпадает с пространственным средним функции $f(y)$ по тору \mathbb{T}^n . Этот результат независимо установлен в 1909 г. П. Бодем, В. Серпинским и Г. Вейлем.

В [2] доказано, что $M(f) = f_{\max}$, где f_{\max} – максимальное значение функции f , при условии, что множество $G \subset \mathbb{R}^n$ невырожденное, т. е. оно не принадлежит собственному подпространству из \mathbb{R}^n , а его выпуклая оболочка $co(G)$ содержит полупрямую $l_0 = v_0 + l_0$, где вектор $v_0 \neq 0$, луч $l_0 = \{t\omega : t \geq 0\}$, с направляющим вектором $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, координаты которого независимы.

Вопрос: можно ли освободиться от требования невырожденности множества G ?

Основной результат данной работы можно сформулировать в следующем виде. Пусть луч $l = \{t\omega : t \geq \delta\}$ при некотором $\delta \in \mathbb{R}$ содержится в выпуклой оболочке множества $G \subset \mathbb{R}^n$ и координаты вектора ω независимы. Тогда для непрерывной функции $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ предел максимального среднего $M(f) = f_{\max}$.

Дополнительные естественные требования на функцию f , связанные с измеримостью по Жордану соответствующих множеств, приведены в теореме 1 из [3].

Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-97002-р_поволжье_а.

Литература

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. – М., 1989. – 472 с.
- [2] Филатов О. П. Принцип максимума для почти периодических функций в задачах вычисления пределов максимальных средних // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2009. Материалы научной конференции, 13–18 апреля 2009. – СПб: БАН, 2009. – С. 111–117.
- [3] Филатов О. П. Теорема об усреднении для неопределенных условно-периодических движений // Математические заметки. 2011. Т. 90, вып. 2. – С. 318–320.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПО ЕГО УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Ханукаев Ю. И.

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
e-mail: khan.yuri@gmail.com

The algorithm of creation of the ranks describing change in time of directing cosines of any of motionless basis vector in axes, connected with a body is considered. Components of angular

speed of the body which is freely rotating round a motionless point, are presented by Weierstrass's functions.

Рассмотрен алгоритм построения рядов, описывающих изменение во времени направляющих косинусов любого неподвижного орта в осях, связанных с телом. Компоненты угловой скорости тела, свободно вращающегося вокруг неподвижной точки, представлены функциями Вейерштрасса.

1. Ориентацию любого неподвижного орта \mathbf{e} , относительно осей, жёстко связанных с телом, определяет векторное уравнение $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$, либо в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

При определении ориентации тела кватернионом результирующего поворота имеем

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\lambda \circ \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad \text{либо} \quad \begin{pmatrix} 2\dot{\lambda}_0 \\ 2\dot{\lambda}_1 \\ 2\dot{\lambda}_2 \\ 2\dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В параметрах Кэли–Клейна $\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3$, $\beta = -\lambda_2 + i\lambda_1$, $\gamma = \lambda_2 + i\lambda_1$, $\delta = \lambda_0 - i\lambda_3$ эти уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\alpha} &= ir\alpha + (q + ip)\beta, & 2\dot{\beta} &= -ir\beta - (q - ip)\alpha, \\ 2\dot{\gamma} &= ir\gamma + (q + ip)\delta, & 2\dot{\delta} &= -ir\delta - (q - ip)\gamma. \end{aligned}$$

Получили две однотипные системы уравнений, которые подстановкой

$$\alpha(\gamma) = \xi \exp\left(i \int_0^t \frac{r}{2} dt\right), \quad \beta(\delta) = \xi \exp\left(-i \int_0^t \frac{r}{2} dt\right)$$

приводятся к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \Omega = \frac{q + ip}{2} \exp\left(-i \int_0^t r dt\right). \quad (3)$$

Большие круги сферы, связанной с телом, при стереографическом проектировании из её полюса на экваториальную плоскость также дают окружности [1]. Дробно-линейное преобразование $z = \frac{-\delta\dot{z} + \beta}{\gamma\dot{z} - \alpha}$ ($z = x + iy$, $\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) представляет собой преобразование точек одной окружности экваториальной плоскости в точки другой окружности этой же плоскости. В связи с этим Дарбу предложил сопоставлять произвольному повороту тела

с неподвижной точкой дробно-линейное преобразование, дифференцирование которого даёт уравнение Дарбу–Риккати: $2\dot{z} = (q - ip) - i2zr + (q + ip)z^2$. Это уравнение нелинейное.

Определение ориентации тела углами Эйлера или какими-либо другими углами также даёт нелинейную систему уравнений.

Таким образом, определяя положение тела направляющими косинусами, либо кватернионом результирующего поворота, имеем линейную систему уравнений первого порядка с коэффициентами, зависящими от времени. Решение такой системы может быть записано в виде ряда квадратур:

$$\dot{x} = Ax, \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad x_0 = x(0), \quad x_k = \int_0^t Ax_{k-1} dt, \quad (4)$$

т. е.

$$x = x_0 + \int_0^t Ax_0 dt + \int_0^t A \int_0^t Ax_0 dt dt + \int_0^t A \int_0^t A \int_0^t Ax_0 dt dt dt + \dots$$

2. Проиллюстрируем работу алгоритма (4) рассмотрением регулярной прецессии тела в параметрах Кэли–Клейна: $\dot{\psi} = \omega_{\psi} = \text{const}$, $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \omega_{\varphi} = \text{const}$,

$$p = \omega_{\psi} \sin \theta_0 \sin \omega_{\varphi} t, \quad q = \omega_{\psi} \sin \theta_0 \cos \omega_{\varphi} t, \quad r = \omega_{\varphi} + \omega_{\psi} \cos \theta_0.$$

Компоненты кватерниона результирующего поворота при регулярной прецессии тела известны и функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ строятся элементарно:

$$\xi(t) = (\lambda_0 + i\lambda_3) \exp\left(-i \int_0^t \frac{r}{2} dt\right) = \cos \frac{\theta_0}{2} \exp\left(i\omega_{\psi} t \sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right),$$

$$\eta(t) = (-\lambda_2 + i\lambda_1) \exp\left(i \int_0^t \frac{r}{2} dt\right) = i \cos \frac{\theta_0}{2} \exp\left(i\omega_{\psi} t \cos^2 \frac{\theta_0}{2}\right).$$

Сформируем эти решения уравнений (3) вычислением ряда квадратур. В связи с тем, что построение квадратур требует вычисления определённых интегралов, экспоненту представим степенными рядом.

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{q + ip}{2} \exp\left(-i \int_0^t r dt\right) = \frac{1}{2} \omega_{\psi} \sin \theta_0 \exp(-i\omega_{\psi} t \cos \theta_0) = \\ &= \omega_{\psi} \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} \left[1 - \frac{(i\omega_{\psi} t \cos \theta_0)}{1!} + \frac{(i\omega_{\psi} t \cos \theta_0)^2}{2!} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(i\omega_{\psi} t \cos \theta_0)^3}{3!} + \frac{(i\omega_{\psi} t \cos \theta_0)^4}{4!} - \dots \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{pmatrix} &= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{k-1} \\ \eta_{k-1} \end{pmatrix} dt \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = \cos(\theta_0/2), \\ \eta_0 = i \sin(\theta_0/2), \end{array} \right\} \rightarrow \\
&\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)}{1! \cos \theta_0} - \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^2}{2! \cos \theta_0} + \right. \\ \left. + \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^3}{3! \cos \theta_0} - \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos \theta_0} + \dots \right], \\ \eta_1 = i \sin \frac{\theta_0}{2} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)}{1! \cos \theta_0} + \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^2}{2! \cos \theta_0} + \right. \\ \left. + \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^3}{3! \cos \theta_0} + \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos \theta_0} + \dots \right], \end{array} \right\} \rightarrow \\
&\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \cos^3 \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^2}{2! \cos^2 \theta_0} - \frac{(i\omega_\psi t \cos^2 \theta_0)^3}{3! \cos^2 \theta_0} + \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos^2 \theta_0} - \dots \right], \\ \eta_2 = i \sin^3 \frac{\theta_0}{2} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^2}{2! \cos^2 \theta_0} + \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^3}{3! \cos^2 \theta_0} + \frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos^2 \theta_0} + \dots \right], \end{array} \right\} \rightarrow \\
&\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_3 = \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \cos^3 \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos^2 \theta_0)^3}{3! \cos^3 \theta_0} - \frac{2(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos^3 \theta_0} + \dots \right], \\ \eta_3 = i \sin^3 \frac{\theta_0}{2} \cos^4 \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^3}{3! \cos^3 \theta_0} + \frac{2(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos^3 \theta_0} + \dots \right], \end{array} \right\} \rightarrow \\
&\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_4 = \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \cos^5 \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos^4 \theta_0} - \dots \right], \\ \eta_4 = i \sin^5 \frac{\theta_0}{2} \cos^4 \frac{\theta_0}{2} \left[\frac{(i\omega_\psi t \cos \theta_0)^4}{4! \cos^4 \theta_0} + \dots \right], \end{array} \right\} \rightarrow
\end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned}
\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k = \cos \frac{\theta_0}{2} \left[1 + \frac{(i\omega_\psi t)}{1!} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{(i\omega_\psi t)^2}{2!} \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \frac{(i\omega_\psi t)^3}{3!} \sin^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right], \\
\eta &= \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k = i \sin \frac{\theta_0}{2} \left[1 + \frac{(i\omega_\psi t)}{1!} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{(i\omega_\psi t)^2}{2!} \cos^4 \frac{\theta_0}{2} + \frac{(i\omega_\psi t)^3}{3!} \cos^6 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right].
\end{aligned}$$

что совпадает с известным решением.

3. Определение ориентации твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера начнём с построения решения уравнений динамики [2]. Положив для определённости $A > B > C$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, получаем

$$\dot{p} = \frac{B-C}{A} qr, \quad \dot{q} = \frac{C-A}{B} rp, \quad \dot{r} = \frac{A-B}{C} pq. \quad (5)$$

Два первых интеграла этой системы

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T, \quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2 \quad (6)$$

совместно с выражением $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$ дают неоднородную систему трёх уравнений, определяющую квадраты проекций угловой скорости p^2, q^2, r^2 :

$$p^2 = \frac{CB}{(A-B)(A-C)} (\omega^2 - a_1), \quad a_1 = \frac{2T(B+C) - K^2}{BC} > 0,$$

$$q^2 = \frac{AC}{(B-C)(A-B)} (a_2 - \omega^2), \quad a_2 = \frac{2T(C+A) - K^2}{CA} > 0, \quad (7)$$

$$r^2 = \frac{BA}{(A-C)(B-C)} (\omega^2 - a_3), \quad a_3 = \frac{2T(A+B) - K^2}{AB} > 0.$$

С другой стороны из (5) $p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r} = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right) pqr$ или

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2 \frac{(A-B)(B-C)(A-C)}{ABC} pqr = 2\sqrt{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2)(a_3 - \omega^2)}. \quad (8)$$

Решения (7) могут быть получены непосредственно из (5) и (8), рассмотрением p, q, r как функций ω^2 :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{dp}{d\omega^2} \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{dp}{d\omega^2} 2 \frac{(A-B)(B-C)(A-C)}{ABC} pqr = \frac{B-C}{A} qr \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{dp^2}{d\omega^2} = \frac{BC}{(A-B)(A-C)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{dq}{d\omega^2} \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{dq}{d\omega^2} 2 \frac{(A-B)(B-C)(A-C)}{ABC} pqr = \frac{C-A}{B} rp \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{dq^2}{d\omega^2} = -\frac{CA}{(B-C)(A-B)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\omega^2} \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{dr}{d\omega^2} 2 \frac{(A-B)(B-C)(A-C)}{ABC} pqr = \frac{A-B}{C} pq \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{dr^2}{d\omega^2} = \frac{AB}{(A-C)(B-C)}, \end{aligned}$$

Полагая в (8) $\omega^2 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - \wp$ для функции \wp получаем уравнение, которому удовлетворяет эллиптическая функция Вейерштрасса \wp , а именно

$$\frac{d\wp}{dt} = -2\sqrt{(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)} \quad (9)$$

где

$$e_1 = \frac{1}{3}(a_2 + a_3 - 2a_1) = \frac{(A-B)(K^2 - 2TC) + (A-C)(K^2 - 2TB)}{3ABC}$$

$$e_2 = \frac{1}{3}(a_3 + a_1 - 2a_2) = \frac{(B-C)(K^2 - 2TA) + (B-A)(K^2 - 2TC)}{3ABC}$$

$$e_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 - 2a_3) = \frac{(C-A)(K^2 - 2TB) + (C-B)(K^2 - 2TA)}{3ABC}$$

и $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Функция Вейерштрасса [3] имеет полюс второго порядка в точке $t = 0$:

$$\wp(t) = t^{-2} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k t^{2k-2} = \frac{1}{t^2} + \frac{g_2}{20} t^2 + \frac{g_3}{28} t^4 + \dots \quad (10)$$

Главной её частью является t^{-2} и $\lim_{t \rightarrow 0}(\wp(t) - t^{-2}) = 0$.

Отсюда следует, что решение уравнений динамики твёрдого тела в случае Эйлера в виде степенных по времени рядов должны иметь полюс первого порядка:

$$p = P \left(t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} p_s t^{2s-1} \right), \quad q = Q \left(t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} q_s t^{2s-1} \right), \quad r = R \left(t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} r_s t^{2s-1} \right), \quad (11)$$

где

$$P = \sqrt{\frac{CB}{(A-B)(A-C)}}, \quad Q = \sqrt{\frac{AC}{(B-C)(A-B)}}, \quad R = \sqrt{\frac{BA}{(A-C)(B-C)}}. \quad (12)$$

Выразим квадраты скоростей p_0^2 , q_0^2 , r_0^2 через функцию Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{CB}{(A-B)(A-C)} (\wp - e_1) = \\ &= \frac{CB}{(A-B)(A-C)} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{10} t^2 + \frac{1}{7} e_1 e_2 e_3 t^4 + \dots - e_1 \right) = \\ &= \frac{CB}{(A-B)(A-C)} \left[\frac{1}{t^2} + 2p_1 + (p_1^2 + 2p_2) t^2 + (p_3 + 2p_1 p_2) t^4 + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{AC}{(B-C)(A-B)} (\wp - e_2) = \\ &= \frac{AC}{(B-C)(A-B)} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{10} t^2 + \frac{1}{7} e_1 e_2 e_3 t^4 + \dots - e_2 \right) = \\ &= \frac{AC}{(B-C)(A-B)} \left[\frac{1}{t^2} + 2q_1 + (q_1^2 + 2q_2) t^2 + (q_3 + 2q_1 q_2) t^4 + \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{BA}{(A-C)(B-C)} (\wp - e_3) = \\ &= \frac{BA}{(A-C)(B-C)} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{10} t^2 + \frac{1}{7} e_1 e_2 e_3 t^4 + \dots - e_3 \right) = \\ &= \frac{BA}{(A-C)(B-C)} \left[\frac{1}{t^2} + 2r_1 + (r_1^2 + 2r_2) t^2 + (r_3 + 2r_1 r_2) t^4 + \dots \right], \end{aligned}$$

Из этих равенств имеем $p_1 = -e_1/2$, $q_1 = -e_2/2$, $r_1 = -e_3/2$ и далее

$$p_2 = -\frac{1}{40} (4e_2 e_3 + e_1^2), \quad q_2 = -\frac{1}{40} (4e_3 e_1 + e_2^2), \quad r_2 = -\frac{1}{40} (4e_1 e_2 + e_3^2),$$

$$p_3 = \frac{3}{140} e_1 e_2 e_3 - \frac{1}{80} e_1^3, \quad q_3 = \frac{3}{140} e_1 e_2 e_3 - \frac{1}{80} e_2^3, \quad r_3 = \frac{3}{140} e_1 e_2 e_3 - \frac{1}{80} e_3^3,$$

Не представляет большого труда построить эти ряды непосредственно по уравнениям системы (5). Подстановка рядов (11) в первое уравнение системы (5) даёт

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \sqrt{\frac{CB}{(A-B)(A-C)}} \left(-t^{-2} + \sum_{s=1}^{\infty} p_s(2s-1)t^{2s-2} \right) = \\
&= -\frac{B-C}{A} \sqrt{\frac{AC}{(B-C)(A-B)}} \left(t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} q_s t^{2s-1} \right) \times \\
&\quad \times \sqrt{\frac{BA}{(A-C)(B-C)}} \left(t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} r_s t^{2s-1} \right) \rightarrow \\
&\rightarrow \left(-t^2 + \sum_{s=1}^{\infty} p_s(2s-1)t^{2s-2} \right) = - \left(t^1 + \sum_{s=1}^{\infty} q_s t^{2s-1} \right) \left(t^1 + \sum_{s=1}^{\infty} r_s t^{2s-1} \right) \rightarrow \\
&\quad \rightarrow \sum_{s=1}^{\infty} [p_{s+1}(2s+1) + q_{s+1} + r_{s+1}] = - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^s q_{s-k+1} r_k t^{2s}.
\end{aligned}$$

Группируя коэффициенты при одинаковых степенях времени t , получаем систему уравнений

$$p_1 + q_1 + r_1 = 0, \quad (2s+1)p_{s+1} + q_{s+1} + r_{s+1} = - \sum_{k=1}^s q_{s-k+1} r_k, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Второе и третье уравнения системы (5) соответственно дают

$$p_1 + q_1 + r_1 = 0, \quad (2s+1)q_{s+1} + r_{s+1} + p_{s+1} = - \sum_{k=1}^s r_{s-k+1} p_k, \quad s = 1, 2, 3, \dots,$$

$$p_1 + q_1 + r_1 = 0, \quad (2s+1)r_{s+1} + p_{s+1} + q_{s+1} = - \sum_{k=1}^s p_{s-k+1} q_k, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, имеем последовательность систем уравнений:

$$\begin{aligned}
3p_2 + q_2 + r_2 &= -q_1 r_1, & p_2 &= -(4e_2 e_3 + e_1^2)/40, \\
p_2 + 3q_2 + r_2 &= -r_1 p_1, & \rightarrow q_2 &= -(4e_3 e_1 + e_2^2)/40, \\
p_2 + q_2 + 3r_2 &= -p_1 q_1, & r_2 &= -(4e_1 e_2 + e_3^2)/40,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5p_3 + q_3 + r_3 &= -q_2 r_1 - q_1 r_2, & p_3 &= (3/140)e_1 e_2 e_3 - e_1^3/80, \\
p_3 + 5q_3 + r_3 &= -r_2 p_1 - r_1 p_2, & \rightarrow q_3 &= (3/140)e_1 e_2 e_3 - e_2^3/80, \\
p_3 + q_3 + 5r_3 &= -p_2 q_1 - p_1 q_2, & r_3 &= (3/140)e_1 e_2 e_3 - e_3^3/80,
\end{aligned}$$

...

Особенность, возникающая при $t \rightarrow 0$, устраняется сдвигом t_0 , т. е. заменой t на $t_0 + t$. Начальный сдвиг t_0 определяется условием $\omega_0^2 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) -$

$-\wp(t_0)$, где $\omega_0^2 = p_0^2 + q_0^2 + r_0^2$ – значение квадрата угловой скорости в начальный момент. Итак, вводя независимую переменную $\tau = \frac{t}{t_0}$ ($0 \leq \tau \leq \infty$), имеем

$$\begin{aligned} p &= P \left[(t + t_0)^{-1} + \sum_1^{\infty} p_s (t + t_0)^{2s-1} \right] = \frac{P}{t_0} \left[(1 + \tau)^{-1} + \sum_1^{\infty} p_s (1 + \tau)^{2s-1} \right], \\ q &= -Q \left[(t + t_0)^{-1} + \sum_1^{\infty} q_s (t + t_0)^{2s-1} \right] = -\frac{Q}{t_0} \left[(1 + \tau)^{-1} + \sum_1^{\infty} q_s (1 + \tau)^{2s-1} \right], \\ r &= R \left[(t + t_0)^{-1} + \sum_1^{\infty} r_s (t + t_0)^{2s-1} \right] = \frac{P}{t_0} \left[(1 + \tau)^{-1} + \sum_1^{\infty} r_s (1 + \tau)^{2s-1} \right] \end{aligned}$$

либо

$$\omega = t_0^{-1} \left[\omega_0 (1 + \tau^{-1})^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} \omega_s (1 + \tau^{2s-1}) \right], \quad (13)$$

где

$$\omega_0 = \mathbf{i}P - \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R, \quad \omega_s = (\mathbf{i}p_s - \mathbf{j}q_s + \mathbf{k}r_s) t_0^{2s}, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

4. Очевидно, что построение решения путём вычисления ряда квадратур бесперспективно. В выражении угловой скорости помимо членов $\omega_s (1 + \tau)^{2s-1}$ имеется слагаемое $\omega_0 (1 + \tau)^{-1}$, которые при последовательном интегрировании дадут $\ln^k (1 + \tau)$ и ряд

$$\int (1 + \tau)^{2s-1} \ln^k (1 + \tau) d\tau = \frac{(1 + \tau)^{2s}}{2s} \sum_{p=0}^k (-1)^k \frac{k!}{(2s)^p (k-p)!} \ln^{k-p} (1 + \tau).$$

Поэтому квадратуры с высоким порядковым номером будут иметь необозримо большое количество членов. Структура ряда, представляющего собой решение, не известна и не ясно, как поступать иначе. В уравнении (1) перейдём к независимой переменной τ и ограничимся двумя членами в выражении угловой скорости:

$$\frac{\delta \mathbf{e}}{\delta \tau} \frac{d\tau}{dt} + \omega \times \mathbf{e} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\delta \mathbf{e}}{\delta \tau} = \mathbf{e} \times (\omega_0 (1 + \tau)^{-1} + \omega_1 (1 + \tau)) \quad (14)$$

Уравнения $\frac{\delta \mathbf{e}}{\delta \tau} = \mathbf{e} \times \omega_0 (1 + \tau)^{-1}$ и $\frac{\delta \mathbf{e}}{\delta \tau} = \mathbf{e} \times \omega_1 (1 + \tau)$ имеют, соответственно, решения

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_0) \dots \times \omega_0) \frac{1}{n!} \ln^n (1 + \tau), \\ \mathbf{e}(t) &= \mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_1) \dots \times \omega_1) \frac{(1 + \tau)^{2n}}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Решение второго уравнения является формальным: при $t = 0$ оно не равно \mathbf{e}_0 и требует аддитивной постоянной $\sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_1) \dots \times \omega_1) \frac{1}{2^n n!}$.

Каждый из этих рядов являются фрагментом решения уравнения (14). Подставим эти фрагменты в уравнение (14). В получившемся равенстве произведение этих фрагментов на угловую скорость даёт производную фрагментов и производную дополнительных элементов искомого ряда. Производные новых элементов следует добавить в левую часть равенства. Интегрирование этой добавки даёт новые члены ряда, которые в свою очередь добавляются к имеющимся фрагментам ряда в правой части. Неизвестных коэффициентов не возникает. Этот процесс отличается от последовательного вычисления квадратур тем, что может стартовать с целого фрагмента искомого ряда или любой его части.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_0) \dots \times \omega_0) \frac{1}{(n-1)!} \ln^{n-1}(1+\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_1) \dots \times \omega_1) \frac{(1+\tau)^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} + \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_0) \dots \times \omega_0) \times \omega_1 (1+\tau) \frac{1}{n!} \ln^n(1+\tau) + \\
& \quad \quad \quad + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_1) \dots \times \omega_1) \times \omega_0 \frac{(1+\tau)^{2n-1}}{2^n n!} + \dots = \\
& = \left[\mathbf{e}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_0) \dots \times \omega_0) \frac{1}{n!} \ln^n(1+\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_1) \dots \times \omega_1) \frac{(1+\tau)^{2n}}{2^n n!} + \right. \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_0 \dots \times \omega_0) \times \omega_1) \frac{(1+\tau)^2}{2} \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{\ln^{n-p}(1+\tau)}{2^p (n-p)!} + \\
& \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} ((\mathbf{e}_0 \times \omega_1) \dots \times \omega_1) \times \omega_0 \frac{(1+\tau)^{2n}}{2^n \cdot 2^n n!} + \dots \right] \times (\omega_0(1+\tau)^{-1} + \omega_1(1+\tau)).
\end{aligned}$$

Третья и четвёртая суммы в квадратной скобке этого равенства есть искомые добавки к исходному фрагменту. При построении следующего приближения появятся члены вида $(1+\tau) \ln^{n-p}(1+\tau)$, $(1+\tau)^3 \ln^{n-p}(1+\tau)$, их интегрирование приведёт к появлению тройных сумм. Таким образом, каждое новое приближение порождает дополнительный ряд. Продолжение этой процедуры вообще должно иметь своей целью выявление вида общего члена ряда. Далее метод математической индукции должен узаконить этот вид.

Ряды векторные, алгебра векторов, например, по сравнению с алгеброй кватернионов скучна, и упрощающие преобразования не очевидны. Перейдём к кватернионному описанию. В уравнении (2) сначала перейдём к независимой переменной τ , а затем к переменной $\xi = \ln(1+\tau)$, $0 \leq \xi \leq \infty$:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \lambda \circ \left[\bar{\omega}_0 (1+\tau)^{-1} + \sum_1^{\infty} \bar{\omega}_s (1+\tau)^{2s-1} \right] \rightarrow \frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{1}{2} \lambda \circ \left[\bar{\omega}_0 + \sum_1^{\infty} \bar{\omega}_s \exp(2s\xi) \right].$$

Решение этого уравнения ищем в виде $\lambda = C(\xi) \exp\left(\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right)$, где

$$\exp\left(\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right) = \lambda_0 + \sum_1^{\infty} ((\lambda \circ \bar{\omega}_0) \dots \circ \bar{\omega}_0) \frac{1}{n!} \left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Для кватерниона $C(\xi)$, который в начальный момент равен единице, получаем уравнение

$$\frac{dC}{D\xi} = C \circ \sum_{s=1}^{\infty} \exp\left(\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right) \circ \frac{\bar{\omega}_s}{2} \circ \exp\left(-\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right) \exp(2s\xi).$$

Решение этого уравнения также есть экспонента:

$$C(\xi) = \exp \int_0^{\xi} \left[\sum_{s=1}^{\infty} \exp\left(\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right) \circ \frac{\bar{\omega}_s}{2} \circ \exp\left(-\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right) \exp(2s\xi) \right] d\xi.$$

Алгоритм построения ряда $C(\xi)$ несложен. Для каждого значения s вычисляется произведение $\exp\left(\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right) \circ \frac{\bar{\omega}_s}{2} \circ \exp\left(-\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right)$, т. е. перемножаются два ряда, далее каждый член получившегося ряда умножается на $\exp(2s\xi)$ и интегрируется. Из ряда по индексу s формируется ряд $C(\xi)$. Итак, искомое решение есть произведение двух рядов $C(\xi)$ и $\exp\left(\bar{\omega}_0 \frac{\xi}{2}\right)$.

Литература

- [1] Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961.
- [2] Розе Н. В. Динамика твёрдого тела. – Л.: Изд. КУБУЧ, 1932.
- [3] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. Абрамовица М., Стиган И. М. – М.: Наука, 1979.

УДК 517.9

РАВЕНСТВО ДЛЯ ИТЕРИРОВАННЫХ ВЕСОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ, ПОРОЖДЁННЫХ ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ

Шишкина Э. Л.

Воронежский государственный университет

Воронеж

e-mail: ilina_dico@mail.ru

Shishkina E. L. The equality for iterated weighted spherical means generated by generalized translation. In this paper we consider spherical means generated by generalized translation and their properties. Also we obtain the equality for iterated weighted spherical means.

В данной работе рассматриваются сферические средние, порождённые многомерным обобщённым сдвигом и их свойства. Также получено равенство для итерированных весовых сферических средних.

Сферические средние возникают во многих задачах математической физики, а также используются при построении и изучении решений дифференциальных уравнений и систем (см. [1], [2]). Если предположить, что сами функции обладают осевой (многоосевой) сферической симметрией, то такие средние окажутся порождёнными обобщённым сдвигом T^y (см. [3], [4]) порядок которого есть целое число, равное размерности сферически симметричных переменных на сфере. В работах [5] и [6] показано, что это число может считаться размерностью дробномерного евклидова пространства. В связи с этим, естественно, появился интерес к конструкциям средних значений, порождённых обобщённым сдвигом с произвольным положительным порядком.

Через \mathbb{R}_n^+ обозначим область $\{x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, и $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ — его длина.

Следуя [3], функцию $f(x)$ назовем четной по x_i , если $f'_{x_i}(0, x^i) = 0$, где $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим многомерный обобщённый сдвиг (см. [3]) $(T^y f)(x) = \prod_{i=1}^n (T_{x_i}^{y_i} f)(x)$, где каждый из одномерных обобщённых сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен формулой

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}, x^i\right) \sin^{\gamma_i-1} \alpha_i d\alpha_i.$$

Рассматриваемое в этой работе *весовое сферическое среднее, порождённое многомерным обобщённым сдвигом (в.сф.среднее)* функции f , имеет вид

$$M_r^\gamma f(x) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int_{S_1^+(n)} T^{ry} f(x) y^\gamma dS(y),$$

где $S_r^+(n) = \{x \in \mathbb{R}_n^+ : |x| = r\}$ — часть сферы в \mathbb{R}_n^+ , коэффициент $|S_1^+(n)|_\gamma$ вычисляется по формуле $|S_1^+(n)|_\gamma = \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) 2^{1-n} / \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)$ (см. [7], стр. 20, формула (1.2.5), где надо положить $N = n$).

Отметим некоторые свойства в.сф. среднего.

1. Линейность и однородность: $M_r^\gamma (af(x) + bg(x)) = aM_r^\gamma f(x) + bM_r^\gamma g(x)$.
2. Положительность: если $f(x) \geq 0$, то $M_r^\gamma f(x) \geq 0$.
3. $M_r^\gamma [1] = 1$.
4. Если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, четная по каждой из переменных x_i , $i = 1, \dots, n$, то $(\Delta_\gamma)_x M_r^\gamma f(x; r) = M_r^\gamma (\Delta_\gamma f(x))$.
5. Пусть $\mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i)$, где j -функция Бесселя $j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$ связана с функцией Бесселя первого рода $J_{\frac{\gamma_i-1}{2}}$ равенством $j_\nu(t) = \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{2}{t}\right)^\nu J_\nu(t)$, $t \in \mathbb{R}_1$. Тогда $M_r^\gamma \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) j_{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}(r|\xi|)$.

Итерированное в.сф.среднее имеет вид: $\mathcal{M}_{q,r}^\gamma f(x) = M_q^\gamma [M_r^\gamma f(x)]$.

Теорема 1. Пусть f — интегрируемая с весом $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ функция,

четная по каждой координате своего аргумента. Тогда справедлива формула

$$\mathcal{M}_{q,r}^\gamma f(x) = \frac{2^{-n} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{(2qr)^{n+|\gamma|-2}} \times \\ \times \int_{|r-q|}^{r+q} ((r^2 - (t-q)^2)((t+q)^2 - r^2))^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} M_t^\gamma f(x) t dt.$$

Литература

- [1] Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
- [2] Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. – М.: ИЛ, 1958. – 158 с.
- [3] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические задачи. – М.: Наука, 1997. – 199 с.
- [4] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН, т. VI, в.2 (42), 1951. – С. 102–143.
- [5] Ляхов Л. Н. RK_γ -преобразование с $\gamma \in (0, 2]$ весовых сферических средних функций. Соотношение Асгейсона // ДАН. 2011. Т.439, №5. – С. 589–592.
- [6] Ляхов Л. Н. Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B -оператором Бесселя // Тр. МИАН. 2012. Т.278. – С. 148–160.
- [7] Ляхов Л. Н. B -гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B -потенциальными ядрами. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 232 с.

Современные проблемы теории функций и функционального анализа

УДК 517.55+004.94

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА–БАРНСА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО РЕШЕНИЯ ТЕТРАНОМИАЛЬНОГО И ПЕНТАНОМИАЛЬНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Зыкова Т. В.

Сибирский федеральный университет

Красноярск

e-mail: zkovatv@mail.ru

Zykova T. V. Algorithms of creation of the domain of convergence for Mellin–Barnes integral representing solutions to the tetranomial and pentanomial algebraic equations. In the present paper consider the algorithms of creation of the domain of convergence for Mellin–Barnes integral representing solutions to the tetranomial and pentanomial algebraic equations.

Рассматриваются алгоритмы построения областей сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения тетраномииального и пентаномииального алгебраических уравнений.

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение

$$y^n + x_p y^{n_p} + \dots + x_1 y^{n_1} - 1 = 0 \quad (1)$$

с комплексными коэффициентами x_i , $i \in J := \{1, \dots, p\}$, $n > n_p > \dots > n_1 \geq 1$. Интеграл Меллина–Барнса, представляющий μ -ю степень ($\mu > 0$) главного решения (ветви $y(x)$ с условием $y(0) = 1$) уравнения (1), имеет вид

$$\frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma+i\mathbb{R}^p} \frac{\mu \Gamma(z_1) \cdots \Gamma(z_p) \Gamma(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{n} \langle \psi, z \rangle)}{n \Gamma(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{n} \langle \tilde{\psi}, z \rangle + 1)} x_1^{-z_1} \cdots x_p^{-z_p} dz, \quad (2)$$

здесь $\psi = (n_1, \dots, n_p)$, $\tilde{\psi} = (n - n_1, \dots, n - n_p)$, вектор $\gamma \in \mathbb{R}^p$ фиксирован и выбирается из открытого симплекса

$$U = \{u \in \mathbb{R}^p : u_i > 0, \langle \psi, u \rangle < \mu\}. \quad (3)$$

Интеграл (2) сходится в секториальной области S_{P^o} [1], основание которой в пространстве аргументов $\theta_1 = \arg x_1, \dots, \theta_p = \arg x_p$ есть внутренность P^o выпуклого многогранника

$$P = \{\theta \in \mathbb{R}^p : |\langle \varphi_l, \theta \rangle| \leq \pi n_l, |\langle \varphi_{kj}, \theta \rangle| \leq \pi n_k, l, k, j \in J, k < j\}, \quad (4)$$

здесь

$$\varphi_l = ne_l, \quad \varphi_{kj} = -n_j e_k + n_k e_j,$$

e_1, \dots, e_p – базисные векторы в \mathbb{R}^p .

Пусть в уравнении (1) показатели мономов подчинены условию $n < 2n_2$, тогда среди неравенств, определяющих многогранник P , нет лишних. В этом случае он имеет $p^2 + p$ гиперграней, которые задаются пересечением соответствующих гиперплоскостей с самим многогранником P :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^\pm &= \{\theta \in P : \langle \varphi_l, \theta \rangle = \pm \pi n_l\}, \quad l \in J, \\ \Gamma_{kj}^\pm &= \{\theta \in P : \langle \varphi_{kj}, \theta \rangle = \pm \pi n_k\}, \quad k < j, \quad k, j \in J. \end{aligned} \quad (5)$$

В работе [2] доказана

Теорема 1. Прообразы $\text{Arg}^{-1}\theta$ точек θ из относительной внутренней гиперграней (5) многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (2).

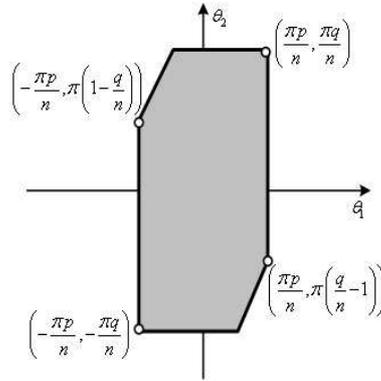


Рис. 1. Многогранник $P : p = 2, n < 2n_2$.

Если $n \geq 2n_2$, то среди неравенств (4), определяющих P , появляются лишние, следовательно количество гиперграней многогранника P уменьшается. Рассмотрим крайнюю ситуацию, когда многогранник P превращается в p -мерный параллелепипед, которая наступает при $n > 2n_p$. Зафиксируем поднаборы $J_s = \{j_1, \dots, j_s\} \subset J$, $J_t = \{j_1, \dots, j_t\} \subset J$, $J_s \cap J_t = \emptyset$. При $s = 0$ считаем $J_s = \emptyset$, при $t = 0$ считаем $J_t = \emptyset$. Рассмотрим грань параллелепипеда коразмерности $s + t$

$$\Gamma(J_s, J_t) = \{\theta \in P : \langle \varphi_l, \theta \rangle = \pi n_l, \quad l \in J_s, \langle \varphi_j, \theta \rangle = -\pi n_j, \quad j \in J_t\}. \quad (6)$$

Заметим, что $\Gamma(J_0, J_0) = P$.

При условии $p \geq 3$, $n > 2n_p$ в работе [2] доказана

Теорема 2. Прообразы $\text{Arg}^{-1}\theta$ точек θ из относительной внутренней грани (6) многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (2), если $(s, t) \in \{0, 1, 2\}^2$.

Рассмотрим интеграл вида (2) с двумя параметрами x_1, x_2 , представляющий μ -ю степень главного решения тетраномимального алгебраического уравнения

$$y^n + x_2 y^{n_2} + x_1 y^{n_1} - 1 = 0, \quad n > n_2 > n_1 \geq 1. \quad (7)$$

Он сходится на множестве, угловая проекция которого есть многогранник

$$P = \left\{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : |\theta_1| \leq \frac{\pi n_1}{n}, |\theta_2| \leq \frac{\pi n_2}{n}, |n_1 \theta_2 - n_2 \theta_1| \leq \pi n_1 \right\}$$

без четырех вершин $\left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}\right)$, $\left(\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(\frac{n_2}{n} - 1\right)\right)$, $\left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}\right)$, $\left(-\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(1 - \frac{n_2}{n}\right)\right)$ (затемнённый шестиугольник с четырьмя “выколотыми” вершинами на Рис. 1).

Для пентаномимального уравнения (с тремя переменными коэффициентами) многогранник P есть двенадцатигранник с восемнадцатью вершинами (см. Рис. 2). Соответствующий интеграл Меллина–Барнса сходится в прообразах почти всех граничных точек P , за исключением шести вершин $A_3, A_5, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{16}$, принадлежащих коамёбе дискриминанта пентаномимального уравнения.

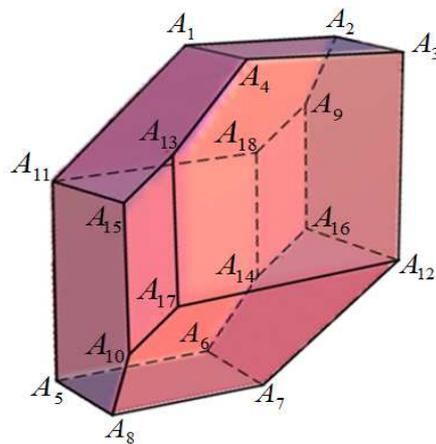


Рис. 2. Многогранник $P : p = 3, n < 2n_2$.

В настоящей работе на основе результатов, указанных в Теоремах 1, 2 созданы алгоритмы компьютерной алгебры в среде Maple. В ходе выполнения программы для случая тетраномимального алгебраического уравнения происходит построение шестиугольника (четырёхугольника), определяющего область сходимости интеграла (2). Аналогичный алгоритм разработан для случая пентаномимального алгебраического уравнения. Программы состоят из нескольких процедур, основная процедура *domain_for_tetranomial_algebraic_equation* (*domain_for_pentanomial_algebraic_equation*) реализует построение многоугольника (многогранника). Входными данными процедуры являются показатели мономов тетраномимального (пентаномимального) алгебраического уравнения. На рисунках 1, 2 представлены результаты работы программы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-31021-мол_a.

Литература

- [1] Антипова И. А. Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 4. – С. 3–20.

- [2] Зыкова Т. В. О сходимости интеграла Меллина-Барнса на границе его области сходимости // Вестник КемГУ. 2011. Т. 47, № 3/1. – С. 199–202.

ОДИН СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОШИ

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург

Koldunov A. V. A method to construct Cauchy sequences. In the report order properties are presented to make some natural class of sequences a Cauchy one.

В сообщении указываются порядковые условия, при которых все члены одного естественного класса последовательностей будут последовательностями Коши.

Пусть $a = (F_n)$ является возрастающей последовательностью замкнутых множеств из произвольного компакта K , причём обычно предполагается, что эта последовательность плотна в K . Пусть на множестве $D(a) = \bigcup F_n$ задана порядково ограниченная функция f со свойством: $f|_{F_n} \in C(F_n)$ для любого $n \in N$. Из того, что сужение функции f на каждое множество F_n является непрерывным, не следует, что f непрерывна в $D(a)$. Но в конкретных ситуациях такие функции могут обладать полезными свойствами.

1. Пусть $X = (C(K), d)$ является метрической решёткой, элементы которой принадлежат векторной решётке $C(K)$ всех непрерывных на компакте K функций.

Для функций $x, y \in X$ будут использоваться следующие обозначения: запись $x \in [y_1, y_2]$ означает $y_1 \leq x \leq y_2$; кроме того, $cz x = \{t \in K : x(t) \neq 0\}$. Буква e всегда используется для тождественной единицы. Считаем, что для метрики выполнены следующие свойства: а) если $|x| \in [0, y]$, то $d(x, 0) \leq d(y, 0)$; б) если $|x_n - x| \leq r_n e \downarrow 0$, то $d(x_n, x) \rightarrow 0$; в) для $x, y, z \in X$ имеют место неравенства: $d(x \vee z, y \vee z) \leq d(x, y)$, $d(x \wedge z, y \wedge z) \leq d(x, y)$ (где $x \vee y$ обозначает супремум этих функций в X , а $x \wedge y$ – их инфимум).

Пусть множество G открыто в компакте K и пусть $m \in N$. По свойству а) существует число $\text{in}(G, m) = \sup \{d(x, 0) : |x| \leq [0, me], cz x \subset G\}$. По свойству б) в определении $\text{in}(G, m)$ можно полагать, что $cl cz x \subset G$.

Теперь зададим возрастающую последовательность $a = (F_n)$ замкнутых множеств в компакте K со свойством: $\text{in}(K \setminus F_n, 2m) \downarrow 0$. Тогда $D(a) = \bigcup F_n$ плотно в K . Считаем, что $m \in N$, и последовательность (x_n) из X обладает свойствами: $|x_n| \in [0, me]$ и $x_n = x_{n+1}$ на F_n . Для фиксированной $a = (F_n)$ и $m \in N$ через $E(a)$ обозначим семейство всех таких последовательностей (x_n) из X .

Требуется выяснить, в каких ситуациях любая последовательность из $E(a)$ является последовательностью Коши (т. е. d -фундаментальной последовательностью). Заметим, что если существует число $r = r(m)$ со свойством:

если $z_1, z_2 \in [-me, me]$, то $d(z_1, z_2) \leq rd(z_1 - z_2, 0)$, то требуемое свойство будет иметь место. Но это ограничение на метрику имеет алгебраический характер.

В сообщении будут рассматриваться порядковые ограничения на метрику, обеспечивающие то, что каждая последовательность из $E(a)$ будет последовательностью Коши.

2. Пусть $m \in N$, и F замкнуто в K .

Лемма 1. Пусть $x, y \in [-me, me]$, причём $0 \leq x = y$ на открытом $G \supset \supset F$. Тогда существует $u \in [-me, me]$, для которого $u = 0$ на F и $x = u \vee (x \wedge y)$.

Доказательство. Пусть $p \in K \setminus G$. Найдём $x_p \in X$ со свойствами: $x_p \in [-me, me]$, $x_p \leq x$, $x_p = 0$ на F и $x_p = x$ на окрестности $W(p)$. Считаем, что $\{W(p_i) : i \leq s\}$ покрывает компакт $K \setminus G$ и $u = x_{p_1} \vee \dots \vee x_{p_s} \in X$. Непосредственно проверяется, что функция $u \in X$ – искомая.

Предложение 1. Пусть $(x_n) \in E(a)$, причём $x_n \geq 0$ на F_n для каждого $n \in N$. Тогда последовательность (x_n) является последовательностью Коши.

Доказательство. Оценим $d(x_n, x_{n+p})$. По свойству б) метрики всегда можно считать, что $\text{cl } \text{sz}(x_n - x_{n+p}) \cap F_n = \emptyset$. Тогда для $x = x_n$, $y = x_{n+p}$ и $F = F_n$ используем лемму 1 и найдём $u_1, u_2 \in [-me, me]$ со свойствами: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ на F_n , $x_n = u_1 \vee (x_n \wedge x_{n+p})$, $x_{n+p} = u_2 \vee (x_n \wedge x_{n+p})$. По первой части свойства в) получаем $d(x_n, x_{n+p}) = d(u_1 \vee (x_n \wedge x_{n+p}), u_2 \vee (x_n \wedge x_{n+p})) \leq \leq d(u_1, u_2) \leq d(u_1, 0) + d(u_2, 0) \leq 2 \text{in}(K \setminus F_n, 2m) \downarrow 0$. Таким образом, последовательность (x_n) является последовательностью Коши.

Замечание. Предложение 1 остаётся верным и при условии $x_n \leq 0$ на F_n . Действительно, полагаем $z_n = -x_n$. По лемме 1 строим $u_1, u_2 \in [-me, me]$, для которых $u_1 = 0$ на F и $z_n = u_1 \vee (z_n \wedge z_{n+p})$, $u_2 = 0$ на F и $z_{n+p} = u_2 \vee (z_n \wedge z_{n+p})$. Тогда $x_n = (-u_1) \vee ((-z_n) \wedge (-z_{n+p}))$, $x_{n+p} = (-u_2) \vee ((-z_n) \wedge (-z_{n+p}))$. Остаётся применить вторую часть свойства в) и получить $d(x_n, x_{n+p}) \leq d(-u_1, 0) + d(-u_2, 0)$.

3. Рассмотрим ещё одно порядковое ограничение г) на метрику: существует число $q = q(m)$ со свойством: если $x, y, z \in [-me, me]$, причём $x \vee |u| = y \vee |u|$ и $x \wedge (-|u|) = y \wedge (-|u|)$, то $d(x, y) \leq qd(2u, 0)$.

Лемма 2. 1. Пусть x, y, u из формулировки свойства г). Тогда $|x - y| \leq \leq 2|u|$. 2. Пусть $x, y, u \in [-me, me]$, причём $u = m$ на $\text{sz}(x - y)$. Тогда для x, y, u выполнена формулировка свойства г).

Доказательство. 1. Из равенства $x \vee |u| = y \vee |u|$ следует, что для любой точки $t \in K$ выполнено одно из двух: либо $x(t) = y(t)$, либо $|u|(t) \geq x(t), y(t)$. Аналогично, из равенства $x \wedge (-|u|) = y \wedge (-|u|)$ следует, что либо $x(t) = = y(t)$, либо $x(t), y(t) \geq -|u|(t)$. Из этих двух фактов следует п. 1 леммы 2. П. 2 проверяется непосредственно.

Замечание. Пусть выполнено следующее условие: существует число $r = = r(m)$, для которого из $z_1, z_2 \in [-me, me]$ следует $d(z_1, z_2) \leq rd(z_1 - z_2, 0)$. Тогда выполнено свойство г). Действительно, пусть x, y, u из формулировки свойства г). По лемме 2 выполнено $|x - y| \leq 2|u|$. Поэтому $d(x, y) \leq rd(x - y, 0) \leq \leq rd(2u, 0)$.

Предложение 2. Пусть имеет место свойство г) и $(x_n) \in E(a)$. Тогда (x_n) является последовательностью Коши.

Доказательство. Оценим $d(x_n, x_{n+p})$ при фиксированных $n, p \in N$.

Пусть сначала $\text{cl cz}(x_n - x_{n+p}) \cap F_n = \emptyset$. Зададим $u \in [0, me]$, для которого $u = m$ на $\text{cl cz}(x_n - x_{n+p})$ и $u \equiv 0$ на F_n . По лемме 2 и свойству г) имеем $d(x_n, x_{n+p}) \leq qd(2u, 0) \leq q \text{in}(K \setminus F_n, 2m)$. Поэтому (x_n) является последовательностью Коши.

Теперь рассмотрим произвольный случай. Построим последовательность (y_k) , для которой $y_k \in [-me, me]$, $y_k = x_n$ на открытом $G_k \supset F$, причём $|x_{n+p} - y_k| \leq \frac{1}{k}e$. По свойству б) $d(y_k, x_{n+p}) \rightarrow 0$. Кроме того, $\text{cl cz}(y_k - x_{n+p}) \cap F_n = \emptyset$. Повторяя рассуждения первой части этого предложения, получим, что $d(x_n, y_k) \leq q \text{in}(K \setminus F_n, 2m)$. Таким образом, $d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, y_k) + d(y_k, x_{n+p})$ и $d(x_n, x_{n+p}) \leq q \text{in}(K \setminus F_n, 2m) \downarrow 0$. Поэтому последовательность (x_n) является последовательностью Коши. УДК 517.55

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПО ВЕЕРУ ТОРИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Кытманов А. А.

Сибирский федеральный университет

Красноярск

e-mail: aakytm@gmail.com

Kytmanov A. A. On construction of an integral representation given toric variety fan. We describe a method of construction of a toric variety given its fan, and a method of construction of an integral representation in \mathbb{C}^d , associated with the mentioned toric variety.

Приводится метод построения торического многообразия по его вееру, а также метод построения интегрального представления в пространстве \mathbb{C}^d , связанного с данным торическим многообразием.

Произвольное компактное торическое многообразие $\mathbb{X} = \mathbb{X}^n$ комплексной размерности n является фактор-пространством (см. [1])

$$\mathbb{X} = [\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)] / G. \quad (1)$$

Здесь $Z(\Sigma)$ представляет собой объединение некоторых координатных подпространств в \mathbb{C}^d , построенных по вееру $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ с d образующими, а G — группа, изоморфная тору $(\mathbb{C}_*)^r$, $r = d - n$, также построенная по вееру Σ .

Оно определяется по полному симплицальному примитивному вееру $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, который порождается набором векторов $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{Z}^n$ (одномерных образующих веера).

В конструкции \mathbb{X} важную роль играет решетка соотношений между векторами v_k . Пусть

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \dots + a_{1d}v_d = 0, \\ \vdots \\ a_{r1}v_1 + \dots + a_{rd}v_d = 0, \end{cases}$$

где $r = d - n$ — все независимые линейные соотношения над \mathbb{Z}^n между v_k . Каждому вектору v_k сопоставляется комплексная переменная z_k так, что $z = (z_1, \dots, z_d)$ играет роль однородных координат соответствующего торического многообразия \mathbb{X} .

В работе [1] автором было построено интегральное представление для голоморфных функций в d -круговом полиэдре $W = W_\rho$, определенном системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}|z_1|^2 + \dots + a_{1d}|z_d|^2 < \rho_1, \\ \vdots \\ a_{r1}|z_1|^2 + \dots + a_{rd}|z_d|^2 < \rho_r \end{cases} \quad (2)$$

с интегрированием по остову этого полиэдра и с ядром $\omega(z)$. Указанный остов получается из (2) заменой всех неравенств на равенства. Интегральное представление справедливо в случае, когда радиус-вектор $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$ взят из конуса Кэлера для \mathbb{X} (см. [1]), а веер является выпуклым.

Ядро интегрального представления $\omega(z)$ обобщает упомянутую выше дифференциальную форму Бохнера–Мартинелли; оно имеет вид G -инвариантной дифференциальной (d, n) -формы

$$\omega(z) = \frac{h(\bar{z}) \wedge dz}{g(z, \bar{z})}, \quad (3)$$

где $h(z)$ — обобщение формы Эйлера, а $g(z, \bar{z})$ — полином с множеством нулей, совпадающим с $Z(\Sigma)$.

Основной результат работы [1] (Теорема 1) гласит, что в области D , содержащей точку $\zeta = 0$ всякая голоморфная в полиэдре W функция $f(\zeta)$ представляется интегралом

$$f(\zeta) = \frac{1}{C} \int_{\Gamma(\rho)} f(z) \omega(z - \zeta),$$

где C — коэффициент нормировки, не зависящий от f .

Алгоритм, обеспечивающий построение интегрального представления по вееру торического многообразия был реализован автором в системе компьютерной алгебры Maple. Его описание приводится в работе [2].

Пример 1. Рассмотрим полный выпуклый веер в \mathbb{R}^2 с образующими

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (-1, 0), v_4 = (-1, -1), v_5 = (0, -1).$$

Для конуса σ , построенного на векторах v_{i_1}, \dots, v_{i_n} , будем использовать обозначение

$$\sigma = \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_n} \rangle.$$

Тогда конусами максимальной размерности 2 будут конусы

$$\sigma_1 = \langle v_1, v_2 \rangle, \sigma_2 = \langle v_2, v_3 \rangle, \sigma_3 = \langle v_3, v_4 \rangle, \sigma_4 = \langle v_4, v_5 \rangle, \sigma_5 = \langle v_5, v_1 \rangle.$$

Рассматриваемое торическое многообразие является фактор-пространством (1), где $d = 5$,

$$Z(\Sigma) = \{z_1 = z_3 = 0\} \cup \{z_1 = z_4 = 0\} \cup \{z_2 = z_4 = 0\} \cup \{z_2 = z_5 = 0\} \cup \{z_3 = z_5 = 0\}.$$

Независимыми соотношениями между v_i являются следующие

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_4 = 0, \\ v_1 + v_3 = 0, \\ v_2 + v_5 = 0, \end{cases}$$

тем самым, базис решетки соотношений составляют вектора $\mu_1 = (1, 1, 0, 1, 0)$, $\mu_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $\mu_3 = (0, 1, 0, 0, 1)$. Группа действия G есть 3-параметрическая поверхность

$$\{(\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) : \lambda_j \in \mathbb{C}_*\} \subset (\mathbb{C}_*)^5,$$

изоморфная тору $(\mathbb{C}_*)^3$.

Цикл интегрирования $\Gamma(\rho) = \mu^{-1}(\rho)$ определяется системой:

$$\begin{cases} \rho_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_4|^2, \\ \rho_2 = |z_1|^2 + |z_3|^2, \\ \rho_3 = |z_2|^2 + |z_5|^2. \end{cases}$$

Эталонная форма ω в $\mathbb{C}^5 \setminus Z(\Sigma)$ имеет бистепень $(5, 2)$ и представляется в виде (3), где

$$dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3 \wedge dz_4 \wedge dz_5,$$

а

$$h(z) = -z_3 z_4 z_5 dz_1 \wedge dz_2 + z_2 z_3 z_5 dz_1 \wedge dz_4 + z_2 z_3 z_4 dz_1 \wedge dz_5 - z_1 z_4 z_5 dz_2 \wedge dz_3 - \\ - z_1 z_3 z_5 dz_2 \wedge dz_4 - z_1 z_2 z_5 dz_3 \wedge dz_4 - z_1 z_2 z_4 dz_3 \wedge dz_5 - z_1 z_2 z_3 dz_4 \wedge dz_5.$$

— аналог формы Эйлера. Знаменатель g — полином:

$$g(z, \bar{z}) = |z_1|^2 |z_2|^4 |z_3|^2 + |z_1|^4 |z_2|^2 |z_5|^2 + |z_1|^4 |z_4|^2 |z_5|^4 + |z_2|^4 |z_3|^4 |z_4|^2 + |z_3|^4 |z_4|^6 |z_5|^4.$$

Область D и полиэдр W , участвующие в формулировке Теоремы 1, задаются, соответственно, системами неравенств

$$D : \begin{cases} |z_1|^2 + |z_3|^2 < \rho_2, \\ |z_1|^2 + |z_4|^2 < \rho_1 - \rho_3, \\ |z_2|^2 + |z_4|^2 < \rho_1 - \rho_2, \\ |z_2|^2 + |z_5|^2 < \rho_3, \\ |z_3|^2 + |z_5|^2 < \rho_2 + \rho_3 - \rho_1, \end{cases} \quad W : \begin{cases} |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_4|^2 < \rho_1, \\ |z_1|^2 + |z_3|^2 < \rho_2, \\ |z_2|^2 + |z_5|^2 < \rho_3. \end{cases}$$

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке грантов РФФИ №№ 12-01-31021-мол_a и 12-01-00007-а.

Литература

- [1] Кытманов А. А. Об аналоге представления Бохнера–Мартинелли в d -круговых полиэдрах пространства \mathbb{C}^d // Изв. вузов. Математика. — 2005. — №3 (514). — С. 52–58.
- [2] Кытманов А. А. Алгоритм построения интегрального представления по вееру торического многообразия // Вестник НГУ. Математика, механика, информатика. — 2010 — №2. — С. 61–70.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ НА ОСНОВЕ АКСИОМАТИЧЕСКОГО НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Ловягин Ю. Н.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: lovyagin@math.spbu.ru

Lovyagin Yu. N. Geometric measure theory based on axiomatic nonstandard analysis The question of the concept of action at any Boolean algebra with values field hyperrational numbers. Special attention is paid to the measurable sets geometrichekoj plane.

Исследуется вопрос о понятии меры на произвольной булевой алгебре со значениями в поле гиперрациональных чисел. Особое внимание уделяется измеримым множествам на геометрической плоскости.

1. Нестандартная арифметика. Под арифметикой Пресбургера — [1], стр. 130 — понимается теория $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{t}$ в языке с сигнатурой $\{+, ', =, 0\}$, содержащую

- аксиомы равенства:

- $\forall x (x = x)$,
- $\forall x \forall y (x = y \supset y = x)$,
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \& y = z \supset x = z)$;

- аксиомы согласования с равенством:

- $\forall x \forall y (x = y \supset x' = y')$,
- $\forall x \forall y \forall x_1 \forall y_1 (x = x_1 \& y = y_1 \supset x + y = x_1 + y_1)$;

- специальные аксиомы:

- $\forall x \neg (x' = 0)$,
- $\forall x \forall y (x' = y' \supset x = y)$,
- $\forall x (x + 0 = x)$,
- $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$.

Моделью [2], является класс всех слов в одобуквенном алфавите $\mathcal{A} = \{|\}$ с операцией конкатенации в качестве сложения, “приписывания” знака $|$ как операции следования, пустым словом в качестве нуля. Равенство понимается как графическое равенство слов. Для проверки истинности всех аксиом теории $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{t}$ легко строятся нормальные алгоритмы ([3]).

Обозначим вышеописанный класс слов через \mathfrak{N} . Введём в \mathfrak{N} операцию умножения рекурсией:

- $x \cdot 0 = 0$,
- $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Теорема 1. С операциями сложения и умножения \mathfrak{N} является коммутативным моноидом.

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны в силу однобуквенности алфавита. Нейтральность нуля означает, что «приписывание» пустого слова «не занимает места».

Для доказательства проверим, что для ненулевых чисел

$$n \cdot m = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{m \text{ раз}} = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ раз}}.$$

Действительно, очевидно, что $n \cdot 1 = n$, $n \cdot 2 = n + n$. Далее, $n \cdot (k + 1) = n \cdot k + n = \underbrace{n + n + \cdots + n}_{k \text{ раз}} + n$, что совершенно очевидно есть результат записи

друг за другом числа n $k + 1$ раз. Что согласно принципу возвратной индукции доказывает первое равенство. Второе правило доказывается аналогично. Отсюда сразу следует коммутативность и ассоциативность умножения.

Точно также методом возвратной индукции доказывается и дистрибутивность умножения относительно сложения ■

Определение 1. Определим в \mathfrak{N} отношение $n \leq m \equiv \exists k (n + k = m)$.

Теорема 2. Введённое отношение является отношением линейного порядка.

Доказательство. Выпишем формулы, которые требуется доказать.

- $\forall x \forall y (x \leq y \vee y \leq x)$,
- $\forall x (x \leq x)$,
- $\forall x \forall y (x \leq y \& y \leq x \supset x = y)$,
- $\forall x \forall y \forall z (x \leq y \& y \leq z \supset x \leq z)$.

Дальнейшее очевидно ■

Приведённые теоремы показывают, что множество \mathfrak{N} может выполнять роль натуральных чисел.

Определение 2. Будем называть элементы \mathfrak{N} натуральными числами, а само множество множеством натуральных чисел.

Определение 3. Отношение строгого неравенства вводится формулой $x < y \equiv x \leq y \& \neg (x = y)$.

Определение 4. Пусть \mathcal{L} — язык исчисления предикатов, константами которого являются введённые натуральные числа. К предикатным символам \mathcal{L} отнесём предикат графического равенства и определённый выше предикатный символ порядка. Функциональными символами \mathcal{L} являются знаки для умножения и сложения натуральных чисел. Назовём арифметикой класс всех замкнутых формул языка \mathcal{L} , истинных в структуре \mathfrak{N} .

Определение 5. Пусть $*\mathcal{L}$ — язык исчисления предикатов, полученный добавлением к \mathcal{L} нового константного символа Ω . Рассмотрим теорию, получающуюся добавлением к арифметике аксиом: $0 < \Omega, 1 < \Omega, \dots$. Полученную теорию будем называть нестандартной арифметикой.

Теорема 3. Нестандартная арифметика является консервативным расширением арифметики.

Доказательство. Ясно, что в доказательстве любой формулы φ языка \mathcal{L} в нестандартной арифметике присутствует лишь конечное количество аксиом, содержащих константу Ω . Заменяя её на натуральное число $N + 1$, где N — «номер» новой аксиомы, получаем доказательство φ в арифметике ■

Определение 6. Какую-либо модель нестандартной арифметики обозначим $*\mathcal{N}$ и будем называть множеством гипернатуральных чисел.

Существование модели для нестандартной арифметики следует из теоремы компактности ([2]). Однако возможно существование даже неизоморфных (и различной мощности) моделей. Для наших целей, однако, достаточно хотя бы одной модели. Важно лишь, что в ней истинны формулы, доказуемые в нестандартной арифметике. Это, в частности, означает, что множество гипернатуральных чисел является моделью арифметики. Это доказывает следующее утверждение.

Теорема 4. Арифметика не является категоричной теорией ■

Расширим теперь язык нестандартной арифметики до языка расширенной арифметики.

Определение 7. Языком расширенной арифметики назовём язык \mathcal{LR} , получающийся добавлением к языку $*\mathcal{L}$ унарного предикатного символа \mathbb{N} и аксиом:

- $\mathbb{N}(0)$,
- $\forall x \forall y (\mathbb{N}(x) \& \mathbb{N}(y) \supset \mathbb{N}(x + y) \& \mathbb{N}(x \cdot y))$,
- $\forall x (x < \Omega \supset \mathbb{N}(x))$,
- $\neg \mathbb{N}(\Omega)$.

Отметим, что предикатный символ, введённый выше, является внешним по отношению к арифметике. Кроме того, расширенная арифметика не является консервативным расширением ни арифметики, ни нестандартной арифметики. Однако, наличие предикатного символа \mathbb{N} , который будем содержательно понимать «быть натуральным числом», позволяет ввести удобные понятия.

Определение 8. Гипернатуральное число w такое, что $\neg \mathbb{N}(w)$ будем называть бесконечно большим натуральным числом. Этот факт будем обозначать $w \approx \infty$.

Теорема 5. Для любых гипернатуральных чисел x, y, z следующие формулы:

1. $x \approx \infty \equiv \neg \mathbb{N}(x)$,
2. $x \approx \infty \& \mathbb{N}(y) \supset y < x$,
3. $x \approx \infty \& \mathbb{N}(y) \supset x + y \approx \infty \& x \cdot y \approx \infty$,

$$4. x \approx \infty \& y \approx \infty \supset x + y \approx \infty \& x \cdot y \approx \infty.$$

доказуемы в расширенной арифметике.

Доказательство. Заметим, что приведённые формулы соответствуют естественным свойствам конечных и бесконечно больших чисел. Аксиомы же, введённые в расширенную арифметику гарантируют, что сумма и произведение конечных чисел конечно, ноль является конечным числом, а Ω — нет.

Пусть $x \approx \infty$. Если $\mathbb{N}(x + y)$, то $x < x + y < \Omega$ и, следовательно, $\mathbb{N}(x)$. Аналогично для произведения.

Покажем, что всякое конечное число строго меньше любого бесконечно большого. Действительно, если для некоторого конечного n и бесконечно большого w $w < n$. Так как $n < \Omega$, $w < \Omega$ и, следовательно, w — натуральное число.

Теперь доказательство становится очевидным ■

Теорема 6. $^*\mathfrak{N}$ является моделью расширенной арифметики.

Доказательство. Сразу следует из предыдущего утверждения. ■

2. Гиперрациональные числа. Опишем без подробностей процесс построения множества гиперрациональных чисел. Несмотря на то, что в основе построения лежит модель \mathfrak{N} и нестандартная арифметика, построение можно корректно провести по схеме, предложенной в [4, 5, 6, 7].

1. Пусть $\mathfrak{Z} = {}^*\mathfrak{N} \times {}^*\mathfrak{N}$ с отождествлением эквивалентных пар по отношению $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$.

Определение 9. Для $u = \langle m, n \rangle, v = \langle k, l \rangle \in \mathfrak{Z}$ положим $u + v = \langle m + k, n + l \rangle, u \cdot v = \langle a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c \rangle$.

Легко проверяется, что имеется действительно конгруэнция и справедлива

Теорема 7. \mathfrak{Z} является целостным упорядоченным кольцом, в которое множество гипернатуральных чисел мономорфно (алгебраически и порядково) вкладывается.

Доказательство. Следует классической схеме ■

Мы отождествляем гипернатуральные числа и их образы при естественном мономорфизме $n \mapsto \langle n, 0 \rangle$.

Определение 10. Элементы множества \mathfrak{Z} будем называть гиперцелыми числами.

Определение 11. Гиперцелое число a назовём конечным, если $|a|$ — конечное (то есть натуральное) число.

Теорема 8. Конечные числа образуют целостное упорядоченное подкольцо \mathfrak{Z} кольца гиперцелых чисел. При этом моноид натуральных чисел мономорфно вкладывается в \mathfrak{Z} . Нулевым элементом, который не боясь противоречия будем по-прежнему обозначать символом 0, является класс пары $\langle 0, 0 \rangle$.

Определение 12. Кольцо \mathfrak{Z} будем называть кольцом целых чисел.

2. Рассмотрим множество $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Z} \times \mathfrak{N} \setminus \{0\}$ с отождествлением по отношению эквивалентности $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Определение 13. Положим для $p = \langle a, b \rangle, q = \langle c, d \rangle \in \mathfrak{q}$ $p + q = \langle a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d \rangle, p \cdot q = \langle a \cdot c, b \cdot d \rangle$.

Определение 14. Определим для $p = \langle a, b \rangle \in \mathfrak{Q}$ $p \geq 0$, если $a \geq 0$ и для $p, q \in \mathfrak{Q}$ $p \geq q$, если $p - q = p + \langle 0, 1 \rangle \cdot q \geq 0$.

Классически проверяется, что имеет место

Теорема 9. \mathfrak{Q} является упорядоченным полем, содержащем подкольцо изоморфное кольцу гиперцелых чисел. При этом нулевым элементом, обозначаемым символом 0 является класс пары $\langle 0, 1 \rangle$, единицей — 1 — класс пары $\langle 1, 1 \rangle$ ■

Естественный мономорфизм определяется правилом $a \mapsto \langle a, 1 \rangle$.

Определение 15. Назовём поле \mathfrak{Q} полем гиперрациональных чисел.

Определение 16. Рассмотрим язык $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$ исчисления предикатов, константами которого являются гиперрациональные числа. К предикатным символам отнесём символы для отношений равенства и порядка. Функциональными символами являются знаки операций сложения и умножения гиперрациональных чисел. Будем называть этот язык языком теории гиперрациональных чисел. Теорией гиперрациональных чисел назовём класс всех замкнутых формул $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$, истинных в \mathfrak{Q} .

Расширение $^*\mathfrak{L}\mathfrak{H}$ этого языка путём добавления предикатного символа \mathbb{N} будем называть языком расширенной теории гиперрациональных чисел.

Рассмотрим теорию, получающуюся добавлением к теории гипернатуральных чисел аксиомы $\exists \varepsilon \left(\varepsilon > 0 \& \forall x \left(\mathbb{N}(x) \supset \varepsilon < \frac{1}{n+1} \right) \right)$.

Определение 17. Элемент ε , существование которого гарантируется аксиомой, называется бесконечно малым. Будем использовать обозначение $\varepsilon \approx 0$. Будем различать положительные и отрицательные бесконечно малые посредством обозначений $\varepsilon \approx +0, \varepsilon \approx -0$.

Интерпретируем теперь предикатный символ \mathbb{N} как «быть натуральным гиперрациональным числом». Для этого следует положить $\mathbb{N}(x) \equiv \exists n (n \in \mathfrak{N}(n) \& x = \langle \langle n, 0 \rangle, 1 \rangle)$.

Теорема 10. Множество всех гиперрациональных чисел с введёнными операциями и отношениями является моделью расширенной теории гиперрациональных чисел.

Доказательство. Для предъявления бесконечно малого элемента рассмотрим бесконечно большое натуральное число w . В силу того, что $n < w$ для любого ненулевого натурального числа n , обозначая через N гиперрациональное число $\langle \langle n, 0 \rangle, 1 \rangle$ получаем, что $\frac{1}{w} < \frac{1}{N+1}$. Теперь достаточно положить $\varepsilon = \frac{1}{w}$. Дальнейшее ясно ■

Определение 18. Гиперрациональное число p называется

- конечным, если для некоторого натурального числа n $|p| \leq n$; Для выражения конечности числа p будем использовать предикатный символ fin , определяемый формулой $\text{fin}(p) \equiv \exists n (\mathbb{N}(n) \& |p| \leq n)$.

- бесконечно большим, если оно не является конечным. Для передачи того, что некоторое число w является бесконечно большим пишем $w \approx \infty$. При этом различаем положительные и отрицательные бесконечно большие ($w \approx +\infty$, $w \approx -\infty$).

Определение 19. Два гиперрациональных числа называются бесконечно близкими — в обозначениях $p \approx q$ —, если $p - q \approx 0$.

Теорема 11. Для любых $p, q, v, w, \alpha, \beta \in \mathfrak{Q}$ в расширенной теории доказуемы формулы:

1. $\alpha \approx 0 \& \text{fin}(p) \supset \alpha \cdot p \approx 0$;
2. $v \approx \infty \& \text{fin}(p) \& \neg(p \approx 0) \supset v \cdot p \approx \infty$;
3. $v \approx \infty \& \text{fin}(p) \supset v + p \approx \infty$;
4. $v \approx \pm\infty \& w \approx \pm\infty \supset v + w \approx \pm\infty$;
5. $v \approx \infty \& w \approx \infty \supset v \cdot w \approx \infty$;
6. $\alpha \approx 0 \& \beta \approx 0 \supset \alpha + \beta \approx 0$;
7. $\alpha \approx 0 \& \neg(\alpha = 0) \supset \frac{1}{\alpha} \approx \infty$;
8. $v \approx \infty \supset \frac{1}{v} \approx 0$;
9. $\text{fin}(p) \& \text{fin}(q) \supset \text{fin}(p + q) \& \text{fin}(p \cdot q)$;
10. $\text{fin}(p) \& \neg(p = 0) \supset \text{fin}(\text{dfrac{1}{p}})$;
11. $\neg(p = 0) \supset \forall \varepsilon (p > 0 \equiv p + \varepsilon > 0)$.

Доказательство. Проводится традиционными средствами доказательства «теорем о бесконечно больших и бесконечно малых последовательностях». При этом конечные числа являются аналогом ограниченных последовательностей ■

Прямым следствием теоремы является

Теорема 12. Конечные гиперрациональные числа образуют подкольцо поля всех гиперрациональных чисел. ■

Теорема 13. Отношение бесконечной близости является конгруэнцией на классе всех конечных гиперрациональных чисел.

Доказательство. То, что бесконечная близость является отношением эквивалентности, даже на множестве всех гиперрациональных чисел очевидно.

Пусть $p_1 \approx p$, $p_1 \approx q$. Тогда $p_1 + q_1 - (p + q) = (p_1 - p) + (q_1 - q) \approx 0$.

$p_1 \cdot q_1 - p \cdot q = p_1 q_1 - p_1 \cdot q + p_1 \cdot q - p \cdot q = p_1 \cdot (q_1 - q) + (p_1 - p) \cdot q \approx 0$. ■

Рассмотрим гиперрациональные числа, образованные парами целых чисел. Из доказанных теорем следует, что множество таких чисел образует поле, являющееся упорядоченным подполем поля всех гиперрациональных чисел.

Определение 20. Поле отношений множества всех целых чисел назовём полем рациональных чисел.

Теорема 14. Для рациональных чисел p и q $p \approx q \equiv p = q$.

Доказательство. Действительно, пусть в условиях теоремы $p \approx q$ и $\exists n \exists m \exists k (\mathbb{N}(n) \& \mathbb{N}(m) \& \mathbb{N}(k) \& p = \langle \langle n, m \rangle, k \rangle)$. Пусть, далее, $q = \langle \langle s, t \rangle, l \rangle$.

Тогда имеем $p - q = \langle n, m \rangle \cdot \langle l, 0 \rangle - \langle s, t \rangle \cdot \langle k, 0 \rangle = \langle n \cdot l, m \cdot l \rangle - \langle s \cdot k, t \cdot k \rangle = \langle n \cdot l - s \cdot k, m \cdot l - t \cdot k \rangle$.

Для того, чтобы было $p - q \approx 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнено

либо $n \cdot l - s \cdot k \approx 0$,

либо $m \cdot l - t \cdot k \approx \infty$.

Однако, второе условие невозможно из-за конечности чисел. Следовательно, бесконечная близость p и q равносильна тому, что $n \cdot l \approx s \cdot k$. Числа же n, l, s, k являются натуральными. Следовательно, результат арифметических операций над ними является натуральным числом. Среди же натуральных чисел бесконечно малых отличных от нуля нет ■

Определение 21. Пусть p — гиперрациональное число. Монадой p назовём класс всех гиперрациональных чисел бесконечно близких p .

Теорема 15. Монады конечных чисел либо не пересекаются, либо совпадают.

Доказательство очевидно, ибо монады — это классы эквивалентности ■

В работах [4, 5, 6, 7] изложена теория непрерывности, дифференцируемости и интегрирования гиперрациональных функций. Показано, что конечные числа и заданные на определимых множествах конечных чисел функции позволяют моделировать вещественные числа и функции. При этом монады конечных чисел по сути и являются вещественными числами.

3. Булевы алгебры и меры. Относительно булевых алгебр мы пользуемся терминологией и обозначениями [8]. Понятие же меры будем трактовать шире.

Определение 22. Булевой алгеброй называется модель некоторой системы аксиом в языке исчисления предикатов, сигнатура которого содержит знаки для предикатного символа равенства, функциональных символов супремума — \vee , инфимума — \wedge и дополнения — $'$. Кроме того, в языке имеются константы ноль — 0 и единица — 1. Мы рассмотрим следующую систему аксиом:

- $\forall x \forall y (x \vee y = y \vee x)$;
- $\forall x \forall y \forall z (x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z)$;
- $\forall x (x \vee 0 = x)$;
- $\forall x (x \vee 1 = 1)$;
- $\forall x \forall y ((x \vee y)' = x' \wedge y')$;
- $\forall x \forall y \forall z (x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$;
- $\forall x \forall y (x \wedge y = y \wedge x)$;
- $\forall x \forall y \forall z (x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z)$;
- $\forall x (x \wedge 0 = 0)$;

- $\forall x (x \wedge 1 = x)$;
- $\forall x \forall y ((x \wedge y)' = x' \vee y')$;
- $\forall x \forall y \forall z (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$;
- $\forall x (x'' = x)$.

Мы не займёмся о независимости и минимальности списка аксиом.

Определение 23. Введём в язык теории булевых алгебр предикатный символ порядка: $x \leq y \equiv x \vee y = y$.

Определение 24. Пусть \mathcal{L} — язык исчисления предикатов. \mathcal{T} — некоторая теория в \mathcal{L} . Пусть, далее, \mathfrak{M} — модель теории \mathcal{T} , и M — её множествоноситель. Подмножество $E \subset M$ будем называть *определимым* в теории \mathcal{T} , если существует формула φ языка \mathcal{L} со свободной переменной x такая, что $x \in E$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} \vdash \varphi(x)$.

Предположим, что имеется два языка исчисления предикатов \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 . Рассмотрим их пряую сумму — язык \mathcal{L} , класс константных, предикатных и функциональных символов которого является прямой суммой соответствующих классов \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 . При этом, если в языках есть одинаково обозначенные символы (например, $0, 1, =, +, \dots$), то, сохраняя те же обозначения, считаем их различными. Это не приводит к противоречию. Так же как и обозначение переменных. Более строго следовало бы ввести в языке \mathcal{L} переменные двух сортов и ввести соответствующее понятие формулы соответствующего сорта, в том числе и смешанного. Подробное изложение многосортных логик имеется в [9].

Если в языках \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 имеются теории T_1 и T_2 соответственно, то можно ввести теорию T — прямую сумму этих теорий, понимая $T \vdash \varphi$, если существует вывод $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n = \varphi$ такой, что каждая формула φ_i либо является логической аксиомой, либо принадлежит одной из теорий, либо получается по некоторым правилам вывода, среди которых могут быть и новые, оперирующие с двумя сортами формул.

Определение 25. Пусть имеются две алгебраические системы \mathfrak{M} и \mathfrak{N} , являющиеся моделями теорий \mathcal{T} и \mathcal{K} соответственно. Определимой функцией назовём функцию $f : M \rightarrow N$ такую, что её область определения $\text{dom } f \subset M$ и множество значений $\text{rng } f = \{f(x) : x \in \text{dom } f\} \subset N$ являются *определимыми* множествами в соответствующих теориях и для некоторой формулы Φ объединённого языка теорий \mathcal{T} и \mathcal{K} , обладающей свойством $\mathcal{T} \cup \mathcal{K} \vdash \forall x \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x) \& \psi(y_1) \& \psi(y_2) \supset (\Phi(x, y_1) \& \Phi(x, y_2) \supset y_1 = y_2))$, где φ и ψ определяют область определения и множество значений f соответственно $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} \cup \mathcal{K} \vdash \Phi(x, y)$.

Определение 26. Пусть \mathfrak{B} — булева алгебра, μ — определимая функция, действующая из \mathfrak{B} в множество гиперрациональных чисел \mathfrak{Q} . Функцию μ будем называть

- почти аддитивной, если $\forall a \forall b (a \wedge b = 0 \supset \mu(a \vee b) \approx \mu(a) + \mu(b))$;
- положительной, если $\forall a \mu(a) \geq 0$;
- почти положительной, если $\forall a (\mu(a) \leq 0 \supset \mu(a) \approx 0)$.

Определение 27. Мерой будем называть почти аддитивную почти положительную функцию, принимающую конечные значения.

Теорема 16. На всякой конечной, т. е. такой, что количество её элементов есть натуральное число, булевой алгебре существует мера.

Доказательство. Пусть имеется множество $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ (n — натуральное число) элементов некоторой булевой алгебры \mathfrak{B} . Рассмотрим наименьшую внутренне определимую подалгебру \mathfrak{A} булевой алгебры \mathfrak{B} , порождённую этими элементами.

Такую подалгебру образуют элементы вида

$$\bigvee_{k=1}^m \left(\bigwedge_{j=1}^{i_k} b_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{l_k} b'_i \right).$$

Теперь, следуя [8] построим меру на \mathfrak{A} по произвольно заданным конечным значениям $p_k = \mu(b_k)$.

Вообще на конечной булевой алгебре легко задать меру следующим образом:

- 1) конечная алгебра всегда является алгеброй всех подмножеств некоторого конечного множества $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$;
- 2) пусть p_1, p_2, \dots, p_n — набор гипервещественных чисел такой, что $\sum_{i=1}^n$ является конечным числом;
- 3) положим для всякого множества $A \in 2^E$ $\mu A = \sum_{e_i \in A} e_i$.

Несложно доказываем, что построенная функция μ является мерой.

Применим теперь к подалгебре \mathfrak{A} и мере на ней теорему Тарского о продолжении «на один шаг», то есть на подалгебру, порождённую множеством $\mathfrak{A} \cup \{b\}$, где b — элемент $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{A}$. Подробности можно найти в [10] ■

Определение 28. Пусть w — гипернатуральное число. Внутренне определимое множество E будем называть гиперконечным, если существует определимая функция $f : \{0, 1, 2, \dots, w\} \rightarrow E$.

В следствие очевидной консервативности гиперарифметики без умножения над арифметикой Пресбургера, гиперконечные множества являются внутренне определимыми и обладают всеми теми свойствами конечных множеств, которые можно формализовать в языке теории гиперрациональных чисел.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 17. На всякой гиперконечной булевой алгебре существует мера

■

Обобщая приведённую теорему на случай произвольной булевой алгебры, получаем, что на каждой булевой алгебре \mathfrak{B} можно задать некоторое семейство мер. При этом, отправляясь от какого-то определимого множества $E \subset \mathfrak{B}$, можно задать меру на определимой подалгебре $\mathfrak{B}[E]$, порождённой множеством E . Такую меру будем обозначать μ_E .

Определение 29. Меру μ_E определённую выше будем называть основной E -мерой на булевой алгебре \mathfrak{B} .

Теорема Тарского позволяет получать семейство продолжений основной E -меры на всевозможные подалгебры, содержащие подалгебру $\mathfrak{B}[E]$.

Определение 30. Пару $\langle \mathfrak{A}, \mu_A \rangle$, где \mathfrak{A} — подалгебра алгебры \mathfrak{B} , содержащая множество E , μ_A — продолжение основной E -меры на \mathfrak{A} , будем называть измеримым пространством с базой E .

Отметим, что $\mathfrak{B}[E]$ является наименьшей подалгеброй \mathfrak{B} , которая содержит множество E , следовательно, пара $\langle \mathfrak{A}, \mu_E \rangle$ является наименьшим измеримым пространством с базой E .

Таким образом, с каждой базой E связана диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \langle \mathfrak{A}_1, \mu_1 \rangle & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \langle \mathfrak{A}_{1i}, \mu_{1i} \rangle & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \searrow \\
 & \nearrow & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \langle \mathfrak{A}_{\delta n}, \mu_{\delta n} \rangle \rightarrow \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \nearrow \\
 \langle \mathfrak{B}[E], \mu_E \rangle & \rightarrow & \dots & \dots & \dots & \rightarrow & \langle \mathfrak{A}_{\sigma j}, \mu_{\sigma j} \rangle & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \searrow & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \langle \mathfrak{A}_\alpha, \mu_\alpha \rangle & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \langle \mathfrak{A}_{\alpha k}, \mu_{\alpha k} \rangle & \rightarrow & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

В приведённой диаграмме каждая стрелка является сохраняющим меру мономорфизмом. К сожалению, гарантировать существование хотя бы одного максимального элемента этой диаграмме мы не можем. Ибо его существование равносильно аксиоме выбора, которая принципиально не может дать определимую подалгебру ввиду своей неконструктивности.

4. Интегрирование.

Определение 31. Пусть X — непустое множество объектов произвольной природы. Пусть, далее, выделена определимая в подходящем языке исчисления предикатов подалгебра \mathbb{A} его подмножеств и некоторое продолжение μ на алгебру \mathbb{A} основной E -меры, где E — выделенное определимое подмножество X . Тройку $\langle X, \mathbb{A}, \mu \rangle$ будем называть пространством с мерой.

Фиксируем в этом параграфе некоторое пространство с мерой.

Определение 32. Определимую функцию f будем называть простой, если существует внутренне определимое разбиение множества X на гиперконечное число определимых подмножеств $X_k \in \mathbb{A}$, $k = 1, 2, \dots, n$ так, что $f|X_k = p_k$, где p_k — положительное конечное гиперрациональное число.

Определение 33. Интегралом от функции f по мере μ назовём любое число $\int f d\mu \approx \sum_{k=1}^n p_k \mu(X_k)$, если последняя сумма является конечным числом.

Таким образом, если функция удовлетворяет условию конечности интегральной суммы, интеграл от неё определён, однако лишь с точностью до бесконечно малых. Такое положение вещей типично для теории гиперрациональных чисел. Достаточно отметить, что в [7] длина геометрического отрезка определена с точностью до бесконечно малых.

Теорема 18. Пусть f и g — простые функции. Тогда существует разбиение X на определимые части E_1, E_2, \dots, E_m так, что для всех $x \in E_s$ $f(x) = p_k$, $g(x) = q_l$.

Иными словами, можно считать, что любые две простые функции порождают одно и то же разбиение основного множества пространства с мерой.

Доказательство. Достаточно положить $E_{kl} = X_k \cap X_l$, где X_k и X_l разбиения, образованные F и g соответственно.

Ясно, что пересечение множеств определяется конъюнкцией формул, определяющих пересекаемые множества. Это обосновывает определимость введённых множеств. ■

Определение 34. Пусть F — почти положительная определимая функция, заданная на X со значениями в поле Ω . Предположим, что для некоторого натурального числа M $\mu\{x \in X : |F(x)| \geq n\} \approx 0$. Такую функцию будем называть почти ограниченной.

Определение 35. Пусть F — почти положительная почти ограниченная функция. Рассмотрим всевозможные её определимые простые миноранты: $0 \leq f(x) \leq F(x)$ для всех $x \in E$, где E — определимое подмножество X и $\mu(X \setminus E) \approx 0$. Предположим, далее, что существует «возрастающая последовательность» её почти положительных минорант (f_n) такая, что существуют все интегралы $\int_X f_n d\mu$. Положим $\int_X F d\mu \approx \int_X f_w d\mu$ для всех бесконечно больших гипернатуральных w .

Теорема 19. Понятие интеграла определено корректно.

Доказательство. Покажем, что для произвольной почти положительной почти ограниченной функции F существует $\int_X F d\mu$. Действительно, рассмотрим

«последовательность» $p_n = \int_X f_n d\mu$. Легко понять, что для каждого гипернатурального n $p_{n+1} \geq p_n$ и $0 \leq p_n \leq M$ для некоторого конечного гиперрационального M . Тогда по теореме о фундаментальности [11] для всех бесконечно больших гипернатуральных u, v $p_u \approx p_v$. Это и завершает доказательство ■

Определение 36. Для произвольной почти ограниченной функции F определим $\int_X F d\mu \approx \int_X f_+ d\mu - \int_X F_- d\mu$, где $F_{\pm}(x) = \max(\pm F(x), 0)$ — положительная и отрицательные части функции F . Интеграл считается определённым, если оба интеграла в правой части существуют и конечны и равен любому числу бесконечно близкому их разности.

Пример 1. Рассмотрим произвольный сегмент $[A, B]$ с конечной длиной. Пусть \mathbb{L} — след алгебры определимых подмножеств поля гиперрациональных чисел, порождённой всевозможными полусегментами вида $[a, b)$.

Определим $\mu[a, b) = b - a$. Точно так же как и в классическом анализе доказывается аддитивность и почти положительность μ .

Меру μ будем называть мерой Лебега на сегменте $[A < B]$.

Ясно, что достаточно рассматривать в качестве простых почти ограниченных функций функции вида $\pi(x) = c_k$ для $x \in [a, a_{k+1}]$, где $A = a_0 < a_1 < \dots < a_M = B$ — разбиение сегмента $[A, B]$.

Тогда, как легко понять, $\int_{[A, B]} F d\mu \approx \frac{1}{B - A} \sum_{k=0}^{M-1} F(a_k) \approx \int_A^B f$ из [11], если последние суммы бесконечно близки друг другу для любого разбиения $[A, B]$.

Приведём основные свойства интеграла. Доказательство их проводится, исходя из очевидных свойств интеграла от простых функций и того, что отношение бесконечной близости является конгруэнцией на классе всех конечных

чисел.

Теорема 20. Для любых двух функций, для которых существуют интегралы и любых двух конечных гиперрациональных p и q имеет место:

1. $\int_X (pF + qG) d\mu \approx p \int_X F d\mu + q \int_X G d\mu$;
2. Если $F(x) \leq G(x)$ для всех x на определенном подмножестве, дополнение которого имеет бесконечно малую меру, то $\int_X F d\mu \leq \int_X G d\mu$;
3. Если для всех x из определенного подмножества с дополнением, имеющим бесконечно малую меру $F(x) \approx 0$, то $\int_X F d\mu \approx 0$ ■

5. Мера плоских множеств. Рассмотрим евклидову плоскость, то есть модель аксиоматики Д. Гильберта [12] для двумерной геометрии.

Для описания геометрических понятий удобно использовать специальный язык геометрии, на котором могут быть формализованы аксиомы геометрии.

При этом принимаются все основные определения «школьной» геометрии, такие как круг, окружность, многоугольник, отрезок...

Определение 37. Под плоским множеством будем понимать класс E точек плоскости такой, что для некоторой формулы φ языка геометрии $T \in E$ тогда и только тогда, когда $\vdash \varphi(T)$.

Ясно, что все множества, определяемые в элементарной геометрии плоскости являются плоскими множествами и в нашем смысле.

Отметим, что средствами гиперрациональных чисел можно измерять длину отрезка [11]. При этом длина отрезка на любой геометрической прямой является мерой. В частности имеет место

Теорема 20. Пусть \mathbb{R} — множество вещественных чисел (в обычном теоретико-множественном понимании, как условно полное упорядоченное поле). Для каждого полусегмента $[a, b) \subset \mathbb{R}$ определим $\lambda_1[a, b) \approx b - a$. Тогда функция λ_1 является мерой на базе всех полусегментов ■

Определение 38. Меру, являющуюся продолжением длины полусегмента на любую алгебру подмножества, содержащую базу, будем называть линейной мерой Жордана.

Определение 39. Плоское множество E будем называть ограниченным, если существует прямоугольник K такой, что $E \subset K$.

Определение 40. Пусть K — некоторый прямоугольник на геометрической плоскости и A и B — длины его сторон. Положим $\lambda_2 K \approx A \cdot B$.

Теорема 22. Функция λ_2 является мерой на классе всех прямоугольников.

Доказательство очевидно.

Определение 41. Рассмотрим далее произвольную меру, являющуюся продолжением λ_2 на алгебру плоских множеств, порождённую классом прямоугольников. Эту меру будем называть плоской мерой Жордана и сохраним за ней обозначение λ_2 .

Далее классическими методами можно доказать, что параллелограмм является измеримым множеством и получить формулу для вычисления его площади. Следуя затем «школьному» курсу получаем формулу для вычисления площади треугольника и произвольного многоугольника.

Теорема 23. Круг B радиуса r является измеримым множеством.

Доказательство. Так как в окружность можно вписать правильный многоугольник с любым числом сторон n , то существует возрастающая последовательность S_n площадей вписанных в окружность правильных многоугольников. Согласно теореме о фундаментальности для всех бесконечно больших u и v $S_u \approx S_v$. Далее ясно, что нужно положить $\lambda_2 B \approx S_w$ для бесконечно большого w ■

Замечание. Следуя [7], где вычисляется длина окружности и вводится число, которое играет роль π , можно получить формулу для вычисления площади круга.

Пусть E — ограниченное плоское множество. Рассмотрим всевозможные прямоугольники, содержащие множество E . Выберем некоторую последовательность таких прямоугольников так, чтобы $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Предположим, далее, что существует последовательность k_n прямоугольников такая, что $\bigcup_{n=1}^m k_n \subset E$.

Определение 42. Множество E будем называть измеримым, если для всех бесконечно больших u $\sum_{n=1}^u (\lambda_2 K_n - \lambda_2 k_n) \approx 0$.

Класс измеримых множеств содержит, очевидно, все многоугольники, круги и все ограниченные множества, которые можно представить в виде не более чем счётного объединения плоских ячеек («полупрямоугольников»), то есть все открытые ограниченные плоские множества. Также ясно, что измеримыми являются все компактные множества плоскости.

6. Произведение мер. Пусть $\langle X_i, \mathbb{A}_i, \mu_i \rangle$ — пространства с мерой ($i = 1, 2$). Положим $X = X_1 \times X_2$. Рассмотрим семейство множеств $A_1 \times A_2$, где $A_i \subset X_i$. Определим $\mu_{A_1 \times A_2} \approx \mu_1 A_1 \cdot \mu_2 A_2$.

Теорема 24. Функция μ является мерой на базисе $E = \{A_1 \times A_2 : A_i \subset X_i (i = 1, 2)\}$ подмножеств X .

Доказательство очевидно ■

Определение 43. Любое продолжение меры μ на некоторую алгебру подмножеств X будем называть произведением мер μ_1 и μ_2 .

Пример 2. Плоская мера Жордана является произведением линейных мер.

Литература

- [1] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [2] Кейслер Г. Дж., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977. — 714 с.
- [3] Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. М.: Наука, 1984. — 432 с.

- [4] Ловягин Ю. Н. Гиперрациональные числа как основа математического анализа // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1, Вып. 7 — 2007. — С. 17–34.
- [5] Праздникова Е. В. Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1, Вып. 7 — 2007. — С. 41–66.
- [6] Ловягин Ю. Н., Праздникова Е. В. Элементарные функции в аксиоматическом нестандартном анализе // Математика. Информатика. Технологический подход к обучению в ВУЗе и школе: Материалы всероссийской научно-практической конференции, Курган. — 30–31 марта 2009 г.
- [7] Ловягин Ю. Н. Гиперрациональные числа как основа измерений и вычислений // Международная конференция «Теория приближений»: Тезисы докладов. СПб: 2010. — С. 59–61.
- [8] Владимиров Д. А. Булевы алгебры. — М.: Наука, 1966. — 318 с.
- [9] Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Введение в математическую логику. — М.: Издательство МГУ, 1982. — 120 с.
- [10] Биркгоф Г. Теория структур. М.: ИЛ, 1952. — 407 с.
- [11] Ловягин Ю. Н. Арифметика А. Тарского как методологическая основа преподавания математического анализа // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: Материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2012». СПб, 16–21 апреля 2012. — С. 182–194.
- [12] Гильберт Д. Основания геометрии. — М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. — 491 с.

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ОЦЕНКИ СНИЗУ ПРОЕКЦИОННОЙ КОНСТАНТЫ $\lambda(n - 5, n)$

Мартынов О. М.

Мурманский государственный гуманитарный университет

Мурманск

e-mail: olegmartynov@yandex.ru

Martynov O. M. About One Improvement of the Lower Bound for the Projection Constant $\lambda(n - 5, n)$. In this paper we calculate the relative projection constant $\lambda(Y_{n-5}, l_{\infty}^n)$, which gives the best lower bound for the projection constant $\lambda(n - 5, n)$.

В данной статье вычисляется относительная проекционная константа $\lambda(Y_{n-5}, l_{\infty}^n)$, которая является хорошей оценкой снизу (в смысле близости к точному значению) для константы $\lambda(n - 5, n)$.

В данной статье приводится улучшение результата, опубликованного в работе [2]. Справедливо следующее утверждение.

Теорема: Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma,\zeta,\eta}^{(0)}$ – оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_{\infty}^{(n)}$, $n = 31m$, $m \in N$ на подпространство $Y_{n-5} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) \cap w^{-1}(0)$, где функционалы f, g, h, t и w имеют вид

$$f = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$g = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$h = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$t = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$w = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

(здесь цифры 1 и 0 означают последовательности из m единиц и нулей соответственно).

Тогда

$$\lambda(Y_{n-5}, l_{\infty}^{(n)}) = \frac{3405m^3 - 1508m^2 + 216m - 10}{m(1205m^2 - 393m + 31)}.$$

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в работе [2], но оценки для T_i^* ($i = 7, \dots, 26$) проводятся несколько иначе. В данном случае получаем точное значение константы $\lambda(Y_{n-5}, l_{\infty}^{(n)})$, так как можно подобрать значения $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \zeta^0, \eta^0$, при которых значения T_i^0 ($i = 1, \dots, 31m$) будут равны

$$T_0 = \frac{3405m^3 - 1508m^2 + 216m - 10}{m(1205m^2 - 393m + 31)}.$$

Действительно, положим

$$\alpha_1^0 = \beta_1^0 = \gamma_1^0 = \zeta_1^0 = \eta_1^0 = \frac{T_0 - 1}{5(16m - 2)},$$

$$\alpha_2^0 = \beta_2^0 = \dots = \zeta_6^0 = \eta_6^0 = \frac{T_0 - 1}{4(11m - 2)}, \eta_2^0 = -2\alpha_2^0, \zeta_3^0 = -2\alpha_3^0, \gamma_4^0 = -2\alpha_4^0,$$

$$\beta_5^0 = -2\alpha_5^0, \alpha_6^0 = -2\beta_6^0, \alpha_7^0 = \beta_7^0 = \dots = \gamma_{16}^0 = \eta_{16}^0 = \frac{T_0 - 1}{3(10m - 2)}, \zeta_7^0 = \eta_7^0 = -\alpha_7^0,$$

$$\gamma_8^0 = \zeta_8^0 = -\alpha_8^0, \beta_9^0 = \gamma_9^0 = -\alpha_9^0, \alpha_{10}^0 = \beta_{10}^0 = -\gamma_{10}^0, \alpha_{11}^0 = \gamma_{11}^0 = -\beta_{11}^0,$$

$$\beta_{12}^0 = \zeta_{12}^0 = -\alpha_{12}^0, \alpha_{13}^0 = \eta_{13}^0 = -\beta_{13}^0, \beta_{14}^0 = \eta_{14}^0 = -\alpha_{14}^0, \gamma_{15}^0 = \eta_{15}^0 = -\alpha_{15}^0,$$

$$\alpha_{16}^0 = \zeta_{16}^0 = -\beta_{16}^0, \alpha_{17}^0 = \beta_{17}^0 = \dots = \beta_{26}^0 = \zeta_{26}^0 = \frac{T_0 - 1}{2(11m - 2)}, \gamma_{17}^0 = \zeta_{17}^0 = \eta_{17}^0 =$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha_{17}^0, \beta_{18}^0 = \gamma_{18}^0 = \zeta_{18}^0 = -\frac{1}{2}\alpha_{18}^0, \alpha_{19}^0 = \beta_{19}^0 = \gamma_{19}^0 = -\frac{1}{2}\zeta_{19}^0,$$

$$\beta_{20}^0 = \zeta_{20}^0 = \eta_{20}^0 = -\frac{1}{2}\alpha_{20}^0, \beta_{21}^0 = \gamma_{21}^0 = \eta_{21}^0 = -\frac{1}{2}\alpha_{21}^0, \alpha_{22}^0 = \gamma_{22}^0 = \zeta_{22}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{22}^0,$$

$$\alpha_{23}^0 = \beta_{23}^0 = \zeta_{23}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{23}^0, \alpha_{24}^0 = \beta_{24}^0 = \eta_{24}^0 = -\frac{1}{2}\gamma_{24}^0, \alpha_{25}^0 = \zeta_{25}^0 = \eta_{25}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{25}^0,$$

$$\alpha_{26}^0 = \gamma_{26}^0 = \eta_{26}^0 = -\frac{1}{2}\beta_{26}^0, \alpha_{27}^0 = \beta_{28}^0 = \gamma_{29}^0 = \zeta_{30}^0 = \eta_{31}^0 = \frac{T_0 - 1}{16m - 2},$$

$$\beta_{27}^0 = \gamma_{27}^0 = \dots = \zeta_{31}^0 = -\frac{T_0 - 1}{5(16m - 2)}.$$

Тогда $T_i^0 = T_0$ ($i = 1, \dots, 31m$).

В работе [1] получена следующая оценка сверху

$$\lambda(k, n) \leq f(k, n) = \sqrt{k} \left(\frac{\sqrt{k}}{n} + \frac{\sqrt{(n-1)(n-k)}}{n} \right) \quad (1)$$

Найденное значение константы $\lambda(Y_{n-5}, l_\infty^{(n)})$ является хорошей оценкой снизу для константы $\lambda(n-5, n)$ (в смысле близости к точному значению этой константы). Покажем это. Воспользуемся неравенством

$$\lambda(Y_{n-5}, l_\infty^{(n)}) \leq \lambda(n-5, n) = \sup\{\lambda(Y_{n-5}, X_n) \mid Y_{n-5} \subset X_n\} \leq f(n-5, n),$$

где $f(n-5, n)$ определяется с помощью формулы (неравенство (1)):

$$f(k, n) = \frac{k + \sqrt{k(n-1)(n-k)}}{n}.$$

Обозначим полученное значение константы $\lambda(Y_{n-5}, l_\infty^{(n)})$ через $\varphi(31m-5, 31m)$.

Кроме того,

$$f(31m-5, 31m) = \frac{31m-5 + \sqrt{5(31m-5)(31m-1)}}{31m}.$$

Найдем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f(31m-5, 31m) - \varphi(31m-5, 31m)) \approx 0.41.$$

Возьмем теперь функционалы f, g, h, t и w в виде

$$f = (1, r, r, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, 0, r, r, 0, r, r, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$g = (1, r, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, 0, r, 0, r, r, r, 0, 0, 0, 0, r, 0, 0, r, r, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$h = (1, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, 0, r, r, r, 0, r, 0, 0, 0, r, 0, 0, r, r, r, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$t = (1, r, 0, r, r, r, 0, 0, r, r, r, 0, r, r, r, 0, 0, 0, r, 0, r, 0, 0, r, 0, r, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$w = (1, 0, r, r, r, r, 0, r, r, r, r, r, 0, 0, 0, r, 0, r, r, 0, 0, r, r, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

(здесь цифры 1, 0 и буква r означают последовательности из m единиц, нулей и букв r соответственно).

Тогда

$$\lambda(Y_{n-5}, l_\infty^{(n)}) = \frac{Ar^3 + Br^2 + Cr + D}{Er^3 + Fr^2 + Gr + H}.$$

где $A = 1995m^3 - 770m^2 + 70m$, $B = 1163m^3 - 586m^2 + 126m - 10$, $C = 231m^3 - 142m^2 + 20m$, $D = 16m^3 - 10m^2$, $E = 735m^3 - 175m^2$, $F = 388m^3 - 181m^2 + 31m$, $G = 76m^3 - 37m^2$, $H = 6m^3$.

В этом случае

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f(31m-5, 31m) - \varphi(31m-5, 31m)) \approx 0.309.$$

Литература

- [1] König H. P., Lewis D. R., Lin P.-K. Finite dimensional projections // Stud. math. (PRL), 1983, 75, № 3. – P. 341–358.
- [2] Мартынов О. М. Об относительной проекционной константе некоторых классов подпространств коразмерности пять пространства $\lambda(Y_{n-5}, l_{\infty}^{(n)})$ // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. LXV Герценовские чтения – 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 135–140.

Актуальные проблемы математического образования

УДК 371.321.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СОДЕРЖАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЯ “ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА”

Будаев В. Д.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: budaev@list.ru

Budaev V.D. On features of the contains of the Mathematical Analysis for the students of “Applied Mathematics and Computer Science”. Features of a course of the Mathematical Analysis for students of the “Applied Mathematics and Computer Science” direction are considered.

Рассматриваются особенности содержания курса математического анализа для студентов направления “Прикладная математика и информатика” в педагогическом вузе.

Хорошо известно, что преподавание базовых математических дисциплин в вузе существенно зависит от типа вуза и характера образовательной программы. На математических факультетах классических университетов такие дисциплины как “Математический анализ”, “Алгебра”, “Геометрия” традиционно читаются в большом объеме, на серьезном глубоком уровне, с доказательствами всех излагаемых утверждений, с соблюдением принятых в математике норм строгости. В технических вузах (а также для студентов-физиков) многие доказательства опускаются, изложение нередко ведется на уровне преподнесения готовых алгоритмов, что позволяет изложить большой объем материала в ущерб строгости изложения. Наконец, в педагогических вузах упор делается на подробное и прозрачное изложение основных понятий и теорем, логическую стройность курса; при этом объем излагаемого материала не столь велик, как в предыдущих случаях (что вполне естественно: будущий школьный учитель не обязан знать столько же, сколько профессиональный математик-исследователь, но должен уметь логически мыслить и глубоко понимать фундаментальные понятия, лежащие в основе школьного курса).

В изложенную схему плохо вписывается преподавание математики для студентов-прикладников. В самом деле, прикладник должен, с одной стороны, хорошо знать фундаментальную математику (что роднит его с профессиональным математиком), но с другой стороны, должен не хуже (а, скорее, лучше) инженеров и физиков знать основные приемы и алгоритмы решения прикладных задач (что роднит его со студентами технических вузов). Совместить эти два требования воедино весьма непросто. Если же речь идет о прикладниках,

обучающихся в педагогическом вузе, то возникает ещё одна сложность: преподаватели, привыкшие работать с будущими учителями, невольно переносят свой опыт и на студентов-прикладников.

В настоящей статье предпринята попытка очертить некоторые особенности курса математического анализа для студентов-прикладников. Автор основывается в первую очередь на своем опыте работы как с будущими учителями, так и с будущими инженерами, а также с будущими прикладниками.

Курс математического анализа обычно начинается с изучения действительных чисел. Известны несколько способов изложения этого раздела. В педагогических вузах, как правило, принят аксиоматический подход, изложенный, в частности, в учебнике [1]. Разумеется, студентам-прикладникам тоже следует знать и понимать суть аксиоматического подхода к построению математических теорий. Однако в данном случае важнее донести до студентов другое: то, что любое действительное число можно как угодно точно приблизить рациональным числом. Этот факт принципиально важен с практической точки зрения: мы не можем заставить компьютер воспринимать бесконечные дроби. Компьютер способен оперировать лишь с конечной информацией, а значит, любое иррациональное число представляется рациональными числами с некой погрешностью. По-видимому, для студентов-прикладников есть смысл вводить действительные числа как бесконечные (десятичные) дроби. Конечно, при этом приходится достаточно долго и кропотливо говорить об операциях над такими дробями, об упорядоченности множества таких дробей. Но есть и несомненные преимущества: возможность приближения любого действительного числа рациональным при таком подходе очевидна. Нетрудно при таком подходе отождествить множество действительных чисел с множеством точек прямой, а также показать, что вместо десятичных можно использовать двоичные, троичные и т. д. дроби (что опять-таки важно для понимания представления действительных чисел в компьютере).

В курсе анализа для будущих учителей большое внимание уделяется аксиоме полноты и равносильности различных форм этой аксиомы. На наш взгляд, после рассмотрения действительных чисел с помощью бесконечных дробей следует кратко рассказать о возможности аксиоматического построения множества действительных чисел, обратив особое внимание на аксиому полноты. Доказывать равносильность различных её формулировок, видимо, не имеет смысла, но суть аксиомы непременно следует донести до студентов. Коротко говоря, студент-прикладник должен четко понимать, что множество рациональных чисел “дырявое”, что иррациональные числа введены с целью заполнить все “дыры”, и что расширить множество действительных чисел с сохранением его свойств (аксиом) невозможно. При изучении утверждений, равносильных аксиоме полноты (принцип вложенных отрезков, критерий Коши, принцип Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности и т. д.) следует каждый раз оговорить, что это утверждение выражает всё то же самое свойство полноты. Например, при обсуждении принципа вложенных отрезков можно пояснить, что сам факт того, что отрезки должны к чему-то стягиваться, интуитивно ясен, но именно свойство полноты гарантирует нам, что отрезки стягиваются не к “дырке” и не к нескольким точкам одновременно, а именно к одной-единственной точке.

Следующий момент связан с выбором способа доказательства некоторых утверждений. В математике огромную роль играют так называемые теоремы существования. Как правило, такие теоремы допускают несколько различных способов доказательства, среди которых могут быть как доказательства конструктивные, так и неконструктивные. Так, в книге [1] приведены два доказательства теоремы Больцано – Коши. Совершенно очевидно, что для студентов-прикладников предпочтительны конструктивные доказательства, поскольку они, как правило, дают один из приближённых методов решения некоторого класса задач.

Немалую проблему представляет отбор материала, который следует непременно изложить в данном курсе. Например, преподаватели затрудняются отобрать те методы, которые следует обязательно рассмотреть при изучении интегрирования иррациональностей. Нам кажется, что в подобных ситуациях следует руководствоваться двумя соображениями: а) нельзя объять необъятное, б) будущие прикладники непременно должны уметь работать со справочной литературой. Видимо, будет разумно, если преподаватель ограничится изложением самых важнейших ситуаций и методов (дробно-линейные иррациональности, тригонометрические подстановки для квадратичных иррациональностей, некоторые частные случаи), а, например, подстановки Эйлера и интегрирование биномиального дифференциала оставит студентам для самостоятельного изучения (без доказательств, на уровне решения серии примеров с помощью какого-либо учебника). Более того, полезен, как нам кажется, следующий ход (при наличии достаточного количества времени и не слишком слабого уровня подготовки студентов): порекомендовав студентам одно из справочных изданий по интегрированию (например, [2]), дать им для самостоятельного решения серию примеров, в которых следует свести интеграл к той или иной формуле, имеющейся в справочнике (разумеется, студенты сами должны решить, какую именно формулу из справочника им следует использовать).

Одним из отличий курса анализа для студентов-прикладников является большое внимание, уделяемое кратным, криволинейным, поверхностным интегралам и элементам векторного анализа. Впрочем, в отличие от курса для профессиональных математиков, не следует, на наш взгляд, скрупулезно излагать все понятия и доказывать все теоремы. Достаточно разобрать понятие двойных интегралов, их свойства, способы вычисления и замену переменных, изменение порядка интегрирования, после чего более бегло (ссылаясь на аналогию) строить тройные, криволинейные и поверхностные интегралы. Безусловно, следует добиться знания (и понимания физического смысла) студентами таких понятий как градиент, дивергенция, ротор, а также формул Грина, Остроградского – Гаусса и Стокса.

Особо следует остановиться на способах изложения рядов Фурье. Принципиальным вопросом при изложении этого раздела является то, какой из видов сходимости следует поставить во главу угла: поточечную, равномерную или среднеквадратичную. Сложность ситуации состоит в том, что для прикладников крайне важно как рассмотрение среднеквадратичной сходимости (исходя из потребностей физики), так и сходимости в точке и равномерной сходимости. В частности, прикладникам следует знать и понимать такое явление как дефект сходимости вблизи точек разрыва функции (эффект Гиббса).

Если студенты к моменту изучения рядов Фурье уже знакомы (хотя бы вкратце) с интегралом Лебега и пространством L_2 , то, как показывает опыт, предпочтительнее начать изложение с понятия ортогональности, ортогонального ряда (обобщённого ряда Фурье), теоремы о минимальном свойстве коэффициентов Фурье. Затем, как следствия из этой теоремы, можно получить неравенство Бесселя и равенство Парсеваля, постепенно подводя студентов к пониманию базисности тригонометрической системы в пространстве L_2 . Лишь после этого следует переходить к рассмотрению сходимости в точке и равномерной сходимости, ограничившись при этом лишь самыми простыми и употребляемыми признаками сходимости, а также эффектом Гиббса. Разумеется, объем и сложность изучаемого материала сильно зависит от уровня подготовки данных конкретных студентов, и от того, какое количество времени преподаватель может ответить изучению данного раздела.

Подытоживая, можно сказать следующее. Во-первых, характер изложения базовых понятий для студентов направления “Прикладная математика и информатика” должен диктоваться спецификой этого направления. Во-вторых, при доказательстве теорем следует предпочитать конструктивные доказательства. В-третьих, отбор содержания (и даже перечень рассматриваемых разделов) должен опять-таки учитывать специфику данного направления.

Литература

- [1] Будаев В. Д., Якубсон М. Я. Математический анализ. Функции нескольких переменных. – СПб.: “Лань”, 2012.
- [2] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981.

УДК 512,514

СЕМЕЙСТВО КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Волков Д. Ю., Галунова К. В.

Санкт-Петербургский государственный университет

Российский государственный педагогический

университет им. А. И. Герцена

Российский государственный политехнический университет

e-mail: dmitrivolkov@mail.ru

Volkov D., Galunova K. We describe several families of implicit quadrics with integer coefficients.

В статье описан алгоритм построения семейства кривых и поверхностей второго порядка, заданных неявными уравнениями с целочисленными коэффициентами.

1. Введение. В статье рассматривается один вопрос о построении общих уравнений кривых и поверхностей второго порядка с заданными свойствами. Статья является продолжением работы [1]. Напомним, что в работе [1] был указан алгоритм построения симметричных матриц с целыми собственными числами и целыми собственными векторами. Используя этот алгоритм, мы рассмотрим задачу нахождения целочисленных общих уравнений кривых (поверхностей) второго порядка таких, что простейшие (канонические) уравнение этих кривых (поверхностей) также будут целочисленным. В статье предлагается алгоритм построения семейств таких кривых (поверхностей) и приводятся многочисленные примеры. Эти примеры могут быть использованы в учебной практике и при тестировании различных программ по изображению пересечения квадрик. Для упрощения мы рассматриваем в статье двумерный и трехмерный случаи.

Поверхностью (кривой) второго порядка называют множество точек (x_1, \dots, x_n) , заданных уравнением:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0. \quad (1)$$

В матричной форме уравнение имеет вид

$$X^T A X + b^T X + X^T b + c = 0 \quad (2)$$

Уравнение перехода к другой декартовой системе координат имеет вид

$$X = Q X' + h \quad (3)$$

где столбцы $X = (x_1, \dots, x_n)^t$, $X' = (x'_1, \dots, x'_n)^t$ – координаты точки в старой и в новой системах координат, Q – ортогональная матрица порядка $n \times n$, h – вектор столбец координат нового начала координат в старой системе координат. При $Q = E$, E – единичная матрица порядка $n \times n$, преобразование называется параллельным переносом, а при $h = 0$ – поворотом.

Непосредственно доказываем, что при переходе к новой системе координат, уравнение поверхности принимает вид

$$X'^t A' X' + b'^t X' + X'^t b' + c' = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A' &= Q^t A Q, \\ b' &= Q^t A h + Q^t b, \\ c' &= h^t A h + b^t h + h^t b + c. \end{aligned} \quad (5)$$

В матричной форме эти формулы можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} A' & b' \\ b'^t & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ h^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как хорошо известно, квадрики разделяются на центральные и параболические. Известно, что можно так выбрать замену, что уравнение поверхности приводятся либо к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + c = 0, \quad (6)$$

либо к виду

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + 2ux_n = 0. \quad (7)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – ненулевые характеристические числа матрицы A ,

$$c = \frac{K_q}{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_r}, \quad u = \sqrt{-\frac{K_q}{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_r}}, \quad (8)$$

K_q – инвариант поверхности. Квадрики, которые задаются уравнением (6) называются центральными, а уравнением (7) – параболическими (подробности в [2]).

Рассмотрим задачу построения кривых и поверхностей, уравнения которых в исходной системе и канонические являются целочисленными и ортогональная матрица Q – рациональная (в двумерном случае мы рассмотрим более общие матрицы для центральных квадрик). Задачу будем решать сначала для центральных квадрик, а потом для параболических.

2. Построение центральных квадрик. Уравнения центральных поверхностей удобно выводить в два этапа:

- 1) построить симметричную матрицу с целыми собственными числами и квадратичную форму, собственные числа которой являются целыми числами и целыми собственными векторами и соответствующую квадратичную форму;
- 2) применить параллельный перенос и получить уравнение поверхности с линейными слагаемыми.

Первый этап подробно рассмотрен в [1]. Для получения уравнений определенных типов поверхности удобно выражать элементы симметричной матрицы через собственные числа. Рассмотрим примеры построения уравнений кривых и поверхностей.

Пример 1. Рассмотрим матрицу, задающую ортонормированный базис на плоскости:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $A = S^T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)S$ имеет вид:

$$A = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1\lambda_1 + k^2\lambda_2 & k\lambda_1 - k\lambda_2 \\ k\lambda_1 - k\lambda_2 & k^2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$a_{11} = m, \quad a_{21} = n, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Найдем решение системы :

$$\lambda_1 = m + kn, \quad \lambda_2 = m - \frac{1}{k}n.$$

Подставив найденные решения, получим матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} m & n \\ n & m + \frac{k^2-1}{k}n \end{pmatrix}.$$

Если n делится на k без остатка, то полученная матрица будет целочисленной, и собственные числа тоже будут целыми. При $k = 1$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = m + n, \quad \lambda_2 = m - n.$$

Положим $m = 3, n = 2$ и рассмотрим эллипс, заданный в новой системе координат уравнением

$$5x^2 + y^2 = 5.$$

В исходной системе координат уравнение эллипса будет иметь вид

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 = 5.$$

Сделаем параллельный перенос

$$x \rightarrow x - 1, \quad y \rightarrow y - 1,$$

получим уравнение:

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y + 5 = 0.$$

Приведем примеры эллипсов и гипербол:

		ЭЛЛИПСЫ	
1	$3x^2 + 3y^2 + 4xy = 5$	$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y = -5$	$5x^2 + y^2 = 5$
2	$x^2 + y^2 + xy = 3$	$x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = 0$	$6x^2 + 2y^2 = 12$
3	$5x^2 + 5y^2 + 4xy = 21$	$5x^2 + 4xy + 5y^2 - 14x - 14y = 7$	$7x^2 + 3y^2 = 21$
		ГИПЕРБОЛЫ	
4	$5x^2 + 5y^2 - 12xy = 11$	$5x^2 - 12xy + 5y^2 + 2x + 2y = 13$	$x^2 - 11y^2 = -11$
5	$x^2 + y^2 - 12xy = 35$	$x^2 - 12xy + y^2 + 10x + 10y = 45$	$5x^2 - 11y^2 = -35$

Пример 2. Рассмотрим простейший ортонормированный базис в пространстве:

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A примет вид:

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 & -2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 & -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 & 4\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 & 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & 4\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Решим уравнение:

$$a_{1,2} = (-2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3)/9 = n$$

относительно λ_3 :

$$\lambda_3 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{9}{2}n.$$

Подставляя решение, получим:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 - 6n & 3n & -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6n \\ 3n & \lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{3}{2}n & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3n \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 6n & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3n & 3\lambda_2 - 6n \end{pmatrix} \quad (12)$$

Используя явный вид A при $n = 2$, получим таблицу:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	эллипсоиды	
3, 6, 9	$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz = 162$	$3x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 162$
3, 12, 12	$11x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 4xy + 4xz - 8yz = 432$	$3x^2 + 12y^2 + 12z^2 = 432$
3, 15, 18	$15x^2 + 10y^2 + 11z^2 + 4xy + 8xz - 12yz = 810$	$3x^2 + 15y^2 + 18z^2 = 810$
	гиперboloиды	
-3, 12, 18	$13x^2 + 6y^2 + 8z^2 + 4xy + 12xz - 16yz = 216$	$-3x^2 + 12y^2 + 18z^2 = 216$
-3, 15, 24	$17x^2 + 8y^2 + 11z^2 + 4xy + 16xz - 20yz = 360$	$-3x^2 + 15y^2 + 24z^2 = 360$

3. Построение параболических квадрик. Построение параболических уравнений мы проведем в несколько этапов:

1) построим квадратичную форму с одним или несколькими нулевыми собственными числами

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2,$$

которая при преобразовании $x = Qy$ перейдет в квадратичную форму с целыми коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j; \quad (13)$$

2) к квадратичной форме добавим линейные слагаемые переменных, которым соответствуют нулевые собственные числа квадратичной формы,

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + 2ux_n,$$

и совершим ортогональное преобразование с рациональными коэффициентами $x = Qy$, которое переведёт функцию в функцию

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i y_i,$$

где $b_i = Q_{n,i}u$. Выберем целое u так, чтобы b_i стали целыми. В результате получили параболическое уравнение с целыми коэффициентами.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n b_i y_i = 0.$$

Пример 3. Рассмотрим построение уравнения параболы. Рассмотрим уравнение $25x'^2 = 0$. При замене переменной

$$x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \quad y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$$

уравнение переходит в уравнение $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$. Следовательно, если мы выберем $u = 5$ и видоизменим исходное уравнение $25x'^2 + 5y' = 0$, тогда при замене оно перейдёт в уравнение $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 3x + 4y = 0$. Это уравнение задает параболу.

Пример 4. Рассмотрим матрицу A из примера 2, формула (12). Положим $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 24, n = 0$. Из явного вида A и S следует, что уравнение:

$$3y^2 + 6z^2 + 6x = 0$$

перейдёт в уравнение:

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xz + 4yz + 2x - 4y - 4z = 0.$$

Литература

- [1] Волков Д. Ю. Галунова К. В. Целочисленные симметричные матрицы с целыми собственными числами и векторами // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения–2005”. – СПб.: БАН, 2012. – С. 163–168.
- [2] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 648 с.

ОБУЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ И ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ВО ВНЕУРОЧНОЙ РАБОТЕ

Гарминович Н. А., Зацепина Т. В., Комова Т. Ю.
Мичуринский государственный аграрный университет
Педагогический институт

В новом Федеральном государственном стандарте начального общего образования (ФГОС НОО) особо выделена внеурочная работа. Она должна быть направлена на развитие у учащихся мыслительных операций, познавательной активности, интереса к предмету.

Организация исследовательской и проектной деятельности младших школьников, особенно по математике, требует специальной подготовки студентов по специальности «Педагогика и методика начального образования». В связи с этим был разработан и внедрен в учебный процесс спецкурс «Методика организации исследовательской и проектной деятельности младших школьников на внеурочных занятиях по математике».

На занятиях студенты получали сведения по следующим темам: «Использование элементов истории математики в исследовательской и проектной деятельности младших школьников», «Различные методические подходы к ознакомлению младших школьников с вопросами истории математики», «Организация исследовательской деятельности младших школьников в процессе работы по составлению арифметических, комбинаторных и логических задач», «Организация исследований младших школьников по разделу “Математика в быту”» и т. д.

Одна из тем спецсеминара посвящена обучению студентов методике использования метода проектов на внеклассных занятиях. В условиях проектирования и проектного обучения акцент смещается с поиска новых знаний о мире на задачу его творческого преобразования. Проектная деятельность требует от учащихся поиска различных путей решения проблемы, воображения, трансформации знаний, активного использования опыта в новых ситуациях (см., например: [1, 2]).

Основные задачи изучения темы состоят в следующем:

– раскрыть психолого-педагогические основы метода проектов как вида

исследовательской деятельности младших школьников на внеклассных занятиях;

– определить особенности использования проектного метода обучения во внеклассной работе по математике;

– рассмотреть методический аспект проектной формы занятий.

Приведём тематический план организации внеклассной работы на основе метода проектов в 4-м классе в течение учебного года.

План внеклассной работы по математике в 4-м классе на основе использования исследовательских проектов.

Изучаемая тема	Проект	Тип проекта	Этапы проекта
«Как люди измеряют время»	«Изготовь свой календарь»	Исследовательский, практико-ориентированный (прикладной). Средней продолжительности.	I этап. Знакомство с различными видами и устройством календарей на уроках и внеклассном занятии. Решение создать свой классный календарь.
			II этап. Определение направлений поиска ответов на поставленные вопросы. Разбиение на группы, распределение работы между группами и определение сроков.
			III этап. Поиск материала и чтение научно-популярной литературы. Проведение викторин, конкурсов.
			IV этап. Члены каждой группы решают, какой календарь они будут делать. Определение вида календаря и его изготовление.
			V этап. Презентация результатов группового творчества. Защита проектов.
Решение задач	«Составь свою задачу-сказку»	Творческий, практико-ориентированный. Кратковременный.	В течение недели. Конкурс задач-сказок и рисунков к ним.
Развитие вычислительных навыков	«Составь волшебный квадрат»	Творческий, практико-ориентированный. Кратковременный.	В течение недели. Конкурс магических квадратов.
Повторение и закрепление изученного по всем темам курса	«Изготовление сборника занимательных задач и головоломок»	Творческий, практико-ориентированный (прикладной). Средней продолжительности.	I этап. Знакомство с различными видами задачников и сборников математических головоломок и игр на внеклассных занятиях. Решение создать свой классный сборник занимательных материалов по математике.

			<p>II этап. Определение направлений поиска ответов на поставленные вопросы. Разбиение на группы, распределение работы, определение сроков.</p> <p>III этап. Поиск материала и чтение научно-популярной литературы. Проведение викторин, конкурсов, соревнований, игр.</p> <p>IV этап. Члены каждой группы решают, какие разделы сборника они будут оформлять. Изготовление сборника занимательных задач и головоломок.</p> <p>V этап. Презентация результатов группового творчества. Защита проектов.</p>
«Нумерация»	«Магия чисел»	Исследовательский, социальный. Долговременный.	<p>I этап. Знакомство с книгами по истории математики. Решение: рассказать интересные сведения о числах родителям и будущим первоклассникам.</p> <p>II этап. Определение направлений поиска ответов на поставленные вопросы. Разбиение на группы, распределение работы, определение сроков.</p> <p>III этап. Поиск материала и чтение научно-популярной литературы. Проведение викторин, конкурсов, соревнований, игр.</p> <p>IV этап. Члены каждой группы решают, о каком числе они будут рассказывать. Подготовка материала о числах.</p> <p>V этап. Презентация результатов группового творчества.</p>

Возможные темы для проектов (для учащихся III–IV классов):

- Книга «Математики Древнего мира».
- Книга «Магия чисел».
- Театральная постановка по книге «Магия чисел».
- Кулинарный праздник «Точные рецепты наших мам и бабушек».
- Коллекция макетов приборов для измерения времени.
- Коллекция макетов различных измерительных приборов.
- Конкурс «Я – архитектор» (макеты зданий с использованием различных геометрических тел).
- Конкурс на самый экономный раскрой платья для куклы.

Возможны исследовательские задания для организации кулинарного праздника на основе интеграции математики и сведений по окружающему миру. Можно предложить при подготовке к этому празднику узнать кулинарные рецепты у мам и бабушек, и на основе этих рецептов составить задачи, в которых требуется рассчитать продукты, стоимость покупок, опираясь при этом на арифметические навыки, которые уже сформированы у учеников.

Немалые возможности представляет для организации исследовательской и проектной деятельности обучение детей решению задач. В учебниках математики встречается довольно много текстовых задач на расчеты зависимостей между ценой, количеством и стоимостью товаров в магазине [3]. При постоянной инфляции вставка фиксированной цены в условие задачи вызывает удивление учащихся, отвлекает их от решения самой задачи. Очень удобен в этом отношении учебник математики авторского коллектива под руководством

М. И. Моро. Учебник содержит задачи, в которых вместо цены товара оставлен пустой квадрат и дано задание составить задачу. Для учащихся начальной школы такие задачи со вставкой реальных данных весьма важны, так как «Примерные программы ...» в графе «Планируемые результаты» ставят проблему обучения использованию навыков определения зависимостей именно для решения реальных практических задач. Поэтому на внеклассных занятиях по математике учитель может дать группе детей исследовательское задание: посетить ближайшие магазины и рынки, узнать цены на тот товар, цена которого не проставлена в условии задачи, и не только решить предложенную задачу, но и составить свои задачи с другими условиями вопросами: «На сколько ...?», «Сколько удалось сэкономить?», «Хватило ли денег ...?» и т. д. На занятиях математического кружка желательно провести презентации составленных учениками задач, где можно дать дополнительные сведения о торговой наценке, показать от чего она зависит, как рассчитывается и т. д.

В учебниках математики также много текстовых задач на движение. На основе таких задач, в преддверии Олимпиады-2014, можно организовать исследование о рекордах в спорте. Этот проект требует серьезной подготовки, так как для его выполнения необходим поиск информации в Интернете и специальных изданиях, посвященных спорту. При работе над данным проектом необходимо учитывать особенности психологии младших школьников. Цифры спортивных рекордов ничего не говорят детям, так как они далеки от их жизненной практики. На подготовительном этапе исследования совместно с учителем физкультуры можно провести мини-олимпиаду и отметить результаты самих детей и учителя физкультуры в беге, прыжках в длину и высоту и т. д. Тогда ученики смогут сопоставить результаты рекордсменов мира и со своими показателями, и с показателями взрослого человека. Можно совместно с родителями организовать соревнования «Папа, мама, я – спортивная семья» с фиксацией результатов.

Затем, на основе собранной информации, дети составляют свои задачи по моделям задач, которые есть в учебнике. Можно предложить ученикам сопоставить рекорды в одном виде спорта, но достигнутые в разное время и т. д. Практическим результатом такой работы может быть иллюстрированный сборник задач «Спорт и математика».

Группе детей, интересующейся биологией, можно дать задание составить сборник задач на тему «Животные – олимпийцы».

При знакомстве детей на уроках математики с темой «Измерение площади», параллельно, на внеклассных занятиях можно начать работу над проектом «Ремонт в квартире» [4]. В процессе выполнения этого проекта учащиеся должны будут обмерить полы, рассчитать площадь своих квартир и начертить планы, соблюдая масштаб, обмерить и рассчитать площадь стен, вычислить количество рулонов обоев и их стоимость, количество клея и т. д.

Для учеников, интересующихся историей, будут интересны темы «Единицы измерения в Древней Руси» и «Единицы измерения в других странах». Заинтересует их и тема «Математика в Древнем мире» (Пифагор, Евклид, Фалес Милетский).

Таким образом, организация исследовательской и проектной деятельности на занятиях математического кружка обладает рядом достоинств:

1) многообразии форм работы (используется коллективная и индивидуальная работа, работа в группах, в парах);

2) посильность (предлагаемые на выбор темы позволяют подобрать для исследования интересную тему любому ученику – и математику, и гуманитарю);

3) широкое использование межпредметных связей (привлекаются факты из других дисциплин, даже тех, которые ученики будут изучать позже – истории, географии, биологии, литературы и т. д.);

4) пропедевтика (сообщаются математические термины, некоторые исторические факты, с которыми ученики подробнее будут знакомиться позже и т. д.).

Опыт проведения спецкурса «Методика организации исследовательской и проектной деятельности младших школьников на внеурочных занятиях по математике» на факультете начальных классов показал, что тематика и содержание занятий определены правильно. Студенты перестали испытывать затруднения при организации внеурочной работы по математике во время прохождения педагогической практики. Они приобрели опыт планирования внеурочной работы по математике в связи с организацией проектной деятельности учеников, знания об исследовательской и проектной деятельности по математике, собрали необходимые материалы, а также проанализировали учебно-методическую литературу, которую можно использовать, организуя внеурочную деятельность младших школьников.

Литература

- [1] Белянкова Н. М. Исследовательские задания и проекты в математическом образовании младших школьников: интегрированный подход // Начальная школа. – 2011. – №1. – С. 85–87.
- [2] Берестнева Е. В. Проектная деятельность учащихся начальной школы // Начальная школа. – 2011. – №6. – С. 15–20.
- [3] Давыдова Е. Р. Исследовательская деятельность учащихся // Начальная школа. – 2010. – №12. – С. 61–67.
- [4] Дубова М. В., Кузнецова Н. В. Как рождается проект // Начальная школа. – 2012. – №11. – С. 63.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВПИСАННЫХ ЧЁТНОУГОЛЬНИКОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НАБОРОВ ТОЧЕК ПЛОСКОСТИ

Десятник В. Л., Рукшин С. Е.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: valeond@gmail.com, vliuser@gmail.com

Desyatnik V. L., Rukshin S. E. Characteristic properties of inscribed evenangles and associated with them inequalities for a set of points on the plane. We consider characterization of refinement for an arbitrary evenangles by identity formulation that connects its lateral lengths with diagonal lengths. We construct associated inequalities for an arbitrary even set of points on the complex plane.

Рассматривается характеристика вписанности произвольного чётноугольника путем установления тождества, связывающего длины его сторон и диагоналей. Для произвольного чётного набора точек комплексной плоскости строятся соответствующие неравенства.

Клавдий Птолемей в своем знаменитом трактате “Альмагест” для вычисления длин хорд дуг окружности от 0° до 180° доказал и применил следующую теорему:

Теорема (Птолемей). Произведение длин диагоналей вписанного в круг четырехугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон.

Оказалось, что верна и обратная теорема.

Используя “геометрию” комплексных чисел, мы приведем доказательство некоторого неравенства для точек комплексной плоскости, достижение равенства в котором является характеристическим свойством вписанных четырехугольников, откуда будут следовать и теорема Птолемея, и обратная к ней.

Теорема 1 (***неравенство для четырех точек и характеристическое свойство вписанного четырехугольника***). Для любых четырех точек A, B, C, D на плоскости

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (1)$$

При этом равенство имеет место в том и только в том случае, когда либо четырехугольник вписанный, либо мы имеем дело с одним из вырожденных случаев, когда две точки совпадают или все точки лежат на одной прямой.

Доказательство. Введем (см. рис. 1) такую систему комплексных координат, чтобы: 1) точка A совпадала с началом координат; 2) точка D с комплексной координатой z_3 лежала на положительном луче действительной оси. Пусть комплексные координаты точек B и C равны z_1 и z_2 , соответственно.

Рассмотрим следующее тождество:

$$z_2(z_3 - z_1) = z_1(z_3 - z_2) + z_3(z_2 - z_1),$$

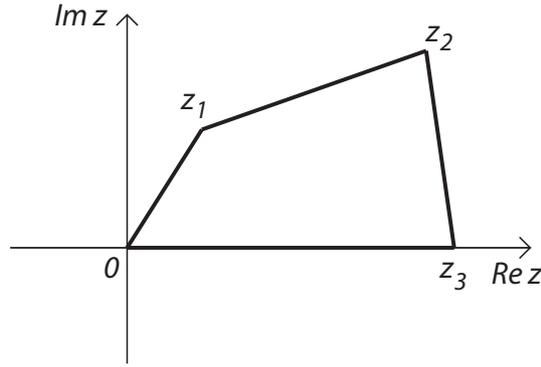


Рис. 1.

которое проверяется очевидным раскрытием скобок и приведением подобных слагаемых.

Используя свойство модуля произведения и неравенство треугольника для суммы двух комплексных чисел, получаем:

$$|z_2| |z_3 - z_1| = |z_2(z_3 - z_1)| = |z_1(z_3 - z_2) + z_3(z_2 - z_1)| \leq |z_1(z_3 - z_2)| + |z_3(z_2 - z_1)| = |z_1| |z_3 - z_2| + |z_3| |z_2 - z_1|.$$

Отсюда получаем неравенство:

$$|z_2| |z_3 - z_1| \leq |z_1| |z_3 - z_2| + |z_3| |z_2 - z_1|.$$

Учитывая, что $AB = |z_1|$, $BC = |z_2 - z_1|$, $CD = |z_3 - z_2|$, $AD = |z_3|$, $AC = |z_2|$ и $BD = |z_3 - z_1|$, мы получили неравенство (1) для произвольных четырех точек плоскости. В частности, мы доказали, что неравенство имеет место для любого четырехугольника (не обязательно выпуклого!).

Далее, выясним, когда неравенство (1) обращается в равенство, предполагая, что все точки попарно не совпадают.

Заметим, что неравенство треугольника для комплексных чисел, которое мы использовали, обращается в равенство тогда и только тогда, когда аргументы слагаемых равны (с точностью до периода), т. е. $\arg z_1(z_3 - z_2) = \arg z_3(z_2 - z_1)$.

Далее доказательство проведем путем перебора значений $\arg(z_2 - z_1)$.

Заметим, что возможны всего три случая: 1) когда прямая $BC \parallel AD$, т. е. $\arg(z_2 - z_1) = 0$ или $\arg(z_2 - z_1) = \pi$; 2) когда прямая BC пересекает прямую AD слева (справа) от точки A , т. е. $\arg(z_2 - z_1) \in (0; \pi)$ ($\arg(z_2 - z_1) \in (-\pi; 0)$).

Пусть, например, прямая BC пересекает прямую AD слева от точки A и $\arg(z_2 - z_1) \in (0; \pi)$ (см. рис. 2). Обозначим $\arg z_1 = \beta$, $\arg(z_3 - z_2) = -(\pi - \alpha)$, $\arg(z_2 - z_1) = \phi$. Тогда, из треугольника CKD , по теореме о внешнем угле треугольника, угол C равен $(\alpha - \phi)$. Отсюда, четырехугольник $ABCD$ вписанный, если и только если $\beta + (\alpha - \phi) = \pi$, т. е. $\beta + (-\pi + \alpha) = \phi$, что то же самое, что

$$\arg z_1(z_3 - z_2) = \arg z_3(z_2 - z_1).$$

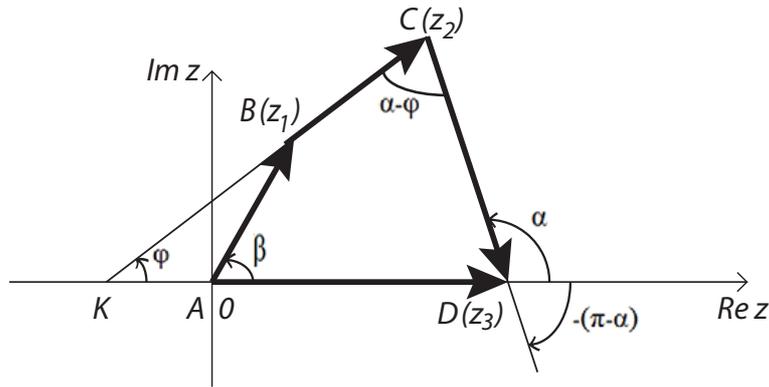


Рис. 2.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда прямая BC пересекает прямую AD справа от точки A .

Далее, пусть, например, $BC \parallel AD$, $\arg(z_2 - z_1) = 0$ и точки B и C не лежат на прямой AD (см. рис. 3). Обозначим $\arg z_1 = \beta$, $\arg(z_3 - z_2) = \alpha$.

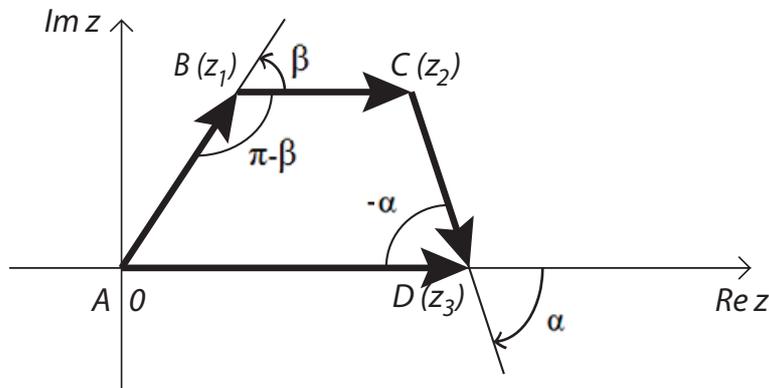


Рис. 3.

Заметим, что тогда четырехугольник $ABCD$ вписанный, если и только если $(\pi - \beta) + (-\alpha) = \pi$, т. е. $\beta + \alpha = 0$, что то же самое, что

$$\arg z_1(z_3 - z_2) = 0 = \arg z_3(z_2 - z_1).$$

Если $BC \parallel AD$, $\arg(z_2 - z_1) = 0$ и точки B и C лежат на прямой AD , то мы имеем дело с двумя из вырожденных случаев, удовлетворяющих теореме: все четыре точки лежат на одной прямой в порядке A, B, C, D или B, A, D, C .

Наконец, теореме действительно удовлетворяет ряд вырожденных случаев, когда какие-то из точек совпадают. Например, $A = D$ или $B = C = D$. Все подобные вырожденные случаи также несложно найти путем перебора вариантов совпадений пар точек.

Теорема доказана.

Следствие 1 (теорема Птолемея). Для любого вписанного четырёхугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин его противоположных сторон.

Следствие 2 (теорема, обратная теореме Птолемея). Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является вписанным, если для него выполняется равенство в неравенстве (1).

Следствие 3 (неравенство для четырёх точек). Для любых четырёх точек плоскости A, B, C и D имеет место неравенство (1). В частности, это выполняется для всякого четырёхугольника, не обязательно выпуклого.

Доказательства следствий непосредственно следуют из Теоремы 1.

Применяемый подход с использованием неравенств для комплексных чисел позволяет обобщить эти результаты на случай произвольного чётноугольника.

Теорема 2 (неравенство для шести точек и характеристическое свойство вписанного шестиугольника). Для любых шести точек $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ плоскости

$$A_0A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_2A_5 \leq A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 + A_0A_5 \cdot A_1A_2 \cdot A_3A_4 + \\ + A_0A_5 \cdot A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_0A_1 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_4 + A_0A_3 \cdot A_1A_2 \cdot A_4A_5. \quad (2)$$

При этом равенство имеет место в том и только в том случае, когда либо шестиугольник вписанный, либо мы имеем дело с одним из вырожденных случаев, когда точки совпадают или все точки лежат на одной прямой.

Доказательство. Введём систему комплексных координат и обозначим комплексную координату точки A_k посредством $z_k, 0 \leq k \leq 5$. Запишем длины отрезков A_kA_m в виде модуля разности их комплексных координат $|z_m - z_k|$ и, применив неравенство для четырёх точек (следствие 3 теоремы 1) к точкам A_0, A_1, A_3 и A_4 , получим:

$$|z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| \leq |z_1 - z_2| \cdot |z_4 - z_5| + |z_1 - z_5| \cdot |z_2 - z_4|.$$

Умножая обе части записанного неравенства на $|z_3 - z_6|$ и применяя к правой части несколько раз неравенство для четырех точек, получаем неравенство (2):

$$A_0A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_2A_5 = |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| \cdot |z_0 - z_3| \leq |z_0 - z_1| \cdot |z_3 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| + \\ + |z_0 - z_4| \cdot |z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_5| \leq |z_0 - z_1| \cdot |z_3 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| + |z_0 - z_4| \cdot (|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_5| + \\ + |z_1 - z_5| \cdot |z_2 - z_3|) = |z_0 - z_1| \cdot |z_3 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| + |z_0 - z_4| \cdot |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_5| + \\ + |z_0 - z_4| \cdot |z_1 - z_5| \cdot |z_2 - z_3| \leq |z_0 - z_1| \cdot |z_3 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| + |z_1 - z_2| \cdot (|z_0 - z_3| \cdot |z_4 - z_5| + \\ + |z_0 - z_5| \cdot |z_3 - z_4|) + |z_0 - z_4| \cdot |z_1 - z_5| \cdot |z_2 - z_3| = |z_0 - z_1| \cdot |z_3 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| + \\ + |z_1 - z_2| \cdot |z_0 - z_3| \cdot |z_4 - z_5| + |z_1 - z_2| \cdot |z_0 - z_5| \cdot |z_3 - z_4| + |z_0 - z_4| \cdot |z_1 - z_5| \cdot |z_2 - z_3| \leq \\ \leq |z_0 - z_1| \cdot |z_3 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| + |z_1 - z_2| \cdot |z_0 - z_3| \cdot |z_4 - z_5| + |z_1 - z_2| \cdot |z_0 - z_5| \cdot |z_3 - z_4| + \\ + |z_2 - z_3| \cdot (|z_0 - z_1| \cdot |z_4 - z_5| + |z_0 - z_5| \cdot |z_1 - z_4|) = |z_0 - z_1| \cdot |z_3 - z_4| \cdot |z_2 - z_5| + \\ + |z_1 - z_2| \cdot |z_0 - z_3| \cdot |z_4 - z_5| + |z_1 - z_2| \cdot |z_0 - z_5| \cdot |z_3 - z_4| + |z_2 - z_3| \cdot |z_0 - z_1| \cdot |z_4 - z_5| + \\ + |z_2 - z_3| \cdot |z_0 - z_5| \cdot |z_1 - z_4| = A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 + A_0A_5 \cdot A_1A_2 \cdot A_3A_4 + \\ + A_0A_5 \cdot A_1A_4 \cdot A_2A_3 + A_0A_1 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_4 + A_0A_3 \cdot A_1A_2 \cdot A_4A_5.$$

Из приведенных выше выкладок следует, что равенство в неравенстве (2) выполняется тогда, и только тогда, когда одновременно достигаются равенства во всех промежуточных неравенствах. По характеристическому свойству для четырёх точек (Теорема 1), всякое промежуточное равенство может выполняться, если некоторые точки совпадают, четыре точки лежат на одной прямой или соответствующий четырёхугольник вписанный. Путем перебора возможных случаев получаем, что: теореме удовлетворяют

- 1) ряд вырожденных случаев, когда какие-то из точек совпадают (например, $A_3 = A_4 = A_5$);
- 2) вырожденные случаи, когда все шесть точек лежат на одной прямой в определенном порядке (например, $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$);
- 3) случай, когда шестиугольник $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ вписанный.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого вписанного шестиугольника произведение длин главных диагоналей равно сумме произведений длин сторон, взятых через одну, и произведений длин пары противоположащих сторон на длину главной диагонали, с ними не пересекающейся (см. рис. 4).

Следствие 2. Выпуклый шестиугольник $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ является вписанным, если для него достигается равенство в неравенстве (2).

Следствие 3. Для любых шести точек плоскости A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 имеет место неравенство (2). В частности, это выполняется для любого шестиугольника (не обязательно выпуклого!).

Доказательства следствий непосредственно следуют из Теоремы 2.

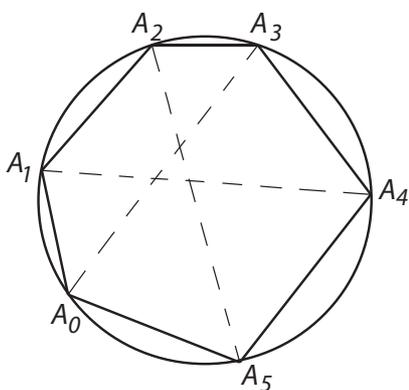


Рис. 4.

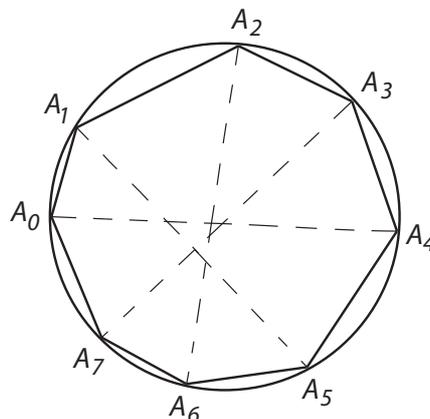


Рис. 5.

По аналогии с теоремой 2 можно доказать характеристическое свойство для восьми точек и получить обобщение на случай восьмиугольника.

Теорема 3 (неравенство для восьми точек и характеристическое свойство вписанного восьмиугольника). Для любых восьми точек $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ на плоскости

$$\begin{aligned}
 & A_0A_4 \cdot A_1A_5 \cdot A_2A_6 \cdot A_3A_7 \leq 2A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_7 + 2A_0A_7 \cdot A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 + \\
 & + A_0A_1 \cdot A_2A_7 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 + A_0A_3 \cdot A_1A_2 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_7 + A_0A_7 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 \cdot A_2A_3 + \\
 & + A_0A_1 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_4 \cdot A_6A_7 + A_0A_7 \cdot A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + A_0A_1 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_7 \cdot A_5A_6 + \\
 & + A_0A_5 \cdot A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_6A_7 + A_0A_7 \cdot A_1A_6 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 + A_0A_1 \cdot A_2A_7 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + \\
 & + A_0A_3 \cdot A_1A_2 \cdot A_5A_6 \cdot A_4A_7 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_0A_5 \cdot A_6A_7 + \\
 & + A_2A_5 \cdot A_1A_6 \cdot A_0A_7 \cdot A_3A_4. \quad (3)
 \end{aligned}$$

При этом равенство имеет место в том и только в том случае, когда либо восьмиугольник вписанный, либо мы имеем дело с одним из вырожденных случаев, когда точки совпадают или все точки лежат на одной прямой.

Следствие 1. Для любого вписанного восьмиугольника произведение длин главных диагоналей равно сумме: 1) удвоенных произведений длин сторон, взятых через одну; 2) произведений длины произвольной диагонали с концами в вершинах, взятых через две, на длины тройки несоседних сторон, не имеющих с выбранной диагональю общих точек; 3) произведений длин пары его противоположных сторон на длины двух непересекающихся диагоналей, разделяющих данную пару сторон и не имеющих с ними общих точек (см. рис. 5).

Следствие 2. Выпуклый восьмиугольник $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ является вписанным, если для него достигается равенство в неравенстве (3).

Следствие 3. Для любых восьми точек плоскости $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ и A_7 имеет место неравенство (3). В частности, это выполняется для любого восьмиугольника (не обязательно выпуклого!).

Аналогичные доказательствам теорем 2 и 3 рассуждения позволяют получить для любого $n \geq 3$ неравенство для произвольного набора из $2n$ точек плоскости и характеристическое свойство вписанного $(2n)$ -угольника.

Ключевые идеи в построении неравенства для всякого $(2n)$ -угольника (отсюда, по аналогии, и для произвольного набора из $2n$ точек плоскости) заключаются в том, что произведение главных диагоналей многоугольника равно сумме

- 1) произведений длин сторон, взятых через одну;
- 2) произведений длины какой-либо диагонали, разбивающей исходный многоугольник на два чётноугольника (в том числе может быть и “двуугольник”), на длины несоседних сторон, не имеющих с выбранной диагональю общих точек;
- 3) произведений длин двух непересекающихся диагоналей, разбивающих исходный многоугольник на чётноугольники, на длины несоседних сторон, не имеющих с выбранными диагоналями общих точек;
- 4) произведений длин трех непересекающихся диагоналей, разбивающих исходный многоугольник на чётноугольники, на длины несоседних сторон, не имеющих с выбранными диагоналями общих точек, и т. д.

Последние слагаемые справа будут представлять собой произведение длин пары противоположных сторон исходного многоугольника на длины $\left(\frac{n}{2} - 2\right)$ непересекающихся диагоналей, разделяющих данную пару сторон и не имеющих с ними общих точек. При этом всякое слагаемое с правой части неравенства для произвольного $(2n)$ -угольника так же, как выражение слева, состоит ровно из $\frac{n}{2}$ множителей.

Следует учитывать, что с ростом числа сторон рассматриваемого чётноугольника, в его неравенстве встречаются все большие числовые коэффициенты. Здесь важна следующая закономерность – коэффициент какого-либо слагаемого справа напрямую зависит от числа сторон, участвующих в его построении:

- 1) если выражение не содержит ни одной диагонали исходного многоугольника в роли множителя, то числовой коэффициент перед ним равен $\left(\frac{n}{2} - 2\right)$;
- 2) с уменьшением числа сторон на одну и, соответственно, с увеличением

числа диагоналей на единицу, входящих в слагаемое с правой части неравенства, числовой коэффициент перед ним уменьшается на единицу;

3) числовой коэффициент меньше 1 стать не может (т. е. как только мы достигаем 1 в некотором слагаемом, то, даже если далее количество сторон, участвующих в построении выражений, сокращается, на числовой коэффициент это уже никакого действия не оказывает).

Более тщательные и тонкие рассмотрения позволяют перенести все полученные результаты и на случай нечётноугольника, начиная с пяти.

ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В КУРСЕ “ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ”

Колдунов А. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург

Koldunov A. V. Numerical optimization in the “Numerical methods” course.
The ways to introduce numerical optimization in the “Numerical methods” course are discussed.

Обсуждаются способы введения методов численной оптимизации в курс “Численные методы”.

1. В полном (большом) курсе “Численные методы” (КЧМ) содержится несколько тем, образующих логически связную часть. Это такие вопросы, как многочлены Лагранжа, процедуры численного интегрирования и численного дифференцирования, методы численного решения дифференциальных уравнений. Действительно, многочлены Лагранжа порождают формулы численных интегрирования и дифференцирования, а на основе последних вводятся основные методы численного решения дифференциальных уравнений (обозначим эту часть материала КЧМ через ЧМ1).

При таком подходе структура ЧМ1 определяется, в первую очередь, потребностями дифференциальных уравнений. Тот факт, что ЧМ1 может изучаться в рамках большого КЧМ и в малом курсе ЧМ1, доказывает, что ЧМ1 образует компоненту в материале КЧМ.

В стандартном КЧМ вне курса ЧМ1 остаются итерационные методы решения уравнений и систем. Этот материал не образует в КЧМ компоненты, аналогичной ЧМ1, так как его не хватает на соответствующий малый курс.

Более активное введение в КЧМ вопросов численной оптимизации меняет ситуацию и приводит к формированию в КЧМ другой компоненты ЧМ2, чей материал группируется вокруг численного решения задач оптимизации функций одной или нескольких переменных. Важно, что в ЧМ2 естественным образом входят численные методы решения уравнений с одной переменной (с их помощью находятся стационарные точки при оптимизации функций одной переменной). Таким образом, к ЧМ2 присоединяется основной теоретический и практический материал КЧМ, который не входит в ЧМ1.

Следует заметить, что ЧМ2 строится, в основном, на основе численных

дифференциальных (т. е. существенно использующих дифференциальное исчисление) методов оптимизации. В ЧМ2 выделяются две части, а именно, случай функций одной переменной и случай функций нескольких переменных. Содержание первой части ЧМ2 достаточно ясно определяется рассматриваемой схемой: традиционные итерационные методы применяются к несколько иной ситуации. Особенности содержания второй части ЧМ2 во многом определяются тем, является ли ЧМ2 частью большего КЧМ или составляет малый курс ЧМ2.

2. Рассмотрим сначала ту ситуацию, когда ЧМ2 изучается в рамках большего КЧМ. В этом случае ЧМ2 следует после трудоёмкой части ЧМ1 и заканчивает весь КЧМ.

В любом большем курсе от его завершающей части требуется особая ясность в изложении и способность проявить гибкость в реакции на складывающуюся учебную ситуацию. Другими словами, предполагается, что такая часть может быть перестроена без нанесения большого ущерба общей структуре всего курса и материалу экзамена.

В случае второй части ЧМ2 требуется сделать выбор между методами спуска и методом Ньютона (и его модификациями). Если выбираются методы спуска, то их следует ограничить градиентным спуском (т. е. без обсуждения более экономных методов). Более локальный и теоретически более определённый метод Ньютона также является подходящим материалом для второй части ЧМ2.

При таком построении компоненты ЧМ1 и ЧМ2 уравновешивают друг друга в рамках КЧМ и выстраивают более чёткую структуру всего курса, что полезно при большом объёме материала КЧМ.

3. Теперь рассмотрим случай, когда ЧМ2 излагается в виде отдельного малого курса. Здесь ситуация иная, чем в случае, когда ЧМ2 завершает КЧМ, и существует неявное предположение о возможной нехватке времени.

Весь курс ЧМ2, как уже было отмечено, состоит из двух частей, причём на каждую из них целесообразно расходовать половину учебного времени. Поэтому первую часть (т. е. случай функций одной переменной) полезно завершить контрольной работой. В эту работу можно включить одно уравнение с одной переменной и два задания на безусловную оптимизацию функций одной переменной. Впрочем, такую контрольную можно провести и позже, включив в неё (вместо оптимизации одной из функций одной переменной) оптимизацию функции двух переменных.

Легко понять, что вторая часть ЧМ2 не может содержать только метод Ньютона. Возможен вариант, когда в ЧМ2 рассматриваются методы спуска и метод Ньютона, хотя при этом теряется однородность изучаемого здесь материала.

Во второй части ЧМ2 можно ограничиться методами спуска, но применять их не только к безусловной оптимизации, но и к условной оптимизации. Но следует иметь в виду, что тогда условная оптимизация в ЧМ2 возникает в первый раз. Возможен и следующий, более теоретический подход: после градиентного спуска подробно рассмотреть безусловную оптимизацию с помощью градиентного спуска квадратичных функций двух переменных. Разбор нескольких конкретных ситуаций должен привести к выводу о «неэконом-

ности” градиентного спуска: приближения “проскакивают” искомую точку. Возникает вопрос, в каком направлении следует искать второе приближение. Здесь появляется возможность обоснованного введения метода сопряжённых направлений – сначала для квадратичных, а потом и произвольных функций. Эти результаты могут быть использованы при выполнении студентами самостоятельной (вычислительной) работы.

СИСТЕМА МОДУЛЕЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕДСТВ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Комарова С. М.
Псковский государственный университет
г. Псков

Komarova S. M. System of modules in teaching students mathematics by means of information technologies. In the article the author developed an approach to co-education courses “Mathematics” and “Computer science” based on a system of modules, involving extensive use of information technology.

Keywords: information technology, the learning of mathematics, the training module.

В статье рассматривается разработанный автором подход к совместному обучению дисциплин «Математика» и «Информатика» на основе системы модулей, предполагающей широкое использование средств информационных технологий.

Ключевые слова: информационные технологии, обучение математике, учебный модуль.

Дисциплины «Математика» и «Информатика» являются базовыми и обязательными для изучения в системе высшего профессионального образования. На гуманитарных факультетах курс математики длится один или два семестра, на естественно-математических факультетах математика может преподаваться за время обучения во всех семестрах. Несмотря на разный срок обучения данной дисциплине, согласно ФГОС нового поколения, можно выделить компетенции выпускников разных направлений, на формирование которых ориентирован курс математики:

- направление 010200 «Математика и компьютерные науки»: иметь навыки самостоятельного построения алгоритма и его анализа (ПК–11); владеть методом алгоритмического моделирования при анализе постановок математических задач (ПК–19); владеть методами математического и алгоритмического моделирования при анализе управленческих задач в научно-технической сфере, а также в экономике, бизнесе и гуманитарных областях знаний (ПК–24);
- направление 030300 «Психология»: уметь применять основные методы математического анализа и моделирования (ОК–5);

- направление 032000 «Зарубежное регионоведение»: уметь применять знания в области информатики и математического анализа для решения прикладных профессиональных задач (ОК–9) и др.

Анализ требований показывает, что компетенции в области математики на современном этапе тесно связаны с информатикой. Курсы математики и информатики оказывают значительное взаимовлияние, темы курсов пересекаются, но преподаются в высших учебных заведениях отдельно и независимо. На гуманитарных факультетах дисциплины математики и информатики объединены в одну «Математика и информатика», но преподаются отдельно друг от друга и, в большинстве случаев, разными преподавателями. Студенты зачастую не понимают глубокой взаимосвязи этих дисциплин.

Изучение математики с использованием средств информационных технологий делает обучение интересным, что способствует повышению качества и самой математической подготовки. Применение ИТ освобождает студентов от процесса трудоемких вычислений, уменьшается вероятность ошибок в вычислениях [4, с. 10].

Для изучения разделов математики разумно применять различные средства информационных технологий. Компьютерные математические пакеты целесообразно использовать для решения задач таких математических курсов, которые требуют наглядности, огромного количества сложных вычислений, для построения графиков функций, различных таблиц значений функций и т. д. К ним относятся задачи математического и функционального анализа, алгебры и геометрии, обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, численных методов, теории вероятностей и математической статистики и др. В математических пакетах используется традиционная и знакомая студентам символика, благодаря чему результаты вычислений предстают в форме, привычной для восприятия. Студенты приобретают уверенность в символьных вычислениях и практические навыки проведения математических рассуждений и анализа полученных результатов [1, с. 71].

При обучении студентов таким разделам математики как теория множеств, математическая логика, теория чисел, теория делимости целесообразно использовать средства программирования. Используя ту или иную среду программирования для решения задач, например из теории множеств, или из теории чисел, студент может лучше разобраться в алгоритме решения различных задач, переводя его на язык компьютера. Для нахождения, например, наибольшего общего делителя (НОД) можно использовать специальную функцию математического пакета, но студент не сможет проследить выполнение алгоритма нахождения данной величины по шагам, а получит только итоговый результат, так как алгоритм скрыт в математический пакет. При использовании среды программирования студент уже сам составляет программу нахождения данной величины и может пошагово отследить процесс нахождения НОД.

Изучение математики с применением традиционных математических подходов позволяет сформировать у студентов основной понятийный аппарат. Студенты учатся ставить цель исследования, выбирать соответствующие методы обработки результатов, анализируют полученные данные. Изучив основные понятия и понимая схему расчета нужного показателя, они приступают к реше-

нию практических задач. На этом этапе и включается процесс использования математического пакета или других средств информационных технологий [2, с. 37].

Мы считаем, что наиболее целесообразно осуществлять модульное обучение дисциплине «Математика», каждый модуль соответствует определенному разделу и структурно состоит из следующих элементов:

1. Теоретические сведения раздела.
2. Набор функций и команд математического пакета или среды программирования, работающих с данными понятиями.
3. Лабораторная работа.
4. Задачи для самостоятельного решения.

Названия модулей могут быть следующими: «Определители и матрицы. Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», «Дифференциальное исчисление функции одной и нескольких переменных», «Интегральное исчисление функции одной переменной. Кратные интегралы», «Математическая статистика», «Дифференциальные уравнения», «Теория множеств», «Математическая логика», «Теория чисел», «Численные методы».

Рассмотрим на примере изучение студентами элемента модуля «Теория чисел», связанного с такими понятиями как наибольший общий делитель (НОД). В данном случае для изучения темы удобнее использовать язык программирования, так как в процессе выполнения программы студент может пройти алгоритм решения по шагам, а в математических пакетах алгоритм вычисления НОД и НОК скрыт и его невозможно отследить. Данный модуль состоит из четырех элементов:

1. Теоретические сведения.

Определение. Всякое целое число, которое делит одновременно a и b , называется их общим делителем. Наибольший из общих делителей a и b называется наибольшим общим делителем и обозначается символом (a, b) .

Определение. Пусть a и b целые, отличные от нуля. Общим кратным a и b называется любое число, кратное как a , так и b . Наименьшее из общих кратных и называется наименьшим общим кратным и обозначается $[a, b]$.

2. Набор функций и команд среды программирования (Pascal), работающих с данными понятиями.

Оператор (операция)	Обозначение
Деление вещественных переменных	/
Деление нацело целочисленных переменных	div
Деление с остатком целочисленных переменных	mod

3. Лабораторная работа.

a: = 65;

b: = 4;

c: = a / b; (деление вещественных чисел, c = 16, 25)

$c := a \operatorname{div} b$; (целая часть от деления 65 на 4, $c = 16$)

$c := a \operatorname{mod} b$; (остаток от деления 65 на 4, $c = 1$)

4. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1. Найдите НОД двух чисел с помощью алгоритма Евклида в среде программирования Pascal.

Решение. Студент описывает любым доступным способом алгоритм решения задачи нахождения НОД (вычитанием).

1. Из большего числа вычитаем меньшее.

2. Если получается 0, то значит, что числа равны друг другу и являются НОД (следует выйти из цикла).

3. Если результат вычитания не равен 0, то большее число заменяем на результат вычитания.

4. Переходим к пункту 1.

На следующем этапе студент составляет программу на языке Pascal:

```
program Evklid;
var m, n: integer;
begin
  writeln('Введите m и n');
  readln(m, n);
  if m*n = 0 then write ('Некорректные данные')
  else
    begin
      m := ABS(m); n := ABS(n);
      while m < > n do
        begin
          if m > n
            then m := m - n
            else n := n - m;
        end;
      write('НОД=', m)
    end.
end.
```

Как видно из примера, студент может по шагам пройти алгоритм, посмотреть, как меняются переменные m и n от шага к шагу, как получается итоговый ответ.

Рассмотрим еще на одном примере изучение студентами элементов модуля «Интегральное исчисление».

1. Теоретические сведения.

Площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox находится по формуле:

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

где $f(x)$ – функция, ограничивающая трапецию сверху (снизу), $x = a$, $x = b$ – функции, ограничивающие трапецию по оси Ox .

2. Набор функций математического пакета, работающих с данными понятиями (на примере MathCad):

Инструмент (оператор)	Выполняемые действия
X-Y Plot (Декартов график)	построение графиков функций на плоскости
Definite Integral (Определенный интеграл)	нахождение определенного интеграла
Solve	оператор решения уравнений

3. Лабораторная работа.

Построим график функции $y(x) = x^2 + x$.

Задаем в среде MathCad исходную функцию: $y(x) = x^2 + x$. На панели *Графики* выбираем *Декартов график*, по оси *Oy* задаем функцию. В меню *Формат* графика устанавливаем флаг *Пересечение осей* и масштабируем оси для более наглядного представления графика (рис. 1).

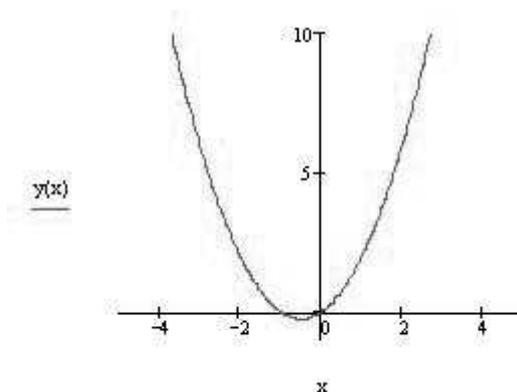


Рис. 3: График функции $y(x)$

4. Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + x + 4$ и $y = -x + 1$.

Решение. Студент составляет алгоритм решения задачи:

1. Строим графики данных линий в одной системе координат (рис. 2)
2. Находим точки пересечения графиков функций, решая уравнение $-x^2 + x + 4 = -x + 1$ с помощью функции solve.
3. Находим определенный интеграл

$$\int_{-1}^3 ((-x^2 + x + 4) - (-x + 1)) dx \rightarrow 32/3$$

Как можно заметить, в процессе решения данной задачи студент избавлен от построения графиков и процесса вычисления абсцисс точек пересечения, благодаря чему экономится время и исчезает вероятность допустить ошибку в ходе построения графика и вычислений. Процесс решения задачи является наглядным, символика, которая используется в математическом пакете, понятна для студента.

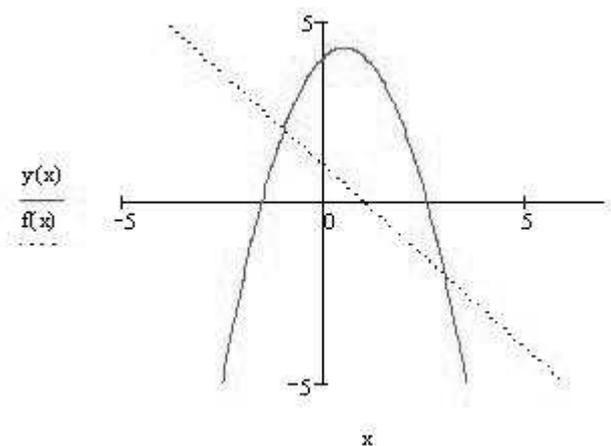


Рис. 4: Фигура, площадь которой нужно найти

Приведенные примеры показывают, что для изучения определенных модулей дисциплины «Математика» удобно использовать средства программирования. Для обучения по другим модулям рационально применять компьютерные математические пакеты. При изучении некоторых модулей может использоваться как среда программирования, так и математический пакет. В качестве примера приведем модуль «Численные методы»: методы, изучаемые в данном разделе, являются разнообразными и разноплановыми, для некоторых лучше использовать математический пакет (построение графиков, решение уравнений), для других программирование (построение итерационных схем).

При разбиении дисциплины «Математика» на модули целесообразно выделять темы, слабозависящие друг от друга. При таком подходе разработанная система будет более гибкая, появится возможность изменять последовательность изучения модулей в зависимости от конкретных условий. Каждый модуль в теоретической и практической частях содержит только ту информацию, которая требуется для успешного изучения данного раздела. Студенты не получают избыточную информацию. Преподаватель может изменять последовательность прохождения модулей в зависимости от уровня готовности учащихся, времени, отводимого на изучение дисциплины, возможности использования компьютерного класса.

Литература

- [1] Корнилов В. С., Беликов В. В. Применение методов информатизации при обучении студентов численным методам.
- [2] Пупырев Н. П. Роль межпредметных связей в изучении естественнонаучных предметов в медицинском вузе // Современные наукоемкие технологии. – 2008. – №6. – С. 37–38.
- [3] Спасская Т. А. Теория делимости целых чисел. Методические указания к решению задач. – Тверь, 2012. – 11 с.

- [4] Шершнева В. А., Карнаухова О. А., Сафонов К. В. Математика и информатика в ВУЗе: взгляд из будущего // Высшее образование сегодня. - 2008. - №1. - С. 10–12.

УДК 74.202.2

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СТАРШЕЙ ПРОФИЛЬНОЙ ШКОЛЕ

Ловьянова И. В.

Черкасский национальный университет имени Б. Хмельницкого
г. Черкассы, Украина
e-mail: lira7-1-8@mail.ru

Lovyanova I. V. Methodical bases of the organization of educating to mathematics at the senior profile school. In the article the task of mathematical education opens up in forming of the developed personality of senior pupil. The aim and result of mathematical preparation of graduating student of profile school are presented depending on the chosen direction: common cultural, applied, theoretical. Keywords: personal development of senior pupils, profile school, methodology of educating to mathematics.

В статье раскрывается задание математического образования в формировании развитой личности старшеклассника. Представлено цель и результат математической подготовки выпускника профильной школы в зависимости от выбранного направления: общекультурный, прикладной, теоретический. Ключевые слова: личностное развитие старшеклассников, профильная школа, методика обучения математике.

Дифференциация обучения выделяется как составная часть и необходимое условие гуманизации и демократизации образования, его перевода на новую культуру-образующую базу. Под дифференциацией понимают такую систему обучения, при которой каждый ученик, овладевая некоторым минимумом общеобразовательной подготовки, являющейся общезначимой и обеспечивающей возможность адаптации в постоянно изменяющихся жизненных условиях, получает право и гарантированную возможность уделять преимущественное внимание тем направлениям, которые в наибольшей степени отвечают его склонностям [1].

Один из видов дифференциации – это дифференциация по содержанию. Она предполагает обучение разных групп школьников по программам, отличающимся глубиной изложения материала, объемом сведений и даже номенклатурой включенных вопросов. Этот вид дифференциации иногда называют профильной дифференциацией. Профильное же обучение является более демократичной и широкой формой фуркации школы на старшей ступени.

Разнообразие профилей обучения математике в пределах базовой профильной математической подготовки может иметь три направления: общекультурный, прикладной, теоретический. Такое распределение связано с функцией

предмета в реализации особенностей профиля обучения в профессиональном становлении личности.

Профильное обучение математике теоретического направления отличается, в первую очередь, направленностью на развитие теоретического типа мышления. Этот тип мышления характеризуется гармоничным взаимодействием анализа и синтеза, а также высоким уровнем абстракции, построенной на основе познавательной рефлексии, благодаря которой формируется ориентировочная основа действий, оцениваются результаты их исполнения. Указанный уровень обучения математики целесообразен для профилей, для которых математическое образование не только средство, но и цель получения образования. Будущая профессиональная деятельность в этом случае неразрывно связана с математической деятельностью.

Профильное обучение математике на прикладном направлении отличается направленностью на применение математики. Моделирование является главным принципом обучения тех, кто применяет математику. На этом направлении необходимо достаточно внимания уделить развитию логического, пространственного мышления, формированию готовности применять математику для моделирования реальных явлений и процессов, в частности овладению навыками математического моделирования, методом математического моделирования. Это направление целесообразно для естественно-математического, гуманитарного, технологического направлений, для профилей, у которых математическое образование есть инструментом овладения определенными профессиями (инженерно-техническими, экономическими, сельскохозяйственными, химико-биологическими, военно-техническими и т. п.).

Профильное обучение математике на общекультурном направлении отличается гуманитарной направленностью. Это направление математического образования должно способствовать в первую очередь становлению гуманитарной культуры человека, формировать представление о математике как форме описания и методе познания действительности, про роль математики для прогресса общества. Он должен строиться на основе широкого использования возможностей образного мышления учащихся. Он целесообразен для гуманитарного, художественно-эстетического, спортивного направлений [5].

В зависимости от профиля обучение математике может проводиться на одном из трех уровней: 1) стандарта; 2) академическом; 3) профильном. Придерживаясь точки зрения И. С. Якиманской [6], мы в своем исследовании отмечаем, что при выборе профиля обучения существенно то, какими способами учебной работы пользуется ученик, насколько он устойчиво ими пользуется, в какой мере они соответствуют содержанию, виду и форме научного знания, заданного для усвоения, какие признаки учебного материала предпочитает использовать, как их использует при решении задач-проблем. Учет последнего особенно важен потому, что каждая наука содержит существенно значимые признаки объектов окружающего мира, которые становятся предметом ее специального анализа (физика, химия, биология, математика и др.). Ученик в своем индивидуальном опыте взаимодействия с окружающим миром часто опирается на признаки объектов, лично значимые для него, но не существенные с точки зрения той или иной науки. Если «лично» значимые признаки логически существенны, можно ожидать, что у ученика будет складываться интерес к дан-

ной области знаний. Если же сложившиеся в индивидуальном опыте школьника опорные признаки в анализе объектов не соответствуют требованиям предметной области знаний, то ученик будет осваивать эту область как обязательный, но не как любимый предмет, которому хочется посвящать все свободное время, выбирать в соответствии с ним «профиль» обучения [6, с. 47].

Проектирование профильного обучения математике должно учитывать как минимум два фактора: содержательную направленность и уровень обучения. На практике под профильным обучением мы понимаем такую организацию изучения содержания учебной дисциплины, которая бы предусматривала максимальный учет выбранного учащимися профиля для его личностного и профессионального становления. Как подсказывает практика, учащиеся старшей школы постоянно оценивают предложенный им учебный материал с точки зрения необходимости знаний и умений в выбранном ими направлении. Поэтому особого внимания требует мотивационный этап изучения той или иной темы, предусмотренной программой данного профиля. Одним из эффективных приемов мотивации, на наш взгляд, является демонстрация профильной направленности изучаемой темы. Мотивация изучения тем школьного курса математики значительно повышается, если учащиеся осознают связь учебного материала с их будущей профессией. Рассмотрим, к примеру, математические задачи с помощью которых возможно создать проблемную ситуаций на уроках математики в классах технологического профиля.

Задача 1. (Геометрия, тема: «Многогранники»). Найдите массу чугунного полого куба, внешнее ребро которого 260 мм, а толщина стенок 30 мм.

Задача 2. (Алгебра, тема: «Комбинаторика»). В квартире 12 лампочек. Сколько существует разных способов освещения квартиры? Два способа считаются разными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампочки. Каждая лампочка может гореть и не гореть. Случай «все лампочки не горят» – тоже способ освещения.

Привыкая к решению подобных задач, учащиеся меняют свое отношение к математике. И смотрят на нее уже не как на науку, которая абсолютно не касается их жизни, а самостоятельно начинают искать математику вокруг себя. Если при этом учитель на уроке создает ситуацию, в которой каждый участник процесса обучения не боится высказывать свою точку зрения, особенно это касается учащихся с низким уровнем математической подготовки, когда учителем услышаны правильные высказывания учащихся, то таким образом создается ситуация успеха на уроке, повышается уровень мотивации, рождается интерес к познанию математических фактов.

Для учащихся гуманитарного профиля важно общекультурное развитие, демонстрация связей между понятными для них, важными с точки зрения их профиля фактами и математической наукой. Так, например, уместны: исторические экскурсы на уроках математики, которые знакомят с интересными фактами, связанными, так или иначе, с математикой, из жизни известных личностей – не математиков; эпиграфы к уроку из высказываний писателей, художников о математике и математиках; игровые ситуации, когда выполняя задание по математике, учащиеся разгадывают кроссворд, головоломку и т.п., а в результате знакомятся с фактами из области их профиля.

Учащихся математического профиля интересует математика как наука, они, как правило, имеют хорошую математическую базу и развитое логическое мышление. В этом случае важно создать такую учебную ситуацию на уроке математики, которая бы порождала активное функционирование триады метод-учебная задача-поиск. Учебная задача – это центральное звено учебной математической деятельности [3, с. 46]. Как отмечает С. Р. Когаловский [3] важно построить учебную деятельность так, чтобы поисковая деятельность направлялась на «открытие» и освоение методов и чтобы «открытые» методы служили средствами развития поисковой деятельности. Процессы моделирования в учебной математической деятельности способствуют развитию не отдельных качеств мышления в их изолированности, а органичному математическому и общему интеллектуальному развитию учащихся. Приведем примеры задач межпредметного содержания для учащихся физико-математического профиля, предполагающие процесс моделирования в ходе их решения.

Геометрия, тема: «Декартовы координаты и векторы в пространстве» и физика, тема «Напряженность электрического поля».

Задача 3. В вершинах правильной четырех угольной пирамиды находятся заряды. Найти напряженность электрического поля в вершинах пирамиды.

Задача 4. Плоская рамка площадью $0,1 \text{ м}^2$ ограничена контуром с сопротивлением 5 Ом , находится в магнитном поле, индукция которого за время t изменяется от 2 Тл до -2 Тл . Какой заряд протечет по контуру за время t если вектор индукции перпендикулярен плоскости рамки?

Геометрия, тема: «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей» и физика, тема: «Отражение света. Законы отражения и преломления».

Задача 5. Угол падения светового луча на границу двух сред равняется 60° . Луч преломления составляет с нормалью угол 35° . Определите в градусах угол между отраженным и преломленным лучами.

Алгебра и начала анализа, тема: «Применение производной к исследованию функций».

Задача 6. Известно, что прочность балки с прямоугольным поперечным сечением прямо пропорциональна длине основания сечения и квадрату его высоты. Найти размеры поперечного сечения самой крепкой балки, которую можно выпилить из круглого бревна диаметром d , если поперечное сечение балки, вписано в поперечное сечение бревна.

Мы убеждаемся, что изучение математики в классах математического, физико-математического профиля, в классах с углубленным изучением математики предполагает более глубокую, по сравнению с академическим уровнем, подготовку учащихся по математике в органическом ее соединении с межпредметной интеграцией на основе применения математических методов, например, метода математического моделирования.

С. Л. Рубинштейн писал: «Для того чтобы учащийся по-настоящему включился в работу, необходимо сделать поставленные в ходе учебной деятельности задачи не только понятными, но и внутренне принятыми им, то есть чтобы эти задачи приобрели значимость. Уровень осознанности определяется тем насколько личностно значимо для ученика то, что уже объективно социально значимо» [4, с. 81].

Кроме решения на уроках математики задач прикладного, межпредмет-

ного характера, возможны такие приемы профилизации, как: изменение традиционной структуры урока математики, а именно приближение условий деятельности учащихся на уроках математики к условиям выполнения заданий определенных профессий; нестандартные приемы организации деятельности; использование информационных, интерактивных технологий и т. п.

Изменению традиционной структуры урока способствует проведение дидактических, деловых и ролевых игр на уроках математики. Это позволяет активизировать познавательную деятельность учащихся, стимулировать творческую активность, воспитывать чувство ответственности, совершенствовать навыки сотрудничества, умение общаться, принимать продуманные решения. Такие уроки приемлемы на разных профилях обучения, дополняют традиционные формы обучения и учитывают специфику определенного профиля, а также уровень подготовленности учащихся.

К нестандартным приемам организации деятельности мы относим создание на уроках математики таких условий, когда, решая типичные математические задачи, благодаря определенной организационной работе учителя параллельно происходит обогащение учащихся знаниями в сфере выбранного направления профессионального развития.

Признаком времени, в котором мы живем, является лавинное накопление информации и стремительное развитие микроэлектронной техники, мы стремительно направляемся в компьютерную эру. Происходит переход к информационным технологиям, т. е. к широкому применению компьютеров и программного обеспечения на производстве, в управлении, образовании, медицине, торговле, банковском деле и т. д. Очевидно, что ни одно из направлений профильного обучения в старшей школе не может обойтись без, так называемой встречи, с информационными технологиями. В то время как именно овладение на должном уровне математическими дисциплинами позволяет уверенно чувствовать себя в сфере информационных технологий. Не секрет, что ключом к овладению многими современными специальностями является умение пользоваться компьютером.

Компьютер может быть использован на разных этапах обучения математике, этому способствуют его графические и вычислительные возможности. Применение компьютеров в преподавании математики порождает новые формы обучения, делает специфическим содержание обучения, изменяет цели. Это в свою очередь, способствует появлению новых интегрированных курсов, иных подходов к организации процесса обучения, формированию знаний и умений учащихся. В этом ключе следует обратить внимание на интерактивные методы и формы обучения. Существенной дидактической особенностью обучения с помощью компьютера является установление непосредственных диалогов между учеником и компьютером, либо возникновение треугольника ученик – компьютер – учитель. Общение в рамках обозначенного треугольника предполагает диалоги: учитель – ученик, ученик – компьютер, компьютер – учитель, такие диалоги в процессе обучения способствуют следующему:

- избегать стрессовых ситуаций (ученик получает индивидуальную консультацию учителя, работает в свойственном ему темпе и т. д.);
- разобраться в трудностях, которые возникают в процессе изучения пред-

- мета (у учащегося есть возможность многократного возвращения на этап, вызвавший затруднения);
- организовать самостоятельное решение задач (учитель имеет возможность предоставить каждому ученику свой вариант задания с учетом его текущих возможностей и зоны ближайшего развития);
 - наблюдать за процессом обучения и контролировать его качество.

Сущность интерактивных методов состоит в том, что процесс обучения происходит в условиях постоянного активного взаимодействия учащихся. Это – взаимодействие, равноправные партнерские отношения между субъектами обучения, обучение в сотрудничестве [2].

Организация интерактивного обучения предполагает моделирование жизненных ситуаций, общее разрешение проблем, содействует формированию ценностей, созданию атмосферы сотрудничества.

Подводя итог, следует отметить, что в данной статье рассмотрены только некоторые фрагменты организации обучения математике в старшей профильной школе. Что же касается методических основ обучения математике старшеклассников на разных профилях обучения, то при их разработке следует отметить, что основными целями обучения предмета «Математика» являются: формирование основ математической культуры учащихся; осознание роли математики в современном производстве, науке, повседневной практике, развитии техники будущего; формирование знаний, умений и навыков, необходимых для рационального решения математических задач, задач прикладного и межпредметного характера.

Очевидным является тот факт, что обучение математики, ориентированное на развитие личности, предполагает внедрение новых форм обучения, к которым относятся активные, интерактивные, инновационные формы, поскольку они эффективно способствуют интеллектуальному, социальному и духовному развитию личности старшеклассников в профильном обучении.

Литература

- [1] Дорощев Г. В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фирсов В. В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. – 1990. – №4. – С. 15–21.
- [2] Дударь И. И. Активизация мышления учащихся с помощью интерактивных технологий обучения // Математика в школах Украины. – 2008. – №1. – С. 18, (укр.).
- [3] Когаловский С. Р. О ведущих планах обучения математике // Педагогика. – 2006. – №1. – С. 39–48.
- [4] Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии, Т. 2. – М.: Педагогика, 1989. – 328 с.
- [5] Слелкань З. И. Проблемы личностно-ориентированного математического образования учащихся средней школы // Математика в школе. – 2003. – №9. – С. 3–4, (укр.).
- [6] Якиманская И. С. Психолого-педагогические проблемы дифференцированного обучения // Советская педагогика. – 1991. – №4. – С. 43–52.

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Миронова Ю. Н.

Елабужский филиал Казанского национального
исследовательского университета им. А. Н. Туполева
Елабуга
e-mail: mironovajn@mail.ru

Mironova J. N. We consider the using of programs MathCad and MATLAB in the study of linear programming in higher school.

Рассматриваются возможности программ MathCad и MATLAB при изучении линейного программирования в вузе.

При решении задач можно применить комплексный подход, то есть одну и ту же задачу решить несколькими способами. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Лабораторная работа № 1. Задачи по методам принятия решений.

Задание 1. Изобразите на плоскости ограничения задачи линейного программирования и решите (графически) эту задачу:

$$\begin{aligned}400W_1 + 450W_2 &\rightarrow \min, \\5W_1 + 10W_2 &\geq 45, \quad 20W_1 + 15W_2 \geq 80, \\W_1 &\geq 0, W_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Первый способ. Эту задачу можно решить графическим способом, изобразив на плоскости две пересекающиеся прямые и подставив в минимизируемую функцию координаты точек пересечения прямых друг с другом и с осями координат, то есть простым перебором.

Второй способ. Можно решить задачу с помощью программы MathCad, используя команду minimize.

Третий способ — решение задачи с помощью программы MATLAB посредством различных видов функции linprog.

Таким образом, у студентов будет вырабатываться комплексное мышление, позволяющее наиболее оптимальным способом решать различные задачи.

Литература

- [1] Кондрашов В.Е., Королев С.Б. MATLAB как система программирования научно-технических расчетов. — М.: Мир, Институт стратегической стабильности Минатома РФ, 2002. — 350 с.
- [2] Миронов А.Н., Миронова Ю.Н. Введение в компьютерную математику. Часть 1. Автоматизация вычислений в программе MathCAD. Учебное пособие. — Елабуга, ЕФ КФУ, 2012. — 20 с.

- [3] Ганиев М.М., Жаринов В.Г. Теория принятия решений. Учебное пособие. – Казань: ЗАО “Новое знание”, 2011. – 116 с.

УДК 517.995

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Недосекина И. С., Треногин В. А.

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Москва

e-mail:inedosekina@yandex.ru

Nedosekina I. S., Trenogin V. A. Periodic and almost periodic solutions of the some partial differential equations. The methodical questions arising by the account of one special section of “Partial differential equations” are discussed. The new methodical approach for the finding of Cauchy problems solutions of diffusion/heat conductivity equation and wave equation where the right parts of these equations and initial values are periodic or almost periodic functions of spatial variables.

Key words: diffusion/heat conductivity equation, wave equation, Cauchy problem, periodic and almost periodic functions, Poisson formula, D’Alembert–Euler formula, Fourier series.

Обсуждаются вопросы методики изложения одного из разделов курса уравнений в частных производных. Рассмотрен метод решения задач Коши для уравнений диффузии/теплопроводности и волнового в случаях, когда правая часть уравнения или начальные функции – периодические или почти периодические функции пространственных переменных.

Ключевые слова: уравнение диффузии/теплопроводности, волновое уравнение, задача Коши, периодические и почти периодические функции, формула Пуассона, формулы Даламбера–Эйлера, ряд Фурье.

В Национальном Исследовательском Технологическом Университете МИСиС для студентов физико-химических специальностей и специальности “Прикладная математика” преподается полугодовой курс уравнений в частных производных. В этом курсе подробно обсуждается метод построения решений смешанных (начально-краевых) задач для уравнения диффузии/теплопроводности и волнового уравнения в пространственно ограниченных областях в форме разложения по базису, состоящему из собственных функций подходящего дифференциального оператора. В данной публикации мы хотим обратить внимание преподавателей на то обстоятельство, что можно существенно упростить построение решений задач Коши для этих уравнений, если правые части уравнений или начальные значения – периодические (почти периодические) функции пространственных переменных.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения диффузии/тепло-

проводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

Как известно, решение этой задачи дается формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi. \quad (2)$$

В нашем курсе лекций мы получаем эту формулу путем формального применения преобразования Фурье и далее показываем, что при соблюдении соответствующих условий, накладываемых на функцию $f(x, t)$, формула (2) дает классическое решение задачи (1). Однако, вычисление этого громоздкого интеграла в случаях, когда $f(x, t)$ – периодическая или почти периодическая функция пространственной переменной, можно с успехом заменить существенно более простыми вычислениями.

На практических занятиях мы обращаем внимание студентов на необходимость предварительного анализа возникающей ситуации из соображений здравого смысла: не стоит бездумно пользоваться готовыми формулами, если, в рамках дозволенного, можно обойтись более простыми средствами решения задачи. Это нам представляется важным аспектом подготовки будущих инженеров-исследователей.

Итак, пусть $f(x, t)$ – непрерывная, 2π -периодическая по переменной x функция. Разложим её в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \cos kx + b_k(t) \sin kx).$$

Решение задачи (1) также будет 2π -периодической по переменной x функцией и его можно найти в виде

$$u(x, t) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(t) \cos kx + B_k(t) \sin kx).$$

Здесь $A_k(t)$, $B_k(t)$ – неизвестные функции, для определения которых получаются задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} A_0' = a_0(t); & \begin{cases} A_k' + a^2 k^2 A_k = a_k(t); \\ A_k(0) = 0; \end{cases} & \begin{cases} B_k' + b^2 k^2 B_k = b_k(t); \\ B_k(0) = 0; \end{cases} & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Решения этих задач можно записать в виде интегралов:

$$A_0(t) = \int_0^t a_0(s) ds, \quad A_k(t) = \int_0^t e^{-a^2 k^2 (t-s)} a_k(s) ds,$$

$$B_k(t) = \int_0^t e^{-a^2 k^2 (t-s)} b_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \int_0^t \left\{ \frac{a_0(s)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a^2 k^2 (t-s)} (a_k(s) \cos kx + b_k(s) \sin kx) \right\} ds.$$

Еще проще находится решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi(x)$ – 2π -периодическая функция. Разложим её в тригонометрический ряд Фурье

$$\varphi(x, t) = \frac{c_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k(t) \cos kx + d_k(t) \sin kx).$$

Решение задачи (3) будем строить в виде аналогичного ряда с неизвестными коэффициентами, зависящими от переменной t ,

$$u(x, t) = \frac{C_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k(t) \cos kx + D_k(t) \sin kx).$$

В результате получим

$$u(x, t) = \frac{c_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} (c_k(t) \cos kx + d_k(t) \sin kx).$$

Особенно убедителен, на наш взгляд, нижеследующий пример.

Пример 1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-2t} \sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Применение формулы Пуассона (2) приводит к интегралу

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-2\tau} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \sin \xi d\xi.$$

Вычисление интеграла в правой части формулы достаточно трудоёмко. Однако мы пойдём другим путем. Согласно предлагаемому методу, решение можно найти в виде

$$u(x, t) = B(t) \sin x.$$

Для определения $B(t)$ получаем задачу

$$\begin{cases} B' + B = e^{-2t}, & t > 0; \\ B(0) = 0. \end{cases}$$

Её решение имеет следующий вид

$$B(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Следовательно, имеем

$$u(x, t) = (e^{-t} - e^{-2t}) \sin x.$$

Перейдем к случаю, когда правая часть уравнения в задаче (1) может являться почти периодической функцией. Ограничимся случаем конечного числа слагаемых. Итак, пусть

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^n \cos(\alpha_k x + \beta_k) e_k(t), \quad \alpha_k > 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Если числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ рационально соизмеримы, то f представляет собой периодическую функцию, как и выше. Если же $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ рационально несоизмеримы, то f – почти периодическая функция с почти периодом $2l$. В этом случае, как мы убедимся, решение задачи также почти периодическая функция с тем же почти периодом, что и f .

Действительно, попробуем найти решение задачи (1) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) \cos(\alpha_k x + \beta_k), \quad (4)$$

где $u_k(t)$ – функции, подлежащие определению. Подставив (4) в задачу (1) и приравняв коэффициенты при $\cos(\alpha_k x + \beta_k)$, получим задачи Коши для определения неизвестных функций:

$$\begin{cases} u'_k + (a\alpha_k)^2 u_k = e_k(t), & t > 0; \\ u_k(0) = 0, & k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Решения этих задач можно записать в виде интегралов

$$u_k(t) = \int_0^t e^{-(a\alpha_k)^2(t-s)} e_k(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Итак, решение задачи (1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t e^{-(a\alpha_k)^2(t-s)} e_k(s) ds \right) \cos(\alpha_k x + \beta_k),$$

т. е. является почти периодической функцией пространственной переменной x , если числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ рационально несоизмеримы. Аналогичное утверждение справедливо для задачи (3), если начальная функция имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\alpha_k x + \beta_k), \quad \alpha > 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Проиллюстрируем сказанное простейшим примером.

Пример 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \cos(\sqrt{2}x) + 5 \sin(\pi x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение будем искать в виде

$$u(x, t) = u_1(t) \cos(\sqrt{2}x) + u_2(t) \sin(\pi x).$$

Для определения неизвестных функций имеем задачи Коши:

$$\begin{cases} u_1' + 2a^2 u_1 = 0, & t > 0; \\ u_1(0) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2' + (\pi a)^2 u_2 = 0, & t > 0; \\ u_2(0) = 5. \end{cases}$$

Решая эти задачи, получим

$$u_1(t) = e^{-2a^2 t}, \quad u_2(t) = 5e^{-(\pi a)^2 t}.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = e^{-2a^2 t} \cos(\sqrt{2}x) + 5e^{-(\pi a)^2 t} \sin(\pi x).$$

Предлагаемый подход применим и в случае задачи Коши для волнового уравнения. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (5)$$

Её решение дается известной формулой Даламбера–Эйлера

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (6)$$

Однако, в случаях, когда правая часть уравнения представляет собою периодическую или почти периодическую функцию по пространственной переменной, решение можно вычислить быстро и эффективно. Ограничимся иллюстрацией нашего подхода на следующем простом примере.

Пример 3.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi(t) \cos(\alpha x + \beta), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Применение формулы Даламбера–Эйлера (6) приводит здесь к интегралу

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \varphi(\tau) \cos(\alpha\xi + \beta) d\xi.$$

Хотя его вычисление не столь сложно, как вычисление интеграла типа (2), рассматриваемый нами метод позволяет решить задачу существенно быстрее, на что мы также постоянно обращаем внимание студентов. Итак, в нашем случае решение задачи можно найти в виде

$$u(x, t) = A(t) \cos(\alpha x + \beta),$$

где $A(t)$ – неизвестная функция. Для определения $A(t)$ получим задачу Коши:

$$\begin{cases} A'' + \alpha^2 A = \varphi(t), & t > 0; \\ A(0) = A'(0) = 0. \end{cases}$$

Её решение можно записать в явном виде по формуле

$$A(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \varphi(s) \cdot \sin(\alpha(t-s)) ds.$$

Замечание. Предлагаемая конструкция непосредственно применима и в случаях, когда в многомерных начальных задачах для уравнений диффузии/теплопроводности и волнового правая часть и начальные функции являются периодическими или почти периодическими функциями по каждой из пространственных переменных.

УДК 372.851

ПРОБЛЕМЫ СОДЕРЖАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИКИ

Нефедов Д. Е.

Коми Государственный Педагогический Институт

Сыктывкар

e-mail: denis.nefedoff@gmail.com

Nefedov D. E. Problems of school mathematics course. The article considers general view on problems of the common curriculum of the mathematics. Is an attempt to classify these problems and suggest ways to solutions them.

В статье рассматривается общий взгляд на проблемы содержания общего курса математики. Осуществлена попытка классификации данных проблем и предложены способы их решения.

В России сегодня бурно идет “перестройка” образования [1]. В школы вводятся современные интерактивные технологии – электронные доски с разнообразными гаджетами, электронные учебники, интернет-планшеты. Развиваются новые способы преподавания, опирающиеся на новое видение понятия “обучение”. Но почти не затронутой остается тема содержания школьного курса.

Случаи рассмотрения проблем содержания не единичны, но довольно редки. К примеру, Н. Х. Розов писал о неправомерно расширенной теме “Проценты” [2]. В данной же статье будет рассмотрен общий взгляд на проблемы содержания школьного курса математики, будет осуществлена попытка классифицировать данные проблемы, и будут предложены несколько способов решить данные проблемы.

Как ни странно, но бóльшая часть проблем, касающихся содержания школьного курса математики, известна школьным учителям достаточно давно [3]. Причем большинство проблем возникают не у учителей математики, а у учителей других предметов, в особенности учителей естественнонаучного профиля.

В целом, все рассматриваемые проблемы можно разделить на три группы:

1. Проблемы, связанные с несоответствием времени изучения тем в различных предметах.
2. Проблемы, связанные с пересечением тем в различных предметах.
3. Проблемы, связанные непосредственно с содержанием программы (отсутствие тем, чрезмерно большое или малое количество часов, отводящихся для изучение темы и т. д.).

В статье будут рассмотрены только проблемы первых двух групп, в виду их известности. Проблемы же третьей группы являются предметом более детального изучения.

Примерами первой группы могут послужить такие предметы, как химия, где уже в 8 классе изучаются электронные облака, но при этом о свойствах пространственных фигур школьники узнают только в 10 классе; физика, где учащимся необходимы знания степеней, появляющихся при изучении физических приставок, векторов, появляющихся в начале изучения механики, производной, которая связывает между собой уравнения передвижения, скорости и ускорения. Несомненно, данный список может быть расширен, но это кажется не столь важным, как способы решения данных проблем.

Для выхода из сложившейся ситуации подходящим был бы вариант изменения программ всех связанных этими проблемами предметов на государственном уровне, т. е. изменение школьного курса так, чтобы предметы и их содержание были более тесно переплетены. Но, к сожалению, в сегодняшних реалиях российского образования такой путь кажется нереальным. Именно поэтому возможен второй, более сложный путь – изменение программы “на местах”, т. е. изменение программы в конкретных заведениях, согласованное учителями и администрацией.

Если рассматривать вторую группу проблем – проблемы, связанные с пересечением тем в различных предметах, то в первую очередь стоит говорить об информатике. И главными проблемными темами являются алгебра логики и системы счисления. К примеру, на уроках информатики алгебра логики изучается в 8 классе, а через год на уроках математики учащиеся снова проходят эту тему. При этом, в большинстве случаев, учитель математики строит изучение данной темы, совершенно не обращая внимания на то, что его ученики уже знакомы с понятиями логики, с её законами, что они уже решали некоторые классы задач по данной теме. В конечном итоге, мы имеем “пустую” трату времени часов, отводящихся на математику. Решение данной проблемы очевидно. Необходимо только лишь договориться между собой учителям информатики и математики, как будут связаны между собой два этих этапа изучения логики. Но, к сожалению, у учителей на это часто не хватает времени, либо они считают, что лучше они повторят всё с самого начала, по причине необоснованного страха, что ученики что-то не усвоили.

Если же говорить об изучении систем счисления, то здесь стоило бы говорить не о разных этапах изучения систем счисления, а о разных подходах к изучению и о разном содержании данной темы. На уроках математики стоило бы обратить внимание на историю систем счисления, в особенности на системы счисления Вавилон и Майя, на то, где используются системы счисления (к примеру, быстрые алгоритмы умножения). Данная роль отводится математике, как науке о числах, которой под силу объяснить, что системы счисления – лишь формы записи одних и тех же чисел. На уроках же информатики стоит больше обращаться к практике работы в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления, как основных систем счисления, встречающихся при работе с компьютером.

Если говорить о программе школьного курса математики в целом, то можно сказать, что в ней появляется все больше и больше проблем [4]. Развитие математики, развитие методики преподавания должно вести за собой и школьный курс, но этого фактически не происходит. Безусловно, идеальным решением была бы полная модернизация программы. Новая программа, которая бы соответствовала реалиям современного мира и современной науки, которая содержала бы в себе множество межпредметных связей, которая была бы ориентирована на практику (за исключением профильных классов), вывела бы школу на новый уровень. Но в ближайшее время появление такой программы кажется нереальным.

Особенно стоит коснуться физико-математических школ. Несомненно, что в них обучение математике находится на более высоком уровне, чем в общеобразовательных школах. Но при этом в регионах, в большинстве случаев, высокие показатели достигаются за счет отбора детей и большого количества часов, отводящихся под профильные предметы. Углублённая программа в таких заведениях превращается в расширенную программу, когда в 10–11 классах дети проходят 1–2 курсы ВУЗа. При этом учителя стараются как можно быстрее изложить содержание школьного учебника, фактически не выходя за его рамки. В данном подходе есть свои плюсы, но практика показывает, что минусы перевешивают. Выпускники, в большинстве своём, знают математику “по верхам”, не осознавая суть предмета. Позже, когда они становятся студентами,

им кажется, что они уже знают материал, поэтому бывают невнимательны на лекциях, или вовсе их прогуливают. Естественно, что школьный учитель при всем желании не сможет рассказать полный объем программы ВУЗа, и из-за нехватки знаний таких студентов отчисляют в первые годы обучения. Многие физико-математические школы предлагают статистику поступления, где представлена фактически 100%-ая поступаемость в крупные ВУЗы страны, но ни одна такая школа не предлагает статистику о том, сколько человек окончило ВУЗ.

Сегодня учителя получили большое количество возможностей изменить образовательный процесс [5]. Есть возможности дистанционного обучения, обучения малыми группами, обучения по индивидуальным траекториям. Но наличие возможности практически не поддерживается государством. Поэтому если говорить о “перестройке” российского образования, то необходимо всё-таки перестраивать его, а не строить новое, разрушив старое.

Литература

- [1] Распоряжение Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2001 г. №1756-р
- [2] Боровских А. В., Розов Н. Х. О бедном проценте замолвите слово. . . // “Математика в школе”. 2010. №3. – С. 3–15.
- [3] Виленкин Н. Я., Таварткяладзе Р. К. О путях совершенствования содержания и преподавания школьного курса математики. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985. – 356 с.
- [4] Мордкович А. Г. Новая концепция школьного курса алгебры // “Математика в школе”. 1996. №6. – С. 28–33.
- [5] Полат Е. С., Бухаркина М. Ю., Моисеева М. В., Петров А. Е. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. – М.: Академия, 2001. – 272 с.

УДК 378.147.88

АНАЛИЗ УЧЕБНО-НАУЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕКСТОВ

Пайсон Т. П.

Алтайский государственный университет

Барнаул

e-mail: tpieson@mail.ru

Payson T. P. Analysis of the teaching and scientific texts. This article contains the analysis of the teaching and scientific texts. Using this analysis the first-year students of mathematical departments will be able to understand these texts.

В данной статье представлен анализ учебно-научных математических текстов, позволяющий первокурсникам математических факультетов самостоятельно разбирать и понимать такие тексты.

Введение. Первокурсники математических факультетов сталкиваются с таким видом самостоятельной работы, как чтение учебно-научных математических текстов. К учебно-научным текстам относятся неадаптированные научные математические тексты, особенностью которых является их ориентированность на читателя с высоким уровнем математического образования, а не на студента первого курса, но уровень знаний первокурсников должен быть достаточным для их понимания. Это могут быть фрагменты монографий, тезисы научных конференций, опубликованные доклады и т. д. Введение подобных текстов в самостоятельную работу первокурсников – будущих математиков – носит развивающий характер и устанавливает связь с их дальнейшей профессиональной деятельностью. Практическая направленность учебно-научных математических текстов заключается в том, что чтение подобной литературы будет являться неотъемлемой частью исследовательской работы будущего профессионального математика, кого, собственно, и готовят на математических факультетах.

Помочь в самостоятельном понимании такого рода математических текстов помогает предложенный нами анализ, состоящий из четырёх основных этапов. Каждый этап включает в себя группу вопросов на осознание и понимание текста, позволяет первокурсникам самостоятельно разобраться в неадаптированных материалах.

1. Ценностно-мотивационный этап.

Что Вы хотите узнать, прочитав данный фрагмент учебно-научного текста (какова цель прочтения текста)? Прочитайте этот текст. Для чего этот текст нужен (важен) Вам: какую проблему он помогает решить? Соответствует ли этот текст Вашей цели?

Оцените текст: насколько он понятен для Вас? Требуется ли дальнейший анализ для его понимания? Если Вам кажется, что текст совершенно понятен Вам, то проверьте себя: ответьте на вопросы следующего операционального этапа.

2. Операциональный этап.

Опишите (представьте, нарисуйте) первичный образ, который у Вас возник после первого прочтения фрагмента. Выясните, что является предметом исследования в представленном фрагменте текста. Вспомните, что на данный момент Вам известно о предмете?

Разберитесь, что дано в условии. Все ли факты, используемые в условии, Вам известны?

Разберитесь в значении каждого используемого в тексте термина, знака или символа, проговорите значения или изобразите графически смысл используемых знаков и символов. Если есть необходимость, обратитесь к списку принятых обозначений.

Выделите основной результат в данном фрагменте: что найдено, доказано, построено, исследовано и т. п. На какие вспомогательные утверждения опирается вывод основного результата? Все ли вспомогательные утверждения выведены в прочитанном фрагменте? Если некоторые из них оставлены для самостоятельной работы, то постарайтесь выполнить её. Если не удалось, то поищите во всём тексте до анализируемого фрагмента ссылку на вывод (доказательство, построение, нахождение и т. п.) или сам вывод этого вспомогательного результата.

Выделите методы доказательства (нахождения, построения и т. п.) основного и вспомогательных результатов в данном фрагменте. Разберитесь в них: выделите причинно-следственные связи. Если связь не ясна, обратитесь к повторению используемых в тексте понятий и отношениям между ними.

Выясните, уточнение какого понятия происходит при чтении этого фрагмента.

3. Коммуникативный этап.

Составьте краткую схему прочитанного фрагмента (напишите этапы, или зарисуйте их). По схеме перескажите фрагмент прочитанного текста своими словами.

Обсудите с однокурсниками в группе или в парах выявленную из текста проблему. Постарайтесь ответить на вопросы, возникшие у однокурсников (возможно, это поможет Вам глубже понять текст). Если остались вопросы, то заранее сформулируйте их и задайте преподавателю.

4. Рефлексивный этап.

Представьте образ понятия, которое описано в данном фрагменте. Как изменился (уточнился, дополнился) он по сравнению с первичным образом, возникшим после первого прочтения этого фрагмента? Какие новые отношения между известными понятиями Вы узнали?

Удалось ли Вам достичь своей цели? Оправдал ли данный фрагмент Ваши ожидания? Если цель не достигнута, то приблизились Вы к ней, прочитав и проанализировав данный фрагмент текста? Оцените: помог ли Вам этот анализ лучше понять прочитанный фрагмент?

Разберитесь, для чего автор привёл этот фрагмент в своей работе (какова цель автора написания данного текста). Совпали или нет цель автора и Ваша цель прочтения фрагмента? Проанализировав данный фрагмент текста, возникло ли у Вас желание глубже понять затронутую проблему? Появился ли интерес к данному разделу математики?

Обратите внимание, что теперь Вы узнали новый факт, о котором раньше не знали. Следовательно, теперь Вы обладаете большими возможностями, чем раньше.

Заключение. Дополнительно следует отметить, что представленный анализ учебно-научных математических текстов составлен в соответствии с функциями, которыми должны обладать учебные тексты [1, с. 24–25] и удовлетворяет этапам работы с математическими текстами, подробно описанными и обоснованными в [2].

Литература

- [1] Гельфман Э. Г. Методические основы конструирования учебных текстов по математике для учащихся основной школы. – Томск: Изд-во ТГПУ; Изд-во Том. гос. ун-та, 2004. – 260 с.
- [2] Пайсон Т. П. Преемственность в организации учебной деятельности студентов при изучении математических дисциплин на первом курсе классического университета (математический факультет) // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. 2008. № 32 (70). – С. 132–137.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СОЦИОКУЛЬТУРНОГО СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подаева Н. Г., Подаев М. В.
Елецкий государственный
университет им. И. А. Бунина
Елец
e-mail: podaev86@rambler.ru

Podaeva N. G., Podaev M. V. Projection of socio-cultural mathematical education.

В статье актуализируется проблема проектирования социокультурного содержания обучения математике, в ракурсе которой математическое образование определяется как форма человеческой культуры, направленная: 1) на трансляцию и усвоение математических знаний, умений как форм освоения культурных ценностей; 2) на освоение культурных базовых способностей, обеспечивающих возможность эффективной деятельности в социальной среде.

В новых образовательных стандартах выдвигается требование сформированности понимания выпускником метапредметных связей и универсальных учебных действий, в контексте которого выступает *идея личностного развития через освоение универсальных учебных действий (компетенций)*. Именно поэтому в новой концепции математического образования на первый план выдвигается принцип приоритета развивающей функции обучения: не математическое развитие, а развитие с помощью математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе, для динамичной адаптации в нем. В рамках такой связи особо остро встает вопрос о том, как должен быть организован процесс обучения математике, чтобы личностное развитие ученика из потенциальной возможности стала реальностью, что предельно актуализируют проблему проектирования *социокультурного содержания обучения математике* как целостной образовательной системы, включающей совокупность методологических, теоретических, дидактических и инструментально-методических характеристик. Напомним, что в ракурсе социокультурной концепции образование определяется как форма человеческой культуры, направленная на трансляцию и усвоение наколенного опыта, знания как носителей культурных ценностей. Выделяется в качестве ведущей категории *ценность*. Познавательная деятельность личности (учение) рассматривается как феномен культуры, внутренняя динамика освоения ценностей. Социокультурное содержание учения состоит в усвоении предметных и общенаучных знаний, навыков, умений как форм освоения культурных ценностей. Мы считаем, что представление о современном математическом образовании не может быть полным без раскрытия соотношения образования и культурогенеза личности, поскольку выпадает главный содержательный объект усвоения опыта в образовании – математические категории и методы как носители культурных

ценностей. *Социокультурное содержание учения в области математики представим как состоящее в усвоении предметных знаний, навыков, умений как форм освоения культурных ценностей* [2].

Познавательную деятельность в области математики представим как системное образование, выделяя структурно-функциональные компоненты, которые одновременно могут рассматриваться и как фазы цикла культурного освоения субъектом ценностей (носители которых – математические категории, объекты, методы), как динамику деятельности познания (учения) в области математики: *ценностная ориентация, побуждение, адаптация, коммуникация и продуцирование*. Ценностное отношение как «принятие или отклонение объекта» [1, с. 107] возникает на каждой фазе этого цикла, но, только пройдя все звенья, фазы цикла, становится культурной ценностью.

В новые образовательные стандарты заложены требования к метапредметному результату, но надо понимать, что этот результат может быть получен только при применении технологий данного типа. Деятельностные и мыследеятельностные образовательные технологии несут максимальный инновационный потенциал, выраженный, среди прочего, в *принципе метапредметного обучения*. Традиционное предметное обучение и подготовка к ЕГЭ не направлены на его получение. Направленность на получение метапредметного результата означает необходимость усиления инновации деятельностных технологий, ускорения процесса обновления содержания образования в направлении мыследеятельностного содержания.

Напомним, что ведущим условием отличия деятельностного подхода от бихевиористского является наличие или отсутствие у обучаемых *мотива* к осуществлению учебно-познавательной деятельности – положение «Деятельности без мотива не бывает» (А. Н. Леонтьев). Причем необходимо совпадение мотива и предмета деятельности. Напомним часто цитируемый пример, предложенный А. Н. Леонтьевым. Ученик читает книгу: предмет его деятельности – содержание книги, мотив – овладеть этим содержанием. Таким образом, мотив и предмет совпадают, мотив лежит внутри самой деятельности. Этим деятельность отличается от действия. Если же ученик читает учебник и его мотив – получить хорошую отметку на экзамене, то мотив и предмет не совпадают, – имеет место не деятельность, а действия «по принуждению» (не исходя из внутреннего интереса). Казалось бы, в таком обучении нет ничего плохого – без принуждения мы и не мыслим себе обучения. Однако в психологической теории деятельности известен закон: результаты деятельности «по принуждению» сохраняются лишь до тех пор, пока есть условия, позволяющие сохранять эти результаты. Как только изменятся условия, исчезнут и результаты. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить уровень знаний учеников через некоторый промежуток времени после экзаменов. Казалось бы, хорошо усвоенный материал – теоретический или задачный – быстро забывается учащимися, а сформированные умения и навыки – утрачиваются.

Итак, совпадение мотива и предмета деятельности является характерным признаком мыследеятельностных образовательных технологий, а формирование мотивации к обучению – важным компонентом в структуре учебной деятельности. Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере организации учебной деятельности младших подростков в рамках пропедевтического курса «Основы

геометрии» для 5–6 классов.

Нами разработана методика по формированию деятельности, связанной с усвоением мыслительных умений младших подростков, в рамках пропедевтического курса «Основы геометрии» для 5–6 классов. В рамках данной статьи остановимся на формировании умений, способствующих пропедевтике доказательств геометрических утверждений. При формировании деятельности, связанной с усвоением *умений доказывать*, учитель в первую очередь сталкивается с проблемой создания мотивации. Возникает проблема формирования у школьников *ценностного отношения* как принятия достаточно «скучных» положений аксиоматики геометрических пространств в качестве культурной ценности. Здесь акцентируется такой этап динамики освоения ценности, как *ценностная ориентация* (или рефлексия ценности), складывающаяся из разных форм аналитико-синтетической, поисковой, оценочной и другой познавательной деятельности: поиск смысла идей, заложенных в таких фундаментальных категориях, как, например, *доказательство*. Трудности вызываются во многом отсутствием понимания необходимости логического доказательства. Школьники видят перед собой очевидное утверждение и не понимают, зачем его нужно еще и доказывать. Так, на вопрос «чем вы занимались на уроке геометрии» – встречаются ответы учеников такого характера: «Учитель нарисовал на доске два равных треугольника и долго доказывал, что они равны». Доказательства первых утверждений воспринимаются формально большинством учеников, причем многие на протяжении всего курса геометрии зазубривают доказательства теорем, не осознавая самой сути доказательства. Поэтому на уровне подготовительного курса геометрии 5–6 необходимо формировать у учащихся убеждения в несовершенстве органов чувств, простейших измерительных приборов, показывая, таким образом, ограниченность опытно-индуктивных обоснований. Кроме этого, необходимо трактовать школьникам понятия «доказательство», «аргументация». Так, созданный нами пропедевтический курс по геометрии для младших подростков включает в себя параграф «Как устанавливаются геометрические истины». В рамках этой темы мы вначале знакомим школьников с методами, используемыми в естественных науках – говорим о наблюдении, опыте, эксперименте. Ставя вопрос о целесообразности применения данных методов в геометрии (и вообще в математике), рассматриваем такие примеры: как экспериментально установить, чему равна сумма углов треугольника; как проверить опытным путем, пересекаются ли параллельные линии? В первом случае школьники, измеряя транспортиром углы треугольника и находя их сумму, приходят к различным значениям, хоть и близким к 180 градусам. Во втором случае учащимся представляется очевидным, что бесконечно продлевать две параллельные линии мы не сможем. Поэтому приходим к выводу, что традиционные для некоторых научных отраслей методы неприменимы в геометрии.

Литература

- [1] Добреньков В. И. Общество и образование. – М.: «ИНФРА-М», 2003.
- [2] Подаева Н. Г. Социокультурная концепция математического образования // «Моделирование процессов управления и обработки информации». – Елец, 2012.

Актуальные информационные системы и технологии моделирования

УДК 378.519.2

ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАТРИЦЫ ТЕСТОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ЦЕЛЬЮ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ТЕСТА

Андреева Н. М., Кучунова Е. В.

ФГАОУ ВПО Сибирский федеральный университет

Красноярск

e-mail: and-n-m@mail.ru, NKuchunova@sfu-kras.ru

Andreeva N. M., Kuchunova E. V. The empirical analysis of the test results matrix for the qualitative assessment of the test. This paper discusses the methods of analysis of the test results to control of a test quality. The learning management system "MOODLE" forms a matrix of the test results. The search algorithm of the distorted profiles in the matrix of the test results are realized in MS Excel.

Keywords: LMS "MOODLE", test results matrix.

В статье обсуждаются методы анализа результатов испытаний с целью контроля качества теста. Система управления обучением "MOODLE" формирует матрицу результатов тестирования. Алгоритм поиска искаженных профилей тестирования в матрице тестовых испытаний реализован в MS Excel.

Ключевые слова: СДО "MOODLE", матрица результатов тестирования.

Своевременный контроль учебного материала мотивирует студентов к систематической, планомерной работе по освоению дисциплины. Контроль в начале обучения выявляет дидактические единицы смежных областей знаний, на которые следует обратить особое внимание. Мероприятия текущего контроля определяют уровень усвоения учебного материала по темам дисциплины. Результатом заключительного контроля является оценка знаний, их соответствие учебному плану дисциплины.

Традиционная форма контроля знаний (например, устный или письменный экзамен) обеспечивает фрагментарный контроль знаний. Одна и та же оценка может соответствовать различным уровням знаний, часто она зависит от уровня успеваемости группы. Устный экзамен не исключает влияния психологических аспектов взаимодействия студента и экзаменатора, снижает положительную мотивацию студента к обучению. Низкая технологичность проведения устного экзамена и проверки письменных работ обуславливает большой объем физической и психологической нагрузки на преподавателя. Компьютерное тестирование обеспечивает широкий охват учебного материала, техничность проведения процедуры контроля, оперативность представления результатов испытаний [1].

Тестовая система, включенная в структуру СДО "MOODLE" (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment), создает банк тестовых заданий, компоует тесты для тренинга, промежуточных и итоговых контрольных

испытаний, организует тренинги и тестирование, по итогам тестовых испытаний формирует матрицу тестовых результатов, рассчитывает статистические показатели тестирования [2].

Интерактивный курс практической работы по дисциплине “Информатика” для студентов экономических специальностей Института экономики, управления и природопользования ФГАОУ ВПО СФУ разработан и реализован нами в системе управления обучением “MOODLE”. Структурные элементы курса включают методические материалы по теоретической части дисциплины [3], систематизируют практическую работу студентов по тематическим разделам. Тест промежуточного контроля состоит из 10 тестовых заданий по трем разделам: “Системы счисления и представление информации в ЭВМ”, “Измерение и кодирование информации”, “Основы работы в среде электронных таблиц MS Excel”. Банк тестовых заданий включает задания типов: “Множественный выбор”, “Альтернативный вопрос”, “Вопрос на соответствие” и “Короткий вопрос” [4]. Выполняя тест в режиме тренинга, студент самостоятельно оценивает уровень своих знаний. Результаты тренинга и пробного тестирования отражаются в матрице результатов тестирования. Она передаётся в MS Excel и служит информационной базой для алгоритма проверки “сырых” баллов с целью выявления слишком сложных, слишком простых и некорректных тестовых заданий. Обнаруженные неблагополучные задания должны быть отредактированы. Процесс проверки и редактирования повторяется многократно, требует оперативного формирования и проверки корректности матрицы тестовых результатов. Целью данной работы является разработка расчётного сценария MS Excel для реализации алгоритма проверки корректности тестовых заданий, визуализации результатов проверки на рабочем листе.

Матрица результатов тестирования – таблица, столбцы соответствуют номерам тестовых заданий ($i = 1, 2, \dots, M$), строки – испытуемым ($j = 1, 2, \dots, N$). В ячейках матрицы – оценки ответов студентов, элемент матрицы $a_{i,j}$ соответствует ответу i -го студента на j -ое тестовое задание. Для верно или частично верно выполненных заданий $a_{i,j}$ равен количеству баллов, начисленных за ответ, для неправильных ответов $a_{i,j}$ равно нулю.

В случае пропущенного ответа $a_{i,j}$ содержат значение “нет информации”. Рассчитываются индивидуальный балл студента (количество верных ответов i -го испытуемого): $X_i = \sum_{j=1}^M a_{i,j}$ и эмпирический тестовый балл задания (количество верных ответов на j -ое задание): $R_j = \sum_{i=1}^N a_{i,j}$.

Задания с отсутствующими ответами, а также задания, с которыми не справился ни один студент, или все справились успешно, не имеют значения для ранжирования и дифференциации индивидуальных баллов. Поэтому столбцы, соответствующие таким заданиям, исключаются из матрицы результатов тестирования.

Строки редуцированной матрицы упорядочиваются по индивидуальному баллу студента по убыванию сверху вниз, столбцы – по убыванию эмпирического тестового балла задания слева направо. Верхняя часть матрицы соответствует наиболее успешным студентам, имеющим высокий индивидуальный балл. Левая часть матрицы – более легким заданиям с высоким значением эмпирического тестового балла, имеющим большее число верных ответов.

Строка матрицы соответствует профилю тестирования студента. В нача-

ле профиля располагается последовательность ответов студента на более простые задания, затем – на сложные. Предполагается, что студент, успешно выполнивший сложные задания, должен дать верные ответы на более легкие задания. Поэтому строка ответов в правильном профиле заканчивается последовательностью нулей. В искаженном профиле нули и верные ответы следуют друг за другом, беспорядочно чередуясь, при этом последовательность верных ответов прерывается нулями и наоборот [5]. Наличие искаженного профиля сигнализирует о некорректных тестовых заданиях, о неправильной структуре знаний студентов, об ошибках в процедуре проведения тестирования.

Пробное тестирование, поиск искаженных профилей в матрице тестовых результатов и корректировка тестовых заданий повторяются, пока в матрице тестовых результатов присутствуют искаженные профили.

Заключение.

В системе управления обучением “MOODLE” разработан интерактивный курс практической работы по дисциплине “Информатика”, создан банк тестовых заданий для формирования теста промежуточного контроля знаний. Тест в режиме тренинга сообщает студенту правильные ответы и пояснения к ним, обеспечивает контроль уровня знаний. Для использования теста в качестве инструмента измерения уровня знаний необходимо оценить сложность тестовых заданий, их корректность.

Итогом данной работы является создание расчётного сценария MS Excel для подготовки матрицы тестовых результатов, в которой все профили тестирования правильные. Она будет служить информационной базой для дальнейшего анализа результатов тестирования методами математической статистики.

Литература

- [1] Аванесов В. С. Основы педагогической теории измерений // “Педагогические измерения” №1, 2004 г. <http://testolog.narod.ru/>.
- [2] Анисимов А. М. Работа в системе дистанционного обучения Moodle. – Харьков, ХНАГХ, 2009. – 292 с.
- [3] Пак Н. И. Информатика. – Красноярск: Краснояр. гос. ун-т., 2006. – 357 с.
- [4] Андреева Н. М. Организация практической работы студентов по дисциплине “Информатика” в системе управления обучением “MOODLE” // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения–2012. Материалы научной конференции (16-21 апреля 2012 г.). – СПб: БАН, 2012. – С. 213–215.
- [5] Ким В. С. Тестирование учебных достижений. – Уссурийск: Издательство УГПИ, 2007. – 214 с.

WEB-СЕРВИС ДЛЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ НЕОБХОДИМОЙ ПОЛЬЗОВАТЕЛЮ ИНФОРМАЦИИ В ИНТЕРНЕТЕ

Балонин Н. А., Гусаров А. В., Леонтьев С. В., Марлей В. Е.
Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург

The approach to information of the organizations on the basis of the social networks is considered, allowing asynchronously to approach to automation of functions of system and a question of creation of Web service for information search at such approach.

Рассматривается подход к информатизации организаций на основе социальных сетей, позволяющий асинхронно подходить к автоматизации функций системы, и вопрос создания Web-сервиса для поиска информации при таком подходе.

Необходимость информатизации деятельности, в настоящее время, никем не оспаривается, однако путей её осуществления предлагается приблизительно столько же, сколько организаций участвует в этом процессе. При этом взгляды разработчиков зачастую не совпадают с взглядами пользователей, и каждая реализация есть некоторый консенсус между возможностями разработчика и желаниями пользователя. Во многом это происходит из за желания сделать все и сразу, синхронно, как говорится «в едином пакете», что зачастую противоречит реальным потребностям пользователей. Им внедряются программы, которые им ещё не нужны, так как они ещё не осознали их необходимость, и не внедряются программы, которые им нужны в данный момент, потому что они противоречат общей концепции внедряемой системы. Вместе с тем система должны вращиваться постепенно и асинхронно. Каждое ее расширение должно быть ответом на конкретный вызов, определяющий необходимость разработки той или иной программы.

Рассмотрим один из возможных подходов к асинхронной информатизации учреждения:

- +информатизация организации начинается с создания внутренней корпоративной сети и системы блогов, по аналогии с социальными сетями;

- +все подразделения организации и руководство имеет свои блоги, которые должны иметь унифицированную по типам структуру, в принципе каждый сотрудник может иметь свой блог;

- +блоги обмениваются между собой информацией, при этом собственная информация в блоге может быть изменена только внутри блога, блог забирает необходимую ему информацию извне автоматически при помощи робота или по запросу через поисковую систему, свою подготовленную информацию необходимую вовне сайт выставляет на форум внутри учреждения, откуда она забирается другими пользователями;

- +каждый показатель может быть изменен в одном и только одном блоге;

- +блог реализует не только функции информационного обмена, но и функции внутреннего органайзера и контроля исполнения (подготовки для него

информации другими блогами и подготовкой информации для других блогов);

+нет единой базы данных, каждый блог имеет свою базу, обновляемую за счет информационных обменов, информация, полученная по обмену сохраняется в базе данных блога, только если была использована для изменения информации на сайте или по решению пользователя;

+блог может обращаться к любой программной системе для решения задач поставленных перед подразделением держателем блога;

+все данные, программы обработки и сам блог хранятся на сервере или системе серверов организации, обработка данных также осуществляется на сервере, для общения с блогом нужно на машине–клиенте иметь только браузер (тонкий клиент), т. е. весь информационный обмен осуществляется внутри системы серверов;

+блоги работников объединяются в сообщества соответствующие подразделениям организации, блоги обменивающиеся информацией объединяются по принципу аналогичному «друзьям» в соцсетях;

+все машины подразделения замыкаются на машину руководителя подразделения, который сам определяет приоритетность их подключения, права доступа и разрешает конфликты при подключениях.

Преимущество такого подхода определяется возможностью асинхронного развития сайтов и произвольного выбора подразделением программных средств для решения своих задач и формирования документов. Программы в данном случае внедряются тогда, когда они требуются персоналу, а не тогда когда это требуется разработчику, при этом не налагаются ограничения на особенности их реализации. При такой концепции почти полностью исчезает программирование на стороне пользователя, все на серверах. На стороне пользователя возможно только программирование, увеличивающее функциональные возможности браузера. Для обеспечения такого подхода требуется создание системы Web-серверов.

В настоящее время нечто подобное стихийно возникает в соцсетях, например студенты организуют свои сообщества для обмена информацией по учебным дисциплинам и заданиям. Попытка создания учебной и научной социальной сети сделана на сайте www.marley.spb.ru.

Уже существуют социальные научные сети, но они организованные по принципу обычных сетей пользователей. Однако социальные научные сети, заимствуя у обычных систему блогов, должны иметь и свои особенности. Прежде всего, система допуска и замков. Любой может войти в сеть для просмотра материалов (ограниченного), но регистрация и полный доступ к информации с возможностью внесения своих материалов возможна только по рекомендации модераторов или рекомендации проверенных членов. Следующий момент, научная социальная сеть должна обладать средствами подготовки публикаций, обеспечивающими ввод формул и рисунков, давать возможность создания коллективов работающих над одной публикацией или проблемой, давать возможность дистанционного проведения опытов на оборудовании находящемся у другого пользователя сети. Сеть, таким образом, должна обеспечивать возможности обмена программными кодами и документами на форуме, приема данных от первичных источников, в том числе и через мобильную и беспроводную связь, управления исполнительными механизмами, должна обеспечивать

возможность обработки данных, а, следовательно, доступ к сетевым версиям математических пакетов. В этом отношении примером такого пакета является отечественный математический пакет iMatLab, который является сетевым аналогом (первым) пакета MatLab (<http://mathscinet.ru/>). Использование данной программной системы обеспечивает возможность:

- 1) одновременной обработки результатов от многих независимых источников на одном удаленном сервере;
- 2) использования результатов экспериментов территориально разбросанными научными коллективами;
- 3) использования математического обеспечения для обработки результатов без установки его на компьютеры пользователей (технология тонкого клиента).

Т. е. обеспечивает то, что необходимо для научной социальной сети. На основе данного пакета проведены первые опыты по организации дистанционной лабораторной работы на стендах лаборатории Тиманова в СПГУВК. Ведутся работы по организации непрерывного мониторинга состояния гидротехнических сооружений с использованием видеокамер, как устройств получения первичной информации, и сотовой связи как средства передачи данных с обработкой результатов на удаленном сервере в Интернете. В настоящее время ведутся работы по дальнейшему развитию разработанного Интернет–ресурса.

Для учебного процесса также должна существовать своя сеть, отделенная от остальных, ориентированная на цели учебного процесса. В частности, преподавание и выполнение лабораторных работ по дисциплине «Мультимедиа» на кафедре «Вычислительные системы и информатика» ГУМРФ ведется в режиме интернет–форума. Помимо этого в режиме форума разработана система управления оранжереями и ведутся работы по созданию дистанционной лабораторной работы на модели шлюза в лаборатории Тиманова.

Следует отметить, что такие блоги следует организовывать, прежде всего, как файлообменники и интерфейсы должны быть просты. Интерфейсы существующих социальных сетей просты. Сложная организация интерфейса затруднит их модификацию.

Приведенные примеры показывают возможность создания виртуального мира организации, охватывающего все стороны его деятельности, позволяющие асинхронно организовать процесс информатизации этой деятельности и снизить величину единовременных затрат.

Важным вопросом при описанном подходе является сбор информации. Ниже рассматривается один из вариантов обеспечения этого процесса.

Современные тенденции развития сети Интернет показывают, что будущее за семантическими Web–технологиями. Расширение возможностей разметки HTML, которое раньше достигалось исключительно энтузиастами, за счет таких тэгов, как «class» или «id», уже сейчас демонстрируется в новой версии HTML5. Введение новых правил описания Интернет–страниц дает возможность браузерам и Web–приложениям не только более эффективно читать код страниц и воспроизводить всё более сложные визуальные элементы, но и понимать смысл документа. Это, в свою очередь делает возможным не просто интерпретировать код, но и структурировать его, делая прозрачной информацию, заключенную в нем.

Такое структурирование позволяет создать новый класс Web-сервисов и приложений, чья основная задача будет автоматически находить нужную пользователю информацию в огромном количестве кода и преобразовывать её в любой необходимый формат вывода. Именно к такому типу относится данное приложение.

Помимо этого, сервис ориентирован на использование в социальных сетях, как наиболее преобладающем формате индивидуальных пользовательских Web-интерфейсов. Для поиска не нужно заходить на сайт, информация будет приходить автоматически.

Краткое описание. TRACE Panel можно разделить условно на три части:

Первая часть сканирует выбранный раздел сайта, пытаясь найти в нем динамически изменяемые материалы. Приложение интерпретирует html-страницу, выбирая области, в которых контентная информация обновляется и может быть отслеживаема. После интерпретации пользователю предлагается выбрать интересующие его разделы из списка возможных. Начиная с этого момента, программа будет следить за обновлениями данных разделов, и записывать любые изменения в них.

Вторая часть отвечает за шифровку и дешифровку полученной информации, и её представление. Программа шифрует информацию (предпочтительно в XML), после чего отправляет её пользователю одним из предлагаемых способов (непосредственно на e-mail, в браузер/телефон или отправляет на сайт в социальной сети).

Третья часть – приложение для социальной сети. Оно разрабатывается для нескольких самых популярных социальных сетей и сайта кафедры. Устанавливаясь в сайт, оно принимает обновления и отображает их на сайте в категоризованном виде.

Принцип работы. Первая часть Web-сервиса является расширением Интернет браузера (Mozilla, Opera). Оно встраивается в браузер в виде виджета, который вызывается по нажатию определенной горячей клавиши или из меню.

Находясь на сайте, пользователь вызывает это расширение. Расширение сразу же начинает сканировать страницу, открытую в данный момент пользователем. В соответствии с семантикой html5 и заранее прописанным алгоритмом на javascript, программа находит области с динамически обновляемыми данными контента Web-страницы. Эти области выделяются полупрозрачными прямоугольниками, чтобы дать понять пользователю обновление каких материалов он может отслеживать.

После того как пользователь выберет интересующую его область, откроется панель управления расширением TRACE Panel. Панель имеет несколько полей настроек, рассмотрим их по-отдельности:

Сайт – адрес и описание сайта, с которого будут получаться обновления. Если обновления будут отслеживаться не с главной страницы сайта, в этом поле будет отображаться полный адрес до обновляемого контента. Это полезно если, например, пользователь захочет получать обновления материалов сортированных особым образом, или найденным в результате поиска.

Раздел – тематическая папка для сортировки присылаемых обновлений. Определяет, в какой раздел будут отправляться данные с этого сайта в конечном приложении (3 часть программы).

Тип – разновидность отслеживаемого контента. Сейчас рассматриваются два типа отображения динамических материалов на сайте. Первый – это список, отображение списком ссылок на полные статьи. Второй – отображение в виде статей, на подобие блога. В ходе разработки программы это поле может быть устранено за ненадобностью, если удастся расшифровывать списки ссылок и статей одинаковым алгоритмом.

Заголовок – после того как программа находит на странице динамические данные, она просит пользователя «показать» ей где в этих данных находится заголовок, а где содержание. Поле Заголовок существует именно для этого. По нажатию иконки поиска пользователь выбирает на странице сайта внутри выделенной динамической области (полупрозрачный синий прямоугольник) поле с заголовком. Программа запоминает расположение заголовка и берёт оттуда название ко всем будущим статьям.

Краткое содержание – это поле отвечает за содержание новости. Если содержание отсутствует или новость представлена в виде ссылки – это поле остается пустым. Нажав на кнопку поиска. Найти содержание, пользователь выбирает область с текстом новости внутри заранее выделенного синего прямоугольника (как в случае с заголовком). После чего в поле вносится текст первой новости внутри прямоугольника со всеми тегами и изображениями.

После нажатия кнопки «Подтвердить» приложение запоминает выбранные настройки и начинает отслеживать изменения динамического контента в этой области. Каждый выбранный промежуток времени программа заходит на данный сайт, смотрит, не появилась ли в выбранном разделе новая запись. Если появилась новая запись, программа автоматически копирует её содержание и отправляет в конечное приложение, уведомляя об этом пользователя.

Работа Web-сервиса напоминает rss-рассылку, за исключением того, что пользователь сам выбирает какой материал он хочет отслеживать, а не выбирает из предложенных стандартных новостей.

Структура расширения. Данный Web-сервис является расширением для браузера. И, как и любое другое стандартное расширение, оно описывается языками JavaScript и XML. Расширение имеет структуру: */install.rdf*

```
/components/*  
/components/cmdline.js  
/defaults/  
/defaults/preferences/ * .js  
/plugins/*  
/chrome.manifest  
/chrome/icons/default/*  
/chrome/  
/chrome/content/
```

В папке components находятся библиотеки JavaScript. Они отвечают за расшифровку html-кода страниц сайта и за поиск необходимой динамической информации. В случае расширения программы и добавления новых модулей, необходимо будет лишь добавить новые библиотеки в папку components.

Интерфейс приложения в браузере описывается xml файлом. Так же в

xml будут шифроваться все данные полученных обновлений, для того чтобы легче было передавать их в разные приложения и сайты.

Один из способов установки расширения в браузер:

Скачать архив с расширением.

Перенести архив из папки на пустую вкладку браузера способом drag-and-drop.

Работать с приложением.

Браузер сам установит архив, после перенесения его на пустую вкладку, пользуясь инструкцией предварительно описанной в архиве. После чего расширение автоматически встроится в браузер и будет доступно из основного интерфейса.

Приложение к социальной сети. Заключительная часть Web-сервиса Trace panel – приложение, устанавливающиеся на сайт кафедры и в несколько социальных сетей. Оно отображает все новости в формате ленты. Лента может показывать новости отдельно по каждому разделу или все вместе. Так же можно сортировать новости по дате, сайту, заголовку и т. д.

Заключение. Данный сервис может быть полезен в профессиональных целях. Пользователь может всегда быть в курсе интересующих его событий без необходимости посещать десятки сайтов, что экономит не только его время, но и интернет-трафик.

Планируется снабдить программу системой интеллектуального поиска – на основе запросов пользователя, программа сама будет искать в Интернете новости, которые могли бы быть ему полезны.

УДК 533.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕВЕРСА ЭФФЕКТА МАГНУСА ДЛЯ ОБТЕКАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА С УЧЁТОМ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА

Батраков А. С., Кусюмов А. Н., Романова Е. В.

Казанский национально исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева

Казань

e-mail: postbox7@mail.ru

Batrakov A. S., Kusyumov A. N., Romanova E. V. Modeling of Magnus effect revers for flow around spinning cylinder taking into account laminar-turbulent transition. The task of transient modeling of real incompressible liquid flow around of a spinning cylinder is considered for near the critical Reynolds numbers. For numerical modeling the ANSYS Fluent 12 code is used.

Рассматривается задача моделирования ламинарно-турбулентного перехода вязкой несжимаемой жидкости около поверхности вращающегося цилиндра в окрестности критического числа Рейнольдса. Для моделирования используется пакет Fluent 12.

Рассматривается задача нестационарного обтекания вращающегося плоского кругового цилиндра потоком несжимаемой вязкой жидкости в области критического числа Рейнольдса $Re_{кр0}$. Для неподвижного цилиндра падение сопротивления цилиндра в окрестности $Re_{кр0}$ определяется изменением режима течения в пограничном слое около поверхности цилиндра. При числах Рейнольдса $Re = V_\infty d/\nu$ (V_∞ – скорость набегающего потока, d – диаметр цилиндра, ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости) меньше чем $Re_{кр0}$, пограничный слой на поверхности неподвижного цилиндра является полностью ламинарным. При числах Рейнольдса Re , превышающих $Re_{кр0}$, течение имеет смешанный ламинарно-турбулентный характер не только в следе за цилиндром, но и непосредственно около поверхности цилиндра [1], [2].

Другой важный эффект связан с подвижностью (вращением) цилиндра: обтекание вращающегося цилиндра приводит к возникновению поперечной (эффект Магнуса). Причиной возникновения эффекта Магнуса является асимметрия поля скоростей около поверхности вращающегося цилиндра: подвижная поверхность цилиндра увлекает за собой часть пристеночного объема жидкости. Взаимодействие с основным потоком приводит к изменению поля скоростей, положения критических точек (рис. 1), а, следовательно, к изменению поля давлений и появлению поперечной силы. Как правило, при объяснении эффекта Магнуса в учебной литературе считается (см., например, [3]), что в области, где поверхность цилиндра движется в направлении потока, давление ниже, чем в области, где поверхность цилиндра движется против потока. Возникающую в этом случае поперечную силу и эффект Магнуса будем считать “нормальными” (для рис. 1 нормальная поперечная сила направлена вверх).

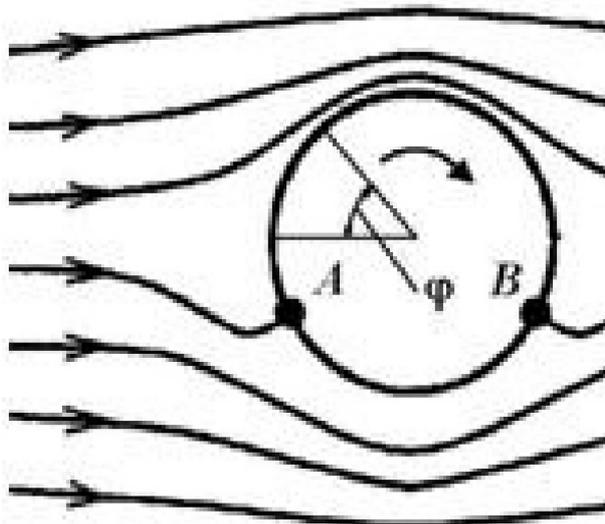


Рис. 1. Схема циркуляционного обтекания цилиндра потенциальным потоком идеальной жидкости (большие значения скорости вращения поверхности цилиндра): A, B – критические точки, φ – угловая координата точки на поверхности цилиндра.

В тоже время имеется часть экспериментальных работ [4, 5], в которых отмечается, что при определенных частотах вращения поперечная сила меня-

ет свое направление на противоположное. В этом случае имеет место “реверс” эффекта Магнуса. Из анализа экспериментальных работ следует, что реверс эффекта Магнуса происходит в области чисел Рейнольдса около числа Re_{kp0} и связан с явлением ламинарно-турбулентного перехода. В настоящей работе исследуются особенности использования коммерческого пакета Fluent 12 для расчета лобового сопротивления вращающегося цилиндра при числах Рейнольдса, близких к Re_{kp0} . Для моделирования используются URANS – осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (см., например [6]), замыкаемые соответствующими моделями турбулентности.

Построение расчетной сетки и выбор параметров моделирования. Количество узлов расчетной сетки, вопросы сеточной независимости и выбор модели турбулентности рассматривались в работе [7] при моделировании течения около неподвижного цилиндра. В данной работе (как и в работе [7]) используется расчетная гекса – сетка, построенная в препроцессоре ICEM и содержащая около 68400 элементов. Для моделирования турбулентности использовалась переходная модель турбулентности transition k-kl- ω .

Расчёт проводился для различных значений числа Рейнольдса: $Re_{\infty} = 136921; 273841$ (низко рейнольдсовая область, ламинарный режим для неподвижного цилиндра); 410762 (околокритический режим); 629835; 958445 (высокие числа Рейнольдса, турбулентный режим для неподвижного цилиндра). Величина y^+ в расчетах не превышала значения 0,25. Расчёт проводился при начальной степени турбулентности потока $\varepsilon = 1$ (в процентах). Проводились также расчеты при $\varepsilon = 0,04$, однако полученные данные незначительно отличались от расчетов при $\varepsilon = 1$. В силу нестационарного характера режима течения в области Re_{kp0} задача решалась в нестационарной постановке.

Анализ распределенных характеристик течения. Для выяснения причин возникновения реверса эффекта Магнуса рассмотрим более подробно распределенные характеристики течения около поверхности цилиндра. Для неподвижного цилиндра отрезок, соединяющий критические точки A ($\varphi = 0^\circ$) и B ($\varphi = 180^\circ$), делит течение на две симметричные области (верхнюю и нижнюю). Наличие подвижности поверхности нарушает симметрию течения. Тем не менее, будем говорить, что поверхностная точка принадлежит верхней поверхности вращающегося цилиндра, если она находится выше отрезка соединяющего точки $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 180^\circ$ (направление вращения в этом случае согласовано с направлением внешнего потока, рис. 1). В противном случае будем говорить, что поверхностная точка находится на нижней поверхности цилиндра. В силу асимметрии поля скоростей критические числа Рейнольдса Re_{kpu} и Re_{kpd} , (соответственно для верхней и нижней поверхности) будут различными.

Различие в величинах Re_{kpu} и Re_{kpd} является одной из причин реверса эффекта Магнуса. Как отмечается в [1], асимметрия поля скоростей приводит к задержке смены режима течения до более высоких значений числа Рейнольдса $Re_{kpu} > Re_{kpd}$ в той области, где направление потока совпадает с направлением вращения, и к более ранней смене режима течения (более низкие значения числа Рейнольдса $Re_{kpd} < Re_{kpu}$) для области, где направление потока противоположно направлению вращения.

На рис. 2, 3 показано распределение коэффициента давления на верхней и нижней поверхности цилиндра для чисел Рейнольдса $Re_\infty = 273841$ и $Re_\infty = 958445$ в зависимости от параметра вращения $\theta = \omega d/2V_\infty$. Поскольку течение является нестационарным, приводятся средние значения величин.

При $\varphi < 20$ и $Re_\infty = 273841$ значения касательного напряжения, рассчитанные по приведенной формуле, в целом неплохо согласуются с данными численного моделирования. Различие в значениях для $\bar{\tau}_w$, предсказанных по формуле из работы [8] и полученных в результате численного моделирования, может объясняться приближенным характером решения работы [8] (пограничный слой считался полностью ламинарным), а также нестационарным характером реального течения (что не учитывалось в [8]).

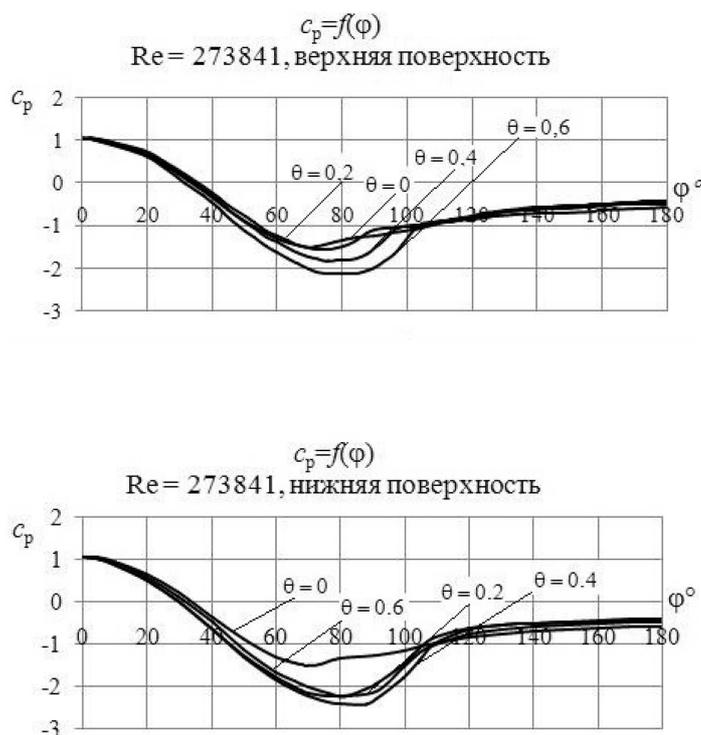


Рис. 2. Распределение коэффициента давления на верхней и нижней поверхности для $Re_\infty = 273841$ при $\theta = 0; 0,2; 0,4; 0,6$.

Распределение коэффициента давления определяется выражением $c_p = 2(p - p_\infty)/\rho V_\infty^2$ (p, p_∞ – давление в рассматриваемой точке и в набегающем потоке, ρ – плотность жидкости).

Положение точки максимального значения поверхностного коэффициента давления, как это следует из графиков при рассмотренных значениях параметра вращения, практически не зависит от частоты вращения цилиндра и имеет ту же координату, что и для неподвижного цилиндра ($\varphi = 0^\circ$). Анализ структуры векторного поля показывает, что с ростом параметра вращения θ происходит некоторая деформация поля течения, в соответствии с рис. 1. Однако, в рассмотренном диапазоне параметра вращения изменение положения

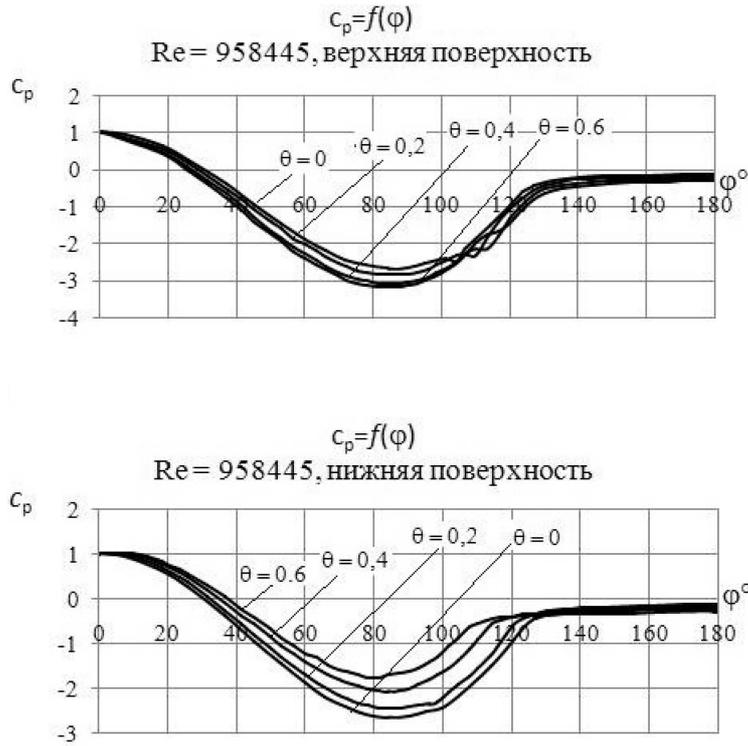


Рис. 3. Распределение коэффициента давления на верхней и нижней поверхности для $Re_{\infty} = 958445$ при $\theta = 0; 0,2; 0,4; 0,6$.

критической точки, а, следовательно, и смещение положения точки $c_{p\max}$ проявляется весьма незначительно.

Распределение безразмерного касательного напряжения $\bar{\tau}_w$ определяется выражением. Здесь $\bar{\tau}_w = \sqrt{Re_{\infty}/2\tau_w/\rho V_{\infty}^2}$, где τ_w – касательное напряжение на стенке. В отличие от распределения коэффициента давления положение точки минимального значения существенно зависит от частоты вращения цилиндра. При указанном направлении вращения (рис. 1) положение точки минимального значения касательного напряжения сдвигается в сторону верхней поверхности. Такое поведение распределения касательного напряжения согласуется с результатами, приведенными в [8]. В работе [8] рассматривался стационарный ламинарный пограничный слой на поверхности вращающегося цилиндра и в окрестности критической точки получено выражение для касательного напряжения. В системе координат, принятой в пакете Fluent, выражение для безразмерного касательного напряжения (по работе [8]) примет вид

$$\bar{\tau}_w = |\varphi f_1''(0)/2 \mp 8\theta/f_1''(0)|$$

где значение φ берется в радианах, $f_1''(0)$ – вторая производная функции, определяющей решение Блазиуса [9] для неподвижного цилиндра в ламинарном пограничном слое. Знак + или – определяется соотношением между направлением обхода поверхности цилиндра и направлением вращения (верхней поверхности соответствует знак +). При подстановке численного значения $f_1''(0) = 6,973$

выражение для $\bar{\tau}_w$ принимает форму:

$$\bar{\tau}_w = |3,4865\varphi \mp 1,147\theta|.$$

Заключение. В целом из анализа результатов моделирования обтекания вращающегося цилиндра следует, что реверс эффекта Магнуса имеет место в области чисел Рейнольдса, где происходит перестройка (смена режима) течения. Из сопоставления распределенных поверхностных параметров течения около вращающегося цилиндра вытекает, что возникновение поверхностной интенсивности турбулентности (ламинарно-турбулентный переход) сопровождается изменением распределения давления и касательного напряжения. Более существенное изменение распределения давления имеет место на той части поверхности, которая движется против течения.

Работа выполнена при поддержке гранта по постановлению №220 правительства Российской Федерации по привлечению Ведущих ученых в российские высшие учебные заведения (договор №11.G34.31.0038).

Литература

- [1] Бычков Н. М., Коваленко В. М. Аэродинамические силы на вращающемся гладком цилиндре в поперечном потоке // Изв. СО АН СССР. Серия: Техн. науки. 1980. – Т. 8, Вып. 2. – С. 125–135.
- [2] Tani I. Low-speed flows involving bubble separations // Progress in Aeronautical Science. 1964. – Vol. 5. – P. 70–103.
- [3] Мхитарян А. М. Аэродинамика. – М.: Машиностроение, 1976. – 213 с.
- [4] Clive A. J. Fletcher. Negative Magnus Forces in the Critical Reynolds Number Regime // J. AIRCRAFT. 1972. – Vol. 9. – N. 12. – P. 826–834.
- [5] Roshko A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number // California Institute of Technology. 1960. – P. 345–356.
- [6] Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh, Chaoqun Liu. Computational fluid dynamics. A practical approach. – USA, Oxford: Elsevier, 2008. – 455 p.
- [7] Батраков А. С., Кусюмов А. Н., Нурмухаметов Р. Р., Романова Е. В. Баракос Д. Моделирование обтекания неподвижного кругового цилиндра с учетом ламинарно-турбулентного перехода // Изв. Вузов. Авиационная техника. 2012. – № 3. В печати.
- [8] Кусюмов А. Н. Расчет поперечного обтекания вращающегося цилиндра в окрестности критической точки // Теор. основы химической технологии. 2003. – Т. 37. – № 3. – С. 1–5.
- [9] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 731 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ АГРЕГАЦИИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Батюков А. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: batsun@gmail.com

Batyukov A. M. The investigation of a model of diffusion-limited aggregation (DLA) processes. For processes of diffusion-limited aggregation (DLA) a simulation method based on Brownian motion of particles on a plane lattice has been considered. The basic method tracing the walking of sequentially dropped particles has been realized. An optimized method using a priori estimation of a particle sticking coefficient has been designed and implemented. Results of numerical experiments are given.

В работе рассмотрен метод моделирования процессов агрегации, ограниченной диффузией (DLA), основанный на броуновском движении частиц по узлам решетки на плоскости. Реализован базовый метод, отслеживающий блуждание по решетке последовательно бросаемых частиц. Разработана и реализована оптимизация этого метода, основанная на априорной оценке коэффициента прилипания брошенной на плоскость частицы к агрегации. Приведены результаты численных экспериментов.

Введение. Процесс агрегации, ограниченной диффузией – одна из математических моделей, которая используется для исследования таких процессов, как рост кристаллов, формирование снежинок или образование электрических разрядов в различных средах [1]. Для рассказа об этом процессе необходимо ввести ряд понятий. Диффузией называют случайное броуновское движение частиц. Процесс блуждания происходит до тех пор, пока частица не становится частью некоторой группы частиц, называемой агрегатом. Весь процесс в целом и называют агрегацией, ограниченной диффузией [2].

Постановка задачи. Для компьютерного моделирования таких процессов используют разные модели. Самый простой метод предполагает, что блуждание частиц происходит по ячейкам дискретной прямоугольной сетки. Будем также считать, что частицы присоединяются к агрегату последовательно, одна за другой. Эти предположения для описания процесса агрегации, ограниченной диффузией, ввёл Э. Пинский в статье [3]. Нашей задачей является оптимизация этого метода для ускорения вычислений по построению агрегата.

Описание базового метода. Процесс построения агрегата начинается с единственной частицы, входящей в агрегат и располагающейся в начале координат прямоугольной сетки. Случайным образом вычисляется первоначальное положение другой частицы. Вторая частица начинает блуждание по линиям сетки, при этом на каждом шаге может переместиться либо на 1 вправо, на 1 влево, на 1 вверх на 1 вниз относительно текущего положения на координатной сетке. Блуждание продолжается до тех пор, пока она не окажется соседней с какой-либо из частиц, входящих в агрегат. В соответствии с неким коэффициентом, называемым коэффициентом прилипания, определяется, остановится

ли частица или продолжит свое блуждание по сетке. Остановившаяся частица присоединяется ребром к агрегату и начиная с этого момента входит в него. После этого происходит бросание новой частицы, которая точно также блуждает по линиям сетки до тех пор, пока не присоединится к агрегату. Описанный процесс повторяется многократно.

Описанный выше алгоритм является базовым. Как правило, при его реализации вводят некоторые дополнительные ограничения. Так, если точка при блуждании отходит слишком далеко от агрегата, ее отбрасывают. Кроме того, выделяют некоторое число N , и если после N шагов блуждания по сетке точка не присоединилась к агрегату, ее также отбрасывают.

Возможна реализация алгоритма с различными значениями коэффициента прилипания, для простоты мы рассматриваем случай, когда при приближении точки к агрегату она со присоединяется к нему в вероятность 1.

Предлагаемая оптимизация. Основными недостатками базового метода является недетерминированность времени вычисления и большая вычислительная сложность. Основная проблема в том, что каждая частица перед тем как присоединиться к агрегату потенциально может блуждать очень долго, и каждый шаг увеличивает время вычисления. Раз число шагов не ограничено (или ограничено достаточно большой константой), на определение того каким образом частица присоединится к агрегату уходит чрезмерно большое количество времени.

Предположим, что при бросании частицы на координатную сетку ее координаты оказались равны $(x + a, y + b)$. Сделаем вероятностную оценку того, что данная частица присоединится к точке агрегата с координатами (x, y) . Если при блуждании частицы по плоскости она сделала n шагов в сторону от точки (x, y) по оси абсцисс, то чтобы попасть в (x, y) точка должна сделать $(n + a)$ шагов в сторону точки (x, y) . Соответственно, если при блуждании частица сделала m шагов в сторону от точки (x, y) по оси ординат, то она должна сделать $(m + b)$ шагов в сторону точки (x, y) . На каждом шаге блуждания сторона следующего перехода определяется равновероятно между четырьмя вариантами. Это позволяет написать следующую оценку того, что через $(2n + a + 2m + b)$ шагов координатами блуждающей точки окажутся (x, y) :

$$\frac{1}{4^n 4^{n+a} 4^m 4^{m+b}}. \quad (1)$$

Число шагов, через которые блуждающая точка попадет в (x, y) определяется значениями n и m . Так как нам неважно число шагов при оценке, необходимо просуммировать значения этих оценок по всем m и n от 0 до бесконечности. Просуммируем получившийся ряд.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n 4^{n+a} 4^m 4^{m+b}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2n+2m+a+b}} = \\ &= \frac{1}{4^{a+b}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^{n+m}} = \frac{1}{4^{a+b}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{16^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} = \left(\frac{16}{15}\right)^2 \frac{1}{4^{a+b}}. \end{aligned} \quad (2)$$

В результате получили некоторую оценку того, что случайным образом

брошенная на плоскость точка присоединится к конкретной точке агрегата.

$$P(a, b) \sim \frac{1}{4^{a+b}}. \quad (3)$$

Замечу, что полученная оценка зависит только от первоначального взаиморасположения брошенной точки и точки агрегата (параметры a и b – расстояния между точками по соответствующим осям координат). Это позволяет для брошенной на плоскость частицы априори вычислить оценку присоединения к каждой из граничных точек агрегата и на основе соотношения между этими величинами определить к какой именно точке агрегата присоединить конкретную новую точку.

Особо стоит отметить, что для каждого бросания число вычислений, необходимых для определения к какой точке агрегата присоединится новая точка, строго детерминировано. Кроме того, ни одна из брошенных точек не исключается из рассмотрения, как в описанных выше дополнительных ограничениях к базовому алгоритму.

Приведенная вероятностная оценка имеет и свои недостатки. Так в вычислении этой оценки, вероятно, недостаточное влияние на оценку оказывает расположение других точек агрегата, которые в случае прямой симуляции блуждания могут оказывать влияние на траекторию блуждания. Кроме того, в оценке учтены также и те траектории, в которых точка при блуждании по решетке попадает в точку агрегата неоднократно. Но вероятностный характер блужданий делает возможным описанный подход, что показывают результаты численных экспериментов.

Численный эксперимент. В ходе исследований были реализованы следующие алгоритмы:

- 1) базовый алгоритм с дополнительным ограничением отсекаания слишком удалившихся от агрегата в результате блуждания точек;
- 2) базовый алгоритм с дополнительным ограничением отсекаания точек, в результате 500 шагов блуждания так и не присоединившихся к агрегату;
- 3) оптимизированный алгоритм, основанный на вычислениях по описанной выше оценке.

Для каждого из алгоритмов была проведена серия испытаний, ниже представлено по одному из полученных результатов для каждого из алгоритмов. В базовых алгоритмах на плоскость бросали по 10000 точек, в оптимизированном – 2000 и 10000. Это сделано для того, чтобы оценить среднее время построения сопоставимых по числу точек агрегатов, а также соотношение числа попавших в агрегат точек к числу бросаемых.

Реализация 1. Число бросаний – 10000, время расчетов порядка 40 часов, в конечном агрегате 2034 точки. Результат изображен на Рис. 1.

Реализация 2. Число бросаний – 10000, время расчетов порядка 20 часов, в конечном агрегате 1357 точек. Результат изображен на Рис. 2.

Реализация 3. Число бросаний – 2000, время расчетов порядка 4 минут, в конечном агрегате 2001 точка. Результат изображен на Рис. 3.

Число бросаний – 10000, время расчетов порядка 30 минут, в конечном агрегате 10001 точка. Результат изображен на Рис. 4.

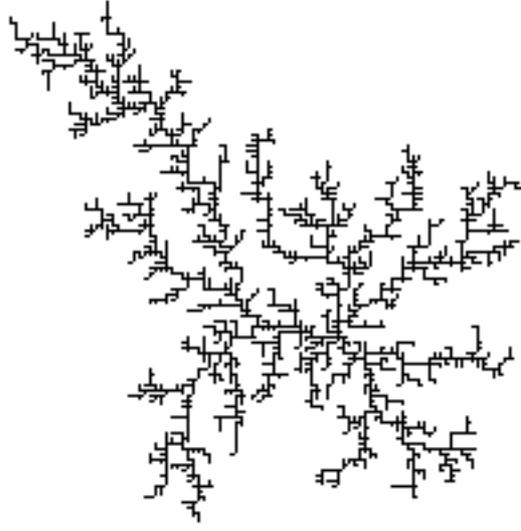


Рис. 1: Базовый алгоритм, эксперимент 1.

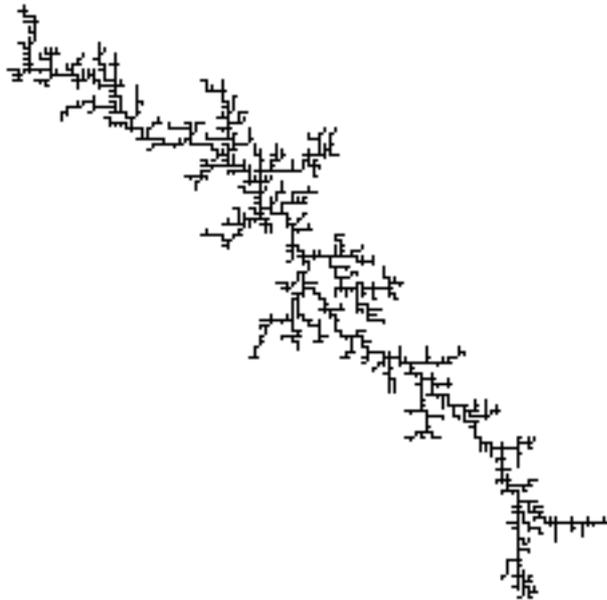


Рис. 2: Базовый алгоритм, эксперимент 2.

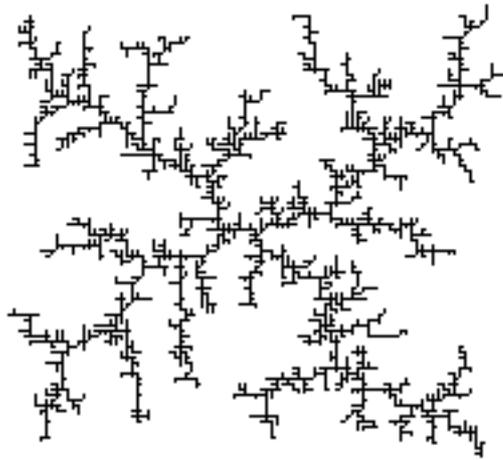


Рис. 3: Оптимизированный алгоритм, эксперимент 1.

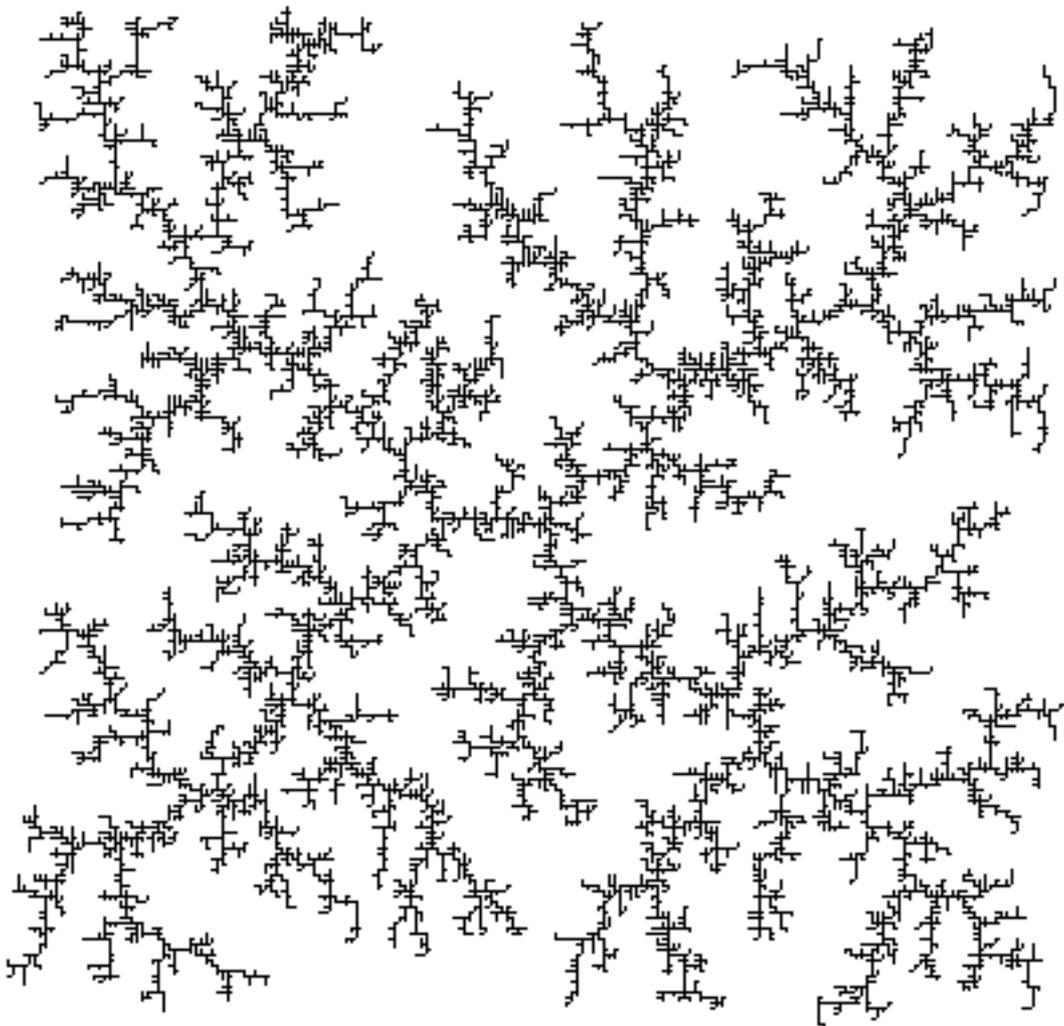


Рис. 4: Оптимизированный алгоритм, эксперимент 2.

Как видно из приведенных цифр при использовании алгоритма с оптимизацией время моделирования агрегата сопоставимой мощности снижается многократно. При этом все бросаемые точки входят в агрегат.

Заключение. Разработан и реализован оптимизированный алгоритм моделирования процесса агрегации, ограниченной диффузией. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность данной оптимизации.

Литература

- [1] Kassner K. Pattern Formation in Diffusion-Limited Crystal Growth. – World Scientific. Singapore, 1996.
- [2] Witten T. A., Sander L. M. Diffusion-limited aggregation. – The American Physical Society. USA, 1982.
- [3] Pinski A. Diffusion-Limited Aggregation. 1981.

УДК 681.3.067

ВНЕДРЕНИЕ БРС В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС ВУЗА, И АДАПТАЦИЯ СРЕДСТВ ЕГО АВТОМАТИЗАЦИИ

Журавлев А. Е.

Государственный университет морского и речного
флота им. адмирала С. О. Макарова

Санкт-Петербург

e-mail: azhuravlev@bmail.ru

Zhuravlev A. E. BRS implementation in the university educational process and systems adaptation. The issues and problems associated with the implementation of the Bologna Process provisions in the university educational process from the view of various departments supporting information systems adaptation.

Рассматриваются вопросы и проблемы, связанные с внедрением положений Болонского процесса в учебный процесс вуза с точки зрения адаптации средств автоматизации, поддерживающих работу различных подразделений.

В связи с вводом политики снижения числа аудиторных занятий (лекций, семинаров и практик) и увеличения количества времени отведенного на самостоятельную работу студентов, а также фактом присоединения Российской Федерации к Болонскому процессу, в организации работы высших учебных заведений возникает острая необходимость изменения системы оперативного контроля усвоения материала по большинству преподаваемых дисциплин. Форма контроля знаний по ним в виде одного экзамена, зачета или выполнения курсового проекта (работы) становится недостаточной и, как следствие, требуется разработка и внедрение объективной и наглядной системы учета и контроля знаний и умений студентов, основанной на новых принципах и современных информационных технологиях.

В соответствии с основными положениями Болонского процесса и, учитывая недостатки существующей системы контроля знаний студентов, была разработана методика использования балльно-рейтинговой системы (БРС) применительно к текущему учебному процессу вуза.

С учетом современного состояния развития информационных технологий изменились и требования к вопросам построения автоматизированных информационно-справочных систем (АИСС) сопровождения образовательной деятельности вуза, основным из которых является использование веб-технологий. Как правило, ранее созданные системы такими свойствами не обладают. Таким образом, требуется разработка новых АИСС или доработка существующих, если платформа, на которой они основаны, является в достаточной степени модульной.

В связи с тем, что построенные на платформе 1С:Предприятие 8 АИСС вуза, позволяют расширять собственный функционал, логичным видится решение о разработке подсистемы “БРС” в рамках существующей конфигурации АИСС деканата.

Основные положения вводимой подсистемы:

1. Глубокая интеграция с существующими компонентами системы.
2. Реализация основных аспектов балльно-рейтинговой системы оценивания студентов, разработанных в соответствии с Методическими рекомендациями Минобрнауки РФ.
3. Реализация средств автоматизации оценки качества знаний, а также средств их гибкой настройки под требования конкретного преподавателя.
4. Внедрение механизма оперативного отслеживания результатов процесса обучения третьими лицами (например, родителями студентов).

Основными участниками балльно-рейтинговой системы являются: студенты, преподаватели и заведующие кафедрами, деканаты факультетов, учебно-методическое управление, проректор по учебной работе и другие структурные подразделения университета. Основные автоматизируемые функции участников балльно-рейтинговой системы и их реализация средствами подсистемы АИСС “БРС”.

Функции участников процесса балльно-рейтинговой системы реализуются соответствующими компонентами АИСС, а именно:

- набор справочников данных из существующей АИСС деканата;
- комплект документов для формирования планов и ввода данных о процессе обучения;
- пакет бизнес-процессов и соответствующих им задач, реализующих механизм БРС для каждого из участников процесса, а также взаимодействие между участниками;
- объекты типа “Веб-Сервис” и “Пакет ХДТО” для реализации механизма оперативного отслеживания результатов процесса обучения третьими лицами.

Для всех видов аттестации предусмотрены как новые формы аттестационных ведомостей с указанием количества баллов, набранных студентом во время аттестации (с возможностью автоматического перевода в классическую систему оценивания), так и устаревшие формы с возможностью оценки знаний студента по 5-ти балльной системе оценивания. Поддержку данному функционалу подсистемы “БРС” для АИСС вуза осуществляют механизмы автоматического (автоматизированного) двунаправленного конвертора баллов.

Если количество пользователей подсистемы “Деканат” АИСС ВУЗа незначительно и включает в себя лишь работников деканата, то количество пользователей подсистемы “БРС” существенно больше и включает в себя дополнительно руководителей учебных подразделений и преподавателей, работающих со студентами. Существенно возрастает и объем хранимой информации. Пользователи БРС имеют различный уровень подготовки и различное программно-аппаратное обеспечение работы с АИСС, что обуславливает необходимость внедрения простого и универсального механизма работы пользователей и удобного интерфейса взаимодействия. Учитывая различный уровень подготовки пользователей рассматриваемой подсистемы, в качестве механизма взаимодействия компонентов БРС предлагается пакет бизнес-процессов:

- планирование учебного процесса;
- планирование процесса изучения дисциплины;
- текущее изучение дисциплины;
- текущий контроль успеваемости;
- завершение изучения дисциплины.

Указанный комплекс бизнес-процессов позволяет автоматизировать цепочки связанных операций участников учебного процесса (деканатов, кафедр, лекторов, практиков) в контексте подразделений университета, а также оперативно получать различные информационные сводки.

С введением механизма балльно-рейтинговой системы резко меняется организация процесса обучения студентов, что влечет за собой возможные ошибки работы во время адаптации студентов и преподавателей к новым условиям реализации учебного процесса. Поэтому, на начальном этапе становления системы возможно нарушение регламента учебного процесса. Во избежание технологических ошибок становится удобным и эффективным использование механизма бизнес-процессов, формулирующих и реализующих правила выполнения отдельных операций и их взаимосвязь, что позволяет значительно сократить или даже полностью исключить ошибки в ходе выполнения бизнес-процесса, связанные с человеческим фактором. Работа с простым списком заданий позволяет участникам образовательного процесса сконцентрироваться на выполнении своих непосредственных обязанностей.

Литература

- [1] Лебедева М. М. Болонский процесс: проблемы и перспективы. – М.: Оргсервис-2000, – 2006.

- [2] Эркенова Ф. М. Национальные проекты: №10 (65) 2011. – М., – 2011.
- [3] Журавлев А. Е. и др. АИС учета и мониторинга учебного процесса в ВУ-Зе в условиях балльно-рейтинговой системы (БРС) // “Новые информационные технологии в образовании”. Сборник научных трудов XII международной научно-практической конференции, часть 2. – М.: ООО “ИС-Публишинг”, 2012. – 423 с.

УДК 534.014

НЕАВТОНОМНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА

Зайцев М. В., Метрикин В. С.
ННГУ им. Н. И. Лобачевского
Н. Новгород

Zaitsev M. V., Metrikin V. S.. Non-autonomous dynamical systems with hereditary dry friction. In this paper dynamics of a simple system with hereditary-type dry friction is examined. The bifurcation diagrams presented here reveal the basic changes of periodic and stochastic modes of motion depending on the system parameters .

В этой работе рассмотрена динамика простой системы с характеристикой сухого трения наследственного типа. Приводятся основные перестройки периодических и стохастических режимов движения в зависимости от параметров системы, используя бифуркационные диаграммы.

Опубликование в [1] А. Ю. Ишлинским и И. В. Крагельским гипотезы о том, что коэффициент трения относительного покоя при движении двух трущихся тел не является постоянной величиной, а зависит от времени их совместного движения с одинаковыми скоростями, привлекло внимание учёных, правда с большой временной задержкой, занимающихся исследованием систем с трением (см. [2–4] и приведённую в них литературу). В этих работах на примере простейших нелинейных автономных динамических систем приведён ряд новых результатов. Было показано, что, по сравнению с известными исследованиями систем с постоянным КТОП, в системах с переменным КТОП существуют сколь угодно сложные периодические и стохастические движения. Однако до сих пор нет достаточно полных исследований даже таких автономных систем.

Физическая система, послужившая основой для составления математической модели представляет собой массу m , находящуюся на движущейся с изменяющейся по периодическому закону скоростью $V(t)$ шероховатой ленте. Масса закреплена пружиной жёсткости k к неподвижной опоре рис. 1а. На массу действует сила сухого трения. При движении двух шероховатых тел, находящихся в контакте, приходится учитывать два вида сил трения: сила трения скольжения и сила трения относительного покоя. В работе предполагается, что коэффициент трения относительного покоя, согласно гипотезе А. Ю. Ишлинского и И. В. Крагельского [1], не является постоянной величиной, а есть монотонно возрастающая функция времени t_k длительного контакта (совпадение

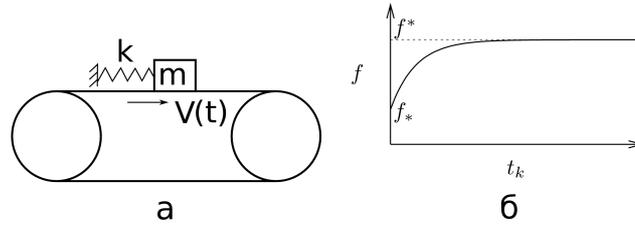


Рис. 1: Физическая система

скоростей массы и ленты) этих тел рис. 1б. В качестве математической модели сил трения в работе выбрано трение Кулона–Амонтона.

Математическую модель рассматриваемой системы можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -kx - f_*P \operatorname{sign}(\dot{x} - V(t)), \quad \dot{x} \neq V(t), \quad (1)$$

$$|kx + m\dot{V}(t)| \leq f(t_k)P, \quad \dot{x} = V(t), \quad (2)$$

где первое уравнение описывает закон движения тела с учётом коэффициента трения скольжения f_* и со скоростью отличной от скорости ленты, а второе неравенство устанавливает соотношение сил, при выполнении которого происходит движение тела со скоростью, равной скорости ленты с учётом формы КТОП — $f(t_k)$ (рис.1б). Отметим, что при $V(t) = \operatorname{const}$ уравнение (1) совпадает с соответствующим уравнением работы [1].

После введения безразмерных времени $\tau = t\omega_0$, переменной $\xi = x \frac{k}{f_*P}$ и параметров $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\theta(\tau) = V(t) \frac{\sqrt{km}}{f_*P}$, математическая модель системы примет вид:

$$\ddot{\xi} + \xi = -\operatorname{sign}(\dot{\xi} - \theta(\tau)), \quad \dot{\xi} \neq \theta(\tau), \quad (3)$$

$$|\xi + \dot{\theta}(\tau)| \leq 1 + \epsilon(\tau_k), \quad \dot{\xi} = \theta(\tau), \quad (4)$$

где $\epsilon(\tau_k) = \frac{f(\tau_k) - f_*}{f_*}$ — безразмерная характеристика КТОП, а $f(\tau_k)$ — зависимость КТОП от времени длительного контакта тел.

Состоянием системы является тройка $\{\xi, \dot{\xi}, \tau\}$, а фазовое пространство соответственно трехмерное. Оно поверхностью $\Pi(\xi = \theta)$ разделено на два полупространства $\Phi_1(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$ и $\Phi_2(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$, поведение фазовых траекторий в которых описывается уравнением (3). Можно показать, что на поверхности Π существует пластинка скользящих движений [5] Π_c , ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2 .

$$\Gamma_i : \begin{cases} \xi = (-1)^{i+1} - \dot{\theta}(\tau), \\ \dot{\xi} = \theta(\tau), \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

При попадании изображающей точки на пластинку Π_c её движение будет изменяться по закону

$$\xi(\tau) = \int_{x_0}^x \theta(\eta) d\eta + \xi_p, \quad (6)$$

где $\{\xi_p, \tau_p\} \in \Pi_c$, $\tau \geq \tau_p$.

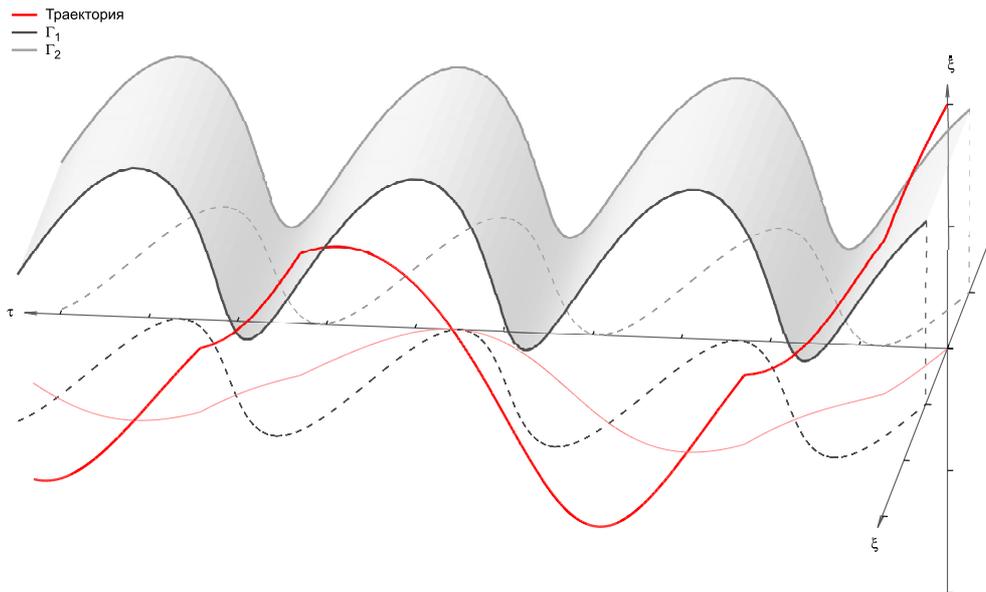


Рис. 2: Пример траектории в фазовом пространстве.

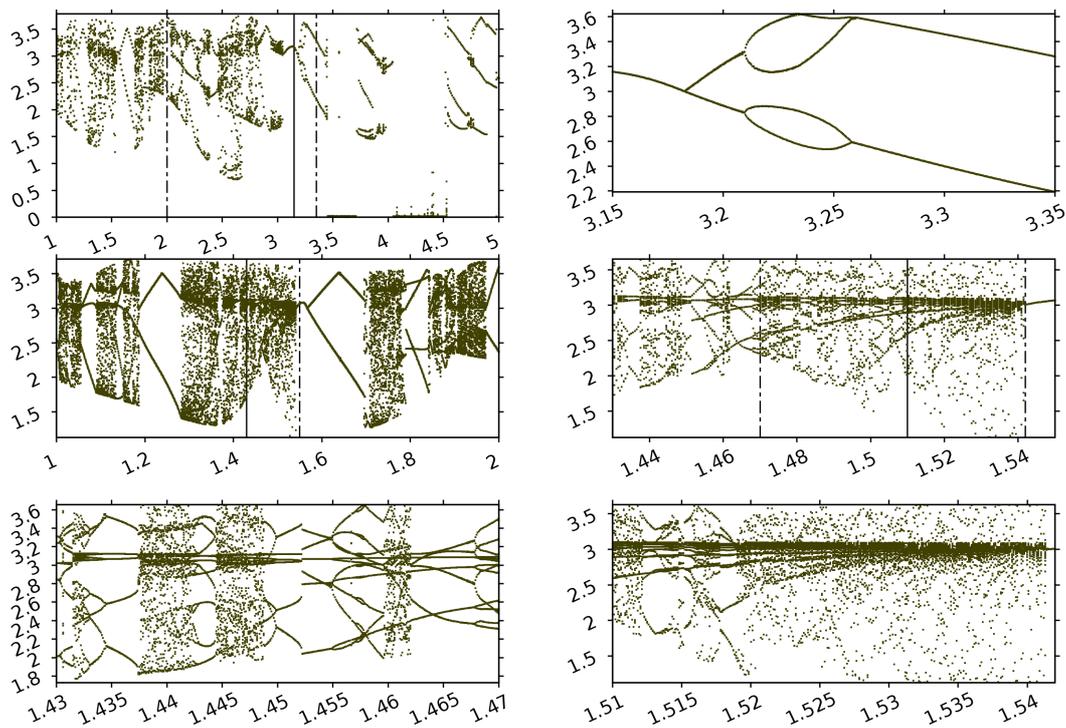


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма для $\theta(\tau) = 0.1 \cos(\Omega\tau) + 1.41$ по Ω . По горизонтали отложены значения Ω , по вертикали — τ_k .

Изображающая точка в большинстве случаев попадает на пластинку скользящих движений и движется по ней согласно уравнению (6) вплоть до момента τ_{k+1} , определяемого из уравнения $\xi_p(\tau_k) + \theta(\tau_{k+1}) = 1 + \epsilon(\tau_{k+1})$. Поэтому динамику системы можно исследовать с помощью изучения свойств чис-

ловой последовательности, элементы которой равны временам τ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$. Пример бифуркационной диаграммы, построенной на основе такой последовательности показан на рис. 3. Для построения бифуркационных диаграмм для каждого значения выбранного параметра была численно найдена своя траектория. Начальные условия и пределы расчёта (по времени и по числу интервалов совместного движения) для всех рассчитанных траекторий были общими. Из рассчитанных для каждой траектории времён τ_k были выбраны 30 последних и использованы для построения графика.

При построении диаграмм был принят следующие виды функциональной зависимости безразмерных скорости ленты и КТОП:

$$\theta(\tau) = 0.1 \cos(\Omega\tau) + 1.41, \quad (7)$$

$$\epsilon(\tau_k) = \begin{cases} 3, & \tau_k \geq 3, \\ \tau_k, & \tau_k < 3. \end{cases} \quad (8)$$

Литература

- [1] Ишлинский А. Ю., Крагельский И. В. О скачках при трении // ЖТФ. 1944. Е.14. Вып. 4/5. – С. 276–282.
- [2] Кащневский Л. Я. Стохастические автоколебания при сухом трении // Инж.-физ-журн. 1984. Т.47. №1. – С. 141–147.
- [3] Ветюков М. М., Доброславский С. В., Нагаев Р. Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №1. – С. 23–25.
- [4] Метрикин В. С., Нагаев Р. Ф., Степанова В. В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа // ПММ, 1966. Т.60. Вып.5. – С. 859–864.
- [5] Фейгин М. И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. – М.: Наука, 1994. – 285 с.

УДК 004.3

О КОМПЛЕКСЕ СИСТЕМ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

Казанцев М. А.

ОАО «Научно производственное предприятие «Радиосвязь»»

Красноярск

e-mail: mkaz@mail.ru

Kazantsev M. A. About the complex of system of planning of production for the industrial enterprise. In the present paper consider the complex of system of planning of production for the industrial enterprize.

В работе рассмотрено применение комплекса систем планирования производства на примере реализации системы диспетчирования производства ОАО «НПП «Радиосвязь»».

Сегодня как никогда актуальной задачей современных предприятий является создание и применение систем планирования производства. С точки зрения точного планирования работ на предприятиях, интерес представляют системы классов MES (Manufacturing Execution Systems) [1] и APS (Advanced Planning & Scheduling Systems) [2]. Остановимся подробнее на последней. Системы такого класса решают задачи синхронизации, координируют, анализируют и оптимизируют выпуск продукции в рамках производства. Частота перепланирования в APS системах обусловлена частотой появления новых заказов (обратная связь в режиме реального времени для APS считается избыточной). В MES системах такая операция происходит гораздо чаще (для задачи значительно меньшей размерности, корректируя планы лишь отдельных цехов), поскольку происходит реакция на любое изменение хода технологического процесса. Для мелкосерийного производства постоянные коррекции планов являются типичным явлением. Горизонт планирования в APS системах определяется предельно просто, исходя из основной задачи, функционала системы, которым является управление цепочками поставок. Длительность горизонта планирования в APS системах - это разница во времени между моментами выдачи наиболее дальних заказов из всего портфеля заказов предприятия и текущей датой, так как при появлении нового заказа и соответствующем пересчете всего расписания, надо определить не только сроки его изготовления, но и возможность ненарушения сроков выполнения уже запущенных заказов.

Разработка и внедрение комплекса систем планирования производства, разработанного на ОАО «НПП «Радиосвязь»» позволяет оптимизировать основные процессы управления производством за счет:

- сокращения времени прохождения информации между подразделениями;
- автоматизации процесса диспетчирования производства;
- оперативность информации;
- единое информационное пространство.

Планирование начинается с укрупненного плана выпуска продукции и детализируется до плана цеха и ниже до плана бригады цеха. В соответствии со сформированными планами ведется учет исполнения изделий на основе информации, введенной в систему пользователями. Комплекс систем обеспечивает коллективную работу в реальном времени большого количества пользователей разных подразделений. Это обеспечивает быстрое принятие решений на разных уровнях руководства. На производственном уровне комплекс позволяет оценить этап производства изделия. Процент готовности с возможностью аналитики сроков полного закрытия заказа. На межцеховом уровне (для планово-диспетчерского отдела) – в комплексе обеспечивается планирование и учет изготовления позиций собственного изготовления, а так же перемещения деталей между производственными цехами предприятия. На внутрицеховом уровне (для начальников и мастеров цехов) обеспечивается пооперационный учет изготовления позиций, с информацией в какой стадии находится, какой рабочий делает.

Литература

- [1] Казанцев М. А. Об автоматизированной системе управления предприятием на примере исполнительной системы // Материалы XI молодежной школы-конференции “Лобачевские чтения”. – Казань, 2012. – С. 79–81.
- [2] Загидуллин Р. Р. Управление машиностроительным производством с помощью систем MES, APS, ERP. – Старый Оскол: ТНТ, 2011. – 372 с. ISBN 978-5-94178-272-7.

УДК 004.94

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕСООСНЫХ КАТУШЕК ИНДУКТИВНОСТИ

Кудрин Б. К.

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: bogdan.kudrin@gmail.com

Kudrin B. K. 3D computer modeling of electromagnetic field of several out-of-line coils. An algorithm of the calculation of electromagnetic field near several inductivity coils in 3D is described. The algorithm is implemented in Java, visualization is performed using the ParaView package. Optimization problems both calculation and rendering time are discussed. The results of numerical experiments are given.

В работе описан алгоритм расчета электромагнитного поля вблизи нескольких катушек индуктивности в трёхмерном пространстве. Алгоритм реализован на Java с использованием пакета ParaView для визуализации. Обсуждается оптимизация времени расчета и времени визуализации. Приведены результаты численных экспериментов.

1. Введение. Вычисление пространственной конфигурации постоянного или низкочастотного магнитного поля и его визуализация представляют собой сложную задачу для компьютерного исследования. В большинстве случаев используется принцип суперпозиции и общее магнитное поле представляется в виде суммы магнитных полей, генерируемых отдельными контурами катушки. В работе описываются результаты математического и компьютерного исследования пространственной конфигурации магнитного поля, генерируемого системой нескольких цилиндрических катушек — одной из наиболее часто встречающихся конструкций генерации низкочастотного магнитного поля.

Визуализация электромагнитного находит применение в широком спектре областей, в том числе и в магнитотерапии. По изображению магнитного поля для разных расположений катушек на основании экспериментов врач делает заключение о том, какая конфигурация приводит к наиболее оптимальному режиму для пациента и минимальному количеству физиотерапевтических процедур.

2. Математическая модель. На рис. 1 показана схема, используемая при исследовании пространственной конфигурации магнитного поля, генерируемого цилиндрической катушкой [1].

Введены следующие обозначения:

i – величина тока в рассматриваемом единичном контуре;

R – радиус контура;

O – центр контура и начало цилиндрической системы координат;

M – произвольная точка, в которой вычисляется магнитная индукция \vec{B}_M ;

m – проекция точки M на плоскость контура;

O_1 – центр окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости контура, и проходящей через точку M ;

ρ – радиус окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости контура, и проходящей через точку M ;

dl – элементарный участок контура;

2α – угол между двумя симметрично расположенными элементарными участками контура;

r – расстояние от концов элементарных участков контура до точки M ;

\vec{B}_z, \vec{B}_ρ – компоненты магнитной индукции в точке M по соответствующим осям в цилиндрической координатной системе.

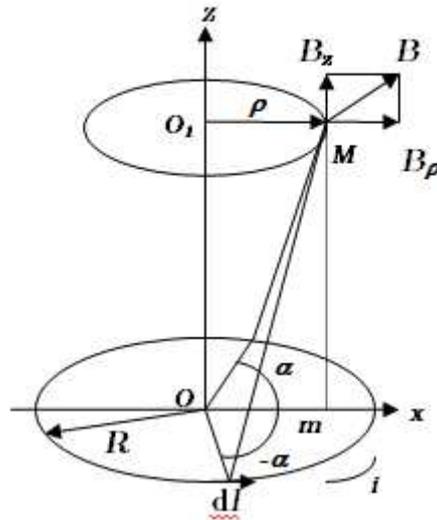


Рис. 1.

В цилиндрической системе координат получаются следующие формулы для компонент вектора магнитной индукции в точке M [1, 2]:

$$\vec{B}_\rho = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{z}{\rho \sqrt{(R+\rho)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} L - K \right], \quad (1)$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{\rho \sqrt{(R+\rho)^2 + z^2}} \left[\frac{R^2 - \rho^2 - z^2}{(R-\rho)^2 + z^2} L + K \right]. \quad (2)$$

K и L представляют собой полные эллиптические интегралы первого и второго рода как функции величины k , где $k^2 = \frac{4\rho R}{(R+\rho)^2 + z^2}$. Значения K и L находятся по таблицам [3].

При вычислении электромагнитного поля нескольких катушек само- и взаимная индукция не учитывается.

3. Вычисления в трехмерном пространстве. Наиболее интересной задачей является вычисление электромагнитного поля нескольких произвольно расположенных катушек.

Катушки позиционируются явным заданием своего начала координат и явным заданием вектора оси катушки. В момент создания экземпляра катушки выбираются 2 взаимно ортогональных вектора, ортогональных также и оси катушки. Вместе с осью катушки они образуют базис локальной системы координат катушки. Данные 2 вектора выбираются произвольно (необходимо только учесть указанную ортогональность), так как в формулах (1) и (2) вычисления производятся в цилиндрической системе координат.

Каждый экземпляр катушки хранит прямую и обратную трансформационные матрицы, позволяющие переводить координаты точек и векторов из глобальной системы координат в локальную и обратно.

Алгоритм для вычисления поля состоит в следующем:

1. Производится перевод точки из глобальной системы координат в локальную координатную систему катушки (глобальная – локальная декартова).

2. Вычисляются координаты точки в цилиндрической системе координат катушки (локальная декартова – локальная цилиндрическая).

3. Вычисляется значение вектора электромагнитной индукции в точке как суперпозиция значений для каждого контура катушки (расчет ведется по формулам (1) и (2)).

4. Производится перевод вектора электромагнитной индукции в локальную декартову систему координат катушки (локальная цилиндрическая – локальная декартова).

5. Производится перевод вектора электромагнитной индукции в глобальную систему координат (локальная декартова – глобальная).

6. Пункты 1–5 повторяются для каждой катушки и считается суперпозиция значений электромагнитной индукции.

Алгоритм реализован на языке программирования Java с использованием библиотеки Java3D [4].

4. Визуализация. После окончания расчета результаты сохраняются в файл формата .vtk для последующей обработки в программе ParaView [5].

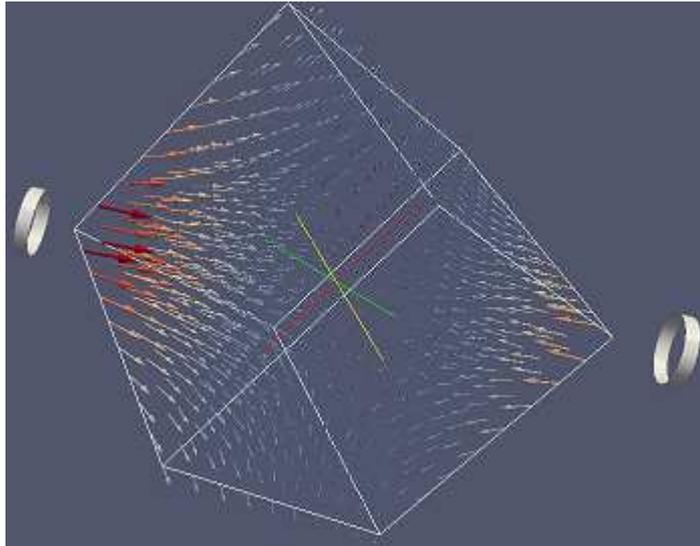


Рис. 2. Пример визуализации результата численного эксперимента.

5. Оптимизация. Так как основные вычисления ведутся в цилиндрической системе координат, то для оптимизации времени вычисления предлагается предварительно сохранить значения поля (значения функции от параметров ρ и z) в массив и использовать в дальнейшем линейно интерполированные значения, что позволит существенно ускорить время расчета. Для ускорения времени применения сложных фильтров в ParaView предлагается использовать ресурсы общедоступных кластеров.

Предполагается, что в дальнейшем расчет значений поля будет производиться для динамически позиционируемых катушек, и время вычисления будет иметь очень большое значение.

Литература

- [1] Dimitrov D. Medical Systems for Influence of Electromagnetic Field on the Human Body. – Sophia. 2005.
- [2] Курбатов П., Аринчин С. Численный расчет электромагнитных полей. – М.: Атомиздат, 1984.
- [3] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1964.
- [4] Java 3D official site. URL: <http://java3d.java.net/> (2012. 2 ноября).
- [5] ParaView – Open Source Scientific Visualization. URL: <http://www.paraview.org/> (2012. 30 ноября).

ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО РАСЧЕТА НОРМАТИВОВ ДОПУСТИМЫХ СБРОСОВ ВЕЩЕСТВ

Ляпина А. А., Мамедова Т. Ф.

Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева

Саранск

e-mail: lyapina@e-mordovia.ru

Lyapina A. A., Mamedova T. F. Web application for the automated calculation of norms of permissible discharge of substances. We consider decision process automation environment in the form of web-based applications. We saw testing automated calculation standards allowable discharge of pollutants when discharged into rivers Moksha and Lepeleyka Republic of Mordovia.

Рассматривается разработанное решение в области автоматизации процессов экологии в виде веб-приложения. Приведена апробация автоматизированного расчета нормативов допустимых сбросов загрязняющих веществ при сбросе в реки Мокша и Лепелейка Республики Мордовия.

На современном этапе развития вычислительной техники компьютерное моделирование выходит на уровень одного из важнейших методов решения научно-прикладных задач. Технологический процесс остается в одной весьма важной области – автоматизации процессов. Решения в области автоматизации процессов экологии эффективны.

В связи с этим одной из важнейших задач является автоматизация расчетов в различных областях экологии, в том числе расчета количественных и качественных характеристик сбросов загрязняющих веществ (в соответствии с [1, 2]).

Актуальность разработанной программы заключается в предоставлении качественной и актуальной справочной системы для филиала “Центр лабораторного анализа и технических измерений по Республике Мордовия” Федерального бюджетного учреждения “Центр лабораторного анализа и технических измерений по Приволжскому федеральному округу”.

Разработанная программа предназначена для расчета нормативов допустимых сбросов веществ в водные объекты [4, 5], оформления соответствующей документации, вычисления расчетных коэффициентов, формирования отчетности, осуществления мониторинга и нормирования качества вод поверхностных водных объектов широким кругом пользователей (проектные, контролирующие и лицензирующие организации, предприятия-водопользователи и т. д.).

Программа позволяет выполнять расчеты по результатам данных отбора проб в различных створах водных объектов и в самих сточных водах, выполнять расчеты предельно допустимых сбросов предприятий – водопользователей в водные объекты. Расчет предельно допустимых сбросов производится для отдельных выпусков согласно нормативным документам [3].

Система реализована в виде веб-приложения, которое может быть уста-

новлено во внутренней сети интранет, либо может быть доступной из глобальной сети Интернет.

Приложение клиент-серверное. В роли клиента выступает веб-сайт. Посредством этого сайта можно ввести исходные данные, отредактировать списки допустимых веществ, просмотреть справочную информацию. Введенные данные будут централизованно обработаны на сервере, а результат будет возвращен клиенту в браузер в виде отчета.

Веб-приложение является многоплатформенным.

Система выполнена на платформе Java, с использованием фреймворка Play!. В качестве базы данных может быть использована любая реляционная СУБД (MySQL, PostgreSQL, и т. д.) – что освобождает систему от привязки к конкретной технологии. Веб-приложение может быть запущено на сервере как самостоятельное приложение, либо из под контейнера приложений (Tomcat, Glassfish, и т. д.) [6–9].

Программный комплекс состоит из ряда взаимосвязанных программных модулей, объединенных общим интерфейсом пользователя, и непосредственно баз данных.

Таким образом, программный комплекс представляет собой модульную систему.

В программе реализован ручной ввод исходных данных, выбор данных из справочников; выбор единиц измерения; перевод единиц измерения в интернациональную систему; проверка введенных данных. Проверяются следующие характеристики выпуска: состав и качество сточных вод, расчетный (утвержденный) расход сточных вод, фоновые характеристики показателей качества.

Форма веб-приложения включает (рис. 1): ввод исходных данных; добавление нового вещества в список существующих; вычисление и вывод результатов; возможность “очистки” введенных данных.

Ввод необходимых данных для расчета нормативов допустимых сбросов веществ в водные объекты (рис. 1): хозяйственные стоки после очистки; расход воды; средняя глубина реки; средняя скорость течения; коэффициент шероховатости (шероховатость ложа реки); коэффициент извилистости; расстояние от выпуска до расчетного створа по фарватеру.

Введенные вещества можно просмотреть на форме веб-приложения (рис. 2).

Можно осуществить добавление в список нового вещества (рис. 3):

После осуществления ввода исходных данных для того, чтобы перейти к выводу результатов – отчету нужно нажать на кнопку “рассчитать”.

Вывод результатов расчета (рис. 4):

Переход на стартовую страницу осуществляется через меню “рассчитать”.

Модуль данных содержит сведения о выпусках сточных вод, данных отбора проб, системной и служебной информации. Представляет пользователю средства для корректировки, добавления и удаления данных на различных уровнях (поле данных, запись данных, таблица данных). Содержит развитые средства представления данных. Справочная информация содержит различного рода справочники ограниченного объема (корректировка и дополнение которых производится пользователем по мере надобности) и является информационной основой для различных обобщений данных и производства расчетов.

Общие параметры:

Хозяйственные стоки после очистки (q):

Расход воды (Q):

Средняя глубина реки (R):

Средняя скорость течения (H):

Коэффициент шероховатости ($n_{ш}$):

Коэффициент извилистости (φ):

К-т, завис. от места выпуска сточных вод (χ):

Расстояние от выпуска до расчетного створа по фарватеру (l):

Продолжительность пробега воды от места выпуска сточных вод до расчетного створа (t):

Вещества:

Вещество:

Значение:

Рис. 1: Ввод исходных данных

Справочная информация едина для различных пользовательских баз данных.
Модуль расчета выполняет расчет нормативов допустимых сбросов с применением нормативных требований к контрольному створу водопользования,

Расчет нормативов допустимых сбросов веществ Расчёты Вещества ▾

Список всех веществ

Id	Имя	Спдк	к
1	Первое вещество	1.35	1.75
2	Второе вещество	1.35	1.75
3	Третье вещество	1.35	1.75
33	БПК полн.	3.0	0.23

Рис. 2: Список веществ

Расчет нормативов допустимых сбросов веществ Расчёты Вещества ▾

Новое вещество:

Имя:

Спдк:

к:

Рис. 3: Добавление нового вещества

расчет кратности разбавления (смешения) сточных вод.

Методы расчета разбавления сточных вод базируются на аналитическом, численном решениях уравнения диффузии при тех или иных допущениях и упрощениях. При этом основной упор расчета был сделан на методы расчета, утвержденные или рекомендуемые к применению в водохозяйственной практике на территории Российской Федерации.

В программе реализованы следующие методы расчёта: расчёт начального разбавления по методу Н. Н. Лашева, расчёт основного разбавления по методу В. А. Фролова – И. Д. Родзиллера, расчёт предельной концентрации по методу А. В. Карашева.

Работы по разработке и внедрению “Веб-приложения для автоматизированного расчета нормативов допустимых сбросов веществ” выполнены в рамках договора между ФГБОУ ВПО “МГУ им Н. П. Огарёва” и филиалом “ЦЛАТИ по РМ” ФБУ “ЦЛАТИ по ПФО” от 8 августа 2012 года.

Исходные данные	
Параметр	Значение
Хозяйственные стоки после очистки (q)	0.0061
Расход воды (Q)	0.2
Средняя глубина реки (R)	0.5
Средняя скорость течения (H)	0.18
Коэффициент шероховатости ($n_{ш}$)	0.05
Коэффициент извилистости (ϕ)	1.0
К-т, завис. от места выпуска сточных вод (χ)	1.0
Расстояние от выпуска до расчетного створа по форватеру (l)	0.5
Продолжительность пробега воды от места выпуска сточных вод до расчетного створа (t)	0.034

Результаты	
Параметр	Значение
Вектор показателей(концентраций веществ) (y)	0,3635 г/м ³
Коэффициент Шези (C) <i>Т.к. средняя скорость течения (H) <= 5, то коэффициент Шези определяется по формуле Павловского</i>	15,5459 м/с
Условие для применения метода Фролова-Родзиллера	выполняется ($q/Q = 0,0305$)
Коэффициент турбулентной диффузии (D)	0,002
Коэффициент, учитывающий гидравлические условия в водном объекте (a)	3,7579
Коэффициент смешения (γ)	0,3568
Кратность основного разбавления (n)	12,6976

Предельно допустимая концентрация загрязняющего вещества в воде водоема	
Вещество	Значение
Нитриты	1.0219

Рис. 4: Вывод результатов расчета

Реализован автоматизированный расчет нормативов допустимых сбросов загрязняющих веществ при сбросе в реки Мокша и Лепелейка Республики Мордовия. Программный комплекс внедрен в эксплуатацию.

Литература

- [1] Федеральный закон № 7 от 10 января 2002 г. “Об охране окружающей среды”.
- [2] Федеральный закон № 374 от 3 апреля 2006 г. “Водный кодекс Российской Федерации”.
- [3] Приказ Министерства природных ресурсов Российской Федерации от 17 декабря 2007 г. №333 “Об утверждении методики разработки нормативов допустимых сбросов веществ и микроорганизмов в водные объекты для водопользователей”.

- [4] Приказ Федерального Агентства по рыболовству от 18 января 2010 года № 20 “Об утверждении нормативов качества вод водных объектов рыбохозяйственного значения, в том числе нормативов предельно допустимых концентраций вредных веществ в водах водных объектов рыбохозяйственного значения”.
- [5] Лашев Н. Н. “Расчеты выпусков сточных вод”. – М.: Стройиздат, 1977.
- [6] Хорстманн К. С., Корнелл Г. “Библиотека профессионала. Java 2. Том 2. Тонкости программирования”. – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2004. – 1120 с.
- [7] Холл М. “Сервлеты и JavaServer Pages”. – СПб.: Питер, 2002. – 496 с.
- [8] Гери Д. М. “JavaServer Pages”. – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2002. – 464 с.
- [9] Эккель Б. “Философия Java”. – СПб.: Питер, – 2008. – 640 с.

УДК 534.014

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ С УДАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ С КРИВОШИПНО-ШАТУННЫМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ

Метрикин В. С., Никифорова И. В.
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород
e-mail: tsii@list.ru

Metrikin V. S., Nikiforova I. V. The mathematical modeling of the dynamics of the system with shock interactions a crank vibration exciter. In this paper results of analytical and numerical investigations are presented of the dynamics of a crank mechanism taking into account the inertia of the piston-striker. A detailed studies accomplished of the effect of the inertia of the piston-striker. This is done by means of analysis of the bifurcation diagrams and stability of the periodic motions. It is shown that the larger mass of the piston-striker stabilises the periodic motions of the system.

Приведены результаты численно-аналитического исследования динамики виброударного механизма с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний и с учетом массы поршней. Представлены бифуркационные диаграммы и области устойчивости периодических режимов движения в пространстве параметров механизма. Проведен сравнительный анализ влияния масс поршней-ударников на динамику механизма.

Уравнения движения. Уравнения движения рассматриваемого в работе класса механизмов [1] можно представить в виде:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \mu\lambda_1 \cos \tau - \mu\gamma\lambda_2 \cos(\tau - \phi) + p = 0, \quad (x > f(\tau)), \quad (1)$$

$$\frac{dx}{d\tau} \Big|_+ = \frac{dx}{d\tau} \Big|_- + (1 + R) \frac{df(\tau)}{d\tau}, \quad \left(x = f(\tau), \dot{x} - \frac{df}{d\tau} < 0 \right). \quad (2)$$

$$f(\tau) = \max(f_1(\tau), f_2(\tau)), \quad f_1(\tau) = \varepsilon - \mu \cos \tau, \quad f_2(\tau) = -\mu\gamma \cos(\tau - \phi),$$

где $\tau = \omega t$ – безразмерное время, $x = \frac{x_{st} - s_2 - l}{l}$ – безразмерная координата центра масс корпуса массы M , $\mu = \frac{r_1}{l}$, $\gamma = \frac{r_2}{r_1}$, $p = \frac{g}{\omega^2 l}$, $\varepsilon = \frac{s_1 - s_2}{l}$, $\lambda_i = \frac{m_i}{M + \sum_{i=1}^2 m_i}$, ($i = 1, 2$) – безразмерные параметры, $\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_+$, $\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_-$, – скорости

непосредственно после и до удара, m_i – массы поршней-ударников, r_i – длины шатунов, имеющих стационарный сдвиг фаз ϕ , ω – циклическая частота вращения маховика.

Уравнение (1) описывает свободное движение механизма, уравнение (2) – ударное взаимодействие одного из поршней с наковальней.

Фазовое пространство. Фазовое пространство $\Phi(x \geq f(\tau), \dot{x}, \tau)$ системы (1)–(2) трёхмерное в координатах x, \dot{x}, τ усечено по x . Поверхность $S(x = f(\tau))$ представляет собой “гофрированную” цилиндрическую поверхность, образованную пересечением, при условии $\varepsilon > \mu\sqrt{(1 - \gamma \cos \phi)^2 + \gamma^2 \sin^2 \phi}$, двух цилиндрических поверхностей $x = f_1(\tau)$, $x = f_2(\tau)$. Все фазовые траектории располагаются либо на поверхности S , либо выше её ($x > f(\tau)$). Случай $x > f(\tau)$ соответствует свободному движению механизма, а $x = f(\tau)$ – ударно-му взаимодействию одного из поршней-ударников с ограничителем (шаботом).

Точечные отображения. Исследование динамики механизма, описываемого дифференциальными уравнениями (1), (2), проведено, как и в [1], с помощью метода точечного преобразования. За секущую поверхность выберем поверхность S . Пусть $M_0(\tau = \tau_0, x = f_1(\tau_0), \dot{x} = \dot{x}_0) \in S_1(x = f_1(\tau))$, $M_1(\tau = \tau_1, x = f_2(\tau_1), \dot{x} = \dot{x}_1) \in S_2(x = f_2(\tau))$, $M_2(\tau = \tau_2, x = f_1(\tau_2), \dot{x} = \dot{x}_2) \in S_1$, – три последовательные точки, принадлежащие поверхности $x = f(\tau)$, тогда преобразование $T = T_1 T_2$ точек $M_0 \xrightarrow{T_1} M_1 \xrightarrow{T_2} M_2$ можно записать в виде

$$T_1 \begin{cases} -\mu\gamma \cos(\tau_1 - \phi) = -\mu\lambda_1(\cos \tau_1 - \cos \tau_0) - (\tau_1 - \tau_0)(\mu\lambda_1 \sin \tau_0 + \\ \quad + \mu\gamma\lambda_2 \sin(\tau_0 - \phi)) - \mu\gamma\lambda_2(\cos(\tau_1 - \phi) - \cos(\tau_0 - \phi)) - \\ \quad - p(\tau_1 - \tau_0)^2/2 + \dot{x}_0(\tau_1 - \tau_0) + \varepsilon - \mu \cos \tau_0; \\ \dot{x}_1 = -R(\mu\lambda_1(\sin \tau_1 - \sin \tau_0) + \mu\gamma\lambda_2(\sin(\tau_1 - \phi) - \sin(\tau_0 - \phi)) - \\ \quad - p(\tau_1 - \tau_0) + \dot{x}_0) + (1 + R)\mu\gamma \sin(\tau_1 - \phi); \end{cases}$$

$$T_2 \begin{cases} \varepsilon - \mu \cos \tau_2 = -\mu\lambda_1(\cos \tau_2 - \cos \tau_1) - (\tau_2 - \tau_1)(\mu\lambda_1 \sin \tau_1 + \\ \quad + \mu\gamma\lambda_2 \sin(\tau_1 - \phi)) - \mu\gamma\lambda_2(\cos(\tau_2 - \phi) - \cos(\tau_1 - \phi)) - \\ \quad - p(\tau_2 - \tau_1)^2/2 + \dot{x}_1(\tau_2 - \tau_1) - \mu\gamma \cos(\tau_1 - \phi); \\ \dot{x}_2 = -R(\mu\lambda_1(\sin \tau_2 - \sin \tau_1) + \mu\gamma\lambda_2(\sin(\tau_2 - \phi) - \sin(\tau_1 - \phi)) - \\ \quad - p(\tau_2 - \tau_1) + \dot{x}_1) + (1 + R)\mu \sin \tau_2; \end{cases}$$

В связи с усечённостью фазового пространства по фазовой координате, точечное преобразование T будет определено, если выполнены следующие

неравенства

$$\begin{aligned}
 \varepsilon - \mu \cos \tau_0 &\geq -\mu\gamma \cos(\tau_0 - \phi), \\
 -\mu\gamma \cos(\tau_1 - \phi) &\geq \varepsilon - \mu \cos \tau_1, \\
 \varepsilon - \mu \cos \tau_2 &\geq -\mu\gamma \cos(\tau_2 - \phi), \\
 x(\tau) &> f(\tau) \quad \text{для} \quad \tau_0 < \tau < \tau_1, \tau_1 < \tau < \tau_2.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Первое неравенство системы (3) означает, что в начальный момент времени $\tau = \tau_0$ изображающая точка принадлежит поверхности $S(x = f_1(\tau))$ (это условие соответствует ударному взаимодействию первого поршня о шабот), второе неравенство означает, что в момент времени $\tau = \tau_1$ изображающая точка принадлежит поверхности $S(x = f_2(\tau))$ (это условие соответствует ударному взаимодействию второго поршня о шабот), третье неравенство означает, что в момент $\tau = \tau_2$ изображающая точка вновь попадает на поверхность $S(x = f_1(\tau))$ (вновь происходит ударное взаимодействие первого поршня о шабот). Четвертое неравенство отражает очевидный факт принадлежности изображающей точки подпространству $x > f(\tau)$.

Динамика однопоршневого механизма. Полагая в уравнениях (1), (2) $\varepsilon = 0, \gamma = 1, \phi = 0, \lambda_2 = 0$, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику однопоршневого механизма

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \mu\lambda_1 \cos \tau - p, & (x > -\mu \cos \tau), \\
 \frac{dx}{d\tau} \Big|_+ &= \frac{dx}{d\tau} \Big|_- + (1 + R)\mu \sin \tau, & (x = -\mu \cos \tau, \dot{x} - \mu \sin \tau < 0).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Вводя новую переменную $z = x + \mu \cos \tau$ и безразмерный параметр $a = \mu(\lambda_1 - 1)$, запишем уравнения (4) в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2z}{d\tau^2} &= a \cos \tau - p, \quad z > 0, \\
 \frac{dz}{d\tau} \Big|_+ &= -R \frac{dz}{d\tau} \Big|_-, \quad (z = 0, \dot{z} < 0).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (5) совпадают с точностью до обозначения с уравнениями работы [2]. Исследование динамики однопоршневого механизма проведем с помощью точечного преобразования плоскости $z = 0$ в себя. Так если $M_0(\tau = \tau_0, z_0 = 0, \dot{z} = \dot{z}_0), M_1(\tau = \tau_1, z = 0, \dot{z} = \dot{z}_1)$ две последующие точки, принадлежащие плоскости $z = 0$, тогда точечное преобразование T точек $M_0 \xrightarrow{T_1} M_1$ запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1^- &= a(\sin \tau_1 - \sin \tau_0) - p(\tau_1 - \tau_0) - R\dot{z}_0^-; \\
 0 &= -a(\cos \tau_1 - \cos \tau_0) - p(\tau_1 - \tau_0)^2/2 - (a \sin \tau_0 + R\dot{z}_0^-)(\tau_1 - \tau_0).
 \end{aligned} \tag{6}$$

После добавления к уравнениям (6) условий периодичности $\dot{z}_1^- = \dot{z}_0^- = \dot{z}^*, \tau_1 = \tau_0 + 2\pi n$ можно получить соотношения для определения координат неподвиж-

ной точки

$$\begin{aligned} \dot{z}^* &= -\frac{2\pi np}{1+R}; \\ a \sin \tau_0^* &= -\frac{1-R}{1+R} \pi np. \end{aligned} \quad (7)$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид:

$$\chi(z) = z^2 + \left(\frac{(1+R)^2 a}{p} \cos \tau_0^* - 1 - R^2 \right) z + R^2 = 0. \quad (8)$$

Из (7) следует, что существуют две неподвижные $M_1(\dot{z}^*, \tau_0 \in [0, \pi/2])$, $M_2(\dot{z}^*, \tau_0 \in [\pi/2, \pi])$ точки, соответствующие двум периодическим движениям с различными начальными фазами. Однако из характеристического уравнения (8) непосредственно следует, что первая неподвижная точка M_1 всегда неустойчива.

Граница области существования и устойчивости неподвижной точки M_2 в параметрическом виде, соответствующая одноударному периодическому режиму движения, задаётся, как известно [3], поверхностями N_+ , N_- , N_ϕ

$$\begin{aligned} N_+ : \left| a \frac{1-R}{1+R} \pi n \right| &= 1, \\ N_- : 2(1+R^2) - \frac{(1+R)^2 a}{p} \cos \tau_0^* &= 0, \\ N_\phi : R &= 1, \end{aligned} \quad (9)$$

а область устойчивости в плоскости параметров $p/|a|, R$ с использованием (7), (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{p_+}{|a|} &\leq \frac{1+R}{(1-R)\pi n}, \\ \frac{p_-}{|a|} &\geq \frac{(1+R)^2}{\sqrt{4(1+R^2)^2 + (\pi n)^2((1-R^2))^2}}, \\ 0 &\leq R \leq 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что размеры области устойчивости $\Delta = \frac{p_+ - p_-}{|a|}$ при фиксированном R определяются соотношением

$$\Delta = \frac{1+R}{(1-R)\pi n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \left(\frac{1+R^2}{1-R^2} \right)^2 \frac{1}{(\pi n)^2}}} \right). \quad (11)$$

Из (11), используя (9), следует, что границы N_+, N_- не пересекаются.

Известно [3], что при непрерывном изменении параметров периодический режим движения может исчезнуть либо из-за нарушения условий устойчивости (10), либо из-за выхода фазовой траектории периодического движения из области определения соответствующего точечного преобразования (6).

Выход фазовой траектории из области определения точечного отображения может быть связан с появлением дополнительных ударов за период движения. Бифуркационная поверхность N_c [3], соответствующая такому поведению фазовой траектории, определяется из уравнений, описывающих касание фазовой траекторией поверхности $z = 0$. Это означает, что область существования устойчивых периодических движений с одним ударом за период ограничена поверхностями (9) и поверхностью N_c , которая из области устойчивости в пространстве параметров, определяемой неравенствами (10), может отсекают некоторую часть.

Дополнительный удар может произойти в момент $\tau' (\tau_0^* < \tau' < \tau_0^* + 2\pi n)$, который находится из системы

$$-a(\cos \tau' - \cos \tau_0^*) - p \frac{(\tau' - \tau_0^*)^2}{2} - (a \sin \tau_0^* + R\dot{z}_0^*)(\tau' - \tau_0^*) = 0, \quad (12)$$

$$a(\sin \tau' - \sin \tau_0^*) - p(\tau' - \tau_0^*) - R\dot{z}_0^* = 0.$$

Обозначая $\tau' - \tau_0^* = \xi$, получим

$$(p\xi - \pi n p)^2 + \left(a \cos \tau_0^* - p \frac{\xi^2}{2} + \pi n p \xi \right)^2 = a^2. \quad (13)$$

Определяя $\xi = \xi(a, p, R)$ из (13) и подставляя эту зависимость в одно из уравнений (12), получим параметрическое уравнение $P(a, p, R) = 0$ границы N_c .

Результаты численных экспериментов для двухпоршневого механизма. Исследование сложной динамики двухпоршневого механизма проведено с помощью численных экспериментов с использованием программного комплекса, разработанного в среде Borland C++ Builder 6. С помощью данного комплекса произведено построение областей устойчивости для случаев $\lambda_i = 0$ и $\lambda_i \neq 0, i = 1, 2$. Анализ полученных областей показал, что увеличение массы поршней-ударников приводит к некоторому увеличению области устойчивости. Также были построены бифуркационные диаграммы с учётом и без учёта масс поршней. Из полученных диаграмм следует важный практический вывод: учёт масс поршней-ударников приводит к стабилизации периодических режимов на большом интервале частот.

Литература

- [1] Метрикин В. С., Никифорова И. В. К теории виброударной системы с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2010. № 5(1). – С. 185–192.
- [2] Быховский И. И., Дорохова А. Д., Зарецкий Л. Б., Лукомский С. И. О некоторых периодических движениях и структуре фазового пространства ударно-колебательной системы с постоянной восстанавливающей силой // Изв. АН СССР, Механика и машиностроение. 1964. № 2. – С. 161–165.
- [3] Фейгин М. И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. – М.: 1994. – 285 с.

КОГНИТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОДЕРЖАНИЯ ОБУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКЕ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ MOODLE

Моглан Д. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: di_2008@mail.ru

Moglan D. V. The cognitive modeling of the computer science teaching based on Moodle platform. We are reviewing the cognitive modeling of the computer science teaching taking into consideration the cognitive potential of the elaboration of training materials for learners. The following statement is being justified: the use of a learning platform like Moodle for cognitive modeling of the computer science content will direct the studentst mental activity to control the educational-cognitive process of activity.

Keywords: modeling the educational content, training module, Moodle system, studentst cognitive potential

Рассматривается моделирование содержания обучения информатике с учетом когнитивного потенциала проработки учебного материала обучающимися. Обосновывается следующее положение: использование системы управления обучением Moodle для когнитивного моделирования содержания обучения информатике позволит направить умственную деятельность обучающихся к управлению процессом учебно-познавательной деятельности.

Ключевые слова: моделирование содержания обучения, учебный модуль, система управления обучением Moodle, когнитивный потенциал обучающихся.

Проблемы преподавания информатики в высших учебных заведениях в настоящий момент исключительно значимы. Широкое проникновение техники и научных методов во все сферы нашей деятельности и во многие специальности требует повышения уровня преподавания информатики, который может зависеть от эффективности подходов к организации учебного процесса, правильного определения его форм, распределения тем, включенных в содержание обучения, последовательности изучения материала.

Важным аспектом в реализации тенденций развития образования, в частности, профессионально-педагогического, является совершенствование его содержания. Содержание обучения информатике и логика его раскрытия в преподавании является основой развития профессионализации личности студента. По нашему мнению, наиболее оптимальный подход отбора и построения содержания профессионально-ориентированного курса информатики определяется дидактическим моделированием содержания обучения в области информатики.

Интерес к моделированию содержания обучения возрастает и обуславливается стремлением к достижению различных дидактических целей. Одни исследователи стремятся гибко построить содержание обучения и сформированных единиц обучения (В. Б. Закорюкин, В. М. Панченко и др.), другие –

интегрировать различные формы и виды обучения (В. М. Гареев, С. И. Куликов и др.), третьи – достичь высокого уровня подготовки учащихся к профессиональной деятельности (И. Прокопенко, П. А. Юцявичене, А. А. Вербицкий) [1].

Характеризуя сущность моделирования содержания обучения, П. А. Юцявичене [2] отмечает, что “обучающийся более самостоятельно или полностью самостоятельно может работать с предложенной ему индивидуальной учебной программой, содержащей в себе целевую программу действий, банк информации и методическое руководство по достижению поставленных дидактических целей”.

С учетом информационного подхода в моделировании содержания обучения информатике ключевую роль играет не получение информации как таковой, а ее когнитивная переработка, понимание и оперирование усвоенными значениями, смыслами. Следует отметить важное замечание М. В. Гамезо, И. А. Домашенко о том, что форма выражения учебной информации “«работает» не сама по себе, а лишь как носитель определенного содержания и лишь будучи включенной в познавательную деятельность. Причем эта включенность важна на всех ее этапах – при постановке и принятии учебной задачи, при выполнении учебных действий, при контроле и самоконтроле” [3].

Одной из особенностей перспективного развития современного образования является ориентация в обучении на формирование у обучающихся когнитивной компетентности как готовности к выполнению различных видов познавательной деятельности и решению разнообразных профессиональных задач. Такая ориентация опирается на моделирование содержания обучения, которое можно рассматривать как подготовку учебного материала с учетом когнитивного потенциала обучающегося.

Когнитивное моделирование содержания обучения информатике предполагает модульное построение содержания обучения, обусловленное соответствием содержания курса информатики когнитивному потенциалу обучающихся и их интеллектуальным способностям.

Для реализации когнитивного моделирования содержания обучения информатике мы предлагаем использовать следующий алгоритм:

1. Построение системы познавательных целей, исходя из возможностей содержания обучения информатике и профессиональной цели подготовки специалиста.

2. Отбор инвариантной части содержания дисциплины “Информатика”, т. е. выбор одной или нескольких ведущих идей и концепций по данному предмету в зависимости от профиля обучения, уровня подготовки и развития студентов. В качестве образца предлагаем следующую схему отбора: ведущая идея или концепция *по разделу* соответствующая теория или закон; ведущая идея *по теме* понятия, необходимые для усвоения этой идеи; ведущая идея *по занятию* минимум фактов, необходимых для раскрытия содержания понятия.

3. Отбор вариантной части содержания дисциплины “Информатика”, направленной на развитие потребностей у студентов в знаниях способов по использованию определенных форм деятельности в области информатики. Содержание обучения представляется в информационных блоках, усвоение которых осуществляется в соответствии с дидактической целью и уровнем подготовки

студентов. Дидактическая цель формулируется для обучающегося и содержит в себе не только указание на объем изучаемого содержания, но и на уровень его усвоения.

4. Составление учебной программы.

Когнитивное моделирование содержания обучения определяется построением модульной структуры тем курса, представленной на рис. 1. В данной схеме стрелками мы обозначаем направление в последовательности обучения. Каждый модуль – это система занятий, объединенных общей дидактической целью. Для обучения информатике формируется тематический модуль, состоящий из поурочных модулей.

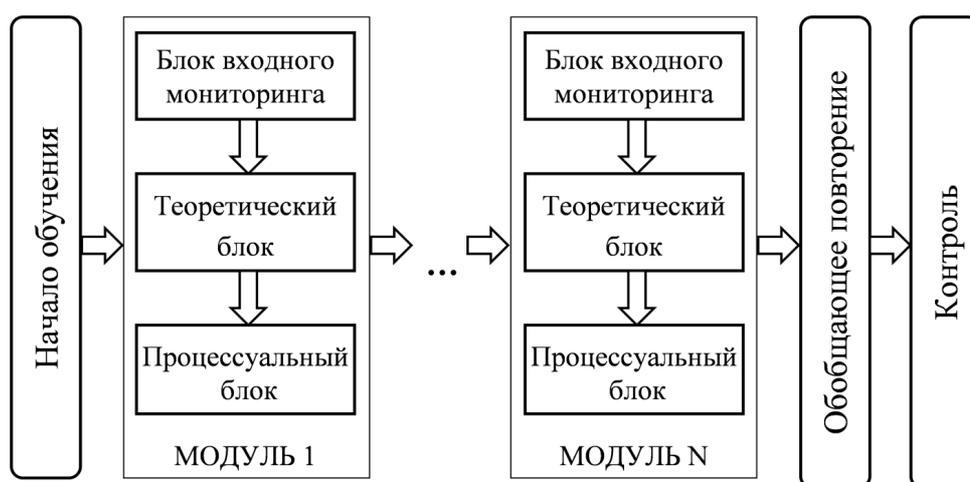


Рис. 1: Структура линейного моделирования содержания обучения информатике.

Длительность поурочного модуля совпадает с длительностью учебного часа или составляет два учебных часа. Каждый модуль делится на три блока занятий, на каждом из которых решается определенная дидактическая задача: блок входного мониторинга; теоретический блок; процессуальный блок. Для обеспечения когнитивного развития потенциалов обучающегося необходимо структурировать содержание обучения, выделяя в нем декларативную, процедурную информацию и определяя последовательность изучения этих видов информации в учебном процессе [4].

Блок входного мониторинга. Данный блок предполагает тестирование уровня когнитивной готовности студентов к восприятию и пониманию новой учебной информации и выполнению познавательных действий, операций по содержанию изучаемой темы курса информатики.

Когнитивная готовность определяет успешность всей дальнейшей деятельности студентов по усвоению нового учебного материала в содержании изучаемой темы дисциплины “Информатика”. Для изучения актуального уровня когнитивного развития используется система мониторинга, которая диагностирует общеучебные умения; межпредметные знания и умения; предметные знания и умения по содержанию изучаемой темы.

Теоретический блок. В этом блоке изучается декларативная информация, подобная базе данных, которая представлена в виде множества фактов,

обоснований этих фактов и логических умозаключений, вытекающих из данного множества фактов изучаемой предметной области дисциплины “Информатика”.

Процессуальный блок. В этом блоке изучается процедурная информация. Она содержит правила и алгоритмы выполнения различных видов предметной деятельности, способы преобразования объектов, которые применяются в изучаемой предметной области дисциплины “Информатика” для получения заданных результатов. Усвоение этой информации необходимо для овладения общими и частными методами, обеспечивающими адекватное восприятие, познание и преобразование полученной информации для адаптации к способам и формам деятельности в решении практических задач.

После прохождения декларативного и процедурного модулей студент переходит к обобщающему повторению и итоговому контролю.

Предложенная нами структура когнитивного моделирования содержания обучения информатике способствует развитию познавательной деятельности студентов, направленной на:

1) стремление познавать новое, так как выбор объема и сложности содержания обучения осуществляется в соответствии с поставленной дидактической целью и познавательными возможностями студентов, с ранее изученным материалом и способами умственных и практических действий студентов;

2) структуризацию собственных знаний, так как студенту предоставляется возможность выбрать определенный набор модулей и порядок их усвоения.

Эксперимент, проведенный на тему “Службы информационной безопасности / Шифрование” по дисциплине “Информационная безопасность” специальности 040400 профиля “Социальная защита и социальное обслуживание семей и детей” на I курсе в РГПУ им. А. И. Герцена показал, что при реализации когнитивного моделирования содержания обучения, роль преподавателя в учебном процессе изменяется. Он становится посредником между студентами и учебно-познавательной деятельностью в процессе работы с модулем, который содействует развитию самостоятельности студентов, формированию умения работать с учетом когнитивных потенциалов проработки учебного материала и направляет умственную деятельность студентов к самостоятельному управлению процессом познавательной деятельности.

Позитивным элементом проведения эксперимента, учитывая специфику специальности, является следующим: развитие логико-аналитического мышления студентов при выполнении практических заданий. Однако присутствовали и отрицательные элементы: неподготовленность студентов в информатике создала дополнительные трудности в системе работы по усвоению содержания изучаемой темы.

Практическая реализация когнитивного моделирования содержания обучения информатике была реализована на основе актуальной и перспективной в настоящее время системы управления обучением Moodle. Данная система представляет собой модульную объектно-ориентированную динамическую учебную среду, направленную прежде всего на организацию взаимодействия между преподавателем и учениками [6].

Использование системы Moodle в обучении носит вспомогательный характер, и традиционные методы преподавания (в частности, лекции) при этом

сохраняются. Однако использование системы Moodle позволило нам смоделировать содержание обучения по теме “Службы информационной безопасности / Шифрование” в той последовательности и за то время, которое в наибольшей степени соответствует уровню индивидуальной подготовки студента.

Это стало возможно, поскольку среда Moodle поддерживает произвольное количество интерактивных элементов курса, среди которых:

– Элемент *Урок* (лекция). Состоит из набора страниц, содержащих теоретический материал, которые упорядочены по уровню сложности. Последовательность изучения материала определяется когнитивной способностью усвоения теоретического материала студентом. Усвоение содержания материала лекции, изложенного на определенном количестве страниц, контролируется корректностью ответов на практические вопросы. В зависимости от правильности ответа студент переходит на изучение материала следующей страницы или возвращается на предыдущую страницу для повторения и закрепления. Таким образом, происходит актуализация знаний и контроль готовности студента к выполнению конкретного практического задания. Результативным эффектом в моделировании содержания обучения с помощью данного элемента стали систематичность и равномерная интенсивность освоения студентами темы “Службы информационной безопасности / Шифрование”.

– Элемент *Тест*. Позволяет преподавателю создать набор тестовых вопросов. Вопросы могут быть в закрытой форме (множественный выбор), с выбором верно/не верно, на соответствие, предполагать короткий текстовый ответ, а также числовой или вычисляемый. Все вопросы хранятся в базе данных и могут быть впоследствии использованы снова в этом же курсе. Тестирование позволило повысить подготовленность студентов к практическим заданиям и обеспечить обратную связь с преподавателем, уточнив какой материал темы с трудом усваивается студентами.

– Элемент *Глоссарий*. Позволяет преподавателю создавать и формировать список терминов (определений), используемых в содержании изучаемого курса (тем), наподобие словаря. Использование данного элемента в изучении темы улучшило когнитивную способность проработки изучаемого материала, благодаря добавлению комментариев к определениям в содержании темы и автоматического связывания соответствующих слов темы с его определением в глоссарии.

На основе анализа применения системы Moodle для когнитивного моделирования содержания обучения информатике на примере вышеназванной темы, можно сделать вывод, что моделирование содержание обучения в зависимости от темпов освоения студентами учебных элементов создает условия для активизации мышления и учебно-познавательной деятельности студентов.

Литература

- [1] Procopenco I., White Y., Bittell L. Modular programme for Supervisory Development. Vol. 1. Introduction and Trainer’s Guide – Supervisory Techniques / I. Procopenco, . – Geneva: ILO, 1981.
- [2] Юцявичене П. А. Теория и практика модульного обучения. – Каунас: Изд-во Швиеса, 1989. – 271 с.

- [3] Гамезо М. В., Домашенко И. А. Атлас по психологии: информ.-метод. пособие по курсу “Психология человека”. – М.: Педагогическое общество России, 2004. – 276 с.
- [4] Бершадский М. Е. Когнитивные смыслы образования // Школьные технологии. – 2005. – № 5. – С. 13–17.
- [5] Бершадский М. Е. Возможные направления интеграции образовательных и информационно-коммуникационных технологий // Педагогические технологии. – 2006. – № 1. – С. 29–50.
- [6] Гильмутдинов А. Х., Ибрагимов Р. А., Цивильский И. В. Электронное образование на платформе Moodle. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2008. – 169 с.

КРИТИЧНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗРАБОТКИ ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Смирнов Е. М.*, Фомина И. К.**

* Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
e-mail: jen@lofters.ru

** Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург
e-mail: fominga@list.ru

Smirnov U., Fomina I. CRITICAL DIRECTIONS OF DEVELOPMENT OF TECHNOLOGIES FOR THE SIMULATION OF ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS IN THE CLOUD. The problem of the use of artificial neural networks to solve complex tasks that require large computational resources. To solve this problem as a rule are used cloud computing, and therefore there is a problem of algorithms and the generation of optimum models of neural networks under the original data.

Исследуется проблема использования искусственных нейронных сетей для решения сложных задач, требующих больших вычислительных ресурсов. Для решения этой проблемы как правило используются облачные вычисления, и следовательно возникает проблема парализации алгоритмов и генерации оптимальных моделей нейронных сетей под исходные данные.

Промышленность, производство, управление, медицина, фактически все стороны человеческой деятельности в 21 веке напрямую связаны с информационными технологиями, возлагаются большие надежды на их развитие в направлении интеллектуальных систем и объектов [1, 2]. Современные информационные системы решающие сложные задачи как тактического, так и стратегического значения не мыслимы без интегрированных аналитических модулей, в

составе которых используются методы статистики или интеллектуального анализа данных. Важнейшим направлением развития интеллектуальных систем является теория нейронных сетей [3]. Искусственные нейронные сети (ИНС) – математические модели, а также их программные или аппаратные реализации, построенные по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей нервных клеток живого организма. Модели на основе нейронных сетей используются в различных задачах, связанных с такими понятиями как искусственный интеллект, прогнозирование, распознавание образов, интеллектуального анализа данных и др.

Важнейшей движущей силой прогресса информационных технологий выступают Internet-технологии, апогеем развития которых, на сегодняшний момент являются, так называемые «облачные» вычисления. Облачные вычисления (cloud computing) – это технология, объединяющая ИТ-ресурсы различных аппаратных платформ и предоставляющая пользователю доступ к ним через Интернет. Вместе с тем, облачные вычисления – это и бизнес-модель, согласно с которой пользователь оплачивает лишь реально потребляемые им ресурсы. «Облачные вычисления» становятся все более популярными, особенно в последнее время, когда ограниченность финансовых ресурсов вынуждает компании оптимизировать затраты: не надо тратить огромные средства на создание собственных центров обработки данных, на оплату лицензионного программного обеспечения, на содержание квалифицированного персонала.

Общесистемные задачи построения инструментария ИНС [2, 4].

– Инструментарий ИНС относится к классу сложных информационных систем управления, где лицом принимающим решение является человек (когнитолог, аналитик, пользователь). Эффективность работы сложной системы управления зависит от ряда факторов, в том числе: математического, алгоритмического, программно-технического, аппаратного обеспечения, профессионального мастерства оператора, взаимной приспособленности человека и компьютера как звеньев единой комплексной системы принятия решений.

– Современные интеллектуальные системы являются всего лишь инструментом (более удачным, менее удачным) в руках пользователя. Именно пользователь, аналитик выбирает соответствующий инструмент анализа и несет ответственность за результаты принимаемых решений.

– Интеграция в архитектуру системы средств, обеспечивающих ведение и коллективное использование исходных данных, промежуточных и окончательных результатов моделирования, а также сохранение результатов сеанса и продолжение процессов моделирования.

– Вариативность инструментария для решения разных типов задач, гибкость и адаптивность к входным данным, в том числе: подготовка априорной информации, определение типов моделей решения, обучение системы (синтез модели решения), верификация модели, распознавание (классификация данных).

Класс задач, которые можно решить с помощью нейронной сети, определяется тем, как сеть работает и тем, как она обучается. Нейронные сети – как математический метод моделирования, позволяют воспроизводить чрезвычайно сложные нелинейные зависимости.

Важнейшей дилеммой использования искусственной нейронной сети, ко-

торая по своей изначальной структуре является нелинейной – это оптимизация аппаратных ресурсов (линейных вычислений) под нелинейный алгоритм реализации нейронной сети [3]. Облачные вычисления – тот инструментарий, в технологиях которого одним из приоритетов выступает организация распределенных систем и решение задач «распараллеливания» алгоритмов. Задачу распараллеливания ИНС можно разбить на следующие составляющие:

1. Классифицировать типы параллельного выполнения:
 - Выполнение на GPU (Open CL).
 - Выполнение на многопроцессорной системе.
 - Выполнение на многомашинной системе.
2. Классифицировать модели нейронных сетей, алгоритмы их обучения и распараллеливания:
 - Многослойный перцептрон (MLP):
 - *Алгоритм обратного распространения.
 - *Метод сопряженных градиентов.
 - *Метод доверительных областей.
 - *Метод Левенберга-Маркара.
 - Радиальная базисная функция.
 - Вероятностная нейронная сеть.
 - Обобщенно-регрессионная нейронная сеть.
 - Линейная сеть.
 - Сеть Кохонена.

Особенности влияния входных данных на ресурсоемкость нейронной сети. При построении и конструировании сети, предполагается, что входной и выходной слои заданы, то есть, известно какие переменные будут подаваться на вход сети, и что будет на выходе. То, какие переменные будут выходными, известно всегда (по крайней мере, в случае управляемого обучения). Что же касается входных переменных, их правильный выбор порой представляет большие трудности. Не известно заранее, какие из входных переменных действительно полезны для решения задачи, и выбор хорошего множества входов бывает затруднен целым рядом обстоятельств:

- Проклятие размерности. Каждый дополнительный входной элемент сети – это новая размерность в пространстве данных. С этой точки зрения становится понятно следующее: чтобы достаточно плотно “заселить” N -мерное пространство и “увидеть” структуру данных, нужно иметь довольно много точек. Необходимое число точек быстро возрастает с ростом размерности пространства (грубо говоря, как 2^N для большинства методов). Большинство типов нейронных сетей (в частности, многослойный перцептрон MLP) в меньшей степени страдают от проклятия размерности, чем другие методы, потому что сеть умеет следить за проекциями участков многомерного пространства в пространстве малой размерности (например, если все веса, выходящие из некоторого входного элемента, равны нулю, то MLP-сеть полностью игнорирует эту входную переменную). Тем не менее, проклятие размерности остается серьезной проблемой, и качество работы сети можно значительно улучшить, исключив ненужные входные переменные. На самом деле, чтобы уменьшить эффект проклятия размерности иногда бывает целесообразно исключить даже те входные переменные, которые несут в себе некоторую (небольшую) информацию.

– Внутренние зависимости между переменными. Было бы очень хорошо, если бы каждую переменную – кандидата на то, чтобы служить входом сети, можно было бы независимо оценить на “полезность”, а затем отобрать самые полезные переменные. К сожалению, как правило, это бывает невозможно сделать, и две или более взаимосвязанных переменных могут вместе нести существенную информацию, которая не содержится ни в каком их подмножестве. Классическим примером может служить задача с двумя спиралями, в которой точки данных двух классов расположены вдоль двух переплетающихся двумерных спиралей. Ни одна из переменных в отдельности не несет никакой полезной информации (классы будут выглядеть совершенно перемешанными), но глядя на обе переменные вместе, классы легко разделить. Таким образом, в общем случае переменные нельзя отбирать независимо.

– Избыточность переменных. Часто бывает так, что одна и та же информация в большей или меньшей степени повторяется в разных переменных. Например, данные о росте и весе человека, как правило, несут в себе сходную информацию, поскольку они сильно коррелированы. Может оказаться так, что в качестве входов достаточно взять лишь часть из нескольких коррелированных переменных, и этот выбор может быть произвольным. В таких ситуациях вместо всего множества переменных лучше взять их часть – этим мы избегаем проклятия размерности.

– Неоптимальная модель нейронной сети для решения выбранной задачи.

Для того чтобы решить ряд вышеперечисленных проблем, важной составляющей процесса моделирования выступает идея преданализа, препроцессинга входных данных. К эффективной практике использования препроцессинга относятся приемы реализующие концепцию «бустинга» (boosting) – эти приемы предназначены для повышения результативности получаемых моделей, способности выдавать правильные результаты при меньшем количестве обучающих данных. Бустинг, в частности, реализует процедуру последовательного построения композиции различных алгоритмов (методов) машинного обучения, когда каждый следующий алгоритм стремится компенсировать недостатки всех предыдущих алгоритмов. Манипулируя другими методами статистики и интеллектуального анализа данных, можно эффективно снизить размерность, провести очистку данных. К наиболее перспективным методам снижения размерности авторы относят алгоритмы на основе «деревьев решений», которые изначально предназначены на выделение значащих свойств, логического сжатия информации и показывают высокий уровень интерпретируемости результата представления.

На основе результатов преданализа предполагается проводить автоматизированную настройку структуры и алгоритмов обучения и обработки ИНС. Для этого необходимо разработать программу-помощник для построения сети. Программа-помощник должна анализировать входные данные, подбирать наиболее оптимальную метод построения ИНС, алгоритм ее обучения, параметры, количество потоков для параллельного выполнения.

Литература

- [1] Дюк В. А., Флегонтов А. В., Фомина И. К. Применение технологий интеллектуального анализа данных в естественнонаучных, технических и гуманитарных областях // Известия РГПУ им. А. И. Герцена. 2011. №138. – С. 77–84.
- [2] Флегонтов А. В. Направления совершенствования программного инструментария интеллектуального анализа данных. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования // Герценовские чтения – 2012. Материалы научной конференции, 16–21 апреля 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 246–249.
- [3] Фомин В. В. Спорные вопросы развития нейронных сетей. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2012. Материалы научной конференции, 16 – 21 апреля 2012. – СПб.: БАН, 2012. – С. 249–253.
- [4] Фомина И. К. Интеллектуальные информационные системы. – СПб.: СПб-ГУВК, 2009. – 198 с.

МОДУЛЬ WEB-РЕАЛИЗАЦИИ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА K-СРЕДНИХ МЕТОДА «ДЕРЕВЬЯ РЕШЕНИЙ»

Фомин В. В., Флегонтов А. В.

Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: aflegontoff@herzen.spb.ru

Fomin V. V., Flegontov A. V. WEB-module implementation of the modified k-means algorithm is the method of “decision trees”. We consider the modified k-means algorithm and its implementation in the WEB-tools data-mining.

Рассматривается модифицированный алгоритм k-средних и его реализация в составе WEB-инструментария интеллектуального анализа данных.

В рамках проводимых научно-образовательным центром «Информационные технологии и системы моделирования» РГПУ им. А. И. Герцена прикладных и научных исследований по тематике проекта [1, 2, 5] автоматизации аналитической поддержки принятия экспертных решений (распознавание и прогнозирование), одним из приоритетных направлений работ было определено развитие методов и технологий на основе алгоритмов «дерева решений».

Дерева решений являются инструментом в системах поддержки принятия решений, интеллектуального анализа данных и входят в состав многих пакетов. В областях, где высока цена ошибки, они служат отличным подспорьем аналитика или руководителя.

На данный момент наибольшей популярностью пользуются несколько основных алгоритмов построения деревьев решений, таких как ID3, C4.5 и CART. Ни один из алгоритмов не является универсальным, поэтому существует огромное количество их модификаций, позволяющие более эффективно решать задачу классификации в конкретной предметной области.

Предлагаемый алгоритм построения дерева решений основывается на кластеризации объектов обучающей выборки отдельно по каждому из их свойств. В основе кластеризации положена модифицированная версия алгоритма k-средних (k-means). Расширение алгоритма в виде процедуры выделения наиболее значащие свойства объектов, позволяет выбрать оптимальный корень дерева и использовать возможности пред-редукции. В алгоритм также заложена возможность удаления «шумов» обучающей выборки (реализуется посредством построения нечетких кластеров) и пост-редукции дерева решений.

Характеристики разработанного алгоритма построения дерева решений.

- Тип наборов данных. Алгоритм работает с табличными данными, т. е. с двухмерными таблицами, представляющими собой наборы данных.

- Тип данных. Алгоритм работает с обучающей выборкой интересующих объектов. Для эффективной работы алгоритма в выборке должны быть представлены различные комбинации и элементы генеральной совокупности.

- Измерение данных. Алгоритм работает с непрерывными данными в интервальном диапазоне.

- Шкалы. Алгоритм работает с интервальной шкалой (interval scale) – шкалой, между значениями которой могут быть вычислены разности, однако их отношения не имеют смысла.

- Форматы хранения данных. Входными данными для реализованной программы является CSV файл, содержащий обучающую выборку в табличном формате данных

- Метаданные. В качестве метаданных выступает первая строка входного CSV файла, описывающая названия атрибутов объекта.

- Решаемые задачи. Алгоритм решает задачу классификации. В результате решения задачи классификации обнаруживаются признаки, которые характеризуют группы объектов исследуемого набора данных – классы; по этим признакам новый объект можно отнести к тому или иному классу.

- Точность классификации: оценка уровня ошибок. Алгоритм осуществляет кросспроверку (Cross-validation) – процедуру оценки точности классификации на данных из тестового множества.

- Остановка построения дерева. Разработанный алгоритм поддерживает три варианта правил остановки построения дерева:

1. «Ранняя остановка» (preruning) – определяет целесообразность разбиения узла.

2. Ограничение глубины дерева. В этом случае построение заканчивается, если достигнута заданная глубина.

3. Задание минимального количества примеров, которые будут содержаться в конечных узлах дерева. При этом варианте ветвления продолжают до того момента, пока все конечные узлы дерева не будут чистыми или будут содержать не более чем заданное число объектов.

- Сокращение дерева. Разработанный алгоритм позволяет настраивать

качество классификационной модели путем указания минимальной точности распознавания.

- Точность распознавания. Задается пользователем.

Преимуществами предложенного алгоритма являются:

- Отсечение ветвей дерева на этапе построения (prereduction) посредством раннего выявления незначущих атрибутов.

- Реализация ранней остановки построения дерева за счет задаваемой точности распознавания. На практике это означает возможность балансирования между скоростью работы и точностью построенных if-then правил.

- Возможность работы с «зашумленными» данными обучающей выборки.

- Простота интерпретируемости построенных if-then правил (в любом узле дерева правой и левой оценкой атрибута будут являться значения присутствующие в обучающей выборке).

Наиболее значимыми недостатками являются:

- Невозможность работы с атрибутами, значения которых представлены в шкале, отличной от интервальной.

- Малая эффективность распознавания при работе с выборкой, содержащей большое количество значимых атрибутов для каждого класса.

- Низкая скорость работы на больших наборах данных, содержащих большое количество значимых атрибутов для каждого класса.

Модуль состоит из трех основных частей:

- Интерфейс ввода вывода. Отвечает за ввод входных данных пользователем (обучающей выборки, параметров noise и accuracy) и отображение результатов работы алгоритма (вывод построенных if-then правил, статистических параметров и т. д.).

- Адаптер входных данных. Данная часть компонента отвечает за конвертирование входных данных в понятную для алгоритма форму. Например, обучающая выборка может быть представлена как в виде CSV файла, так и в виде, например, JSON или XML объекта.

- Анализатор данных. Является главной частью программы, отвечающей за построение дерева решений по заданной обучающей выборке и входным параметрам.

Структуру реализованного алгоритма представим в виде схемы рис. 1. Алгоритм состоит из следующих основных частей: ввод и преобразование данных, кластеризация, постобработка кластеров, выделение вершин дерева, вывод результата.

На схемах рисунков 2–4 представлены описания ключевых фрагментов алгоритма по процедурам:

1. Кластеризации. Алгоритм выделяет интервалы значения параметров, свойственных для каждого из классов. Полученные интервалы образуют множество кластеров для каждого из свойств обучающей выборки.

2. Постобработка кластеров. Происходит удаление «шумов» обучающей выборки посредством образования нечетких кластеров заданной точности. Постобработка полученных кластеров также подразумевает отсечение кластеров, размерность которых не удовлетворяет входным параметрам алгоритма.

3. Построения вершин дерева. Итеративно выделяется самая сильная компонента (наиболее мощный кластер) и пересчитывается матрица обучающей выборки.

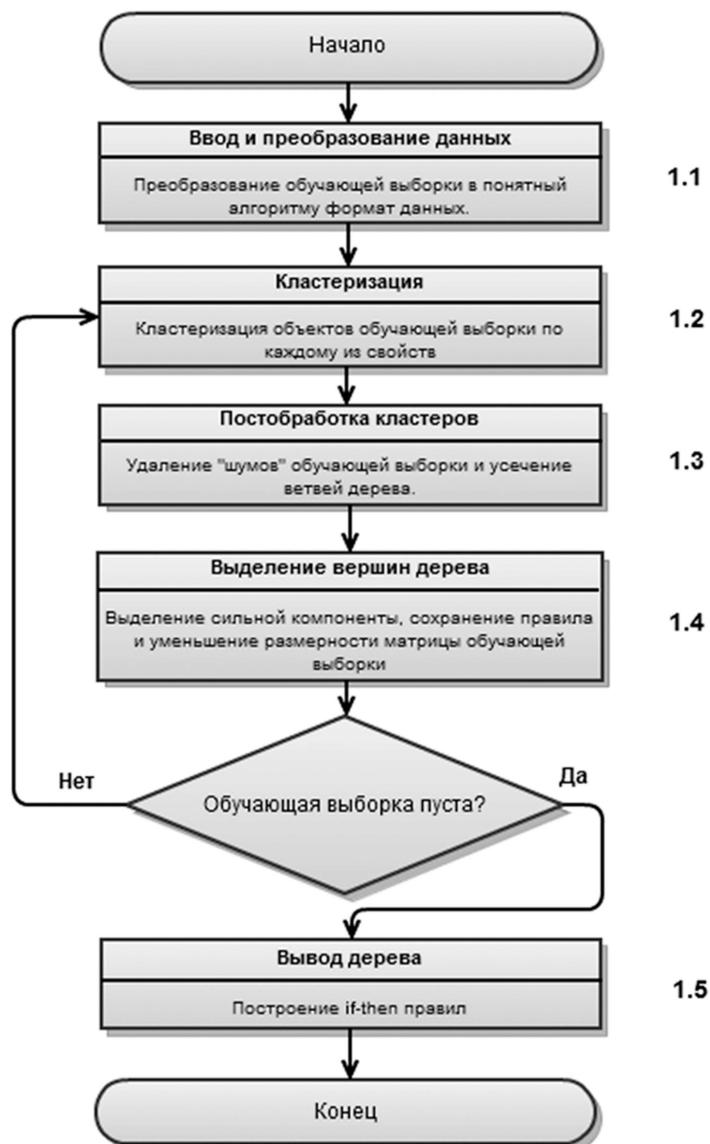


Рис. 1. Обобщенная структура модифицированного алгоритма k-средних.

1.2 Кластеризация по значению каждого из свойств классов

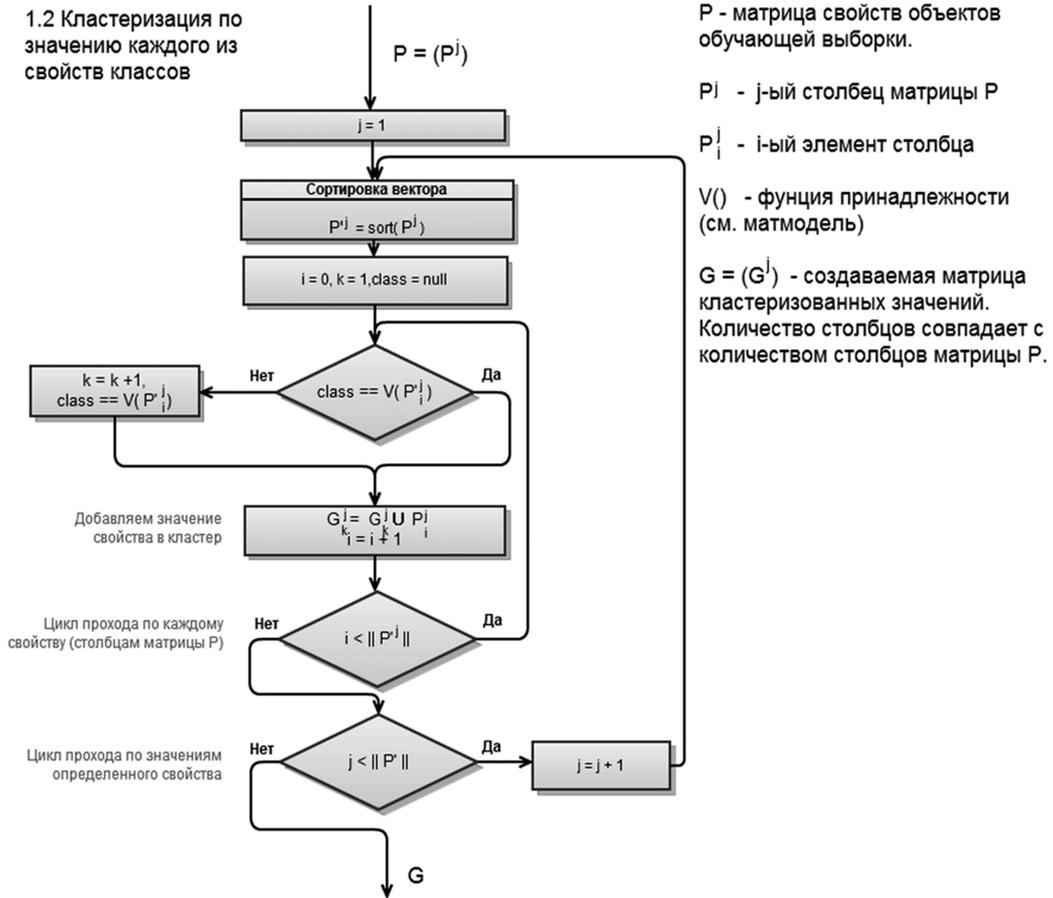


Рис. 2. Кластеризация по значениям каждого из свойств.

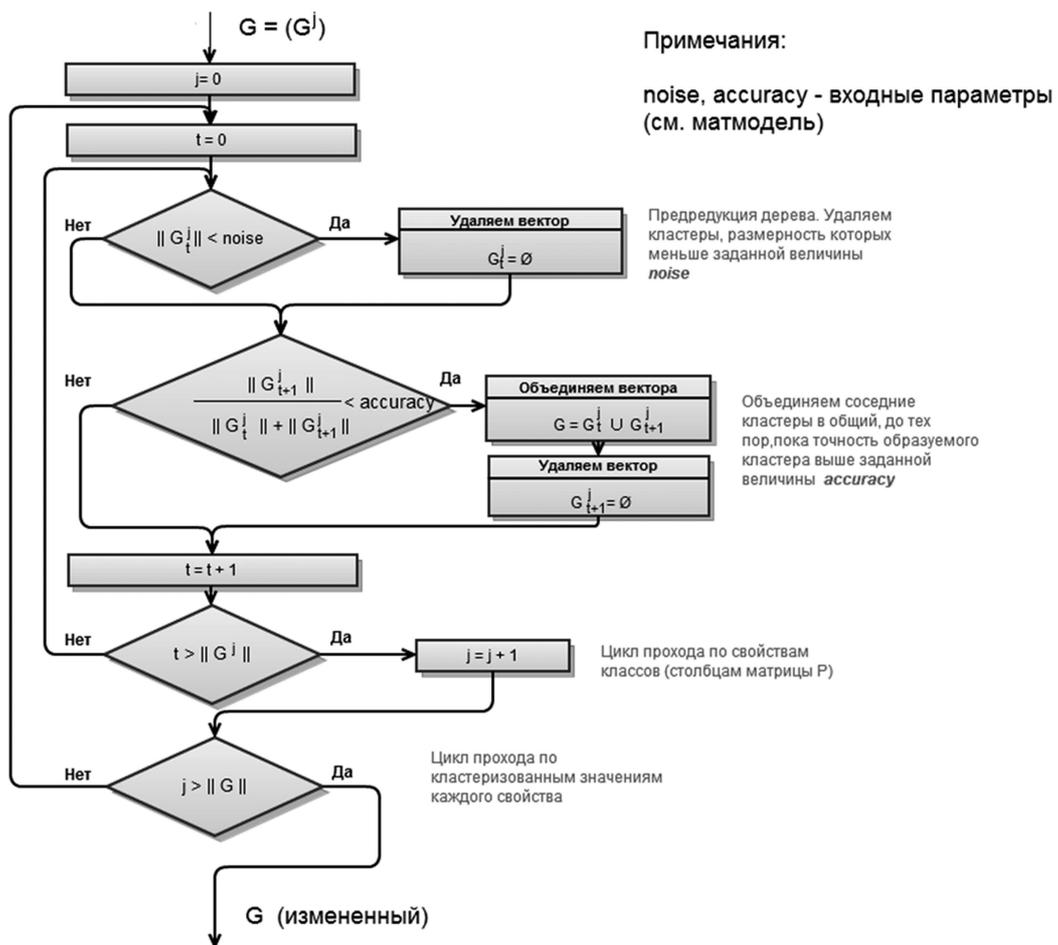
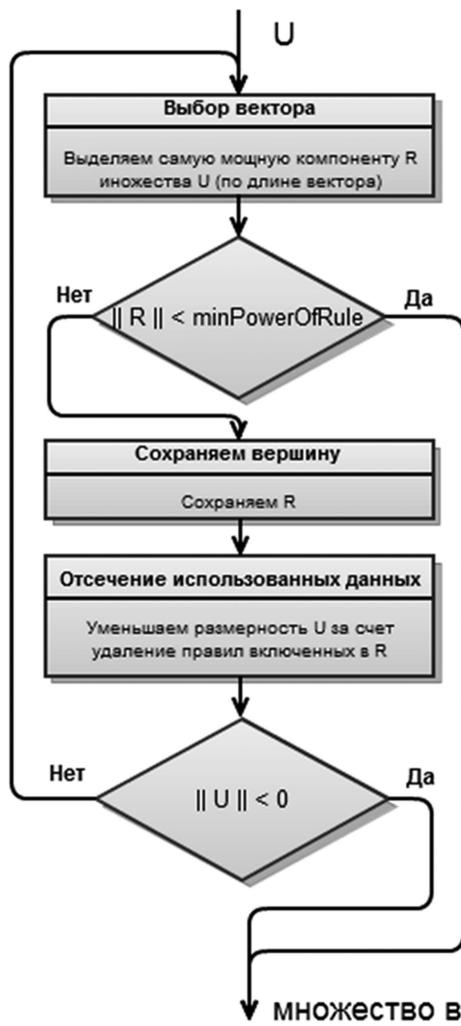


Рис. 3. Постобработка кластеров.



Примечания:

U - множество всех кластеров всех свойств, полученных на предыдущем шаге

Постредукция дерева. Заканчиваем построение дерева, если новое правило будет охватывать количество классов обучающей выборки, меньшее величины *minPowerOfRule*

Рис. 4. Построения вершин дерева.

Важной составляющей программной реализации алгоритма k-средних, в соответствии с проектом ПНИР [1, 2], является его интеграция в единую программную систему в составе библиотечного модуля. Система, в свою очередь и в соответствии с целевой задачей [3, 4], строиться как WEB-инструментарий на базе технологий «облачных» и распределенных вычислений.

Подробное описание структуры и реализации алгоритма на языке PHP представлена в отчете по ПНИР [2]. Разработанный алгоритм обладает рядом существенных преимуществ, таких как адаптивная система отсечения ветвей дерева на этапе его построения (pre-reduction), настраиваемая точность выходных if-then правил, легкость интерпретируемости результата и эффективное отсечение незначимых атрибутов класса. Основными недостатками алгоритма являются: невозможность работы со шкалами, отличными от интервальной и плохая эффективность при большом количестве значимых атрибутов.

Литература

- [1] Разработка проекта интеллектуального хранилища знаний и автоматизации процесса информационной поддержки принятия управленческих решений для повышения эффективности научной, инновационной и образовательной деятельности высшего образовательного учреждения. – Отчет ПНИР. Гос. регистрация № 01201170756. – 2011 г.
- [2] Разработка библиотеки WEB программ алгоритмов распознавания и прогнозирования (кластеризации и классификации) в развитие проекта автоматизации аналитической поддержки принятия управленческих решений для повышения эффективности научной, инновационной и образовательной деятельности высшего образовательного учреждения. – Отчет ПНИР. Гос. регистрация № 01201253843.– 2012 г.
- [3] Сикулер Д. В., Фомин В. В. Концепция Internet–системы интеллектуальной обработки данных. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования // Герценовские чтения – 2011. Материалы научной конференции, 11–16 апреля 2011 г. – СПб., 2011.– С. 206–209.
- [4] Фомин В. В., Флегонтов А. В., Лаптев В. В. Смена парадигмы в области новых технологий интеллектуального анализа данных // Информатизация образования и науки, № 3 (15). 2012. – С. 3–12.
- [5] Флегонтов А. В. Направления совершенствования программного инструментария интеллектуального анализа данных. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования // Герценовские чтения – 2012. Материалы научной конференции, 16–21 апреля 2012 г. – СПб.: БАН, 2012. – С. 246–249.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Чертовской В. Д.

Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
Санкт-Петербург

Рассмотрен способ решения обратной задачи статического линейного программирования для последовательно соединенных структурных элементов. Проверена правильность предлагаемого решения.

The decision way of backward static linear programming task is considered. Validate of offered decision is checked.

Введение. Задача статического линейного программирования (СЛП) все шире применяется в автоматизированных системах управления производством. В общем виде она имеет вид

$$DP \leq b, \quad (1)$$

$$\mathbf{R}^- \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{R}^+, \quad (2)$$

$$G = \mathbf{FP} \rightarrow \max, \quad (3)$$

где \mathbf{P} , \mathbf{b} , \mathbf{R} – вектор–столбцы искомого плана, ограничений на ресурсы и план; \mathbf{D} – матрица норм расхода ресурсов; \mathbf{F} – вектор–строка прибыли от выпуска единицы готовой продукции; G – целевая функция.

Обычно решается задача, которую удобно назвать «прямой». В ней искомым является вектор \mathbf{P} , а остальные числовые параметры заданы. При этом предполагается, что значения параметров как-то получены.

Постановка задачи. Сложнее обстоит дело, если эти параметры следует определить.

Возникает, например, задача, когда необходимо определить вектор \mathbf{b} , когда остальные параметры численно заданы. Такую задачу СЛП назовем «обратной» [1].

Она возникает при формировании тестовых задач в процедуре настройки алгоритмов и особенно – при формировании последовательной цепочки задач, решаемых, например, на диспетчерском уровне автоматизированной системы [2].

Решение задачи. Решение обратной задачи состоит из следующих этапов:

- генерация отдельной задачи;
- генерация последовательной цепочки задач (рис. 1);
- проверка правильности полученных результатов.

Далее задачу СЛП для отдельного элемента удобнее писать в несколько ином виде:

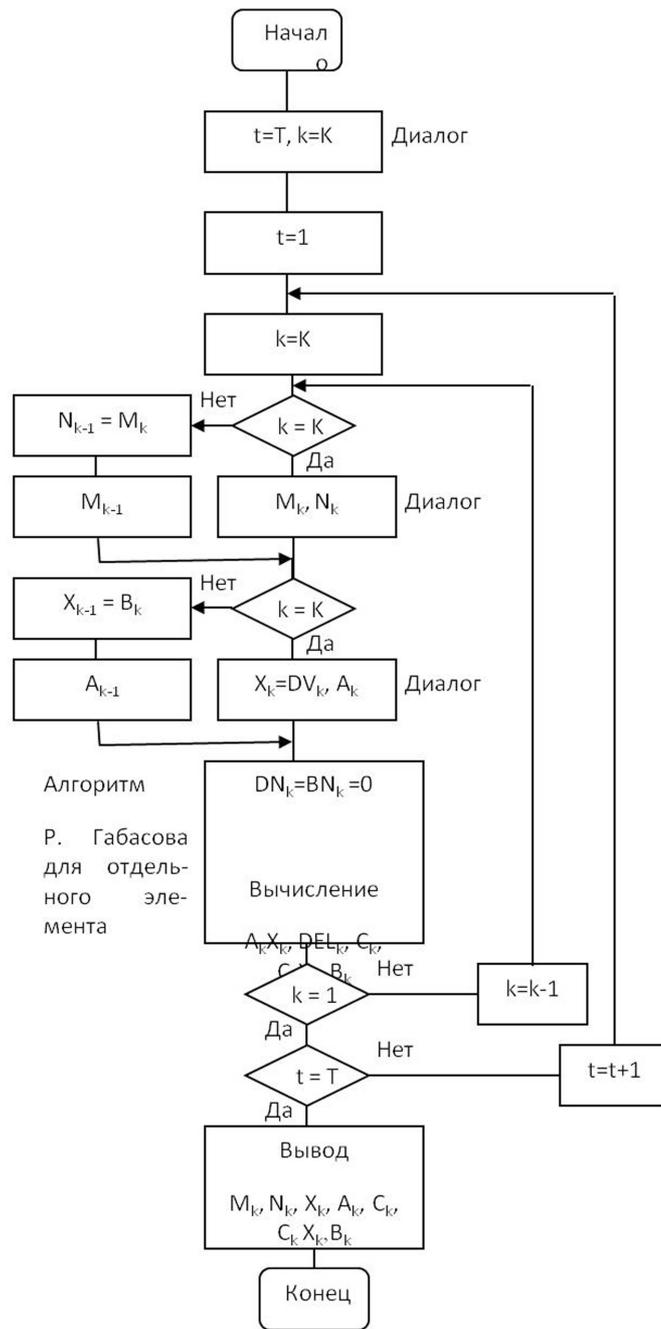


Рис. 1. Формирование числовых данных для оптимального алгоритма диспетчерской цепочки

$$DN_k \leq X_k \leq DV_k, \quad (4)$$

$$BN_k \leq A_k X_k \leq B_k, \quad (5)$$

$$G = C_k X_k \rightarrow \max, \quad (6)$$

где X_k – вектор–столбец искомого плана; DN_k , DV_k – вектор–столбцы нижнего и верхнего ограничений на план; A_k – матрица размерности $M_k \times N_k$ норм расходов ресурсов; C_k – вектор–строка прибыли от единицы плановой продукции; BN_k , BV_k – вектор–столбцы нижней и верхней границ ресурсов; $k = 1$,

k – номер структурного элемента в последовательной цепочке диспетчерского уровня. В дальнейшем полагаем $\mathbf{DN}_k = \mathbf{BN}_k = 0$. Выходом является вектор \mathbf{X}_k , входом – векторы $\mathbf{BV}_k = \mathbf{B}_k$.

В качестве генератора отдельной задачи выбран алгоритм Р. Габасова [1].

При генерации последовательной цепочки необходимо выдержать следующие условия

$$N_{k-1} = M_k, \quad (7)$$

$$\mathbf{X}_{k-1} = \mathbf{B}_k, \quad (8)$$

Тогда алгоритм генерации цепочки может быть представлен в виде, показанном на рис. 1.

Для проверки правильности алгоритма было проведено моделирование в пакете MatLab по схеме, показанной на рис. 2, для которой использовались числовые результаты работы алгоритма на рис. 1.

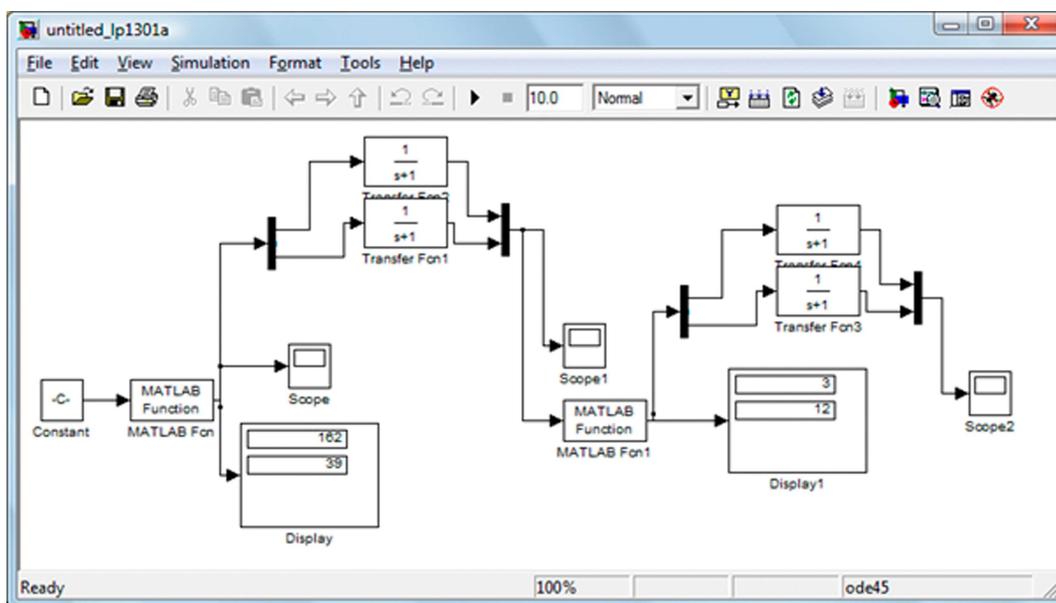


Рис. 2. Проверка обратной задачи диспетчерской цепочки

Рис. 2 подтвердил правильность работы алгоритма генерации последовательной цепочки.

Закключение. Полученные в данной работе результаты создали предпосылки для моделирования процедуры генерация цепочки с учетом склада; согласования экономических интересов; изучения динамики; перехода на более высокий уровень иерархии (руководство); совместного изучения процессов планирования в многоуровневой системе.

Литература

- [1] Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенков В. С. Оптимизация линейных экономических моделей. Статические задачи. – Мн.: БГУ, 2000. – 210 с.
- [2] Чертовской В. Д. Интеллектуализация автоматизированного управления производством. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. – 164 с.

УДК 004.932.2

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ МИНКОВСКОГО ДЛЯ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Шуплецов Ю. В.

Санкт-Петербургский Государственный университет

Санкт-Петербург

e-mail: yury.shupletsov@gmail.com

Shupletsov Y. V. The algorithm of calculation of Minkovsky's dimension for gray-scale images. In this paper the method of image analysis based on the calculation of the Minkovski dimension for the surface constructed by a grey-scale image with using pixel intensities values, was implemented. For 4 classes of biomedical preparations experimental results defining health and affected tissues are given.

В данной работе реализован метод анализа полутоновых изображений, основанный на вычислении размерности Минковского для поверхности, построенной по данному изображению в соответствии с интенсивностями пикселей. Приведены результаты определения здоровых и больных тканей для четырех классов биомедицинских препаратов.

В настоящее время активно развивается область обработки изображений. Всевозможные изменения, такие как масштабирование, затемнение, уменьшение помех, разбиение на более мелкие части, а также извлечение различных характеристических признаков, могут быть сделаны в процессе обработки изображений. Работа с образцами из какой-либо предметной области подразумевает не только извлечение некоторых данных из изображений, но и классификацию снимков, работу со сложноструктурированными образцами, с неочевидными закономерностями и особенностями, зачастую заметными лишь специалистам в этой области. Например, возможность автоматически обрабатывать большие наборы изображений, распознавать снимки микроскопа определенной тематики, определять тип ткани, обнаруживать опухоли, определять наличие каких-либо соединений, может значительно повлиять на ход исследований, облегчить процесс работы с изображениями, например, ускорить обнаружение болезни, постановки диагноза, что дает возможность предложить своевременной и адекватное лечение.

Существует большое количество методов обработки: фрактальный и текстурный анализ, фильтрация, вейвлет-преобразования и нейросетевое моделирование [1–3].

Фрактальный анализ. Один из широко используемых подходов к анализу изображений — фрактальный анализ. Фракталами по определению Б. Мандельброта называют множества, для которых их фрактальная размерность больше топологической. Как правило, такие множества обладают сложной геометрической структурой, а также свойствами самоподобия. Характеристикой, отражающей это самоподобие, является фрактальная размерность. Понятие размерности фрактала уже получило применение во многих дисциплинах, в том числе в информатике, например, для сжатия и кодирования изображений, анализа текстур, обработки документов и т. д. Фрактальный анализ также широко применяется и в других науках. Нетрадиционные для класси-

ческой геометрии подходы, применяемые во фрактальном анализе, помогают получить новые данные об исследуемом образце, используя простое описание характеристик, проанализировать его часто довольно сложную, нерегулярную структуру, например, снимки фармакологических препаратов, тканей живых организмов, разломов геологических пород и т. п.

Ёмкостная размерность. Основной идеей введения фрактальной размерности является понятие “измерения по шкале δ ”. Для каждого δ мы измеряем объект таким образом, что игнорируем неравномерность объектов размером менее δ , и рассматриваем эти измерения при δ стремящемся к 0. Одной из наиболее известных фрактальных размерностей является ёмкостная, относящаяся к классу так называемых box-counting размерностей (название отражает способ определения: перебор элементов разбиения, часто называемых ячейками – boxes).

Пусть F – непустое ограниченное подмножество R^n , а $\Omega = \{\bar{\omega}_i : i = 1, 2, \dots\}$ – покрытие множества F . Пусть $N_\delta(F)$ – количество множеств из Ω с диаметрами, не превосходящими δ . Нижнюю и верхнюю границу размерности определим, соответственно, следующим образом:

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\delta(F)}{-\log_2 \delta}, \quad (1)$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\delta(F)}{-\log_2 \delta}. \quad (2)$$

Если верхняя и нижняя границы равны, то их общее значение называется ёмкостной размерностью F , т. е.

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\delta(F)}{-\log_2 \delta}, \quad (3)$$

где $N_\delta(F)$ – наименьшее количество ячеек диаметра меньше δ для покрытия F . Эти ячейки – замкнутые шары диаметра δ .

Можно сказать, что фрактальная размерность характеризует необычность объекта. Фрактальная размерность для объектов из R^2 лежит в промежутке $[0, 2]$. Точка имеет фрактальную размерность 0, любая кривая – 1, а полностью закрасенный прямоугольник – 2. Большинство объектов, постоянно рассматриваемых в геометрии, имеют целую фрактальную размерность, тогда как природные объекты как правило имеют дробную.

Размерность Минковского. Работать с ёмкостной размерностью достаточно непросто, потому что весьма неэффективным оказывается подсчет числа элементов покрытия заданного диаметра, в которые попадают точки изображения (такой алгоритм предполагает проверку всех элементов покрытия, что для больших изображений неудобно). Оказывается, что можно использовать другую размерность, которая совпадает с ёмкостной для непустых ограниченных множеств в трёхмерном евклидовом пространстве, но вычисляется более экономным способом.

Определение 1 [7]. Пусть $F \in R^n$. Тогда δ -параллельное тело – это множество точек, удаленных от F не более чем на δ :

$$F_\delta = \{x \in R^n : \|x - y\| \leq \delta, y \in F\}. \quad (4)$$

Примеры δ -параллельных тел в R^3 :

- F — одноточечное множество. Тогда F_δ — шар радиуса δ объема $\frac{4}{3}\pi\delta^3$.
- F — отрезок длины L . Тогда F_δ — цилиндр высоты l и радиуса δ объема $\pi L\delta^2$.
- F — прямоугольник с площадью A . Тогда F_δ — параллелепипед высотой 2δ и объемом $2\delta A$.

Определение 2 [7]. Пусть F — непустое подмножество R^n , F_δ — δ -параллельное тело F , $\text{Vol}^n(F_\delta)$ — n -мерный объем F_δ . Если для некоторой константы D при $\delta \rightarrow 0$ предел $\text{Vol}^n(F_\delta)/\delta^{n-D}$ положителен и ограничен, то D называется размерностью Минковского множества F ($\dim_M(F)$).

В каждом из приведенных выше примеров δ -параллельных тел выполняется формула:

$$\text{Vol}^n(F_\delta) \sim \beta\delta^{3-D}, \quad (5)$$

где D — размерность Минковского, а β — некоторая константа.

Теорема 1 [5]. Пусть F — непустое ограниченное множество в R^n . Тогда $\dim_M F = \dim_B F$, т. е. размерность Минковского равна ёмкостной размерности на непустых ограниченных множествах из R^n .

Метод модифицированной фрактальной сигнатуры. Метод основан на построении над полутоновым изображением некоторой поверхности с последующим вычислением ее фрактальной размерности, а именно размерности Минковского. В работе [7] авторы называли размерность сигнатурой, а чтобы подчеркнуть, что они вычисляют не традиционную емкостную размерность, а другую, назвали ее модифицированной фрактальной сигнатурой.

Функция градации серого. Пусть $F = \{X_{ij}, i = 0, 1, \dots, K, j = 0, 1, \dots, L\}$ — преобразование данного изображения, где X_{ij} — уровень серого для пикселя с координатами (i, j) . Поскольку интенсивность определена только для пикселя, F можно рассматривать как функцию от целочисленных аргументов. Но если доопределить ее в точках с вещественными координатами $(x, y), i < x < i + 1, j < y < j + 1$ значением X_{ij} , то можно рассматривать площадь поверхности графика построенной функции F . Если рассматривать поверхность графика F как фрактал, то значение площади данной поверхности можно использовать для вычисления её фрактальной размерности. Заметим, что в анализе изображений множество значений функции градации серого всегда пусто и ограничено в R^3 .

Техника построения δ -параллельного тела. Рассмотрим все точки, удаленные от поверхности графика функции F на δ . Эти точки образуют покрывало толщиной 2δ , которое является δ -параллельным телом и определяется верхней поверхностью $u_\delta(i, j)$ и нижней поверхностью $b_\delta(i, j)$. Для $\delta = 1, 2, \dots$ слои определяются итеративно:

$$u_\delta(i, j) = \max\{u_{\delta-1}(i, j) + 1, \max_{\|(m,n)-(i,j)\|<1} u_\delta(m, n)\}, \quad (6)$$

$$b_\delta(i, j) = \min\{b_{\delta-1}(i, j) - 1, \min_{\|(m,n)-(i,j)\|<1} b_\delta(m, n)\}. \quad (7)$$

Точка $F(x, y)$ включается в δ -параллельное тело, если $b_\delta(x, y) < F(x, y) < u_\delta(x, y)$. Заметим, что δ -параллельные тела с меньшим δ содержатся в δ -параллельных телах с большим δ . Объем δ -параллельного тела вычислется как

$$\text{Vol}_\delta = \sum (u_\delta(i, j) - b_\delta(i, j)). \quad (8)$$

Вычисление фрактальной размерности (фрактальной сигнатуры). Пусть объем δ -параллельного тела равен Vol_δ . По определению размерности Минковского и теореме 1, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\text{Vol}_\delta / \delta^{3-D}) = \beta > 0,$$

то $D = \dim_M F = \dim_B F$. При достаточно малых δ получим $\text{Vol}(F_\delta) = \beta \delta^{3-D}$. Пусть A_δ — площадь поверхности оболочки δ -параллельного тела, тогда

$$A_\delta = \frac{\text{Vol}_\delta}{2\delta} = \frac{\beta \delta^{2-D}}{2} \quad (9)$$

Фактически, A_δ — площадь поверхности графика функции градации серого. Введя переобозначение для β получаем $A_\delta = \beta \delta^{2-D}$ где D — фрактальная размерность.

Тогда при малых δ

$$D \approx 2 - \frac{\log_2 A_\delta}{\log_2 \delta}. \quad (10)$$

Как отмечалось в [6], формула (9) более подходит для строго фрактальных объектов, в то время как формула

$$A_\delta = \frac{\text{Vol}_\delta - \text{Vol}_{\delta-1}}{2} \quad (11)$$

может быть использована как для фрактальных так и не фрактальных поверхностей. В дальнейшем мы используем формулу (11), из которой приближенно находим размерность фрактала по формуле (10).

Алгоритм вычисления фрактальной сигнатуры. Пусть у нас есть полутоновое изображение R . Вычисление площади поверхности графика функции F можно провести для всего изображения, или разбить его на части и выполнить вычисления для каждой ячейки. Такой способ позволяет более точно оценить фрактальную размерность, а кроме того строить карту изображения, где в цветовом режиме показаны полученные значения площадей ячеек разбиения (или размерностей). Приближенное значение фрактальной размерности находится по методу наименьших квадратов как угловой коэффициент прямой в осях $(\log \delta, \log A(\delta))$. Для этого достаточно взять два значения $\delta = 1, 2$.

В работе мы используем следующий алгоритм. Разобьем изображение на n квадратных ячеек размера $N \times N$. Затем для каждой из ячеек построим функцию градации серого F . Определяем u_0^k и b_0^k как $u_0^k(x, y) = b_0^k(x, y) = F(x, y)$, $k = 1, \dots, n$. Для $\delta = 1, 2$

- 1) вычисляем u_δ^k и b_δ^k по формулам (6) и (7);
- 2) вычисляем Vol_δ (объемы δ -параллельных тел для поверхности, построенной над данной ячейкой) согласно (8);

- 3) вычисляем соответствующие площади A_δ^k по формуле (11);
 4) суммируем площади ячеек, получаем значения $A_1 = \cup_{k=1}^n A_1^k$ и $A_2 = \cup_{k=1}^n A_2^k$. Определяем фрактальную размерность документа.

Фрактальная размерность как характеристика разрешения. Для произвольных фрактальных множеств величина размерности D зависит от δ . Авторы работы [6] предложили рассматривать вектор фрактальных размерностей, полученных при изменении δ как характеристику изображения при изменении разрешения: большие значения $D(\delta)$ при малых δ говорят о сильном изменении интенсивности на расстоянии δ , в то время как большие значения размерности для больших δ показывают, что интенсивность меняется мало. Для сравниваемых изображений I и J составляется вектор характеристик из величин $D(\delta)$, где δ принимает значения от 2 до какого-то достаточно большого K , а затем вычисляется “расстояние” между изображениями по формуле

$$\rho(I, J) = \sum_{\delta} (D_I(\delta) - D_J(\delta))^2 \log \left(\frac{\delta + 0.5}{\delta - 0.5} \right). \quad (12)$$

В методе наименьших квадратов $D(\delta)$ определяется через $A_\delta, A_{\delta+1}, A_{\delta-1}$.

Результаты экспериментов. Программное средство реализовано на языке Java, что делает его независимым от платформы, на которой выполняется приложение, а простой и понятный интерфейс обеспечивает удобство использования для широкого круга пользователей. Приложение писалось и тестировалось на среде разработки Eclipse 3.5 под Windows XP и Windows 7. В качестве тестовых образцов были рассмотрены снимки биомедицинских препаратов следующих классов: костная и соединительная ткани, кровь, гистологические препараты.



Рис. 1: Кровь здорового человека

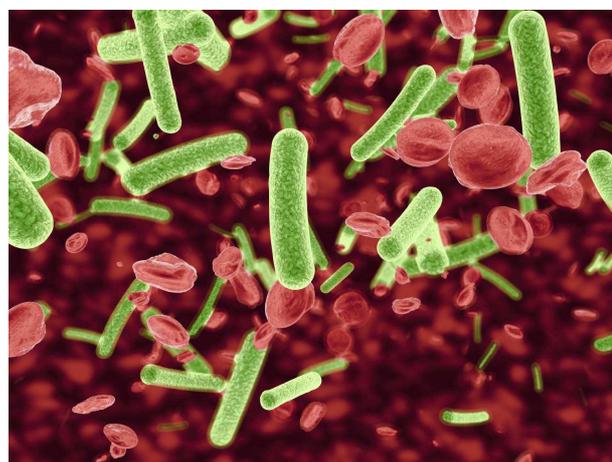


Рис. 2: Лейкемия

На графике показаны значения площадей поверхностей (для $\delta=2$) для изображения здоровой крови и крови, пораженной лейкемией.

Для сравнения изображений здоровой костной ткани и ткани, пораженной остеопорозом, был применен второй метод, где δ изменялось от 1 до 19.

В таблице приведены значения $D(\delta)$ для двух изображений костной ткани. В первой строке даны значения δ , во второй строке — полученные

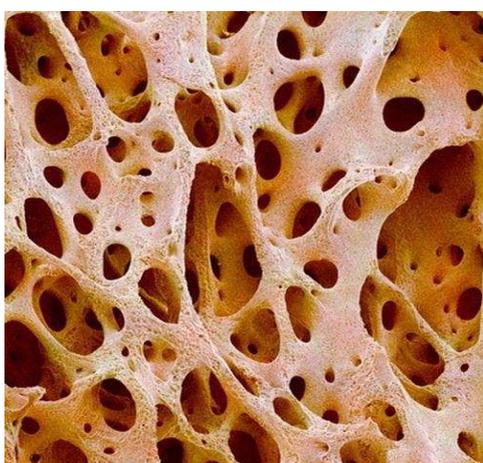
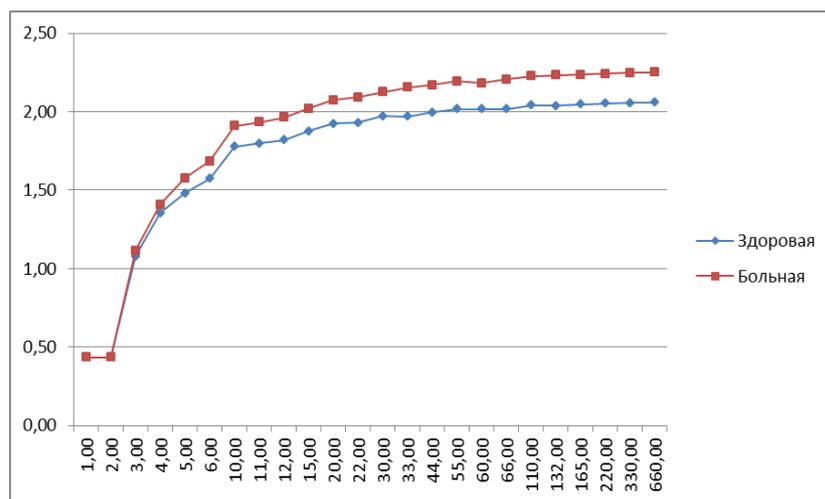


Рис. 3: Здоровая костная ткань

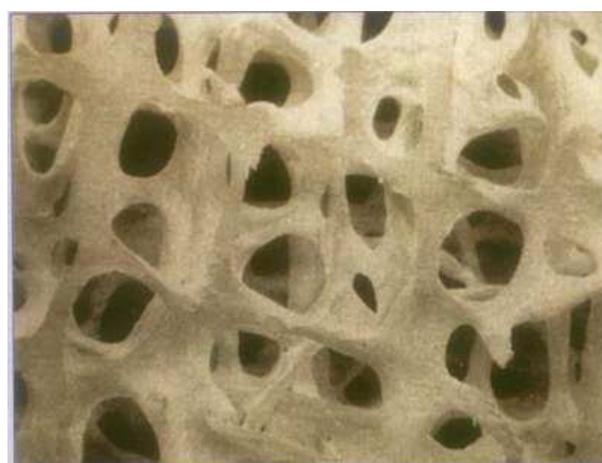


Рис. 4: Остеопороз

данные для здоровой ткани, в третьей — для кости, пораженной остеопорозом. “Расстояние” между изображениями равно 13.3228.

2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.537	0.526	0.565	0.639	0.720	0.771	0.784	0.769	0.768
0.391	0.415	0.442	0.467	0.513	0.545	0.587	0.626	0.629
11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.844	0.997	1.106	1.189	1.258	1.203	1.202	1.338	1.341
0.640	0.725	0.759	0.769	0.815	0.777	0.697	0.603	0.685

Заключение. Результаты применения размерности Минковского для анализа изображений биомедицинских препаратов показывают, что классификация изображений как по фрактальной размерности, так и по вектору фрактальных размерностей дает достаточно надежные результаты. Описанная техника может быть применена для широкого класса текстурных изображений.

Литература

- [1] Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. – Техносфера, 2005.
- [2] Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей. – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2001.
- [3] Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика. – М.: Мир, 1992.
- [4] Chen C. H., Pau L. F., Wang P. S. P. The handbook of Pattern recognition and computer vision – World scientific publishing C^o., 1998.
- [5] Falconer K. J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. – John Wiley & Sons, 1990.
- [6] Shmuel Peleg, Joseph Naor, Ralph Hartley, David Avnir – Multiple Resolution Texture Analysis and Classification.
- [7] Tang Y. Y., Hong Ma, Dihua Xi, Xiaogang Mao, Suen C. Y. Modified Fractal Signature (MFS): A New Approach to Document Analysis for Automatic Knowledge Acquisition // IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., Vol. 9. № 5, 1997, pp. 742–762.
- [8] Xia Y., Feng D., Zhao R. Morphology-Based Multifractal Estimation for Texture Segmentation. // IEEE Trans. on Image Proc., Vol. 15, № 3, 2006. – PP. 614–623.
- [9] Yong Xu, Hui Ji, Cornelia Fermuller. Viewpoint Invariant Texture Description Using Fractal Analysis – Springer Science+Business Media, LLC 2009.
- [10] http://neuroface.narod.ru/files/NN_FFI.pdf

EqWorld

Мир математических уравнений

<http://eqworld.ipmnet.ru>

Редактор: А. Д. Полянин



Уравнения занимают центральное место в современной математике и являются основой для математического моделирования многочисленных явлений и процессов в науке и технике.

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны также некоторые методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники и монографии, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук и является бесплатным для его пользователей.

- Точные решения
- Методы решения
- Вспомогательные разделы
- Программы
- Образование
- Об этом сайте
- Для авторов
- Информация

СОДЕРЖАНИЕ

История и современность

Будаев В. Д., Колдунов А. В., Корсакова О. С. К 100-летию со дня рождения профессора Б. З. Вулиха.....	3
Виденский В. С. К столетию открытия полиномов Бернштейна.....	5
Одинец В. П. О работе Л. В. Канторовича в ЛГПИ им. А. И. Герцена....	11

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

Аксенов А. В., Козырев А. А. Метод построения редукций уравнения пограничного слоя.....	14
Андреев В. К. Симметрии уравнений двумерных движений жидкости в переменных траектории–потенциал Вебера.....	18
Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Судаков В. А. Устойчивость решения одного класса начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.....	23
Бадюкина Т. Е. Трёхпараметрическая бифуркационная граничная задача о дивергентной потере устойчивости удлиненной пластины в сверхзвуковом потоке газа.....	30
Васин А. В. Математическое моделирование динамических нагрузок на гидрозатворы.....	36
Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. О некоторых решениях уравнений аэрогидромеханики.....	40
Гайнетдинова А. А. Классификация систем двух ОДУ второго порядка, допускающих четырёхмерные алгебры Ли 3-го порядка.....	46
Ганжа Е. И. Преобразования Лапласа уравнений с частными производными в многомерном случае.....	51
Дранко О. И., Яковенко Г. Н. Реинвестиция — инструмент для оптимизации дивидендной политики.....	56
Жестков С. В., Кочегарова М. А. О существовании топологических солитонов комплекснозначной модели уравнений реакций с диффузией и законом нелинейности удвоенной степени.....	60
Жестков С. В., Новашинская В. С. О построении оптических солитонов (2+1)-мерного уравнения шредингера с зависящими от времени коэффициентами и законом нелинейности удвоенной степени.....	62
Зайцев В. Ф., Хоанг Нгы Хуан. Аналогии вариационных симметрий уравнений вида $y''' = F(y, y'')$	65
Каримова Е. Н. Симметричные свойства линейного волнового уравнения с переменными коэффициентами.....	69
Ким-Тян Л. Р. Smoothness properties of semigroups for abstract elliptic operators.....	73
Коптев А. В. Принципы построения решений уравнений Навье–Стокса....	76

Краснова Д. А. Групповая классификация уравнений идеальной жидкости в лагранжевых координатах по функциям начального распределения скоростей	79
Кувшинова А. Н. Теорема Гамильтона–Кэли для матриц, полиномиальных по спектральному параметру Шмидта.....	81
Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С. Некоторые бифуркационные задачи микро и наноэлектроники. Формирование нанорельефа	87
Лемешкова Е. Н. Эволюция совместного движения трёх вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое.....	90
Логинов Б. В., Русак Ю. Б., Ким-Тян Л. Р. Нормальные формы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной при существовании жордановой цепочки максимальной длины.....	93
Ляхов Л. Н., Райхельгауз Л. Б. О фундаментальном решении оператора Лапласа в курсе математической физики	110
Магденко Е. П. Решение линейной сопряжённой задачи конвекции в цилиндрах.....	115
Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для одного уравнения с доминирующей частной производной.....	119
Пугина Л. В., Волосов К. А. О достоверности результатов одной модели спиральных волн.....	121
Резникова И. А. Об априорных оценках решений сопряжённой тепловой задачи в шаровой области	125
Созонтова Е. А. Характеристические задачи для одной системы гиперболического типа в трехмерном пространстве	130
Филатов О. П. Теорема об усреднении в условиях неограниченных скоростей	133
Ханукаев Ю. И. Об определении ориентации твёрдого тела с неподвижной точкой по его угловой скорости.....	134
Шишкина Э. Л. Равенство для итерированных весовых сферических средних, порождённых обобщённым сдвигом	143
<i>Современные проблемы теории функций и функционального анализа</i>	
Зыкова Т. В. Алгоритмы построения области сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения тетраномиального и пентаномиального алгебраических уравнений.....	146
Колдунов А. В. Один способ построения последовательностей Коши	149
Кытманов А. А. О построении интегрального представления по вееру торического многообразия	151
Ловягин Ю. Н. Геометрическая теория меры на основе аксиоматического нестандартного анализа.....	154
Мартынов О. М. Об одном уточнении оценки снизу проекционной константы $\lambda(n - 5, n)$	167

Актуальные проблемы математического образования

Будаев В. Д. Об особенностях содержания курса математического анализа для студентов направления “Прикладная математика и информатика” ...	171
Волков Д. Ю., Галунова К. В. Семейство кривых и поверхностей второго порядка с целочисленными уравнениями.....	174
Гарминович Н. А., Зацепина Т. В., Комова Т. Ю. Обучение студентов организации исследовательской и проектной деятельности учащихся по математике во внеурочной работе	179
Десятник В. Л., Рукшин С. Е. Характеристические свойства вписанных чётноугольников и связанные с ними неравенства для наборов точек плоскости.....	184
Колдунов А. В. Численная оптимизация в курсе “Численные методы”....	190
Комарова С. М. Система модулей при обучении студентов математике с использованием средств информационных технологий.....	192
Ловьянова И. В. Методические основы организации обучения математике в старшей профильной школе	198
Миронова Ю. Н. Применение компьютерных программ при решении задач линейного программирования	204
Недосекина И. С., Треногин В. А. Периодические и почти периодические решения некоторых уравнений в частных производных.....	205
Нефедов Д. Е. Проблемы содержания курса математики.....	210
Пайсон Т. П. Анализ учебно-научных математических текстов.....	213
Подаева Н. Г., Подаев М. В. Проектирование социокультурного содержания школьного математического образования.....	216

Актуальные информационные системы и технологии моделирования

Андреева Н. М., Кучунова Е. В. Эмпирический анализ матрицы тестовых результатов с целью контроля качества теста	219
Балонин Н. А., Гусаров А. В., Леонтьев С. В., Марлей В. Е. WEB-сервис для отслеживания необходимой пользователю информации в интернете.....	222
Батраков А. С., Кусюмов А. Н., Романова Е. В. Моделирование реверса эффекта Магнуса для обтекания вращающегося кругового цилиндра с учётом ламинарно-турбулентного перехода.....	227
Батюков А. М. Исследование модели процессов агрегации, ограниченной диффузией.....	233
Журавлев А. Е. Внедрение БРС в учебный процесс вуза, и адаптация средств его автоматизации.....	238
Зайцев М. В., Метрикин В. С. Неавтономные динамические системы с трением наследственного типа.....	241
Казанцев М. А. О комплексе систем планирования производства для промышленного предприятия	244

Кудрин Б. К. Компьютерное моделирование электромагнитного поля нескольких несоосных катушек индуктивности.....	246
Ляпина А. А., Мамедова Т. Ф. ВЕБ-приложение для автоматизированного расчета нормативов допустимых сбросов веществ.....	250
Метрикин В. С., Никифорова И. В. Математическое моделирование динамики системы с ударными взаимодействиями с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний	255
Моглан Д. В. Когнитивное моделирование содержания обучения информатике на основе системы MOODLE.....	260
Смирнов Е. М., Фомина И. К. Критичные направления разработки технологии моделирования искусственных нейронных сетей в облачных вычислениях.....	265
Фомин В. В., Флегонтов А. В. Модуль WEB-реализации модифицированного алгоритма k-средних метода «деревья решений».....	269
Чертовской В. Д. Решение обратной задачи статического линейного программирования	276
Шуплецов Ю. В. Алгоритм вычисления размерности Минковского для полутоновых изображений.....	280
EqWorld	287
Содержание	288

**НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ
И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Материалы научной конференции
ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2013

15–20 апреля 2013 г.

Подписано в печать 26.03.2013. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 18,0 уч. изд. л. 18,0 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ №

Издательство РГПУ им. А. И. Герцена
191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Типография РГПУ. 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48