РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А.И.ГЕРЦЕНА

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Материалы научной конференции

ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2006

17-22 апреля 2006

Санкт-Петербург
2006

ББК 74.5
Н 47

Печатается по рекомендации Учебно-методического объединения по направлениям педагогического образования Министерства образования Российской Федерации

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук профессор **Ханин С.Д.**
доктор физ.-мат. наук профессор **Широков Н.А.**

Редактор: доктор физ.-мат. наук профессор **Зайцев В.Ф.**

Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2006. Материалы научной конференции, 17-22 апреля 2006. – СПб., 2006. – 251 с.
ISBN 5–336–00055–8

Материалы традиционной научной конференции "Герценовские чтения", проходившей при кафедре математического анализа РГПУ им. А.И. Герцена 17-22 апреля 2006 г. Представленные статьи подготовлены по наиболее содержательным докладам трех основных секций: "Современные проблемы теории дифференциальных уравнений", "Современные проблемы теории функций и функционального анализа", "Актуальные проблемы математического образования".

Результаты работ рекомендуется использовать при чтении спецкурсов, а также как материал для научной работы аспирантов, магистрантов, студентов старших курсов математических факультетов.

ISBN 5–336–00055–8

Современные проблемы теории дифференциальных уравнений

К ПОСТАНОВКЕ И ОБОСНОВАНИЮ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Андреев А.А., Огородников Е.Н.
Самарский государственный технический университет
Самара
e-mail: andre@ssu.samara.ru, msauhkin@gmail.ru

Понятие нелокального оператора и связанное с ним понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. В соответствием с определением, приведенным А.М.Нахушевым в его монографии [1], к числу нелокальных дифференциальных уравнений относятся нагруженные уравнения, уравнения, содержащие дробные производные искомых функций, уравнения с отклоняющимися, в частности, с запаздывающими аргументами; иными словами такие уравнения, в которые неизвестная функция и ее производные входят, вообще говоря, при разных значениях аргументов. В целом, такие уравнения можно отнести к классу функционально-дифференциальных уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, в том числе такие, в которых наряду с искомой функцией $u(t)$ присутствует $u(\alpha(t))$, где $\alpha^2(t) \equiv \alpha(\alpha(t)) = t$ – так называемый сдвиг Карлемана [2] или инволютивное отклонение, по-видимому являются наиболее изученными. Теория дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих инволютивно преобразованные аргументы, имеют недавнюю историю. Более подробную историю вопроса, а также библиографию можно найти в работах [3-7].

Под инволютивным преобразованием (отклонением, сдвигом) точек плоскости действительных переменных x, y понимается гомеоморфизм области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ на себя, ставящий в соответствие любой точке $P(x, y) \in \Omega$ точку $Q(\alpha(x, y); \beta(x, y)) \in \Omega$, причем $\alpha(\alpha(x, y); \beta(x, y)) = x$, $\beta(\alpha(x, y); \beta(x, y)) = y$. Отметим, что класс инволютивных преобразований, отображающих ограниченную область Ω на себя, весьма узок. В качестве конкретного примера далее используем преобразование $\alpha = 1 - x$, $\beta = y$.

Рассмотрим уравнение

$$L(u(x, y)) + M(u(1 - x, y)) = 0, \tag{1}$$

где $L \equiv y^{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c(x, y)$, $M \equiv a_1(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_1(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y)$, $m > 0$, в области $\Omega = \left\{(x, y) : 0 < \dfrac{y^2}{2} < x < 1 - \dfrac{y^2}{2}, y > 0\right\}$.

Так как $\dfrac{\partial}{\partial x}u(1-x,y)=-\dfrac{\partial u}{\partial x}(1-x,y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}u(1-x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(1-x,y)$, где под $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1-x,y)$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1-x,y)$ понимаются соответствующие частные производные $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, вычисленные в точке $Q(1-x;y)$, то оператор $M(u(1-x,y))=\left[a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+b_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}+c_1(x,y)\right]u(1-x,y)=-a_1(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}(1-x,y)+b_1(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(1-x,y)+c_1(x,y)u(1-x,y)$, а уравнение (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}y^{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u-\\-a_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x,y)+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(1-x,y)+c_1(x,y)u(1-x,y)=0.\quad(2)\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (2) в точке $Q(1-x;y)$. Замечая, что $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(1-x,y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1-x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(1-x,y)$, получим

$$\begin{aligned}\left[y^{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-a(1-x,y)\frac{\partial}{\partial x}+b(1-x,y)\frac{\partial}{\partial y}+c(1-x,y)\right]u(1-x,y)-\\-a_1(1-x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_1(1-x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c_1(1-x,y)u=0.\quad(3)\end{aligned}$$

Обозначая $v(x,y)=u(1-x,y)$ в (1) и (3) для вектор-функции $U(x,y)=(u;v)^T$, получим систему дифференциальных уравнений

$$y^{2m}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+A(x,y)\frac{\partial U}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial U}{\partial y}+C(x,y)U=0, \tag{4}$$

где $\quad A(x,y)=\begin{pmatrix}a(x,y) & a_1(x,y)\\ -a_1(1-x,y) & -a(1-x,y)\end{pmatrix}$,

$$B(x,y)=\begin{pmatrix}b(x,y) & b_1(x,y)\\ b_1(1-x,y) & b(1-x,y)\end{pmatrix},\quad C(x,y)=\begin{pmatrix}c(x,y) & c_1(x,y)\\ c_1(1-x,y) & c(1-x,y)\end{pmatrix}.$$

Известно [8], что если компоненты матриц $A(x,y)$, $B(x,y)$ и $C(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы Проттера [9], то для системы уравнений (4) существует единственное регулярное решение $U(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega)$ задачи Коши с данными на линии параболического вырождения

$$\lim_{y\to+0}U(x,y)=\bar{\tau}(x),\qquad x\in[0,1]; \tag{5}$$

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial U}{\partial y}=\bar{\nu}(x),\qquad x\in(0,1). \tag{6}$$

При дополнительном требовании симметричности этих матричных коэффициентов решение задачи Коши может быть найдено методом Римана [10].

Выделяя первую компоненту вектор-функции $U(x,y)$ и учитывая, что $\bar{\tau}(x) = (\tau(x);\tau(1-x))^T$, $\bar{\nu}(x) = (\nu(x);\nu(1-x))^T$, можно найти решение задачи Коши для исходного уравнения (1) в ее классической постановке:

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad x \in [0,1], \tag{7}$$

$$\lim_{y\to+0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu(x), \qquad x \in (0,1). \tag{8}$$

Также хорошо известно [10], что входящее в теорему Проттера условие Геллерстедта [11]

$$\lim_{y\to+0} y^{1-m} A(x,y) = 0$$

не является необходимым для корректности задачи Коши. В качестве примеров обычно приводятся уравнения $L_1(u) = 0$ с оператором Бицадзе-Лыкова [1] $L_1 \equiv y^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a\dfrac{\partial}{\partial x}$ или с оператором типа Бицадзе-Лыкова $L_m \equiv y^{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + ay^{m-1}\dfrac{\partial}{\partial x}$ [8].

Покажем, что для уравнения с оператором Бицадзе-Лыкова, возмущенного значениями одноименной младшей производной, вычисленной в точке $Q(1-x;y)$, задача Коши (7), (8) остается корректной.

В области Ω, определенной выше, рассмотрим уравнение

$$L_1(u) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}u(1-x,y) = 0, \tag{9}$$

где $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$.

Так как $\dfrac{\partial}{\partial x}u(1-x,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial x}(1-x,y)$, то уравнение (9) можно записать следующим образом

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(1-x,y) = 0. \tag{10}$$

Рассматривая дополнительно уравнение (10) в точке $Q(1-x;y)$ и обозначая $v(x,y) = u(1-x,y)$, для вектор-функции $U(x,y) = (u;v)^T$ получим систему дифференциальных уравнений

$$y^2 U_{xx} - U_{yy} + AU_x = 0 \tag{11}$$

с постоянной матрицей $A = \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ -\varepsilon & -a \end{pmatrix}$.

В характеристических координатах $\xi = x - \dfrac{y^2}{2}$, $\eta = x + \dfrac{y^2}{2}$ система уравнений (11) приводится к системе уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД) специального вида

$$(\eta-\xi)U_{\xi\xi} + PU_\xi - GU_\eta = 0, \tag{12}$$

с матрицами $P = \dfrac{1}{4}(E+A)$, $G = \dfrac{1}{4}(E-A)$, E – единичная матрица.

Матрица Римана для системы уравнений (12) имеет следующий вид [12]:

$$R\,(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sqrt{\frac{\eta-\xi}{\eta-\xi_0}}\left(\frac{\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi}\right)^G F(G,P;E;\sigma),$$

где $F(G,P;E;\sigma)$ – гипергеометрическая функция с матричными параметрами [13], $\sigma=\dfrac{(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)}$ и z^G – степенная функция с матричным параметром, определяются на спектре матриц G и P известным образом [14].

Обозначая спектры матриц A, G и P символами $\Lambda(A)=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $\Lambda(G)=\{\lambda_1,\lambda_2\}$, $\Lambda(P)=\{\mu_1,\mu_2\}$ и учитывая равенство $G+P=\dfrac{1}{2}E$ для собственных значений α_k,λ_k и μ_k, получим следующие соотношения: $\lambda_k=\dfrac{1}{4}(1-\alpha_k)$, $\mu_k=\dfrac{1}{4}(1+\alpha_k)$, причем $\lambda_k+\mu_k=\dfrac{1}{2}$, $k=1,2$.

Используя определение функции на спектре матрицы, в работе [15] выписан явный вид матрицы Римана, а, именно, если $\lambda_1\neq\lambda_2$, то

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sqrt{\frac{\eta-\xi}{\eta-\xi_0}}\left[\frac{G-\lambda_2E}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi}\right)^{\lambda_1}F(\lambda_1,\mu_1;1;\sigma)+\right.$$
$$\left.+\frac{G-\lambda_1E}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi}\right)^{\lambda_2}F(\lambda_2,\mu_2;1;\sigma)\right];$$

если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, то

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\sqrt{\frac{\eta-\xi}{\eta-\xi_0}}\left(\frac{\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi}\right)^{\lambda}\left\{EF(\lambda,\mu;1;\sigma)+\right.$$
$$\left.+\,(G-\lambda E)\left[\ln\frac{\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi}F(\lambda,\mu;1;\sigma)+F_*(\lambda,\mu+\varepsilon;1;\sigma)-F_*(\lambda+\varepsilon,\mu;1;\sigma)\right]\right\},$$

где $F_*(\alpha+\varepsilon,\beta;\gamma;\sigma)$ – неоднородная гипергеометрическая функция Гаусса [16].

Учитывая вид матрицы A и полагая для определенности $a>0$, получим следующие реализации ее спектра:

1) $\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{a^2-\varepsilon^2}\in\mathbb{R}$, если $a>\varepsilon$ $(a^2-\varepsilon^2\neq 1)$;

2) $\alpha_1=\alpha_2=0$, если $a=\varepsilon$ (матрица A – нильпотентна);

3) $\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{\varepsilon^2-a^2}i\in\mathbb{C}$, если $a<\varepsilon$.

Случаи $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$, (тогда $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\dfrac{1}{2}$) и $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$ следует выделить особо. В этих случаях вид матрицы Римана существенно упрощается:

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=2G\sqrt{\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi}}+(E-2G)\sqrt{\frac{\eta-\xi}{\eta-\xi_0}}.$$

Применяя метод Римана, в работе [15] для системы уравнений (11) найдены решения задачи Коши (5), (6) в области Ω при некоторых ограничениях на спектр матрицы A. Так, например, если $\Lambda(A) \subset (-1,1)$, то решение системы уравнений (11) в матричной форме имеет вид

$$U(x,y) = B^{-1}(G,P)\int\limits_0^1 (1-t)^{G-E}t^{P-E}\bar{\tau}(s)\,dt + H^{-1}(P,G)y\int\limits_0^1 (1-t)^{-P}t^{-G}\bar{\nu}(s)\,dt,$$

где $s = x - \dfrac{y^2}{2}(1-2t)$, матрицы $B(G,P) = \Gamma(G)\Gamma(P)\Gamma^{-1}(G+P)$, $H(P,G) = B(E-P, E-G)$ [13], а $B(p,q)$ и $\Gamma(z)$ – бета- и гамма-функции соответственно [17].

В частности, при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ в развернутой записи

$$U(x,y) = \frac{A-\alpha_2 E}{\alpha_1-\alpha_2}\left[k_1\int\limits_0^1 (1-t)^{\lambda_1-1}t^{\mu_1-1}\bar{\tau}(s)\,dt + h_1 y\int\limits_0^1 (1-t)^{-\mu_1}t^{-\lambda_1}\bar{\nu}(s)\,dt\right] +$$
$$+ \frac{A-\alpha_1 E}{\alpha_2-\alpha_1}\left[k_2\int\limits_0^1 (1-t)^{\lambda_2-1}t^{\mu_2-1}\bar{\tau}(s)\,dt + h_2 y\int\limits_0^1 (1-t)^{-\mu_2}t^{-\lambda_2}\bar{\nu}(s)\,dt\right],$$

где $k_i = B^{-1}(\lambda_i,\mu_i)$, $h_i = H^{-1}(\mu_i,\lambda_i) = B^{-1}(1-\mu_i, 1-\lambda_i)$, $i = 1,2$.

Используя явный вид идемпотентов $\dfrac{A-\alpha_1 E}{\alpha_2-\alpha_1}$ и $\dfrac{A-\alpha_2 E}{\alpha_1-\alpha_2}$, выписываем первую компоненту вектора $U(x,y)$ и находим тем самым решение задачи Коши (7), (8) для уравнения (9).

В случае $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ решение системы уравнений (11) имеет вид:

$$U(x,y) = \frac{E+A}{2}\left[\bar{\tau}\left(x+\frac{y^2}{2}\right) + \frac{y}{2}\int\limits_0^1 \frac{\bar{\nu}(s)\,dt}{\sqrt{1-t}}\right] +$$
$$+ \frac{E-A}{2}\left[\bar{\tau}\left(x-\frac{y^2}{2}\right) + \frac{y}{2}\int\limits_0^1 \frac{\bar{\nu}(s)\,dt}{\sqrt{t}}\right],$$

где $s = x - \dfrac{y^2}{2}(1-2t)$.

Выделяя первую компоненту вектора $U(x,y)$, находим

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\Biggl\{(1+a)\tau\left(x+\frac{y^2}{2}\right) + (1-a)\tau\left(x-\frac{y^2}{2}\right) +$$
$$+ \varepsilon\left[\tau\left(1-x-\frac{y^2}{2}\right) - \tau\left(1-x+\frac{y^2}{2}\right)\right] +$$
$$+ \frac{y}{2}\int\limits_0^1 [(1+a)\nu(s) + \varepsilon\nu(1-s)]\frac{dt}{\sqrt{1-t}} + \frac{y}{2}\int\limits_0^1 [(1-a)\nu(s) - \varepsilon\nu(1-s)]\frac{dt}{\sqrt{t}}\Biggr\}.$$

Достаточные условия корректности задачи Коши для уравнения (9) приведены в теореме.

Теорема 1. *Если заданные функции* $\tau(x), \nu(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $a^2 - \varepsilon^2 \leqslant 1$, *то задача (7), (8) для уравнения (9) в классе функций* $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega \cup (0,1)\right) \cap C^2(\Omega)$ *корректна по Адамару [10].*

Хорошо известно, что вырождение порядка вносит новый аспект в теорию уравнений и систем уравнений смешанного типа, в частности, в вопрос корректной постановки задачи Коши [10]. Именно, задача с начальным условием (8) на линии вырождения может оказаться не разрешимой, в то время, как задача с условием $\lim\limits_{y\to+0} k(y)u_y(x,y) = \nu(x)$ при специальном выборе зависимости $k = k(y)$ становится корректной. Следующий пример показывает, как это обстоятельство отражается на постановке задачи Коши для некоторого вырождающегося дифференциального оператора второго порядка, возмущенного значениями первой производной искомой функции, вычисленной в инволютивной точке.

Рассмотрим при $m > 0$ уравнение

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial y}u(1-x,y) = 0. \tag{13}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial y}u(1-x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(1-x,y)$, то уравнение (13) можно записать следующим образом:

$$y^{2m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}(1-x,y) = 0. \tag{14}$$

Рассматривая дополнительно уравнение (14) в точке $Q(1-x,y)$ и обозначая, как обычно, $v(x,y) = u(1-x,y)$, для вектор-функции $U(x,y) = (u;v)^T$, получим систему дифференциальных уравнений

$$y^{2m+1}U_{xx} - yU_{yy} - BU_y = 0 \tag{15}$$

с матрицей $B = \begin{pmatrix} b & -\varepsilon \\ -\varepsilon & b \end{pmatrix}$.

Уравнение (13) и систему уравнений (15) будем изучать в области Ω, ограниченной отрезком $[0,1]$ прямой $y=0$ и характеристиками $\xi = 0$ и $\eta = 1$, где $\xi = x - \dfrac{1}{m+1}y^{m+1}$, $\eta = x + \dfrac{1}{m+1}y^{m+1}$. В характеристических координатах система уравнений (15) приводится к ЭПД-системе частного вида

$$(\eta - \xi)U_{\xi\eta} - G(U_\eta - U_\xi) = 0$$

с матрицей $G = \dfrac{1}{2(m+1)}(B + mE)$, спектр которой

$$\Lambda(G) = \left\{\lambda_i : \lambda_i = \frac{\beta_i + m}{2(m+1)}, \beta_i \in \Lambda(B)\right\}.$$

В работе А.А.Андреева [18] для системы дифференциальных уравнений (15) найдены решения задачи Коши в области Ω с условием (5) и

$$\lim_{y\to+0} y^B U_y(x,y) = \bar{\nu}(x) = (\nu_1(x);\nu_2(x))^T, \qquad x \in (0,1), \tag{16}$$

вместо условия (6) при различных предположениях относительно спектра $\Lambda(B)$ матрицы B.

В случае, когда $\Lambda(G) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$, а, следовательно, $\Lambda(B) \subset (-m, 1)$, это решение может быть записано в виде

$$U(x,y) = k(G)\int\limits_0^1 \left(t-t^2\right)^{G-E}\bar{\tau}(s)\,dt + \frac{y^{E-B}k(E-G)}{E-B}\int\limits_0^1 \left(t-t^2\right)^{-G}\bar{\nu}(s)\,dt,$$

где $\quad k(G) = B^{-1}(G,G) \equiv \Gamma(2G)\Gamma^{-2}(G)$ [13],

$$s = x + \frac{1}{m+1}y^{m+1}(2t-1).$$

При любых действительных значениях коэффициентов b и ε ($\varepsilon \neq 0$) матрица B является матрицей простой структуры. Ее собственные значения $\beta_1 = b+\varepsilon$ и $\beta_2 = b-\varepsilon$ действительны и различны. Для этого случая в работе [18] решение задачи Коши (5), (16) получено в явном виде

$$U(x,y) = \frac{B-\beta_2 E}{\beta_1-\beta_2}\left[k_1\int\limits_0^1 \left(t-t^2\right)^{\lambda_1-1}\bar{\tau}(s)\,dt + h_1\frac{y^{1-\beta_1}}{1-\beta_1}\int\limits_0^1 \left(t-t^2\right)^{-\lambda_1}\bar{\nu}(s)\,dt\right] +$$
$$+\frac{B-\beta_1 E}{\beta_2-\beta_1}\left[k_2\int\limits_0^1 \left(t-t^2\right)^{\lambda_2-1}\bar{\tau}(s)\,dt + h_2\frac{y^{1-\beta_2}}{1-\beta_2}\int\limits_0^1 \left(t-t^2\right)^{-\lambda_2}\bar{\nu}(s)\,dt\right], \quad (17)$$

где $\quad k_i = k(\lambda_i) = B^{-1}(\lambda_i,\lambda_i)$, $h_i = h(\lambda_i) = k(1-\lambda_i)$, $i = 1,2$.

Рассмотрим подробнее условие (16). Используя определение функциональной матрицы

$$y^B = \frac{B-\beta_2 E}{\beta_1-\beta_2}y^{\beta^1} + \frac{B-\beta_1 E}{\beta_2-\beta_1}y^{\beta^2}$$

в случае $\beta_1 \neq \beta_2$ [14] и явный вид идемпотентов $\frac{B-\beta_2 E}{\beta_1-\beta_2}$ и $\frac{B-\beta_1 E}{\beta_2-\beta_1}$, легко показать, что условие (16) равносильно двум инволютивно взаимосвязанным условиям, а, именно, если $\nu_1(x) = \nu(x)$ – заданная функция, то $\nu_2(x) = \nu(1-x)$. Таким образом, в силу условия (16) одновременно существуют пределы

$$\frac{1}{2}\lim_{y\to+0}\left\{y^{b+\varepsilon}\left[u_y(x,y)-u_y(1-x,y)\right] + y^{b-\varepsilon}\left[u_y(x,y)+u_y(1-x,y)\right]\right\} = \nu(x),$$

$$\frac{1}{2}\lim_{y\to+0}\left\{y^{b+\varepsilon}\left[-u_y(x,y)+u_y(1-x,y)\right] + y^{b-\varepsilon}\left[u_y(x,y)+u_y(1-x,y)\right]\right\} = \nu(1-x),$$

а, значит, будут существовать их сумма и разность

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to+0} y^{b-\varepsilon}\left[u_y(x,y)+u_y(1-x,y)\right] = \nu(x)+\nu(1-x),\\ &\lim_{y\to+0} y^{b+\varepsilon}\left[u_y(x,y)-u_y(1-x,y)\right] = \nu(x)-\nu(1-x). \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть $\nu(x)-\nu(1-x)=\mu_1(x)$, $\nu(x)+\nu(1-x)=\mu_2(x)$. Вновь учитывая, что

$$u_y(1-x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(1-x,y)=\frac{\partial}{\partial y}u(1-x,y),$$

условия (18) можно перезаписать в виде

$$\begin{gathered}\lim_{y\to+0} y^{b+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y)-u(1-x,y)\right]=\mu_1(x),\\ \lim_{y\to+0} y^{b-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y)+u(1-x,y)\right]=\mu_2(x),\end{gathered}\tag{19}$$

$x\in(0,1)$. Выписывая первую компоненту вектора $U(x,y)$ в формуле (17), находим решение начальной задачи с условиями (7) и (19) для дифференциального уравнения (15) в следующем виде:

$$\begin{gathered}u(x,y)=\frac{1}{2}\left[k(\lambda_1)\int\limits_0^1\frac{\tau(s)-\tau(1-s)}{(t-t^2)^{1-\lambda_1}}dt+k(1-\lambda_1)\frac{y^{1-\beta_1}}{1-\beta_1}\int\limits_0^1\frac{\mu_1(s)}{(t-t^2)^{\lambda_1}}dt\right]+\\ +\frac{1}{2}\left[k(\lambda_2)\int\limits_0^1\frac{\tau(s)+\tau(1-s)}{(t-t^2)^{1-\lambda_2}}dt+k(1-\lambda_2)\frac{y^{1-\beta_2}}{1-\beta_2}\int\limits_0^1\frac{\mu_2(s)}{(t-t^2)^{\lambda_2}}dt\right],\end{gathered}\tag{20}$$

$$\lambda_i=\frac{\beta_i+m}{2(m+1)},\quad \beta_i\in(-m,1),$$

$$k(\lambda_i)=\frac{1}{B(\lambda_i,\lambda_i)},\ i=1,2;\quad s=x+\frac{1}{m+1}y^{m+1}(2t-1).$$

Теорема 2. *Пусть $\tau(x),\mu_i(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $i=1,2$. Тогда регулярное в области Ω решение уравнения (13) в классе функций $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\cup(0,1)\right)\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее начальным условиям (7) и (19) при $b-\varepsilon, b+\varepsilon\in(-m,1)$ имеет вид (20). Задача корректна по Адамару.*

Анализируя приведенные примеры, можно сделать следующий вывод.

Корректность по Адамару начальных задач для вырождающихся гиперболических операторов, возмущенных младшими производными искомой функции с инволютивно преобразованными аргументами, находится в зависимости и является прямым следствием корректности задачи Коши для соответствующих систем дифференциальных уравнений, к которым данные нелокальные дифференциальные уравнения редуцируются.

Литература

[1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

[2] Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandl. des internat. Mathem. Kongr. – Vol. I. – Zürich, 1932. – P. 138–151.

[3] Андреев А.А. О корректности начальных задач для некоторых уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом // "Уравнения неклассического типа". – Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1986. – С. 10–14.

[4] Андреев А.А. О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом // "Дифференциальные уравнения и их приложения": Тр. II международ. семинара. – Самара: Самарский ун-т, 1998. – С. 5–18.

[5] Андреев А.А., Огородников Е.Н. О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: "Физ.-мат. науки", 2000. – Вып. 9. – С. 32–36.

[6] Андреев А.А. Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения, 2004. – Т. 40, № 5. – С. 1126–1128.

[7] Андреев А.А., Саушкин И.Н. Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: "Физ.-мат. науки", 2005. – Вып. 34. – С. 10–16.

[8] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

[9] Protter M.N. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation // Can. J. Math. – V.6. 1954. – P. 542–553.

[10] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных – М.: Наука, 1981. – 448 с.

[11] Gellerstedt S. Sur une equation lineare aux derivees partielles de type mixte // Arkiv. Mat., Astr. och Fysik – №29. B25A, 1937. – P. 1–23.

[12] Андреев А.А. О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций // Материалы Куйб. обл. межвуз. науч. совещания-семинара "Дифференц. уравнения (математическая физика)". №12. – Куйбышев, 1984. – С. 8–9.

[13] Андреев А.А., Огородников Е.Н. Матричные интегродифференциальные операторы и их применение // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: "Физ.-мат. науки", 1999. – Вып. 7. – С. 27–37.

[14] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

[15] Андреев А.А., Сеницкий А.Ю. О задаче Коши для системы вырождающихся уравнений типа Лыкова // "Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных". – Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. – С. 105–107.

[16] Андреев А.А., Килбас А.А. О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях // Изв. высш. учеб. заведений. Сер.: "Математика", 1984. – №12. – С. 3–12.

[17] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 296 с.

[18] Андреев А.А. Задача Коши для некоторых вырождающихся гиперболических систем второго и четвертого порядков // “Дифференц. и интеграл. уравнения”. – Куйбышев: КГПИ, 1987. – С. 46–57.

АНАЛОГИ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ, С ИНВОЛЮТИВНО ОТКЛОНЯЮЩИМИСЯ АРГУМЕНТАМИ

Андреев А.А., Саушкин И.Н.
Самарский государственный университет
Самара
e-mail: andre@ssu.samara.ru; insau@ssu.samara.ru

Гомеоморфизм области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ на себя, ставящий в соответствие любой точке $P(x,\,y) \in \Omega$ точку $P'(\alpha,\,\beta) \in \Omega$, где $\alpha = \alpha(x,\,y)$, $\beta = \beta(x,\,y)$ таковы, что $\alpha\big(\alpha(x,\,y),\ \beta(x,\,y)\big) = x$, $\beta\big(\alpha(x,\,y),\ \beta(x,\,y)\big) = y$, принято называть инволютивным отклонением (сдвигом) второго порядка.

В работе рассмотрены некоторые аналоги задач Трикоми в неограниченных симметричных областях для дифференциальных уравнений, порождённых операторами типа Лаврентьева-Бицадзе с одной, двумя перпендикулярными и двумя параллельными линиями вырождения типа и возмущёнными значениями второй производной искомой функции, вычисленной в инволютивных точкам.

Пусть $H^\gamma = \{(x,\,y):\ y+\gamma x>0, \gamma y + x > 0, \gamma>0\}$, $0<\varepsilon<1$.

***Задача* $\mathbf{T_1}$**. Для уравнения

$$u_{xx}(x,\,y) + \operatorname{sign}(xy)u_{yy}(x,\,y) + \varepsilon u_{yy}(y,\,x) = 0 \tag{1}$$

в области $H^a \subset H^b$, где $a = \sqrt{1+\varepsilon}$, $b = \sqrt{1-\varepsilon}$, найти ограниченную на бесконечности функцию $u(x,\,y) \in C^1(H^b) \cap C(\overline{H}^b)$, удовлетворяющую в H^a уравнению (1) при $x,\,y \neq 0$ и нелокальным условиям на квазихарактеристиках

$$\frac{1}{2}\big[u(-x,\,ax) + u(ax,\,-y)\big] = \varphi(x), \quad \frac{1}{2}\big[u(-x,\,bx) - u(bx,\,-x)\big] = \psi(x), \quad x>0.$$

***Задача* $\mathbf{T_2}$**. Для уравнения

$$u_{xx}(x,\,y) + \operatorname{sign}(y\pi - y^2)u_{yy}(x,\,y) + \varepsilon u_{yy}(-x,\,y) = 0 \tag{2}$$

найти функцию $u(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$, исчезающую на бесконечности, обладающую непрерывными частными производными первого порядка вплоть до $y=0$ и $y=\pi$, за исключением, быть может, точек $(0,\,0)$ и $(0,\,\pi)$, удовлетворяющую уравнению (2) и условиям при $x \in (-\infty,\,0) \cup (0,+\infty)$ вида:

$$\frac{1}{2}\big[u(ax,\,-x) + u(-ax,-x)\big] = \varphi_1(x), \quad \frac{1}{2}\big[u(ax,\,x+\pi) + u(-ax,x+\pi)\big] = \varphi_2(x),$$

$$\frac{1}{2}\big[u(bx,\,-x)+u(-bx,-x)\big]=\psi_1(x),\quad \frac{1}{2}\big[u(bx,\,x+\pi)+u(-bx,x+\pi)\big]=\psi_2(x).$$

Пусть $Q^\lambda=\{(x,\,y):\ -\lambda y<x<2\pi+\lambda y,\,y<0,\,\lambda>0\}\cup\{(x,\,y):\ 0<x<2\pi,\,y>0\}$.

Задача $\mathbf{T_3}$. Для уравнения

$$u_{xx}(x,\,y)+\operatorname{sign}y u_{yy}(x,\,y)+\varepsilon u_{yy}(2\pi-x,\,y)=0 \tag{3}$$

в области $Q^a\subset Q^b$ найти функцию $u(x,\,y)\in C^1(Q_a)\cap C(\overline{Q}^a)$, исчезающую при $y\to\infty$, удовлетворяющую в Q^b уравнению (3) при $y\neq 0$ и условиям

$$u(0,\,y)=u(2\pi,\,y)=\varphi(y),\quad 0<y<\infty;$$

$$\tfrac{1}{2}\big[u(x,\,-ax)+u(2\pi-x,ax)\big]=\psi_1(x),$$

$$\tfrac{1}{2}\big[u(x,\,-bx)-u(2\pi-x,bx)\big]=\psi_2(x),\quad x\in\left(0,\,\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Основные результаты содержаться в теоремах.

***Теорема* 1**. Если $\varphi'(t),\ \psi'(t)\in C^{(1,\,\delta)}(0,\,+\infty)$, причём при $t\to\infty$ $\varphi'(t)=O(t^{-\lambda})$, $\psi'(t)=O(t^{-\gamma})$; $\lambda,\,\gamma>1$, $\delta>0$, то задача T_1 корректна.

***Теорема* 2**. Если $\varphi'_k(x),\ \psi'_k(t)\in C^{(1,\,\delta)}(-\infty,\,+\infty)$, причём при $|x|\to\infty$ $\varphi'_k(x)=O(\mathrm{e}^{-\lambda|x|})$, $\psi'_k(x)=O(\mathrm{e}^{-\lambda|x|})$, $\lambda>1$, $\delta>0$, $k=1,\,2$, то задача T_2 корректна.

***Теорема* 3**. Если $\varphi(y)\in C(0,+\infty)$, причём при $y\to\infty$ $\varphi(y)=O(y^{-\lambda})$, $\lambda>0$, $\psi_1(x),\,\psi_2(x)\in C^{(1,\,\delta)}\left(0,\,\frac{\pi}{4}\right)$, то задача T_3 корректна.

Отметим, что решения всех задач найдены в явном виде, что и позволяет обосновать их корректность по Адамару.

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНУЛЕВОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ У СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Баева О.В.
Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Рязань
e-mail: olga@par.ryazan.ru

В статье изучается проблема существования периодических решений линейной системы дифференциальных уравнений в случае, когда матрица $A\,(\lambda)$ имеет нулевые действительные собственные значения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=\left[A\,(\lambda)+X\,(t,\varphi,x,\lambda)\right]\cdot x. \tag{1}$$

при следующих условиях:

а) $x\in R^m,\ \varphi\in R^{n-m},\ \varepsilon\in R^{n-m},\ \lambda\in R^m,\ R^s$ – s-мерное пространство;

б) $A\,(\lambda),\ X\,(t,\varphi,x,\lambda)$ – $m\times m$-матрицы, определенные и непрерывные на множестве $M=X\,(\delta_0)\times R^{n-m}\times M_0\,(\delta_0)\times[0,T]$, $X(\delta_0)=\{x\in R^m:\|x\|\leq\delta_0\}$,

$\Lambda(\delta_0) = \{\lambda \in R^m : \|\lambda\| \le \delta_0\}$, $X(t, \varphi, 0, \lambda) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} X(t, \varphi, x, \lambda) = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T], \varphi \in R^{n-m}, \lambda \in \Lambda(\delta_0)$;

в) на множестве M справедливы неравенства:

$\|X(t, \varphi', x', \lambda') - X(t, \varphi'', x'', \lambda'')\| \le l_1(\delta_0) \cdot \|\varphi' - \varphi''\| + l_2(\delta_0) \cdot \|x' - x''\| +$
$+ l_3(\delta_0) \cdot \|\lambda' - \lambda''\|$,

$l_1(\delta_0) \to 0, l_2(\delta_0) \to 0, l_3(\delta_0) \to 0$ при $\delta_0 \to 0$,

$\|A(\lambda') - A(\lambda'')\| \le \gamma(\delta_0) \cdot \|\lambda' - \lambda''\|$, $\gamma(\delta_0) \to 0$ при $\delta_0 \to 0$, где l, l_1, l_2, l_3, γ – некоторые числа.

Класс 2π-периодических по φ, T-периодических по t функций $F(\varphi, t)$ таких, что $\|F(t, \varphi)\| \le d_0$, $\|F(t', \varphi') - F(t'', \varphi'')\| \le q_1 \cdot |t' - t''| + q_2 \cdot \|\varphi' - \varphi''\|$, $q_1 \to 0, q_2 \to 0$ при $d_0 \to 0$ обозначим $C(d_0)$.

Предполагаем, что если любую T-периодическую по t функцию $F(t, \varphi) \in C(d_0)$ подставить в систему (1), то эта система будет иметь решение на $[0, \mathrm{T}]$.

Пусть $d > 0, \delta > 0$ – некоторые числа. Далее всюду будем предполагать, что для любой вектор-функции $F(t, \varphi) \in C(d)$ и любого вектора $\lambda \in \Lambda(\delta)$ при любом $t \in [0, T]$ выполнено равенство $X(t + T, \varphi, F(t + T, \varphi), \lambda) = X(t, \varphi, F(t, \varphi), \lambda)$.

Одновременно с уравнением (1) рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\dot{y} = [A(\lambda) + X(t, \varphi, F(t, \varphi), \lambda)] \cdot y, \tag{2}$$

в которой $F(t, \varphi) \in C(d_0)$, $y \in R^m$.

Пусть $Y_F(t, \varphi, \lambda)$ – фундаментальная матрица решений системы (2), $Y_F(0, \varphi, \lambda) = E, E$ – единичная матрица. Тогда решение системы (2) определится равенством

$$y_F(t, \varphi, \lambda) = Y_F(t, \varphi, \lambda) \cdot \alpha, \tag{3}$$

где α – некоторый вектор.

Равенство (3) при любом фиксированном $\lambda \in \Lambda(\delta)$ на множестве $C(d)$ определяет оператор $\Gamma(\lambda) : F \to y_F(t, \varphi, \lambda)$, который любой вектор-функции $F(t, \varphi) \in C(d)$ ставит в соответствие вектор-функцию $y_F(t, \varphi, \lambda)$.

***Теорема* 1**. Неподвижные точки оператора $\Gamma(\lambda)$ являются T-периодическими решениями системы дифференциальных уравнений (1), принадлежащими множеству $C(d)$ [1].

В основе доказательства теоремы о существовании ненулевого периодического решения системы (1) лежит

***Теорема* 2**. Пусть:

1) K и Λ – замкнутые компактные множества некоторых линейных нормированных пространств, K – выпуклое множество;

2) на подмножестве множества $K \times \Lambda$ определен оператор $T_\lambda x$ такой, что для любого $x \in K$ существует единственное $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющее включению $T_\lambda x \in K$;

3) из того, что $x_n \to x_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $y_n = T_\lambda x_n$, $y_n \to y_0$ следует $y_0 = T_\lambda x_0$.

Тогда существуют $x^* \in K$, $\lambda^* \in \Lambda$, такие, что $y = T_{\lambda^*} x^*$ [1].

Заметим, что справедливо представление $Y_F(t, \varphi, \lambda) = \bar{Y}(\lambda) + \mathrm{H}_F(t, \varphi, \lambda)$, в котором $\bar{Y}(\lambda)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = A(\lambda) \cdot x$,

$\bar{Y}(0) = E$, матрица $H_F(t, \varphi, \lambda)$ является решением системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{H}_F(t, \varphi, \lambda) = [A[\lambda] + X(t, \varphi, F(t, \varphi), \lambda)] \cdot H_F(t, \varphi, \lambda) + X(t, \varphi, F(t, \varphi), \lambda) \cdot \bar{Y}(\lambda)$$

с условием $H_F(0, \varphi, \lambda) = E$ при любом $\lambda \in \Lambda(\delta)$ и $\lim\limits_{d \to 0} H_F(t, \varphi, \lambda) = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T], \varphi \in R^{n-m}, \lambda \in \Lambda(\delta)$ при требовании $\lim\limits_{d \to 0} X(t, \varphi, F(t, \varphi), \lambda) = 0$ равномерно относительно $t \in [0, T], \varphi \in R^{n-m}, \lambda \in \Lambda(\delta)$, матрица $X(t, \varphi, F(t, \varphi), \lambda)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$ и $\varphi \in R^{n-m}$ непрерывна на множестве $C(d) \times \Lambda(\delta)$.

Пусть существует такое число $\delta \in (0, \delta_0]$ такое, что при любом $\lambda \in \Lambda$ матрица $A(\lambda)$ имеет k действительных собственных значений $\gamma_l(\lambda), l = 1, 2, ..., k$.

Пусть при $\lambda = 0$ все $\gamma_l(\lambda), l = 1, 2, ..., k$ обращаются в нуль.

Тогда матрица $A(\lambda)$ неособенным линейным преобразованием сведется к матрице вида

$$A(\lambda) = \operatorname{diag}\{L(\lambda), \gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), ..., \gamma_k(\lambda)\},$$

где $L(\lambda)$ – матрица, содержащая действительные числа, которые при $\lambda = 0$ не обращаются в нуль.

Будем полагать, что указанное преобразование выполнено.

Предположим, что существуют такие числа $\delta \in (0, \delta_0]$, $d \in (0, d_0]$, что при любых $\lambda \in \Lambda(\delta)$ и $F(t, \varphi) \in C(d)$ матрицу $Y_F(T, \varphi, \lambda) - E$ можно представить в виде $Y_F(T, \varphi, \lambda) - E = [B_{ij}(T, \varphi, \lambda)]_1^2$, в котором $B_{11}(T, \varphi, \lambda)$ – $(m-k) \times (m-k)$-матрица, $\det B_{11}(T, \varphi, \lambda) \neq 0$. Тогда существует матрица $Q_F(T, \varphi, \lambda)$, определитель которой отличен от нуля и не зависит от T, φ, λ [2] такая, что матрица $(Y_F(T, \varphi, \lambda) - E) \cdot Q_F(T, \varphi, \lambda)$ имеет вид $\left[B_{ij}^*(T, \varphi, \lambda)\right]_1^2$, где $B_{12}^*(T, \varphi, \lambda)$ – $[(m-k) \times 1]$-матрица, все элементы которой равны нулю, $B_{22}^*(T, \varphi, \lambda)$ – $(k \times 1)$-матрица, элементы которой имеют вид

$$\exp(\gamma_l(\lambda) \cdot T) - 1 + \beta_F^l(T, \varphi, \lambda), l = 1, 2, ..., k,$$

$\lim\limits_{d \to 0} \beta_F^l(T, \varphi, \lambda) = 0$ равномерно относительно λ.

Покажем, что числа $\delta \in (0, \delta_0]$, $d \in (0, d_0]$ можно выбрать так, что для любой функции $F(t, \varphi) \in C(d)$ будет существовать вектор $\lambda \in \Lambda(\delta)$, при котором

$$\exp(\gamma_l(\lambda) \cdot T) - 1 + \beta_F^l(T, \varphi, \lambda) = 0, l = 1, 2, ..., k.$$

Т.е. $\gamma_l(\lambda) = \frac{1}{T} \cdot \ln\left(1 - \beta_F^l(T, \varphi, \lambda)\right)$.

Обозначая $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \ ..., \gamma_k(\lambda))$, $g_F(T, \varphi, \lambda) = \left(-\frac{1}{T}\ln\left(1 - \beta_F^1(T, \varphi, \lambda)\right), \ ..., -\frac{1}{T}\ln\left(1 - \beta_F^k(T, \varphi, \lambda)\right)\right)$, получим уравнение

$$\gamma(\lambda) + g_F(T, \varphi, \lambda) = 0,$$

где вектор-функция $g_F(T, \varphi, \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной λ с постоянной $\upsilon(d), \upsilon(d) \to 0$ при $d \to 0$ [3].

Пусть $\gamma(\lambda)$ представимо в виде

$$\gamma(\lambda) = \gamma(0) + D \cdot \lambda + o(|\lambda|),$$

где $\gamma(0) = 0$, D – $m \times m$-неособенная ограниченная матрица, $o(|\lambda|)$ удовлетворяет условию Липшица по λ с постоянной $p(\delta)$, $p(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Тогда получим уравнение

$$D \cdot \lambda + o(|\lambda|) + g_F(T, \varphi, \lambda) = 0. \tag{4}$$

Теорема 3. Если D – неособенная матрица, то существуют числа $d > 0, \delta > 0$ такие, что для любой функции $F(t, \varphi) \in C(d)$ система (1) имеет ненулевое периодическое решение во множестве $\{\lambda \in R^m : \|\lambda\| \le \delta\}$.

Доказательство. Так как матрица D неособенная, то она имеет обратную.

Тогда уравнение (4) сведется к уравнению

$$\lambda = -D^{-1}(o(|(\lambda)|) + g_F(T, \varphi, \lambda)).$$

Введем оператор S на множестве $\Lambda(\delta) = \{\lambda \in R^m : \|\lambda\| \le \delta\}$, определенный равенством

$$S\lambda = -D^{-1}(o(|(\lambda)|) + g_F(T, \varphi, \lambda)).$$

Покажем, что $|S\lambda| < \delta$ при любом $\lambda \in \Lambda(\delta)$.

Так как $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{o(|\lambda|)}{|\lambda|} = 0$ равномерно относительно λ , то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\lambda : |\lambda| \le \delta \frac{o(|\lambda|)}{|\lambda|} < \varepsilon$.

Так как матрица $-D^{-1}$ ограничена, то $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{-D^{-1} \cdot o(|\lambda|)}{|\lambda|} = 0$, для любого $\lambda \in \Lambda(\delta)$ $\|-D^{-1} o(|\lambda|) / \|\lambda\|\| < \frac{1}{2}$.

Т.е. для любого $|\lambda| \le \delta$

$$\left\|-D^{-1} o(|\lambda|)\right\| < \frac{1}{2} \cdot \|\lambda\| \le \frac{1}{2} \cdot \delta. \tag{$*$}$$

Согласно условию $\lim\limits_{d \to 0} g_F(T, \varphi, \lambda) = 0$ равномерно относительно $\lambda \in \Lambda(\delta)$, $F(t, \varphi) \in C(d)$.

Так как $\lim\limits_{d \to 0}(-D^{-1} g_F(T, \varphi, \lambda)) = 0$, то существует число $d > 0$, что для любого $F(t, \varphi) \in C(d)$

$$\left\|-D^{-1} g_F(T, \varphi, \lambda)\right\| < \frac{1}{2} \cdot \delta. \tag{$**$}$$

Учитывая неравенства (*) и (**), получим, что для любого $\lambda : \|\lambda\| \le \delta$

$$\|S\lambda\| = \| -D^{-1}(o(|(\lambda)|) + g_F(T, \varphi, \lambda)) \| \le \left\|-D^{-1} \cdot o(|\lambda|)\right\| +$$
$$+ \left\|-D^{-1} g_F(T, \varphi, \lambda)\right\| \le \frac{1}{2} \cdot \delta + \frac{1}{2} \cdot \delta = \delta.$$

Покажем, что оператор S является сжимающим на множестве $\{\lambda \in R^m : \|\lambda\| \le \delta\}$.

Т.е. нужно доказать, что $\|S\lambda' - S\lambda''\| \le \mu \cdot \|\lambda' - \lambda''\|, 0 < \mu < 1$.

Имеем

$$\|S\lambda' - S\lambda''\| \le \left\|D^{-1}\right\| \cdot (\| g_F(T, \varphi, \lambda') - g_F(T, \varphi, \lambda'') \| + \|o(|\lambda'|) - o(|\lambda''|)\|).$$

Согласно предположению $\|o(|\lambda'|) - o(|\lambda''|)\| \leq p(\delta) \cdot \|\lambda' - \lambda''\|$, $p(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\|g_F(T, \varphi, \lambda') - g_F(T, \varphi, \lambda'')\| \leq \upsilon(d) \cdot \|\lambda' - \lambda''\|$, $\upsilon(d) \to 0$ при $d \to 0$.

Окончательно получаем

$$\|S\lambda' - S\lambda''\| \leq \left\|D^{-1}\right\| \cdot (\upsilon(d) + p(\delta)) \cdot \|\lambda' - \lambda''\| = \mu \cdot \|\lambda' - \lambda''\|,$$

где $\mu \to 0$ при $d \to 0$ и $\delta \to 0$.

Таким образом, мы установили, что числа $\delta \in (0, \delta_0]$, $d \in (0, d_0]$ можно выбрать так, что для любой вектор-функции $F(t, \varphi) \in C(d)$ оператор S переводит замкнутое ограниченное выпуклое множество $\{\lambda \in R^m : \|\lambda\| \leq \delta\}$ в себя и является сжимающим.

Из теоремы Банаха следует существование и единственность неподвижной точки λ этого оператора, которая является решением системы уравнений.

Итак, при $\lambda \in \Lambda(\delta)$, обращается в ноль m-й столбец матрицы $(Y_F(T, \varphi, \lambda) - E) \cdot Q_F(T, \varphi, \lambda)$. Это означает, что система (2) имеет T-периодическое решение $y_F(t, \varphi, \lambda) = Y_F(t, \varphi, \lambda) \cdot Q_F(\varphi, \lambda) \cdot c$, где c – вектор, первые $(m-1)$ координаты которого равны нулю, а m-я координата отлична от нуля. А так как $\det Q_F(\varphi, \lambda) \neq 0$, то это решение является ненулевым. Кроме того, вектор c можно выбрать так, чтобы функция $y_F(t, \varphi, \lambda)$, определяемая равенством (3), принадлежала множеству $C(d)$.

Матрица $X(t, \varphi, F(t, \varphi), \lambda)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$ и $\varphi \in R^{n-m}$ непрерывна на множестве $C(d) \times \Lambda(\delta)$, матрица $A(\lambda)$ непрерывна на множестве $\Lambda(\delta)$. Поэтому оператор $\Gamma(\lambda)$, определенный равенством (3), непрерывен на множестве $C(d) \times \Lambda(\delta)$ и при любых $(F(t, \varphi), \lambda) \in C(d) \times \Lambda(\delta)$

$$\Gamma(\lambda) F(t, \varphi) = y_F(t, \varphi, \lambda).$$

Таким образом, получаем, что существуют числа $d > 0, \delta > 0$ такие, что на множестве $C(d) \times \Lambda(\delta)$ оператор $\Gamma(\lambda)$ непрерывен и для любой вектор-функции $F(t, \varphi) \in C(d)$ существует единственный вектор $\lambda \in \Lambda(\delta)$, удовлетворяющий включению $\Gamma(\lambda) F(t, \varphi) \in C(d)$. Тогда по теореме 2 существуют $F^*(t, \varphi) \in C(d)$ и $\lambda^* \in \Lambda(\delta)$ такие, что $F^*(t, \varphi)$ – неподвижная точка оператора $\Gamma(\lambda^*)$, причем $F^*(t, \varphi) \neq 0$, так как $\alpha \neq 0$. ■

Литература

[1] Терехин М.Т. Бифуркация периодических решений функционально-дифференциальнvх уравнений // Известия ВУЗов. Математика, №10, 1999. – С.37-42.

[2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[3] Купцов М.И. К вопросу существования периодических решений у некоторого класса систем дифференциальнvх уравнений // Дифференциальные уравнения: Сб. науч. трудов. – Рязань, 1996. – С.76-86.

СПИСОК РАСКЛАДОВ, БИФУРЦИРУЮЩИХ ИЗ ОМБИЛИЧЕСКОЙ ТОЧКИ МИНИМУМА В ВЕРШИНЕ УГЛА

Белоглазов А.В.
Воронежский государственный университет
Воронеж
e-mail: whiter@ok.ru

В статье рассматривается задача бифуркационного анализа критических точек функции

$$W(x,y,\lambda) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + d_1x^2 + d_2y^2 + 2d_3xy + q_1x + q_2y \tag{1}$$

в подвижном угле

$$\begin{cases} x + a_1y \geq 0, \\ x + a_2y \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $(x,y)^T \in \mathbf{R^2}, \lambda = (d_1, d_2, d_3, q_1, q_2, a_1, a_2)^T \in \mathbf{R^7}$.

Данная задача появляется при изучении равновесий упругих систем с полуограничениями [1], рождения периодических волн в нелинейных средах и периодических решений гамильтоновых динамических систем [2].

Наложим на решаемую задачу дополнительное требование. Потребуем коэрцитивности функции $W(x,y)$ в угле (2).

Предложение. Функция $W(x,y)$ коэрцитивна в угле (2), если $a_1a_2 < 0$.

Заметим, что задача (1)-(2) симметрична относительно перемены местами параметров a_1, a_2. Поэтому достаточно рассмотреть случай $a_1 > 0,\ a_2 < 0$.

Задачу бифуркационного исследования функции (1) можно разбить на два этапа: нахождения каустики функции и описания всех bif-раскладов.

Под каустикой функции понимается множество параметров Σ, при которых функция $W(x,y)$ в угле (2) имеет вырожденную критическую точку. Для задачи (1)-(2) каустическое множество может быть представленно в виде следующего объединения:

$$\Sigma = \Sigma_{\mathbf{0,0}} \bigcup \Sigma^{\mathbf{int}}_{\mathbf{0,1}} \bigcup \Sigma^{\mathbf{ext}}_{\mathbf{0,1}} \bigcup \Sigma^{\mathbf{int}}_{\mathbf{1,0}} \bigcup \Sigma^{\mathbf{ext}}_{\mathbf{1,0}} \bigcup \Sigma_{\mathbf{1,1}}.$$

Здесь $\Sigma_{\mathbf{0,0}}$ – множество параметров, при которых вырождается, как критическая точка, вершина угла (2); $\Sigma^{\mathbf{int}}_{\mathbf{0,1}}$ – множество параметров, при которых сужение функции $W(x,y)$ на грань угла $x + a_1y = 0$ имеет вырожденную критическую точку; множество $\Sigma^{\mathbf{int}}_{\mathbf{1,0}}$ содержит параметры, при которых имеется вырожденный экстремум у сужения функции $W(x,y)$ на грань угла $x+a_2y = 0$; компоненты $\Sigma^{\mathbf{ext}}_{\mathbf{0,1}}$ и $\Sigma^{\mathbf{ext}}_{\mathbf{1,0}}$ отвечают за попадание критической точки функции $W(x,y)$ на соответствующие грани угла; если параметр принадлежит множеству $\Sigma_{\mathbf{1,1}}$, то во внутренности угла (2) имеется вырожденная критическая точка.

Теорема 1. Для функции (1) входящие в каустику множества можно задать следующими соотношениями (неравенства, участвующие в системах, отвечают за попадание вырожденной точки в угол (2)):

$$\Sigma_{\mathbf{0,0}}: \ q_2 = a_1 q_1, \ q_2 = a_2 q_1. \tag{3}$$

$$\Sigma_{\mathbf{0,1}}^{\mathbf{int}}: \begin{cases} q_2 = a_1 q_1 - \dfrac{(d_1 a_1^2 + d_2^2)^2 - 4 d_3 a_1 (d_1 a_1^2 + d_2 - d_3 a_1)}{a_1 (a_1^2 + 3)}; \\ \\ d_1 a_1^2 + d_2 - 2 d_3 a_1 < 0. \end{cases} \tag{4}$$

$$\Sigma_{\mathbf{1,0}}^{\mathbf{int}}: \begin{cases} q_2 = a_2 q_1 + \dfrac{(d_1 a_2^2 + d_2^2)^2 - 4 d_3 a_2 (d_1 a_2^2 + d_2 - d_3 a_2)}{a_2 (a_2^2 + 3)}; \\ \\ d_1 a_2^2 + d_2 - 2 d_3 a_2 < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Компоненту $\Sigma_{\mathbf{0,1}}^{\mathbf{ext}}$ определим системой:

$$\begin{cases} ((1 + a_1^2) q_2 + 2 q_1 a_1)^2 + (2 d_1 a_1^2 + d_3 a_1^3 - d_2 a_1^2 - d_3 a_1 - d_2)(a_1 d_3 - d_2) q_1 + \\ + (2 d_1 a_1^2 + d_3 a_1^3 - d_2 a_1^2 - d_3 a_1 - d_2)(d_3 - a_1 d_1) q_2 = 0; \\ \dfrac{2 a_1 q_1 + a_1^2 q_2 + q_2}{2 d_1 a_1^2 - d_2 (a_1^2 + 1) + d_3 a_1 (a_1^2 - 1)} < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Компоненту $\Sigma_{\mathbf{1,0}}^{\mathbf{ext}}$ зададим следущим образом:

$$\begin{cases} ((1 + a_2^2) q_2 + 2 q_1 a_2)^2 + (4 d_1 a_2^2 + d_3 a_2^3 - 2 d_2 a_2^2 - d_3 a_2 - 2 d_2)(a_2 d_3 - 2 d_2) q_1 + \\ + (4 d_1 a_2^2 + d_3 a_2^3 - 2 d_2 a_2^2 - d_3 a_2 - 2 d_2)(d_3 - 2 a_2 d_1) q_2 = 0; \\ \dfrac{2 a_2 q_1 + a_2^2 q_2 + q_2}{4 d_1 a_2^2 - 2 d_2 (a_2^2 + 1) + d_3 a_2 (a_2^2 - 1)} < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Компоненту $\Sigma_{\mathbf{1,1}}$ можно задать, как объединение двух множеств:

$$\Sigma_{\mathbf{1,1}} = \Sigma_{\mathbf{1,1}}^{\mathbf{1}} \bigcup \Sigma_{\mathbf{1,1}}^{\mathbf{2}}.$$

Компонента $\Sigma_{\mathbf{1,1}}^{\mathbf{1}}$ соответствует случаю, когда функция (1) имеет единственный экстремум во внутренности угла (2), являющийся вырожденным.

$$\Sigma_{\mathbf{1,1}}^{\mathbf{1}}: \begin{cases} 27 d_1^4 - 36 d_1^3 d_2 + 14 d_1^2 d_2^2 + 4 d_1 d_2^3 - d_2^4 - 8 q_2^2 - 12 d_3^2 d_2^2 - 40 d_3^2 d_2 d_1 + 8 d_3^4 + \\ + 8 q_1^2 + 32 d_3 q_2 d_2 - 16 d_3^2 q_1 - 20 q_1 d_2^2 - 36 d_1^2 q_1 + 36 d_3^2 d_1^2 + 40 q_1 d_2 d_1 + \\ + \sqrt{(d_1 - d_2)^2 (9 d_1^2 - 2 d_1 d_2 + 8 d_3^2 + d_2^2 - 8 q_1)^3} = 0; \\ \dfrac{A(a_1) + K(a_1) B}{C + B} > 0; \\ \dfrac{A(a_2) + K(a_2) B}{C + B} > 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $A(a) = 9d_1^2 - d_2^2 - 4(d_1 d_2 + q_1 + a q_2) + 2d_3(a d_2 + 3a d_1 + 2d_3)$,

$$K(a) = 3d_1 - d_2 + 2a d_3,$$

$$B = sgn(d_2 - d_1)\sqrt{9d_1^2 - 2d_1 d_2 + d_2^2 - 8q_1 + 8d_3^2}, \quad C = 3d_1 - 3d_2.$$

Аналогично, определяется компонента $\Sigma^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1,1}}$, на множестве параметров которой, функция (1) имеет три экстремума, один из которых является вырожденным.

$$\Sigma^{\mathbf{2}}_{\mathbf{1,1}} : \begin{cases} 27d_1^4 - 36d_1^3 d_2 + 14d_1^2 d_2^2 + 4d_1 d_2^3 - d_2^4 - 8q_2^2 - 12d_3^2 d_2^2 - 40d_3^2 d_2 d_1 + 8d_3^4 + \\ +8q_1^2 + 32d_3 q_2 d_2 - 16d_3^2 q_1 - 20q_1 d_2^2 - 36d_1^2 q_1 + 36d_3^2 d_1^2 + 40q_1 d_2 d_1 - \\ -\sqrt{(d_1 - d_2)^2 (9d_1^2 - 2d_1 d_2 + 8d_3^2 + d_2^2 - 8q_1)^3} = 0; \\ \dfrac{A(a_1) + K(a_1)B}{C + B} < 0; \\ \dfrac{A(a_2) + K(a_2)B}{C + B} < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Каустика Σ разбивает пространство параметров $\mathbf{R}^7$ на зоны, в каждой из которых сохраняется набор экстремумов задачи (1)-(2). Данные наборы удобно представлять в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} l_0^0 & l_1^0 & l_2^0 \\ l_0^1 & l_1^1 & l_2^1 \\ l_0^2 & l_1^2 & l_2^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Здесь l_i^j – количество критических точек индекса i на j-мерных гранях.

Теорема 2. Для функции (1) на коэффициенты l_i^j накладываются следующие ограничения:

1) $l_0^0 - l_1^0 + l_2^0 + 2(l_0^1 - l_1^1 + l_2^1) + 4(l_0^2 - l_1^2 + l_2^2) = 1$;
2) $l_0^0 + l_1^0 + l_2^0 = 1$;
3) $l_0^2 \le 1$; $l_1^2 \le 2$; $l_2^2 \le 1$.

Первое соотношение представляет собой модифицированнную формулу Эйлера. Второе – указывает на то, что вершина угла всегда является точкой экстремума. Третье соотношение обусловлено видом функции (1) и ограничивает количество критических точек внутри угла.

Условие коэрцитивности функции (1) в угле (2) позволяет указать все возможные расклады на сторонах угла. Справедлива теорема:

Теорема 3. Если $l_0^0 = 1$ (вершина угла – точка минимума), то на сторонах угла возможны следующие расклады:

(0,0,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (0,2,0), (2,2,0), (1,2,1),
(2,1,1), (1,3,0), (0,2,2), (1,1,2), (0,3,1), (2,0,2), (0,4,0);

если $l_1^0 = 1$ (вершина угла – седло), то на сторонах угла допустимы следующие наборы экстремумов:

(1,0,0), (0,1,0), (2,1,0), (1,2,0), (1,1,1), (0,2,1), (2,0,1), (0,3,0);

если $l_2^0 = 1$ (вершина угла – максимум), то возможны следующие расклады: (1,1,0), (0,2,0), (2,0,0).

Для функции (1) были доказаны еще три ограничения на коэффициенты матрицы (10), дополняющие приведенные выше.

Теорема 4. Если $l_1^2 = 2$, то $l_0^2 = 1$.

Теорема 5. Если $l_2^0 = 1$, то $l_2^2 = 0$.

Теорема 6. Следующие три расклада являются недопустимыми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Опираясь на утверждения теорем 2-6, можно выписать все матрицы возможных раскладов. Количество таких матриц равно 64. Были найдены зоны, ограниченные поверхностями каустики Σ в пространстве параметров $\mathbf{R^7}$, во всех точках которых осуществляются данные расклады. В результате, доказана теорема:

Теорема 7. Если $a_1 a_2 < 0$, то все возможные bif-расклады для функции (1), при условии (2) описываются следующими матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Литература

[1] Сапронов Ю.И., Хуссаин М.А. Бифуркации равновесий упругой балки с квадратичной силой упругой реакции и двумя полуограничителями // Воронежская зимняя математическая школа – 2004. Тезисы докладов школы. – Воронеж: ВорГУ, 2004 – С.96-97.

[2] Белоглазов А.В. Конечномерно редуцирующие схемы в лагранжевом и гамильтоновом формализмах // Труды математического факультета, вып.9 (новая серия). – Воронеж: ВорГУ, 2004. – С.3-8.

[3] Данилова О.Ю., Сапронов Ю.И., Швырева О.В. Моды бифуркации в угловых критических точках // Труды математического факультета, вып.7 (новая серия). Воронеж: ВорГУ, 2002. – С.33-39.

[4] Зачепа В.Р., Сапронов Ю.И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений – Воронеж, ВГУ. 2002. – 185 с.

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

Богатырев М.Ю., Латов В.Е.
Тульский государственный университет
e-mail: mibo@klax.tula.ru

Проблемы, связанные с практическим применением генетических алгоритмов хорошо известны [1,2]. В отличие от природного механизма наследственности, генетические алгоритмы не обладают той универсальностью, которая декларировалась при их появлении в середине 70-х годов. Вместе с тем, универсальный механизм представления решений в виде кодов, позволяющий абстрагироваться от конкретных особенностей решаемой задачи, создает основу для построения моделей генетических алгоритмов, обладающих высокой степенью общности. К таким моделям относятся алгебраические модели, развиваемые в последнее время [3,4]. Обобщение известных моделей генетических алгоритмов через исследование их групповых свойств также перспективно, поскольку позволяет обнаружить закономерности, используемые в практике решения конкретных задач оптимизации при помощи генетических алгоритмов.

Достаточно конструктивной моделью генетического алгоритма является модель в виде схемы замещения, различные варианты которой рассмотрены в ряде работ [2,3,5]. Схема замещения генетического алгоритма определяется следующим образом.

Множество X решений, генерируемых алгоритмом, составляет *пространство поиска* алгоритма. Подмножество $P \subset X$ из r элементов названо *популяцией.*

Функция пригодности f суть отображение пространства поиска X на пространство R^+ положительных действительных чисел: $f : X \to R^+$.

Важной составляющей частью всякого генетического алгоритма является кодирование элементов популяции. К кодированию относятся следующие термины.

Алфавит $A = \{a_i, i = 1, 2, ..., d\}$ – конечный набор символов. Часто для кодирования применяют бинарный алфавит $A_b = \{0, 1\}$. Хромосома – это l-местный кортеж, элементами которого являются символы из алфавитов A_j. Ген – элемент хромосомы; символ a_i из алфавита A_j, стоящий на i-м месте в хромосоме.

Хромосомы образуют популяцию P как отношение вида:

$$\mathbf{P \subset A_1 \times A_2 \times ... \times A_l}$$

При бинарном кодировании хромосомы принадлежат отношению

$$P_b \subset \underbrace{A_b \times A_b \times ... \times A_b}_{l}$$

Количество хромосом равно $n = 2^l$.

Генетический алгоритм начинает работать с исходной популяции, которую обозначим P_0. Очередная популяция (поколение) P_{t+1} генерируется из предыдущей популяции P_t действием операторов *отбора*, *мутации* и *рекомбинации.*

Эволюция популяций к оптимальному решению приводит к тому, что популяция содержит хромосомы с максимальной величиной пригодности в смысле выбранного критерия. Если оптимальное решение единственно, то есть существует единственный элемент $x^* \in X$, такой, что $f(x^*) = \max\limits_{s \in S}\{f(x)\}$, то финальная популяция содержит только хромосомы, соответствующие элементу x^*.

Сопоставим каждой популяции P_t вектор $\mathbf{p}^{(t)}$ размерности n, где n – количество объектов в X, элементами которого являются числа $p_j^{(t)} = \frac{v}{n}$, где число v показывает сколько раз элемент j встречается в k-й популяции.

Очевидно, что $p_j^{(t)} \geq 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(t)} = 1$.

Здесь имеется в виду алгоритм, в котором популяция не меняет свой размер от поколения к поколению. Поэтому эволюция популяции состоит в том, что она заполняется лучшими особями, которые могут быть представлены несколькими экземплярами.

Величину $p_j^{(t)}$ можно трактовать как вероятность нахождения элемента j в популяции t.

Векторы $\mathbf{p}^{(t)}$ образуют линейное векторное пространство: $\mathbf{p}^{(t)} \in R^n$, *пространство состояний популяции* P_t.

Переход от одного поколения к другому описывается оператором A , таким, что $A(\mathbf{p})$ есть вектор, k-я компонента которого равна вероятности, что элемент $k \in X$ появится в следующем поколении.

Этот оператор состоит из двух компонент: $A = M \circ R$, где R – схема отбора, M – схема замещения, комбинирующая рекомбинации и мутации.

$$M = C \circ D,$$

где C – оператор рекомбинации, D – оператор мутации.

Покажем, что схема замещения генетического алгоритма внутренне связана с группой преобразований, допускаемых генетическим алгоритмом, и эта группа ограничена группой перестановок, задаваемых матрицами $S(k)$, где k – компонента вектора состояния популяции.

Оператор мутации является линейным оператором. Определим элемент $d_{i,j}$ как вероятность того, что в результате мутации хромосома j переходит в хромосому i. Элементы $d_{i,j}$ при $i, j = 0, 1, ..., n-1$ образуют матрицу $\mathbf{D} = [d_{i,j}]$, являющуюся матрицей оператора мутации D. Очевидно, что преобразование $\mathbf{p}^{(t+1)} = \mathbf{D}\mathbf{p}^{(t)}$ векторов $\mathbf{p}^{(t)}$, определенных как $\mathbf{p}^{(t)} = \{p_j^{(t)} | p_j^{(t)} = \frac{v}{n}; p_j^{(t)} \geq 0; \sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(t)} = 1\}$, является линейным. Это и определяет оператор мутации как линейный оператор в пространстве состояний популяции.

Оператор рекомбинации имеет более сложное строение и является квадратичным.

Рассмотрим квадратичное преобразование вида:

$$Q(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}^T\mathbf{M}_0\mathbf{x}, \mathbf{x}^T\mathbf{M}_1\mathbf{x}, ..., \mathbf{x}^T\mathbf{M}_{n-1}\mathbf{x}], \tag{1}$$

в котором $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, ..., \mathbf{M}_{n-1}$ – матрицы.

Из линейной алгебры известно, что композиция квадратичного и линейного операторов является квадратичным оператором. Следовательно, оператор рекомбинации $C = D^{-1} \circ M$ квадратичный.

Здесь D^{-1} – это оператор, обратный оператору мутации, матрица которого обладает очевидным свойством: $\mathbf{D}^{-1} = D^T$.

Покажем, что оператор M коммутирует с представлением группы G, если это представление задано матрицами перестановок $S(k)$.

Для этого покажем, что любой квадратичный оператор (1), коммутирующий с представлением группы G, заданным в виде перестановок, обладает свойством:

$$\mathbf{M}_{g(\mathbf{0})} = S(g)\mathbf{M}_{\mathbf{0}}S^T(g), \tag{2}$$

для всех элементов группы $g \in G$. Здесь $\mathbf{M}_{g(\mathbf{0})}$ – ассоциированная матрица, полученная применением преобразования (действия) группы G, задаваемым элементом g, к матрице $\mathbf{M}_{\mathbf{0}}$. В качестве матрицы $\mathbf{M}_{\mathbf{0}}$ может быть выбрана любая из ассоциированных матриц; в генетическом алгоритме матрица $\mathbf{M}_{\mathbf{0}}$ соответствует хромосоме $< 0, 0, ..., 0 >$.

Пусть h – произвольный элемент группы. Для компоненты k вектора $\mathbf{x}$ имеем:

$$\mathbf{Q}(S(h)\mathbf{x})_k = (S(h)\mathbf{x})^T\mathbf{M}_kS(h)\mathbf{x} = \mathbf{x}^TS^T(h)\mathbf{M}_kS(h)\mathbf{x}. \tag{3}$$

Без потери общности мы можем предположить, что $k = g(0)$, тогда, если справедливо условие (2), то

$$\mathbf{M}_k = S(g)\mathbf{M}_{\mathbf{0}}S^T(g). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), имеем:

$$\mathbf{Q}(S(h)\mathbf{x})_k = \mathbf{x}^TS^T(h)S(g)\mathbf{M}_{\mathbf{0}}S^T(g)S(h)\mathbf{x}. \tag{5}$$

Учитывая свойства матриц перестановок, запишем (5) в виде:

$$\mathbf{Q}(S(h)\mathbf{x})_k = \mathbf{x}^T\mathbf{M}_{h^{-1}(k)}\mathbf{x}, \tag{6}$$

что означает, что преобразование $S(h)$ приводит к тому, что компонента k в преобразованном векторе (3) смещена в соответствии с перестановкой, задаваемой элементом h^{-1}. Чтобы вернуть ее назад и все оставить по-прежнему, мы должны подействовать на этот вектор противоположной перестановкой, задаваемой элементом h.

Следовательно,

$$\mathbf{Q}(S(h)\mathbf{x})_k = S(h)\mathbf{Q}(\mathbf{x})_k.$$

Поскольку k – произвольная компонента, заключаем, что имеет место коммутация:

$$\mathbf{Q}(S(h)\mathbf{x}) = S(h)\mathbf{Q}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

В выводе данного факта мы использовали свойство коммутативности группы G, следовательно, G – абелева группа.

Оператор M схемы замещения является квадратичным и обладает свойством (2), следовательно, матрицы $S(k)$ образуют представление группы, с которой коммутирует оператор M.

Таким образом, схема замещения содержит в себе групповую структуру, определяемую группой перестановок, задаваемых матрицами $S(k)$.

Отсюда следует также важный вывод: если операторы кросовера и мутации M коммутируют с действием группы в пространстве поиска, то их действие может быть описано единственной матрицей замещения $\mathbf{M}$.

Окончательно схема замещения M, комбинирующая рекомбинация и мутации, представляет собой вектор-функцию $M(\mathbf{p})$, компонентами которой являются квадратичные формы:

$$M(\mathbf{p}) = \Big\langle \mathbf{p}^{(t)T}\mathbf{M_0}\mathbf{p}^{(t)}, [S(2)\mathbf{p}^{(t)}]^T\mathbf{M_0}S(2)\mathbf{p}^{(t)}, ..., [S(k)\mathbf{p}^{(t)}]^T\mathbf{M_0}S(k)\mathbf{p}^{(t)}, \\ ..., [S(n)\mathbf{p}^{(t)}]^T\mathbf{M_0}S(n)\mathbf{p}^{(t)} \Big\rangle. \quad (8)$$

Возникает вопрос: соответствует ли найденная нами структура какой-либо симметрии в схеме замещения?

Все рассмотренные выше свойства схемы замещения справедливы при условии, что матрица замещения имеет симметрию вида $\mathbf{M^T} = \mathbf{M}$, то есть симметрична в традиционном смысле линейной алгебры.

Данная симметрия допускается полной группой перестановок, действующей в пространстве поиска и является максимально возможной симметрией генетического алгоритма.

Несмотря на преимущества алгебраической модели генетического алгоритма, она обладает существенным недостатком: модель имеет высокую размерность. В самом деле, вектор состояния популяции имеет размерность пространства поиска, хотя количество отличных от нуля компонент в нем не более числа членов популяции.

Преобразование Фурье схемы замещения.

Декомпозиция генетических алгоритмов может быть выполнена на основе анализа Фурье. Традиционно анализ Фурье в технических приложениях применяется к процессам, обладающим периодичностью. Соответственно, симметрия, имеющаяся в таких процессах, относится к циклической симметрии.

На самом деле преобразование Фурье может быть применено к построению декомпозирующего преобразования модели, симметричной относительно группы перестановок. Здесь мы рассмотрим как раз такой случай.

Любая группа перестановок включает циклические перестановки – циклы. Вместе с тождественной перестановкой каждый цикл образует подгруппу группы перестановок, изоморфную группе C_n при соответствующем выборе n. Поэтому допустимо рассматривать разложения группы перестановок по ее циклическим подгруппам.

Характеры группы образуют ортогональный базис неприводимого представления группы. Характеры циклических групп одномерны и совпадают с неприводимыми представлениями. Следовательно, характеры циклических групп могут образовывать базис разложения группы перестановок по ее циклическим подгруппам.

Вернемся к схеме замещения. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Для схемы замещения

$$P_{t+1} = M(P_t) \quad (9)$$

с оператором замещения (8), где матрицы $S(k)$ принадлежат полной группе перестановок S_n, матрица преобразования Фурье $\Phi = \{\varphi_{i,j}\}$ с элементами

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi}{a}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)} \tag{10}$$

обеспечивает каноническое разложение матрицы замещения к треугольной форме. Здесь a – размерность алфавита кодировки хромосом, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ – скалярное произведение векторов – хромосом, индексы которых при выбранной нумерации имеют значения i, j.

Доказательство. Выразим элемент $\tilde{M}_{i,j}$ матрицы, полученной преобразованием эквивалентности матрицы замещения при помощи матрицы $\Phi = \{\varphi_{i,j}\}$. Для краткости обозначим $e^{\sqrt{-1}\frac{2\pi}{a}x} = e(x)$. Тогда вместо (10) можно записать:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{(i^T j)}, \tag{11}$$

имея в виду, что в качестве индексов используются номера хромосом, а в качестве аргументов – коды хромосом в соответствующем алфавите. Поэтому аргументом экспоненты в выражении (11) является скалярное произведение. Учитывая все особенности операций рекомбинации и мутации, в выражении для $\tilde{M}_{i,j}$ нам придется применить пять индексов и обозначить коды и индексы хромосом как x, y. Тогда, обозначив $\bar{M}_{ij} = \bar{M}_{xy}$, имеем:

$$\tilde{M}_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{u,v} e(-x^T u - v^T y) \sum_{i,j,k} \mu_i \mu_j (\zeta_k + \bar{\zeta}_k) \delta_{ijkuv}, \tag{12}$$

где логическая функция δ_{ijkuv} имеет следующий смысл:

$$\delta_{ijkuv} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (u \oplus i) \otimes k \oplus \bar{k} \otimes (v \oplus j) = 0 \\ 0, & \text{если} \quad (u \oplus i) \otimes k \oplus \bar{k} \otimes (v \oplus j) \neq 0 \end{cases} \tag{13}$$

Здесь обозначено: $\bar{k}$ – номер хромомсомы, гены которой инвертированы по отношению к хромосоме с номером k.

Преобразуем (12) следующим образом:

$$\tilde{M}_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i,j,k} \mu_i \mu_j (\zeta_k + \bar{\zeta}_k) \sum_{u,v} e(-x^T u - y^T v) \tilde{\delta}_{ijkuv}, \tag{14}$$

где логическая функция $\tilde{\delta}_{ijkuv}$ имеет следующий смысл:

$$\tilde{\delta}_{ijkuv} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (u \oplus i) \otimes k = -\bar{k} \otimes (v \oplus j) \\ 0, & \text{если} \quad (u \oplus i) \otimes k \neq -\bar{k} \otimes (v \oplus j) \end{cases} \tag{15}$$

В условиях (15) мы можем записать вместо $(u \oplus i) \otimes k = -\bar{k} \otimes (v \oplus j)$ преобразованное выражение: $k \otimes (u \oplus i) = \bar{k} \otimes (v \oplus j)$. Тогда внутренние суммы преобразуются следующим образом:

$$\sum_{u,v} e(-x^T u - y^T v) \tilde{\delta}_{ijkuv} = \sum_{\delta_{ku}} e(-x^T u - i) \sum_{\bar{\delta}_{ku}} e(-y^T v - j) =$$

$$e(x^T i + y^T j) \sum e(-x^T u) \sum e(-y^T v) = ne(x^T i + y^T j)\delta_{xyk}, \tag{16}$$

где логическая функция δ_{xyk} имеет следующий смысл:

$$\delta_{xyk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x \otimes \bar{k}) = 0 \cap (y \otimes k) = 0 \\ 0, & \text{если} \quad (x \otimes \bar{k}) = 0 \cap (y \otimes k) \neq 0 \end{cases} \tag{17}$$

Подставляя (16) в (14), имеем:

$$\tilde{M}_{xy} = \frac{n}{2} \sum_{i,j} \mu_i \mu_j e(x^T i - y^T j) \sum_k (\zeta_k + \bar{\zeta}_k)\delta_{xyk} = \frac{n}{2} \sum_{i,j} \tilde{\mu}_i \tilde{\mu}_j \sum_k (\zeta_k + \bar{\zeta}_k)\delta_{xyk}$$

Переходя к исходной индексации, получаем выражение для элементов декомпозированной матрицы замещения в следующем виде:

$$\tilde{M}_{ij} = \frac{n}{2} \tilde{\mu}_i \tilde{\mu}_j \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta_k + \bar{\zeta}_k)\delta_{ijk}. \tag{18}$$

Здесь $\tilde{\mu}(i), \tilde{\mu}(j)$ – преобразованные по Фурье векторы распределения вероятностей мутаций, $\zeta(k)$ – вектор распределения вероятностей рекомбинации. Напомним, что параметрами алгоритма являются вероятность мутации отдельных генов и вероятность рекомбинации пары хромосом. Распределения вероятностей $\mu(i), \zeta(k)$ вычисляются в предположении о конкретном механизме выполнения мутаций и рекомбинации.

Логическая функция δ_{ijk} имеет следующий смысл:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \otimes \bar{k} = 0 \cap j \otimes k = 0 \\ 0, & \text{если} \quad i \otimes \bar{k} = 0 \cap j \otimes k \neq 0 \end{cases} \tag{19}$$

При выводе результата (18) с применением преобразования эквивалентности $\Phi^{-1}\mathbf{M}\Phi$ с матрицей $\Phi = \{\varphi_{i,j}\}$ использовался ряд свойств матрицы Фурье: $\Phi = \Phi^{-1} = \Phi^*$, где последней стоит комплексно-сопряженная и транспонированная матрица. Как известно, преобразование Фурье унитарно.

Из полученных выражений следует, что элементы преобразованной матрицы замещений отличны от нуля, если соответствующие им хромосомы обладают свойством: $\delta_{xyk} = 1$. Учитывая форму выражения (17) для данной логической функции и свойство $\mathbf{M^T} = \mathbf{M}$ исходной матрицы замещений, делаем вывод о том, что ненулевые элементы преобразованной по Фурье матрицы замещений могут располагаться только по одну сторону от главной диагонали. Это и доказывает данное утверждение.

Замечание. При бинарном алфавите кодирования хромосом скалярное произведение $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$. Если алфавит кодирования небинарный, то либо в пространстве хромосом специальным образом вводится скалярное произведение, либо векторы $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ содержат номера элементов алфавита и операции сложения и умножения с ними выполняются по модулю a.

Еще раз отметим, что выражения (10)-(19) справедливы при любом способе кодирования хромосом и любом алфавите кодирования.

Литература

[1] Goldberg D.E. Genetic Algorithms in search, optimization and machine learning. – Addison-Wesley, 1989.

[2] Богатырёв М.Ю. Генетические алгоритмы: принципы работы, моделирование, применение – Тула: ТулГУ, 2003. – 152 с.

[3] Whitley D.L., Vose M.D. Foundations of Genetic Algorithms. – Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 1995. – 86 p.

[4] Radcliffe, N.J. The algebra of genetic algorithms. – Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. – V.10, p.339-384.

[5] Богатырёв М.Ю. Структурно-инвариантный подход к исследованию генетических алгоритмов. – Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Том 8, вып.3. Информатика. – Тула, 2002. – С.128-136.

БИФУРКАЦИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОРОВ И ДИНАМИКА ЛАЗЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОГЛОТИТЕЛЕМ

Д.Ю.Волков

факультет математики РГПУ им. А.И.Герцена

Санкт-Петербург

e-mail: dmitrivolkov@mail.ru

Статья посвящена изучению бифуркации состояния равновесия с парой чисто-мнимых собственных чисел и парой нулевых собственных чисел в системе, описывающей динамику лазера снелинейным поглотителем.

Основное внимание уделяется вопросу о существовании инвариантных торов и квазипериодических решений на торах. Исследование проводится в два этапа. На первом этапе выводится усеченная нормальная форма системы. На втором этапе исследуется динамика полученной бифуркационной системы и устанавливается связь между решениями укороченной и полной системы. В работе используется теория нормальных форм, теория инвариантных многообразий и параметрическая КАМ теория.

Введение. В статье рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая лазер с нелинейным поглотителем (laser of saturable absorber, LSA). Как хорошо известно, такой лазер может демонстрировать большое разнообразие динамических режимов. Для теоретического описания такой системы разработано несколько моделей. Мы используем одну из таких моделей и исследуем ее при таких значениях параметров, при которых она сводится к изучению системы уравнений

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x, \mu), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$,

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & -1-\mu_2 & 0 & 0 \\ 1+\mu_2 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix},$$

где $F(x, \mu) = O(|x|^2)$.

При нулевых значениях параметра μ состояние равновесия имеет пару чисто мнимых и пару нулевых собственных чисел. Исходная лазерная система допускает определенную симметрию(точно симметрия будет описана ниже). В статье рассматриваются вопросы существования инвариантных торов системы (1). Бифуркация торов в общих системах изучена в [9]. Инвариантные торы строятся с помощью методов теории бифуркации. Для амплитудных уравнений мы находим стационарные решения , которым в полной системе соответствует инвариантный тор полной системы. Статья организованна следующим образом: в первом пункте описывается модель лазера с нелинейным поглотителем и построение усеченной нормальной формы системы. Второй пункт посвящен исследованию нормальный формы и доказательству существования инвариантных торов. В третьем пункте доказываются теоремы о существовании инвариантных торов полной системы.

1. Лазерная модель и нормальная форма. Рассмотрим простейшую модель одномодового кольцевог лазера, в резонатор которого наряду с усиливающей помещена нелинейная поглощающая среда. Каждая из сред состоит из идентичных двухуровневых атомов. Линии усиления и поглощения однородно уширены, их центры совмещены и совпадают с одной из частот резонатора (подробности см. [2, 7, 8]). Такую модель можно описать системой пяти вещественных дифференциальных уравнений:

$$\dot{E} = -E + P_1 + P_2, \quad \dot{P}_1 = -\delta_1 P_1 - (M_{01} + M_1)E, \quad \dot{P}_2 = -\delta_2 P_2 - (M_{02} + M_2)E,$$

$$\dot{M}_1 = -\rho_1 M_1 + EP_1, \quad \dot{M}_2 = -\rho_2 M_2 + \beta EP_2. \qquad (2)$$

В системе индекс 1 относится к усиливающей среде, а индекс 2 – к поглощающей среде, E – амплитуда электрического поля, P_k – поляризация в среде, M_k – разность населенностей рабочих уровней от их значений M_{0k} – при отсутствии генерации, $M_{01} < 0$, $M_{02} > 0$. Параметры δ_k и ρ_k соответственно поперечная и продольная скорости релаксации, отнесенные к полуширине линии резонатора. Параметр β – отношение коэффициента насыщения поглощающей и усиливающей сред, t – безразмерное время. Подробное описание системы можно найти в [7]. Отметим, что система инварианта относительно преобразования

$$E \to -E, \qquad P_k \to -P_k.$$

Известно, что система (2) имеет три состояния равновесия, зависящих от параметров. Состояние равновесия

$$E = P_1 = P_2 = M_1 = M_2 = 0$$

обозначается I_0. Мы будем изучать бифуркацию этого состояния равновесия. Рассмотрим характеристический многочлен матрицы линейного приближения системы (2) в окрестности состояния равновесия I_0

$$f(\lambda)(\lambda+\rho_1)(\lambda+\rho_2)=0, \tag{3}$$

где

$$f(\lambda)=(\lambda^3+A_1\lambda^2+A_2\lambda+A_3), \tag{4}$$

$$A_1=1+\delta_1+\delta_2, A_2=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2+M_{01}+M_{02}, A_3=\delta_1\delta_2+\delta_1M_{02}+\delta_2M_{01}.$$

Из свойств кубического многочлена следует, что: для $A_3>A_1A_2$, существует два комплексно-сопряженных корня $f(\lambda)$ с положительной вещественной частью и для $A_3<A_1A_2$ нет таких корней с положительной вещественной частью. Для

$$A_2A_1-A_3=0, \quad A_3<0 \tag{5}$$

многочлен $f(\lambda)$ имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega$ и один вещественный корень. Условия (5) определяют бифуркацинную кривую γ:

$$M_{01}=-\frac{1+\delta_2}{1+\delta_1}M_{02}-(\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2+{\delta_2}^2).$$

Рассмотрим следующую параметризацию кривой γ:

$$M_{01}=f_1(\omega)=-\frac{1+\delta_2}{\delta_1-\delta_2}\omega^2-\frac{\delta_1^2(1+\delta_2)}{\delta_1-\delta_2},$$

$$M_{02}=f_2(\omega)=-\frac{1+\delta_1}{\delta_1-\delta_2}\omega^2-\frac{\delta_2^2(1+\delta_1)}{\delta_1-\delta_2}, \quad \omega>0.$$

В качестве параметра мы выбрали частоту ω, $\omega>0$. Вблизи от кривой γ полином $f(\lambda)$ имеет пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2}=\varepsilon\pm i\omega$. Легко показать, что если $(M_{01},M_{02})\in U$, U – окрестность γ, то

$$M_{01}=f_1(\omega)-(2\varepsilon(\delta_1+\delta_1\delta_2+\delta_1^2+\omega^2)+(\varepsilon^2(1+4\delta_1+\delta_2)+2\varepsilon^3))/(\delta_1-\delta_2)$$

$$M_{02}=f_2(\omega)+(2\varepsilon(\delta_2+\delta_2^2+\delta_1\delta_2+\omega^2)+(\varepsilon^2(1+4\delta_2+\delta_1)+2\varepsilon^3))/(\delta_1-\delta_2)$$

Третий корень λ_3, вещественный и отрицательный, $\lambda_3=-1-\delta_1-\delta_2-2\varepsilon$. Будем считать ω,ε, ρ_1 и ρ_2 бифуркационными параметрами, $\omega>c>0$.

Построим усеченную нормальную форму системы (2). Как известно, построение нормальной формы осуществляется в два шага: на первом шаге с помощью линейного преобразования приводим к жордановой форме линейную часть системы (2), а на втором шаге упрощаются нелинейные слагаемые. Цель упрощения – найти замену координат, при котором упрощенное уравнение будет иметь наипростейший вид. искомое упрощение будет получено до членов второго порядка включительноза счет близкой к тождественной замены системы координат (подробности см. [3, 6]).

На первом шаге рассмотрим линейную замену переменных: (E', P_1', P_2', M_1', M_2')

$$E=E'+P_1'+P_2'\ , \quad P_1=\frac{f_1(\omega)}{(1+\delta_2)}E'-\frac{f_1(\omega)}{\delta_1+i\omega}P_1'-\frac{f_1(\omega)}{\delta_1-i\omega}P_2',$$

$$P_2 = \frac{f_2(\omega)}{(1+\delta_1)}E' - \frac{f_2(\omega)}{\delta_2 + i\omega}P_1' - \frac{f_2(\omega)}{\delta_2 - i\omega}P_2', \quad M_1 = M_1', \quad M_2 = M_2'.$$

При такой замене координат линейные слагаемые в системе (1) примут диагональный вид

$$\mathrm{diag}(-(1+\delta_1+\delta_2+2\varepsilon), \varepsilon + i\omega, \varepsilon - i\omega, -\rho_1, -\rho_2).$$

При

$$\varepsilon = 0, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 0$$

состояние равновесия I_0 будет иметь пару чисто мнимых собственных чисел $\pm i\omega$ и пару нулевых собственных чисел. Далее, мы исключим переменную, соответствующую собственному числу $-(1+\delta_1+\delta_2)$. Эта процедура соответствует переходу на центральное многообразие. После этого с помощью нелинейной замены координат, близкой к тождественной, нормализуем члены второго порядка малости. В итоге мы получим следующую систему уравнений:

$$\dot{u} = u(\varepsilon + i\omega + av + bw), \quad \dot{v} = -\rho_1 v + c\,|u|^2, \quad \dot{w} = -\rho_2 w + d|u|^2 \tag{6}$$

где u – комплексная переменная, v и w вещественные переменные. Точные выражения коэффициентов мы a, b, c и d через коэффициенты исходной системы мы не приводим из-за их громоздкости. Введем полярные координаты $u = |x|^{1/2}\exp(i\varphi)$ и изменим масштаб переменных. В результате мы получим систему четырех вещественных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x} = x(\varepsilon + y - az) + O(3), \quad \dot{y} = -\rho_1 y + x + O(3) \\ &\dot{z} = -\rho_2 z + x + O(3), \qquad \dot{\varphi} = \omega + c_1 y + c_2 z + O(2) \end{aligned} \tag{7}$$

где переменные x, y, z – медленные переменные, а φ – быстрая переменная. Наряду с системой (7) рассмотрим амплитудную систему

$$\dot{x} = x(\varepsilon + y - az),\ x \geq 0,\ \dot{y} = -\rho_1 y + x,\ \dot{z} = -\rho_2 z + x. \tag{8}$$

Эта система описывает динамику медленных переменных и правые части системы не зависят от переменной φ. Эта система отличается от амплитудной системы, которая появляется при изучении общей системы в окрестности точки бифуркации. Это вызвано симметрией исходной лазерной системы. Система (8) описывает динамику системы (1) в окрестности точки бифуркации $\varepsilon = \rho_1 = \rho_2 = 0$ следующим образом: состояниям равновесиям системы (8) соответствуют при определенных условиях периодические решения систем (1),(7), а периодическим решениям системы (8) – инвариантные торы систем (1),(7).

2. Исследование амплитудной системы. Рассмотрим поведение траекторий усеченной нормальной формы. Учитывая физические значения параметров, рассмотрим только случай

$$a > 0, \quad \rho_1 > 0, \quad \rho_2 > 0. \tag{9}$$

Система (8) имеет два состояния равновесия. Одно из этих решений ($x = y = z = 0$) соответствует нулевому состоянию равновесия исходной системы (1).

Это решение устойчиво(неустойчиво) при $\varepsilon < 0(\varepsilon > 0)$. Второе стационарное решение имеет вид

$$x_1 = \varepsilon\rho_1\rho_2/(a\rho_1 - \rho_2),\ x_1 > 0,\ \ y = \varepsilon\rho_1/(a\rho_1 - \rho_2),\ \ z = \varepsilon\rho_1/(a\rho_1 - \rho_2). \qquad (10)$$

Это решение соответствует периодическому решению исходной системы. Для $\varepsilon < 0$ это решение неустойчиво. Рассмотрим бифуркацию Андронова-Хопфа этого периодического решения. Матрица линейного приближения этого решения имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -a\cdot x_1 \\ 1 & \rho_1 & 0 \\ 1 & 0 & -\rho_2 \end{pmatrix}$$

Если матрица B имеет на некоторой поверхности параметров пару чисто мнимых собственных чисел, то при пересечении этой поверхности может происходить рождение периодического решения. Анализируя характеристический многочлен матрицы B, мы получим, что в окрестности множества

$$e = (\rho_1 + \rho_2)(a\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 - a\rho_2), \qquad \rho_1/\rho_2 > a > \rho_2/\rho_1 \qquad (11)$$

матрица B имеет пару комплексно-сопряженных собственных чисел $\alpha \pm i\beta$ и вещественное собственное число $-(\rho_1 + \rho_2)$. Далее для решения вопроса о рождении цикла нужно вычислить первую ляпуновскую величину C_1 . В литературе приводится много вариантов расчета этой величины [1, 5, 6]. Мы использовали формулу, предложенную Баутиным [6]. Нахождение ляпуновской величины проводилось с помощью системы MAPLE. Мы не приводим явный вид этой величины из-за сложности. В окрестности (11) эта величина $C_1 < 0$. Следовательно, по теореме Андронова-Хопфа [1, 5, 6] мы получаем, что при пересечении поверхности (11) происходит рождение устойчивого периодического решения. Таким образом, верна теорема

***Теорема* 1**. В окрестности множества (11) амплитудная система (8) имеет единственный асимптотически устойчивый предельный цикл.

3. Инвариантные торы полной системы. Рассмотрим вопрос о соответствии решений амплитудной системы и полной системы уравнений (1). Если собственные числа матрицы линеаризации имеют ненулевую вещественную часть,то состоянию равновесия амплитудной системы соответствует инвариантный тор системы (1). Это доказывается с помощью стандартных методов теории инвариантных многообразий. Более трудным вопросом является вопрос о существовании квазипериодических решений. Область параметров, для которых существуют квазипериодические решения, находится с помощью методов диссипативной КАМ теории ([4]). Обозначим через Γ окрестность множества (11). Фиксируем β_0 и рассмотрим диск

$$\{(\alpha,\beta) \in \Gamma|\ 0 < \alpha < \mathrm{C},\ \ \mathrm{p}(|\beta - \beta_0|) < D|\alpha|^K\}, \qquad (12)$$

где C, D, K – положительные параметры, C^∞-функция $p(x)$ является монотонно возрастающей.

***Теорема* 2**. Для любого β_0 существуют положительные константы C и D такие, что для параметров α и β из диска (12), $\alpha > 0$ и $K = 7/2$ система

(8) имеет инвариантный двумерный тор. Этот тор является асимптотически устойчивым.

Доказательство этой теоремы проводится по стандартному плану. На первом шаге система (8) записывается в окрестности состояния равновесия (10). На втором шаге координаты выбираются так, что линейная часть системы становится диагональной. После таких преобразований к полученной системе можно применить теорему о существовании инвариантных торов. Подробности см. в [4]. Большинство (в смысле теории меры) инвариантных торов не являются квази-периодическими. Квази-периодические торы существуют для параметров, которые образуют канторово слоение. Это слоение определяется условием

$$|k_1\omega + k_2\beta| \geq \frac{\gamma}{(|k_1| + |k_2|)^\tau}$$

где $\tau > n - 1$, $\gamma > 0$. Полные доказательства приведены в [4].

Благодарности. Автор благодарит А.Г.Владимирова за сотрудничество и обсуждение результатов этой статьи.

Литература

[1] Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I. and Maier A.G. Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane. – Israel Program of Scientific Translations, Jerusalem, 1973.

[2] Abraham N.B.,Mandel P. and Narducci L.M. Dynamical instabilities and pulsations in lasers // Progress in Optics. edited by E.Wolf. – Elsevier, Amsterdam, Vol.25, pp.1-190, 1988.

[3] Arnold V.I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. – Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[4] Broer H.W.,Huitema G.B. and Sevryuk M.B. Quasi-periodic tori in a families of dynamical systems: order admits chaos, LNM 1645. – Springer-Verlag, 1996.

[5] Hassard B.D.,Kazarinoff N.D. and Wan Y.-H. Theory and Applications of Hopf bifurcation. – Cambridge University Press, London, 1981.

[6] Kuznetsov Yuri A. Elements of applied Bifurcation Theory // Applied Mathematical Sciences, volume 112, Springer-Verlag, Berlin, 1995

[7] Lugiato L.A., Mandel P., Dembinski S.T., Kossakovski A. Semiclassical and quantum theories of bistability in lasers containing saturable absorbers // Phys.Rev. A, 18 (1978), p. 234-278.

[8] Vladimirov A.G., Volkov D.Yu. Low-intensity chaotic operations af a laser with saturable absorber // Optics Communication, 100 (1993), p. 351-360.

[9] Volkov D.Yu. Invariant tori bifurcation from an equilibrium state in the presence of zero eigenvalues // Vestnik Lening. Univ., Ser.1 (1988), №2, 102-103 transl. Vestn. Leningr. Univ., Math. 218(1988), №2, 78-79.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

Волосов К.А.
Московский государственный университет путей сообщения
Москва
e-mail:volosovk@yahoo.co.uk

Предложен способ построения решений, не являющихся простыми волнами для класса квазилинейных параболических и гиперболических уравнений. Выведены новые уравнения, которые являются аналогами полулинейных параболических уравнений,например, таких как Фитц-Хью-Нагумо-Семенова.

Целью данной работы излагается новый способ построения явных формул для точных решений квазилинейных параболических уравнений. Алгоритм формулируется в условной форме в предположении, что все функции существуют и имеют ту гладкость, которая требуется для того, чтобы алгоритм мог быть применим.

В [1] найдена скрытая симметрия (см.также [4, с.229]), в [2-4] построено некоторое преобразование, связывающее решения вида простых волн для некоторого выделенного класса квазилинейных диссипативных уравнений. Для пересчета решений типа простых волн (функции аргументов $ax + bt, b = const$) необходимо решить ОДУ первого порядка (см. [2, с.67], [3, с.269], [4, с.19], а также [10]).

1. Основные результаты. Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение

$$\varepsilon Z_t - \varepsilon^2 (K(Z,\varepsilon)) Z_x)_x + F(Z,\varepsilon) = 0. \qquad (1)$$

Малый параметр в данной работе используется нестандартно, для построения точных решений по схеме, описанной ниже. Здесь $Z = Z(x,t,\varepsilon) \geq 0$ – неизвестная гладкая функция по переменным x, t (в данной работе ограничимся рассмотрением только гладких решений уравнения (1)). $K(Z,\varepsilon)$, $F(Z,\varepsilon)$ – неотрицетельные функции, имеющие одну производную по переменной Z при $Z \geq 0$. Частные случаи уравнения (1), когда его коэффициенты постоянные широко известны (см. обширную библиографию в [1-9]). Это уравнение нелинейной теплопроводности, и существует очень большой круг работ связанный с ним. Попытки пересчитать решения квазилинейных параболических уравнений через решения линейных уравнений предпринимались и ранее (скрытая симметрия [8], преобразование Кирхгофа, преобразование H.Engler [12]). Однако в них преобразовывалась только одна зависимая переменная.

Сделаем замену переменных

$$Z(x,t,\varepsilon)|_{x=x(\xi,\delta,\varepsilon),t=t(\xi,\delta,\varepsilon)} = U(\xi,\delta,\varepsilon), \qquad (2)$$

при этом функция $Z(x,t,\varepsilon)$ является решением уравнения (1). Ниже предложен новый алгоритм, связанный с этой заменой. Предположим, что детерминант (якобиан) $detJ$ этой замены переменных

$$J = \begin{pmatrix} x_\xi & t_\xi \\ \\ x_\delta & t_\delta \end{pmatrix}$$

отличен от нуля. Предположим, что по крайней мере локально существует обратное преобразование $\xi = \xi(x,t,\varepsilon), \delta = \delta(x,t,\varepsilon)$. Приведенные ниже примеры показывают, что эти предположения выполняются на некотором непустом множестве. Связь производных прямого и обратного преобразования имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= DetJ\frac{\partial \delta}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \xi} = -DetJ\frac{\partial \delta}{\partial x}, \\ \frac{\partial x}{\partial \delta} &= -DetJ\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = DetJ\frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ DetJ &= \frac{1}{\xi_x\delta_t - \xi_t\delta_x} = t_\delta x_\xi - t_\xi x_\delta. \end{aligned} \tag{3}$$

Обобщая результаты работы [1] предположим, что можно выбрать связь решений уравнения (1) с некоторым нелинейным уравнением второго порядка в частных производных для функции $U(\xi,\delta,\varepsilon)$, имеющей три производные по переменным ξ,δ (см.(16))

$$L[U(\xi,\delta,\varepsilon)] = 0. \tag{4}$$

L – некоторый дифференциальный оператор в частных производных по переменным ξ,δ второго порядка. Предположим, что справедливо соотношение для потоков

$$\begin{aligned} K(Z(x,t,\varepsilon))\frac{\partial Z}{\partial x}\bigg|_{x=x(\xi,\delta,\varepsilon),t=t(\xi,\delta,\varepsilon)} &= Y(\xi,\delta,\varepsilon), \\ K(Z(x,t,\varepsilon))\frac{\partial Z}{\partial t}\bigg|_{x=x(\xi,\delta,\varepsilon),t=t(\xi,\delta,\varepsilon)} &= T(\xi,\delta,\varepsilon). \end{aligned} \tag{5}$$

Предположим, что функции $U(\xi,\delta,\varepsilon)$, $Y(\xi,\delta,\varepsilon)$, $T(\xi,\delta,\varepsilon)$ имеют три производные по переменным ξ,δ. Вычисляя производные в левых частях, с учетом (4) получим равенства

$$\begin{aligned} K(U(\xi,\delta,\varepsilon),\varepsilon)\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right) &= Y(\xi,\delta,\varepsilon)detJ, \\ K(U(\xi,\delta,\varepsilon),\varepsilon)\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) &= T(\xi,\delta,\varepsilon)detJ. \end{aligned} \tag{6}$$

Умножим уравнение (1) на $K(Z,\varepsilon)$. После подстановки (2),(5) в уравнение (1) получим соотношение

$$\varepsilon T(\xi,\delta,\varepsilon) - \varepsilon^2 K(U,\varepsilon)\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)/detJ + K(U,\varepsilon)F(U,\varepsilon) = 0. \tag{7}$$

В силу гладкости функции $Z(x,t,\varepsilon)$ справедливо равенство смешанных производных $Z_{x,t} = Z_{t,x}$. Это соотношение можно переписать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{Y}{K(U,\varepsilon)}\right]\frac{\partial x}{\partial\delta}+\frac{\partial}{\partial\delta}\left[\frac{Y}{K(U,\varepsilon)}\right]\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{T}{K(U,\varepsilon)}\right]\frac{\partial t}{\partial\delta}+\frac{\partial}{\partial\delta}\left[\frac{T}{K(U,\varepsilon)}\right]\frac{\partial t}{\partial\xi}=0. \tag{8}$$

Анализ системы (6)-(8) нazделен на два этапа. На первом этапе будем ее рассматривать, как нелинейную алгебраическую систему относительно производных $x_\xi, x_\delta, t_\xi, t_\delta$. Остальные функции $K(U,\varepsilon)$, $F(U,\varepsilon)$, $U(\xi,\delta,\varepsilon)$, $Y(\xi,\delta,\varepsilon)$, $T(\xi,\delta,\varepsilon)$ временно, на этом шаге предполагается известными. Основной результат работы изложен в теоремах 1,2.

***Теорема* 1**. Системы нелинейных алгебраических уравнений (6)-(8) относительно переменных системы уравнений $x_\xi, x_\delta, t_\xi, t_\delta$ имеет единственное решение

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=K[-Q_1Q_2TU_\xi+Q_1FKTU_\xi{}^2+Q_1T^2U_\xi{}^2+Q_2{}^2TU_\delta-$$
$$Q_2FKTU_\delta U_\xi-Q_2T^2U_\delta U_\xi-Q_1T_\xi U_{xi}Y^2+Q_2T_\delta U_\xi Y^2]/(YP(\xi,\delta,\varepsilon)), \tag{9}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\delta}=K[-Q_1^2TU_\xi+Q_1Q_2TU_\delta+Q_1FKTU_\delta U_\xi+Q_1T^2U_\delta U_\xi-$$
$$Q_2FKTU_\delta{}^2-Q_2T^2U_\delta{}^2-Q_1T_\xi Y^2U_\delta+Q_2T_\delta Y^2U_\delta]/(YP(\xi,\delta,\varepsilon)), \tag{10}$$

$$\frac{\partial t}{\partial\xi}=[Q_2K[Q_1U_\xi-Q_2U_\delta]U_\xi]/P(\xi,\delta,\varepsilon), \tag{11}$$

$$\frac{\partial t}{\partial\delta}=Q_1K[Q_1U_\xi-Q_2U_\delta]/P(\xi,\delta,\varepsilon), \tag{12}$$

$$P(\xi,\delta,\varepsilon))=Q_1FKTU_\xi+Q_1T^2U_\xi-Q_2FKTU_\delta-Q_2T^2U_\delta-Q_1T_\xi Y^2+Q_2T_\delta Y^2, \tag{13}$$

где

$$Q_1=FKU_\delta+\varepsilon TU_\delta-\varepsilon^2YY_\delta, \tag{14}$$

$$Q_2=FKU_\xi+\varepsilon TU_\xi-\varepsilon^2YY_\xi. \tag{15}$$

На втором этапе сформулируем условие разрешимости переопределенной системы (9)-(12) относительно функций $x=x(\xi,\delta,\varepsilon), t=t(\xi,\delta,\varepsilon)=U(\xi,\delta,\varepsilon)$.

***Теорема* 2**. Необходимое условие разрешимости переопределенной системы является равенство смешанных производных $x_{\xi\delta}=x_{\delta\xi}, t_{\xi\delta}=t_{\delta\xi}$. Эти два условия совпадают при любых гладких функциях $Y(\xi,\delta,\varepsilon), T(\xi,\delta,\varepsilon), K(U,\varepsilon), F(U,\varepsilon)$ и являются уравнением в частных производных второго порядка относительно функции $U(\xi,\delta,\varepsilon)$

$$LU=\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{Q_2K(Q_1U_\xi-Q_2U_\delta)U_\xi}{P(\xi,\delta,\varepsilon)}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{Q_1K(Q_1U_\xi-Q_2U_\delta)}{P(\xi,\delta,\varepsilon)}\right)=0. \tag{16}$$

Уравнение (16) обладает свойством однородности.

Таким образом, возникает новый способ построения решений уравнения (1) в параметрической форме с двумя параметрами по следующему алгоритму.

a) Задаем конкретный вид функций Y, T, K, F .

b) Вычисляем коэффициенты уравнения (16). Подбор функций Y, T увеличивает запас решений.

c) Находим одно из решений уравнения (16), которое обеспечивает отличный от нуля якобиан. Это, в частности, выполняется, если $\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{U_\xi}{U_\delta} \neq 0$, т.е. решение не является инвариантным относительно группы сдвига.

d) Вычисляем производные $x_\xi, x_\delta, t_\xi, t_\delta$ по формулам (9)-(12). и вычисляем функции $x = x(\xi, \delta, \varepsilon), t = t(\xi, \delta, \varepsilon)$.

Замечание. Уравнение (16) является аналогом известных классических уравнений, например, таких как Фитц-Хью-Нагумо-Фишера.

2. Эволюция волны при выходе на стационарное решение.

Пример 1. Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение

$$Z_t - (K(Z)Z_x)_x = 0, \quad K(Z) = kZ^{k-1}, \quad F(Z) = 0, \quad \varepsilon = 1. \tag{17}$$

Известно, например, решение

$$Z = (Cx^2/t)^{1/(k-1)}, C = \frac{1-k}{2k(k+1)} \tag{18}$$

этого уравнения [9]. Построим его предлагаемым способом. Вычислим уравнение (16). Для этого в (9)-(12) подставим

$$Y_{\xi,\delta} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, T_{\xi,\delta} = \frac{\partial U}{\partial \delta}, Q_1 = U{x_\delta}^2 - U_{\xi\delta}U_\xi,$$
$$Q_2 = U_\delta - U_{\xi\xi}, \quad P(\xi,\delta) = Q_1T^2 - Q_2T^2U_\delta - Q_1T_\xi U_\xi + Q_2T_\delta {U_\xi}^2. \tag{19}$$

Простейшее из решений полученного уравнения третьего порядка в частных производных (16) имеет вид

$$U(\xi,\delta) = \exp\left(c_2 - \frac{(c_1(k+1)-\xi)^2}{2(k-1)\delta}\right). \tag{20}$$

Счевидно,что эта функци является одновременно решением некоторого линейного параболического уравнения второго порядка, что было замечено в [1]. Вычислим производные по формулам (9)-(12).

$$x_\xi = \frac{2kE_1[(k+1)\delta + (k-1)m^2]}{(k-1)m^2}, x_\delta = \frac{kE_1[2(k+1)\delta + (k-1)m^2]}{(k-1)\delta m},$$
$$t_\xi = \frac{-2k\delta E_1[2(k+1)\delta + (k-1)m^2]}{(k-1)m^3}, t_\delta = \frac{-kE_1[4(k+1)\delta + (k-1)m^2]}{(k-1)m^2},$$
$$m = c_1(k+1) - \xi, \tag{21}$$

Интегрируя, находим

$$x = x(\xi,\delta) = x_o + \frac{2kE_1(k+1)\delta}{(k-1)m}, t = t(\xi,\delta) = t_o - \frac{2kE_1(k+1)\delta^2}{(k-1)m^2},$$
$$E_1 = \exp[c_2(k-1) - \frac{(k-1)m^2}{2(k+1)\delta}. \tag{22}$$

Якобиан имеет вид $detJ = \dfrac{2k^2{E_1}^2(k+1)\delta}{(k-1)m^2}$. Решение уравнения (1) в параметрической форме с двумя параметрами имеет вид:

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta) = \exp\left(c_2 - \frac{(c_1(k+1)-\xi)^2}{2(k-1)\delta}\right). \qquad (23)$$

В данном случае при $c_1 = 0, c_2 = 0$ удается исключить переменные ξ, δ и получить решение (19). В примере видно, что якобиан в некоторой области отличен от нуля, и условия (5) выполнены.

Пример 2. Рассмотрим квазилинейное параболическое уравнение (1), где

$$K(Z) = kZ^{k-1}, F(Z) = \gamma Z^q(1-Z^2). \qquad (24)$$

Положим $\gamma = -1/k, k = 2-q$. Такой вариант параметров изучался в [6] с других позиций, другими методами. Справедлива теорема

Теорема 3. Решение уравнеия (1) с параметрами (24) имеет вид

$$Z(x,t,\varepsilon)|_{x=x(\xi,\delta,\varepsilon),t=t(\xi,\delta,\varepsilon)} = U(\xi,\delta,\varepsilon) = \frac{1-\exp(\xi\sqrt{2}/\varepsilon)}{1+\exp(\xi\sqrt{2}/\varepsilon)+\exp(\xi/(\sqrt{2}\varepsilon)-3\delta/(2\varepsilon))}.$$

Вспомогательные функции необходимые для вычисления производных в (9)-(12) имеют вид

$$\begin{aligned} &Y(\xi,\delta,\varepsilon) = r(s,m,\varepsilon), \quad T(\xi,\delta,\varepsilon) = r(s,m,\varepsilon), \\ &s = \exp(\xi\sqrt{2}/\varepsilon), \quad m = \exp(-3\delta/(2\varepsilon)), \end{aligned} \qquad (25)$$

Функция

$$r(s,m,\varepsilon) = \rho(\varsigma), \varsigma = \frac{2C_1 - C_2 + C_1 ms + C_2 s^2}{s^2-1} \qquad (26)$$

удовлетворяет ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} &{C_1}^2(C_2-\varsigma)(2C_1-C_2+\varsigma) + \\ &+(C_1-C_2+\varsigma)^3\rho(\varsigma)(-C_1+(C_1-C_2+\varsigma)^2\dot{\rho}(\varsigma)) = 0. \end{aligned} \qquad (27)$$

Доказательство проводится по следующей схеме. Малый параметр в данной работе используется нестандартно. Числитель вычисленного уравнения (16) "разделим" на пять уравнений, соответствующих различным степеням ε. Приравняем к нулю коэффициены при одинаковых степенях ε. Далее следуем схеме изложенной в [11]. Изучая следствие переопределенной системы получим соотношение

$$(m+4s+ms^2)\frac{\partial r(s,m,\varepsilon)}{\partial m} - s(1-s^2)\frac{\partial r(s,m,\varepsilon)}{\partial s} = 0. \qquad (28)$$

Каждое из полученных уравнений содержит множитель (28) и удовлетворяются. Уравнение (28) дает ОДУ (27). Заметим, что инвариант ς связан с обобщением формулы (16) и совпадают $\varsigma = -1/U, C_1 = 1, C_2 = 1$. Функция $U(\xi,\delta,\varepsilon)$ является решением уравнения Фитц-Хью-Нагумо-Семенова

$$\varepsilon U_\delta - \varepsilon^2 U_{\xi\xi} - U(1-U^2) = 0, \qquad (29)$$

и описывает выход на стационарное решение волны (см. замечание в параграфе 1). Формулы (9)-(12) имеют вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = (-C_1)^{1-q} \frac{M_0(q-2)p^{q-3}}{2\sqrt{2}M_1(s^2-1)\rho(\varsigma)},$$
$$M_0 = -{C_1}^2(4{C_1}^2 - 2C_1(2-s^2)\lambda + (1+s^2)\lambda^3 + C_1(2C_1 - (1+s^2)\lambda)p^3\rho(\varsigma) + s(s^2-1)p^5\rho(\varsigma)^2), \tag{30}$$

$$M_1 = C_1\lambda(-2C_1+\lambda) + p^3\rho(\varsigma),$$
$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = -3M_2(-C_1)^{-q} \frac{(q-2)(2C_1 + (s^2-1)\lambda)p^{q-1}}{4M_1(s^2-1)\rho(\varsigma)},$$
$$M_2 = {C_1}^3 s\lambda(C_1+p) - {C_1}^2 sp^3\rho(\varsigma) + (s^2-1)p^5\rho(\varsigma)^2, \tag{31}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = C_1(-C_1)^{1-q} \frac{(q-2)(2C_1 - (s^2+1)\lambda)p^{q-3}}{\sqrt{2}(s^2-1)\rho(\varsigma)},$$
$$M_3 = {C_1}^3 s\lambda(-2C_1+\lambda) + {C_1}^2 sp^3\rho(\varsigma) + (s^2-1)p^5\rho(\varsigma)^2, \tag{32}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = 3M_3(-C_1)^{-q} \frac{(q-2)(2C_1 + (s^2-1)\lambda)p^{q-1}}{4M_1 s(s^2-1)\rho(\varsigma)},$$
$$\lambda = C_2 - \varsigma, \quad p = C_1 - C^2 + \varsigma. \tag{33}$$

Якобиан вычисляется непосредственно, и не равен нулю в некоторой области. В зависимости от параметров k, q уравнение (1),(24) имеет стационарное решение, которое имеет одну или две вещественные ветви [2-4]. Например, при при $q = 1/2, \varepsilon = 1$ квадратура для стационарного решения определяется из ОДУ

$$Z(x,t) = \chi(x), \quad 3\sqrt{15}\chi(x)^{3/2}\chi^{'}(x) \pm \sqrt{C_3 - 40\chi^3 + 24\chi^5} = 0. \tag{34}$$

где $C_3 = \pm 16$ для соответствующей ветви. Вычислить интегралы $x = x(\xi, \delta, \varepsilon), t = t(\xi, \delta, \varepsilon)$ при произвольном значении констант не удается. При подобранных значениях удается получить некоторые выражения. Исследование показывает, что построенное решение описывает нелинейную волну и ее выход на стационарное решение.

Автор благодарен за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения В.Г.Данилову и М.В.Карасеву, А.М.Филимонову, А.С.Братусю, А.Д.Мышкису, а также В.П.Маслову за конструктивные советы.

Литература

[1] К.А.Волосов. Преобразование приближенных решений линейных параболических уравнений в асимптотические решения квазилинейных параболических уравнений. – Мат. заметки, 56, 6, 1994. С.122-126.

[2] В.П.Маслов, В.Г. Данилов, К.А.Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур). С добавлением Н.А.Колобова. – Москва, Наука, 1987.

[3] V.G.Danilov, V.P.Maslov, K.A.Volosov. Mathematical Aspects of Computer Engineering. – Moscow, MIR, 1988, Edited by V.P.Maslov, K.A.Volosov.

[4] V.G.Danilov, V.P.Maslov and K.A.Volosov. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. – Kluver Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 1995.

[5] А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – Москва, Наука, 1987.

[6] Л.К.Мартинсон. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. Под ред. А.А.Самарского, С.П.Курдюмова, В.А.Галактионова. – Москва, Наука, 1986. – С.279-309.

[7] К.А.Волосов, И.А.Федотов. Асимптотическое представление решений квазилинейного параболического уравнения в окрестности фронта // ЖВМ и МФ №5, 1983. – С.93-101.

[8] В.В.Пухначев. Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // ДАН СССР, Т.294, №3, 1987. – С.535-538.

[9] Я.Б.Зельдовия, А.С.Компанеец. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от темпаратуры. К 70-летию А.Ф.Иоффе. – М., АН СССР. – 1950.

[10] K.A.Volosov, V.G.Danilov, N.A.Kolobov, V.P.Maslov. Локализованные уединенные волны // ДАН СССР, Т.287, №6, 1986. – С.535-538, или Soviet. Math. Docl., v.33, №2, 1986.

[11] К.А.Волосов. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и инвариантные свойства анзаца метода Хироты-Сатсумы // Диф.уравн., 2005., Т.41, №11. – С.1572-1575.

[12] Polynin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Chapman&Hall/CRC, 2004. – 840pp.

УДК 62-50:534.1

О НЕКОТОРОЙ МОДИФИКАЦИИ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Волосов К.А.
Московский государственный университет путей сообщения
Москва
e-mail:volosovk@yahoo.co.uk

При построении решения задачи оптимальной коррекции движения тела переменной массы метод введения вспомогательной функции для понижения порядка системы не пригоден. В данной работе предлагается использовать для построения решения групповые свойства системы уравнений для функции математического ожидания функционала и функции управления. Функцию управления, оказывается, построить проще чем решение уранения Гамильтона -Якоби-Беллмана. В изученной задаче существует предельный переход решения к решению задачи с постоянной массой.Основной результат заключен в теореме 2 параграфа 4.

1. Постановка задачи. Постановка задачи была сделана А.С.Братусем. Пусть управляемое движение материальной точки переменной массы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(M(t)\dot{x}_1) = u(t) + \eta(t)\varsigma(t), \\ &x_1(0) = x^{\circ}{}_1, \quad x_2(0) = x^{\circ}{}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t – время, $0 \le t \le T$, x_1, x_2, – фазовые координаты, $u(t)$ – управляющая сила (функция управления), $\varsigma(t)$ – гауссовский белый шум единичной интенсивности, $\eta(t)$ – ограниченная функции, представляющая интенсивность возмущений.

Если $\eta(t) = 0$, то задачу (1) принято называть детерминированной задачей оптимального управления. Именно этим случаем ограничимся в данной работе. На величину управления $u(t)$ наложено следующее интегральное ограничение:

$$\int_0^T |u|^n dt \le {Q_0}^2, \quad Q_0 = const. \tag{2}$$

Здесь n – вещественное положительное число $n > 1$, $n = \frac{2k}{2j-1}, k \ge j$, где $k, j = 1, 2....$ Число n является параметром задачи. Полная постановка задачи с постоянной массой описана в [10]. Введем переменную $q(t) = \int_t^T |u(t)|^m dt$. Переменная $q(t)$ имеет смысл неизрасходованного ресурса управления, причем $q(0) = {Q_0}^2, q(T) = 0$. Тогда к уравнениям (1) можно добавить уравнение

$$\dot{q} = -|u(t)|^m. \tag{3}$$

Предположим, что полная масса тела состоит из собственной постоянной массы m_o и величины пропорциональной неизрасходованному ресурсу управления

$$M(t) = m_o + \gamma \int_t^T |u(t)|^m dt. \tag{4}$$

При $\gamma = 0$ существует предельный переход к задаче с постоянной массой, которая решена в [1,10-12] и исследована в [2-9] в различных ситуациях.

Цель управления – минимизация функционала

$$E\{(x_1(T))^2\}. \tag{5}$$

Здесь E – знак математического ожидания. В случае детерминированной задачи знак математического ожидания в функционале (5) необходимо отбросить.

Учитывая специфику функционала (5), порядок системы (1),(3) в случае постоянной массы можно понизить. Эта процедура подробно описана в [2,4-7], см.также [14]. В задаче с переменной массой этот способ не годится, такой функции не существует.

Тогда система (1),(2) может быть записана в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = (m_o + \gamma q(t))^{-1}(u(t) + \eta(t)\varsigma(t)),$$
$$\dot{q} = -|u|^m,$$
$$x_1(0) = x^\circ{}_1, \quad x_2(0) = x^\circ{}_2. \tag{6}$$

2. Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана ($n > 1$). Пусть $S(y, q, t)$ – минимальное значение математического ожидания одного из функционалов (4), которое может быть достигнуто при начальных условиях $t = t_0, q = 0, y = y_0$ в задаче оптимального управления описываемые уравнениями состояния (6). Предполагая существование и достаточную гладкость функции $S(y, q, t)$, можно написать уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ)

$$S_t + x_2 S_{x_1} + \min_u \{m^{-1} u S_{x_2} - |u(t)|^n (x_2 m^{-1} S_{x_2} + S_q)\} + \frac{1}{2}\sigma^2(t) S_{x_2 x_2} = 0, \tag{7}$$

Здесь миниум берется по u и введено обозначение $m = m_o + \gamma q$.

Функция S удовлетворяет условию $S(t, x_1, x_2, q) = {x_1}^2$. Минимальное значение выражения ,стоящего в фигурных скобках в уравнении (7) достигается на следующей управляющей функции:

$$u = \left(\frac{|S_{x_2}|}{-n(mS_q + x_2\gamma S_{x_2})}\right)^{1/(n-1)} sign(S_{x_2}). \tag{8}$$

После замены переменой (обратное время) $\tau = t - T$, уравнение (7) трансформируется в уравнение

$$S_\tau = \frac{1}{2}\eta(T-\tau)^2 S_{x_2 x_2} + x_2 S_{x1} + (n-1)(\frac{|S_{x_2}|}{-nmW})^{n/(n-1)} W,$$
$$W = S_q + \gamma x_2 m^{-1} S_{x2}, \tag{9}$$

с начальным условием

$$S(0, x_1, x_2, q) = {x_1}^2. \tag{10}$$

3. Анализ решений детерминированной задачи для уравнения ГЯБ с постоянной массой ($n = 2$). Рассмотрим случай $\eta(t) = 0$. Для дальнейшего анализа необходимо провести сравнение решений с постоянной массой построенных в [1,10-14] с решение задачи (9),(10).

Рассмотрим уравнение

$$S_\tau = x_2 S_{x1} + \frac{{S_{x_2}}^2}{4{m_o}^2 S_q}, \tag{11}$$

в области непрерывности функции $S(\tau, x_1, x_2, q)$ с начальным условием

$$S(0, x_1, x_2, q) = x_1^2. \tag{12}$$

Это позволяет объяснить сложности, с которыми приходится сталкиваться в случае задачи переменной массы. Сравнение различных методов решения уравнения (11) позволяет сделать выводы и объяснить модификацию способа построения решений предложенный ниже. Задача (11) имеет решение [1,10] (см. также [14])

Утверждение 1. Точное решение задачи (11) при $\eta(t) = 0$ в области $x_1 + x_2\tau \geq 1/m_o\sqrt{q\tau^3/3}$, имеет вид

$$S(\tau, x_1, x_2, q) = \begin{cases} x_1 + x_2\tau - 1/m_o\sqrt{q\tau^3/3}, & x_1 + x_2\tau \geq 1/m_o\sqrt{q\tau^3/3}, \\ 0, & x_1 + x_2\tau < 1/m_o\sqrt{q\tau^3/3}. \end{cases}$$

Функция управления, построенная по этой функции (8) имеет вид

$$u(\tau, x_1, x_2, q) = \begin{cases} -\sqrt{3q/\tau}, & x_1 + x_2\tau \geq 1/m_o\sqrt{q\tau^3/3}, \\ 0, & x_1 + x_2\tau < 1/m_o\sqrt{q\tau^3/3}, \end{cases}$$

Наиболее подробное доказательство приведено в [10]. Таким образом, функции (12),(13) существует область определения в которой функции непрерывны (первая строка в данных выражениях.)

a) Построение решения задачи (11) с помощью системы Гамильтона. Сделаем замену переменных $S(\tau, x_1, x_2, q) = \Xi(\tau, y, q)^2, y = x_1 + x_2\tau$.

Обозначим символы производных $\Xi_y = P_y$, $\Xi_\tau = P_\tau$, $\Xi_q = P_q$, тогда гамильтониан имеет вид

$$H(\tau, P_\tau, P_y, P_q) = P_\tau - \frac{\tau^2 P_y^2}{4{m_o}^2 P_q}, \tag{15}$$

Система Гамильтона выписывается стандартно, а интересующая нас часть ее решений имеет вид

$$y = y^0 - \frac{\tau^3 P_y^0}{6{m_o}^2 {P_q}^0}, \qquad q = \frac{\tau^3 {P_y^0}^2}{12{m_o}^2 {P_q}^{0^2}}, \tag{16}$$

где $\quad y|_{\tau=0} = y^0, \quad q|_{\tau=0} = 0, \quad P_y|_{\tau=0} = P_y^0, \quad P_q|_{\tau=0}{P_q}^0$ – начальные данные для системы Гамильтона(в правой части константы). Из (15) следуют выражения

$$y^0 = y + \frac{\tau^3 P_y^0}{6{m_o}^2 {P_q}^0}, \qquad \frac{P_y^0}{{P_q}^0} = \frac{-2m_o}{\tau}\sqrt{\frac{3q}{\tau}}. \tag{17}$$

Отметим, что гамильтониан в работах [1-12] для любого n обладает свойством $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} P_j \frac{\partial H}{\partial P_j} - H = 0$, где j пробегает все значения переменных. Таким образом интеграл в известной формуле решения задачи Коши для уравнения Гамильтона тождественно равен нулю, что проверяется непосредственными вычислениями (см. [13, с.162] и приведенные там подробные ссылки). После исключения констант из (15) следует (13). Заметим, что в данном случае вычислено на траекторях $q = q(\tau)$ (16). Это выражение необходимо для вычисления интеграла в (2). В случае переменной массы, в силу нелинейности системы Гамильтона, такого выражения получить не удается, хотя доказано, что решение существует.

b) Решение задачи (11) с помощью системы уравнений.

Утверждение 2. Задача (11) эквивалентна системе уравнений

$$S_\tau = x_2 S_{x1} - \frac{S_{x_2} u}{2m_o}, \quad S_{x_2} + 2m_o S_q u = 0, \quad S(0, x_1, x_2, q) = {x_1}^2. \tag{18}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости системы является равенство смешанных производных в области непрерывности функции $S(\tau, x_1, x_2, q)$

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta \in \{\tau, x_1, x_2, q\}. \tag{19}$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $S(\tau, x_1, x_2, q) = \Xi(\tau, y, q)$, $y = x_1 + x_2\tau$, $u(\tau, x_1, x_2, q) = \tilde{u}(\tau, q)$. Получим систему

$$\Xi_\tau + \frac{\Xi_y \tau \tilde{u}}{2m_o}, \qquad \tau\Xi_y + 2m_o\Xi_q\tilde{u} = 0. \tag{20}$$

Решения этих уравнений первого порядка в частных производных имеет вид

$$\Xi(\tau, y, q) = y - \int_0^q \frac{\tau dq}{2m_0 u(\tilde{\tau, q})} + \Psi(\tau), \quad \Xi(\tau, y, q) = y - \int_0^\tau \frac{\tau\tilde{u} d\tau}{2m_o} + M(q). \tag{21}$$

где $\Psi(\tau)$, $M(q)$ – произвольные гладкие функции.Равенство смешанных производных дает уравнение на функцию управления

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\tau}{2\tilde{u}(\tau, q)}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\tau\tilde{u}(\tau, q)}{2}\right). \tag{22}$$

Решением последнего уравнения является непрерывная часть функции управления области $\tilde{u}(\tau, q) = -\sqrt{\dfrac{3q}{\tau}}$, что совпадает с (14). По ней легко восстанавливается S.

c) Решение задачи (11) групповым методом. Техника и большой список основополагающих работ приведен в [15]. Исследование задачи (11) показывает, что уравнение имеет группу растяжения с инфинитозимальным оператором и инвариантом

$$h = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{x_2}{2\tau}\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \varsigma = \frac{\tau}{{x_2}^2} \tag{23}$$

(см. также [13, с.79]). Следовательно, существует инвариантное точное решение $S(\tau, x_1, x_2, q) = \left[x_1 + x_2\tau - {x_2}^3\Lambda\left(\dfrac{\tau}{{x_2}^2}, q\right)\right]^2$, где функция $\Lambda(\varsigma, q)$ удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\varsigma} - \frac{(\varsigma - 3\Lambda + 2\varsigma{\Lambda_\varsigma}')^2}{4{m_o}^2{\Lambda_q}'} = 0, \tag{24}$$

решение которого имеет вид $\Lambda(\varsigma, q) = \dfrac{1}{m_o}\sqrt{\dfrac{\varsigma^3 q}{3}}$. Легко видеть, что это решение совпадает с (13) в области непрерывности. Приведем еще одно свойство непрерывной части функции управления. Рассмотрим функцию $u(\tau, x_1, x_2, q) = U\left(\dfrac{\tau}{{x_2}^2}, q\right)$, которая следует из (8). Она позволяет выразить производные через функцию (отделить q), а именно

$$\frac{\partial U}{\partial\varsigma} = -\frac{U(\varsigma, q)^3}{6q}, \quad \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{U(\varsigma, q)}{2q}. \tag{25}$$

Равенство смешанных производных выполняется. Можно обобщить приведенные факты для любого $n > 1$ в (7).

4. Модификация способа построения точных решений задачи для уравнения ГЯБ в детерминированном случае ($n = 2$). Для построения решения задачи (9),(10) в детерминированном случае предлагается модификация обединяющая два подхода изложенные в пунктах b) и c). Строится непрерывная часть функции управления(она проще), а затем по ней строится непрерывная часть функции S. Затем из них конструируется решение задачи оптимального управления. Отличительной чертой решения, является существование предельного перехода на решение задачи с постоянной массой при $\gamma = 0$.

При $n = 2$ уравнение (9) имеет вид

$$S_\tau = x_2 S_{x1} + \frac{S_{x_2}^2}{4m(S_q + \gamma x_2 m^{-1} S_{x2})}, \quad m = m_o + q\gamma. \tag{26}$$

с начальным условием

$$S(0, x_1, x_2, q) = {x_1}^2. \tag{27}$$

Справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 1**. Точное решение задачи (26), (27) в области непрерывности $x_1 + x_2\tau \geq {x_2}^3 \Lambda\left(\frac{\tau}{{x_2}^2}, q\right)$, имеет вид

$$S(\tau, x_1, x_2, q) = \left(x_1 + x_2\tau - {x_2}^3 \Lambda\left(\frac{\tau}{{x_2}^2}, q\right)\right)^2, \tag{28}$$

где функция $\Lambda(\varsigma, q)$, $\varsigma = \frac{\tau}{{x_2}^2}$ удовлетворяет уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \varsigma} + \frac{(\varsigma - 3\Lambda + 2\varsigma {\Lambda_\varsigma}')^2}{4m(\gamma\varsigma - 3\gamma\Lambda - m{\Lambda_q}' + 2\gamma\varsigma{\Lambda_\varsigma}')} = 0, \tag{29}$$

с начальным условием $\Lambda(0, 0) = 0$. *Доказательство* проводится непосредственной подстановкой.

Если $\gamma = 0$, то получим уравнение (24). Переформулируем задачу для системы. Задача (26),(27) эквивалентна задаче для системы уравнений

$$S_\tau = x_2 S_{x1} - \frac{S_{x_2} u}{2m}, \quad S_{x_2} + 2(mS_q + x_2\gamma S_{x_2})u = 0, \quad S(0, x_1, x_2, q) = {x_1}^2. \tag{30}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости системы является равенство смешанных производных в области непрерывности функции $S(\tau, x_1, x_2, q)$

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta \in \{\tau, x_1, x_2, q\}. \tag{31}$$

Основной результат данной работы заключен в теореме

Теорема 2. Точное решение задачи (26),(27) в области непрерывности $x_1 + x_2\tau \geq {x_2}^3\Lambda\left(\frac{\tau}{{x_2}^2}, q\right)$, имеет вид

$$S(\tau, x_1, x_2, q) = \left(x_1 + x_2\tau - {x_2}^3\Lambda\left(\frac{\tau}{{x_2}^2}, q\right)\right)^2, \quad u(\tau, x_1, x_2, q) = U\left(\frac{\tau}{{x_2}^2}, q\right)/x_2, \tag{32}$$

где функции $\Lambda(\varsigma, q), U(\varsigma, q)$, $\varsigma = \frac{\tau}{{x_2}^2}$ удовлетворяют системе уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{gathered}\varsigma - 3\Lambda + 2\varsigma{\Lambda_\varsigma}' + 2U(\gamma\varsigma - 3\gamma\Lambda - m{\Lambda_q}' + 2\gamma\varsigma{\Lambda_\varsigma}') = 0,\\ -2m\frac{\partial\Lambda}{\partial\varsigma} + U(\varsigma - 3\Lambda + 2\varsigma{\Lambda_\varsigma}') = 0,\end{gathered} \tag{33}$$

с начальным условием $\Lambda(0,0) = 0$. Задача (26) и уравнения (30),(33) эквивалентны системе уравнений первого порядка в частных производных

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\varsigma} = \frac{U(\varsigma - 3\Lambda)}{2(m - \varsigma\Lambda)}, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial q} = \frac{(1 + 2U)(\varsigma - 3\Lambda)}{2U(m - \varsigma\Lambda)}, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial\varsigma} - \frac{U^2}{1 + 2\gamma U}\frac{\partial\Lambda}{\partial q} = 0. \tag{34}$$

Функция U имеет вид

$$U(\varsigma, q) = -\sqrt{\frac{3q}{3\gamma + \varsigma}}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\int\frac{r(q,\gamma)dq}{q}\right), \tag{35}$$

Функция $\Lambda = \Psi(\phi)$ определяется из последнего уравнения (34), ϕ интеграл ОДУ

$$\frac{\partial\varsigma(q)}{\partial q} + \frac{1 - 2\gamma\sqrt{3q/(3\gamma + \varsigma(q))}\exp(\frac{\gamma}{2}\int\frac{r(q,\gamma)dq}{q})}{3q/(3\gamma + \varsigma(q))\exp(\gamma\int\frac{r(q,\gamma)dq}{q})}. \tag{36}$$

Доказательство. Дадим короткие коментарии к доказательству. Рассмотрим систему уравнений (32) как алгебраическую нелинейную систему относительно производных (такая идея привела к успеху в [16,17]). Ее решения дают два первых соотношения (34). Оказывается, что эти равенства совпадпют с равенством смешанных производных $S_{x_2\tau} = S_{\tau,x_2}$, $S_{x_1q} = S_{q,x_1}$ соответственно. Это проверяется непосредственными вычмслениями. Последнее уравнение в (34) является отношением двух первых соотношений. Непосредственной проверкой устанавливается факт выполнения уравнения (29). Производные функции U имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial\varsigma} = -\frac{U^3}{6q}\exp\left(-\gamma\int\frac{r(q,\gamma)dq}{q}\right), \qquad \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{U}{2q}\left(1 + \gamma r(q,\gamma)\right). \tag{37}$$

Равенство смешанных производных выполняется.

Конечно в силу нелинейности получить точное решение уравнения (37) не удается, поэтому функция $r(q,\gamma)$ определяется как поправка. Отметим, что выражения (33),(34) дают три внешне различных выражения для U, которые оказываются тождественными.

Автор благодарит А.С.Братуся за постаноку задачи и В.Г.Данилова, М.В.Карасева за полезные обсуждения.

Литература

[1] А.С.Братусь, К.А.Волосов. Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления // ДАН, Т.385, №3, с.319-322, 2002.

[2] Ф.Л.Черноусько. Автомодельные решения уравнения Беллмана для залач оптимальной коррекции случайных возмущений // ПММ, 1971, Т.35, вып.2. – С.333-342. Engl. tran. in J.Appl.Math. and Mech.

[3] Bensoussan A. Perturbation Methods in Optimal Control. – Chichester: Wiley, 1988. – 573 p.

[4] Братусь А.С., Черноусько Ф.Л. Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях // ЖВММФ, 1974. – Т.14. №1. – С.68-78.

[5] М.Б.Бородовский, А.С.Братусь, Ф.Л.Черноусько. Оптимальная импульсная коррекция при случайных возмущениях // ПММ, 1975, Т.39, вып.5. – С.797-805.

[6] Bather J., Chernoff H. Sequential decisions in the control of a space-ship (finite fuel) // J. Appl. Probabil., 1967. – V.4. №3.– P.548-604.

[7] Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н. Оптимальная стратегия при корректировании // ДАН СССР, 1967. – Т.175, Вып.1. – С.47-50.

[8] Bensoussan A., Lions J.-L. Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et aplications // C.r. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 1973, 276. №18. – P. 1189-1192.

[9] Bensoussan A., Lions J.-L. Contrôle impulsionnel et inèquations qasi-variationnelles d'evolution // C.r. Acad. sci. Paris. 1973, Ser. A, 276. №20. – P.1333.-1338.

[10] А.С.Братусь, К.А.Волосов. Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограниченым на суммарным ресурсом управления // ПММ, Т.68, №5. – С.819-832, 2004.

[11] A.C.Bratus, K.A.Volosov. Regularirization of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation in control problems. Journal of Mathematical Sciences.Publisher consultarts Bureau. An Inprint of Springer Verlag New-York LLG, V.123, №6, april 2005. – P.1542-1552.

[12] A.C.Bratus, K.A.Volosov. Regularirization of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation in control problems // Soveremennaya Mathematika I Ee Prilizhenya, Comtemporary Mathematics and Its Applications, V.9. – Suzdal Conference – 03.2003.

[13] V.G.Danilov,V.P.Maslov and K.A.Volosov. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes – Kluver Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 1995.

[14] К.А.Волосов. Об интегрируемом случае решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана для задач оптимальной коррекции с трением и с погрешностью выполнения управляющих воздействий // Известия РГПУ им. А.И.Герцена.

[15] E.M.Vorob'ev. Symmetries of compatibility conditions for systems of the differential equations. Acta Applicandae Mathematicae, V.26. – P.61-86. – 1993.

[16] К.А.Волосов. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме с двумя парамерами // [см. настоящий сборник]

[17] К.А.Волосов. Новый способ построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме // Известия РГПУ им. А.И.Герцена.

УДК 62-50:534.1

ОБ ИНТЕРГИРУЕМОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ-БЕЛЛМАНА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ С ТРЕНИЕМ И С ПОГРЕШНОСТЬЮ ВЫПОЛНЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Волосов К.А.
Московский государственный университет путей сообщения
Москва
e-mail: volosovk@yahoo.co.uk

Рассматривается задача управления колебаниями математического маятника с трением. На ресурс управления наложено ограничение: абсолютная величина управляемой функции в произвольной неотрицательной степени является суммируемой функций на заданной временном интервале. Цель управления заключается в минимизации заданной функции фазовых переменных к фиксированному моменту времени. Задача изучается как в детерминированной, так и в стохастической постановке, когда на систему воздействуют случайные возмущения в виде гаусовского белого шума. Эта задача решена в [1], в случае когда управление реализуется точно. Там было получено точное решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, построен синтез оптимального управления. Доказано, что в стохастическом случае задача сводится к задаче Коши для линейного параболического уравнения, которое точно интегрируется. В данной работе рассмотрен случай, когда вычисленное управление осуществляется не точно. Построено асимптотическое решение стохастической задачи.

1. Постановка задачи. Пусть управляемое движение материальной точки описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\alpha x_2 + u(t) + \varepsilon\sigma(t)\xi(t)|u|^s + \eta(t)\varsigma(t), \\ &x_1(0) = x^\circ{}_1, \quad x_2(0) = x^\circ{}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t – время, $0 \leq t \leq T$, x_1, x_2 – фазовые координаты, $u(t)$ – управляющая сила (функция управления), $\xi(t), \varsigma(t)$ – гауссовские белые шумы единичной интенсивности, $\sigma(t), \eta(t)$ – ограниченные функции, представляющие интенсивность возмущений, ω – собственная частота, α – коэффициент трения, ε – малый параметр, характеризующий интенсивность помех при воздействии управляющих воздействий.

Если $\sigma(t) = 0$, $\eta(t) = 0$, то задачу (1) принято называть детерминированной задачей оптимального управления. На величину управления $u(t)$ наложено следующее интегральное ограничение:

$$\int_0^T |u|^n dt \leq {Q_0}^2, \quad Q_0 = const. \tag{2}$$

Здесь n – вещественное положительное число $n > 1$, $n = \frac{2k}{2j-1}$, $k \geq j$, где $k, j = 1, 2....$ Число n является параметром задачи. Полная постановка задачи описана в [12]. Введем переменную

$$q(t) = \int_t^T |u(t)|^m dt.$$

Переменная $q(t)$ имеет смысл неизрасходованного ресурса управления, причем $q(0) = {Q_0}^2, \quad q(T) = 0$. Тогда к уравнениям (1) можно добавить уравнение

$$\dot{q} = -|u(t)|^m. \tag{3}$$

Цель управления – минимизация одного из двух следующих функционалов

$$E\{\varphi(x_1(T))\}, \quad E\{\varphi(x_2(T))\}. \tag{4}$$

Здесь E – знак математического ожидания, $\varphi(x)$ – гладкая, четная неотрицательная функция своих аргументов, причем $\varphi'(x) > 0$, $x > 0$, $\varphi(0) = 0$. В данной работе предполагаем, что выполнено условие

$$\lim(\varphi'(x)/\varphi(x)) = 0, \quad x \to \infty. \tag{5}$$

В случае детерминированной задачи знак математического ожидания в функционалах (4) необходимо отбросить.

Частным случаем стохастического варианта задачи (4) является задача управления системой (1),(3) с целью максимизации вероятности попадания фазовой траектории системы в заданное множество N на прямой x_1 или x_2 в момент $t = T$. Далее полагаем, что N – связное, симметричное относительно начала координат множество на фазовой прямой x_1 или x_2. Характерными примерами областей N служат области $x_1 : |x_1| \leq \delta_1$, $x_2 : |x_2| \leq \delta_2$, δ_1, $\delta_2 = const > 0$.

Учитывая специфику функционалов (4), порядок системы (1),(3) можно понизить. Эта процедура подробно описана в [2,4-7]. Приведем перечень функций (новой переменной) с помощью которых можно понизить порядрк системы и следовательно, в этих перечисленных случаях решения построенные в данной работе справедливы. Заметим, что при наличии трения эта функция вычислена впервые в данной работе.

В задаче минимизации функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной x_1: $E\{\varphi(x_1(T))\}$ при $\alpha = 0, \omega = 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое заменяет систему (1) [2-7],[14-16].

$$\begin{aligned} &y(t) = (T-t)x_2(t) + x_1(t), \\ &y(T) = x_1(T), \\ &\dot{y}(t) = (T-t)(u(t) + \varepsilon\sigma(t)\xi(t)|u|^{n/2} + \eta(t)\varsigma(t)). \end{aligned} \tag{6}$$

При $\alpha = 0, \omega \neq 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое заменяет систему (1)

$$\begin{aligned} &y(t) = x_2(t)\sin(\omega(T-t)) + \omega x_1(t)\cos(\omega(T-t)),\\ &y(T) = x_1(T),\\ &\dot{y}(t) = \sin(\omega(T-t))(u(t) + \varepsilon\sigma(t)\xi(t)|u|^{n/2} + \eta(t)\varsigma(t)). \end{aligned} \tag{7}$$

В данной работе вычислено, что при наличии трения $\alpha \neq 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое заменяет систему (1)

$$\begin{aligned} &y(t) = (x_2(t) + \alpha x_1)\exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t)) +\\ &\qquad + \sqrt{k}x_1(t)\exp(-\alpha(T-t))\cos(\sqrt{k}(T-t)),\\ &y(T) = \sqrt{k}x_1(T), \qquad k = \omega^2 - \alpha^2,\\ &\dot{y}(t) = \exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t))(u(t) + \varepsilon\sigma(t)\xi(t)|u|^{n/2} + \eta(t)\varsigma(t)). \end{aligned} \tag{8}$$

В задаче минимизации функционалов, зависящих лишь от конечного состояния фазовой переменной x_2: $E\{\varphi(x_2(T))\}$ при $\alpha = 0,\ \omega \neq 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое заменяет систему (1) [1-7],[14-16]

$$\begin{aligned} &y(t) = x_2(t)\cos(\omega(T-t)) - \omega x_1(t)\sin(\omega(T-t)),\\ &y(T) = x_2(T),\\ &\dot{y}(t) = \cos(\omega(T-t))(u(t) + \varepsilon\sigma(t)\xi(t)|u|^{n/2} + \eta(t)\varsigma(t)). \end{aligned} \tag{9}$$

В данной работе вычислено, что при наличии трения $\alpha \neq 0$ приведем новую переменную и уравнение, которое заменяет систему (1)

$$\begin{aligned} &y(t) = x_2(t)\sqrt{k}\exp(-\alpha(T-t))\cos(\sqrt{k}(T-t)) -\\ &\qquad - (\omega^2 x_1) + \alpha x_2)\exp(-\alpha(T-t))\sin(\sqrt{k}(T-t)),\\ &y(T) = \sqrt{k}x_2(T), \qquad k = \omega^2 - \alpha^2,\\ &\dot{y}(t) = (\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}(T-t)) - \alpha\sin(\sqrt{k}(T-t)))\exp(-\alpha(T-t))(u(t) +\\ &\qquad + \varepsilon\sigma(t)\xi(t)|u|^{n/2} + \eta(t)\varsigma(t)). \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда обобщая все случаи (6)-(10) система (1),(2) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} &\dot{y} = f(t)(u(t) + \varepsilon\sigma(t)\xi(t)|u|^{n/2} + \eta(t)\varsigma(t)),\\ &\dot{q} = -|u|^m. \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь функция $f(t)$ – функция времени, перечисленная в случаях (6)-(10).

В [1] доказано, что решение сформулированной задачи при $\xi = 0$ (управление осуществляется точно) выражается через решение задачи Коши для линейного параболического уравнения. Ниже оно является главным членом асимптотического решения задачи рассматриваемой в данной работе.

2. Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана ($n > 1$). Пусть $S(y,q,t)$ – минимальное значение математического ожидания одного из функционалов (4), которое может быть достигнуто при начальных условиях $t = t_0,\ q = q_0$, $y = y_0$ в задаче оптимального управления описываемые уравнениями состояния (11). Предполагая существование и достаточную гладкость функции $S(y,q,t)$, можно написать уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана (ГЯБ)

$$S_t + \min_u\{f(t)uS_y + |u(t)|^n(f(t)^2\varepsilon S_{yy} - S_q)\} + \frac{1}{2}\eta^2(t)S_{yy} = 0, \tag{12}$$

Здесь миниум берется по u.

Функция S удовлетворяет условию $S(y, q, T) = \varphi(y)$. Из постановки задачи следует, что величина функции $S(y, q, T)$ может лишь уменьшиться при увеличении значения q, поскольку чем больше ресурс управления, тем меньшего значения функционала можно достичь при прочих равных условиях, т.е. $S(y, q_2, t) = S(y, q_1, t), \quad q_1 < q_2$.

Учитывая гладкость функции $S(y, q, T)$, получим, что должно выполняться условие

$$S_q(y, q, T) < 0. \tag{13}$$

В области, где $S_q(y, q, T) < 0$, реализуется движение с помощью управляющей силы, при этом тратится некоторый ресурс управления q'. Минимальное значение выражения, стоящего в фигурных скобках в уравнении (12) достигается на следующей управляющей функции:

$$u = (\frac{|S_y f(t)|}{f(t)^2 \varepsilon S_{yy} - m S_q})^{\mu} sign(S_y f(t)), \quad \mu = (m-1)^{-1}. \tag{14}$$

Отметим, что формула (14) задает синтез оптимального управления в исходной задаче. Т.е. для любого заданного момента времени t и текущего значения фазовых переменных y, q указывает закон управления. После замены переменой

$$\tau = \int_t^T f^2(s) ds. \tag{15}$$

уравнение (12) трансформируется в уравнение

$$S_\tau = \frac{1}{2} b(\tau)^2{}_1(\tau) S_{yy} + (n-1) g_n(\tau) (\frac{|S_y|}{f(\tau)^2 \varepsilon S_{yy} - n S_q})^{\mu+1} (S_q - f(\tau)^2 \varepsilon S_{yy}), \tag{16}$$

с начальным условием

$$S(y, q, 0) = \varphi(y). \tag{17}$$

Здесь $g_n(\tau) = |f(t)|_{t=t(\tau)}^{(2-n)\mu-1}, \quad b(\tau) = \eta(t)/|f(t)|_{t=t(\tau)}, \quad f(\tau) = f(t)_{t=t(\tau)}$, причем переменные t и τ связаны соотношением (15). Так как по предположению $\varphi(y)$ – четная функция, задача (16),(17) инвариантна относительно замены переменной y на $-y$. Следовательно, эту задачу можно рассматривать только при $y > 0$ с дополнительным краевым условием

$$S_y(0, q, \tau) = 0. \tag{18}$$

Все приведенные рассуждения сохраняют свой смысл и в случае задачи о максимизации вероятности попадания в заданное множество N на прямой x_1 или (x_2) в момент $t = T$. Вычисление миниума в уравнении (12) необходимо заменить на вычисление максимума. Отметим, что максимум указанного выражения будет существовать тогда и только тогда, когда $S_q(y, q, \tau) > 0$.

3. Решение детерминированной задачи для уравнения ГЯБ с погрешностью выполнения управляющих воздействий ($n > 1$). Рассмотрим случай ($\eta(t) = 0$). В этом случае помехи возникают только от неточного действия управления. Принято называть этот случай детерминированным [2-7]. Приближенное решение строится методом Пуанкаре-Лайтхила-Го, который применялся в [13].

***Утверждение* 1**. Асимптотическое решение задачи (16)-(18) при ($\eta(t) = 0$) в области $y \geq q^{1/n}\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{1-1/n} + O(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$S(y,q,\tau,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi(z(y,q,\tau,\varepsilon)), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

$$z(y,q,\tau,\varepsilon) = z_1(y,q,\tau) - \varepsilon^2 qP(\tau, z_1(y,q,\tau))/\theta(\tau) + O(\varepsilon^4),$$

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau g_n(s)ds, \quad z_1(y,q,\tau) = y - q^{1/n}\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{1-1/n}.$$

Функция P определена равенством

$$P(\tau, z_1(y,q,\tau)) = \frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{1-1/n}, \tag{19}$$

а $m = 2$ и $\Theta(\tau,z) = -\frac{\varphi''(z)}{2\varphi'(z)})\int_0^\tau f(s)^2 g_n(s)ds$. Синтез оптимального управления в детерминированной задаче оптимального управления

$$u = \begin{cases} U(t) + \varepsilon^2 U_1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Здесь

$$U(t) = -|f(t)|^{1/(n-1)} q^{1/n}\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{-1/n},$$
$$U_1(t) = nq|f(t)|^{1/(n-1)}/(n-1)\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{-2} W,$$
$$W = (f(t)^2\int_0^\tau g_n(s)ds - \int_0^\tau f(s)^2 g_n(s)ds)\frac{\varphi''(z_1)}{\varphi'(z_1)}.$$

Если положить $\varepsilon = 0$, то эти формулы переходят в решение задачи с точным выполнением управления [1,12].

4. Асимптотическое решения задачи для уравнения ГЯБ с погрешностью выполнения управляющих воздействий (стохастический случай) ($n > 1$). Справедливо следующее утверждение.

***Утверждение* 2**. Асимптотическое решение задачи (16)-(18) в области $y \geq q^{1/n}\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{1-1/n} + O(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$S(y,q,\tau,\varepsilon) = \begin{cases} \Phi(\tau, w(y,q,\tau,\varepsilon)), & z \geq 0, \\ 0, & z < 0, \end{cases}$$

$w(y,q,\tau,\varepsilon) = w_1(y,q,\tau) - \varepsilon^2 qP(\tau, w_1(y,q,\tau))/\theta(\tau) + O(\varepsilon^4),$

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau g_n(s)ds, \quad w_1(y,q,\tau) = y - q^{1/n}\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{1-1/n}.$$

Функция $\Phi(\tau, w)$ является решением задачи Коши для **линейного** параболического уравнения

$$\Phi_\tau - \frac{1}{2}b(\tau)^2\Phi_{ww} = 0, \qquad \Phi(0,w) = \varphi(w). \tag{20}$$

и имеет вид

$$\Phi(w,\tau) = \int_0^\infty A(w,\tau,\eta)\varphi(\eta)d\eta, \tag{21}$$

где

$$A(w,\tau,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi B(\tau)}}\left[\exp\left(-\frac{(w-\eta)^2}{2B(\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(w+\eta)^2}{2B(\tau)}\right)\right], \; B(\tau) = \int_0^\tau \sigma_1^2(s)ds.$$

Справедливо равество $\Phi(w,\tau) = \Phi(w_1,\tau)$. Поправка асимптотического решения $P(w_1,\tau)$ является решеним задачи Коши для линейного параболического уравнения

$$P_\tau - \frac{1}{2}b(\tau)^2P_{w_1w_1} - \frac{b(\tau)^2P_{w_1}\Phi_{w_1w_1}}{\Phi_{w_1}} = -f(\tau)^2g_n(\tau)\frac{\Phi_{w_1w_1}}{\Phi_{w_1}}, \tag{22}$$

Синтез оптимального управления в детерминированной задаче оптимального управления

$$u = \begin{cases} U(t) + \varepsilon^2U_1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Здесь

$$U(t) = -|f(t)|^{1/(n-1)}q^{1/n}\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)^{-1/n}.$$
$$U_1(t) = nq|f(t)|^{1/(n-1)}/(n-1)\left(\int_0^\tau g_n(s)ds\right)W.$$
$$W = f(t)^2\frac{\Phi_{w_1w_1}}{\Phi_{w_1}} + P(w_1,\tau)/\int_0^\tau g_n(s)ds.$$

Если положить $\varepsilon = 0$, то эти формулы переходят в точное решение стохастической задачи с точным выполнением управления [1,12].

Автор благодарит А.С.Братуся за постаноку задачи и В.Г.Данилова за полезные обсуждения.

Литература

[1] А.С.Братусь, К.А.Волосов. Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограничением на суммарный ресурс управления // ДАН Т.385, №3, С.319-322, 2002.

[2] Ф.Л.Черноусько. Автомодельные решения уравнения Беллмана для залач оптимальной коррекции случайных возмущений // ПММ, 1971. Т.35, вып.2, С.333-342. Engl. tran. in J.Appl.Math. and Mech.

[3] Bensoussan A.Perturbation Methods in Optimal Control Chichester: Wiley, 1988. – 573 p.

[4] Братусь А.С., Черноусько Ф.Л. Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях // ЖВММФ, 1974. Т.14, №1. С.68-78.

[5] М.Б.Бородовский, А.С.Братусь, Ф.Л.Черноусько. Оптимальная импульсная коррекция при случайных возмущениях // ПММ, 1975. Т.39, Вып.5, С.797-805.

[6] Bather J., Chernoff H. Sequential decisions in the control of a space-ship (finite fuel) // J. Appl.Probabil., 1967, V.4. №3, P.548-604.

[7] Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н. Оптимальная стратегия при корректировании // ДАН СССР, 1967, Т.175, Вып.1, С.47-50.

[8] Bensoussan A., Lions J.-L. Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et aplications // C.r. Acad. Sci. Paris.Ser. A. 1973, 276, №18, P.1189-1192.

[9] Bensoussan A., Lions J.-L. Contrôle impulsionnel et inèquations qasi-variationnelles d'evolution // C.r. Acad. sci. Paris. 1973, Ser. A. 276, №20, P.1333.-1338.

[10] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

[11] Strang G. Linear Algebra and its Application. N.Y. etc.: Acad. Press, 1976. – 374 p.

[12] А.С.Братусь, К.А.Волосов. Точные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции с интегральным ограниченым на суммарным ресурсом управления // ПММ Т.68, №5, С.819-832, 2004.

[13] V.G.Danilov, V.P.Maslov and K.A.Volosov. Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. – Kluver Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 1995.

[14] А.С.Братусь. О численном решении одной модельной задачи управления движением в случайной среде // Космические исследования т.9, №4, С.527-530, 1971.

[15] А.С.Братусь. Решения некоторых задач оптимальной коррекции с погрешностью исполнения управляющего воздействия // ПММ Т.38, №3, С.433-440, 1974.

[16] А.С.Братусь. Синтез оптимального управления систем при помехах в исполнительном органе // Изв. АН СССР, №2, С.13-17, 1976.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Гомонова О.В., Осмоловская Н.А., Сенашов С.И.
Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М. Ф. Решетнева,
Красноярский государственный торгово-экономический институт
Красноярск
e-mail: sen@sibsau.ru

В работе рассмотрено однородное уравнение второго порядка гиперболического типа, коэффициенты которого зависят только от первых производных. Это уравнение приведено к каноническому виду, который является системой двух уравнений первого порядка. Для этой системы построено точное решение краевых задач Коши.

Рассмотрим уравнение гиперболического вида

$$F = a(w_x, w_y)w_{xx} + 2b(w_x, w_y)w_{xy} + c(w_x, w_y)w_{yy} = 0, \tag{1}$$

где a, b, c – гладкие функции своих аргументов.

Постановка задачи Коши. Рассмотрим кривую L на плоскости xy, вдоль которой заданы значения функций w_x, w_y. А именно: пусть $L : \{x = x(t),\ y = y(t)\}$, вдоль нее заданы функции $w_x = \varphi(t), w_y = \psi(t)$.

К уравнению (1) сводятся многие уравнения механики сплошных сред, в частности, уравнение описывающее плоское стационарное безвихревое движение идеального газа, имеет вид:

$$(a^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (a^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} = 0,$$

где a, φ – скорость звука и потенциал скоростей [1, стр.259].

1. Общие сведения об уравнении (1).

Характеристики. Найдем характеристики уравнения (1). Для этого запишем две дифференциальные формы

$$dw_x = w_{xx}dx + w_{xy}dy,\ dw_y = w_{xy}dx + w_{yy}dy. \tag{2}$$

Кривая L будет характеристикой уравнения (1), если вдоль нее из системы (1)-(2) нельзя найти производные второго порядка w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}. А это означает, что определитель системы (1)-(2) вдоль этой кривой обращается в нуль. Определитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = a(dy)^2 - 2b\ dx\ dy + c\ (dx)^2 = 0.$$

Отсюда получаем уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{3}$$

Соотношения на характеристиках. Характеристики из уравнения (3) найти не удастся, поскольку они определяются по решению уравнения (1). Поэтому знания одних характеристик недостаточно для приведения уравнения (1) к каноническому виду. Найдем соотношения на характеристиках для уравнения (1). Для этого приравняем нулю определитель расширенной матрицы. Имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & 2b & c \\ dw_x & dy & 0 \\ dw_y & dx & dy \end{vmatrix} = -dw_x(2b\ dy - c\ dx) - dw_y\ c\ dy = 0. \tag{4}$$

Законы сохранения уравнения (1). Уравнение (1) имеет бесконечно много законов сохранения. Для их построения следует построить оператор универсальной линеаризации l_F, потом построить его формальное сопряжение l_F^*, ограничить его на многообразие, определяемое уравнением (1) – $\overline{l_F^*}$ и решить уравнение

$$\overline{l_F^* f = 0}, \tag{5}$$

где черта вверху означает ограничение на многообразие, определяемое уравнением (1). В этом случае решение уравнения (5) называется производящей функцией законов сохранения. Производящая функция, в свою очередь, позволяет построить законы сохранения. Не останавливаясь подробно на этих вычислениях, укажем бесконечную серию законов сохранения, которую можно использовать, в частности, для решения задачи Коши. Закон сохранения имеет вид:

$$\partial_x C(w_x, w_y) + \partial_y D(w_x, w_y) = 0, \tag{6}$$

где функции C, D удовлетворяют системе двух уравнений

$$-2b\frac{\partial}{\partial w_x}C + a\left(\frac{\partial}{\partial w_y}C + \frac{\partial}{\partial w_x}D\right) = 0,\ -c\frac{\partial}{\partial w_x}C + a\frac{\partial}{\partial w_y}D = 0. \tag{7}$$

Сформулированное утверждение можно проверить непосредственной подстановкой.

2. Первый способ решения задачи Коши для уравнения (1).

Применим к уравнению и краевым условиям преобразование Лежандра

$$X = w_x,\ Y = w_y,\ Z = xw_x + yw_y - w. \tag{8}$$

В результате получаем следующую краевую задачу. Уравнение (1) примет вид

$$(Z_{XX}Z_{YY} - Z_{XY}^2)(a(X,Y)Z_{YY} - 2b(X,Y)Z_{XY} + c(X,Y)Z_{XX}) = 0. \tag{9}$$

Граничные условия преобразуются в следующие

$$Z_X = x(t),\ Z_Y = y(t), \tag{10}$$

вдоль кривой, заданной уравнениями $L_1 : \{X = \varphi(t),\ Y = \psi(t)\}$.

Если выражение

$$J = Z_{XX}Z_{YY} - Z_{XY}^2 \tag{11}$$

не равно нулю в некоторой области, то уравнение (9) линеаризуется в этой области. Но условие $J \neq 0$, нельзя накладывать до решения задачи - априори. Многие исследователи сначала решают линейную задачу, а потом на ее решениях проверяют условие $J \neq 0$. Тем самым – впадают в противоречие: сначала предполагают условие $J \neq 0$, а потом его же и проверяют. Это очень существенное противоречие, которое очень трудно устранить при таком подходе.

3. Второй способ решения задачи Коши для уравнения (1).

Для этого приведем уравнение (1) к каноническому виду. Для этого следует решить уравнения (4) и ввести новые искомые функции, решая уравнение (12) вдоль одной характеристики и вдоль другой

$$dw_x\left(2b\frac{dy}{dx}-c\right)+dw_y c=0. \tag{12}$$

Если найденные интегралы (они называются инвариантами Римана) обозначить u, v, то уравнение (1) преобразуется в систему уравнений.

Систему (1) можно записать в виде (см. [2], с.137):

$$u_x + A(u,v)u_y = 0,\ v_x + B(u,v)v_y = 0, \tag{13}$$

где

$$A(u,v)=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a},\ B(u,v)=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a},$$

а краевая задача примет следующую форму. Вдоль кривой L заданы функции u, v.

Известно, что для системы (13) существует бесконечно много законов сохранения. Для наших целей понадобятся законы сохранения специального вида. Они имеют вид:

$$\partial_x C(u,v)+\partial_y D(u,v)=0, \tag{14}$$

где C и D - функции только от u и v, и равенство (14) должно выполняться на всех решениях системы (13). Функции C и D удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$-A(u,v)C_u + D_u = 0,\ -B(u,v)C_v + D_v = 0. \tag{15}$$

Для системы (13) задачу Коши (2) переформулируем следующим образом. Пусть на кривой L в плоскости xy заданы функции u, v. Пусть каждая характеристика системы (13) пересекает кривую L только в одной точке и ни в какой точке не касается ее. Проведем из точек M и N , лежащих на кривой L, две характеристики разных семейств и обозначим точку их пересечения через K. Требуется найти функции u, v в криволинейном треугольнике MNK.

Для решения задачи Коши используем закон сохранения, применительно к криволинейному треугольнику MNK, записав его в следующем, эквивалентном (14), виде:

$$\oint\limits_{MNK} -Cdy + Ddx = 0.$$

Вычислим интеграл вдоль характеристики NK, используя формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{NK} -Cdy + Ddx = \int\limits_{NK} (-CA + D)dx = x(-CA + D)|_N^K - \int\limits_{NK} x\partial_v(-CA + D)dv.$$

Здесь учтено, что вдоль этой характеристики $u = const$.

Аналогично,

$$\int\limits_{KM} -Cdy + Ddx = \int\limits_{KM} (-CA + D)dx = x(-CA + D)|_K^M - \int\limits_{KM} x\partial_u(-CA + D)du,$$

вдоль нее $v = const$.

Теперь будем искать функции C, D, удовлетворяющие уравнениям (15) и следующим условиям:

$$\partial_v((-CA + D)|_{u=const}) = 0, \tag{16}$$

$$\partial_u((-CB + D)|_{v=const}) = 0. \tag{17}$$

Заметим, что система уравнений (15) является линейной и, в отличии от преобразования Лежандра, здесь не вводится каких-либо ограничений на рассматриваемые функции.

После решения задачи (15) – (17) получаем уравнение для определения координаты точки пересечения характеристик x_K:

$$\int\limits_{MN} -Cdy + Ddx - x_N(-CA + D)|_N + x_M(-CB + D)|_M - x_K(-CB + CA)|_K = 0.$$

Полученное уравнение даёт координату x_K точки K.

Аналогично находится вторая координата y_K точки пересечения характеристик.

Второй способ решения краевой задачи проиллюстрирован на модельном уравнении

$$\varphi_y^2\varphi_{xx} - \varphi_x^2\varphi_{yy} = 0.$$

Литература

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М., Наука, 1972. – 847 с.

[2] Киряков П.П., Сенашов С.И., Яхно А.Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. – Новосибирск, Издательство СОРАН, 2001. – 190 с.

$\mathbb{R}$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Горбузов В.Н.*, Проневич А.Ф.**
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Гродно, Беларусь
e-mail: gorbuzov@grsu.by*
e-mail: pronevich@tut.by**

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dw = X_1(z,w)dz + X_2(z,w)d\,\overline{z}\,, \tag{1}$$

где точки $w \in \mathbb{C}^n$, $z \in \mathbb{C}^m$, векторы-столбцы $dw = \operatorname{colon}(dw_1, \ldots, dw_n)$, $dz = \operatorname{colon}(dz_1, \ldots, dz_m)$, $d\,\overline{z} = \operatorname{colon}(d\,\overline{z}_1, \ldots, d\,\overline{z}_m)$, $\overline{z}_j$ комплексно сопряжено к z_j, а элементами матриц $X_1(z,w) = \|X_{\xi j}(z,w)\|$ и $X_2(z,w) = \|X_{\xi,m+j}(z,w)\|$ являются $\mathbb{R}$-дифференцируемые [1] на области G из пространства $\mathbb{C}^{m+n}$ функции $X_{\xi l}\colon G \to \mathbb{C}$, $\xi = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $l = \overline{1,2m}$.

В случае одного комплексного переменного понятие $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции согласуется с подходами И.Н. Векуа [2], Г.Н. Положего [3] и Э.И. Грудо [4]. В многомерном случае для вполне разрешимой [5] дифференциальной системы (1) с $\mathbb{R}$-голоморфной правой частью доказано существование и единственность $\mathbb{R}$-голоморфного решения [6], а для вполне разрешимого уравнения в полных дифференциалах проведена классификация $\mathbb{R}$-особых точек решений и получены достаточные условия отсутствия подвижных неалгебраических $\mathbb{R}$-особых точек [7]. Разработан спектральный метод построения интегрального базиса $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах [8]. Ставится задача существования $\mathbb{R}$-дифференцируемых первых интегралов у системы (1).

Основываясь на подходах [9, 10], будем использовать следующие понятия. $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция $F\colon G' \to \mathbb{C}$ является первым интегралом, если и только если производные Ли

$$\mathfrak{X}_l F(z,w) = 0,\ \forall (z,w) \in G',\ l = \overline{1,2m},\ \ G' \subset G,$$

где линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{X}_j(z,w) = \partial_{z_j} + \sum_{i=1}^{n} \bigl(X_{ij}(z,w)\partial_{w_i} + \overline{X}_{i,m+j}(z,w)\partial_{\overline{w}_i}\bigr),\ \forall (z,w) \in G,\ j = \overline{1,m},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j}(z,w) = \partial_{\overline{z}_j} + \sum_{i=1}^{n} \bigl(X_{i,m+j}(z,w)\partial_{w_i} + \overline{X}_{ij}(z,w)\partial_{\overline{w}_i}\bigr),\ \forall (z,w) \in G,\ j = \overline{1,m}.$$

$\mathbb{R}$-дифференцируемый первый интеграл F системы (1) назовём (s_1, s_2)-неавтономным, если функция $\overset{*}{F}$, полученная из F посредством соответствия

$$z_j \mapsto x_j,\ \overline{z}_j \mapsto y_j,\ j = \overline{1,m},\ \ w_i \mapsto u_i,\ \overline{w}_i \mapsto v_i,\ i = \overline{1,n},$$

зависит от $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ и только от $s_1\,(0 \leqslant s_1 \leqslant m)$ переменных $x_1, \ldots, x_m$ и s_2 $(0 \leqslant s_2 \leqslant m)$ переменных $y_1, \ldots y_m$. Если функция

$\overset{*}{F}$ зависит от $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $y=(y_1,\ldots,y_m)$ и только от k_1 $(0\leqslant k_1\leqslant n)$ переменных $u_1,\ldots,u_n$ и k_2 $(0\leqslant k_2\leqslant n)$ переменных $v_1,\ldots,v_n$, то первый интеграл F назовём $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричным. Иначе говоря, $\mathbb{R}$-дифференцируемый первый интеграл F антиголоморфный по $m-s_1$ и голоморфный по $m-s_2$ независимым переменным является (s_1,s_2)-неавтономным; а антиголоморфный по $n-k_1$ и голоморфный по $n-k_2$ зависимым переменным является $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричным.

Пусть система (1) имеет (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области G' первый интеграл

$$F\colon (z,w)\to F({}^{s}z,{}^{k}w),\ \forall (z,w)\in G', \tag{2}$$

где для удобства записи принято сокращение $s=(s_1,s_2)$, $k=(n-k_1,n-k_2)$. Не умаляя общности, будем считать, что функция F является антиголоморфной по независимым $z_{s_1+1},\ldots,z_m$ и зависимым $w_{k_1+1},\ldots,w_n$ переменным и голоморфной по независимым $z_{j_{s_2+1}},\ldots,z_{j_m}$, $j_\beta\in\{1,\ldots,m\}$, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, и зависимым $w_{\zeta_{k_2+1}},\ldots,w_{\zeta_n},\zeta_\delta\in\{1,\ldots,n\}$, $\delta=\overline{k_2+1,n}$, переменным. Тогда, согласно критерию существования первого интеграла, выполняется система тождеств

$$\mathfrak{X}_{lsk}F({}^{s}z,{}^{k}w)=0,\ \forall (z,w)\in G',\ l=\overline{1,2m}, \tag{3}$$

где линейные дифференциальные операторы первого порядка на области G

$$\mathfrak{X}_{\theta sk}(z,w)=\partial_{z_\theta}+\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi\theta}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau,m+\theta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},\ \theta=\overline{1,s_1},$$

$$\mathfrak{X}_{\eta sk}(z,w)=\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi\eta}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau,m+\eta}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},\ \eta=\overline{s_1+1,m},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_g,sk}(z,w)=\partial_{\overline{z}_{j_g}}+\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_g}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_g}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},\ g=\overline{1,s_2},$$

$$\mathfrak{X}_{m+j_\nu,sk}(z,w)=\sum_{\xi=1}^{k_1}X_{\xi,m+j_\nu}(z,w)\partial_{w_\xi}+\sum_{\tau=1}^{k_2}\overline{X}_{\zeta_\tau j_\nu}(z,w)\partial_{\overline{w}_{\zeta_\tau}},\ \nu=\overline{s_2+1,m},$$

индексы $\zeta_\tau\in\{1,\ldots,n\},\tau=\overline{1,k_2}$, $j_g\in\{1,\ldots,m\},g=\overline{1,s_2}$, $j_\nu\in\{1,\ldots,m\}$, $\nu=\overline{s_2+1,m}$ (при этом, если множество $J_g=\{j_g\colon g=\overline{1,s_2}\}$, а множество $J_\nu=\{j_\nu\colon \nu=\overline{s_2+1,m}\}$, то $J_g\cap J_\nu=\varnothing$, а $\operatorname{Card}J_g\cup J_\nu=m$).

Пусть выполняются тождества (3). Тогда в каждой из совокупностей

$$\begin{gathered}\bigl\{1,X_{1\theta}(z,w),\ldots,X_{k_1\theta}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1,m+\theta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\theta}(z,w)\bigr\},\ \theta=\overline{1,s_1},\\ \bigl\{X_{1\eta}(z,w),\ldots,X_{k_1\eta}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1,m+\eta}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+\eta}(z,w)\bigr\},\ \eta=\overline{s_1+1,m},\\ \bigl\{1,X_{1,m+j_g}(z,w),\ldots,X_{k_1,m+j_g}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1 j_g}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_g}(z,w)\bigr\},g=\overline{1,s_2},\\ \bigl\{X_{1,m+j_\nu}(z,w),\ldots,X_{k_1,m+j_\nu}(z,w),\overline{X}_{\zeta_1 j_\nu}(z,w),\ldots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},j_\nu}(z,w)\bigr\},\nu=\overline{s_2+1,m},\end{gathered} \tag{4}$$

функции: при всяких фиксированных значениях переменных $z_j, j=\overline{1,m}, j\neq \alpha$, и w являются линейно связанными [11, 12] с помощью антиголоморфных функций по переменной z_α на области G; при фиксированных значениях переменных z_j, $j=\overline{1,m}$, $j\neq j_\beta$, и w линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной z_{j_β} на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i=\overline{1,n}$, $i\neq\gamma$ линейно связаны с помощью антиголоморфных функций по переменной w_γ на области G; при фиксированных значениях переменных z и w_i, $i=\overline{1,n}$, $i\neq\zeta_\delta$ линейно связаны с помощью голоморфных функций по переменной w_{ζ_δ} на области G. Это имеет место при каждом фиксированном $\alpha=\overline{s_1+1,m}$, j_β, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, $\gamma=\overline{k_1+1,n}$, ζ_δ, $\delta=\overline{k_2+1,n}$. Поэтому вронскианы по переменной χ, каждой из совокупностей (4), тождественно равны нулю на области G, то есть, выполняется система тождеств

$$\begin{gathered} W_\chi\bigl(1,{}^\lambda X^\theta(z,w)\bigr)=0,\ \theta=\overline{1,s_1},\quad W_\chi\bigl({}^\lambda X^\eta(z,w)\bigr)=0,\ \eta=\overline{s_1+1,m},\\ W_\chi\bigl(1,{}^\lambda X^{m+j_g}(z,w)\bigr)=0,\ g=\overline{1,s_2},\quad W_\chi\bigl({}^\lambda X^{m+j_\nu}(z,w)\bigr)=0,\ \nu=\overline{s_2+1,m}, \end{gathered} \tag{5}$$

где число $\lambda=k_1+k_2$, векторные функции на области G

$${}^\lambda X^j\colon (z,w)\to\bigl(X_{1j},\dots,X_{k_1j},\overline{X}_{\zeta_1,m+j},\dots,\overline{X}_{\zeta_{k_2},m+j}\bigr)(z,w)\ (j=\overline{1,m}),$$

$${}^\lambda X^{m+j}\colon (z,w)\to\bigl(X_{1,m+j},\dots,X_{k_1,m+j},\overline{X}_{\zeta_1j},\dots,\overline{X}_{\zeta_{k_2}j}\bigr)(z,w)\ (j=\overline{1,m}),$$

а W_χ — вронскиан по переменной χ, которая принимает значения z_α, $\overline{z}_{j_\beta}$, w_γ и $\overline{w}_{\zeta_\delta}$ ($\alpha=\overline{s_1+1,m}$, $\beta=\overline{s_2+1,m}$, $\gamma=\overline{k_1+1,n}$, $\delta=\overline{k_2+1,n}$).

Следовательно, справедлива

<u>Теорема 1</u>. Для того, чтобы система уравнений в полных дифференциалах (1) имела $\mathbb{R}$-дифференцируемый (s_1,s_2)-неавтономный $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричный первый интеграл (2) необходимо выполнение системы тождеств (5).

<u>Следствие 1</u>. Система тождеств (5) при $s_2=0$ является необходимым условием наличия у системы (1) голоморфного на области G' по независимым переменным $(s_1,0)$-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2).

<u>Следствие 2</u>. Система тождеств (5) при $s_1=0$ является необходимым условием наличия у системы (1) антиголоморфного на G' по независимым переменным $(0,s_2)$-неавтономного $(n-k_1,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2).

<u>Следствие 3</u>. Система тождеств (5) при $k_2=0$ является необходимым условием наличия у системы (1) голоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1,n)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2).

<u>Следствие 4</u>. Система тождеств (5) при $k_1=0$ является необходимым условием наличия у системы (1) антиголоморфного на области G' по зависимым переменным (s_1,s_2)-неавтономного $(n,n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого на области G' первого интеграла (2).

<u>Следствие 5</u>. Система тождеств (5) при $s_2=0$, $k_2=0$ является необходимым условием наличия $(s_1,0)$-неавтономного $(n-k_1,n)$-цилиндричного голоморфного на области G' первого интеграла (2) у системы (1).

Следствие 6. Система тождеств (5) при $s_1 = 0$, $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия $(0, s_2)$-неавтономного $(n, n - k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области G' первого интеграла (2) у системы (1).

Следствие 7. Для того, чтобы система уравнений в полных дифференциалах (1) имела автономный $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричный $\mathbb{R}$-дифференцируемый на области Ω' из пространства $\mathbb{C}^n$ первый интеграл

$$F\colon w \to F({}^k w),\ \forall w \in \Omega',\ \ \Omega' \subset \mathbb{C}^n, \tag{6}$$

необходимо выполнение системы тождеств

$$W_\mu\big({}^\lambda X^l(z, w)\big) = 0,\ \forall (z, w) \in G,\ l = \overline{1, 2m}, \tag{7}$$

где μ принимает значения z_j, $\overline{z}_j$, w_γ и $\overline{w}_{\zeta_\delta}$ $(j = \overline{1, m}, \gamma = \overline{k_1{+}1, n}, \delta = \overline{k_2{+}1, n}\,)$.

Следствие 8. Система тождеств (7) при $k_2 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1) автономного $(n - k_1, n)$-цилиндричного голоморфного на области Ω' первого интеграла (6).

Следствие 9. Система тождеств (7) при $k_1 = 0$ является необходимым условием наличия у системы (1) автономного $(n, n - k_2)$-цилиндричного антиголоморфного на области Ω' первого интеграла (6).

Пусть $\mathbb{R}$-дифференцируемые на области G, достаточное число раз, функции $X_{il}\colon G \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, 2m}$, удовлетворяют условиям (5). Составим функциональную систему

$$\begin{gathered}
\psi_{\theta s_1} + {}^\lambda\varphi\big[{}^\lambda X^\theta(z, w)\big]^T = 0, \quad {}^\lambda\varphi\big[\partial^p_\chi\, {}^\lambda X^\theta(z, w)\big]^T = 0,\ p = \overline{1, \lambda},\ \theta = \overline{1, s_1}\,, \\
{}^\lambda\varphi\big[{}^\lambda X^\eta(z, w)\big]^T = 0,\ \ {}^\lambda\varphi\big[\partial^p_\chi\, {}^\lambda X^\eta(z, w)\big]^T = 0,\ p = \overline{1, \lambda - 1},\ \eta = \overline{s_1 + 1, m}, \\
\psi_{g s_2} + {}^\lambda\varphi\big[{}^\lambda X^{m+j_g}(z, w)\big]^T{=}0,\ \ {}^\lambda\varphi\big[\partial^p_\chi\, {}^\lambda X^{m+j_g}(z, w)\big]^T{=}0,\ p = \overline{1, \lambda},\ g = \overline{1, s_2}, \\
{}^\lambda\varphi\big[{}^\lambda X^{m+j_\nu}(z, w)\big]^T{=}0,\ \ {}^\lambda\varphi\big[\partial^p_\chi\, {}^\lambda X^{m+j_\nu}(z, w)\big]^T{=}0,\ p = \overline{1, \lambda{-}1},\ \nu = \overline{s_2 + 1, m},
\end{gathered} \tag{8}$$

где T — знак транспонирования, функции $\psi_{\theta s_1}$, $\theta = \overline{1, s_1}$, и $\psi_{g s_2}$, $g = \overline{1, s_2}$, являются координатами векторных функций ${}^{s_1}\psi$ и ${}^{s_2}\psi$ соответственно, а векторная функция ${}^\lambda\varphi = ({}^{k_1}\varphi, {}^{k_2}\varphi)$ на области G имеет координатные функции

$${}^{k_1}\varphi\colon (z, w) \to (\varphi_{1k_1}, \ldots, \varphi_{k_1 k_1})({}^s z, {}^k w), \quad {}^{k_2}\varphi\colon (z, w) \to (\varphi_{1k_2}, \ldots, \varphi_{k_2 k_2})({}^s z, {}^k w).$$

Введём в рассмотрение уравнение Пфаффа

$${}^{s_1}\psi({}^s z, {}^k w) d^{s_1} z + {}^{s_2}\psi({}^s z, {}^k w) d\,\overline{{}^{s_2} z} + {}^{k_1}\varphi({}^s z, {}^k w) d^{k_1} w + {}^{k_2}\varphi({}^s z, {}^k w) d\,\overline{{}^{k_2} w} = 0, \tag{9}$$

где векторы-столбцы $d^{s_1} z = \operatorname{colon}(dz_1, \ldots, dz_{s_1})$, $d\,\overline{{}^{s_2} z} = \operatorname{colon}\big(d\,\overline{z}_{j_1}, \ldots, d\,\overline{z}_{j_{s_2}}\big)$, $d^{k_1} w = \operatorname{colon}(dw_1, \ldots, dw_{k_1})$, $d\,\overline{{}^{k_2} w} = \operatorname{colon}\big(d\,\overline{w}_{\zeta_1}, \ldots, d\,\overline{w}_{\zeta_{k_2}}\big)$ и докажем критерий существования первого интеграла вида (2) у системы (1).

Теорема 2. Для того, чтобы система в полных дифференциалах (1) имела первый интеграл (2), необходимо и достаточно существования векторов-функций ${}^{s_1}\psi$, ${}^{s_2}\psi$ и ${}^\lambda\varphi$, удовлетворяющих функциональной системе (8), таких, что функция (2) является общим интегралом уравнения Пфаффа (9).

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1) имеет первый интеграл (2). Тогда выполняются тождества (3). Дифференцируя их λ раз по χ при $\theta = \overline{1, s_1}$, $g = \overline{1, s_2}$, и $\lambda - 1$ раз по χ при $\eta = \overline{s_1 + 1, m}$, $\nu = \overline{s_2 + 1, m}$, получаем, что функции

$$^{s_1}\psi = \partial_{^{s_1}z} F(^s z, {}^k w), \quad {}^{s_2}\psi = \partial_{\overline{^{s_2}z}} F(^s z, {}^k w), \quad {}^{k_1}\varphi = \partial_{^{k_1}w} F(^s z, {}^k w), \quad {}^{k_2}\varphi = \partial_{\overline{^{k_2}w}} F(^s z, {}^k w),$$

являются решением функциональной системы (8), где $\partial_{^{s_1}z} = (\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_{s_1}})$, $\partial_{\overline{^{s_2}z}} = \big(\partial_{\overline{z}_{j_1}}, \ldots, \partial_{\overline{z}_{j_{s_2}}}\big)$, $\partial_{^{k_1}w} = (\partial_{w_1}, \ldots, \partial_{w_{k_1}})$, $\partial_{\overline{^{k_2}w}} = \big(\partial_{\overline{w}_{\zeta_1}}, \ldots, \partial_{\overline{w}_{\zeta_{k_2}}}\big)$. Отсюда следует, что функция (2) является общим интегралом уравнения Пфаффа (9) на области G^r, являющейся естественной проекцией области G' на координатное подпространство $O\,^{\overset{*}{s}}z\,^{\overset{*}{k}}w$, где $\overset{*}{s}$ и $\overset{*}{k}$ — соответственно число независимых и зависимых переменных, от которых зависит функция (2).

Достаточность. Пусть $^{s_1}\psi(^s z, {}^k w)$, $^{s_2}\psi(^s z, {}^k w)$, $^{\lambda}\varphi(^s z, {}^k w)$ — решение системы (8), а уравнение Пфаффа (9), составленное на его основании, имеет на области G^r общий интеграл (2). Тогда на G^r выполняется система тождеств

$$\begin{aligned}
&\partial_{^{s_1}z} F(^s z, {}^k w) - {}^{s_1}\psi(^s z, {}^k w) = 0, \quad \partial_{\overline{^{s_2}z}} F(^s z, {}^k w) - {}^{s_2}\psi(^s z, {}^k w) = 0,\\
&\partial_{^{k_1}w} F(^s z, {}^k w) - {}^{k_1}\varphi(^s z, {}^k w) = 0, \quad \partial_{\overline{^{k_2}w}} F(^s z, {}^k w) - {}^{k_2}\varphi(^s z, {}^k w) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая, что вектор-функции $^{s_1}\psi$, $^{s_2}\psi$, $^{k_1}\varphi$ и $^{k_2}\varphi$ являются решением функциональной системы (8), получаем систему тождеств (3), и следовательно, $\mathbb{R}$-дифференцируемая на области G' функция (2) является (s_1, s_2)-неавтономным $(n - k_1, n - k_2)$-цилиндричным первым интегралом системы (1). ■

Теорема 3. Пусть фунциональная система (8) имеет q не являющихся линейно связанными решений

$$^{s_1}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \ {}^{s_2}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \ {}^{\lambda}\varphi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r, \ \varepsilon = \overline{1, q}, \tag{11}$$

а построенные на их основании уравнения Пфаффа

$$^{s_1}\psi^{\varepsilon}\, d\,^{s_1}z \; + \; {}^{s_2}\psi^{\varepsilon}\, d\,\overline{^{s_2}z} \; + \; {}^{k_1}\varphi^{\varepsilon}\, d\,^{k_1}w \; + \; {}^{k_2}\varphi^{\varepsilon}\, d\,\overline{^{k_2}w} \; = \; 0, \ \ \varepsilon = \overline{1, q}, \tag{12}$$

имеют соответственно общие $\mathbb{R}$-дифференцируемые интегралы

$$F_{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r, \ \ \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Тогда эти общие интегралы функционально независимы на области G^r.

Доказательство. В силу тождеств (10) получаем, что

$$\partial_{^{s_1}z} F_{\varepsilon}(^s z, {}^k w) = {}^{s_1}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \quad \partial_{\overline{^{s_2}z}} F_{\varepsilon}(^s z, {}^k w) = {}^{s_2}\psi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \ \forall (^s z, {}^k w) \in G^r,$$

$$\partial_{^{k_1}w} F_{\varepsilon}(^s z, {}^k w) = {}^{k_1}\varphi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \ \partial_{\overline{^{k_2}w}} F_{\varepsilon}(^s z, {}^k w) = {}^{k_2}\varphi^{\varepsilon}(^s z, {}^k w), \forall (^s z, {}^k w) \in G^r, \ \varepsilon = \overline{1, q}.$$

Поэтому матрица Якоби

$$J(F_{\varepsilon}(^s z, {}^k w); {}^s z, {}^k w) = \big\|{}^{s_1}\Psi(^s z, {}^k w)\, {}^{s_2}\Psi(^s z, {}^k w)\, {}^{k_1}\Phi(^s z, {}^k w)\, {}^{k_2}\Phi(^s z, {}^k w)\big\|,$$

где блочная матрица $\left\| {}^{s_1}\Psi\, {}^{s_2}\Psi\, {}^{k_1}\Phi\, {}^{k_2}\Phi \right\|$ составлена на основании $(q\times s_1)$-матрицы ${}^{s_1}\Psi = \left\|\psi_{\varepsilon\theta s_1}\right\|$, $(q\times s_2)$-матрицы ${}^{s_2}\Psi = \left\|\psi_{\varepsilon g s_2}\right\|$, $(q\times k_1)$-матрицы ${}^{k_1}\Phi = \left\|\varphi_{\varepsilon\xi k_1}\right\|$ и $(q\times k_2)$-матрицы ${}^{k_2}\Phi = \left\|\varphi_{\varepsilon\tau k_2}\right\|$.

Ввиду линейной несвязанности векторов-функций (11) на области G^r ранг матрицы Якоби $\operatorname{rank} J(F_\varepsilon({}^{s}z, {}^{k}w); {}^{s}z, {}^{k}w) = q$ для всех $({}^{s}z, {}^{k}w)$ из области G^r, за исключением, быть может, множества r-мерной меры нуль.

Следовательно, общие интегралы уравнений Пфаффа (12) являются функционально независимыми на области G^r. ■

Пример. Для системы уравнений в полных дифференциалах

$$dw_1 = \frac{2}{\overline{z}}\, w_2\, dz - \Big(\frac{1}{\overline{z}}\, w_1 + 2w_2^2 + 2z\, w_2\, \overline{w}_1\Big) d\,\overline{z}\,, \quad dw_2 = -\,dz + \overline{z}\,(w_2 + z\,\overline{w}_1)\, d\,\overline{z} \quad (13)$$

выполняются необходимые условия (теорема 1) существования (1,0)-неавтономного (2,0)-цилиндричного первого интеграла, так как вронскианы по переменным $\overline{z}$, w_1 и w_2 совокупностей

$$\Big\{1,\, -\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 - 2\,\overline{w}_2^{\,2} - 2\,\overline{z}\, w_1\,\overline{w}_2, z(\,\overline{z}\, w_1 + \overline{w}_2)\Big\} \ \text{ и } \ \Big\{\frac{2\,\overline{w}_2}{z}\,,\, -1\Big\}$$

равны нулю на области G из множества $V = \{(z,w)\colon z \ne 0\}$.

Функциональная система (8) для системы (13)

$$\psi_1 - \Big(\frac{1}{z}\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2^{\,2} + 2\,\overline{z}\, w_1\,\overline{w}_2\Big)\varphi_1 + z(\,\overline{w}_2 + \overline{z}\, w_1)\varphi_2 = 0,$$

$$-\,2w_1\,\overline{w}_2\,\varphi_1 + zw_1\,\varphi_2 = 0, \qquad -\,2\,\overline{z}\,\overline{w}_2\,\varphi_1 + z\,\overline{z}\,\varphi_2 = 0, \qquad \frac{2}{z}\,\overline{w}_2\,\varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$

имеет решение $\psi_1\colon (z,w) \to \overline{w}_1$, $\varphi_1\colon (z,w)\to z$, $\varphi_2\colon (z,w) \to 2\,\overline{w}_2$, $\forall (z,w)\in G$, а построенное на его основании уравнение Пфаффа

$$\overline{w}_1\, dz + z\, d\,\overline{w}_1 + 2\,\overline{w}_2\, d\,\overline{w}_2 = 0$$

имеет общий интеграл (теорема 2)

$$F\colon (z,w) \to z\,\overline{w}_1 + \overline{w}_2^{\,2},\ \forall (z,w)\in G. \qquad (14)$$

Так как скобки Пуассона

$$\big[\mathfrak{X}_1(z,w), \mathfrak{X}_2(z,w)\big] = \big(1 + 2z\,\overline{w}_2(\,\overline{z}\, w_1 + \overline{w}_2\,)\big)\big(2w_2\,\partial_{w_1} - \overline{z}\,\partial_{w_2}\big) -$$
$$-\big(1 + 2\,\overline{z}\, w_2(w_2 + z\,\overline{w}_1)\big)\big(2\,\overline{w}_2\,\partial_{\overline{w}_1} - z\,\partial_{\overline{w}_2}\big)\,,\ \forall (z,w)\in G,$$

не равны нуль-оператору на G, то система (13) не является вполне разрешимой, а её интегральный базис состоит не более, чем из одного первого интеграла.

Стало быть, (1,0)-неавтономный (2,0)-цилиндричный первый интеграл (14) образует интегральный базис системы уравнений в полных дифференциалах (13) на любой области G из множества V пространства $\mathbb{C}^3$.

Используя подходы, аналогично разработанным, с учётом аналитических различий, которые присущи частному интегралу и последнему множителю, по сравнению с первым интегралом, получены необходимый признак и критерий существования (s_1,s_2)-неавтономного $(n-k_1, n-k_2)$-цилиндричного $\mathbb{R}$-дифференцируемого частного интеграла и последнего множителя, системы (1), а также решена задача о их функциональной независимости.

Литература

[1] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. – М.: “Наука”, 1985. – 464с.

[2] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М.: “Наука”, 1988.– 512с.

[3] Положий Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. – Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1965. – 444 с.

[4] Грудо Э.И. Об одной эллиптической системе дифференциальных уравнений в частных производных с особой точкой в начале координат // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т.3, № 3. – С.485-495.

[5] Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.

[6] Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Об $\mathbb{R}$-голоморфных решениях системы уравнений в полных дифференциалах // Весцi Акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 1999. – № 3. – С.124-126.

[7] Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. $\mathbb{R}$-голоморфные решения уравнения в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т.35, № 4. – С.447-452.

[8] Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Интегралы $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т.48, № 1. – С.49-52.

[9] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 564с.

[10] Горбузов В.Н. Автономность системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т.34. – № 2. – С.149-156.

[11] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: “Наука”, 1978. – 400 с.

[12] Горбузов В.Н. Математический анализ: теория поля. – Гродно: ГрГУ, 2000. – 627 с.

К ЗАДАЧЕ О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО БАЗИСА СИСТЕМЫ ЯКОБИ-ГЕССЕ

Даранчук С.Н.
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Гродно, Беларусь
e-mail: daranchuk@tut.by

Рассмотрим дифференциальную систему Якоби-Гессе уравнений в частных производных

$$\mathfrak{J}_j(x)u = 0, \quad j = \overline{1,m}, \quad m < n, \tag{1}$$

построенную на основании не являющихся линейно связанными на $\mathbb{R}^n$ линейных дифференциальных операторов

$$\mathfrak{J}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \big(a_{ji}(x) - x_i a_{j,n+1}(x)\big)\partial_i, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,m},$$

где функции $a_{j\tau}\colon x \to \sum\limits_{i=1}^{n} a_{j\tau i}\, x_i + a_{j\tau, n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,m}$, $\tau = \overline{1, n+1}$, имеют вещественные коэффициенты такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \bigl|a_{j,n+1,i}\bigr| \neq 0$, $j = \overline{1,m}$.

Для якобиевой системы (1), заданной на пространстве $\mathbb{C}^n$, в [1] на основании метода построения первых интегралов дифференциальных систем по их частным интегралам [2,3] разработан спектральный метод нахождения интегрального базиса. В данной статье якобиеву систему (1) рассмотрим на вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$.

Якобиевость системы (1) означает [4, с.523] выполнение системы коммутаторных тождеств

$$\bigl[\mathfrak{J}_j(x), \mathfrak{J}_\zeta(x)\bigr] = \mathfrak{O}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j, \zeta = \overline{1,m},$$

или, что то же, – перестановочность [5, с.24] матриц коэффициентов дифференциальной системы (1):

$$A_j A_\zeta = A_\zeta A_j, \quad j, \zeta = \overline{1,m}.$$

У квадратных $(n+1)$-матриц $A_j = \bigl\|a_{j\delta\tau}\bigr\|$ элементами столбцов являются коэффициенты линейных функций $a_{j\tau}$, $j = \overline{1,m}$, $\tau = \overline{1, n+1}$.

Перестановочность матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, определяет связи [6, с.191-194] между их собственными числами и собственными векторами, с учётом которых в [1] доказана основополагающая для разработанного метода

Теорема 1. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{n+1})$ – общий (вещественный или комплексный) собственный вектор матриц A_j, $j = \overline{1,m}$. Тогда линейная неоднородная функция $p\colon x \to \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i x_i + \nu_{n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, будет частным (вещественным или комплекснозначным) интегралом системы Якоби-Гессе (1).

Рассмотрим построение первых интегралов якобиевой системы (1) спектральным методом, когда матрицы A_j, $j = \overline{1,m}$, имеют кратные элементарные делители.

Из системы (1) произвольным образом выделим линейное однородное уравнение в частных производных

$$\mathfrak{J}_\zeta(x) u = 0,$$

обладающее свойством: число элементарных делителей матрицы A_ζ не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j, $j = \overline{1,m}$.

Если собственному числу λ_l^ζ матрицы A_ζ соответствует элементарный делитель кратности s и собственный вектор $\nu^{0l} = \bigl(\nu_1^{0l}, \ldots, \nu_{n+1}^{0l}\bigr)$, то вектор $\nu^{kl} = \bigl(\nu_1^{kl}, \ldots, \nu_{n+1}^{kl}\bigr)$, координатами которого являются решения системы

$$\bigl(A_\zeta - \lambda_l^\zeta E\bigr)\, \mathrm{colon}\bigl(\nu_1^{kl}, \ldots, \nu_{n+1}^{kl}\bigr) = k \cdot \mathrm{colon}\bigl(\nu_1^{k-1,l}, \ldots, \nu_{n+1}^{k-1,l}\bigr), \quad k = \overline{1, s-1},$$

назовём k-м присоединённым вектором матрицы A_ζ, соответствующим собственному числу λ_l^ζ.

Примем обозначения: $\nu^{kl}=\left(\nu_1^{kl},\ldots,\nu_{n+1}^{kl}\right),\ p_{kl}(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i^{kl}x_i+\nu_{n+1}^{kl}.$

В случае наличия у матриц $A_j,\ j=\overline{1,m},$ вещественных собственных чисел с кратными элементарными делителями имеет место

<u>Теорема 2</u>. Пусть ν^{0l} и $\nu^{\theta l},\ \theta=\overline{1,s_l-1},\ l=\overline{1,r},$ – общие линейно независимые вещественные собственные векторы матриц $A_j,\ j=\overline{1,m},$ и присоединённые векторы матрицы $A_\zeta,$ которые соответствуют собственным числам $\lambda_l^\zeta,\ l=\overline{1,r},$ имеющим элементарные делители кратности s_l при $\sum\limits_{l=1}^{r}s_l\geqslant m+2.$ Тогда первым интегралом якобиевой системы (1) будет функция

$$W\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k}\left|p_{0\xi}(x)\right|^{h_{0\xi}}\,\exp\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}h_{q\xi}v_{q\xi}(x),\quad\forall x\in X,\tag{2}$$

где X есть область из множества определения $\mathrm{D}W$ функции $W,$ функции $v_{q\xi}\colon X\to\mathbb{R},\ q=\overline{1,\varepsilon_\xi},\ \xi=\overline{1,k},$ таковы, что

$$p_{i\xi}(x)=\sum_{q=1}^{i}\tbinom{i-1}{q-1}\,v_{q\xi}(x)p_{i-q,\xi}(x),\quad\forall x\in X,\quad i=\overline{1,\varepsilon_\xi},\quad\xi=\overline{1,k},\tag{3}$$

и $\sum\limits_{\tau=1}^{k}(\varepsilon_\tau+1)=m+2,\ \varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1,\ \xi=\overline{1,k},\ k\leqslant r.$ При этом

$$\mathfrak{J}_j v_{q\xi}(x)\equiv\mu_{q\xi}^j,\quad\mu_{q\xi}^j=\mathrm{const},\quad q=\overline{1,\varepsilon_\xi},\quad\xi=\overline{1,k},\quad j=\overline{1,m},$$

а числа $h_{q\xi},\ q=\overline{0,\varepsilon_\xi},\ \xi=\overline{1,k},$ составляют нетривиальное решение системы

$$\sum_{\xi=1}^{k}h_{0\xi}=0,\quad\sum_{\xi=1}^{k}\left(\lambda_\xi^j h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\right)=0,\ \ j=\overline{1,m},$$

в которой $\lambda_\xi^j,\ \xi=\overline{1,k},\ j=\overline{1,m},$ – вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m},$ соответствующие собственным векторам $\nu^{0\xi},\ \xi=\overline{1,k}.$

Рассмотрим случай наличия у матриц $A_j,\ j=\overline{1,m},$ существенно комплексных собственных чисел с кратными элементарными делителями.

По теореме 2, когда матрицы $A_j,\ j=\overline{1,m},$ имеют некоторое число общих существенно комплексных собственных векторов $\nu^{0l},$ соответствующих собственным числам λ_l^ζ с элементарными делителями кратности $s_l,$ получим, вообще говоря, комплекснозначный первый интеграл (2) (при этом в (2) достаточно опустить знак модуля для комплекснозначных функция p_{0l}).

В этом случае на основании определённой группировки $m+2$ функций $p_{0l},\ v_{ql},\ q=\overline{0,\varepsilon_l-1},\ l=\overline{1,r},$ всегда получим одну из двух возможностей.

1. В наборе из $m+2$ функций наряду с каждой комплекснозначной функцией вещественного аргумента содержится и комплексно сопряжённая ей.

2. В наборе из $m+2$ функций имеется одна комплекснозначная функция вещественного аргумента, комплексно сопряжённая функция к которой в этом наборе не содержится.

В каждом из этих случаев якобиевая система (1) будет иметь следующие вещественнозначные первые интегралы, при записи которых будем использовать дополнительные условные обозначения: $\overset{*}{p}_{q\xi}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overset{*}{\nu}{}_i^{q\xi}\, x_i + \overset{*}{\nu}{}_{n+1}^{q\xi}$, $\widetilde{p}_{q\xi}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{\nu}{}_i^{q\xi}\, x_i + \widetilde{\nu}{}_{n+1}^{q\xi}$, $P_{0\xi}(x) = \big(\overset{*}{p}_{\xi}(x)\big)^2 + \big(\widetilde{p}_{0\xi}(x)\big)^2$, $\varphi_{0\xi}(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{\widetilde{p}_{0\xi}(x)}{\overset{*}{p}_{0\xi}(x)}$.

В первом случае первым интегралом будет функция

$$W\colon x \to \prod_{\xi=1}^{k_1} \big(P_{0\xi}(x)\big)^{\overset{*}{h}_{0\xi}} \exp\bigg(- 2\, \widetilde{h}_{0\xi}\, \varphi_{0\xi}(x) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\big(\overset{*}{h}_{q\xi} \overset{*}{v}_{q\xi}(x) - \widetilde{h}_{q\xi} \widetilde{v}_{q\xi}(x)\big)\bigg) \prod_{\theta=1}^{k_2} \big|p_{0\theta}(x)\big|^{h_{0\theta}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} h_{q\theta} v_{q\theta}(x), \quad \forall x \in X,$$

где область $X \subset \mathrm{D}W$, вещественные числа $\overset{*}{h}_{q\xi}$, $\widetilde{h}_{q\xi}$, $h_{q\theta}$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение системы

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} \overset{*}{h}_{0\xi} + \sum_{\theta=1}^{k_2} h_{0\theta} = 0,$$

$$\sum_{\xi=1}^{k_1} \bigg(2\big(\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j\, \overset{*}{h}_{0\xi} - \widetilde{\lambda}{}_\xi^j\, \widetilde{h}_{0\xi}\big) + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\big(\overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j\, \overset{*}{h}_{q\xi} - \widetilde{\mu}{}_{q\xi}^j\, \widetilde{h}_{q\xi}\big)\bigg) +$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2} \bigg(\lambda_\theta^j\, h_{0\theta} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_{q\theta}^j\, h_{q\theta}\bigg) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

а $\lambda_\xi^j = \overset{*}{\lambda}{}_\xi^j + \widetilde{\lambda}{}_\xi^j\, i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, и λ_θ^j, $\theta = \overline{1, k_2}$, $j = \overline{1, m}$, есть существенно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi}$ $\big(\nu_\tau^{0\xi} = \overset{*}{\nu}{}_\tau^{0\xi} + \widetilde{\nu}{}_\tau^{0\xi}\, i$, $\tau = \overline{1, n+1}$, $\xi = \overline{1, k_1}\big)$ и $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$. Числа

$$\overset{*}{\mu}{}_{q\xi}^j = \operatorname{Re} \mathfrak{J}_j v_{q\xi}(x), \quad \widetilde{\mu}{}_{q\xi}^j = \operatorname{Im} \mathfrak{J}_j v_{q\xi}(x), \quad \mu_{q\theta}^j = \mathfrak{J}_j v_{q\theta}(x), \quad \forall x \in X, \quad j = \overline{1, m},$$

скалярные функции

$$\begin{gathered} v_{q\xi}\colon x \to \overset{*}{v}_{q\xi}(x) + \widetilde{v}_{q\xi}(x)\, i,\ \forall x \in X, \quad \text{и} \quad v_{q\theta}\colon x \to v_{q\theta}(x),\ \forall x \in X, \\ q = \overline{1, \varepsilon_k},\ k = \xi \ \text{ или } \ k = \theta,\ \xi = \overline{1, k_1},\ \theta = \overline{1, k_2}, \end{gathered} \tag{4}$$

находятся из системы (3), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось числовое равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} \big(\varepsilon_\xi + 1\big) + \sum_{\theta=1}^{k_2} \big(\varepsilon_\theta + 1\big) = m + 2$$

при $2k_1 + k_2 \leqslant r$, $\varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, где k_1 – число пар комплексно сопряжённых общих собственных векторов матриц A_j; $\varepsilon_\theta \leqslant s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, а k_2 – число вещественных общих собственных векторов матриц A_j, $j = \overline{1, m}$.

Во втором случае будем различать две возможности.

Случай 2а. Общий собственный вектор матриц $A_j,\ j=\overline{1,m},$ не имеет комплексно сопряжённого. Тогда якобиевая система (1) имеет на области X первые интегралы

$$W_1\colon x\to \prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\overset{*}{h}_{0,2\xi-1}+\overset{*}{h}_{0,2\xi}}\exp\biggl(-2\bigl(\widetilde{h}_{0,2\xi-1}-\widetilde{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\Bigl(\bigl(\overset{*}{h}_{q,2\xi-1}+\overset{*}{h}_{q,2\xi}\bigr)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi}-\widetilde{h}_{q,2\xi-1}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr)\biggr)\bigl(P_{0,2k_1+1}(x)\bigr)^{\overset{*}{h}_{0,2k_1+1}}\cdot$$

$$\cdot\exp\bigl(-2\,\widetilde{h}_{0,2k_1+1}\varphi_{0,2k_1+1}(x)\bigr)\ \prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(p_{0\theta}(x)\bigr)^{2\overset{*}{h}_{0\theta}}\exp\biggl(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\overset{*}{h}_{q\theta}v_{q\theta}(x)\biggr),$$

$$W_2\colon x\to \prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{0,2\xi-1}+\widetilde{h}_{0,2\xi}}\exp\biggl(2\bigl(\overset{*}{h}_{0,2\xi-1}-\overset{*}{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_{0\xi}(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\Bigl(\bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi-1}+\widetilde{h}_{q,2\xi}\bigr)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\overset{*}{h}_{q,2\xi-1}-\overset{*}{h}_{q,2\xi}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr)\biggr)\bigl(P_{0,2k_1+1}(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{0,2k_1+1}}\cdot$$

$$\cdot\exp\bigl(2\,\overset{*}{h}_{0,2k_1+1}\varphi_{0,2k_1+1}(x)\bigr)\ \prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(p_{0\theta}(x)\bigr)^{2\widetilde{h}_{0\theta}}\ \exp\biggl(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\widetilde{h}_{q\theta}v_{q\theta}(x)\biggr),$$

где $X\subset \mathrm{D}W_1\cap \mathrm{D}W_2$, числа $h_{q\xi}=\overset{*}{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{\xi q}\,i,\ h_{q\theta}=\overset{*}{h}_{q\theta}+\widetilde{h}_{q\theta}\,i,\ q=\overline{0,\varepsilon_k},\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,2k_1+1},\ \theta=\overline{1,k_2},$ составляют нетривиальное решение системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1}h_{0\xi}+h_{0,2k_1+1}+\sum_{\theta=1}^{k_2}h_{0\theta}=0,\quad \sum_{\xi=1}^{2k_1}\biggl(\lambda_\xi^j\,h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\biggr)+\lambda_{2k_1+1}^jh_{0,2k_1+1}+$$

$$+\ \sum_{\theta=1}^{k_2}\biggl(\lambda_\theta^j\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j\,h_{q\theta}\biggr)=0,\quad j=\overline{1,m},$$

числа $\lambda_{2\xi-1}^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j+\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i,\ \lambda_{2\xi}^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j-\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i,\ \xi=\overline{1,k_1},\ \lambda_{2k_1+1}^j=\overset{*}{\lambda}{}_{2k_1+1}^j+\widetilde{\lambda}_{2k_1+1}^j\,i$ и $\lambda_\theta^j,\ \theta=\overline{1,k_2},\ j=\overline{1,m},$ – существенно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m},$ соответствующие собственным векторам $\nu^{0,2\xi-1},\ \nu^{0,2\xi}\ \bigl(\nu_\tau^{0,2\xi-1}=\overset{*}{\nu}{}_\tau^{0\xi}+\widetilde{\nu}_\tau^{0\xi}\,i,\ \nu_\tau^{0,2\xi}=\overline{\nu_\tau^{0,2\xi-1}},\ \tau=\overline{1,n+1},\ \xi=\overline{1,k_1}\bigr),$ $\nu^{0,2k_1+1}\ \bigl(\nu_\tau^{0,2k_1+1}=\overset{*}{\nu}{}_\tau^{0,2k_1+1}+\widetilde{\nu}_\tau^{0,2k_1+1}\,i,\ \tau=\overline{1,n+1}\bigr)$ и $\nu^{0\theta},\ \theta=\overline{1,k_2}$. Числа

$$\mu_{q,2\xi-1}^j=\mathfrak{J}_jv_{q\xi}(x),\quad \mu_{q,2\xi}^j=\mathfrak{J}_j\overline{v_{q\xi}(x)}\,,\quad \mu_{q\theta}^j=\mathfrak{J}_jv_{q\theta}(x),\quad \forall x\in X,\quad j=\overline{1,m},$$

функции (4) находятся из системы (3), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось числовое равенство

$$2\sum_{\xi=1}^{k_1}\bigl(\varepsilon_\xi+1\bigr)+1+\sum_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\varepsilon_\theta+1\bigr)=m+2$$

при $2k_1+1+k_2\leqslant r,\ \varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1,\ \xi=\overline{1,k_1},\ \varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1,\ \theta=\overline{1,k_2}.$

Случай 2б. Функция $v_{l\gamma},\ \gamma\in\{1,\dots,k_1\},\ l\in\{1,\dots,\varepsilon_\gamma\}$, не имеет комплексно сопряжённой функции. Тогда якобиевая система (1) имеет на области X первые интегралы

$$W_1\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_{0\xi}(x)\bigr)^{\overset{*}{h}_{0,2\xi-1}+\overset{*}{h}_{0,2\xi}}\exp\biggl(-2\bigl(\widetilde{h}_{0,2\xi-1}-\widetilde{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_{0\xi}(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\bigl(1-\delta_{ql}\delta_{\xi\gamma}\bigr)\Bigl(\bigl(\overset{*}{h}_{q,2\xi-1}+\overset{*}{h}_{q,2\xi}\bigr)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi}-\widetilde{h}_{q,2\xi-1}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr)\biggr)\cdot$$

$$\cdot\exp\Bigl(2\bigl(\overset{*}{h}_{l\gamma}\overset{*}{v}_{l\gamma}(x)-\widetilde{h}_{l\gamma}\widetilde{v}_{l\gamma}(x)\bigr)\Bigr)\ \prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(p_{0\theta}(x)\bigr)^{2\overset{*}{h}_{0\theta}}\ \exp\Bigl(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\overset{*}{h}_{q\theta}v_{q\theta}(x)\Bigr),$$

$$W_2\colon x\to\prod_{\xi=1}^{k_1}\bigl(P_\xi(x)\bigr)^{\widetilde{h}_{0,2\xi-1}+\widetilde{h}_{0,2\xi}}\exp\biggl(2\bigl(\overset{*}{h}_{0,2\xi-1}-\overset{*}{h}_{0,2\xi}\bigr)\varphi_{0\xi}(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2\bigl(1-\delta_{ql}\delta_{\xi\gamma}\bigr)\Bigl(\bigl(\widetilde{h}_{q,2\xi-1}+\widetilde{h}_{q,2\xi}\bigr)\overset{*}{v}_{q\xi}(x)+\bigl(\overset{*}{h}_{q,2\xi-1}-\overset{*}{h}_{q,2\xi}\bigr)\widetilde{v}_{q\xi}(x)\Bigr)\biggr)\cdot$$

$$\cdot\exp\Bigl(2\bigl(\overset{*}{h}_{l\gamma}\widetilde{v}_{l\gamma}(x)+\widetilde{h}_{l\gamma}\overset{*}{v}_{l}(x)\bigr)\Bigr)\ \prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(p_{0\theta}(x)\bigr)^{2\widetilde{h}_{0\theta}}\ \exp\Bigl(2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\widetilde{h}_{q\theta}v_{q\theta}(x)\Bigr),$$

где $X\subset \mathrm{D}W_1\cap\mathrm{D}W_2$, числа $h_{q\xi}=\overset{*}{h}_{q\xi}+\widetilde{h}_{q\xi}\,i,\ h_{q\theta}=\overset{*}{h}_{q\theta}+\widetilde{h}_{q\theta}\,i,\ q=\overline{0,\varepsilon_k},\ k=\xi$ или $k=\theta,\ \xi=\overline{1,2k_1},\ \xi\neq\gamma+1,\ \theta=\overline{1,k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1}h_{0\xi}+\sum_{\theta=1}^{k_2}h_{0\theta}=0,\quad \sum_{\xi=1}^{2k_1}\Bigl(\lambda_\xi^j\,h_{0\xi}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}\mu_{q\xi}^j\,h_{q\xi}\Bigr)-\mu_{l,\gamma+1}^j\,h_{l,\gamma+1}+$$

$$+\sum_{\theta=1}^{k_2}\Bigl(\lambda_\theta^j\,h_{0\theta}+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\mu_{q\theta}^j\,h_{q\theta}\Bigr)=0,\quad j=\overline{1,m},$$

числа $\lambda_{2\xi-1}^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j+\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i,\ \lambda_{2\xi}^j=\overset{*}{\lambda}{}_\xi^j-\widetilde{\lambda}_\xi^j\,i,\ \xi=\overline{1,k_1}$, и $\lambda_\theta^j,\ \theta=\overline{1,k_2},\ j=\overline{1,m}$, – существенно комплексные и вещественные собственные числа матриц $A_j,\ j=\overline{1,m}$, которые соответствуют собственным векторам $\nu^{0,2\xi-1},\ \nu^{0,2\xi}\ \bigl(\nu_\tau^{0,2\xi-1}=\overset{*}{\nu}{}_\tau^{0\xi}+\widetilde{\nu}_\tau^{0\xi}\,i,\nu_\tau^{0,2\xi}=\overline{\nu_\tau^{0,2\xi-1}},\ \tau=\overline{1,n+1},\ \xi=\overline{1,k_1}\bigr)$ и $\nu^{0\theta},\ \theta=\overline{1,k_2}$. Числа

$$\mu_{q,2\xi-1}^j=\mathfrak{I}_jv_{q\xi}(x),\quad \mu_{q,2\xi}^j=\mathfrak{I}_j\overline{v_{q\xi}(x)},\quad \mu_{q\theta}^j=\mathfrak{I}_jv_{q\theta}(x),\quad \forall x\in X,\quad j=\overline{1,m},$$

функции (4) находятся из системы (3), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось числовое равенство

$$2\sum_{\xi=1}^{k_1}\bigl(\varepsilon_\xi+1\bigr)-1+\sum_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\varepsilon_\theta+1\bigr)=m+2$$

при $2k_1+k_2\leqslant r,\ \varepsilon_\xi\leqslant s_\xi-1,\ \xi=\overline{1,k_1},\ \varepsilon_\theta\leqslant s_\theta-1,\ \theta=\overline{1,k_2}.$

Литература

[1] Даранчук С.Н. Интегральный базис системы Якоби-Гессе в комплексной области // Материалы научной конференции “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” – СПб.: Российский ГПУ им. А.И.Герцена, 2005. – С.27-31.

[2] Горбузов В.Н. Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т.34, №4. – С.562-564.

[3] Горбузов В.Н. Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). – 2000. – №2. – С.1-36.

[4] Гурса Э. Курс математического анализа. Т.2. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 563 с.

[5] Гайшун И.В. Линейные уравнения в полных производных. – Минск: Наука и техника, 1989. – 254 с.

[6] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988 – 552 с.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ И ДЕЛОКАЛИЗОВАННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ МОДЫ В ОДНОМЕРНЫХ РЕШЕТКАХ ТИПА K_4

Джелаухова Г.С., Рябов Д.С., Чечин Г.М.
Ростовский государственный университет
Ростов-на-Дону
e-mail: chechin@phys.rsu.ru

1. Основные понятия. Концепция нелинейных нормальных мод (ННМ) была сформулирована в работе Розенберга [1] как некоторое обобщение понятия обычных нормальных мод на случай нелинейных механических систем. ННМ представляет собой такое частное решение системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику многочастичной нелинейной системы, которому отвечают синхронные периодические колебания составляющих ее частиц, причем в любой момент времени отклонения всех частиц от своих положений равновесия пропорциональны отклонению одной из них, например, нулевой:

$$\mathbf{x}(t) = \{x_i(t) \,|\, i = -N..N\} = \{k_i x_0(t) \,|\, i = -N..N\}. \tag{1}$$

Здесь $x_i(t)$ – отклонение i-й частицы из своего положения равновесия (вдоль соответствующей координатной оси) в момент времени t, а k_i – постоянные коэффициенты ($k_0 = 1$).

Свойством (1) обладают, очевидно, и обычные “линейные” нормальные моды, но в отличие от последних, колебания, соответствующие ННМ, уже не являются гармоническими. Временная зависимость отклонений $x_i(t)$ определяется в результате решения “ведущего” уравнения для отклонения $x_0(t)$.

ННМ могут существовать далеко не во всех системах. Более того, полная их совокупность, вообще говоря, не образует базис в пространстве всех возможных отклонений $x_i(t)$ $(i = -N..N)$. В частности, число независимых ННМ может быть как меньше, так и больше числа степеней свободы рассматриваемой механической системы.

Розенбергом были найдены некоторые классы механических систем, которые заведомо допускают ННМ. Наиболее важным из них является класс систем, потенциальная энергия которых является однородной функцией произвольного порядка.

ННМ могут быть как делокализованными (все частицы принимают участие в соответствующем данной моде динамическом режиме), так и локализованными (существенные амплитуды колебаний имеет лишь небольшое число частиц системы). Локализованные колебания на *однородных* решетках (решетках без примесей) представляют особый интерес для физических приложений. Они получили название «дискретные бризеры» (по определению, бризер представляет собой локализованное в пространстве и периодическое во времени колебание решетки). В настоящее время их исследованию посвящено огромное число работ (см. обзоры [2,3]).

В данной работе исследуется существование и устойчивость ННМ в нелинейных моноатомных цепочках типа K_4. Под этим термином имеются в виду гамильтоновы цепочки, в которых взаимодействуют только ближайшие соседи, причем потенциальная энергия этого взаимодействия является однородной функцией 4-го порядка:

$$U = \frac{1}{4}\sum_i x_i^4 + \frac{\beta}{4}\sum_i (x_i - x_{i-1})^4. \tag{2}$$

В этой формуле следует различать так называемый “онсайтовый” (on-site) и “интерсайтовый” (intersite) вклады в потенциальную энергию. Коэффициент β в формуле (2) регулирует силу взаимодействия между частицами по отношению к силе их взаимодействия с данным узлом решетки.

В Ньютоновской форме уравнения для продольных колебаний цепочки, описываемой (2), имеют вид:

$$\ddot{x}_i = -1x_i^3 + \beta[(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3], \;\; i = [-N..N]. \tag{3}$$

При этом мы будем рассматривать периодические граничные условия, полагая

$$x_{N+1}(t) = x_{-N}(t), \;\; x_{-N-1}(t) = x_N(t). \tag{4}$$

2. Дискретные бризеры. Существование бризероподобных объектов в цепочках типа K_4 было установлено в работе [4]. Необходимое условие устойчивости этих объектов дано в настоящей работе (см. также [5]).

Рассмотрим ННМ в последовательности цепочек (3) с различным числом частиц $\tilde{N} = 2N + 1$ ($\tilde{N} = 3, 5, 7, ...$). Для случая $\tilde{N} = 3$ было проведено полное аналитическое исследование, а для $\tilde{N} > 3$ с помощью системы Maple находились численные решения с высокой степенью точности (вплоть до 20-30 значащих цифр после запятой).

Полученные бризерные решения оказываются столь сильно локализованными, что существенные амплитуды колебаний имеют лишь 7 частиц бесконечной K_4 цепочки (амплитуды колебаний остальных частиц не превышают 10^{-20} от амплитуды $x_0(t)$ центральной частицы бризера). Пространственный профиль бризера, т.е. набор коэффициентов $\{k_i \,|\, i = -N..N\}$ найденный для цепочки с $\tilde{N} = 7$ уже практически не меняется при переходе к цепочкам с бо́льшим числом частиц. Для $\beta = 0.3$ он имеет вид $\{k_{-3}, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, k_3\} = \{-0.604017e{-}8, 0.003599, -0.299288, 1, -0.299288, 0.003599, -0.604017e{-}8\}$.

Временна́я зависимость колебаний бризера полностью определяется ведущим уравнением для его центральной частицы

$$\ddot{x}_0 + p^2 \cdot x_0^3 = 0, \tag{5}$$

которое должно быть решено с начальными условиями $x_0(0) = A_0$ (амплитуда бризера) и $\dot{x}_0(0) = 0$. Здесь коэффициент $p^2 = p^2(\tilde{N})$ зависит от пространственного профиля бризера.

Решение уравнения (5) выражается через эллиптический косинус Якоби с модулем равным $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

$$x_0(t) = A_0 \cdot \mathrm{cn}\left(\omega t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{6}$$

где частота колебаний ω линейным образом зависит от амплитуды бризера A_0:

$$\omega = p \cdot A_0. \tag{7}$$

Пространственный профиль бризера $\{k_i \,|\, i = -N..N\}$ не зависит от амплитуды A_0 и, таким образом, в пространстве всех возможных смещений частиц мы имеем некоторую прямую линию точных бризерных решений.

3. Устойчивость дискретных бризеров. Согласно традиционному рецепту исследования устойчивости периодических динамических режимов, линеаризуем исходную систему уравнений (3) в окрестности данного бризерного решения. В результате получим уравнение

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = -3x_0^2(t) \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{y}, \tag{8}$$

где $\mathbf{A}$ - некоторая матрица $\tilde{N} \times \tilde{N}$, коэффициенты которой зависят от пространственного профиля бризера. Существенно, что для рассматриваемой нами цепочки типа K_4 в линеаризованную систему входит только одна матрица ($\mathbf{A}$), в силу чего можно полностью расщепить эту систему на $\tilde{N}$ независимых скалярных уравнений, диагонализуя матрицу $\mathbf{A}$. В случае нелинейных цепочек более общего вида в линеаризованную систему входят несколько разных, вообще говоря, не коммутирующих друг с другом матриц, в силу чего такое полное расщепление провести не удается.

Находя в результате диагонализации $\tilde{N}$ собственных значений (λ_j) матрицы $\mathbf{A}$, мы приходим к необходимости анализа на устойчивость нулевых решений уравнений

$$z_j'' + \frac{3\lambda_j}{p^2} x_0^2(\tau) z_j(\tau) = 0. \tag{9}$$

Рис. 1

Каждое из этих уравнений представляет собой частный случай уравнения Ляме в форме Якоби

$$z'' + \Lambda x_0^2(\tau) \cdot z(\tau) = 0, \tag{10}$$

где $\Lambda = \dfrac{3\lambda}{p^2}$, $x_0(\tau) = \mathrm{cn}^2\left(\tau, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Для этого уравнения известен целый ряд строгих результатов [6, 7], в частности, оказывается, что существуют такие интервалы изменения параметра Λ, для которых нулевое решение уравнения (10) является устойчивым или нейстойчивым. Границы этих интервалов (на них уравнение Ляме (10) имеет строго периодические решения) являются целыми числами вида $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ Используя метод Флоке, находим две первые зоны устойчивости ($0 < \Lambda < 1$ и $3 < \Lambda < 6$) и две первые зоны неустойчивости ($1 < \Lambda < 3$ и $6 < \Lambda < 10$).

Эти результаты позволяют очень наглядно судить об устойчивости дискретных бризеров в цепочках типа K_4. На рис. показана зависимость коэффициентов $\Lambda_j(\beta) = \dfrac{3\lambda_j(\beta)}{p^2(\beta)}$ уравнения (10) как функции относительной силы интерсайтового взаимодействия β.

На этом рисунке изображены только те $\Lambda_j(\beta)$, которые имеют существенную величину (все остальные $\Lambda_j(\beta)$ оказываются очень малыми, но положительными числами). Особый случай $\Lambda_1 = 3$ (такое значение Λ попадает точно на границу между соседними зонами устойчивости и неустойчивости) является несущественным, поскольку, как можно показать, он соответствует инфинитезимальному возмущению *вдоль* бризера, что приводит просто к изменению амплитуды последнего.

На рис. видно, что если сила интерсайтового потенциала не превышает 0.554 от силы онсайтового потенциала, рассматриваемые нами бризеры являются устойчивыми (при любой величине A_0 их амплитуды). С другой стороны, при $\beta > 0.554$ параметр $\Lambda_2(\beta)$ выходит в первую зону неустойчивости бризерного решения.

Проведенный нами дальнейший анализ позволяет также сделать вывод о том, что для цепочки типа K_4 в любой сколь угодно малой окрестности точного решения существуют устойчивые *квазибризерные* решения. Им отвечают квазипериодические колебания и, как следствие, частоты колебаний разных частиц цепочки не являются строго одинаковыми.

4. Делокализованные ННМ. В работах [8, 9] было показано, что в линейных моноатомных цепочках с четным потенциалом общего вида может существовать только 6 типов делокализованных симметрийно обусловленных ННМ (одномерных "бушей мод"), которые в обозначениях работы [9] имеют вид:

$$\begin{gathered} \mathrm{B}[\hat{a}^2, \hat{i}]: \quad |x, -x|; \qquad \mathrm{B}[\hat{a}^3, \hat{i}\hat{u}]: \quad |x, -2x, x|; \\ \mathrm{B}[\hat{a}^3, \hat{i}]: \quad |x, 0, x|; \qquad \mathrm{B}[\hat{a}^4, \hat{i}\hat{u}]: \quad |x, -x, -x, x|; \\ \mathrm{B}[\hat{a}^4, \hat{a}\hat{i}]: \quad |0, x, 0, -x|; \qquad \mathrm{B}[\hat{a}^6, \hat{a}\hat{i}, \hat{a}^3\hat{u}]: \quad |0, x, x, 0, -x, -x|. \end{gathered} \tag{11}$$

Каждая такая ННМ обладает определенной группой симметрии, которая указана с помощью перечисления своих генераторов в квадратных скобках после символа B. Здесь использованы следующие обозначения: $\hat{a}$ – оператор сдвига цепочки на межатомное расстояние a, $\hat{i}$ – оператор инверсии относительно центра цепочки, $\hat{u}$ – оператор изменения знаков всех атомных смещений (без изменения положения самих атомов). Для каждой ННМ из (11) после двоеточия указан характерный для нее набор атомных смещений в пределах ячейки повторяемости нашего одномерного "кристалла". Первый генератор, имеющий вид $\hat{a}^m$ $(m = 2, 3, 4, 6)$, определяет трансляционную симметрию колебательного состояния цепочки и, стало быть, размер соответствующей ячейки повторяемости (ma).

Симметрийно обусловленные ННМ являются частным случаем более общей концепции – бушей мод, теория которых была разработана в работах [10,11]. Из этой теории, в частности, следует, что по мере увеличения амплитуд мод, входящих в буш, последний может потерять устойчивость за счет "параметрического" взаимодействия с модами, которые не принадлежат рассматриваемому бушу.

Устойчивость всех одномерных бушей мод (ННМ) из (11) для цепочек Ферми-Пасты-Улама была исследована в работе [9]. В настоящей работе анализируется устойчивость этих же бушей в цепочках типа K_4.

Обсуждаемые здесь делокализованные моды классифицируются по неприводимым представлениям группы симметрии механической системы в состоянии равновесия – их пространственные профили определяются базисными векторами этих представлений. С другой стороны, в системах с трансляционной симметрией каждому неприводимому представлению приписывается свой волновой вектор, а в случае одномерного кристалла – волновое число k $(0 \leqslant k < 2\pi)$. Нас интересует, может ли данная ННМ потерять устойчивость по отношению к взаимодействию с модами, характеризуемыми какими-либо значениями волнового числа k.

Для моноатоомных цепочек произвольной длины система динамических уравнений, линеаризованных в окрестности рассматриваемой нами ННМ, расщепляется в модальном пространстве на независимые подсистемы уравнений размерности 1, 2 и 3, что обусловлено специфической симметрией этих одномерных бушей мод [9,12]. Для цепочек типа K_4 матрицы таких подсистем могут быть приведены к диагональному виду и устойчивость ННМ может быть, таким образом, определена (как и в случае дискретных бризеров) наложением собственных значений $\lambda_j = \lambda_j(k)$ этих матриц на диаграмму устойчивости уравнения Ляме (10).

Итогом проведенного анализа являются следующие результаты:

1. Собственные значения $\lambda_j(k)$ для трех ННМ из (11) не зависят от волнового числа k и имеют следующие значения B$[\hat{a}^3, \hat{\hat{i}}\hat{u}]$ – $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3)$, B$[\hat{a}^4, \hat{\hat{i}}\hat{u}]$ – $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3)$, B$[\hat{a}^6, \hat{a}\hat{\hat{i}}, \hat{a}^3\hat{u}]$ – $(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 9)$.
   Все эти собственные значения, за исключением $\lambda_3 = 9$ для B$[\hat{a}^6, \hat{a}\hat{\hat{i}}, \hat{a}^3\hat{u}]$, попадают точно на границы интервалов устойчивости уравнения Ляме и, как следствие, им соответствуют периодические решения. С другой стороны, $\lambda_3 = 9$ попадает внутрь второй зоны неустойчивости $(6 < \lambda < 10)$. Таким образом, ННМ B$[\hat{a}^3, \hat{\hat{i}}\hat{u}]$ и B$[\hat{a}^4, \hat{\hat{i}}\hat{u}]$ являются устойчивыми, тогда как мода B$[\hat{a}^6, \hat{a}\hat{\hat{i}}, \hat{a}^3\hat{u}]$ – неустойчивой.

2. Для других трех ННМ из (11) собственные значения λ_j зависят от k и их графики представлены на рис. . Из этих результатов очевидно, что B$[\hat{a}^3, \hat{i}]$ является устойчивой ННМ (для нее графики $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ лежат в первой зоне устойчивости, а $\lambda_3(k)$ – во второй зоне устойчивости). С другой стороны, B$[\hat{a}^2, \hat{i}]$ и B$[\hat{a}^4, \hat{a}\hat{i}]$ являются неустойчивыми, поскольку некоторые части графиков их единственного собственного значения $\lambda_1(k)$ лежат в первой зоне неустойчивости $(1 < \lambda < 3)$.

Литература

[1] R.M.Rosenberg, J.Appl. Mech. **29**, 7 (1962).

[2] S.Flach and C.R.Willis, Phys. Rep. **295**, 181 (1998).

[3] S.Flach, Computational studies of discrete breathers, in "Energy Localization and Transfer", Eds. T.Dauxois, A.Litvak-Hinenzon, R.MacKay and A.Spanoudaki, World Scientific, pp.1-71 (2004).

[4] Yu.S.Kivshar, Phys. Rev. E **48**, R43 (1993).

[5] G.M.Chechin, G.S.Dzhelauhova, E.A.Mehonoshina. Breathers or quasibreathers? Arxiv: nlin.ps/0601034.

[6] Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Ватсон. Курс современного анализа. Часть 2. – М.: Физматлит, 1963.

[7] F.M.Arscott. Periodic differential equations. Pergamon, 1964.
[8] B.Rink. Physica D **175**, 31 (2003).
[9] G.M.Chechin, D.S.Ryabov, K.G.Zhukov. Physica D **203**, 121 (2005).
[10] В.П.Сахненко, Г.М.Чечин. ДАН **330**, 308 (1993); ДАН **338**, 42 (1994);
[11] G.M.Chechin and V.P.Sakhnenko, Physica D **117**, 43 (1998).
[12] G.M.Chechin, K.G.Zhukov. Arxiv: nlin.ps/050613.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРЕХМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Жестков С.В., Романенко А.А.
Институт технологии металлов
НАН Беларуси
Могилев
e-mail: iponanb@mogilev.by

Известно [1, 2], что параметрические солитоны наблюдались экспериментально в форме стационарных самоподдерживающихся локализованных пучков в трех или двумерных средах. Для их исследования в [1] была предложена система линейно связанных уравнений Кортевега-де Фриза (КДФ), которая представляет собой общую модель резонансно связанных внутренних волн в стратифицированной жидкости. В отличие от [1] для экспериментальных исследований распространения параметрических солитонов в настоящей работе предлагается система связанных трехмерных уравнений КДФ вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a_1\dfrac{\partial u}{\partial z} + a_2\dfrac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp u + a_3\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3} + a_4\dfrac{\partial}{\partial z}(u^2) = a_5\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial z} + b_2\dfrac{\partial}{\partial z}\Delta_\perp v + b_3\dfrac{\partial^3 v}{\partial z^3} + b_4\dfrac{\partial}{\partial z}(v^2) = b_5\dfrac{\partial u}{\partial z}, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_i, b_i\,(i = \overline{1,5})$ – действительные числа, характеризующие процесс распространения солитонов вдоль оси z, $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным координатам x, y. В одномерном варианте система (1) использовалась для описания около резонансного взаимодействия внутренних волн в стратифицированной жидкости, а также для аналогичного взаимодействия уединенных волн [1].

Будем предполагать, что волны распространяются вдоль оси z со скоростью c, т.е.

$$u = u(x, y, \xi_z),\ v = v(x, y, \xi_z),\ \xi_z = z - ct. \tag{2}$$

Подставляя (2) в систему (1), получим

$$\begin{cases} -c\dfrac{\partial u}{\partial \xi_z} + a_1\dfrac{\partial u}{\partial \xi_z} + a_2\dfrac{\partial}{\partial \xi_z}\Delta_\perp u + a_3\dfrac{\partial^3 u}{\partial \xi_z^3} + a_4\dfrac{\partial}{\partial \xi_z}(u^2) = a_5\dfrac{\partial v}{\partial \xi_z}, \\ -c\dfrac{\partial v}{\partial \xi_z} + b_1\dfrac{\partial v}{\partial \xi_z} + b_2\dfrac{\partial}{\partial \xi_z}\Delta_\perp v + b_3\dfrac{\partial^3 v}{\partial \xi_z^3} + b_4\dfrac{\partial}{\partial \xi_z}(v^2) = b_5\dfrac{\partial u}{\partial \xi_z}. \end{cases} \tag{3}$$

Интегрируя один раз систему (3) и полагая константы интегрирования равными нулю, найдем

$$\left\{\begin{array}{l} -cu + a_1 u + a_2 \Delta_\perp u + a_3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_z^2} + a_4 u^2 = a_5 v, \\ -cv + b_1 v + b_2 \Delta_\perp v + b_3 \dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi_z^2} + b_4 v^2 = b_5 u. \end{array}\right. \tag{4}$$

Решение системы (4) будем строить в виде

$$u = U(\xi_x, \xi_y, \xi_z),\ v = V(\xi_x, \xi_y, \xi_z),\ \xi_x = kx,\ \xi_y = ky,$$

где константа k связана соотношениями $k^2 = a_3/a_2 = b_3/b_2$. Тогда для функций $U(\xi_x, \xi_y, \xi_z),\ V(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ получим следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_3 U = \varepsilon_1 U + \varepsilon_2 V - \varepsilon_3 U^2, \\ \Delta_3 V = \mu_1 V + \mu_2 U - \mu_3 V^2, \end{array}\right.$$

где

$$\Delta_3 \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_z^2},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{c - a_1}{a_3},\ \varepsilon_2 = \frac{a_5}{a_3},\ \varepsilon_3 = \frac{a_4}{a_3},$$

$$\mu_1 = \frac{c - b_1}{b_3},\ \mu_2 = \frac{b_5}{b_3},\ \mu_3 = \frac{b_4}{b_3}.$$

Рассмотрим вопрос о существовании сферически симметричных солитонов, которые определяются системой уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_3 U = \dfrac{d^2 U}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dU}{dr} = \varepsilon_1 U + \varepsilon_2 V - \varepsilon_3 U^2, \\ \Delta_3 V = \dfrac{d^2 V}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dV}{dr} = \mu_1 V + \mu_2 U - \mu_3 V^2, \end{array}\right. \tag{5}$$

$$U(+\infty) = 0,\ U'(+\infty) = 0,\ V(+\infty) = 0,\ V'(+\infty) = 0.$$

Проблема существования нетривиального решения этой задачи в строгой постановке является открытой. Для ее решения установим асимптотику солитонов на бесконечности с помощью системы

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2 U}{dr^2} = \varepsilon_1 U + \varepsilon_2 V - \varepsilon_3 U^2, \\ \dfrac{d^2 V}{dr^2} = \mu_1 V + \mu_2 U - \mu_3 V^2. \end{array}\right. \tag{6}$$

Ее решение будем строить в виде

$$\left\{\begin{array}{l} U = Ae(1+e)^{-2}, \\ V = Be(1+e)^{-2}, \quad e \equiv \exp(\gamma r), \end{array}\right. \tag{7}$$

где A, B, γ – неизвестные постоянные. Подставляя (7) в (6), получим следующую систему дисперсионных уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 A + \varepsilon_2 B = A\gamma^2, \quad A = (6\gamma^2)/\varepsilon_3, \\ \mu_1 B + \mu_2 A = B\gamma^2, \quad B = (6\gamma^2)/\mu_3. \end{cases} \tag{8}$$

Система уравнений (8) обеспечивает существование решения вида (7), т.е. справедлива

Теорема 1. Для того чтобы система (6) имела решение вида (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись дисперсионные соотношения (8).

Изучим эти соотношения. Система (8) является совместной, если выполняется условие

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_2}{\mu_3}\right)\varepsilon_3 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_3} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_3}\right)\mu_3 = \gamma^2. \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что коэффициенты системы (1) должны подчиняться условию

$$\frac{c - a_1}{a_3} + \frac{a_4 a_5 b_3}{a_3^2 b_4} = \frac{c - b_1}{b_3} + \frac{b_4 b_5 a_3}{b_3^2 a_4} > 0.$$

При этом параметр γ определяется с точностью до знака.

Функции (7) можно принять за асимптотики солитонов на бесконечности, т.к. они удовлетворяют условиям

$$U(+\infty) = 0,\ U'(+\infty) = 0,\ V(+\infty) = 0,\ V'(+\infty) = 0$$

и величины $(2/r)U'(r)$, $(2/r)V'(r)$ малы по сравнению с $U''(r)$, $V''(r)$ соответственно, т.е.

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{(2/r)U'(r)}{U''(r)} = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{(2/r)V'(r)}{V''(r)} = 0.$$

Пусть r_* точка из $[0, +\infty)$ такая, что при $r \geqslant r_*$ можно использовать асимптотическое представление (7). Тогда решение системы (5) можно гладким образом продолжить до точки $r = 0$, начиная с решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dU}{dr} = \varepsilon_1 U + \varepsilon_2 V - \varepsilon_3 U^2, \\ \dfrac{d^2V}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dV}{dr} = \mu_1 V + \mu_2 U - \mu_3 V^2, \end{cases} \tag{10}$$

$$U(r_*) = a_1,\ U'(r_*) = b_1,\ V(r_*) = a_2,\ V'(r_*) = b_2, \tag{11}$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 – значения асимптотических функций (7) и их производных в точке r_*.

Проведем математическое исследование задачи (10), (11). Для этого сведем ее к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
U(r) &= a_1 + b_1 r_*^2 \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\int\limits_{r_*}^{r} s^2(\varepsilon_1 U(s) + \varepsilon_2 V(s) - \varepsilon_3 U^2(s))\,ds + \\
&\quad + \int\limits_{r_*}^{r} s(\varepsilon_1 U(s) + \varepsilon_2 V(s) - \varepsilon_3 U^2(s))\,ds, \\
V(r) &= a_2 + b_2 r_*^2 \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\int\limits_{r_*}^{r} s^2(\mu_1 V(s) + \mu_2 U(s) - \mu_3 V^2(s))\,ds + \\
&\quad + \int\limits_{r_*}^{r} s(\mu_1 V(s) + \mu_2 U(s) - \mu_3 V^2(s))\,ds.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Применяя к системе (12) принцип сжимающих отображений [3], получим локальную теорему существования решения задачи Коши (10), (11).

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

$$
\begin{gathered}
Q(r)\big[|\varepsilon_1| + 2R_1|\varepsilon_3|\big] < 1, \\
Q(r)\big[|\varepsilon_1| + 2R_1|\varepsilon_3|\big] + Q(r)\big[|\mu_1| + 2R_2|\mu_3|\big] + Q^2(r)|\varepsilon_2\mu_2| - \\
-Q^2(r)\big[|\varepsilon_1| + 2R_1|\varepsilon_3|\big]\big[|\mu_1| + 2R_2|\mu_3|\big] < 1, \\
|a_1| + \frac{|b_1|r_*|r - r_*|}{r} + Q(r)\big[|\varepsilon_1|R_1 + |\varepsilon_2|R_2 + |\varepsilon_3|R_1^2\big] \leqslant R_1, \\
|a_2| + \frac{|b_2|r_*|r - r_*|}{r} + Q(r)\big[|\mu_1|R_2 + |\mu_2|R_1 + |\mu_3|R_2^2\big] \leqslant R_2, \\
Q(r) \equiv \frac{1}{3r}\big|r^3 - r_*^3\big| + \frac{1}{2}\big|r^2 - r_*^2\big|.
\end{gathered}
$$

Тогда в области $|r - r_*| \leqslant \delta,\ 0 \leqslant |U(r)| \leqslant R_1,\ 0 \leqslant |V(r)| \leqslant R_2$, где δ – достаточно малое число, а $R_1,\ R_2$ – конечные положительные числа, система (12) имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений или численно.

Продолжая этот процесс, за конечное число шагов можно численно построить решение системы (10), (11) на отрезке $[0, r_*]$. При этом значения $U(0),\ V(0)$ подбираются так, чтобы графики трехмерных солитонов на отрезке $[0, r_*]$ гладким образом переходили в графики асимптотических функций (7). На рисунке представлены результаты численных расчетов. Отметим, что в точке $r = 0$ должны выполняться условия $U'(0) = 0,\ V'(0) = 0$.

Работа выполнена при поддержке программы INTAS грант № 03-51-4872.

Литература

[1] Gottwald G., Grimshaw R., Malomed B. Parametric envelop solitons in coupled Korteweg-de Vries equations // Physics Letters A. – 1997. – V.227. – P.47-54.

[2] Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов – М.: Физматлит, 2005. – 648 с.
[3] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: “Наука”, 1967. – 472 с.

К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ С ДИСКРЕТНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Жуков К.Г., Чечин Г.М.
Ростовский государственный университет
Ростов-на-Дону
e-mail: chechin@phys.rsu.ru

1. Основные понятия и постановка задачи. Развиваемый нами теоретико-групповой подход применим к широкому классу нелинейных ОДУ с дискретной симметрией. В настоящей работе он иллюстрируется на примере автономных систем уравнений второго порядка, которые описывают колебательные режимы механической системы с N степенями свободы:

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}). \tag{1}$$

Здесь вектор

$$\boldsymbol{X} = \{x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_N(t)\} \tag{2}$$

определяет отклонение системы из своего равновесного состояния $\boldsymbol{X}_0 = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 0\}$ в момент времени t, а вектор-функция $\boldsymbol{F} = \{f_1(\boldsymbol{X}),\ f_2(\boldsymbol{X}),\ \ldots,\ f_N(\boldsymbol{X})\}$ задает правые части динамических уравнений (1).

Будем рассматривать преобразования переменных

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \mathbf{M}(g) \cdot \boldsymbol{X}, \tag{3}$$

которые определяются $(N \times N)$ матрицами $\mathbf{M}(g)$, действующими в N-мерном векторном пространстве и образующими группу Γ_0. Легко показать, что условие инвариантности системы (1) относительно матричной группы Γ_0 можно записать в виде [1]

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{M}(g)\boldsymbol{X}) = \mathbf{M}(g) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \qquad \forall\ \mathbf{M}(g)\ \in\ \Gamma_0. \tag{4}$$

(На практике достаточно требовать выполнения этого условия лишь для генераторов группы Γ_0).

Различные динамические режимы в механической системе с группой симметрии (инвариантности) Γ_0 можно классифицировать по подгруппам группы Γ_0. Они отвечают *бушам* мод, теория которых была развита в [2, 3]. Для бушей мод характерны определенные связи между компонентами вектора состояния $\boldsymbol{X}(t)$. Например, при продольных колебаниях моноатомных цепочек могут существовать *точные* динамические режимы вида [4]:

$$\boldsymbol{X}^{(1)} = \{A(t),\ -A(t)\mid A(t),\ -A(t)\mid A(t),\ -A(t)\mid\ \ldots\} \tag{5}$$

и

$$\boldsymbol{X}^{(2)} = \{0,\ A(t),\ B(t),\ 0, -B(t), -A(t)\mid 0,\ A(t),\ B(t),\ 0, -B(t), -A(t)\mid\ \ldots\}. \tag{6}$$

Соотношение (5) определяет *одномерный* буш – колебательное состояние системы полностью описывается одной степенью свободы $A(t)$, для которой из системы (1) можно получить одно уравнение движения второго порядка. Это так называемая π-мода, для которой характерно, что соседние атомы колеблются в противофазе с одинаковыми амплитудами.

Соотношение (6) определяет *двумерный* буш, поскольку ему отвечает колебательное состояние, описываемое двумя степенями свободы, $A(t)$ и $B(t)$, для которых из уравнений (1) можно получить систему двух связанных динамических уравнений второго порядка.

В общем случае, m-мерный буш определяется N-мерным вектором $\boldsymbol{C}(t)$, который имеет m независимых компонент, полностью описывающих некоторый динамический режим в рассматриваемой механической системе.

Согласно стандартному рецепту для исследования линейной устойчивости динамического режима, необходимо линеаризовать исходную систему нелинейных уравнений (1) в окрестности этого режима и исследовать устойчивость нулевого решения полученной системы линейных ОДУ с переменными коэффициентами. С этой целью полагаем

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{C}(t) + \boldsymbol{y}(t), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{y}(t) = \{y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_N(t)\}$ – инфинитезимальный вектор, подставляем (7) в (1) и линеаризуем эту систему по отношению к компонентам вектора $\boldsymbol{y}(t)$. В результате этих операций получим

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \boldsymbol{y}, \tag{8}$$

где $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{X}}\Big|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}(t)}$ – соответствующая матрица Якоби.

Выполняя вышеуказанную процедуру для исследования устойчивости π-моды (5) в цепочке Ферми-Пасты-Улама α-типа (FPU-α) с периодическими граничными условиями, получим матрицу Якоби в виде

$$\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] = \mathbf{L} + 4A(t) \cdot \mathbf{M}, \tag{9}$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ две симметричные $N \times N$ матрицы. Для случая $N = 4$ эти матрицы коммутируют друг с другом, в силу чего существует ортогональное преобразование, с помощью которого обе матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ можно привести одновременно к диагональному виду. В результате такого преобразования

$$\mathbf{J}_{\text{нов}}(t) = \widetilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \mathbf{S} \tag{10}$$

матрица Якоби $\mathbf{J}_{\text{нов}}(t)$ становится диагональной в *любой момент времени* ($\widetilde{\mathbf{S}}$ – матрица, транспонированная по отношению к матрице $\mathbf{S}$). Это означает, что линеаризованная система $\ddot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \boldsymbol{y}$ полностью распадается на отдельные скалярные уравнения, в результате чего дальнейший анализ устойчивости упрощается кардинальным образом.

Однако, так бывает далеко не всегда. Например, при $N = 6$ матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ из уравнения (9) уже не коммутируют и, следовательно, не могут быть приведены к диагональному виду одновременно (с помощью одного и того же ортогонального преобразования). В связи с этим возникает вопрос о *максимально возможном* упрощении структуры матрицы Якоби и, как следствие, соответствующем расщеплении системы $\ddot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \boldsymbol{y}$ на независимые подсистемы. Ниже обсуждаются теоретико-групповые методы такого расщепления, которые в ряде случаев могут очень существенно упростить исследование устойчивости исходного динамического режима.

2. Теоретико-групповые методы расщепления линеаризованной системы. Действуя на вектор $\boldsymbol{C}(t)$ по очереди всеми матрицами $\mathbf{M}(g) \in \Gamma_0$, отберем те из них, которые не изменяют этот вектор, т. е. для которых имеет место соотношение

$$\mathbf{M}(g) \cdot \boldsymbol{C}(t) = \boldsymbol{C}(t). \tag{11}$$

Совокупность всех таких матриц, очевидно, образует некоторую группу $\hat{G}$ (стабилизатор вектора $\boldsymbol{C}(t)$), которая является подгруппой группы Γ_0 (при отсутствии каких-либо симметрийных связей между компонентами вектора $\boldsymbol{C}(t)$ эта подгруппа состоит только из одного единичного элемента).

В работе [1] доказана теорема, утверждающая, что линеаризованная в окрестности вектора $\boldsymbol{C}(t)$ система уравнений (8) инвариантна относительно группы $\hat{G}$, являющейся стабилизатором вектора $\boldsymbol{C}(t)$. Тогда из (4) следует, что все матрицы $\mathbf{M}(g)$, входящие в группу $\hat{G}$, коммутируют с матрицей Якоби $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)]$:

$$\mathbf{M}(g) \cdot \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \mathbf{M}(g), \qquad \forall \mathbf{M}(g) \in \hat{G}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь абстрактную группу G_0, изоморфную матричной группе Γ_0. В общем случае, группа G_0 имеет некоторое число матричных представлений разной размерности и группа Γ_0 является одним из них (размерности N).

Разложим представление Γ_0 группы G_0 (в общем случае, оно является приводимым) на *неприводимые представления* этой группы. Такое разложение осуществляется за счет соответствующего линейного преобразования базиса N-мерного векторного пространства, в котором действуют матрицы группы Γ_0. В итоге все матрицы группы Γ_0 принимают одинаковый блочно-диагональный вид. Согласно теореме Вигнера, любая матрица $\mathbf{D}$ (в нашем случае это матрица Якоби $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)]$), коммутирующая со всеми матрицами некоторого представления группы G_0, при вышеуказанном преобразовании базиса исходного векторного пространства также приобретает некоторую весьма специфическую блочную структуру. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть разложение приводимого представления Γ_0 группы G_0 на ее неприводимые представления (НП) Γ_j имеет в соответствующем базисе вид прямой суммы

$$\Gamma_0 = \sum_j^{\oplus} m_j \Gamma_j. \tag{13}$$

Здесь m_j есть число раз, которое НП Γ_j размерности n_j встречается в этом разложении. Согласно теореме Вигнера, матрица $\mathbf{D}$, коммутирующая со всеми матрицами представления Γ_0, приобретает в том же базисе следующий блок-диагональный вид

$$\mathbf{D} = \sum_j^{\oplus} \mathbf{D}_j. \tag{14}$$

Размерность каждого блока $\mathbf{D}_j$ в прямой сумме (14) равна $m_j \cdot n_j$, а сам этот блок состоит из подблоков, которые представляют собой матрицы, пропорциональные единичной матрице размерности n_j, повторяющиеся m_j раз вдоль строк и столбцов блока $\mathbf{D}_j$. Например, структура блока $\mathbf{D}_j$, который характеризуется числами $n_j = 3$ и $m_j = 2$, имеет вид

$$\mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} \mu_{11}\mathbf{I}_3 & \mu_{12}\mathbf{I}_3 \\ \mu_{21}\mathbf{I}_3 & \mu_{22}\mathbf{I}_3 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{I}_3$ — единичная матрица размерности 3.

С помощью теоремы Вигнера можно непосредственным образом найти схему расщепления линеаризованной системы $\ddot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \boldsymbol{y}$ на независимые подсистемы. Действительно, если приведение представления Γ_0 к блочно-диагональной форме (13) осуществляется с помощью ортогонального преобразования $\Gamma_0^{\text{нов}} = \widetilde{\mathbf{S}} \cdot \Gamma_0 \cdot \mathbf{S}$, то переход к новым переменным $\boldsymbol{y} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{y}_{\text{нов}}$ приводит рассматриваемую нами линеаризованную систему к виду

$$\ddot{\boldsymbol{y}}_{\text{нов}} = \left(\widetilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \mathbf{S}\right) \cdot \boldsymbol{y}_{\text{нов}}, \tag{16}$$

и поскольку $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)]$ коммутирует со всеми матрицами представления Γ_0, матрица $\widetilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \mathbf{S}$ принимает вид (14). Тогда ясно, что каждый блок $\mathbf{D}_j$ из разложения (14) для матрицы Якоби $\mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)]$ индуцирует независимую подсистему, в которую входят $m_j \cdot n_j$ дифференциальных уравнений. Более того, любая из этих подсистем *автоматически* распадается на n_j новых подсистем, состоящих из m_j уравнений каждая вследствие специфической структуры блока $\mathbf{D}_j$. Например, из структуры (15) блока $\mathbf{D}_j$ легко понять, что мы получим из системы (16) следующие три независимые системы уравнений вида $\ddot{\tilde{\boldsymbol{y}}} = \mathbf{M}(t) \cdot \tilde{\boldsymbol{y}}$ с одинаковой двумерной матрицей $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(t) & \mu_{12}(t) \\ \mu_{21}(t) & \mu_{22}(t) \end{pmatrix}$. Таким образом, размерность этих подсистем равна $m_j = 2$, а общее их число равно $n_j = 3$.

Нахождение матрицы ортогонального преобразования $\mathbf{S}$, которая приводит к расщеплению линеаризованной системы $\ddot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \boldsymbol{y}$ на независимые подсистемы, соответствующие разложению представления Γ_0 на НП группы G_0, представляет собой достаточно громоздкую вычислительную задачу. Для ее решения необходимо построение базисных векторов неприводимых представлений (см., например, [1, 4]), и мы не будем рассматривать этот вопрос в настоящей работе. С другой стороны, существует очень простой и быстрый метод нахождения *схем* вышеуказанного *расщепления*, т.е. определения на какое количество подсистем и каких именно размерностей распадается линеаризованная система $\ddot{\boldsymbol{y}} = \mathbf{J}[\boldsymbol{C}(t)] \cdot \boldsymbol{y}$. Для реализации этого метода необходимо знание не явного вида матриц неприводимых представлений Γ_j и приводимого представления Γ_0, а лишь их характеров. Тогда кратности вхождения m_j каждого НП Γ_j в представление Γ_0 (как уже отмечалось, эти числа определяют размерности независимых подсистем) находятся по известной формуле теории характеров:

$$m_j = \frac{1}{\|G_0\|} \sum_{g \in G_0} \chi_{\Gamma}(g) \bar{\chi}_j(g). \tag{17}$$

Здесь $\|G_0\|$ – порядок группы G_0 (число ее элементов), $\chi_{\Gamma}(g)$ и $\chi_j(g)$ – следы матриц приводимого представления Γ и НП Γ_j, которые сопоставлены элементу $g \in G_0$ ($\bar{\chi}_j(g)$ есть комплексно сопряженная величина по отношению к $\chi_j(g)$).

Для большинства важных для физических приложений групп симметрии имеются готовые таблицы характеров их неприводимых представлений, а для вычисления характера приводимого представления Γ существует достаточно эффективный метод, описанный, например, в [5] в связи с исследованием малых колебаний многоатомных молекул. Его суть заключается в том, что вклад в $\chi_{\Gamma}(g)$ дают лишь те атомы, положение которых не изменяется в результате действия на систему элемента симметрии g, причем такой вклад определяется следом трехмерной матрицы, сопоставленной этому элементу симметрии.

До сих пор мы полагали, что группа Γ_0 преобразований симметрии (инвариантности) исходной системы нелинейных уравнений (1) известна. На практике полезную информацию о Γ_0 можно получить из анализа группы симметрии равновесного состояния рассматриваемой механической системы, поскольку она индуцирует некоторую группу преобразований степеней свободы, характеризующих отклонение от состояния равновесия, и эта группа не ниже полной группы Γ_0 всех преобразований инвариантности системы (1).

Проиллюстрируем эту идею следующим примером. Рассмотрим продольные колебания нелинейной моноатомной цепочки с периодическими граничными условиями. Будем предполагать, что в состоянии равновесия расстояние между соседними ее атомами равно a, а общее число атомов цепочки равно N.

Группой симметрии этого равновесного состояния является группа диэдра

$$D_N = T_N \oplus T_N \cdot \hat{i}, \tag{18}$$

состоящая из двух классов смежности T_N и $T_N \cdot \hat{i}$. Здесь T_N является циклической группой порядка N. Порядок группы D_N равен $2N$. Группа диэдра D_N может быть определена двумя своими генераторами: оператором $\hat{a}$ сдвига цепочки на равновесное межатомное расстояние и оператором $\hat{i}$ – инверсии относительно центра цепочки. Между этими генераторами существуют три определяющих соотношения:

$$\hat{a}^N = \hat{E}, \quad \hat{i}^2 = \hat{E}, \quad \hat{i}\hat{a} = \hat{a}^{-1}\hat{i} \tag{19}$$

($\hat{E}$ – единичный оператор).

Операторы $\hat{a}$ и $\hat{i}$ следующим образом действуют на вектор $\boldsymbol{X}(t)$, который определяет отклонения всех N атомов цепочки в момент времени t из своих положений равновесия (2):

$$\hat{a}\boldsymbol{X}(t) = \{x_N(t),\ x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_{N-1}(t)\}, \tag{20}$$

$$\hat{i}\boldsymbol{X}(t) = \{-x_N(t),\ -x_{N-1}(t),\ \ldots,\ -x_2(t),\ -x_1(t)\}. \tag{21}$$

Группа диэдра D_N определяется, исходя из чисто геометрических соображений по равновесной конфигурации исходной системы. Такой группой симметрии обладает, например, цепочка FPU-α.

С другой стороны, учет конкретных сил межатомного взаимодействия может привести к *расширению* этой группы инвариантности. Например, для цепочек с *четным* потенциалом межатомного взаимодействия (таковой является цепочка FPU-β) одновременное изменение знаков всех атомных смещений (без перестановки самих атомов) не изменяет гамильтониан цепочки. Это означает, что соответствующий этому преобразованию оператор $\hat{u}$ можно рассматривать как еще один дополнительный генератор новой, более широкой группы симметрии $\widetilde{D}_N \supset D_N$. Его действие на вектор $\boldsymbol{X}(t)$ определяется формулой

$$\hat{u}\boldsymbol{X}(t) = \{-x_1(t),\ -x_2(t),\ \ldots,\ -x_N(t)\}. \tag{22}$$

Очевидно, что оператор $\hat{u}$ коммутирует со всеми элементами группы D_N, и, таким образом, мы должны добавить к определяющим соотношениям (19) для генераторов группы D_N следующие три новых соотношения:

$$\hat{u}^2 = \hat{E}, \quad \hat{a}\hat{u} = \hat{u}\hat{a}, \quad \hat{i}\hat{u} = \hat{u}\hat{i}. \tag{23}$$

В своей совокупности определяющие соотношения (19) и (23) полностью описывают рассматриваемую группу инвариантности $\widetilde{D}_N$.

Таким образом, для нелинейной моноатомной цепочки с четным потенциалом в качестве абстрактной группы G_0 можно выбрать группу $\widetilde{D}_N$. При этом ее представление Γ_0 определяется $N \times N$ матрицами генераторов $\mathbf{M}(a)$, $\mathbf{M}(i)$, $\mathbf{M}(u)$, действие которых на вектор $\boldsymbol{X}(t)$ эквивалентно действию операторов $\hat{a}$, $\hat{i}$ и $\hat{u}$, соответственно:

$$\hat{a}\boldsymbol{X}(t) = \mathbf{M}(a) \cdot \boldsymbol{X}(t), \qquad \hat{i}\boldsymbol{X}(t) = \mathbf{M}(i) \cdot \boldsymbol{X}(t), \qquad \hat{u}\boldsymbol{X}(t) = \mathbf{M}(u) \cdot \boldsymbol{X}(t).$$

Уравнения движения (1) для цепочки FPU-β (по определению, учитывается только взаимодействие между ближайшими соседями) имеют вид

$$\ddot{x}_i = f(x_{i+1} - x_i) - f(x_i - x_{i-1}) \qquad (x_0(t) = x_N(t), \quad x_{N+1}(t) = x_1(t))$$

Здесь $f(\Delta x) = \Delta x + \beta(\Delta x)^3$ – сила взаимодействия между соседними частицами цепочки, а Δx – изменение межатомного расстояния в момент времени t (в механической интерпретации Δx является деформацией пружины, связывающей соседние частицы).

3. Пример. В качестве примера применения вышеописанного метода рассмотрим устойчивость двумерного буша B$[\hat{a}^4,\ \hat{a}^2\hat{u}]$ в цепочке FPU-β. Согласно [4], этому бушу отвечает следующий набор атомных смещений:

$$\boldsymbol{X}(t) = \{x_1(t),\ x_2(t), -x_1(t), -x_2(t) \mid x_1(t),\ x_2(t), -x_1(t), -x_2(t) \mid \ldots\}. \qquad (24)$$

Ячейка повторяемости нашего одномерного кристалла в колебательном состоянии, соответствующем этому бушу, включает 4 атома, в силу чего такой динамический режим может существовать только для цепочки, у которой число атомов делится нацело на 4. Проведенный теоретико-групповой анализ показал, что линеаризованная система для буша (24) в случае цепочки из N атомов ($N \mod 4 = 0$) распадается на 4 отдельных скалярных уравнения и $(N-4)/2$ двумерных систем уравнений.

На рисунке приведена диаграмма устойчивости буша (24) в FPU-β цепочке из $N = 12$ атомов [4]. Она представляет собой плоское сечение четырехмерной области устойчивости в пространстве начальных условий $\nu_1(0)$, $\nu_2(0)$, $\dot{\nu}_1(0)$, $\dot{\nu}_2(0)$, где $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ суть две моды рассматриваемого буша. При построении этого рисунка мы полагали $\dot{\nu}_1(0) = 0$, $\dot{\nu}_2(0) = 0$ и изменяли $\nu_1(0)$ и $\nu_2(0)$ в некоторых интервалах около их нулевых значений. Область устойчивости, показанная черным цветом, напоминает рыцарский крест со скрещенными шпагами, последние соответствуют двум одномерным бушам, которые являются частными случаями ($\nu_2(t) = \pm\nu_1(t)$) двумерного буша B$[\hat{a}^4, \hat{a}^2\hat{u}]$.

Литература

[1] G.M.Chechin, K.G.Zhukov, arXiv:nlin.PS/0506013.

[2] В.П.Сахненко, Г.М.Чечин // ДАН **330**, (1993), 308; ДАН **338**, (1994), 42.

[3] G.M.Chechin and V.P.Sakhnenko // Physica D **117**, (1998), 43.

[4] G.M.Chechin, D.S.Ryabov, and K.G.Zhukov // Physica D **203**, (2005), 121.

[5] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: "Наука", 1974.

О ГРУППОВОМ АНАЛИЗЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зайцев В.Ф., Павлюков К.В.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Санкт-Петербург
e-mail: valentin_zaitsev@mail.ru, kostya_pavlukov@mail.ru

Рассматривается решение прямой и обратной задач группового анализа для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'' & = & F(x,y,z), \\ z'' & = & G(x,y,z), \end{array} \right. \tag{1}$$

допускающей оператор группы Ли точечных преобразований

$$X = \xi(x,y,z)\partial_x + \eta(x,y,z)\partial_y + \zeta(x,y,z)\partial_z. \tag{2}$$

Применяя алгоритм классического группового анализа к системе (1), находим, что координаты оператора (2) имеют вид:

$$\xi = 2a, \tag{3}$$

$$\eta = (a' + \alpha)y + \beta z + b, \tag{4}$$

$$\zeta = (a' + \gamma)z + \delta y + c, \tag{5}$$

где $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c = c(x)$ – произвольные функции, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные постоянные, и при этом выполняются условия

$$a'''y + b'' + (\alpha - 3a')F + \beta G - 2aF_x - [(a' + \alpha)y + \beta z + b]F_y - \\ - [(a' + \gamma)z + \delta z + c]F_z = 0, \quad (6)$$

$$a'''z + c'' + (\gamma - 3a')G + \delta F - 2aG_x - [(a' + \alpha)y + \beta z + b]G_y - \\ - [(a' + \gamma)z + \delta z + c]G_z = 0. \quad (7)$$

Решение системы уравнений (6), (7) относительно F, G сводится к решению системы двух линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка от одной неизвестной функции каждое:

$$2af_x + [(a' + \alpha)y + \beta z + b]f_y + [(a' + \gamma)z + \delta y + c]f_z + \\ + [a'''y + b'' + (\alpha - 3a')F + \beta G]f_F + \\ + [a'''z + c'' + (\gamma - 3a')G + \delta F]f_G = 0, \quad (8)$$

$$2ag_x + [(a' + \alpha)y + \beta z + b]g_y + [(a' + \gamma)z + \delta y + c]g_z + \\ + [a'''y + b'' + (\alpha - 3a')F + \beta F]g_F + \\ + [a'''z + c'' + (\gamma - 3a')G + \delta F]g_G = 0, \quad (9)$$

где система

$$\begin{cases} f(x, y, z, F, G) = 0, \\ g(x, y, z, F, G) = 0 \end{cases}$$

разрешима относительно F, G – решений системы (6), (7). Так как уравнения (8), (9) одинаковые с точностью до f и g, то решение обратной задачи можно свести к рассмотрению одного линейного уравнения с частными производными первого порядка одной неизвестной функции.

Характеристическое уравнения для УЧП (8) имеет вид:

$$\frac{dx}{2a} = \frac{dy}{(a' + \alpha)y + \beta z + b} = \frac{dz}{(a' + \gamma)z + \delta y + c} = \\ = \frac{dF}{a'''y + b'' + (\alpha - 3a')F + \beta G} = \frac{dG}{a'''z + c'' + (\gamma - 3a')G + \delta F}. \quad (10)$$

Рассмотрение первых трёх отношений уравнения (10) относительно функций $y(x)$ и $z(x)$, приводит к ОДУ 2-го порядка

$$-4a^2y'' + 2a(\alpha + \gamma)y' + (2aa'' - \alpha\gamma - \gamma a' - \alpha a' - (a')^2 + \beta\delta)y + \\ + \beta c - \gamma b - a'b + 2ab' = 0, \quad (11)$$

соответствующее однородное уравнение которого

$$-4a^2y'' + 2a(\alpha + \gamma)y' + (2aa'' - \alpha\gamma - \gamma a' - \alpha a' - (a')^2 + \beta\delta)y = 0 \quad (12)$$

приводится к каноническому виду

$$u'' = \frac{8aa'' - 4(a')^2 + \alpha^2 + \gamma^2 + 4\beta\delta - 2\alpha\gamma}{16a^2} u. \tag{13}$$

В тех случаях, когда удаётся найти $y(x)$ из (11), $z(x)$ находится по формуле

$$z = \frac{1}{\beta}\big(2ay' - (\alpha + a')y - b\big). \tag{14}$$

Рассмотрим частный случай, в котором уравнение (13) может быть проинтегрировано в квадратурах. Положим $a = (a_1x + a_0)^{2/5}$ и $\alpha^2 + \gamma^2 + 4\beta\delta - 2\alpha\gamma = 0$, тогда уравнение (13) принимает вид

$$u'' = \frac{h''}{h} u, \tag{15}$$

где $h = 16(a_1x + a_0)^{4/5}$, a_1, a_0 – произвольные постоянные.

Взяв в качестве частного решения уравнения (15) $u = 16(a_1x + a_0)^{4/5}$, находим общее решение (15):

$$u(x) = 16C_1(a_1x + a_0)^{\frac{4}{5}} - \frac{5C_2}{48a_1}(a_1x + a_0)^{\frac{1}{5}}, \tag{16}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Уравнение (12) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{gathered} 20(a_1x + a_0)^{\frac{7}{5}} y'' - 10(\alpha + \gamma)(a_1x + a_0)y' + \Big[5(a_1x + a_0)^{\frac{7}{5}} + \\ +5(\alpha\gamma - \beta\delta)(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}} - 4a_1(a_1x + a_0)^{\frac{2}{5}} + 2a_1(\alpha + \gamma)\Big] y = 0 \end{gathered} \tag{17}$$

Зная общее решение канонического уравнения (13), находим общее решение уравнения (17):

$$y(x) = e^{\frac{5(\alpha+\beta)(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}} (a_1x + a_0)^{\frac{1}{5}} \left[16C_1(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}} - \frac{5C_2}{48a_1}\right]. \tag{18}$$

Уравнение (11) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{gathered} 20(a_1x + a_0)^{\frac{7}{5}} y'' - 10(\alpha + \gamma)(a_1x + a_0)y' + \\ + (5(a_1x + a_0)^{\frac{7}{5}} + 5\Big[\alpha\gamma - \beta\delta)(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}} - 4a_1(a_1x + a_0)^{\frac{2}{5}} + \\ +2a_1(\alpha + \gamma)\Big] y + 5(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}}(\gamma b - \beta c) - 10b'(a_1x + a_0) + 2a_1 b = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Зная общее решение однородного уравнения (17), находим общее решение неоднородного уравнения (19)

$$\begin{gathered} y(x) = \frac{(a_1x + a_0)^{\frac{1}{5}}}{48a_1} e^{\frac{5(\alpha+\beta)(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}} \Bigg[768C_1a_1(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}} - 5C_2 + \\ +4\int I_1\,dx - 4(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}} \int \frac{I_1}{(a_1x + a_0)^{\frac{3}{5}}}\,dx\Bigg], \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$I_1 = e^{-\frac{5(\alpha+\beta)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}} \frac{5(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}(\gamma b - \beta c) + 2a_1b - 10b'(a_1x+a_0)}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}. \qquad (21)$$

По формуле (14) находим $z(x)$:

$$z(x) = -\frac{e^{\frac{5(\alpha+\beta)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{1}{5}}}{480a_1\beta}\Bigg\{C_1a_1\left[3840(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}(\alpha-\gamma) - 9216a_1\right] +$$

$$+ 25C_2(\gamma-\alpha) + \left[20(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}(\alpha-\gamma) - 48a_1\right]\int \frac{I_1}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}\,dx +$$

$$+ 20(\gamma-\alpha)\int I_1\,dx\Bigg\} - \frac{b}{\beta}. \qquad (22)$$

Из формул (20) и (22) находим выражения для C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}}{192a_1(a_1x+a_0)^{\frac{1}{5}}}\Bigg[10\beta z + 10b +$$

$$+5(\alpha-\gamma)y - e^{\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{1}{5}}\int\frac{I_1}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}\,dx\Bigg], \qquad (23)$$

$$C_2 = \frac{4e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}}{5(a_1x+a_0)^{\frac{1}{5}}}\Bigg[(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}(10\beta z + 10b + 5(\alpha-\gamma)y) - 12a_1y -$$

$$-e^{\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{1}{5}}\int I_1\,dx\Bigg]. \qquad (24)$$

Подставив найденные зависимости $y = y(x)$ и $z = z(x)$ в уравнение (10), получаем уравнения для нахождения F и G, которые теперь можно считать функциями только переменной x.

Из первого и последних двух отношений уравнения (10) получаем уравнение для нахождения F:

$$-4a^2F''_{xx} + 2a(\alpha+\gamma-8a')F'_x + (3a'(\alpha+\gamma) + \beta\delta - 6aa'' - 9(a')^2 - \alpha\gamma)F +$$
$$+ 2a'''ay' + (3a'a''' - \gamma a''' + 2aa^{IV})y + \beta a'''z + 2ab''' + b''(3a'-\gamma) + \beta c'' = 0 \quad (25)$$

и выражение для G

$$G = \frac{1}{\beta}\left[2aF'_x + (3a'-\alpha)F - a'''y - b''\right], \qquad (26)$$

Подставим в уравнение (25) $y = y(x)$ и $z = z(x)$ по формулам (20) и (22) и учтём, что в рассматриваемом случае

$$\delta = \frac{2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2}{4\beta}.$$

При этом уравнение (25) преобразуется к следующему виду:

$$
\begin{gathered}
0,0001(a_1x+a_0)^{-\frac{19}{5}}F''(x)+\\
+1000(a_1x+a_0)^{\frac{14}{5}}(16a_1-5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}})F'(x)+\\
+125(a_1x+a_0)^{\frac{12}{5}}(\alpha+\gamma)(5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}-24a_1)F(x)+\\
+960a_1^3(a_1x+a_0)^{\frac{2}{5}}b-e^{\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}\Bigg[360a_1^3C_2-288a_1^3\int I_1\,dx-\\
-18432a_1^4(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}C_1+96a_1^3(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}\int\frac{I_1}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}\,dx\Bigg]+\\
+2500(a_1x+a_0)^3(\gamma b''-\beta c'')-\\
-1000(a_1x+a_0)^{\frac{12}{5}}(3a_1b''+5b'''(a_1x+a_0))=0. \quad (27)
\end{gathered}
$$

Решив (27), получаем:

$$
\begin{gathered}
F(x)=\frac{a_1x+a_0}{1500a_1}\Bigg\{1500a_1e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}(C_4+(a_1x+a_0)^{\frac{4}{5}}C_3)+\\
+e^{\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}\left[\int I_2\,dx-(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}\int\frac{I_2}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}\,dx\right]\Bigg\}, \quad (28)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
I_2=(a_1x+a_0)^{\frac{-11}{5}}e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}\Bigg\{625(a_1x+a_0)^3\Big[\gamma b''-\beta c''-\\
-2b'''(a_1x+a_0)^{\frac{2}{5}}\Big]+a_1(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}\big[240b-750b''(a_1x+a_0)\big]+\\
+a_1^3e^{\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}\Bigg[4608a_1(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}C_1-90C_2+\\
+72\int I_1\,dx-24(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}\int\frac{I_1}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}\,dx\Bigg]\Bigg\}, \quad (29)
\end{gathered}
$$

C_3, C_4 – произвольные постоянные.

По формуле (26) находим G:

$$
\begin{gathered}
G(x)=-\frac{(a_1x+a_0)^{\frac{12}{5}}}{1500a_1\beta}\Bigg\{480a_1^3e^{\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}\Bigg[\int I_1\,dx-\\
-(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}\int\frac{I_1}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}\,dx\Bigg]+\\
+5(a_1x+a_0)^{\frac{17}{5}}e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}}\int\frac{I_2}{(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}\left[4a_1-(3\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}\right]dx+
\end{gathered}
$$

$$+ (a_1x+a_0)^{\frac{14}{5}} e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}} \int I_2 \left[5(3\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}} - 32a_1\right] dx+$$

$$+ 1500a_1b''(a_1x+a_0)^{\frac{12}{5}} + a_1^3 e^{\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}} \left[92160a_1(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}C_1 - 600C_2\right]+$$

$$+ a_1(a_1x+a_0)^{\frac{17}{5}} e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}} \left[7500(3\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}} - 72000a_1\right] C_3+$$

$$\left. + a_1(a_1x+a_0)^{\frac{14}{5}} e^{-\frac{5(\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}}}{12a_1}} \left[7500(3\alpha+\gamma)(a_1x+a_0)^{\frac{3}{5}} - 48000a_1\right] C_4 \right\}. \quad (30)$$

Для получения явной зависимости F и G от x, y и z нужно подставить в (28) и (30) выражеиня для C_1 и C_2. Не трудно убедиться в том, что в рассматриваемом случае F и G имеют следующую структуру:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)z, \\ G(x,y,z) = g_0(x) + g_1(x)y + g_2(x)z. \end{cases}$$

Таким образом, решение прямой задачи группового анализа для системы (1) и оператора (2) сводится к рассмотрению условий совместности (6), (7) для координат (3)–(5) оператора. Решение обратной задачи сводится к решению двух линейных неоднородных ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами. Для получения зависимости функций F и G от x, y и z нужно произвольные постоянные, получившиеся при решении уравнений (11), (14), выразить через x, y и z и подставить в решения уравнений (25), (26).

Полученный результат показывает, что система (1) “бедна” точечными симметриями. Групповой анализ приводит к довольно жестким условиям, которым должны удовлетворять правые части уравнений системы. Даже в случае автономной системы ($F = F(y,z)$, $G = G(y,z)$) в общем случае мы получаем дополнительно тривиальную симметрию $X = \partial_x$. Поэтому для симметрийного анализа системы (1) необходимо разработать эффективный алгоритм поиска нетривиальных первых интегралов и нелокальных симметрий.

О ДВУХМОДОВЫХ БИФУРКАЦИЯХ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ СЛАБО НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Д.В. Костин
(Воронежский государственный университет)
e-mail: dvkostin@rambler.ru

Анализ двухмодовых бифуркаций равновесных конфигураций однородной упругой балки на упругом основании, проведенный ранее Б.М.Даринским и

Ю.И.Сапроновым, распространен в данной работе на случай слабо неоднородной балки.

Случай однородной балки. Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. [1], Thompson J.M.T., Stewart H.B., Бардин Б.С., Фурта С.Д. [2] и др. Простейшая нелинейная модель движений однородной балки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w – прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, заданное на оси x).

Как известно, первый шаг в изучении такой задачи – отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0. \qquad (1)$$

Если рассмотреть стандартные краевые условия

$$w(0) = w(T) = w''(0) = w''(T) = 0, \qquad (2)$$

то полученная граничная задача может допускать 2−мерные вырождения, порождающие 2−модовые бифуркации с интересными геометрическими и физическими эффектами [3] – [5]. Ее полное решение сводится (конечномерной редукцией) к описанию экстремалей 3−параметрического семейства полиномов от двух переменных [3]. В случае слабо неоднородной балки также допускается аналогичное сведение, но при этом в полиноме появляется дополнительное слагаемое, дающее дополнительные бифуркационные эффекты.

Уравнение (1) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V(p, \varrho, \alpha) = \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \qquad (3)$$

Анализ бифуркационных эффектов осуществляется в случае 2−модовой потери устойчивости посредством редукции Ляпунова – Шмидта к ключевой функции (от двух переменных) [3]

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w:\ \langle w, e_1 \rangle = \xi_1,\ \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \qquad (4)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2),\ \delta = (\delta_1, \delta_2)$, а $\{e_1, e_2\}$ – моды бифуркации:

$$e_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x), \qquad e_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x).$$

Функционал (3) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2:

$$J_2(p)(x) = p(\pi - x), \quad J_1 = -J_2.$$

Следовательно, функция (4) обладает симметрией прямоугольника:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2),$$

из которой вытекает справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \tag{5}$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ – ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2. Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$W(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}\left(A\xi_1^4 + 2B\xi_1^2\xi_2^2 + C\xi_2^4\right) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \tag{6}$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \delta_2,\ \lambda_2 = \delta_1 - 4\delta_2,$$

$$A = \int\limits_0^\pi e_1^4 dx = \frac{3}{2\pi}\ , \quad B = \int\limits_0^\pi e_1^2 e_2^2 dx = \frac{3}{\pi}\ , \quad C = \int\limits_0^\pi e_2^4 dx = \frac{3}{2\pi}\ .$$

Сократив функцию (6) на множитель $\frac{3}{2\pi}$, получим функцию с нормализованной главной частью:

$$\tilde{W}(\xi, \delta) = \tilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\tilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}\left(\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4\right).$$

"Геометрический сюжет" бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\tilde{W}(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\tilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой возмущенную двумерную сборку, четную по каждой переменной с коэффициентом двойного отношения $a > 2$.

Рис.1

В этом случае появляются только следующие bif-расклады критических точек: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$ [3] (компонента l_k строки (l_0, l_1, l_2)

равна количеству критических точек в рассматриваемом раскладе с индексом Морса k).

Случай слабо неоднородной балки.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(q\frac{d^2w}{dx^2}\right)+\kappa\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha w+w^3=0, \qquad q(x)=1+\varepsilon\gamma(x), \tag{7}$$

где ε – малый параметр. Уравнение (7) рассматривается на отрезке $[0,\pi]$ числовой оси при краевых условиях (2) (ниже полагаем $T=2\pi$)

Конфигурации, соответствующие экстремалям функционала

$$V(w,q,\kappa,\alpha)=\int\limits_0^\pi\left(\frac{1}{2}\left(q\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2-\kappa\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\alpha w^2\right)+\frac{w^4}{4}\right)dx. \tag{8}$$

Наличие "весового" множителя q не позволяет применять исследовательскую схему Даринского – Сапронова, так как в этом случае нет постоянных мод бифуркации. Изучение решений краевой задачи (7) – (2) также можно осуществить посредством редукции Ляпунова – Шмидта к ключевой функции

$$W(\xi,\delta)=\inf_{p:\ \langle p,\widetilde{e}_1\rangle=\xi_1,\ \langle p,\widetilde{e}_2\rangle=\xi_2} V(p,\alpha_1+\delta_1,\kappa_1+\delta_2), \tag{9}$$

где $\{\widetilde{e}_k\}$ – некоторые "возмущения" рассмотренных выше мод бифуркации:

$$\widetilde{e}_k=e_k+\varepsilon h_k+o(\varepsilon),$$

$\widetilde{e}_1,\ \widetilde{e}_2$ — базис в 2−мерном инвариантном корневом подпространстве оператора Гессе (функционала (8)) $\mathcal{H}=\mathcal{A}h+\varepsilon\mathcal{B}h$ в нуле, где

$$\mathcal{A}:=\frac{d^4}{dx^4}+\kappa\frac{d^2w}{dx^2}+\alpha I, \quad \mathcal{B}:=\frac{d^2}{dx^2}\left(\gamma\frac{d^2w}{dx^2}\right).$$

$$e_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx).$$

Заметим, что элементы $\widetilde{e}_k$ не являються собственными функциями оператора $\mathcal{H}$.

Существенная техническая трудность в построении главной части ключевой функции (9) состоит в построении векторных коэффициентов h_k. Их вычислительние можно проводить на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора, приведенной в монографии В.П.Маслова [6].

Итак, вместо собственных функций мы рассматриваем такие $\widetilde{e}_j(\lambda)$, $j=1,\,2$, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)\widetilde{e}_j(\lambda)=\sum_k\alpha_{jk}(\lambda)\,\widetilde{e}_k(\lambda). \tag{10}$$

Важным сопутствующим обстоятельством в данном подходе является то, что входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\lambda)$, $\widetilde{e}_j(\lambda)$ будут гладко зависеть от λ. В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\widetilde{e}_k(\lambda)\ :=\ \mathbf{P}(\lambda)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\lambda) \; = \; \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\ell} \mathcal{R}(\lambda, z) dz \tag{11}$$

– ортопроектор на двумерное корневое подпространство, ℓ – окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ – резольвента:

$$\mathcal{R}(\lambda, z) = ((\mathcal{A} + \varepsilon\mathcal{B} - zI)^{-1} .$$

Таким образом,

$$\widetilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon), \tag{12}$$

где

$$h_k = \mathcal{M} e_k, \tag{13}$$

$$\mathcal{M} \; := \; \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz. \tag{14}$$

Теорема 1. *Возмущенные корневые векторы $\widetilde{e}_k$, $k = 1, 2$, можно построить в виде (12), где h_k определяются соотношениями (13) – (14).*

Теперь, когда известны первые асимптотики корневых векторов $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, можно построить главную часть ключевой функции.

Теорема 2. *Для ключевой функции $\tilde{W}$ имеет место представление*

$$\tilde{W}(\xi, \delta) = \frac{1}{2} \left(\widetilde{\delta}_1 \, \xi_1^2 + \widetilde{\delta}_2 \, \xi_2^2 + 2 \, \widetilde{\delta}_3 \, \xi_1 \xi_2 \right) + \frac{1}{4} \left(A\xi_1^4 + 2B\xi_1^2\xi_2^2 + C\xi_2^4 \right) +$$

$$o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4) O(\delta, \varepsilon) + o(\varepsilon),$$

где

$$A = C = \int\limits_0^{\pi} e_1^4 dx = \frac{3}{2\pi}, \quad B = \int\limits_0^{\pi} e_1^2 e_2^2 dx = \frac{3}{\pi}.$$

$\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2, \widetilde{\delta}_3$ – линейные функции от закритических приращений параметров κ, α и параметра ε.

По сравнению с функцией W здесь появилось дополнительное слагаемое $\widetilde{\delta}_3 \, \xi_1 \xi_2$, разрушающее симметрию прямоугольника.

Геометрия каустики полностью определяется каустикой ключевой функции. Вычисления, проведенные в среде Maple дали следующие плоские сечения дискриминантного множества

Литература

[1] Мітропольский Ю.О., Мосеенков Б.I. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). Видавництво Київського університету. 1961. – 123 п.

Рис.2

[2] Бардин Б.С., Фурта С.Д. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании // Актуальные проблемы классической и небесной механики. – М.: Эльф. – 1998. – С.13-22.

[3] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Бифуркации экстремалей вблизи особенности многомерной сборки // Известия ВУЗов. Математика. Т. 2. – Казань: Форт-Диалог, 1997. – С. 35-46.

[4] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. О двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка // Понтрягинские чтения – XI. Сборник трудов. Часть 1. Воронеж, ВГУ. 2000. С.57-64.

[5] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений // Современная математика и ее приложения. – Тбилиси. 2003. Т.7. – С.72-86.

[6] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. – М.: Наука. 1988. – 312 с.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ БЕЗ ОСОБЕННОСТЕЙ НА ПРЯМОЙ ЗВУКОВОЙ ЛИНИИ

Курмаева К.В.

Уральский государственный университет путей сообщения

Екатеринбург

Данная работа посвящена построению семейства автомодельных решений без особенностей для трансзвукового уравнения газовой динамики Кармана, записанного в безразмерном виде для симметрического случая

$$\Phi_{rr} + \frac{\nu}{r}\Phi_r = \Phi_z \Phi_{zz}, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – поперечная координата (расстояние от плоскости или от оси симметрии сопла); $\Phi = \Phi(r, z)$; ν – параметр симметрии (для плоской – $\nu = 0$, для осевой – $\nu = 1$).

Для данного уравнения доказано, если скорость ускорения Φ_{zzz} газа в центре течения отлична от нуля, то звуковая линия перехода из дозвуковой области в сверхзвуковую является прямой, содержащей особые точки, соответствующие обращению потенциала $\Phi = \Phi(r, z)$ в бесконечность, как в плоском [1], так и в осесимметрическом случае [2].

В [1] высказано предположение о возможности отсутствия особых точек на линии перехода через скорость звука в трансзвуковом течении, если скорость ускорения газа в центре течения равна нулю. Исследуем это утверждение в случае осевой симметрии, трактуя его в смысле существования аналитического решения уравнения (1) $\Phi(r, z)$, имеющего радиус сходимости, стремящийся в бесконечность при стремлении продольной переменной z к нулевому значению, что на практике означает возможность построения сопел сколь угодно большого радиуса за счет, может быть, соответствующего уменьшения длины сопла.

Соответствующее решение уравнения (1) будем рассматривать в виде ряда

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) r^n, \tag{2}$$

в силу аналитичности решения обратной задачи трансзвукового сопла [1, 3]. В ряде (2) нулевым коэффициентом, характеризующим распределение скорости газа на оси симметрии, положим

$$\Phi_0(z) = Az^s, \tag{3}$$

Параметр s определим как степень заторможенности течения газа. Исследование аналитического решения уравнения (1) в окрестности $z = 0$, показало, что первые три коэффициента ряда для $\Phi_0(z)$ – нули. В физическом понимании это можно трактовать как равенство нулю скорости ускорения газа в центре течения, что влечет за собой прямолинейность звуковой линии перехода. Механически это означает более плавный переход от дозвуковой к сверхзвуковой области. Если же занулить большее количество коэффициентов ряда, то мы еще более затораживаем поток газа с целью получения еще более плавного перехода из дозвукового течения в сверхзвуковую. Возникает вопрос, можно ли это сделать без появления особенностей на плоскости звукового перехода? Для всякой ли степени s это возможно? Дальнейшее изложение посвящено построению данного решения..

Без ограничения общности положим

$$A = 1. \tag{4}$$

В силу условия осевой симметрии $\Phi_r = 0$ первый коэффициент ряда (2) определяется

$$\Phi_1(z) = 0. \tag{5}$$

Домножим обе части уравнения (1) на r^2 и получим

$$r^2\Phi_{rr} + \nu r\Phi_r = r^2\Phi_z\Phi_{zz}. \tag{6}$$

После подстановки ряда (2) в уравнение (6) получим рекуррентное соотношение на коэфициенты ряда (6) при неотрицательных степенях r^n

$$n(n-1)\Phi_n(z) + \nu n\Phi_n(z) = \sum_{k+l=n-2} \dot{\Phi}_k(z)\ddot{\Phi}_l(z), \tag{7}$$

здесь точка обозначает производную по z.

При $\quad n = 2:$

$$2\Phi_2(z) + 2\nu\Phi_2(z) = \dot{\Phi}_0(z)\ddot{\Phi}_0(z).$$

Подставляя соответствующие производные $\Phi_0(z)$ получим выражение для второго коэффициента ряда (2) $\Phi_2(z)$

$$\Phi_2(z) = \frac{s(s-1)}{2(\nu+1)}z^{2s-3}. \tag{8}$$

При $\quad n = 3:$

$$6\Phi_3(z) + 3\nu\Phi_3(z) = \dot{\Phi}_0(z)\ddot{\Phi}_1(z) + \dot{\Phi}_1(z)\ddot{\Phi}_0(z),$$

откуда, учитывая (5), получим

$$\Phi_3(z) = 0. \tag{9}$$

Докажем по индукции, что $\Phi_n(z) \equiv 0$ для любого нечетного n. Выше получены равенства (5), (9) – база индукции. Для проведения шага индукции предположим, что $\Phi_j(z) \equiv 0$ при всех нечетных номерах j, которые меньше данного n, то есть при $j < n$. Далее, при любом нечетном n в правой части выражения (7) имеем, что $k, l < n$ – номера множителей $\dot{\Phi}_k(z), \ddot{\Phi}_l(z)$, причем одно из них будет нечетным. Пусть k – нечетное, тогда по предположению индукции имеем $\Phi_k(z) \equiv 0$, то есть $\dot{\Phi}_k(z) = 0$, следовательно, $\dot{\Phi}_k(z)\ddot{\Phi}_l(z) = 0$. Если же l будет нечетным, то по предположению индукции имеем $\Phi_l(z) \equiv 0$, так как $l < n$, и тогда $\ddot{\Phi}_l(z) = 0$, то есть $\dot{\Phi}_k(z)\ddot{\Phi}_l(z) = 0$. Выразив $\Phi_n(z)$ из (7) получаем, что

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{n(n-1)+\nu n}Z, \quad \text{где} \;\; Z = \sum_{k+l=n-2} \dot{\Phi}_k(z)\ddot{\Phi}_l(z).$$

Замечаем $Z = 0$ как сумма нулевых слагаемых, значит и $\Phi_n(z) \equiv 0$. Шаг индукции выполнен. Таким образом, на основании метода математической индукции заключаем, что

$$\Phi_n(z) = 0, \text{ при любом нечетном номере } n. \tag{10}$$

Исследуем коэффициенты ряда (2) с четными номерами n. Замечаем, что степень z коэффициента $\Phi_2(z)$ (8) отличается от степени z коэффициента $\Phi_0(z)$ (3) на величину

$$\frac{\Phi_2(z)}{\Phi_0(z)} = 2s - 3 - s = s - 3. \tag{11}$$

Для коэффициентов ряда (2) с четными номерами n имеем

$$\Phi_n(z) = c_{n/2} z^{s_n}, \quad \text{где} \quad s_n = s + \frac{(s-3)}{2} n, \quad \text{при любом четном номере } n. \tag{12}$$

Покажем по индукции, что формула (12) справедлива. Замечаем, что при $n = 0$, $n = 2$ имеем (3), (8) соответственно; это база индукции. Предположим, что при четном $j < n$ степень переменной z в коэффициенте $\Phi_j(z)$ определяется $s_j = s + \frac{(s-3)}{2} j$. В правой части выражения (7) имеем, что $k, l < n$ – номера множителей $\dot{\Phi}_k(z), \ddot{\Phi}_l(z)$, а степень каждого слагаемого, в соответствии со свойствами степени и правилом дифференцирования степенной функции, имеет вид

$$s_k + s_l = \left(s + \frac{(s-3)}{2} k - 1\right) + \left(s + \frac{(s-3)}{2} l - 2\right) = 2s + \frac{k+l}{2} n - 3 = s + \frac{(s-3)}{2} n,$$

что и завершает индуктивное рассуждение.

Таким образом, учитывая (10), (12), ряд (2) запишем в виде

$$\Phi(r, z) = z^s + c_1 z^{2s-3} r^2 + c_2 z^{3s-6} r^4 + \ldots, \tag{13}$$

где $c_1, c_2, \ldots$ – коэффициенты при степенях z (12). Преобразуем последнее выражение

$$\Phi(r, z) = z^s (1 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots) = z^s V(t),$$
$$\text{где автомодельная переменная} \quad t = z^{s-3} r^2. \tag{14}$$

Построим автомодельное решение (14) уравнения (2), записав ряд

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n, \tag{15}$$

далее доказав его сходимость в окрестности точки $t = 0$. Нулевой коэффициент ряда (15) ввиду (4), (13) положим $V_0 = A = 1$.

Подставим выражение (14) в уравнение (6) с целью получения уравнения для $V(t)$, сделав соответствующие замены:

$$\begin{aligned}
&\Phi_r = z^s V_t 2 r z^{s-3} = 2 z^{2s-3} r V_t;\\
&\Phi_z = s z^{s-1} V + z^s V_t (s-3) z^{s-4} r^2 = s z^{s-1} V + (s-3) z^{2s-4} r^2 V_t;\\
&\Phi_{rr} = 2 z^{2s-3} V_t + 2 z^{2s-3} r V_{tt} 2 r z^{s-3} = 2 z^{2s-3} V_t + 4 z^{3s-6} r^2 V_{tt};\\
&\Phi_{zz} = s(s-1) z^{s-2} V + s z^{s-1} V_t (s-3) z^{s-4} r^2 +\\
&\qquad + (s-3)(2s-4) z^{2s-5} r^2 V_t + (s-3) z^{2s-4} r^2 V_{tt} (s-3) z^{s-4} r^2 =\\
&\qquad = s(s-1) z^{s-2} V + (s-3)(3s-4) z^{2s-5} r^2 V_t + (s-3)^2 z^{3s-8} r^4 V_{tt},
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
&2 z^{2s-3} V_t + 4 z^{3s-6} r^2 V_{tt} + 2\nu z^{2s-3} V_t =\\
&\qquad = \left[s z^{s-1} V + (s-3) z^{2s-4} r^2 V_t\right] \left[s(s-1) z^{s-2} V +\right.\\
&\qquad\qquad \left. + (s-3)(3s-4) z^{2s-5} r^2 V_t + (s-3)^2 z^{3s-8} r^4 V_{tt}\right].
\end{aligned}$$

Запишем последнее выражение, учитывая, что $z^{s-3}r^2 = t$, параметр $\nu = 1$ (в осесимметрическом случае)

$$4tV_{tt} + 4V_t =$$
$$= [sV + (s-3)tV_t]\left[s(s-1)V + (s-3)(3s-4)tV_t + (s-3)^2t^2V_{tt}\right]. \qquad (16)$$

Уравнение (16) при $t = 0$ содержит особенность, поэтому оно не является уравнением типа Коши, и, следовательно, нельзя утверждать существование его аналитического решения. Докажем сходимость ряда (15) с помощью метода специальных мажорант.

После подстановки ряда (15) в (16), получим систему уравнений для коэффициентов ряда при неотрицательных степенях t^n

$$4n(n-1)V_n + 4nV_n = \sum_{k+l=n-1}[s+(s-3)k]V_k[s(s-1)+(s-3)(3s-4)l+(s-3)^2l(l-1)]V_l.$$

$$4n^2V_n = \sum_{k+l=n-1}[s+(s-3)k]V_k[s(s-1)+(s-3)(2s-1)l+(s-3)^2l^2]V_l. \qquad (17)$$

Отсюда, выделяя старший коэффициент ряда (15), и, выписав, для проведения дальнейших рассуждений, отдельно слагаемое при $k = 0$ или $l = 0$, получим

$$V_n = \frac{1}{4n^2}\sum_{\substack{k+l=n-1\\ k\neq 0,\ l\neq 0}}[s+(s-3)k]V_k[s(s-1)+(s-3)(2s-1)l+(s-3)^2l^2]V_l+$$
$$+\frac{1}{4n^2}sV_0[(3s+3)+(s^2+s-12)n+(s-3)^2n^2]V_{n-1}. \qquad (18)$$

Запишем соответствующее мажорирующее выражение для (18)

$$\Psi_n = \frac{1}{4n(n-1)}\sum_{\substack{k+l=n-1\\ k\neq 0,\ l\neq 0}}(2s-3)k\Psi_k[(2s^2-7s+9)l^2+(s-3)(2s-1)l]\Psi_l+$$
$$+\frac{1}{4n(n-1)}s\Psi_0[(s^2-3s+12)n^2+(s^2+s-12)n]\Psi_{n-1}, \qquad (19)$$

так как очевидно, что при $n \geq 2$ выполняется

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)},$$

при $n \geq 1$ выполняется

$$(3s+3)+(s^2+s-12)n+(s-3)^2n^2 \leq (s^2-3s+12)n^2+(s^2+s-12)n$$

при $k \geq 1$ выполняется

$$s+(s-3) \leq (2s-3)k$$

при $l \geq 1$ выполняется

$$s(s-1)+(s-3)(2s-1)l+(s-3)^2l^2 \leq (2s^2-7s+9)l^2+(s-3)(2s-1)l.$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n, \text{ где } \Psi_0(z) = V_0 = A > 0, \quad \Psi_1(z) = V_1 = s(s-1)A^2 > 0. \quad (20)$$

Поскольку для любого n справедливо $\Psi_n \geq 0$, то (20) является мажорантой нуля.

Применяя метод математической индукции, из (20) и (18), (19) получаем, что

$$V_n \leq \Psi_n. \quad (21)$$

По (19) функция (20) является решением уравнения

$$4t^2\Psi_{tt} = (2s-3)t\Psi_t \left[(2s^2-7s+9)t^2\Psi_{tt} + (2s^2-7s+9)t\Psi_t + (s-3)(2s-1)t\Psi_t\right] +$$
$$+4tA[(s^2-3s+12)t^2\Psi_{tt} + (s^2-3s+12)t\Psi_t + (s^2+s-12)t\Psi_t],$$

сократив обе части последнего выражения на t, получим

$$4\Psi_{tt} = \left\{(2s-3)\Psi_t\left[(2s^2-7s+9)t\Psi_{tt} + (4s^2-14s+12)\Psi_t\right] + \right.$$
$$\left. +4A[(s^2-3s+12)t\Psi_{tt} + (2s^2-2s)\Psi_t]\right\}. \quad (22)$$

Из вида (22) следует, что по теореме Коши функция (21) аналитична в окрестности $t = 0$. А так как ее коэффициенты Ψ_n мажорируют коэффициенты V_n, то и ряд (15) также сходится в той же окрестности. Следовательно, заключаем, что в трансзвуковом приближении в случае осевой симметрии при условии равенства нулю скорости ускорения течения в его центре нами найдено автомодельное решение в виде (15), аналитичное при $|t| < t_*$. Учитывая, что автомодельная переменная определена как $t = z^{s-3}r^2$, получим, что исходный ряд (2) будет аналитичен в области, ограниченной кривыми

$$|z| < \left(\frac{t_*}{r^2}\right)^{\frac{1}{s-3}}, \quad (23)$$

включая и линию перехода через скорость звука $z = 0$ при любом r. Отсюда заключаем, что, действительно, для любой степени заторможенности потока $s \geq 4$, то есть для сколь угодно плавного перехода из дозвуковой в сверхзвуковую область, возможно построение сопла, сколь угодно широкого (за счет, быть может, уменьшения его длины), внутри которого течение не будет содержать особенностей, в том числе и на прямой звуковой линии. Примеры таких течений дают автомодельные решения, построенные выше.

Работа поддержана РФФИ, проекты 04–01–00205, 05–01–00217.

Литература

[1] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

[2] Курмаева К.В., Титов С.С. Особенности прямой звуковой линии симметричного потока в трансзвуковом приближении. – Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.24 / Казанское математическое общество. Чеботаревские чтения по проблемам современного группового анализа и его приложениям в нелинейной механике // Материалы Всероссийской молодежной научной школы-конференции. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004. – С. 55-56.

[3] Овсянников Л.В. О сходимости ряда Мейера для осесимметричного сопла. Дополнение 1 в кн.: Мартесен Е., фон Зенгбуш Р. Расчет околозвуковой части плоских и осесимметричных сопел с криволинейной линией перехода. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – С. 41-43.

ОДНОМЕРНОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА С УЧЕТОМ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Кусюмов А.Н., Макарова Л.А.
Казанский государственный технический
университет им. А.Н. Туполева
Казань
e-mail: postbox7@mail.ru

Система уравнений неустановившегося одномерного течения невязкого газа в трубе постоянного диаметра в присутствии массовой силы и при наличии градиента давления имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(p+\rho v^2)}{\partial x}=-\rho g\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Здесь $\rho(x,t)$ – плотность газа, $v(x,t)$ – скорость течения газа, $p(x,t)$ – давление газа в трубе, t,x – соответственно, временная и пространственная координаты, g – ускорение свободного падения. Вводятся безразмерные переменные: $\overline{x}=x/d, \overline{\rho}=\rho/\rho_0, \overline{p}=p/p_0, \overline{v}=v/v_0, \overline{t}=tv_0/d$, где d – диаметр трубы, v_0,ρ_0,p_0 – характерные величины. Примем логарифмический закон изменения высоты трубы в зависимости от продольной координаты: $\overline{y}=\overline{y_0}+k\ln\overline{x}$ (безразмерный параметр k определяет логарифмический угол наклона трубы).

Исходная система приводится к виду:

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{v})}{\partial\overline{x}}=0,\quad \frac{\partial(\overline{\rho}\overline{v})}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{v}^2}{\partial\overline{x}}=-\overline{\rho}\overline{k}\frac{1}{\overline{x}}, \tag{2}$$

где $\overline{k}=kgdv_0^{-2}$.

Предположим, что рассматривается изоэнтропический процесс с уравнением состояния $p/\rho^\gamma=\mathrm{const}$, где γ – показатель адиабаты газа. При принятых условиях полученная система допускает однопараметрическую группу растяжений по временной и пространственной координатам. Это позволяет привести систему, записанную в безразмерных переменных, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Независимой переменной в системе обыкновенных дифференциальных уравнений является инвариант $I = x/t$. Инвариантная переменная подобного вида позволяет изучать важную категорию одномерных нестационарных течений сжимаемого газа в условиях, характеризующихся какими-либо параметрами скорости, но не длины [1]. Одним из примеров такого течения является движение газа в цилиндрической трубе, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой, возникающее, когда поршень начинает двигаться с постоянной скоростью. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид (черточки сверху не пишем):

$$(-I+v)\frac{d\rho}{dI}+\rho\frac{dv}{dI}=0, \quad (-Iv+v^2+\gamma\rho^{\gamma-1})\frac{d\rho}{dI}+\rho(-I+2v)\frac{dv}{dI}=-\rho\frac{k}{I}. \tag{3}$$

При отсутствии наклона трубы система (3) примет вид:

$$(-I+v)\frac{d\rho}{dI}+\rho\frac{dv}{dI}=0, \quad (-Iv+v^2+\gamma\rho^{\gamma-1})\frac{d\rho}{dI}+\rho(-I+2v)\frac{dv}{dI}=0. \tag{4}$$

Решение системы (4) будем обозначать $\rho_0(x,t)$ и $v_0(x,t)$. Отметим, что решение системы (4) при заданных начальных условиях $\rho_0(x_0,t_0)$, $v_0(x_0,t_0)$ является не единственным [1]. Проанализировать особенности построения неединственного решения можно на примере модельного уравнения (при условии $v_0 = c_0 - I$)

$$\frac{d\rho_0}{dI}=\frac{\rho_0}{0.5(\gamma+1)\sqrt{\gamma}\rho_0^{(\gamma-1)/2}-2I}. \tag{5}$$

Здесь $c_0 = \sqrt{\gamma\rho_0^{\gamma-1}}$ – скорость распространения звука.

Уравнение для ρ_0 будем решать с помощью замены $\rho_0^{(\gamma-1)/2} = z$:

$$(k_2 z - 2I)\frac{dz}{dI}=k_1 z, \tag{6}$$

где $k_2 = \sqrt{\gamma}(\gamma+1)/2$, $k_1 = (\gamma-1)/2$.

Уравнение (6) относится к классу уравнений Абеля второго рода [2]. Аналитическое решение уравнения (6) имеет вид:

$$I - cz^{-2/k_1} - k_2 z/(2+k_1) = 0. \tag{7}$$

В силу нелинейности относительно искомой функции данное уравнение может иметь не единственное решение, как и само уравнение (6).

Отметим, что уравнение (6) имеет особенность при постановке начальных условий и является примером для отработки процедуры численного интегрирования уравнения с особенностью. А именно, в точке

$$z_0(I_0) = 2I_0/k_2 \tag{8}$$

левая часть уравнения (6) обращается в ноль. Поэтому использование стандартных процедур численного интегрирования уравнения (6) с начальным условием (8) является невозможным. Представим функцию $z(I)$ в виде $z(I) =$

$z_0(I) + z_1(I)$. Здесь $z_0(I) = 2I/k_2$, а $z_1(I)$ – новая искомая функциия. После подстановки получаем уравнение

$$k_2 z_1 \left(\frac{dz_1}{dI} + \frac{2}{k_2} \right) = k_1(z_0 + z_1). \tag{9}$$

Уравнение (9) можно упростить с помощью замены $z_1 = z_2^{1/2}$:

$$\frac{1}{2} k_2 \frac{dz_2}{dI} = k_1 z_0 \pm \sqrt{z_2}(k_1 - 2). \tag{10}$$

Знак "плюс" ставится в уравнении (10) при положительных значениях z_1 (т.е. при $z(I_0) > z_0(I_0)$), "минус" при отрицательных значениях. При этом уравнение (10) со знаком "плюс" определяет монотонно возрастающую функцию $\rho(I)$, а в противоположном случае – монотонно убывающую. Начальное условие для уравнения (10) имеет вид $z_2(I_0) = (z_1(I_0) - z_0(I_0))^2$.

На рисунке представлена функция $z(I)$, полученная с помощью решения уравнения (10), при начальном условии, соответствующем (8). Непосредственной проверкой можно убедиться, что построенное решение соответствует решению, полученному с помощью формулы (7).

В окрестности начальной точки I_0 можно положить $z_2 \approx z_2(I_0) = 0$. В этом случае (а также при условии $k_1 = 2$) уравнение (10) можно записать в виде:

$$\frac{1}{2} k_2 \frac{dz_2}{dI} = k_1 z_0.$$

Решение данного уравнения определяет выражение

$$z_1 = \pm\sqrt{(z_2)} = \pm \frac{\sqrt{2k_1(I^2 - I_0^2)}}{k_2}.$$

Для анализа системы уравнений (3) с учетом действия силы тяжести необходимо привести систему (3) к виду, разрешенному относительно производных.

При этом система (3) будет иметь особенность при постановке граничных условий. В этом случае решение можно искать в виде $v(x,t) = v_0(x,t) + v_1(x,t)$, $\rho(x,t) = \rho_0(x,t) + \rho_1(x,t)$. Здесь $v_0(x,t), \rho_0(x,t)$ – функция определяемая системой (5), $v_1(x,t), \rho_1(x,t)$ – новые искомые функции.

Литература

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М., Л.: Гос. изд. технико - теоретической литературы, 1950. – 676 стр.

[2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

ФАКТОРИЗАЦИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Линчук Л.В.
Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: lidiya_linchuk@mail.ru

Хорошо известно, что любое уравнение может быть записано в инвариантах допускаемого оператора. Для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) это означает, что оно факторизуется на систему более простых уравнений, а следовательно, можно существенно упростить процессы интегрирования и исследования свойств исходного ОДУ.

Так как ядром факторсистемы являются инварианты допускаемого оператора, то естественно, возникает вопрос о восстановлении оператора, соответствующего данной симметрии. В результате оказалось, что класс точечных операторов, являющихся основой группового анализа, должен быть существенно расширен, например, для уравнений второго порядка – до экспоненциальных нелокальных операторов (ЭНО) вида

$$X = \exp\left(\int \zeta(x,y,y')\,dx\right)\left[\xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y\right].$$

Рассматривались также и другие классы нелокальных операторов, содержащих полные интегралы. Но недостатком такого подхода является необходимость выражать в явном виде все неизвестные функции, входящие в запись координат оператора, что возможно не всегда. Если целью поиска допускаемого оператора является факторизация исходного ОДУ, то эта информация об операторе является избыточной.

Рассмотрим процедуру факторизации ОДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = F(x,y,y',\,\dots\,,y^{(n-1)}) \tag{1}$$

с помощью оператора вида

$$X = \Phi(x, y, y', \ldots)\partial_y, \tag{2}$$

где Φ – функция конечного или бесконечного числа переменных. Сначала мы должны найти оператор (2), допускаемый уравнением (1), решив определяющее уравнение

$$\Phi\frac{\partial F}{\partial y} + D_x\Phi\frac{\partial F}{\partial y'} + \ldots + D_x^{n-1}\Phi\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} - D_x^n\Phi\bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{3}$$

Если нам удалось найти Φ в явном аналитическом виде, мы переходим к вычислению инвариантов допускаемого оператора (2). Инварианты удовлетворяют уравнению

$$\Phi\frac{\partial J}{\partial y} + D_x\Phi\frac{\partial J}{\partial y'} + \ldots + D_x^{n-1}\Phi\frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}}\bigg|_{[y^{(n)}=F]} = 0. \tag{4}$$

Выберем из найденного множества решений уравнения (4) решение

$$J = J(x, y, y', \ldots, y^{(k)}), \quad (k < n),$$

старшая производная в котором имеет наименьший порядок (этот инвариант называется младшим). Тогда исходное уравнение (1) можно записать в виде факторсистемы [1]

$$\begin{cases} u = J(x, y, y', \ldots, y^{(k)}), \\ u^{(n-k)} = G(x, u, u', \ldots, u^{(n-k-1)}). \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (3) и (4) имеют схожую структуру, а именно, в них линейно входит функция Φ и ее полные производные, с той лишь разницей, что в уравнении (3) функция Φ является искомой, а в уравнении (4) считается известной. Если поделить эти уравнения почленно на Φ, получим выражения, в которые функция Φ входит лишь в виде отношений

$$\frac{D_x\Phi}{\Phi}, \frac{D_x^2\Phi}{\Phi}, \ldots, \frac{D_x^n\Phi}{\Phi}.$$

Следовательно, для поиска факторсистемы нам достаточно знать эти отношения, а не искать собственно функцию Φ. Более того, достаточно знать лишь первое отношение, так как остальные могут быть получены из него простым дифференцированием.

Если, например, отношение $D_x\Phi/\Phi = \zeta(x, y, y')$, то мы получаем определение ЭНО в каноническом виде

$$X = \exp\left(\int \zeta(x, y, y')\,dx\right)\partial_y.$$

В данном случае мы восстанавливаем явный вид функции Φ (квадратурой), хотя для факторизации, как мы показали, это не принципиально, и вид оператора не имеет значения ни для прямой, ни для обратной задачи, а ключевую роль играет выражение $D_x\Phi = \zeta(x, y, y')\Phi$, которое можно назвать **правилом дифференцирования** функции Φ.

Идея задания координаты канонического оператора в неявном виде через правило дифференцирования этой координаты лежит в основе предлагаемого метода.

Этот метода базируется на понятии нелокальной переменной. Изначально под нелокальной переменой понималось выражение вида

$$\exp\left(\int \zeta(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\, dx\right),$$

которое является элементом координат ЭНО. При поиске оператора это выражение рассматривалось как независимая переменная наряду с $x, y, y', \ldots$, так как в общем случае это выражение зависит от производных сколь угодно высокого порядка вплоть до бесконечного. По этой переменной определяющее уравнение можно было расщепить до системы и тем самым упростить задачу поиска допускаемого оператора. В дальнейшем стали появляться другие формы нелокальных переменных, Мы будем понимать под нелокальной переменной любое выражение, отличное от $x, y, y', \ldots$, по которому выполняется расщепление в определяющем уравнении.

Введём в рассмотрение оператор вида

$$X = \Phi\partial_y, \quad \text{где} \quad \Phi = \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x, y, y', \ldots, y^{(p)})A_i, \tag{6}$$

где A_i $(i = 1, \ldots, k)$ – нелокальные переменные, правила дифференцирования которых задаются линейными выражениями

$$D(A_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(x, y, y', \ldots, y^{(p)})A_j. \tag{7}$$

По сути, эти правила дифференцирования задают правило дифференцирования координаты оператора Φ.

Предположим, что необходимо найти оператор (6), допускаемый заданным ОДУ n-го порядка (1). Для этого мы можем составить определяющее уравнение по формуле (3), которое в силу линейности, а также в силу линейности правил дифференцирования (7) будет имеет вид

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})A_i = 0.$$

Так как нелокальные переменные являются независимыми, то мы можем расщепить это уравнение до системы

$$\begin{cases} \beta_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \end{cases}$$

Эти уравнения уже не содержат нелокальных переменных, а поэтому из них могут быть найдены функции ξ_{ij} и $\alpha_i(x, y, y', \dots, y^{(p)})$, задающие оператор (6). Если найденный оператор имеет нетривиальный инвариант порядка ниже n, то можно построить факторсистему исходного ОДУ. Этот инвариант может быть найден из соотношения (4), которое по аналогии с определяющим уравнением имеет линейную структуру, а следовательно, будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\gamma_{i0}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y} + \dots + \gamma_{i(n-1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \frac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} \right) A_i = 0.$$

Расщепив это уравнение по нелокальным переменным, мы получаем систему для поиска инвариантов

$$\begin{cases} \gamma_{10}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y} + \dots + \gamma_{1(n-1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{k0}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y} + \dots + \gamma_{k(n-1)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \dfrac{\partial J}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \end{cases}$$

Если эта система имеет только тривиальное решение, то найденный оператор оказывается пустым с точки зрения факторизации, в противном случае можно построить факторсистему (5).

Существенным упрощением указанного алгоритма является то, что число нелокальных переменных и порядок производных p можно ограничить порядком уравнения (1), а координату оператора Φ можно считать равной одной из нелокальных переменных. Эти условия никак не ограничивают универсальность этого метода, так как и в этом случае операторов вида (6) оказывается достаточным для построения всех факторсистем заданного ОДУ. Более того, тип факторизации определяется числом нелокальных переменных. Поэтому если заранее задать структуру факторсистемы, то тем самым можно сузить класс искомых допускаемых операторов.

Так, например, все факторсистемы ОДУ 3-го порядка

$$y''' = F(x, y, y', y'')$$

вида

$$\begin{cases} u = J(x, y, y', y'') \\ u' = G(x, u). \end{cases}$$

могут быть найдены с помощью операторов вида

$$X = A\partial_y, \qquad D_x A = B, \quad D_x B = \alpha(x, y, y', y'')A + \beta(x, y, y', y'')B.$$

Пример 1. Решение прямой задачи группового анализа для ОДУ 3-го порядка

$$y''' + (y'')^2 + a(x, y)y'' + b(x, y)y' + c(x, y) = 0$$

в классе операторов

$$X = A\partial_y, \qquad DA = B, \quad DB = \alpha(x, y)A + [\beta(x, y)y'' + \gamma(x, y)y' + \delta(x, y)]B.$$

распадается на два случая

(I) $\delta = \beta = \gamma = 0,\ \alpha = -\frac{1}{2}a'_y,\ b = \frac{1}{2}a'_y,\ c = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a'_x + h(x);$

(II) $c = a'_x - h'(x) + ah(x) - h(x)^2,\ b = a'_y,\ \alpha = -b,\ g = h(x) - a,\ \beta = -1,\ \gamma = 0.$

Случаю (I) соответствует уравнению

$$y''' + (y'')^2 + ay'' + \frac{1}{2}a'_y y' + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a'_x + h(x) = 0,$$

которое допускает оператор $X = A\partial_y, \quad DA = B, \quad DB = -\frac{1}{2}a'_y A,$ инварианты которого порождают факторсистему этого уравнения

$$\begin{cases} u = y'' + \frac{1}{2}a, \\ u' + u^2 + h(x) = 0. \end{cases}$$

Случай (II) определяет уравнение

$$y''' + (y'')^2 + ay'' + a'_y y' + a'_x - h'_x + ah(x) - h(x)^2 = 0,$$

которое допускает оператор

$$X = A\partial_y, \qquad DA = B, \quad DB = -a'_y A + (h(x) - y'' - a)B,$$

инварианты которого порождают факторсистему этого уравнения

$$\begin{cases} u = e^{y'}(y'' + a - h(x)), \\ u' + h(x)u = 0. \end{cases}$$

Насколько известно, метод факторизации уравнений с частными производными (УЧП) в групповом анализе практически не применялся. Основные результаты получены при поиске инвариантных решений, для чего требуется наличие **двух** инвариантов нулевого порядка, один из которых зависит от u. В последнее время получил распространение также метод “неклассических” симметрий, заключающийся в поиске частных решений на некоторой инвариантной поверхности. Однако описанный алгоритм построения факторсистемы ОДУ может быть распространен и на случай УЧП с учетом их специфики.

Во-первых, множество инвариантов допускаемого оператора для УЧП имеет более сложную структуру, а именно, базис инвариантов может содержать дифференциальные инварианты одного порядка. В результате этого внешнее уравнение факторсистемы будет являться недоопределенным и не позволит понизить порядок исходного уравнения. Например, уравнение

$$u_{xy} = u_x + u_y$$

допускает оператор $X = \partial_u$ и факторизуется с помощью его инвариантов следующим образом

$$\begin{cases} u_x = v(x, y) \\ u_y = w(x, y), \\ v_y = v + w. \end{cases}$$

Поэтому, если мы хотим построить факторсистему, упрощающую процесс интегрирования исходного уравнения, необходимым требованием для оператора, допускаемого УЧП (кроме требования “непустоты”), является отсутствие недоопределенности во внешнем уравнении. Заметим, что для ОДУ в этом требовании необходимости нет.

Второе отличие операторов, допускаемыми УЧП, является рост числа производных с увеличением их порядка: так если производных первого порядка функции $u(x, y)$ только две, то второго порядка – уже три и т.д. Значит, после “посадки” на многообразие, задаваемое УЧП n-го порядка, определяющее уравнение в общем случае будет содержать производные n-го порядка, в то время как при работе с ОДУ старшая производная исчезает. С одной стороны, “лишние” производные можно использовать для дополнительного расщепления определяющего уравнения, а с другой стороны этот факт может отрицательно сказаться на алгоритме поиска определяющего уравнения с точки зрения его универсальности (возможно, для того чтобы описать все факторсистемы, придётся вводить дополнительные нелокальные переменные).

В настоящий момент разработан следующий алгоритм поиска факторсистем для УЧП 2-го порядка. Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}).$$

При сохранении независимых переменных x и y факторсистема для этого уравнения может быть записана только в виде

$$\begin{cases} v = v(x, y, u, u_x, u_y), \\ v_x = G(x, y, v, v_y). \end{cases} \tag{8}$$

Будем искать операторы, допускаемые этим уравнением, вида

$$X = A\partial_u, \tag{9}$$

где нелокальная переменная A определяется правилами дифференцирования

$$D_x A = \alpha(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})A, \quad D_y A = \beta(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy})A.$$

Эти правила должны быть согласованными, а именно

$$D_y(D_x A) = D_x(D_y A).$$

Последнее соотношение нужно учесть при составлении определяющего уравнения

$$A\left[F_u + \alpha F_{u_x} + \beta F_{u_y} + (D_y\alpha + \alpha\beta)F_{u_{xy}} + \right.$$
$$\left. + (D_y\beta + \beta^2)F_{u_{yy}} - (D_x\alpha + \alpha^2)\right]\Big|_{u_{xx}=F} = 0. \tag{10}$$

Инварианты 1-го порядка $J = J(x, y, u, u_x, u_y)$ оператора (9) удовлетворяют уравнению

$$J_u + \alpha J_{u_x} + \beta J_{u_y} = 0. \tag{11}$$

Если функции α и β не зависят от вторых производных, то оператор (9) будет иметь 2 инварианта 1-го порядка, а следовательно, факторсистема может не иметь вида (8). Чтобы гарантировать, что получится требуемая факторсистема хотя бы один из коэффициентов α и β должен зависеть от второй производной (тогда дифференциальный инвариант 1-го порядка будет только один). Продифференцировав (11) по производным u_{xy} и u_{yy}, получим ещё два уравнения

$$\alpha_{u_{xy}} J_{u_x} + \beta_{u_{xy}} J_{u_y} = 0, \quad \alpha_{u_{yy}} J_{u_x} + \beta_{u_{yy}} J_{u_y} = 0. \tag{12}$$

Чтобы из системы, состоящей из уравнений (11) и (12), получился только один дифференциальный инвариант 1-го порядка необходимо, во-первых, потребовать, чтобы коэффициенты в уравнениях (12) были пропорциональны, т.е

$$\alpha_{u_{xy}} \beta_{u_{yy}} - \alpha_{u_{yy}} \beta_{u_{xy}} = 0, \tag{13}$$

а во-вторых, чтобы система уравнений (11) и (12) была замкнута, т.е. выполнялись условия

$$\begin{aligned} &\alpha_{u_{xy}} \beta_{u,u_{xy}} + \alpha_{u_{xy}} \alpha \beta_{u_x,u_{xy}} - \alpha^2_{u_{xy}} \beta_{u_x} + \\ &\quad + \alpha_{u_{xy}} \beta \beta_{u_y,u_{xy}} - \alpha_{u_{xy}} \beta_{u_{xy}} \beta_{u_y} - \beta_{u_{xy}} \alpha_{u,u_{xy}} - \beta_{u_{xy}} \alpha \alpha_{u_x,u_{xy}} + \\ &\quad\quad + \beta_{u_{xy}} \alpha_{u_{xy}} \alpha_{u_x} - \beta_{u_{xy}} \beta \alpha_{u_y,u_{xy}} + \beta^2_{u_{xy}} \alpha_{u_y} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{u_{yy}} \beta_{u,u_{xy}} + \alpha_{u_{yy}} \alpha \beta_{u_x,u_{xy}} - \alpha_{u_{yy}} \alpha_{u_{xy}} \beta_{u_x} + \\ &\quad + \beta_{u_y,u_{xy}} \alpha_{u_{yy}} \beta - \alpha_{u_{yy}} \beta_{u_{xy}} \beta_{u_y} - \beta_{u_{yy}} \alpha_{u,u_{xy}} - \beta_{u_{yy}} \alpha \alpha_{u_x,u_{xy}} + \\ &\quad\quad + \beta_{u_{yy}} \alpha_{u_{xy}} \alpha_{u_x} - \beta_{u_{yy}} \beta \alpha_{u_y,u_{xy}} + \beta_{u_{yy}} \beta_{u_{xy}} \alpha_{u_y} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, решая определяющее уравнение (10) целесообразно сразу же добавлять к нему условия (13)-(15) и требовать зависимость хотя бы одного из коэффициентов α или β от второй производной u_{xy} или u_{yy}.

Данная процедура построения факторсистемы для УЧП 2-го порядка позволяет теоретически построить все факторсистемы вида (8) заданного уравнения, так как по любому наперед заданному инварианту 1-го порядка можно восстановить соответствующий оператор, решив относительно α и β уравнения (11) и (13) (заметим, что первое из них – алгебраическое).

Пример 2. Рассмотрим УЧП 2-го порядка

$$u_{xx} = u_{yy} + C_1 u_x^2 + C_2 u_x u_y + C_3 u_y^2$$

Исследования возможности факторизации этого уравнения с помощью оператора (9), правила дифференцирования нелокальной переменной A в котором заданы соотношениями

$$D_x A = u_{xy} A, \quad D_y A = \beta(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{yy}) A,$$

приводят к двум случаям

1. $C_3 = C_1$, $C_2 = -2C_1$, $\beta = u_{xy}$. Это означает, что уравнение

$$u_{xx} = u_{yy} + C_1(u_x - u_y)^2$$

может быть факторизовано следующим образом

$$\begin{cases} v = u_y - u_x, \\ v_y + v_x = C_1 v^2. \end{cases}$$

2. $C_3 = -C_1$, $C_2 = 0$, $\beta = u_{xy} + C_1(u_x - u_y)$. Следовательно, уравнение

$$u_{xx} = u_{yy} + C_1(u_x^2 - u_y^2)$$

имеет факторсистему

$$\begin{cases} v = (u_y - u_x)\exp(C_1 u), \\ v_y + v_x = 0. \end{cases}$$

В заключение отметим, что рассмотренный алгоритм поиска факторсистем можно распространить и на УЧП 2-го порядка, в котором явно выражена вторая производная u_{xy}, а также на УЧП более высокого порядка, добавив в оператор дополнительные нелокальные переменные.

Литература

[1] Зайцев В.Ф. Формальные операторы и теоремы о факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды III Международной конференции "Симметрии и дифференциальные уравнения". – Красноярск, 2002. – С.101-105.

[2] Линчук Л.В. Обобщение инфинитезимального оператора в групповом анализе ОДУ // Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы С.Г.Крейна. – Воронеж, ВГУ, 2006. – С.58-59.

ФАКТОРИЗАЦИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАДРАТУРАХ

Малышев Ю.В.
Казанский государственный технологический университет
Казань
e-mail: uvmal@yandex.ru

Операторный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений переносится на уравнения с частными производными. Выделены случаи интегрирования в квадратурах [1].

1. Рассмотрим функции вида $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $\varphi(x \setminus x_j) = \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ и экпоненциальный оператор

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x_j}} = 1 + a\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial^2 x_j} + \dots, \tag{1}$$

где $a = \mathrm{const}$ или $a = a(x \setminus x_j)$. Применение оператора (1) к функциям $f(x)$ и $\varphi(x \setminus x_j)$ дает

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x_j}} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + a, x_{j+1}, \dots, x_n), \tag{2}$$

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x_j}} \varphi(x \setminus x_j) = \varphi(x \setminus x_j). \tag{3}$$

Обозначим $D_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Тогда для $i \neq j$

$$\left(D_{x_i} + \dot{a}_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f(x) = e^{a\frac{\partial}{\partial x_j}} \left(D_{x_i} + \dot{a}_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) f(x), \qquad \dot{a}_{x_i} = \frac{\partial a}{\partial x_i}. \tag{4}$$

Если положить $\partial/\partial x_j \equiv 1$, то получится известная [1] формула

$$(D_{x_i} + \dot{a}_{x_i}) f(x) = e^{-a} D_{x_i} e^{a} f(x). \tag{5}$$

2. Применим формулы (1)-(5) к решению дифференциальных уравнений с частными производными

$$a z_{xx} + 2b z_{xy} + x z_{yy} + d z_x + e z_y + f z = F, \tag{6}$$

где a, b, c, d, e, f, F – функции x и y. Предположим, что уравнение (6) допускает факторизацию

$$\left(D_x + a_1\frac{\partial}{\partial y} + a_0\right)\left(D_x + b_1\frac{\partial}{\partial y} + b_0\right) = \Phi, \tag{7}$$

где a_0, b_0, Φ – функции x и y, а $a_1 = a_1(x)$, $b_1 = b_1(x)$. Применим к уравнению (7) формулы (4), (5):

$$e^{-u} D_x e^{u-v} D_x e^{v} z = \Phi,$$

где $u = \displaystyle\int \left(a_1\frac{\partial}{\partial y} + a_0\right) dx, \quad u = \int \left(b_1\frac{\partial}{\partial y} + b_0\right) dx$. Из (8) делением на экспоненту и интегрированием получим:

$$D_x e^{u-v} D_x e^{v} z = e^{u}\Phi, \qquad e^{u-v} D_x e^{v} z = D_x^{-1} e^{u}\Phi + \varphi(y),$$

$$D_x e^{v} z = e^{v-u} D_x^{-1} e^{u}\Phi + e^{v-u}\varphi(y), \quad e^{v} z = D_x^{-1} e^{v-u} D_x^{-1} e^{u}\Phi + D_x^{-1} e^{v-u}\varphi(y) + \psi(y),$$

$$z = e^{-v} D_x^{-1} e^{v-u} D_x^{-1} e^{u}\Phi + e^{-v} D_x^{-1} e^{v-u}\varphi(y) + e^{-v}\psi(y),$$

где D_x^{-1} – оператор интегрирования по x, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ – произвольные функции интегрирования. Итак, доказана

Теорема. Если уравнение (6) допускает факторизацию (7), то оно интегрируется в квадратурах.

Так как функции a_0, b_0, Φ, a_1, b_1 достаточно произвольны, то уравнение (7) в развернутом виде определяет класс дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах:

$$z_{xx} + (a_1 + b_1)z_{xy} + a_1 b_1 z_{yy} + (a_0 + b_0)z_x + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z_y + (b_{0_x} + a_1 b_{0_y} + a_0 b_0)z = \Phi.$$

Пример. Уравнение

$$x^2 z_{xx} - 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} + x z_x + y z_y = 0$$

в символическом виде запишется так:

$$(xD_x - yD_y)^2 z = 0 \quad \text{или} \quad (D_{\ln x} - D_{\ln y})^2 z = 0, \quad e^{\ln x D_{\ln y}} D_{\ln x}^2 e^{-\ln x D_{\ln y}} z = 0,$$

$$D_{\ln x} e^{-\ln x D_{\ln y}} z = \varphi(\ln y), \quad e^{-\ln x D_{\ln y}} z = \ln x \cdot \varphi(\ln y) + \psi(\ln y),$$

и

$$z = \ln x e^{\ln x D_{\ln y}} \varphi(\ln y) + e^{\ln x D_{\ln y}} \psi(\ln y) = \ln x \cdot \Phi(xy) + \Psi(xy)$$

– общее решение ($\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ – произвольные функции).

Результаты могут быть перенесены на уравнения n-го порядка.

Литература

[1] Малышев Ю.В. Каскадный метод для гиперболических уравнений // “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”, труды международной конференции “Герценовские чтения – 2005”. – СПб: Издательство БАН, 2005. – С.71-73.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРА, ОПИСЫВАЕМОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Масина О.Н.
Елецкий государственный университет им. И.А.Бунина
Елец
e-mail: olga121@inbox.ru

Современная математическая экология, занимающаяся развитием математического подхода к изучению изменений в составе биологических сообществ, является актуальной областью исследования математиков. Исследование режимов динамического поведения в системах двух и более взаимодействующих популяций и их качественных перестроек при изменении условий было рассмотрено в [1, 2, 3, 5]. В данной работе проведен анализ динамики взаимодействия экосистемы трех видов организмов, исследованы на устойчивость и качественное поведение состояния равновесия этой системы, а также построена модель системы в виде дифференциального включения с заменой однозначных параметров на многозначные.

Рассматриваются три популяции организмов: первая популяция – растения – является пищей для второй популяции – травоядных, которые, в свою очередь, являются пищей для популяции хищников, причем последние две популяции своими отходами подкармливают первую.

Обозначим через N_1, N_2, N_3 объемы этих популяций в условных единицах (по общему весу или количеству особей), а через N_*, M_* – минимальный объем растительной популяции и травоядных соответственно.

Если экосистема состоит из одной популяции растений, то ее развитие задается дифференциальным уравнением

$$\dot{N}_1 = K_1 N_1,$$

при этом количество травы неограниченно возрастает по экспоненте. При наличии популяции травоядных уравнение для растений принимает вид:

$$\dot{N}_1 = K_1 N_1 - K_2 N_2.$$

Добавляя ко второму слагаемому неприкасаемый запас растений N_* и два слагаемых $K_3 N_2$ и $K_4 N_3$ для учета удобрений от травоядных и хищников, окончательно первое уравнение примет вид:

$$\dot{N}_1 = K_1 N_1 - K_2 N_2 (N_1 - N_*) + K_3 N_2 + K_4 N_3.$$

Уравнение для травоядных запишем в виде:

$$\dot{N}_2 = K_5 N_2 - K_6 N_3 (N_2 - M_*),$$

где первое слагаемое $K_5 N_2$ дает неограниченный рост объема травоядных, второе слагаемое $-K_6 N_3 (N_2 - M_*)$ дает ограничение роста объема травоядных из-за уничтожения хищниками, одновременно сохраняя неприкосновенный запас M_* травоядных. Уравнение для хищников имеет вид:

$$\dot{N}_3 = -K_7 N_3 + K_8 N_3 (N_2 - M_*),$$

в первом слагаемом $-K_7 N_3$ установлено убывание хищников из-за конкуренции между собой, а второе слагаемое $K_8 N_3 (N_2 - M_*)$ устанавливает возрастание хищников, но только при наличии неприкосновенного запаса травоядных M_*.

Таким образом, обобщенная модель Вольтерра для трех видов взаимосвязанных популяций: растений, травоядных и хищников – имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = K_1 N_1 - K_2 N_2 (N_1 - N_*) + K_3 N_2 + K_4 N_3, \\ \dot{N}_2 = K_5 N_2 - K_6 N_3 (N_2 - M_*), \\ \dot{N}_3 = -K_7 N_3 + K_8 N_3 (N_2 - M_*). \end{cases} \tag{1}$$

Отметим, что число уравнений в системе (1) можно наращивать, добавляя связи с дополнительными популяциями. Можно, например, добавлять популяции крупных хищников, людей, а также вирусов, микробов и многих других популяций, поедающих друг друга живьем или после лишения жизни с помощью яда, зубов, когтей и других приспособлений.

Переходя в (1) к новым неотрицательным коэффициентам

$$\begin{cases} a_1 = K_1,\ a_2 = K_2,\ a_3 = K_2N_* + K_3,\ a_4 = K_4,\ b_1 = K_5,\ b_2 = K_6, \\ b_3 = K_6M_*,\ c_1 = K_7,\ c_2 = K_8,\ c_3 = K_8M_*, \end{cases} \tag{2}$$

получим более простую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x - a_2xy + a_3y + a_4z, \\ \dot{y} = b_1y - b_2zy + b_3z, \\ \dot{z} = -c_1z + c_2zy - c_3z. \end{cases} \tag{3}$$

Состояния равновесия системы (3) определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_1x - a_2xy + a_3y + a_3z = 0, \\ b_1y - b_2zy + b_3z = 0, \\ -c_1z + c_2zy - c_3z = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему (4), получим два состояния равновесия:

$$A(0,0,0) \quad \text{и} \quad B(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{a_3y_0 + a_4z_0}{b_2y_0 - a_1}; \frac{c_1 + c_3}{c_2}; \frac{b_1(c_1 + c_3)}{b_2(c_1 + c_3) - b_3c_2} \right).$$

Состояние равновесия A соответствует случаю, когда все популяции вымерли. Состояние равновесия B характеризует стационарный режим совместного существования трех видов организмов. Отметим, что отвечающее экологическому смыслу задачи условие неотрицательности координат состояния равновесия B выполнено при всех значениях входящих параметров.

Исследуем каждое из состояний равновесия A и B на устойчивость первым методом Ляпунова.

В окрестности точки A линеаризация системы (3) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + a_3y + a_4z, \\ \dot{y} = b_1y + b_3z, \\ \dot{z} = -c_1z - c_3z, \end{cases} \tag{5}$$

а характеристическое уравнение примет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_3 & a_4 \\ 0 & b_1 - \lambda & b_3 \\ 0 & 0 & -c_1 - c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

с двумя положительными корнями $\lambda = a_1$, $\lambda = b_1$ и одним отрицательным корнем $\lambda = -c_1 - c_3$ и поэтому состояние равновесия A неустойчиво по Ляпунову: по осям ox, oy популяции растений и травоядных неограниченно увеличиваются в окрестности точки A, а по оси oz вблизи точки A популяция хищников стремится к нулю.

Перейдем в точке равновесия B к новым переменным $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, $Z = z - z_0$, получим из системы (3) систему:

$$\begin{cases} \dot{X} = a_1 (X + x_0) - a_2 (X + x_0) (Y + y_0) + a_3 (Y + y_0) + a_4 (Z + z_0), \\ \dot{Y} = b_1 (Y + y_0) - b_2 (Z + z_0) (Y + y_0) + b_3 (Z + z_0), \\ \dot{Z} = -c_1 (Z + z_0) + c_2 (Z + z_0) (Y + y_0) - c_3 (Z + z_0), \end{cases}$$

у которой линейная часть примет вид:

$$\begin{cases} \dot{X} = (a_1 - a_2 y_0)X + (a_3 - a_2 x_0)Y + a_4 Z, \\ \dot{Y} = (b_1 - b_2 z_0)Y + (b_3 - b_2 y_0)Z, \\ \dot{Z} = c_2 z_0 Y + (c_2 y_0 - c_1 - c_3)Z, \end{cases} \tag{6}$$

и ввиду равенства $c_2 y_0 - c_1 - c_3 = 0$, третье уравнение системы (6) сводится к виду $\dot{Z} = c_2 z_0 Y$ и поэтому характеристическое уравнение системы (6) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (a_1 - a_2 y_0) - \lambda & a_3 - a_2 x_0 & a_4 \\ 0 & (b_1 - b_2 z_0) - \lambda & b_3 - b_2 y_0 \\ 0 & c_2 z_0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$[\lambda + (a_2 y_0 - a_1)] \cdot [\lambda^2 + (b_2 z_0 - b_1)\lambda + (b_2 y_0 - b_3) c_2 z_0] = 0. \tag{7}$$

Так как коэффициенты $a_2 y_0 - a_1$, $b_2 z_0 - b_1$, $(b_2 y_0 - b_3) c_2 z_0$ все положительны, то все корни характеристического уравнения (7) будут иметь отрицательные действительные части. Поэтому состояние равновесия B будет асимптотически устойчивым узлом или фокусом и поэтому сожитие популяций растений, травоядных и хищников будет асимптотически устойчивым.

Из проведенного анализа следует, что, начиная любое движение системы (1) из далекого прошлого, начальное состояние имеет большое число хищников и мало растений и травоядных – число хищников быстро вымирает из-за конкуренции за растения и травоядных, популяции которых растут, не обязательно с одинаковой скоростью, это приводит к увеличению числа хищников, и в пределе движение системы (1) приближается к устойчивой точке B. При умеренных изменениях параметров в системе (1) устойчивость остается, но точка B может смещаться по числу этих популяций. При изменениях параметров может нарушиться устойчивость системы вплоть до вымирания популяций, но только эти изменения должны быть очень велики.

Пример 1. Пусть $K_1 = \cdots = K_8 = 1$, $N_* = 99$, $M_* = 50$, тогда получим конкретный вид системы (3):

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy + 100y + z, \\ \dot{y} = y - zy + 50z, \\ \dot{z} = -z + zy - 50z. \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) имеет два состояния равновесия $A(0{,}0{,}0)$ и $B(103\frac{1}{50}{,}51{,}51)$. Характеристические уравнения для состояний равновесия A и B имеют соответственно вид:

$$(1 - \lambda)^2(-51 - \lambda) = 0, \tag{9}$$

$$[50+\lambda][\lambda^2+50\lambda+51]=0. \tag{10}$$

Корни уравнения (9) имеют вид: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -51$. Следовательно, состояние равновесия A неустойчиво по Ляпунову. Корни уравнения (10) равны: $\lambda_1 = -50$, $\lambda_2 \approx -2,083$, $\lambda_3 \approx -97,917$. Следовательно, состояние равновесия B будет устойчивым узлом.

Замечание 1. Отметим, что при малых изменениях параметров (2) рассмотренная система будет оставаться асимптотически устойчивой, и при этом особая точка A не смещается, а особая точка B может несколько смещаться. Поэтому система грубая, так как не меняет существенно фазового портрета системы.

Замечание 2. Так как система (8) грубая, то ее можно заменить дифференциальным включением:

$$\begin{cases} \dot{x} \in [0,8;1]x - [1;1,2]xy + [90;100]y + [1;1,1]z, \\ \dot{y} \in [0,9;1,2]y - [1,2;2]zy + [50;60]z, \\ \dot{z} \in -[1;2]z + [1;2]zy - [50;70]z. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда при заданном начальном значении для объемов популяций можно получить совокупность движений включения (11), используя все возможные значения параметров через шаг 0,1 или через шаг 1 соответственно. Это позволит получить примерную оценку точки равновесия B для каждого включения и оценить разброс точки равновесия при изменении параметров.

При проведенных исследованиях использовался математический пакет Mathematica 4.1.

Литература

[1] Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 386 с.

[2] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 288 с.

[3] Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2001. – 395 с.

[4] Меренков Ю.Н., Масина О.Н. Об устойчивости равновесия в экосистеме трех взаимосвязанных популяций // Вестник ЕГУ им. И.А.Бунина. Вып.5: Серия “Математика. Компьютерная математика”. – Елец: ЕГУ им. И.А.Бунина, 2005. – С.57-61.

[5] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978. – 256 с.

ОБ ОДНОЗНАЧНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ РЕШЕНИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Немец В.С.
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно
e-mail: nemets@grsu.by

В работе исследуются вопросы наличия однозначных трансцендентных решений с конечным числом нулей у алгебраического дифференциального уравнения второго порядка

$$\sum_{i=0}^{N} B_i(z)\, w^{\nu_{0i}}(w')^{\nu_{1i}}(w'')^{\nu_{2i}} = 0, \tag{1}$$

где $\nu_{0i},\ \nu_{1i}$ и $\nu_{2i},\ (i=\overline{0,N})$ — целые неотрицательные числа, коэффициенты уравнения (1) — функции $B_i(z),\ i=\overline{0,N}$, являются полиномами комплексного переменного z со следующим лексикографическим расположением членов

$$B_i(z) = \beta_i\, z^{b_i} + \ldots,\ \beta_i \neq 0,\ i=\overline{0,N}. \tag{2}$$

Эти вопросы для уравнения (1) изучаются в зависимости от параметров $\beta_i,\ b_i,\ \nu_{0i},\ \nu_{1i}$ и ν_{2i}, входящих в задание уравнения (1). С этой целью введём следующие условные обозначения: $\varkappa_i = \nu_{0i} + \nu_{1i} + \nu_{2i}$ – **размерность**, $\mathfrak{M}_i = \nu_{1i} + 2\nu_{2i}$ – **вес**, $\mathfrak{N}_i = \varkappa_i + \mathfrak{M}_i$ – **ёмкость** i-го члена уравнения (1). Члены уравнения (1) с максимальной размерностью назовём **доминирующими**, а члены с минимальной размерностью – **минорирующими**.

Одним из основных результатов исследования в данном напралении следует отметить теорему Г.Виттиха [1, с. 117], о том, что алгебраическое дифференциальное уравнение с одним доминирующим членом не имеет целых трансцендентных решений. Данный результат Н.П.Еругин применил для изучения мероморфных решений у первого неприводимого уравнения Пенлеве [2, с. 56].

В статье [3] В.Н.Горбузовым было дано обобщение теоремы Г. Виттиха на случай нескольких доминирующих членов, что позволило [4] исследовать однозначные решения с конечным числом полюсов у алгебраического дифференциального уравнения и в случае нескольких доминирующих.

Сфорулируем эти результаты на случай алгебраического дифференциального уравнения второго порядка (1).

Теорема 1. Пусть в дифференциальном уравнении (1) члены расположены следующим образом

$$\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_p = d,\ d > \varkappa_\eta,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ \eta = \overline{p+1,N}; \tag{3}$$

$$\mathfrak{M}_0 = \ldots = \mathfrak{M}_h = \mathfrak{M},\ \mathfrak{M} > \mathfrak{M}_j,\ 0 \leqslant h \leqslant p,\ j = \overline{h+1,p}; \tag{4}$$

$$b_0 = \ldots = b_\lambda = b, b > b_\tau, 0 \leqslant \lambda \leqslant h,\ j = \overline{\lambda+1,h}, \tag{5}$$

а коэффициенты (2) уравнения (1) удовлетворяют ограничениям

$$b - \mathfrak{M} \geqslant b_j - \mathfrak{M}_j,\ j = \overline{h+1, p}; \tag{6}$$

$$\sum_{l=0}^{\lambda} \beta_l \neq 0. \tag{7}$$

Тогда алгебраическое дифференциальное уравнение (1) не имеет целых трансцендентных решений.

Теорема 2. Если для алгебраического дифференциального уравнения (1) выполняются соотношения (3)-(7), то среди однозначных решений только рациональные имеют конечное число полюсов.

Эти теоремы могут быть использованы для исследования свойств однозначных решений алгебраического дифференциального уравнения (1). Например, для однозначных решений с конечным числом нулей справедлива

Теорема 3. Пусть в дифференциальном уравнении (1) члены расположены по правилу

$$\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_p = \mathfrak{d},\ \mathfrak{d} < \varkappa_\eta,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ \eta = \overline{p+1, N}, \tag{8}$$

(4) и (5), а коэффициенты (2) дифференциального уравнения (1) удовлетворяют ограничениям (6) и (7).

Тогда, среди однозначных решений алгебраического диффернциального уравнения (1) только рациональные имеют конечное число нулей.

Доказательство. Пусть алгебраическое дифференциальное уравнение (1) имеет однозначное решение $w = w(z)$ с конечным числом нулей и это решение не является рациональной функцией. Тогда функция $v(z)$, где $v(z)\, w(z) \equiv 1$, имеет конечное число полюсов.

Выполнив замену

$$w(z) = \frac{1}{v(z)}\,,$$

алгебраическое дифференциальное уравнение (1) приведём к виду

$$\sum_{i=0}^{N} (\,-1)^{\nu_{1i}} B_i(z)\, \{v^{\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_i}(v')^{\nu_{1i}}(2v'^2 - vv'')^{\nu_{2i}}\,\} = 0, \tag{9}$$

где $\mathfrak{N} = \max\limits_{i=\overline{0,N}} \mathfrak{N}_i\,.$

Таким образом, задача свелась к нахождению условий, когда дифференциальное уравнение (9) может иметь однозначные решения с конечным числом полюсов.

Заметим, что дифференциальное уравнение (9) является алгебраическим, то есть, относится к классу уравнений (1) и к уравнению (9) можем применить теорему 2.

Все члены уравнения (9) с одинаковым номером i имеют одинаковую размерность, равную

$$\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_i + \nu_{1i} + 2\nu_{2i} = \mathfrak{N} - \varkappa_i. \tag{10}$$

Относительно веса и степени коэффициента для членов уравнений (1) и (9) с номером i можно заключить, что они совпадают. Действительно, поскольку при умножении степени складаваются, то все члены уравнения (9) с номером i имеют вес $\nu_{1i}+2\nu_{2i}=\mathfrak{M}_i$, совпадающий с весом i-го члена уравнения (1). Так же, все члены уравнения (9) с номером i, стоящие в фигурных скобках, имеют постоянные коэффициенты. Поэтому, все члены уравнения (9) с номером i имеют одинаковую степень коэффициента b_i, совпадающую со степенью коэффициента i-го члена уравнения (1).

Согласно (10), наибольшие размерности соответствуют членам уравнения (9) с теми номерами i, при которых члены уравнения (1) имеют наименьшие размерности. Следовательно, расположение членов уравнения (1) по правилу (8) гарантирует расположение членов уравнения (9) по правилу (3).

Так как, веса с одинаковыми номерами i у членов уравнения (1) и (9) совпадают, то расположение членов уравнения (1) по правилу (4) гарантирует расположение членов уравнения (9) по этому же правилу. Аналогично, поскольку степени коэффициентов совпадают, то расположение членов уравнения (1) по правилу (5) гарантирует расположение членов уравнения (9) по этому же правилу. Более того, эти утверждения гаранитируют выполнение ограничения (6) для алгебраических дифференциальных уравнений (1) и (9) одновременно.

Таким образом, для применения теоремы 2 к алгебраическому дифференциальному уравнению (9), осталось проверить выполнения ограничения (7).

Поскольку

$$(2v'^2-vv'')^{\nu_{2i}}=\sum_{j=0}^{\nu_{2i}}C_{\nu_{2i}}^{j}(2v'^2)^{\nu_{2i}-j}(-vv'')^{j}=\sum_{j=0}^{\nu_{2i}}(C_{\nu_{2i}}^{j}2^{\nu_{2i}-j}(-1)^{j}(v'^2)^{\nu_{2i}-j}(vv'')^{j},$$

то сумма в (7) для уравнения (9) примет вид

$$\sum_{l=0}^{\lambda}\biggl((-1)^{\nu_{1i}}\beta_l\sum_{j=0}^{\nu_{2i}}(C_{\nu_{2i}}^{j}2^{\nu_{2i}-j}(-1)^{j}\biggr)=\sum_{l=0}^{\lambda}(-1)^{\nu_{1i}}((-1)^2)^{\nu_{2i}}\beta_l(2-1)^{\nu_{2i}}=$$

$$=\sum_{l=0}^{\lambda}(-1)^{\mathfrak{M}_i}\beta_l=(-1)^{\mathfrak{M}}\sum_{l=0}^{\lambda}\beta_l,\ i=\overline{0,N}.$$

Стало быть, ограничения (7) для алгебраических дифференциальных уравнений (1) и (9) выполняются одновременно.

Итак, если в дифференциальном уравнении (1) члены расположены по правилу (8), (4) и (5), справедливы ограничения (6) и (7), то дифференциальное уравнение (9) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Значит, только рациональные решения уравнения (9) могут иметь конечное число полюсов. Учитывая замену, приходим к справедливости утверждения теоремы 3. ■

Отметим отличие в условиях теорем 2 и 3. Если в формулировке теоремы 2 соотношения (4)-(7) должны выполняться для доминирующих членов уравнения (1), то в теореме 3 – для минорирующих.

Из теоремы 3 получаем

Следствие 1. У алгебраического дифференциального уравнения (1) с одним минорирующим членом среди однозначных решений только рациональные имеют конечное число нулей.

В [5] было показано применение теорем 1 и 2 на примере алгебраических дифференциальных уравнений не имеющих подвижных критических существенно особых точек.

Например, поскольку решение первого неприводимого уравнения Пенлеве

$$w'' = 6w^2 + z \tag{P-I}$$

не является рациональной функцией, то любое его решение имеет бесконечно много полюсов, сгущающихся к существенно особой точке в бесконечности. Даннай результат аналогичен приведённому в [2, с. 56].

Заметим далее, что первое неприводимое уравнение Пенлеве (P-I) имеет не только один доминирующий, но и один минорирующий член. Поэтому, на основании теоремы 3, можем утверждать, что любое решение уравнения (P-I) имеет бесконечно много нулей.

Таким образом, всякое решение первого неприводимого уравнения Пенлеве является трансцендентной мероморфной функцией, имеющей бесконечно много полюсов, сгущающихся к существенно особой точке в бесконечности, и бесконечно много нулей, то есть, всякое решение уравнения (P-I) можно представить в виде отношения двух целых трансцендентных функций с бесконечным числом нулей.

Непосредственно из теорем 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть в дифференциальном уравнении (1) члены расположены следующим образом

$$\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_{p_1} = d > \varkappa_\eta > \varkappa_{p_2} = \varkappa_{p_2+1} = \ldots = \varkappa_N,$$

$$0 \leqslant p_1 \leqslant N,\ 0 \leqslant p_2 \leqslant N,\ \eta = \overline{p_1+1, p_2-1};$$

$$\mathfrak{M}_0 = \ldots = \mathfrak{M}_{h_1} = \overline{\mathfrak{M}},\ \overline{\mathfrak{M}} > \mathfrak{M}_j,\ 0 \leqslant h_1 \leqslant p_1,\ j = \overline{h_1+1, p_1};$$

$$\mathfrak{M}_{p_2} = \mathfrak{M}_{p_2+1} = \ldots = \mathfrak{M}_{h_2} = \underline{\mathfrak{M}},\ \underline{\mathfrak{M}} > \mathfrak{M}_j,\ p_2 \leqslant h_2 \leqslant N,\ j = \overline{h_2+1, N};$$

$$b_0 = \ldots = b_{\lambda_1} = \overline{b}, \overline{b} > b_\tau, 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant h_1,\ j = \overline{\lambda_1+1, h_1},$$

$$b_{p_2} = b_{p_2+1} = \ldots = b_{\lambda_2} = \underline{b}, \underline{b} > b_\tau, 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant h_2,\ j = \overline{\lambda_2+1, h_2},$$

а коэффициенты (2) удовлетворяют ограничениям

$$\overline{b} - \overline{\mathfrak{M}} \geqslant b_j - \mathfrak{M}_j,\ j = \overline{h_1+1, p_1};$$

$$\underline{b} - \underline{\mathfrak{M}} \geqslant b_j - \mathfrak{M}_j,\ j = \overline{h_2+1, p_2};$$

$$\sum_{l=0}^{\lambda_1} \beta_l \neq 0; \qquad \sum_{l=0}^{\lambda_2} \beta_{p_2+l} \neq 0.$$

Тогда алгебраическое дифференциальное уравнение (1) может иметь лишь такие однозначные трансцендентные решения, которые одновременно имеют и бесконечно много полюсов и бесконечно много нулей.

Если учесть, что всякая целая функция является одновременно и мероморфной, то как следствие теоремы 3 справедлива

***Теорема* 5**. Пусть для уравнения (1) выполняются условия теоремы 3. Тогда среди целых решений алгебраического дифференциального уравнения (1) только полиномиальные могут иметь конечное число нулей или вообще нулей не иметь.

Заметим, что алгебраическое дифференциальное уравнение (1), члены которго расположены по правилу (3)–(5), могут иметь целые трансцендентные решения тогда и только тогда, когда нарушается хотя бы одно из условий (6) или (7) теоремы 1.

Пример 1. Для алгебраического дифференицального уравнения

$$(w')^2 + w^2 - 1 = 0 \tag{11}$$

нарушается условие (6) теоремы 1. Поэтому у алгебраического уравнения (11) могут быть целые трансцендентные решения. Таковыми например являются $w(z) = \cos z,\ w(z) = \sin z$. Все они имеют бесконечно много нулей, что соответствует утверждению теоремы 5, так как уравнение (11) имеет только один минорирующий член.

Пример 2. В [5, с. 23] показано, что пятое неприводимое уравнение Пенлеве

$$2z^2w^2w'' - 2z^2ww'' - 3z^2w(w')^2 + z^2(w')^2 + 2zw^2w' - 2zww' - 2\alpha w^5 +$$

$$+6\alpha w^4 - 2(\delta z^2 + \gamma z + 3\alpha + 2\beta)w^3 - 2(\delta z^2 - \gamma z - \alpha - 3\beta)w^2 - 6\beta w + 2\beta = 0 \quad \text{(P-V)}$$

может иметь целые трансцендентные решения лишь первого (при $\alpha = 0, \delta \neq 0$) или $\dfrac{1}{2}$ (при $\alpha = \delta = 0,\ \gamma \neq 0$). Во всех этих случаях нарушается условие (6) формулировки теоремы 3. Поэтому, в соответствии с теоремой 5, неприводимое уравнение Пенлеве (P-V) может иметь целые трансцендентные решения с конечным числом нулей.

Например, если $\alpha = \beta = 0,\ \gamma^2 + 2\delta = 0,\ \delta \neq 0$, то уравнение (P-V) имеет однопараметрическое семейство решений в виде целых трансцендентных функций без нулей первого порядка $w(z) = C \exp \gamma z$, где C – произвольная постоянная.

Литература

[1] Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 320 с.

[2] Еругин Н.П. Проблема Римана. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.

[3] Горбузов В.Н., Кишкель С.И. По поводу одной теоремы Виттиха // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т.23, №5. – С.891-893.

[4] Горбузов В.Н., Немец В.С. Об однозначных решениях дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26, №6. – С.1084-1085.

[5] Немец В.С. Однозначные решения дифференциальных уравнений: Дис:... канд. физ.-матем. наук: 01.01.02. – Гродно, 1991. – 125 с.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ И СИЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИ ВЛОЖИМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Павлючик П.Б.
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Беларусь, Гродно

В теории дифференциальных уравнений особое место занимают линейные дифференциальнные системы, исследование которых имеет самостоятельное значение, а также служит базой для изучения нелинейных систем дифференциальных уравнений по их линейному приближению. Переход от линейных к нелинейным дифференциальным системам сопровождается значительными трудностями, которые прежде всего связаны со сложностью свойств нелинейных систем. На этом аспекте теории дифференциальных уравнений сосредоточил внимание В.И. Мироненко, предложив разработанную им теорию вложимости дифференциальных систем [1]. При этом он опирался на добротную базу решения задач по первому приближению, заложенную классиками качественной теории А. Пуанкаре [2] и А.М. Ляпуновым [3]. Используя подход В.Н. Горбузова [4], введём понятия алгебраической вложимости и сильной алгебраической вложимости [5], и рассмотрим некоторые поставленные в [6] задачи.

Рассмотрим [5] автономную обыкновенную диффереciальную систему n-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = R(x), \tag{1}$$

где вектор-столбец $\dfrac{dx}{dt} = \operatorname{colon}\left(\dfrac{dx_1}{dt}, \ldots, \dfrac{dx_n}{dt}\right)$, векторная функция векторного аргумента $R\colon X \to \mathbb{K}^n$ определена на области X из арифметического вещественного или комплексного пространства $\mathbb{K}^n$ и представляет собой вектор-столбец $R(x) = \operatorname{colon}(R_1(x), \ldots, R_n(x))$, $\forall x \in X$, координаты $R_i\colon X \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, которого являются рациональными функциями с постоянными коэффициентами.

Определение 1. Автономную дифференциальную систему (1) назовём q-алгебраически вложимой, $q \leq n$, если для каждого решения $x\colon t \to x(t)$, $\forall t \in T$, этой системы соответственно можно указать систему q независимых алгебраических дифференциальных уравнений

$$\sum_{\xi=0}^{m_\zeta} a_{\xi_\zeta} \prod_{k=1}^{s_{\xi_\zeta}} \left(u^{\left(\nu_{k\xi_\zeta}\right)}\right)^{\mu_{k\xi_\zeta}} = 0 \tag{2}$$

с постоянными коэффициентами a_{ξ_ζ}, $I = \{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$, $I \subset \{1, \ldots, n\}$, из поля $\mathbb{K}$, $\nu_{k\xi_\zeta}$ и $\mu_{k\xi_\zeta}$ $\left(k = \overline{1, s_{\xi_\zeta}},\ s_{\xi_\zeta} \in \mathbb{N},\ \xi = \overline{0, m_\zeta}, m_\zeta \in \mathbb{N}, \zeta = \overline{1, q}\right)$ — целые неотрицательные числа, решением которой будет векторная функция $u\colon t \to (x_{\xi_1}(t), \ldots, x_{\xi_q}(t)), \forall t \in T$, с координатными функциями $x_i, i \in I$, являющимися компонентами решения x.

Определение 2. Автономную дифференциальную систему (1) назовём p-сильно q-алгебраически вложимой, $0 \leq p \leq q \leq n$, если она q-алгебраически вложима и для всех её решений $x\colon t \to x(t), \forall t \in T$, можно указать одну систему из p независимых алгебраических дифференциальных уравнений

$$\sum_{\xi=0}^{m_{\zeta_\theta}} a_{\xi_{\zeta_\theta}} \prod_{k=1}^{s_{\xi_{\zeta_\theta}}} \left(u^{\left(\nu_{k\xi_{\zeta_\theta}}\right)}\right)^{\mu_{k\xi_{\zeta_\theta}}} = 0,\ \theta = \overline{1,p},\ \left(i \le \zeta_\theta \le q,\ \theta = \overline{1,p}\right), \tag{3}$$

решениями которой будут векторные функции скалярного аргумента $u\colon t \to \left(x_{\xi_1}(t), \ldots, x_{\xi_q}(t)\right), \forall t \in T$, с координатными функциями x_i, $i \in I$, являющимися компонентами решений x.

Если система (1) 1-алгебраически вложима, то будем говорить, что дифференциальная система (1) алгебраически вложима по ξ_1-ой компоненте x_{ξ_1}, $\xi_1 \in \{1, \ldots, n\}$.

Если система (1) 0-сильно 1-алгебраически вложима, то будем говорить, что дифференциальная система (1) алгебраически вложима по ξ_1-ой компоненте $x_{\xi_1},\ \xi_1 \in \{1, \ldots, n\}$, но не сильно вложима.

Аналогично, 0-сильно q-алгебраически вложимая система (1) является q-алгебраически вложимой и не является сильно вложимой.

Если система (1) 1-сильно 1-алгебраически вложима, то будем говорить, что дифференциальная система (1) сильно алгебраически вложима по ξ_1-ой компоненте $x_{\xi_1},\ \xi_1 \in \{1, \ldots, n\}$.

Пример 1. Система Льенара [7, с. 174]

$$\frac{dx}{dt} = y - \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \tag{4}$$

где $a_i,\ i = \overline{1, 2n+1}$, — вещественные числа, является 2-сильно 2-алгебраически вложимой.

Действительно, пусть $x\colon t \to x(t),\ y\colon t \to y(t),\ \forall t \in T$, есть некоторое взятое произвольным образом решение дифференциальной системы (4). Тогда имеет место система тождеств

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} = -x(t),\ \forall t \in T. \tag{5}$$

Дифференцируя первое тождество, устанавливаем, что

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dy(t)}{dt} - \sum_{i=1}^{2n+1} i a_i x^{i-1}(t) \frac{dx(t)}{dt},\ \forall t \in T.$$

С учётом второго тождества системы (5) получаем

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -x(t) - \sum_{i=1}^{2n+1} i a_i x^{i-1}(t) \frac{dx(t)}{dt},\ \forall t \in T.$$

Следовательно, у любого решения обыкновенной дифференциальной системы (4) компонента $x\colon t \to x(t), \forall t \in T$, является решением алгебраического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sum_{i=1}^{2n+1} i a_i x^{i-1} \frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{6}$$

Таким образом, дифференциальная система (4) сильно алгебраически вложима по компоненте x в дифференциальное уравнение (6).

Продифференцируем второе тождество системы (5)

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} = -\frac{dx(t)}{dt}, \ \forall t \in T.$$

С учётом первого тождества системы (5) получаем, что

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} = -y(t) + \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i(t), \ \forall t \in T.$$

А учитывая второе тождество системы (5), будем иметь тождество

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} = -y(t) + \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^i a_i \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^i, \ \forall t \in T.$$

Следовательно, у любого решения системы (4) компонента $y\colon t \to y(t)$, $\forall t \in T$, является решением алгебраического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy^2}{dt^2} + \sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i+1} a_i \left(\frac{dy}{dt}\right)^i + y = 0. \tag{7}$$

Таким образом, дифференциальная система (4) сильно алгебраически вложима по компоненте y в дифференциальное уравнение (7).

В итоге устанавливаем, что полиномиальная дифференциальная система (4) 2-сильно 2-алгебраически вложима по компонентам x и y в систему алгебраических дифференциальных уравнений (6) и (7).

Это означает, что компоненты $x\colon t \to x(t), y\colon t \to y(t), \forall t \in T$, любого решения системы (4) являются решением системы алгебраических дифференциальных уравнений (6) и (7) с постоянными коэффициентами.

Определение 3. Непрерывно дифференцируемую на подобласти X' области X функцию $\nu\colon X' \to \mathbb{K}$ назовём множителем q-алгебраической вложимости (множителем p-сильной q-алгебраической вложимости) дифференциальной системы (1), если автономная обыкновенная дифферециальная система n-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = \nu(x) R(x), \tag{8}$$

где $R(x) = \operatorname{colon}(R_1(x), \ldots, R_n(x))$, $\forall x \in X$, $R_i\colon X \to \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, — рациональные функции с постоянными коэффициентами, является q-алгебраически вложимой (p-сильно q-алгебраически вложимой).

На основании алгебраической вложимости представляется возможность, например, решать задачи по построению дифференциальных систем (1), компоненты общего решения которых являются функциями-решениями конкретных дифференциальных уравнений. Частные и первые интегралы таких дифференциальных систем (1) определяют связи между этими функциями-решениями и, наоборот, если известны связи между этими функциями-решениями, то представляется возможность установления интегралов системы (1).

Покажем это на примерах.

Пример 2. Автономная полиномиальная дифференциальная система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 6x_1^2 \tag{9}$$

сильно алгебраически вложима по компоненте x_1 в дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 6x_1^2. \tag{10}$$

Из уравнения траекторий

$$6x_1^2 dx_1 - x_2 dx_2 = 0$$

системы (9) находим её общий автономный интеграл

$$4x_1^3 - x_2^2 = C_1. \tag{11}$$

Алгебраическое дифференциальное уравнение второго порядка (10) интегрируется в эллиптических функциях Вейерштрасса [8, с. 443]

$$x_1\colon t \to \wp(t - C_2;\, 0, C_1),\ \forall t \in T,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Вторая компонента общего решения дифференциальной системы (9) является производной этой функции Вейерштрасса:

$$x_2\colon t \to \wp'(t - C_2;\, 0, C_1),\ \forall t \in T.$$

Интеграл (11) доставляет определяющее дифференциальное уравнение

$$4\wp^3 - \left(\frac{d\wp}{dt}\right)^2 = C_1 \tag{12}$$

для функции Вейерштрасса $\wp$.

Наоборот, из определяющего дифференциального уравнения (12) устанавливаем, что семейство (11) является общим автономным интегралом системы (9).

Пример 3. Рассмотрим автономную полиномиальную дифференциальную систему третьего порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = 12x_1^2x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_2(1 + 12x_1^2). \tag{13}$$

Умножением правых частей системы (13) на функцию

$$\nu_1\colon (x_1, x_2, x_3) \to \frac{1}{2x_3},\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in X_1, \tag{14}$$

эту полиномиальную дифференциальную систему приводим к интегрально равносильной на множестве $X_1 = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_3 \neq 0\}$ автономной рациональной дифференциальной системе

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 6x_1^2, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_2(1+12x_1^2)}{2x_3}\,. \tag{15}$$

Как в примере 2 устанавливаем, что система (15) сильно алгебраически вложима по компоненте x_1 в дифференциальное уравнение (10). Общим решением дифференциальной системы (15) является

$$\begin{gathered} x_1\colon t \to \wp(t - C_2;\, 0, C_1), \quad x_2\colon t \to \wp'(t - C_2;\, 0, C_1), \\ x_3\colon t \to \pm\sqrt{4\wp^3(t - C_2; 0, C_1) + \wp(t - C_2; 0, C_1) + C_3},\ \forall t \in T, \end{gathered} \tag{16}$$

где $C_1,\ C_2$ и C_3 — произвольные постоянные.

Умножением правых частей системы (13) на функцию

$$\nu_2\colon (x_1, x_2, x_3) \to \frac{1}{2x_2}\,,\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in X_2, \tag{17}$$

эту полиномиальную дифференциальную систему приводим к интегрально равносильной на множестве $X_2 = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_2 \neq 0\}$ автономной рациональной дифференциальной системе

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{6x_1^2 x_3}{x_2}\,, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{2} + 6x_1^2. \tag{18}$$

Система (18) сильно алгебраически вложима по компоненте x_1 в дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 6x_1^2 + \frac{1}{2}\,, \tag{19}$$

которое интегрируется в эллиптических функциях Вейерштрасса [8, с. 443] $x_1\colon t \to \wp(t - C_2^1;\ -1, C_1^1), \forall t \in T$.

Тогда общим решением дифференциальной системы (18) является

$$\begin{gathered} x_1\colon t \to \wp(t - C_2^1;\ -1, C_1^1), \quad x_2\colon t \to \pm\sqrt{\frac{2}{3}\wp^3(t - C_2^1;\ -1, C_1^1) + C_3^1}, \\ x_3\colon t \to \wp'(t - C_2^1;\ -1, C_1^1),\ \forall t \in T, \end{gathered} \tag{20}$$

где $C_1^1,\ C_2^1$ и C_3^1 — произвольные постоянные.

Таким образом, функции (14) и (17) являются множителями сильной алгебраической вложимости по компоненте x_1 дифференциальной системы (13).

Нормальную полиномиальную дифференциальную систему (13) приводим к интегрально равносильной дифференциальной системе в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{2x_2x_3} = \frac{dx_2}{12x_1^2x_3} = \frac{dx_3}{x_2(1+12x_1^2)}\,,$$

и находим базис её автономных первых интегралов

$$4x_1^3 - x_2^2 = C_1, \quad 4x_1^3 + x_1 - x_3^2 = C_2. \tag{21}$$

Траектории рациональной дифференциальной системы (15), определяемые её решениями (16), а также траектории рациональной дифференциальной системы (18), определяемые её решениями (20), в соответствующих областях расположены на алгебраических многообразиях (21), определяемых полиномиальной дифференциальной системой (13).

Литература

[1] Мироненко В.И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1981. – 104 с.

[2] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.;Л.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

[3] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: В 6 т. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 473 с.

[4] Горбузов В.Н. Алгебраически вложимые системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, №9. – С. 1579 – 1580.

[5] Горбузов В.Н., Павлючик П.Б. О траекториях и построении функций Ляпунова алгебраически вложимых автономных дифференциальных систем // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Механика. – 1995. – № 1. – С. 38 – 42.

[6] Горбузов В.Н. Интегралы систем уравнений в полных дифференциалах: монография / В.Н. Горбузов. – Гродно: ГрГУ, 2005. – 273 с.

[7] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.

[8] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГНТИ, 1939. – 719 с.

К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ЯКОБИЕВОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Проневич П.Ф.
Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Гродно, Беларусь
e-mail: pavel-pronevich@rambler.ru

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{A}_j(x)u = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1}$$

построенную с помощью не являющихся линейно связанными [1] на пространстве $\mathbb{R}^n$ линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{A}_j(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x)\partial_{x_i},\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,m},$$

с линейными координатными функциями

$$a_{ji}\colon x \to \sum_{\xi=1}^{n} a_{ji\xi}x_\xi,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad a_{ji\xi} \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n},\ \xi = \overline{1,n},\ m \leqslant n.$$

Размерность интегрального базиса системы уравнений в частных производных (1) зависит от её полноты. Если система (1) полная [2], то базис состоит из $n-m$ функционально независимых на области из пространства $\mathbb{R}^n$ первых интегралов [3]. У неполной дифференциальной системы (1) размерность базиса первых интегралов устанавливаем по размерности базиса интегрально равносильной ей полной системы на области нормализации [4].

Основываясь на разработанных в статьях [5, 6] подходах, спектральным методом построен интегральный базис системы уравнений в частных производных [7] и автономной линейной системы уравнений в полных дифференциалах [8, 9]. При этом каждый раз интегралы строились на основании $m+1$ известных частных интегралов. В данной работе для системы (1) рассмотрено построение первых интегралов по меньшему количеству линейных частных интегралов в случае, когда она является якобиевой [2], что с помощью скобок Пуассона выражается системой тождеств

$$\bigl[\mathfrak{A}_j(x), \mathfrak{A}_\zeta(x)\bigr] = \mathfrak{O},\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,m},\ \zeta = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Условие (2) якобиевости дифференциальной системы (1) равносильно перестановочности матриц:

$$A_jA_\zeta = A_\zeta A_j, \quad j = \overline{1,m},\ \zeta = \overline{1,m}.$$

Это определяет связи [10] между собственными числами и общими собственными векторами матриц $A_j,\ j = \overline{1,m}$, с учётом которых имеет место

<u>Лемма 1</u> [7]. Пусть $\nu \in \mathbb{C}^n$ — общий собственный вектор матриц A_j, $j = \overline{1,m}$. Тогда линейная однородная функция

$$p\colon x \to \nu x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

является частным интегралом системы (1).

Применяя методы доказательств, аналогичные приведённым в [7], доказываем следующие закономерности о построении первых интегралов якобиевой системы уравнений в частных производных (1).

<u>Теорема 1</u>. Пусть ν^1 и ν^2 — общие вещественные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и λ_2^j, $j = \overline{1,m}$. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \frac{\nu^1 x}{\nu^2 x},\ \forall x \in X,$$

где X — область из множества $\{x\colon \nu^2 x \neq 0\}$, будет первым интегралом на области X якобиевой системы уравнений в частных производных (1), если и только если выполняются равенства $\lambda_1^j = \lambda_2^j,\ j = \overline{1,m}$.

Теорема 2. Пусть ν^1 и ν^2 — общие вещественные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и λ_2^j, $j = \overline{1,m}$. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \big(\nu^1 x\big)\big(\nu^2 x\big),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

является первым интегралом на пространстве $\mathbb{R}^n$ якобиевой системы (1), если и только если выполняются равенства $\lambda_1^j = -\lambda_2^j,\ j = \overline{1,m}$.

Теорема 3. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \widetilde{\nu}^1\, i$ и $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \widetilde{\nu}^2\, i$ — общие комплексные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и $\lambda_2^j,\ j = \overline{1,m}$. Тогда скалярные функции

$$F_1\colon x \to \frac{\big(\overset{*}{\nu}{}^1 x\big)\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big) + \big(\widetilde{\nu}^1 x\big)\big(\widetilde{\nu}^2 x\big)}{\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^2 x\big)^2}\,,\ \forall x \in X, \tag{3}$$

и

$$F_2\colon x \to \frac{\big(\overset{*}{\nu}{}^1 x\big)\big(\widetilde{\nu}^2 x\big) - \big(\widetilde{\nu}^1 x\big)\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)}{\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^2 x\big)^2}\,,\ \forall x \in X, \tag{4}$$

где X — область из множества $\big\{x\colon \big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^2 x\big)^2 \neq 0\big\}$, являются первыми интегралами на области X якобиевой системы (1), если и только если собственные числа совпадают по j, то есть $\lambda_1^j = \lambda_2^j,\ j = \overline{1,m}$.

Теорема 4. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \widetilde{\nu}^1\, i$ и $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \widetilde{\nu}^2\, i,\ \nu^1 \neq \overline{\nu^2}$, — общие комплексные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и λ_2^j, $j = \overline{1,m}$. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \frac{\big(\overset{*}{\nu}{}^1 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^1 x\big)^2}{\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^2 x\big)^2}\,,\ \forall x \in X, \tag{5}$$

где X — область из множества $\big\{x\colon \big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)^2 + \big(\widetilde{\nu}^2 x\big)^2 \neq 0\big\}$, является первым интегралом на области X якобиевой системы (1), если и только если собственные числа связаны равенствами $\operatorname{Re}\lambda_1^j = \operatorname{Re}\lambda_2^j,\ j = \overline{1,m}$.

Теорема 5. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \widetilde{\nu}^1\, i$ и $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \widetilde{\nu}^2\, i,\ \nu^1 \neq \overline{\nu^2}$, — общие комплексные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и λ_2^j, $j = \overline{1,m}$. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \frac{\big(\overset{*}{\nu}{}^1 x\big)\big(\widetilde{\nu}^2 x\big) - \big(\widetilde{\nu}^1 x\big)\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big)}{\big(\overset{*}{\nu}{}^1 x\big)\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big) + \big(\widetilde{\nu}^1 x\big)\big(\widetilde{\nu}^2 x\big)}\,,\ \forall x \in X, \tag{6}$$

где X — область из множества $\big\{x\colon \big(\overset{*}{\nu}{}^1 x\big)\big(\overset{*}{\nu}{}^2 x\big) + \big(\widetilde{\nu}^1 x\big)\big(\widetilde{\nu}^2 x\big) \neq 0\big\}$, является первым интегралом якобиевой системы (1), если и только если собственные числа связаны равенствами $\operatorname{Im}\lambda_1^j = \operatorname{Im}\lambda_2^j,\ j = \overline{1,m}$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 3 первые интегралы (3) и (4) системы (1) могут быть получены посредством первых интегралов (5) и (6) системы (1), построенных по теоремам 4 и 5 соответственно.

Теорема 6. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \widetilde{\nu}^1\, i$ и $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \widetilde{\nu}^2\, i$ — общие комплексные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и λ_2^j, $j = \overline{1,m}$. Тогда скалярные функции

$$F_1\colon x \to \bigl(\overset{*}{\nu}{}^1 x\bigr)\bigl(\overset{*}{\nu}{}^2 x\bigr) - \bigl(\widetilde{\nu}^1 x\bigr)\bigl(\widetilde{\nu}^2 x\bigr),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

и

$$F_2\colon x \to \bigl(\overset{*}{\nu}{}^1 x\bigr)\bigl(\widetilde{\nu}^2 x\bigr) + \bigl(\widetilde{\nu}^1 x\bigr)\bigl(\overset{*}{\nu}{}^2 x\bigr),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

являются первыми интегралами на пространстве $\mathbb{R}^n$ якобиевой системы уравнений в частных производных (1), если и только если собственные числа связаны равенствами $\lambda_1^j = -\lambda_2^j$, $j = \overline{1,m}$.

Теорема 7. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \widetilde{\nu}^1\, i$ и $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \widetilde{\nu}^2\, i$ — общие комплексные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и λ_2^j, $j = \overline{1,m}$. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \Bigl(\bigl(\overset{*}{\nu}{}^1 x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}^1 x\bigr)^2\Bigr)\Bigl(\bigl(\overset{*}{\nu}{}^2 x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}^2 x\bigr)^2\Bigr),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

является первым интегралом на пространстве $\mathbb{R}^n$ якобиевой системы уравнений в частных производных (1), если и только если выполняются равенства $\operatorname{Re}\lambda_1^j = -\operatorname{Re}\lambda_2^j$, $j = \overline{1,m}$.

Теорема 8. Пусть $\nu^1 = \overset{*}{\nu}{}^1 + \widetilde{\nu}^1\, i$ и $\nu^2 = \overset{*}{\nu}{}^2 + \widetilde{\nu}^2\, i$ — общие комплексные собственные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_1^j и λ_2^j, $j = \overline{1,m}$. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \frac{\bigl(\overset{*}{\nu}{}^1 x\bigr)\bigl(\widetilde{\nu}^2 x\bigr) + \bigl(\widetilde{\nu}^1 x\bigr)\bigl(\overset{*}{\nu}{}^2 x\bigr)}{\bigl(\overset{*}{\nu}{}^1 x\bigr)\bigl(\overset{*}{\nu}{}^2 x\bigr) - \bigl(\widetilde{\nu}^1 x\bigr)\bigl(\widetilde{\nu}^2 x\bigr)},\ \forall x \in X,$$

где X — область из множества $\bigl\{x\colon \bigl(\overset{*}{\nu}{}^1 x\bigr)\bigl(\overset{*}{\nu}{}^2 x\bigr) - \bigl(\widetilde{\nu}^1 x\bigr)\bigl(\widetilde{\nu}^2 x\bigr) \neq 0\bigr\}$, является первым интегралом на X, якобиевой системы (1), если и только если собственные числа связаны равенствами $\operatorname{Im}\lambda_1^j = -\operatorname{Im}\lambda_2^j$, $j = \overline{1,m}$.

Теорема 9. Пусть ν^k, $k = \overline{1,\theta}$, $\theta \in \{2,\dots,m\}$ — общие вещественные векторы матриц A_j, соответствующие собственным числам λ_k^j, $k = \overline{1,\theta}$, $j = \overline{1,m}$, таким, что все миноры θ-го порядка матрицы $\|\,\lambda_k^j\,\|_{m\times\theta}$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,\theta}$, равны нулю. Тогда скалярная функция

$$F\colon x \to \prod_{k=1}^{\theta} \bigl|\nu^k x\bigr|^{h_k},\ \forall x \in X, \tag{7}$$

где X — область из множества определения $\mathrm{D}(F)$, а вещественные числа h_k, $k = \overline{1,\theta}$ составляют нетривиальное решение системы

$$\sum_{k=1}^{\theta} \lambda_k^j h_k = 0, \quad j = \overline{1,m},$$

является первым интегралом на области X якобиевой системы (1).

Доказательство. Согласно лемме 1 линейные однородные функции

$$p_k\colon x \to \nu^k x,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\quad k = \overline{1,\theta},\ \theta \in \{2, \ldots, m\},$$

являются линейными частными интегралами системы уравнений в частных производных (1). Значит выполняется система тождеств

$$\mathfrak{A}_j p_k(x) = \lambda_k^j\, p_k(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,\theta}. \tag{8}$$

Составим функцию $F\colon x \to \prod\limits_{k=1}^{\theta} |p_k(x)|^{h_k}$, $\forall x \in X$, где X есть область из пространства $\mathbb{R}^n$, а h_k, $k = \overline{1,\theta}$, — вещественные числа, одновременно не равные нулю. Вычислим, с учётом тождеств (8), действие линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{A}_j$, $j = \overline{1,m}$, на эту функцию:

$$\mathfrak{A}_j F(x) = \sum_{k=1}^{\theta} \lambda_k^j\, h_k\, F(x),\ \forall x \in X,\ j = \overline{1,m}.$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{\theta} \lambda_k^j\, h_k = 0$, $j = \overline{1,m}$, то скалярная функция (7) будет первым интегралом системы уравнений в частных производных (1). ■

***Теорема* 10**. Пусть $\nu^0 = \overset{*}{\nu}{}^0 + \widetilde{\nu}^0\, i$ и $\nu^\theta = \overset{*}{\nu}{}^\theta + \widetilde{\nu}^\theta\, i$, $\theta = \overline{1, s-1}$, — общий комплексный собственный вектор матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, и присоединённые векторы матрицы A_ζ, которые соответствуют собственному числу λ^ζ имеющему элементарный делитель кратности s. Тогда, если:

1) $\mathfrak{A}_j v_p(x) = \mu_p^j$, $\mu_p^j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, $p \in \{1, \ldots, s-1\}$;

2) $\mathfrak{A}_j v_p(x) = i\mu_p^j$, $\mu_p^j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, $p \in \{1, \ldots, s-1\}$;

то соответственно первым интегралом на области X якобиевой системы (1) будет скалярная функция:

1) $F\colon x \to \operatorname{Im} v_p(x)$, $\forall x \in X$;

2) $F\colon x \to \operatorname{Re} v_p(x)$, $\forall x \in X$,

где X — область из множества $\bigl\{x\colon \bigl(\overset{*}{\nu}{}^0 x\bigr)^2 + \bigl(\widetilde{\nu}^0 x\bigr)^2 \neq 0\bigr\}$, а скалярные функции $v_\xi\colon X \to \mathbb{R}$, $\xi = \overline{1, \ldots, s-1}$, такие, что

$$\nu^\theta x = \sum_{\xi=1}^{\theta} \binom{\theta-1}{\xi-1} v_\xi(x)\, \nu^{\theta-\xi} x,\ \forall x \in X,\ \theta = \overline{1, s-1}.$$

Литература

[1] Горбузов В.Н. Математический анализ: теория поля. – Гродно: ГрГУ, 2000. – 627 с.

[2] Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 2. – М.; Л.: ОНТИ, 1936.

[3] Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – Л.; М.: ГТТИ. 1934. – 360 с.

[4] Горбузов В.Н. Симметрии многомерных дифференциальных систем с неполной интегрируемостью // Вестник Гроднен. гос. ун-та. Сер. 2. – 1999.– № 1.– С. 26 – 37.

[5] Горбузов В.Н. Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). – 2000. – № 2. – С. 1 – 36.

[6] Горбузов В.Н. Построение первых интегралов и последних множителей автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1998. Т. 34, № 4. – С. 562 – 564.

[7] Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). – 2001. – № 3. – С. 17 – 45.

[8] Проневич А.Ф. Автономные интегралы линейных систем в полных дифференциалах / Ред. журнала "Дифференц. уравнения". – Минск, 2002. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.10.2002. – № 1667-В2002.

[9] Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. Интегралы $\mathbb{R}$-линейных систем в полных дифференциалах // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 49 – 52.

[10] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: "Наука", 1988. – 549 с.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ВИДОИЗМЕНЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИКЬЕ ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Расулов К.М., Сенчилов В.В.
Смоленский государственный университет
Смоленск
e-mail: icspgu@sci.smolensk.ru, vvsok@yandex.ru

Постановка задачи. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, $T^+ = \{t : |t| < 1\}$, $T^- = \overline{C} \backslash (T^+ \cup L)$.

В дальнейшем, в основном, будем пользоваться терминами и обозначениями, принятыми в [1]. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Пусть в точках контура L задана функция вида:

$$G(t) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j}} G_1(t), t \in L, \qquad (*)$$

где $G_1(t)$ - функция, удовлетворяющая условию Гельдера и не обращающаяся в нуль на L; здесь $\alpha_1, \ ..., \alpha_\mu$ и $\beta_1, \ ..., \beta_\nu$ – некоторые точки контура L, а m_k и p_j – целые положительные числа.

Требуется найти все метааналитические функции $F^+(z)$ класса $M_2(T^+)\cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L, за исключением, быть может, конечного числа точек $\alpha_1, \ ..., \alpha_\mu$ и $\beta_1, \ ..., \beta_\nu$, следующему краевому условию:

$$\Delta F^+(t)+G(t)\overline{F^+(t)}=g(t), \qquad (1)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $G(t)$ – функция вида (*), $g(t)$ – заданная на L функция класса $H(L)$.

О решении видоизмененной задачи типа Рикье в исключительном случае В случаях, когда $G(t)\equiv 0$ или $G(t)\neq 0, \ t\in L$, задача (1) была исследована в работе авторов [3]. В данной заметке задача исследуется в приведенной выше постановке.

Будем искать решение задачи (1) в виде

$$F^+(z)=(\varphi_0^+(z)+\overline{z}\varphi_1^+(z))e^{\lambda_0\overline{z}}, \text{ при } \lambda_0\neq 0. \qquad (2)$$

Тогда, с учетом $\Delta=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}$, $\overline{t}=\frac{1}{t}, \ t\in L$, представления (2) краевое условие (1) можно переписать так:

$$\lambda_0 t\frac{d\ \varphi_0^+(t)}{d\ t}+(t+\lambda_0)\frac{d\ \varphi_1^+(t)}{d\ t}-G_2(t)[\frac{1}{t}\overline{\varphi_0^+(t)}+\overline{\varphi_1^+(t)}]=g_2(t), \qquad (3)$$

где

$$G_2(t)=-\frac{1}{4}t^2G(t)e^{\overline{\lambda_0}t-\lambda_0\overline{t}}, \ g_2(t)=\frac{1}{4}tg(t)e^{-\lambda_0\overline{t}}. \qquad (3a)$$

Вводя в рассмотрение новые аналитические соответственно в T^+ и T^- функции вида

$$\Phi^+(z)=\lambda_0 z\frac{d\ \varphi_0^+(z)}{d\ z}+(z+\lambda_0)\frac{d\ \varphi_1^+(z)}{d\ z}, \ z\in T^+, \qquad (4)$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{z}\overline{\varphi_0^+}(\frac{1}{z})+\overline{\varphi_1^+}(\frac{1}{z}), \ z\in T^-, \qquad (5)$$

краевое условие (3), в свою очередь, можно записать так:

$$\Phi^+(t)=G_2(t)\Phi^-(t)+g_2(t), \ t\in L. \qquad (6)$$

<u>Замечание 1.</u> Отметим, что для всякого z, не лежащего на контуре L, из равенства (5) вытекает "условие симметрии":

$$\overline{\Phi(z)}=\widetilde{\Psi}^+(z_*), \qquad (**)$$

где $\widetilde{\Psi}^+(z_*)=z_*\varphi_0^+(z_*)\varphi_1^+(z_*)$, а z_* – точка, симметричная z относительно контура L.

Равенство (6) есть краевое условие скалярной задачи Римана в исключительном случае относительно кусочно аналитической функции $\Phi(z)=\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$.

Пусть $\varkappa=Ind\ G_1(t)$, $\sum\limits_{j=1}^{\nu}p_j=p$, тогда, решая задачу (6), при $\varkappa+2-p\geq 0$ (см., например, [2], с. 136) получим:

$$\Phi^+(z)=Y^+(z)+X^+(z)\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}P_{\varkappa-p+2}(z), \qquad (6a)$$

$$\Phi^-(z) = Y^+(z) + X^+(z)\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}P_{\varkappa-p+2}(z), \qquad (6b)$$

где $P_{\varkappa-p+2}(z)$ – многочлен степени не выше $\varkappa - p + 2$ с произвольными комплексными коэффициентами, $X^{\pm}(z)$ – канонические функции однородной задачи Римана с коэффициентом $-\frac{1}{4}t^2G_1(t)e^{\overline{\lambda_0}t-\lambda_0\bar{t}}$, $Y^{\pm}(z)$ – канонические функции неоднородной задачи, которые выражаются следующим образом:

$$Y^+(z) = X^+(z)\frac{\Psi^+(z) - Q_\varrho(z)}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}},\ Y^-(z) = X^-(z)\frac{\Psi^-(z) - Q_\varrho(z)}{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}}, \qquad (6c)$$

где $\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \prod\limits_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j}\frac{g_2(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\,\tau}{\tau - z}$, $Q_\varrho(z)$ – интерполяционный многочлен Эрмита для функции $\Psi(z) = \begin{cases} \Psi^+(z) & \text{в точках } \beta_j, \\ \Psi^-(z) & \text{в точках } \alpha_k \end{cases}$ с узлами интерполяции β_j, α_k кратностей, соответственно, p_j, m_k, а $\varrho = m + p - 1$.

Если $\varkappa - p + 2 < 0$, то в формулах (6a) и (6b) нужно положить $P_{\varkappa-p+2}(z) \equiv 0$, и для разрешимости задачи (6) необходимо и достаточно выполнение $p - \varkappa - 3$ условий вида:

$$c_\varrho = c_\varrho - 1 = \ldots = c_{\varrho-p+\varkappa+4} = 0, \qquad (6d)$$

где $c_0,\ c_1,\ ...,\ c_\varrho$ – коэффициенты многочлена $Q_\varrho(z)$, а

$$c_{-s} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j}g_2(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{s-1}d\,\tau \qquad (s = 1,\ ...,\ p - \varkappa - 4 - \varrho).$$

Далее, заменяя z на $1/\overline{\zeta}$, из (5) будем иметь:

$$\overline{\zeta}\overline{\varphi_0^+(\zeta)} + \overline{\varphi_1^+(\zeta)} = \Phi^-(1/\overline{\zeta}) \text{ или } \zeta\varphi_0^+(\zeta) + \varphi_1^+(\zeta) = \widetilde{\Psi}^+(\zeta),\ |\zeta| < 1, \qquad (7)$$

где $\widetilde{\Psi}^+(\zeta) = \overline{\Phi^-}(1/\zeta)$.

Наконец, заменив в (7) ζ на z, получим

$$z\varphi_0^+(z) + \varphi_1^+(z) = \widetilde{\Psi}^+(z),\ z \in T^+. \qquad (8)$$

Тогда из формулы (4) получаем

$$z\frac{d\,\varphi_0^+(z)}{d\,z} + (1 + \frac{z}{\lambda_0})\frac{d\,\varphi_1^+(z)}{d\,z} = \frac{1}{\lambda_0}\Phi^+(z). \qquad (9)$$

В свою очередь, дифференцируя по z, из (8) находим

$$z\frac{d\,\varphi_0^+(z)}{d\,z} + \frac{d\,\varphi_1^+(z)}{d\,z} + \varphi_0^+(z) = \frac{d}{d\,z}[\widetilde{\Psi}^+(z)]. \qquad (10)$$

Вычитая почленно из (9) равенство (10), будем иметь:

$$\frac{z}{\lambda_0}\frac{d\,\varphi_1^+(z)}{d\,z} - \varphi_0^+(z) = \frac{1}{\lambda_0}\Phi^+(z) - \frac{d}{d\,z}[\widetilde{\Psi}^+(z)]. \qquad (11)$$

С другой стороны, из равенства (8) имеем:

$$\varphi_0^+(z) = \frac{1}{z}\widetilde{\Psi}^+(z) - \frac{1}{z}\varphi_1^+(z). \tag{12}$$

Замечание 2. Из соотношения (12) видно, что в рассматриваемом случае для разрешимости исходной задачи (1) также должно выполняться условие вида:

$$\widetilde{\Psi}^+(0) = \varphi_1^+(0). \tag{13}$$

Наконец, подставив в левую часть равенства (11) вместо $\varphi_0^+(z)$ ее значение из (12), получим

$$\frac{d\ \varphi_1^+(z)}{d\ z} + \frac{\lambda_0}{z^2}\varphi_1^+(z) = Q(z), \tag{14}$$

где

$$Q(z) = \frac{1}{z}\Phi^+(z) - \lambda_0\frac{d}{d\ z}(\frac{1}{z}\widetilde{\Psi}^+(z)). \tag{14a}$$

Таким образом, для решения задачи (1) необходимо найти все аналитические в T^+ решения $\varphi_1^+(z)$ линейного неоднородного дифференциального уравнения (14), непрерывно продолжаемые на контур L, причем так, что граничные значения этих функций удовлетворяют на L условию Гельдера.

Будем искать аналитические в круге T^+ решения уравнения (14) методом степенных рядов, то есть функцию $\varphi_1^+(z)$ будем искать в виде степенного ряда:

$$\varphi_1^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{15}$$

где a_n – некоторые комплексные числа.

При этом важно заметить, что функция $Q(z)$, определяемая по формуле (14a), является, вообще говоря, мероморфной в круге T^+ с единственным полюсом $z = 0$ не выше второго порядка. Следовательно, функцию $Q(z)$ можно представить в виде следующего ряда Лорана:

$$Q(z) = \sum_{s=-2}^{\infty} b_s z^s, \tag{16}$$

где b_s – некоторые комплексные числа.

Учитывая (15) и (16), из (14) имеем:

$$\lambda_0 a_0\frac{1}{z^2} + \lambda_0 a_1\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 a_{n+2} + (n+1)a_{n+1})z^n = \sum_{s=-2}^{\infty} b_s z^s. \tag{17}$$

Очевидно, что (17) равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 = b_{-2}, \\ \lambda_0 a_1 = b_{-1}, \\ \lambda_0 a_2 + a_1 = b_0, \\ \lambda_0 a_3 + 2a_2 = b_1, \\ \ldots\ldots, \\ \lambda_0 a_{n+2} + (n+1)a_{n+1} = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{18}$$

Решая систему (18) относительно коэффициентов a_s, получим

$$a_0 = \frac{b_{-2}}{\lambda_0}, \; a_1 = \frac{b_{-1}}{\lambda_0}, \; a_{n+1} = \sum_{q=1}^{n+1} \frac{(-1)^{q+1} n! b_{n-q}}{(n-q+1)! \lambda_0^q} \; (n = 1, \; 2, \; \ldots). \tag{19}$$

Таким образом, функция вида

$$\varphi_1^+(z) = \frac{b_{-2}}{\lambda_0} + \frac{b_{-1}}{\lambda_0} z + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{n+1} \frac{(-1)^{q+1} n! b_{n-q}}{(n-q+1)! \lambda_0^q} z^{n+1} \tag{20}$$

будет аналитическим в круге $T^+ = \{t : |t| < 1\}$ решением дифференциального уравнения (14), если этот ряд сходится в этом круге.

***Замечание* 3.** Поскольку решения исходной краевой задачи (1) должны принадлежать классу $M_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, то для того чтобы аналитическая в $T^+ = \{t : |t| < 1\}$ функция $\varphi_1^+(z)$, определяемая формулой (20), была аналитической компонентой искомого решения краевой задачи (1), нужно еще выполнение следующего условия:

$$\left| \frac{d \; \varphi_1^+(z)}{dz} \right| \leq \frac{M}{(1-r)^{1-\alpha}}, \; r = |z|, \; 0 < \alpha \leq 1, \tag{21}$$

где M – конечная постоянная.

Как известно (см., например, [4], с. 353), согласно теореме Харди и Литтльвуда, условия (21) являются необходимыми и достаточными, для того чтобы аналитическая в круге $T^+ = \{t : |t| < 1\}$ функция $\varphi_1^+(z)$ была непрерывной в замкнутом круге $\overline{T^+} = \{t : |t| \leq 1\}$ и на окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ удовлетворяла условию Гельдера: $|\varphi_1^+(t_1) - \varphi_1^+(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\alpha, \; A = const.$

***Замечание* 4.** В дальнейшем ради удобства будем говорить, что дифференциальное уравнение (14) *разрешимо в круге* $T^+ = \{t : |t| < 1\}$, если оно имеет аналитические в этом круге решения, удовлетворяющие условию (21). В противном случае его будем называть *неразрешимым в круге* $T^+ = \{t : |t| < 1\}$.

***Замечание* 5.** Как видно из формул (6а), (14а), (20), при $\varkappa - p + 2 \geq 0$ в решение дифференциального уравнения (14) может линейно входить не более $h = 2(\varkappa - p + 3)$ произвольных действительных постоянных.

Предположим, что уже найдены все аналитические в круге T^+ решения $\varphi_1^+(z)$ дифференциального уравнения (14), удовлетворяющие условию (21). Тогда аналитическую компоненту $\varphi_0^+(z)$ искомой метааналитической функции $F^+(z)$ можно найти по формуле (12).

Далее, подставив в формулу (2) вместо $\varphi_1^+(z)$ и $\varphi_0^+(z)$ их значения, задаваемые по формулам (20) и (12) и удовлетворяющие условиям "симметрии"(**), решение искомой задачи (1) в рассматриваемом случае получим по формуле:

$$F^+(z) = \left[\frac{1}{z} \left(\widetilde{\Psi}^+(z) - \left(\frac{b_{-2}}{\lambda_0} + \frac{b_{-1}}{\lambda_0} z + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{n+1} \frac{(-1)^{q+1} n! b_{n-q}}{(n-q+1)! \lambda_0^q} z^{n+1} \right) \right) + \right.$$

$$+\,\overline{z}\left(\frac{b_{-2}}{\lambda_0}+\frac{b_{-1}}{\lambda_0}z+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=1}^{n+1}\frac{(-1)^{q+1}n!b_{n-q}}{(n-q+1)!\lambda_0^q}z^{n+1}\right)\Bigg]\,e^{\lambda_0\overline{z}}. \qquad (22)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$, $\lambda_0\neq 0$. Тогда решение задачи (1) сводится к последовательному решению обычной скалярной задачи Римана (6) и дифференциального уравнения (14), причем в случае $\varkappa-p+2\geq 0$ ее общее решение, задаваемое формулой (22), линейно зависит не более чем от $2(\varkappa-p+3)$ произвольных действительных постоянных. Кроме того, если $\varkappa-p+2\geq 0$, то для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы дифференциальное уравнение (14) было разрешимым в круге $T^+=\{t:|t|<1\}$ и выполнялось условие (13); если же $\varkappa-p+2<0$, то для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно выполнение условий (6d), (13) и разрешимость в круге $T^+=\{t:|t|<1\}$ дифференциального уравнения (14).

Литература

[1] Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 345 с.

[2] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.

[3] Расулов К.М., Сенчилов В.В. О решении одной видоизмененной краевой задачи типа Рикье для метааналитических функций в круге //Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям / Смоленский гос. пед. ун-т. – Смоленск, 2002. – Вып. 4: – С. 62 – 68.

[4] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАУЭРА-ПЕШЛЯ

Расулов Р.К.

Смоленский государственный университет

Смоленск

e-mail: icspgu@sci.smolensk.ru

1. Постановка задачи. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L. Область, дополняющую $T^+\cup L$ до полной плоскости, обозначим через T^- и будем считать, что начало координат находится в T^+.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Бауэра-Пешля (см., например, [1]-[2])

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial\overline{z}}+\frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2}W=0, \qquad (1.1)$$

где n - некоторое фиксированное натуральное число.

В дальнейшем под *регулярным решением* дифференциального уравнения (1.1) в некоторой области T^+ будем понимать всякую функцию $W(z) = U(x,y)+iV(x,y)$, непрерывную в T^+ вместе со своими частными производными (по x и y) до второго порядка включительно и удовлетворяющую уравнению (1.1) в рассматриваемой области (см. также, например, [3], с. 267). Хорошо известно [1]-[2], что всякое регулярное решение дифференциального уравнения (1.1) в области T^+ можно представить в виде:

$$W(z) = \sum_{k=o}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \tag{1.2}$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k}\frac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ – аналитическая (голоморфная) в области T^+ функция.

В частности, если $n = 2$, то представление (1.2) принимает вид:

$$W(z) = \frac{d^2\varphi^+(z)}{dz^2} - 6\left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)\frac{d\varphi^+(z)}{dz} + 12\left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^2 \varphi^+(z). \tag{1.3}$$

Далее рассматривается следующая краевая задача для уравнения Бауэра-Пешля (1.1.).

Задача D. *Требуется найти все регулярные в области T^+ решения уравнения (1.1), непрерывно продолжаемые на контур L и удовлетворяющие на L условию:*

$$W(t) + G(t)\overline{W(t)} = f(t), \tag{1.4}$$

где $G(t)$ и $f(t)$- заданные на контуре L функции класса $H(L)$ (Гёльдера).

В дальнейшем сформулированную задачу **D** будем называть *видоизмененной задачей типа Дирихле для уравнения (1.1).* Если же в (1.4) $f(t) \equiv 0$, то соответствующую задачу называем *однородной задачей типа Дирихле.*

Ясно, что если $G(t) \equiv 0$, то задача (1.4) представляет собой обычную (классическую) краевую задачу Дирихле для дифференциального уравнения (1.1).

В данной заметке задача (1.4) исследуется в случае $n = 2$ и когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

2. О решениях задачи (1.4) в случае $G(t) \equiv 0$ и $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

Сразу отметим, что в отличие от классической задачи Дирихле для уравнения Лапласа (см., например, [3], с. 267), однородная задача (1.4) для уравнения (1.1) в случае $G(t) \equiv 0$ может иметь ненулевые решения. А именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. Всякая функция вида

$$W_0(z) = C_1\frac{6\overline{z}(z\overline{z}-1)}{(z\overline{z}+1)^2} + C_2\frac{6z(1-z\overline{z})}{(z\overline{z}+1)^2}, \tag{2.1}$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные, является решением однородной задачи Дирихле

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{6}{(1+z\overline{z})^2}W = 0, \ z \in T^+, \\ W(t) = 0, \ t \in L, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

Доказательство. В силу представления (1.3) и так как в точках окружности $L = \{t : |t| = 1\}$ выполняется тождество $\overline{t} = \frac{1}{t}$, краевое условие $W(t) = 0,\ t \in L$, в рассматриваемом случае принимает вид следующего однородного дифференциального уравнения Эйлера (см., например, [4], с. 207):

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2}\varphi^+(t) = 0,\ t \in L. \tag{2.3}$$

Нетрудно проверить, что условию (2.3) удовлетворяют граничные значения всякой аналитической в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции вида: $\varphi^+(z) = C_1 z + C_2 z^2$, где $C_1,\ C_2$ - произвольные комплексные постоянные. Следовательно, в силу (1.3), функции вида (2.1) будут решениями однородной задачи (2.2) в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$. *Лемма доказана.*

Лемма 2.2. Если $f(t)$ является граничным значением аналитической в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$, то частное решение неоднородной задачи Дирихле

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{6}{(1+z\overline{z})^2} W = 0,\ z \in T^+, \\ W(t) = f(t),\ t \in L, \end{cases} \tag{2.4}$$

можно задавать в виде:

$$W_1(z) = f(z) + \frac{3\overline{z}(1 - z\overline{z})}{(1 + z\overline{z})^2} \int\limits_0^z f(\zeta) d\zeta + \frac{3z(1 - z\overline{z})}{(1 + z\overline{z})^2} \int\limits_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta, \tag{2.5}$$

где z - произвольная точка круга $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

Доказательство. В силу представления (1.3) краевое условие $W(t) = f(t)$ в данном случае принимает вид следующего неоднородного дифференциального уравнения Эйлера:

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2}\varphi^+(t) = f(t),\ t \in L. \tag{2.6}$$

Легко проверить, что граничные значения функции вида $-\frac{z}{2}\int\limits_0^z f(\zeta)d\zeta + \frac{z^3}{2}\int\limits_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (2.6). Но тогда в силу представления (1.3) функция вида (2.5) будет решением задачи (2.4). *Лемма доказана.*

На основании лемм 2.1 и 2.2 получаем следующий результат.

Теорема 2.1. Если $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int\limits_L f(t) \cdot t^{m-2} dt = 0,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

то все функции вида

$$W(z) = C_1\frac{6\overline{z}(z\overline{z}-1)}{(z\overline{z}+1)^2} + C_2\frac{6z(1-z\overline{z})}{(z\overline{z}+1)^2} +$$

$$+f(z) + \frac{3\overline{z}(1-z\overline{z})}{(1+z\overline{z})^2}\int\limits_0^z f(\zeta)d\zeta + \frac{3z(1-z\overline{z})}{(1+z\overline{z})^2}\int\limits_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta, \qquad (2.8)$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные, а z - произвольная точка круга $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, будут решениями задачи Дирихле (2.4) в круге T^+.

3. О решениях видоизмененной краевой задачи Дирихле для уравнения (1.1) в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$.

Всюду в данном пункте предполагаем, что в (1.1) $n = 2$ и на контуре L выполняется условие:

$$G(t) \neq 0,\ t \in L. \qquad (3.1)$$

С учетом представления (1.3) краевое условие (1.4) можно записать так:

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2}\varphi^+(t) + G(t)\left(\overline{\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}} - 3t\overline{\frac{d\varphi^+(t)}{dt}} + 3t^2\overline{\varphi^+(t)}\right) = f(t). \qquad (3.2)$$

Далее, вводя в рассмотрение вспомогательную аналитическую в T^- функцию вида (см. также, например, [5], с. 290)

$$\varphi^-(z) = \overline{\varphi^+}\left(\frac{1}{z}\right),\ z \in T_-, \qquad (3.3)$$

краевое условие (3.2) перепишем в виде:

$$\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2} - \frac{3}{t}\frac{d\varphi^+(t)}{dt} + \frac{3}{t^2}\varphi^+(t) + t^4G(t)\frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2} + 5t^3G(t)\frac{d\varphi^-(t)}{dt} + 3t^2G(t)\varphi^-(t) = f(t). \qquad (3.4)$$

***Замечание* 3.1.** Отметим, что при выводе формулы (3.4) мы учли, что

$$\overline{\frac{d^2\varphi^+(t)}{dt^2}} = t^4\frac{d^2\varphi^-(t)}{dt^2} + 2t^3\frac{d\varphi^-(t)}{dt},\ \ \overline{\frac{d\varphi^+(t)}{dt}} = -t^2\frac{d\varphi^-(t)}{dt},\ \ \overline{\varphi^+(t)} = \varphi^-(t),\ t \in L.$$

При выполнении условия (3.1), равенство (3.4) представляет собой краевое условие обобщенной задачи Римана *нормального типа* в классе кусочно-аналитических функций, ограниченных на бесконечности (см., например, [5], 365).

В настоящее время известны различные общие подходы к решению краевых задач вида (3.4) (см., например, [5]-[7]), которые в общем случае состоят в том, что решение обобщенной задачи Римана вида (3.4) приводится к решению определенного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

***Теорема* 3.1.** Если выполняется условие (3.1), то решение задачи **D** в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ сводится к решению обобщенной задачи Римана (3.4) нормального типа в классе кусочно-аналитических функций с линией скачков L.

Литература

[1] Bauer K.W. Uber eine der Differentialgleichung $(1+z\overline{z})^2 W_{z\overline{z}} \pm n(n+1)W = 0$ zugeordnete Funktionentheorie // Bonner math. Schriften 23 (1965).

[2] Heersink R. Uber Lösungen der Bauer-Peschl-Gleichung und polyanalytische Funktionen // Ber. Math.-Statist. Sek. Forschung. Joanneum, Bericht №268 (1986).

[3] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М., 1957.

[4] Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989.

[5] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.

[6] Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970.

[7] Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СГПУ, 1998.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ТРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРОЙ ЛИ

Тимошин М.И., Яковлева Ю.О.
Самарский государственный педагогический университет
Самара
e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

В предлагаемой работе, опираясь на классификацию трехмерных алгебр Ли на плоскости [1] и известные классические алгоритмы [2,3], строится обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, допускающее трехмерную алгебру, и связанные с ним обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. В основу построения кладётся трёхмерная алгебра

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = a_1 e^{a_2 x + a_3 y}\frac{\partial}{\partial x} + a_4 e^{a_2 x + a_3 y}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{1}$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = a_2 X_3, \qquad [X_2, X_3] = \quad a_3 X_3 \quad ;$$

при условии $a_1 a_2 + a_3 a_4 \neq 0$.

Для облегчения выкладок используется замена переменных

$$u = a_1 y - a_4 x, \quad t = -\frac{e^{-a_2 x - a_3 y}}{a_1 a_2 + a_3 a_4}, \tag{2}$$

приводящая оператор $X_3 = a_1 e^{a_2 x + a_3 y}\frac{\partial}{\partial x} + a_4 e^{a_2 x + a_3 y}\frac{\partial}{\partial y}$ к оператору переноса $X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$.

В переменных (2) алгебра (1) приводится к виду:

$$X_1 = -a_2 t\frac{\partial}{\partial t} - a_4\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = -a_3 t\frac{\partial}{\partial t} + a_1\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Следовательно, в переменных u, t можно выбрать более простую алгебру:

$$\hat{X}_1 = t\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad \hat{X}_3 = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{3}$$

Алгебре (3) соответствуют инварианты $I_3 = \frac{\dddot{u}}{\dot{u}^3}$, $I_2 = \frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2}$ и, таким образом, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\frac{\dddot{u}}{\dot{u}^3} = \Omega\left(\frac{\ddot{u}}{\dot{u}^2}\right). \tag{4}$$

Стандартной процедурой понижения порядка дифференциального уравнения (4), допускающего симметрии (3), найдено общее решение в виде:

$$u = \int \frac{d\omega}{\Omega(\omega) - 2\omega^2} + c_1, \quad t = \frac{1}{c_2}\int \frac{d\omega}{\left(\Omega(\omega) - 2\omega^2\right) e^{\int \frac{\omega d\omega}{(\Omega(\omega) - 2\omega^2)}}} + c_3.$$

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, получаемые из уравнения (4) с помощью произвольной однопараметрической группы, принадлежащей алгебре (3).

Оператор, соответствующей однопараметрической группе, в общем случае имеет вид:

$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$, или $X = (\alpha_1 t + \alpha_3)\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial u} - \alpha_1 \dot{u}\frac{\partial}{\partial \dot{u}}$,

где α_1, α_2, $\alpha_3 = \mathrm{const}$.

Инварианты этого оператора определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{dt}{\alpha_1 t + \alpha_3} = \frac{du}{\alpha_2} = -\frac{d\dot{u}}{\alpha_1 \dot{u}}.$$

В зависимости от коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ получим следующие случаи:

$$p\frac{d^2p}{du^2} - 3\frac{dp}{du} + \left(\frac{dp}{du}\right)^2 + 2 = p^2\Omega\left(\frac{\frac{dp}{du} - 1}{p}\right), \text{ где } p = t\dot{u};$$

$$(\alpha_2 - p)\left[\frac{d^2p}{dq^2}(\alpha_2 - p) - \left(\frac{dp}{dq}\right)^2\right] = p^3\Omega\left(\frac{\frac{dp}{dq}(\alpha_2 - p)}{p^2}\right), \text{ где } p = \dot{u},\ q = \alpha_2 t - u;$$

$$(\alpha_2 - p)\left[\frac{d^2p}{dq^2}(\alpha_2 - p) + 3\frac{dp}{dq} - \left(\frac{dp}{dq}\right)^2\right] + 2p = p^3\Omega\left(-\frac{\frac{dp}{dq}(\alpha_2 - p) + p}{p^2}\right),$$

где $p = t\dot{u}$, $q = u - \alpha_2 \ln t$.

Литература

[1] М.И. Тимошин, Ю.О. Яковлева. Трехмерные алгебры Ли на плоскости // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2005”. – СПб., 2005. – С.110-114.

[2] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. – М.: Знание, №8. 1989.
[3] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. – М.: "Знание", сер. "Математика и кибернетика", №7. – 1991. – 48 с.

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ УРАВНЕНИЙ МОНЖА-АМПЕРА В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Юмагужин В.А.
Институт Программных Систем РАН
Россия, 152020, Переславль-Злесский
e-mail: yuma@diffiety.botik.ru

В работе [1] автор совместно с А.М.Виноградовым и М.Марваном получил основные дифференциальные инварианты классических гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения. В этой работе представлены алгоритмы вычисления этих инвариантов в системе компьютерной алгебры REDUCE.

Другие подходы к вычислению дифференциальных инвариантов и решению проблемы эквивалентности этих уравнений см. в работах [7, 8, 6, 9, 5, 10, 11].

В этой работе все многообразия и отображения предполагаются гладкими.

1. Инварианты уравнения Монжа-Ампера

В этом разделе мы приводим основные результаты работы [1].

1.1. **Уравнение Монжа-Ампера.** Уравнение вида

$$N(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) + Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} + D = 0\,, \qquad (1)$$

где x, y – независимые переменные, z – зависимая переменная, $z_{xx} = \partial^2 z/\partial x^2$, $z_{xy} = \partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $z_{yy} = \partial^2 z/\partial y^2$, а коэффициенты N, A, B, C, D – функциии от x, y, z, $z_x = \partial z/\partial x$ и $z_y = \partial z/\partial y$, называется уравнением Монжа-Ампера. Гиперболические уравнения (1) выделяются условием

$$\Delta = B^2 - 4AC + 4ND > 0$$

и класс всех гиперболических уравнений Монжа-Ампера сохраняется при контактных преобразованиях, см. [3].

Обозначим через M пространство переменных x, y, z, z_x, z_y, рассматриваемых как независимые. Как известно, [2], дифференциальная 1-форма $U_1 = dz - z_x dx - z_y dy$ является канонической контактной формой на этом пространстве. В каждом касательном пространстве T_pM к M она определяет контактную гиперплоскость $\mathcal{C}_p = \ker U_1$. Распределение $\mathcal{C} : p \mapsto \mathcal{C}_p$ этих гиперплоскостей называется каноническим контактным распределением. На каждой контактной гиперплоскости $\mathcal{C}_p$ форма $dU_1\big|_{\mathcal{C}_p}$ является симплектической. Имеет место

***Теорема* 1**. 1. Всякое гиперболическое уравнение Монжа-Ампера $\mathcal{E}$ естественным образом определяет на M пару 2-мерных распределений $\mathcal{D}^1 : p \mapsto \mathcal{D}^1_p$ и $\mathcal{D}^2 : p \mapsto \mathcal{D}^2_p$, удовлетворяющих условиям:

(а) для любой точки $p \in M$ имеет место разложение $\mathcal{C}_p = \mathcal{D}^1_p \oplus \mathcal{D}^2_p$,

(б) подпространства $\mathcal{D}^1_p$ и $\mathcal{D}^2_p$ косоортогональны относительно формы $dU_1\big|_{\mathcal{C}_p}$.

2. Пара распределений $(\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2)$ восстанавливает уравнение $\mathcal{E}$ однозначно.

3. Соответствие $\mathcal{E} \mapsto (\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2)$ является биекцией между всеми гиперболическими уравнениями (1) и всеми парами 2-мерных распределений на M, удовлетворяющих условиям (а) и (б).

Таким образом всякое гиперболическое уравнение Монжа-Ампера естественным образом отождествляется с парой 2-мерных нелагранжевых косоортогональных подраспределений в контактном распределении на M. В частности, проблема эквивалентности для этих уравнений относительно контактных преобразований сводится к проблеме эквивалентности для соответсвующих пар подраспределений.

Пусть $N \neq 0$ в уравнении (1), тогда в стандартных координатах распределения $\mathcal{D}^1$ и $\mathcal{D}^2$ задаются векторными полями X_1, X_2 и X_3, X_4 соответственно, где

$$\begin{aligned}
X_1 &= \tfrac{\partial}{\partial x} + z_x \tfrac{\partial}{\partial z} - \tfrac{C}{N}\tfrac{\partial}{\partial z_x} + \tfrac{B-\sqrt{\Delta}}{2N}\tfrac{\partial}{\partial z_y}\,,\\
X_2 &= \tfrac{\partial}{\partial y} + z_y \tfrac{\partial}{\partial z} + \tfrac{B+\sqrt{\Delta}}{2N}\tfrac{\partial}{\partial z_x} - \tfrac{A}{N}\tfrac{\partial}{\partial z_y},\\
X_3 &= \tfrac{\partial}{\partial x} + z_x \tfrac{\partial}{\partial z} - \tfrac{C}{N}\tfrac{\partial}{\partial z_x} + \tfrac{B+\sqrt{\Delta}}{2N}\tfrac{\partial}{\partial z_y}\,,\\
X_4 &= \tfrac{\partial}{\partial y} + z_y \tfrac{\partial}{\partial z} + \tfrac{B-\sqrt{\Delta}}{2N}\tfrac{\partial}{\partial z_x} - \tfrac{A}{N}\tfrac{\partial}{\partial z_y}\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение (1), для которого $N = 0$, подходящим контактным преобразованием приводится к случаю $N \neq 0$. Поэтому мы будем рассматривать только этот случай.

Для всякого распределения $\mathcal{D}$ на M через $\mathcal{D}^{(1)}$ обозначим распределение, порожденное всеми векторными полями $X, Y \in \mathcal{D}$ и их коммутаторами $[X, Y]$.

Для гиперболического уравнения Монжа-Ампера $\mathcal{E}$ $\dim(\mathcal{D}^1)^{(1)} = \dim(\mathcal{D}^2)^{(1)} = 3$. Следовательно $\mathcal{D}^3 = (\mathcal{D}^1)^{(1)} \cap (\mathcal{D}^2)^{(1)}$ является 1-мерным распределением, не принадлежащим $\mathcal{C}$. Это влечет разложение касательного расслоения к M в прямую сумму

$$T(M) = \mathcal{D}^1 \oplus \mathcal{D}^2 \oplus \mathcal{D}^3\,. \tag{3}$$

Пусть X_5 такое векторное поле на M, что $\mathcal{D}^3 = \langle X_5 \rangle$. Тогда легко получить, что

$$X_5 = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 [X_1, X_2] = \mu_1 X_3 + \mu_2 X_4 - \mu_3 [X_3, X_4]\,.$$

Следовательно, можно выбрать поле X_5 так, что $\mu_3 = 1$. Дальше мы будем предполагать, что поле X_5 выбрано именно таким образом. Тогда коэффициенты b^i_{jk} в формулах

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{5} b^i_{jk} X_i\,.$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered}
b^i_{jk} = -b^i_{kj}, \quad i,j,k = 1,\dots,5\,, \\
b^1_{12} = -b^3_{34}, \quad b^2_{12} = -b^4_{34}, \quad b^5_{12} = -b^5_{34} = 1, \\
b^3_{12} = b^4_{12} = b^1_{34} = b^2_{34} = b^5_{13} = b^5_{14} = b^5_{23} = b^5_{24} = 0
\end{gathered}$$

Через $\{\omega^1,\dots,\omega^5\}$ обозначим поле кореперов на M, дуальное к полю реперов $\{X_1,\dots,X_5\}$.

1.2. **Проекторы.** Разложение (3) порождает проекторы

$$\mathcal{P}_i : T(M) \to \mathcal{D}^i,\ i = 1,2,3, \quad \mathcal{P}^1_j : T(M) \to \mathcal{D}^j \oplus \mathcal{D}^3,\ j = 1,2\,,$$

которые можно интерпретировать как векторнозначные 1-формы:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_1 = \omega^1 \otimes X_1 + \omega^2 \otimes X_2, \quad \mathcal{P}_2 = \omega^3 \otimes X_3 + \omega^4 \otimes X_4, \\
&\mathcal{P}_3 = \omega^5 \otimes X_5, \quad \mathcal{P}^1_j = \mathcal{P}_j + \mathcal{P}_3,\ j = 1,2.
\end{aligned}$$

Ясно, что эти проекторы – дифференциальные инварианты уравнения $\mathcal{E}$.

1.3. **Формы кривизны.** Пусть $\mathcal{D}$ – распределение на M. Если определен проектор $\mathcal{P} : T(M) \to \mathcal{D}$, то *форму кривизны* $\mathcal{R}$ этого распределения, см. [4], можно определить формулой

$$\mathcal{R}(X,Y) = (\mathrm{id} - \mathcal{P})(\,[\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)]\,)$$

Кривизнами распределений $\mathcal{D}^1$, $\mathcal{D}^2$, $(\mathcal{D}^1)^{(1)}$ и $(\mathcal{D}^2)^{(1)}$ являются, соответственно, следующие векторнозначные 2-формы:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1 = -\omega^1 \wedge \omega^2 \otimes X_5\,, \quad \mathcal{R}_2 = \omega^3 \wedge \omega^4 \otimes X_5, \\
&\mathcal{R}^1_1 = (b^3_{15}\omega^1 + b^3_{25}\omega^2) \wedge \omega^5 \otimes X_3 + (b^4_{15}\omega^1 + b^4_{25}\omega^2) \wedge \omega^5 \otimes X_4, \\
&\mathcal{R}^1_2 = (b^1_{35}\omega^3 + b^1_{45}\omega^4) \wedge \omega^5 \otimes X_1 + (b^2_{35}\omega^3 + b^2_{45}\omega^4) \wedge \omega^5 \otimes X_2\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

Эти 2-формы – дифференциальные инварианты для $\mathcal{E}$.

Применяя естественные операции линейной алгебры и тензорного анализа к проекторам и формам кривизны, можно получить новые дифференциальные инварианты.

1.4. **Скалярные инварианты 2-го порядка.** Операция свертки $\lrcorner$, применённая к формам кривизны, даёт следующие дифференциальные инварианты:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\big(\mathcal{R}^1_2 \lrcorner \mathcal{R}_1\big) \lrcorner \big(\mathcal{R}^1_2 \lrcorner \mathcal{R}_1\big) = \lambda_1 \cdot \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5, \\
&\tfrac{1}{2}\big(\mathcal{R}^1_1 \lrcorner \mathcal{R}_2\big) \lrcorner \big(\mathcal{R}^1_1 \lrcorner \mathcal{R}_2\big) = \lambda_2 \cdot \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5, \\
&\big(\mathcal{R}^1_2 \lrcorner \mathcal{R}_1\big) \lrcorner \big(\mathcal{R}^1_1 \lrcorner \mathcal{R}_2\big) = \lambda_{12} \cdot \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5\,,
\end{aligned}$$

где $\lambda_1 = b^2_{35}b^1_{45} - b^1_{35}b^2_{45}$, $\lambda_2 = b^4_{15}b^3_{25} - b^3_{15}b^4_{25}$, $\lambda_{12} = b^3_{15}b^1_{35} + b^4_{15}b^1_{45} + b^3_{25}b^2_{35} + b^4_{25}b^2_{45}$. Следовательно для уравнения общего вида

$$I^1 = \lambda_{12}/\lambda_1\,, \quad I^2 = \lambda_{12}/\lambda_2\,.$$

являются скалярными дифференциальными инвариантами второго порядка.

1.5. **Полный параллелизм.** Рассмотрим инвариантные 1-формы:

$$\begin{array}{ll}\Omega^1 = \mathcal{P}_1 \lrcorner\, dI^1 = I^1_1\,\omega^1 + I^1_2\,\omega^2, & \Omega^2 = \mathcal{P}_1 \lrcorner\, dI^2 = I^2_1\,\omega^1 + I^2_2\,\omega^2,\\ \Omega^3 = \mathcal{P}_2 \lrcorner\, dI^1 = I^1_3\,\omega^3 + I^1_4\,\omega^4, & \Omega^4 = \mathcal{P}_2 \lrcorner\, dI^2 = I^2_3\,\omega^3 + I^2_4\,\omega^4,\\ \Omega^5 = \mathcal{P}_3 \lrcorner\, dI^1 = I^1_5\,\omega^5\,, \quad \tilde{\Omega}^5 = \mathcal{P}_3 \lrcorner\, dI^2 = I^2_5\,\omega^5\,, & \end{array}$$

где $I^i_j = X_j(I^i)$. Для уравнения общего вида

$$\begin{vmatrix} I^1_1 & I^1_2 \\ I^2_1 & I^2_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} I^1_3 & I^1_4 \\ I^2_3 & I^2_4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad I^1_5 \neq 0, \quad I^2_5 \neq 0\,.$$

Следовательно $\{\Omega^1, \ldots, \Omega^5\}$ – поле кореперов, определяеющее инвариантный полный параллелизм на M.

1.6. **Скалярные инварианты 3-го порядка.** Коэффициент пропорциональности между Ω^5 и $\tilde{\Omega}^5$

$$I^3 = I^1_5 / I^2_5$$

является скалярным дифференциальным инвариантом 3-го порядка. Дальнейшие скалярные инварианты I^4 и I^5 3-го порядка можно получить, например, разлагая инвариантные 2-формы по инвариантному базису:

$$\mathcal{R}_1 \lrcorner\, dI^1 = I^4 \Omega^1 \wedge \Omega^2\,, \quad \mathcal{R}_2 \lrcorner\, dI^1 = I^5 \Omega^3 \wedge \Omega^4.$$

Теорема 2. Скалярные инварианты $I^1, \ldots, I^5$ функционально независимы.

1.7. **Проблема эквивалентности.** Функции $I^1, \ldots, I^5$ образуют инвариантную карту на M. В терминах этой карты

$$\Omega^i = \sum_{j=1}^{5} \Omega^i_j(I^1, \ldots, I^5) dI^j, \quad i = 1, \ldots, 5$$

Теорема 3. Класс эквивалентности уравнения $\mathcal{E}$ относительно контактных преобразований определен однозначно функциями $\Omega^i_j(I^1, \ldots, I^5)$, $i, j = 1, \ldots, 5$.

2. REDUCE-программы

В этом разделе представлена компьютерная программа для вычисления в среде REDUCE версий 3.6 и выше дифференциальных инвариантов полученных в предыдущем разделе. Эта программа использует пакет программ дифференциальной геометрии EXCALC для работы с внешними формами, имеющийся в указанных версиях.

2.1. **Программа.**

OFF NAT;

LOAD_PACKAGE EXCALC; % Подключение пакета EXCALC.

SPACEDIM 5; % Фиксирование размерности пространства M.

TVECTOR X(k); % Задание поля реперов $\{X_1, \ldots, X_5\}$ на M.

PFORM w(k)=1; % Задание поля кореперов $\{\omega^1,\dots,\omega^5\}$ на M.

PROCEDURE Kr(k,j); % Символа Кронекера– техническая процедура.
begin
scalar s;
if k=j then s:=1 else s:=0;
return s;
end;

% Требование к полям реперов $\{X_1,\dots,X_5\}$ и кореперов $\{\omega^1,\dots,\omega^5\}$
% быть дуальными.
FOR ALL k, j LET X(k)⌋w(j)=Kr(k,j),

% Определение операций с нулем: внешнее умножение на 0, свертка с 0,
% производная Ли вдоль нулевого векторного поля и производная Ли
% от 0-формы вдоль векторного поля Y.
FOR ALL Y LET 0^Y=0, Y^0=0, 0⌋Y=0, Y⌋0=0, 0∟Y=0, Y∟0=0;

% Задание коэффициентов разложения b^i_{jk} полей $[X_j, X_k]$ по базису
% $X_1,\dots,X_5$ и их свойства.
PFORM b(i,j,k)=0;
FOR ALL i, j, k SUCH THAT i>j LET b(i,j,k)=−b(j,i,k);
FOR ALL k LET b(k, k, j) = 0;
LET b(3,4,3):=−b(1,2,1); b(3,4,4):=−b(1,2,2); b(1,2,3):=0; b(1,2,4):=0;
b(1,2,5):=1; b(3,4,1):=0; b(3,4,2):=0; b(3,4,5):=−1; b(1,3,5):=0; b(1,4,5):=0;
b(2,3,5):=0; b(2,4,5):=0;

% Определение внешнего дифференциала формы $\omega(k)$.
FOR ALL k LET d(w(k))=−b(1,2,k)*w(1)^w(2) −b(1,3,k)*w(1)^w(3)
−b(1,4,k)*w(1)^w(4)−b(1,5,k)*w(1)^w(5) −b(2,3,k)*w(2)^w(3)
−b(2,4,k)*w(2)^w(4)−b(2,5,k)*w(2)^w(5) −b(3,4,k)*w(3)^w(4)
−b(3,5,k)*w(3)^w(5) −b(4,5,k)*w(4)^w(5);

% Задание коэффициентов разложения c^i_{jkr} 1-форм
% db^i_{jk} по базису $\omega^1,\dots,\omega^5$ и их свойства.
PFORM c(i,j,k,r)=0;
FOR ALL l,m,n LET d(b(l,m,n))=c(l,m,n,1)*w(1)+c(l,m,n,2)*w(2)
+c(l,m,n,3)*w(3)+c(l,m,n,4)*w(4)+c(l,m,n,5)*w(5);
FOR ALL i, j, k, r SUCH THAT i>j LET c(i,j,k,r)=−c(j,i,k,r)
FOR ALL i,j,k LET c(i,i,j,k)=0;
FOR ALL r LET c(3,4,3,r) = −c(1,2,1,r); c(3,4,4,r)=−c(1,2,2,r); c(1,2,3,r) =0;
c(1,2,4,r) =0; c(1,2,5,r) =0; c(3,4,1,r) =0; c(3,4,2,r) =0; c(3,4,5,r) =0; c(1,3,5,r)
=0; c(1,4,5,r) =0; c(2,3,5,r) =0;
c(2,4,5,r) =0;

PROCEDURE Dgrvf(p); % Степень векторно-значной формы p.
begin
scalar s1, s2, s3, s4, s5;
s1:=exdegree(p(1)); s2:=exdegree(p(2)); s3:=exdegree(p(3));
s4:=exdegree(p(4)); s5:=exdegree(p(5));

```
    return max(s1,s2,s3,s4,s5);
end;

% Свертка векторно-значных дифференциальных форм p и q.
PROCEDURE Cntrcn(p,q);
begin
    scalar dgrp,dgrq,zn;
    dgrp:=Dgrvf(p);
    dgrq:=Dgrvf(q);
    pform cntr(k)=dgrp+dgrq−1;
    for r:=1:5 do cntr(r):= for k:=1:5 sum(p(k)^(X(k)⌟q(r)));
    return cntr;
end;

% Подстановка векторного поля Y в векторно-значную
% дифференциальную форму p.
PROCEDURE Cntrcn(Y,p);
begin
    pform cntr1(k)=Dgrvf(p)−1;
    for r:=1:5 do cntr1(r):= for k:=1:5 sum ( Y ⌟ p(r) );
    return cntr1;
end;

% Свертка векторно-значной дифференциальной k-формы.
PROCEDURE IntrCntrcn(p);
begin
    SCALAR s;
    s:=Dgrvf(p);
    IF (s>0) THEN
    «s:=s−1;
    pform p1,p2(k)=s;
    for k:= 1:5 do p2(k):= ( X(k) ⌟ p(k) );
    pr1:= for k:=1:5 sum p2(k);
    CLEAR p2;
    RETURN pr1»;
    ELSE «WRITE "Argument of IntrCntrcn is improper"; end»;
end;

ORDER FACTOR w(1)^w(2)^w(3)^w(4)^w(5),
w(1)^w(2)^w(3)^w(4),  w(1)^w(2)^w(4)^w(5),  w(1)^w(3)^w(4)^w(5),
w(2)^w(3)^w(4)^w(5),
w(1)^w(2)^w(3), w(1)^w(2)^w(4),  w(1)^w(2)^w(5), w(1)^w(3)^w(4),
w(1)^w(3)^w(5),  w(1)^w(4)^w(5),  w(2)^w(3)^w(4), w(2)^w(3)^w(5),
w(2)^w(4)^w(5),  w(3)^w(4)^w(5),
w(1)^w(2), w(1)^w(3), w(1)^w(4),  w(1)^w(5), w(2)^w(3),
w(2)^w(4), w(2)^w(5),  w(3)^w(4), w(3)^w(5), w(4)^w(5),
w(1),w(2),w(3),w(4),w(5);
```

2.2. **Пример.** В качестве примера, использования программы из предыдущего пункта, вычислим векторно-значную 3-форму $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$.

Для этого к программе из предыдущего пункта дописываем следующую программу и запускаем в среде REDUCE.

PFORM $\{\mathcal{R}_2^1(k)$, $\mathcal{R}_1(k)\}$=2, $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$(k)=3;

$\mathcal{R}_2^1(1)$:=(b(3,5,1)*w(3)+b(4,5,1)*w(4))^w(5);
$\mathcal{R}_2^1(2)$:=(b(3,5,2)*w(3)+b(4,5,2)*w(4))^w(5); $\mathcal{R}_2^1(3) := 0$; $\mathcal{R}_2^1(4) := 0$; $\mathcal{R}_2^1(5) := 0$;

$\mathcal{R}_1(1) := 0$; $\mathcal{R}_1(2) := 0$; $\mathcal{R}_1(3) := 0$; $\mathcal{R}_1(4) := 0$; $\mathcal{R}_1(5) := -$w(1)^w(2);

Cntrcn($\mathcal{R}_2^1$,$\mathcal{R}_1$);

for k:=1:5 do WRITE "$\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$(",k,")=", cntr(k);

end;

В результате получаем 5 компонент векторно-значной 3-формы $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$:

$\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(1) = 0$; $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(2) = 0$; $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(3) = 0$; $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(4) = 0$;
$\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(5) = -$b(3,5,2)*w(1)^w(3)^w(5) $-$b(4,5,2)*w(1)^w(4)^w(5)
+b(3,5,1)*w(2)^w(3)^w(5) +b(4,5,1)*w(2)^w(4)^w(5);

Литература

[1] А.М. Виноградов, М. Марван, В.А. Юмагужин, *Дифференциальные инварианты гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения*, ДАН, т. 405, №3, 2005, стр. 299-301.

[2] Виноградов А.М., Красильщик И.С. ред. *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.*– М.: Факториал, 1997, 464 с.

[3] Курант Р., *Уравнения с частными производными*, "Мир", М., 1964, с. 830.

[4] Kruglikov B., Lychagin V.V., *On equivalence of differential equations*, Acta et Comment. Univ. Tartuensis Math. (1999), 3, pp. 7-29.

[5] Kruglikov B., *Classification of Monge-Ampere equations with two variables*, in: Geometry and topology of caustics—CAUSTICS '98 (Warsaw); Banach Center Publications, 50, 179-194 (1999).

[6] Kushner A., *Symplectic geometry of mixed type equations*, in Amer. Math. Soc. Transl., "The interplay between geometry and differential equations", V.V.Lychagin Dds., ser. 2, **167** (1995) pp. 131-142.

[7] Lychagin V.V., *Lectures on geometry of differential equations*, Universita "La Sapienza", Roma, 1992, 133 p.

[8] Lychagin V.V., Rubtsov V.N., Chekalov I.V., *A classification of Monge-Ampere equations*, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (4) 26 (1993), 281-308.

[9] Morimoto T., *Monge-Ampère equations viewed from contact geometry.* in: Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields, Budzynski, R. (ed.) et al. Warsaw: Polish Academy of Sciences, Inst. of Mathematics, Banach Cent. Publ., 1997. V. 39, pp. 105-121.

[10] Tchij O.P., *Contact geometry of hyperbolic Monge-Ampere eqquations*, Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 4, 1999, 109-162.

[11] Туницкий Д.В., *Уравнения Монжа-Ампера и функторы характеристической связности*, Изв. РАН, Сер. матем., Том 65, №6, 2001, стр. 173-222.

О СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Юханова М.В.
Рязанский государственный университет им.С.А.Есеснина
Рязань
e-mail: uhanova@rspu.ryazan.ru,dma@rspu.ryazan.ru

Рассматривается операторное уравнение вида

$$\alpha + Pc + o(|\gamma|) = 0, \tag{1}$$

где $\alpha \in W(\delta_0) = \{\alpha \in E_n : |\alpha| \le \delta_0\}, c \in C(\delta_0) = \{c \in E_n : |c| \le \delta_0\}, \delta_0$ – некоторое положительное число, P – матрица размерности $n \times n$, $\gamma = (\alpha, c)$, $|\gamma| = \max\{|\alpha|, |c|\}$.

Пусть $o(|\gamma|)$ имеет вид $o(|\gamma|) = f_k(c) + f_l(\alpha, c) + o(|c|^k) + o(|\gamma|^l)$, где $f_k(c)$ – форма порядка k относительно c, $k \ge 2$, $f_l(\alpha, c)$ – форма порядка l относительно $\gamma = (\alpha, c)$, $l \ge 2$.

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\alpha + Pc + f_k(c) + f_l(\alpha, c) + o(|c|^k) + o(|\gamma|^l) = 0. \tag{2}$$

Пусть матрица P ненулевая, $rangP = r$, $0 < r < n$ (назовем этот случай критическим). Тогда в матрице P существует минор порядка r, отличный от нуля. Пусть для определенности, этот минор расположен в левом верхнем углу. С помощью элементарных преобразований уравнение (2) можно представить так

$$\begin{cases} \bar\alpha + \bar P c + \bar f_k(c) + \bar f_l(\alpha, c) + \bar o(|c|^k) + \bar o(|\gamma|^l) = 0, \\ \varphi(\alpha) + \bar{\bar f}_k(c) + \bar{\bar f}_l(\alpha, c) + \bar{\bar o}(|c|^k) + \bar{\bar o}(|\gamma|^l) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\bar P$ матрица, составленная из первых r строк матрицы P, $\bar f_k(c), \bar f_l(\alpha, c)$, $\bar o(|c|^k), \bar o(|\gamma|^l)$ – r-мерные вектор-функции, $\bar{\bar f}_k(c), \bar{\bar f}_l(\alpha, c), \bar{\bar o}(|c|^k), \bar{\bar o}(|\gamma|^l)$ – $(n-r)$-мерные вектор-функции, $\varphi(\alpha)$ – вектор, полученный из вектора α путем элементарных преобразований строк системы (2).

Положим $\alpha = \rho\beta$, $c = \rho\nu$, $\rho \in R$, $\rho > 0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \rho\beta + \bar P\rho\nu + \rho^k \bar f_k(\beta) + \rho^l \bar f_l(\beta, \nu) + \bar o(|\rho\nu|^k) + \bar o(|\gamma|^l) = 0, \\ \rho\varphi(\beta) + \rho^k \bar{\bar f}_k(\beta) + \rho^l \bar{\bar f}_l(\beta, \nu) + \bar{\bar o}(|\rho\nu|^k) + \bar{\bar o}(|\gamma|^l) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть для определенности $l \le k$. Разделим первое уравнение системы (4) на ρ, второе – на ρ^l. Получим

$$\begin{cases} \beta + \bar P\nu + \bar o(\rho^{l-1}|\sigma|^l) = 0, \\ \frac{1}{\rho^{l-1}}\varphi(\beta) + \bar{\bar f}_l(\beta, \nu) + \bar{\bar O}(\rho|\sigma|^l) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\sigma = (\beta, \nu)$.

Обозначим $\tilde{Q}(\beta, \nu) = colon(\bar{P}\nu, \bar{\bar{f}}_l(\beta, \nu))$, $\tilde{m}(\beta, \rho) = colon(\beta, \frac{1}{\rho^{l-1}}\varphi(\beta))$, $\tilde{O}(\rho\,|\sigma|^l) = colon(\bar{o}(\rho^{l-1}\,|\sigma|^l), \bar{\bar{O}}(\rho\,|\sigma|^l))$.

Тогда система (5) запишется следующим образом

$$\tilde{m}(\beta, \rho) + \tilde{Q}(\beta, \nu) + \tilde{O}(\rho\,|\sigma|^l) = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение $\bar{\bar{f}}_l(\beta, \nu) = 0$.

Пусть при $\beta = 0$ существует точка $\nu^* : |\nu^*| = 1$, такая, что $\bar{\bar{f}}_l(0, \nu^*) = 0$ и $P\nu^* = 0$.

Введем множество $W'(\delta) = \{(\beta, \nu) : |\beta| \le \delta, |\nu - \nu^*| \le \delta\}$. В окрестности точки $(0, \nu^*)$ можно подобрать точки β и ν таким образом, чтобы выполнялись $\bar{P}\nu \ne 0$ и $\bar{\bar{f}}_l(\beta, \nu) \ne 0$.

Тогда вектор $\tilde{Q}(\beta, \nu)$ на множестве $W'(\delta)$ будет ненулевым.

Построим функцию $(\beta, \nu) \to \left|\tilde{Q}(\beta, \nu)\right|$. Из того, что вектор $\tilde{Q}(\beta, \nu)$ ненулевой, следует, что существует такое положительное число m, что для любой точки $(\beta, \nu) \in W'(\delta)$, будет справедливо неравенство $\left|\tilde{Q}\,(\beta, \nu)\right| \ge m$.

Так как $\lim\limits_{\rho \to 0} \tilde{O}(\rho\,|\sigma|^l) = 0$ равномерно относительно σ, то существует число $\delta_1 > 0$, что для любого $\rho < \delta_1$, для любой точки $\sigma \in W'(\delta)$ выполняется неравенство $\left|\tilde{O}(\rho\,|\sigma|^l)\right| < m/3$.

Зафиксируем $\rho^* < \delta_1$.

Заметим, что вектор $\tilde{m}(\beta, \rho^*) \to 0$ при $\beta \to 0$, значитсуществует такое число $\delta_2 > 0$, что для любого $|\beta| < \delta_2$ справедливо неравенство $|\tilde{m}(\beta, \rho^*)| < m/3$.

Таким образом, при фиксированном $\rho^* < \delta_1$, для любой точки (β, ν) из множества $W'(\delta_2) = \{(\beta, \nu) : |\beta| \le \delta_2, |\nu - \nu^*| \le \delta_2\}$ выполняется неравенство $\left|\tilde{m}(\beta, \rho^*) + \tilde{Q}(\beta, \nu) + \tilde{O}(\rho^*\,|\sigma|^l)\right| \ge \left|\tilde{Q}(\beta, \nu)\right| - |\tilde{m}(\beta, \rho^*)| - \left|\tilde{O}(\rho^*\,|\sigma|^l)\right| > m/3 > 0$.

Доказали следующую теорему.

***Теорема* 1**. Пусть на множестве $W'(\delta) = \{(\beta, \nu) : |\beta| \le \delta, |\nu - \nu^*| \le \delta\}$ вектор $\tilde{Q}(\beta, \nu)$ ненулевой, тогда существуют такие положительные числа $\delta_1, \delta_2, \rho < \delta_1$, что для любого вектора $|\beta| < \delta_2$ уравнение (6) не имеет решений на множестве $W'(\delta_2) = \{(\beta, \nu) : |\beta| \le \delta_2, |\nu - \nu^*| \le \delta_2\}$.

Пусть в окрестности точки $\beta = 0 \quad \nu = \nu^*$ выполняются следующие равенства $\bar{P}\nu\; = 0$ и $\bar{\bar{f}}_l(\beta, \nu)\; = 0$.

Предположим, что равенство $\bar{\bar{f}}_l(\beta, \nu) = 0$ определяет единственную вектор-функцию $\nu = \psi(\beta)$ в окрестности точки $\beta = 0$ со значениями из окрестности точки $\nu = \nu^*$

Зафиксируем $|\beta| \le \delta_2$. В окрестности точки $(\beta^*, \psi(\beta^*))$ разложим вектор-функцию $\bar{\bar{f}}_l\,(\beta, \nu)$ по формуле Тейлора

$$\bar{\bar{f}}_l\,(\beta, \nu) = \bar{\bar{f}}_l\,(\beta^*, \psi(\beta^*)) + D(\beta^*, \psi(\beta^*))(\nu - \psi(\beta^*)) + \sum_{i=1}^{l_1} R_i(\beta^*, \nu - \psi(\beta^*)).$$

Заменяя $w = \nu - \psi(\beta^*)$, получим

$$\begin{cases} \beta^* + \bar{P}w + \bar{o}(\rho^{l-1}\,|\sigma|^l) = 0, \\ \frac{1}{\rho^{l-1}}\varphi(\beta^*) + D(\beta^*, \psi(\beta^*))w + \sum\limits_{i=2}^{l_1} R(\beta^*, w) + \bar{\bar{O}}(\rho\,|\sigma|^l) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\sigma = (\beta^*, \nu) = (\beta^*, w + \psi(\beta^*))$.

Обозначим

$K(\beta^*, \rho) = colon(\beta^*, \frac{1}{\rho^{l-1}}\varphi(\beta^*)), L(\beta^*) = colon(\bar{P}, D(\beta^*, \psi(\beta^*)),$
$\bar{R}_i(\beta^*, w) = colon(0, ..., 0, R(\beta^*, w)), O(\rho\,|\sigma|^l) = colon(\bar{o}(\rho^{l-1}\,|\sigma|^l), \bar{O}(\rho\,|\sigma|^l)).$

Тогда (7) можно представить в виде

$$K(\beta^*, \rho) + L(\beta^*)w + \sum_{i=2}^{l_1} \bar{R}_i(\beta^*, w) + O(\rho\,|\sigma|^l) = 0. \tag{8}$$

Пусть определитель матрицы $L(\beta^*)$ при $\beta^* = 0$ не обращается в нуль. Тогда, так как функция $\beta \to \det L(\beta)$ является непрерывной, то найдется такое положительное число δ' (пусть для определенности $\delta' = \delta$), что для любого $|\beta| \leq \delta \quad \det L(\beta^*) \neq 0$.

Теорема 2. Если матрица $L(\beta^*)$ является неособенной, то найдутся такие положительные числа $\delta, \tilde{\delta}, \rho < \tilde{\delta}$, что при фиксированном $|\beta^*| \leq \delta$ уравнение (8) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы проводится методом сжатых отображений.

Далее пусть определитель матрицы $L(\beta^*)$ при $\beta^* = 0$ равен нулю, тогда $rangL(0) = r, 0 < r < n$. На множестве $M = \{\beta : |\beta^*| \leq \delta, \det L(\beta) = 0\}$ $rangL(\beta) = r, 0 < r < n$. Применяя элементарные преобразования, сведем уравнение (8) к системе

$$\begin{cases} K_1(\beta^*, \rho) + L_1(\beta^*) + \sum\limits_{i=2}^{l_1} R_i^1(\beta^*, w) + O_1(\rho\,|\sigma|^l) = 0, \\ K_2(\beta^*, \rho) + \sum\limits_{i=2}^{l_1} R_i^2(\beta^*, w) + O_2(\rho\,|\sigma|^l) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{|w| \to 0} \frac{\sum_{i=2}^{l_1} R_i^1(\beta^*, w)}{|w|} = 0$. Из $\sum\limits_{i=2}^{l_1} R_i^2(\beta^*, w)$ выделим форму наименьшего порядка, т.е. $\sum\limits_{i=2}^{l_1} R_i^2(\beta^*, w) = R_{k_1}(w) + o(|w|^{k_1})$, тогда (9) преобразуется к виду

$$\begin{cases} K_1(\beta^*, \rho) + L_1(\beta^*)w + o_1(|w|) + O_1(\rho\,|\sigma|^l) = 0, \\ K_2(\beta^*, \rho) + R_{k_1}(w) + o(|w|^{k_1}) + O_2(\rho\,|\sigma|^l) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Получили систему, аналогичную системе (3). Введя обозначение $w = \rho_1\mu, \rho_1 \in R, \rho_1 > 0$ систему (10) сведем к системе, аналогичной системе (4). Следуя описанным выше рассуждениям, разрешается система (10).

Литература

[1] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1967.

К ТЕОРЕМЕ ЭММИ НЁТЕР: "ОДНИМ МАХОМ СЕМЕРЫХ УБИВАХОМ"[1]

Г.Н. Яковенко

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Долгопрудный, Россия
e-mail: yakovenko_g@mtu-net.ru

Для вычисления первого интеграла по теореме Эмми Нётер требуется, чтобы уравнения Лагранжа допускали однопараметрическую группу вариационных симметрий. Первый интеграл порождается инфинитезималью: коэффициентами при первой степени в разложении уравнений группы по параметру. Изучается случай, когда уравнения Лагранжа допускают однопараметрическое семейство (не обязательно группу) вариационных симметрий. В этом случае порождается однопараметрическое семейство первых интегралов. В приведённом примере семейство содержит семь функционально независимых первых интегралов.

Рассматривается семейство неособенных преобразований (τ – параметр семейства)

$$\begin{aligned} &\widehat{t} = \widehat{t}\,(t, q, \tau)\,, \\ &\widehat{q}_i = \widehat{q}_i\,(t, q, \tau)\,, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{1}$$

которое есть решение системы дифференциальных уравнений (не обязательно автономных)

$$\begin{aligned} &\frac{d\widehat{t}}{d\tau} = \xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \\ &\frac{d\widehat{q}_i}{d\tau} = \eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{2}$$

при начальных условиях

$$\widehat{t}\,(0) = t, \qquad \widehat{q}_i\,(0) = q, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Преобразование, принадлежащее семейству (1), называется **преобразованием вариационной симметрии** [1, 2, 4] лагранжевой системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{4}$$

определённой функцией Лагранжа $L\,(t, q, \dot{q})$, если оно связано с функцией Лагранжа соотношением

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right) d\widehat{t} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt$$

[1] Работа поддержана РФФИ (код проекта 05-01-00940) и Советом Программ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2094.2003.1).

или эквивалентным соотношением –

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right). \tag{5}$$

Теорема. Пусть каждое преобразование семейства (1) есть преобразование вариационной симметрии для лагранжевой системы, определённой функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$, то есть для $L(t, q, \dot{q})$ и семейства (1) при каждом значении τ выполняется равенство (5). Тогда у лагранжевой системы есть семейство первых интегралов

$$w(t, q, \dot{q}, \tau) = \sum_{i=1}^{n} p_i \eta_i(t, q, \tau) - \xi(t, q, \tau) H = C, \tag{6}$$

где $\xi(t, q, \tau)$, $\eta_i(t, q, \tau)$ – функции, расположенные в правой части системы (2), а p_i и H – обозначения для обобщенного импульса и для функции Гамильтона [4]:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad H(t, q, p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(t, q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(t, q, \dot{q}). \tag{7}$$

☐ Потребуются формулы (учтены перестановочность дифференцирования по независимым переменным τ и t и уравнения (2))

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{t}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\widehat{t}}{d\tau} = \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{dt} = \frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}} = \frac{d}{d\tau}\frac{\frac{d\widehat{q}_i}{dt}}{\frac{d\widehat{t}}{dt}} = \frac{\left(\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{q}_i}{dt}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} - \frac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)}{\left(\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2} = \frac{\left(\frac{d}{dt}\frac{d\widehat{q}_i}{d\tau}\right)\frac{d\widehat{t}}{dt} - \frac{d\widehat{q}_i}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{d\widehat{t}}{d\tau}\right)}{\left(\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2} =$$
$$= \frac{\frac{d\eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{dt}\frac{d\widehat{t}}{dt} - \frac{d\widehat{q}_i}{dt}\frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{dt}}{\left(\frac{d\widehat{t}}{dt}\right)^2} = \frac{d\eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}} - \frac{d\widehat{q}_i}{d\widehat{t}}\frac{d\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right)}{d\widehat{t}}. \tag{9}$$

Потребуется также формула [4]

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dH}{dt}. \tag{10}$$

Для доказательства утверждения (6) теоремы продифференцируем условие (5) по τ (учтены уравнения Лагранжа (4) и формулы (2), (4) – (10)):

$$
\left\{\frac{\partial L}{\partial \widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \widehat{q}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\dot{\widehat{q}}_i\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}+
$$
$$
+L\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}\overset{(4)}{=}
$$
$$
=\left\{\frac{\partial L}{\partial \widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\widehat{t}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\left(\frac{d\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}-\dot{\widehat{q}}_i\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right)\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}+
$$
$$
+L\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\frac{d\widehat{t}}{dt}\overset{(10)}{=}
$$
$$
=\left\{-\frac{dH}{d\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\frac{d}{d\widehat{t}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\widehat{q}}_i}\dot{\widehat{q}}_i-L\right)\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}\overset{(7)}{=}
$$
$$
=\left\{-\frac{dH}{d\widehat{t}}\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)+\frac{d}{d\widehat{t}}\sum_{i=1}^{n}\widehat{p}_i\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-H\frac{d\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)}{d\widehat{t}}\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}=
$$
$$
=\frac{d}{d\widehat{t}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\widehat{p}_i\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)-\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)H\right\}\frac{d\widehat{t}}{dt}=0.
$$

Как следует из (3), при малых значениях τ выполняется $d\widehat{t}/dt\neq 0$, поэтому на решениях лагранжевой системы, соответствующей функции Лагранжа $L\left(\widehat{t},\widehat{q},\dot{\widehat{q}}\right)$, сохраняется формула, находящаяся в фигурных скобках последнего выражения, что доказывает сохранение выражение (6) для лагранжевой системы с функцией Лагранжа $L(t,q,\dot{q})$. ■

Следствие (теорема Эмми Нётер) [5]. Пусть семейство (1) удовлетворяет условиям теоремы и является однопараметрической группой, то есть в каждом уравнении системы (2) в правой части находится функция следующего вида: $\xi\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)=\tilde{\xi}\left(\widehat{t},\widehat{q}\right)f(\tau)$, $\eta_i\left(\widehat{t},\widehat{q},\tau\right)=\tilde{\eta}_i\left(\widehat{t},\widehat{q}\right)f(\tau)$ с одной и той же функцией $f(\tau)$. Тогда у лагранжевой системы есть первый интеграл $w(t,q,\dot{q})=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\tilde{\eta}_i(t,q)-\tilde{\xi}(t,q)H=C$.

□ Если гарантированный теоремой первый интеграл (6) поделить на постоянную (для каждого преобразования) $f(\tau)$, то получится приведённый в формулировке следствия первый интеграл. ■

Пример. Положение N материальных точек замкнутой консервативной системы задаётся в ортонормированной декартовой системе координат [3, 4]:

$$
\mathbf{r}_i=x_i\mathbf{i}+y_i\mathbf{j}+z_i\mathbf{k},\qquad i=\overline{1,N}.
$$

Предполагается, что потенциальная энергия $\Pi(r_{11},\,r_{12},\,\ldots,\,r_{N-1\,N})$ зависит только от расстояний r_{ik} между точками:

$$
r_{ik}^2=|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|^2=(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2+(z_i-z_k)^2.
$$

Системе соответствует функция Лагранжа

$$
L=T-\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right)-\Pi(r_{11},\,r_{12},\,\ldots,\,r_{N-1\,N}),\qquad (11)
$$

обобщённые импульсы (7):

$$p_i^x = m_i \dot{x}_i, \quad p_i^y = m_i \dot{y}_i, \quad p_i^z = m_i \dot{z}_i \tag{12}$$

и функция Гамильтона (в лагранжевых переменных)

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right) + \Pi \left(r_{11},\, r_{12},\, \ldots,\, r_{N-1\,N} \right). \tag{13}$$

Запишем также левую часть условия (5) для проверки конкретного преобразования на вариационную симметрию

$$L\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \frac{d\widehat{q}}{d\widehat{t}}\right) \frac{d\widehat{t}}{dt} =$$
$$= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(\frac{d\widehat{x}_i}{d\widehat{t}} \right)^2 + \left(\frac{d\widehat{y}_i}{d\widehat{t}} \right)^2 + \left(\frac{d\widehat{z}_i}{d\widehat{t}} \right)^2 \right] - \Pi \left(\widehat{r}_{11},\, \widehat{r}_{12},\, \ldots,\, \widehat{r}_{N-1\,N} \right) \right\} \frac{d\widehat{t}}{dt}, \tag{14}$$

где обозначено

$$\widehat{r}_{ik}^{\,2} = \left(\widehat{x}_i - \widehat{x}_k \right)^2 + \left(\widehat{y}_i - \widehat{y}_k \right)^2 + \left(\widehat{z}_i - \widehat{z}_k \right)^2. \tag{15}$$

Для введённой в примере материальной системы известна десятипараметрическая группа симметрий [6] – группа Галилея (отметим, что публикация [6] появилась в свет на два года раньше статьи Эмми Нётер [5]). Приведём семь однопараметрических подгрупп группы Галилея (сдвиги по времени и координатам, вращения вокруг координатных осей):

$$\begin{aligned}
&\widehat{t} = t - \tau_1, \quad \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i, \quad \widehat{z}_i = z_i;\\
&\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i + \tau_2, \quad \widehat{y}_i = y_i, \quad \widehat{z}_i = z_i;\\
&\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i + \tau_3, \quad \widehat{z}_i = z_i;\\
&\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i, \quad \widehat{z}_i = z_i + \tau_4;\\
&\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i \cos\tau_5 - z_i \sin\tau_5, \quad \widehat{z}_i = y_i \sin\tau_5 + z_i \cos\tau_5;\\
&\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_6 - z_i \sin\tau_6, \quad \widehat{y}_i = y_i, \quad \widehat{z}_i = x_i \sin\tau_6 + z_i \cos\tau_6;\\
&\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_7 - y_i \sin\tau_7, \quad \widehat{y}_i = x_i \sin\tau_7 + y_i \cos\tau_7, \quad \widehat{z}_i = z_i.
\end{aligned} \tag{16}$$

Каждая из подгрупп есть совокупность вариационных симметрий [1, 2, 4]. Подгруппы порождают семь первых интегралов: полную механическую энергия $E = H$ (см. (13)), вектор импульса, вектор момента импульса. Не указанные три однопараметрические подгруппы группы Галилея – переход в другую инерциальную систему координат – определяют совокупность дивергентных симметрий [1, 2, 4] и выводят за рамки настоящей работы.

Рассмотрим подгруппы сдвигов по времени t

$$\widehat{t} = t - \tau_1, \quad \widehat{x}_i = x_i, \quad \widehat{y}_i = y_i, \quad \widehat{z}_i = z_i, \tag{17}$$

и по координате z

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{x}_i = x_i, \qquad \widehat{y}_i = y_i, \qquad \widehat{z}_i = z_i + \tau_4, \tag{18}$$

а также подгруппы вращений вокруг оси x

$$\widehat{t} = t, \quad \widehat{x}_i = x_i, \qquad \widehat{y}_i = y_i \cos\tau_5 - z_i \sin\tau_5, \qquad \widehat{z}_i = y_i \sin\tau_5 + z_i \cos\tau_5 \tag{19}$$

и вокруг оси y

$$\widehat{t} = t, \qquad \widehat{x}_i = x_i \cos\tau_6 - z_i \sin\tau_6, \qquad \widehat{y}_i = y_i, \qquad \widehat{z}_i = x_i \sin\tau_6 + z_i \cos\tau_6. \tag{20}$$

Каждое преобразование подгрупп (17) – (20) является для системы с лагранжианом (11) преобразованием вариационной симметрии – удовлетворяет условию (5) (для проверки нужно использовать формулы (14), (15)). Преобразованием вариационной симметрии является и суперпозиция преобразований подгрупп (17) – (20): последовательное выполнение одного преобразования затем другого. Суперпозиция преобразований подгрупп (17) – (20) и специализация параметров

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\tau^2, \qquad \tau_4 = \frac{1}{2}\tau^2, \qquad \tau_5 = \tau, \qquad \tau_6 = \tau \tag{21}$$

приводит к однопараметрическому семейству (τ – параметр семейства) вариационных симметрий системы с лагранжианом (11):

$$\begin{aligned}
&\widehat{t} = t - \tfrac{1}{2}\tau^2,\\
&\widehat{x}_i = x_i \cos\tau - \left[y_i \sin\tau + \left(z_i + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\cos\tau\right]\sin\tau,\\
&\widehat{y}_i = y_i \cos\tau - \left(z_i + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\sin\tau,\\
&\widehat{z}_i = x_i \sin\tau + \left[y_i \sin\tau + \left(z_i + \tfrac{1}{2}\tau^2\right)\cos\tau\right]\cos\tau.
\end{aligned} \tag{22}$$

Семейство есть решение системы дифференциальных уравнений (2)

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{t}}{d\tau} &= -\tau && = \xi(\widehat{t},\, \widehat{x},\, \widehat{y},\, \widehat{z},\, \tau)\\
\frac{d\widehat{x}_i}{d\tau} &= -\widehat{z}_i - \widehat{y}_i \sin\tau - \tau\sin\tau\cos\tau && = \eta_i^x(\widehat{t},\, \widehat{x},\, \widehat{y},\, \widehat{z},\, \tau)\\
\frac{d\widehat{y}_i}{d\tau} &= \widehat{x}_i \sin\tau - \widehat{z}_i \cos\tau - \tau\sin\tau && = \eta_i^y(\widehat{t},\, \widehat{x},\, \widehat{y},\, \widehat{z},\, \tau)\\
\frac{d\widehat{z}_i}{d\tau} &= \widehat{x}_i + \widehat{y}_i \cos\tau + \tau\cos^2\tau && = \eta_i^z(\widehat{t},\, \widehat{x},\, \widehat{y},\, \widehat{z},\, \tau)
\end{aligned} \tag{23}$$

при начальных данных (3). Правые части системы (23) нельзя представить в виде $\xi\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) = \tilde{\xi}\left(\widehat{t}, \widehat{q}\right) f(\tau)$, $\eta_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}, \tau\right) = \tilde{\eta}_i\left(\widehat{t}, \widehat{q}\right) f(\tau)$ с одной и той же функцией $f(\tau)$, поэтому семейство (22) не есть группа [1, 2, 4], в чём можно убедиться и непосредственно по уравнениям (22) семейства. Таким образом, условия теоремы Эмми Нётер (см. следствие) не выполнены. В соответствии с утверждением теоремы замкнутая консервативная системы с лагранжианом

(11) имеет семейство первых интегралов (6) (учтены выражения (12) для обобщённых импульсов):

$$\begin{aligned} w(\tau) &= \sum_{i=1}^{N} [m_i \dot{x}_i (-z_i - y_i \sin\tau - \tau \sin\tau \cos\tau) + \\ &+ m_i \dot{y}_i (x_i \sin\tau - z_i \cos\tau - \tau \sin\tau) + \\ &+ m_i \dot{z}_i (x_i + y_i \cos\tau + \tau \cos^2\tau)] + \tau H = \\ &= K_x \cos\tau - K_y + K_z \sin\tau + \\ &+ P_x \tau \sin\tau \cos\tau - P_y \tau \sin\tau + P_z \tau \cos^2\tau + \tau H. \end{aligned} \tag{24}$$

Введены обозначения

$$\begin{gathered} K_x = \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{z}_i y_i - \dot{y}_i z_i), \quad K_y = \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{x}_i z_i - \dot{z}_i x_i), \quad K_z = \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{y}_i x_i - \dot{x}_i y_i), \\ P_x = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i, \qquad P_y = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{y}_i, \qquad P_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{z}_i, \qquad H = E = T + \Pi \end{gathered} \tag{25}$$

для проекций момента импульса $\mathbf{K}_O$, импульса $\mathbf{P}$ на координатные оси и для функции Гамильтона H (полной механической энергии), определённой в (13).

Покажем, что из факта сохранения $w(\tau)$ при любых значениях τ следует сохранение семи функций, приведённых в (25). Представим (24) в виде

$$w(\tau) = w_1(\tau) + \tau w_2(\tau), \tag{26}$$

где обозначено

$$\begin{gathered} w_1(\tau) = K_x \cos\tau - K_y + K_z \sin\tau, \\ w_2(\tau) = P_x \sin\tau \cos\tau - P_y \sin\tau + P_z \cos^2\tau + H. \end{gathered} \tag{27}$$

Справедливо включение

$$\left\{ w(\tau) \overset{\forall\tau}{=} C \right\} \Rightarrow \left\{ w_1(\tau) \overset{(26),(27)}{=} \frac{1}{2\pi}[(2\pi+\tau)w(\tau) - \tau w(2\pi+\tau)] \overset{\forall\tau}{=} C_1, \right. \\ \left. w_2(\tau) \overset{(26),(27)}{=} \frac{1}{2\pi}[(w(2\pi+\tau) - w(\tau)] \overset{\forall\tau}{=} C_2 \right\},$$

из которого следует, что функции $w_1(\tau)$, $w_2(\tau)$ при любых значениях τ – первые интегралы. Формулы

$$\begin{gathered} K_x \overset{(27)}{=} \frac{1}{2}\Big(w_1(0) - w_1(\pi)\Big), \qquad K_y \overset{(27)}{=} -\frac{1}{2}\Big(w_1(0) + w_1(\pi)\Big), \\ K_z \overset{(27)}{=} w_1(\pi/2) - \frac{1}{2}\Big(w_1(0) + w_1(\pi)\Big), \\ P_y \overset{(27)}{=} \frac{1}{2}\Big(w_2(-\pi/2) - w_2(\pi/2)\Big), \quad H \overset{(27)}{=} \frac{1}{2}\Big(w_2(-\pi/2) + w_2(\pi/2)\Big), \\ P_z \overset{(27)}{=} w_2(0) - H, \quad P_x \overset{(27)}{=} 2w_2(\pi/4) + \sqrt{2}P_y - P_z - 2H \end{gathered}$$

показывают, что семь функций (25) – первые интегралы замкнутой консервативной системы с функцией Лагранжа (11).

Замечание. Если бы в пространстве параметров семипараметрической группы (16) путь был бы проложен, “не мудрствуя лукаво”:

$$\tau_1 = \tau, \qquad \tau_4 = \tau, \qquad \tau_5 = \tau, \qquad \tau_6 = \tau$$

(ср. с (21)), то семейство первых интегралов в соответствии с теоремой имело бы вид

$$w\,(\tau) = K_x \cos\tau + \Big(H - K_y\Big) + \Big(K_z - P_y\Big)\sin\tau + P_x \sin\tau\cos\tau + P_z\cos^2\tau.$$

Придавая параметру τ различные значения, удалось бы выявить только пять (а не семь) первых интегралов: K_x, $H - K_y$, $K_z - P_y$, P_x и P_z.

Литература

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.

[3] Яковенко Г.Н. Краткий курс теоретической механики – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 116 с.

[4] Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 238 с.

[5] Noether E. Invariante Variationsprobleme. Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1918. S. 235 – 257.

[6] Engel F. Über zehn algemeinen Integrale der klassischen Mechanik, Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math-Phys. Kl. 1916. S. 270 – 275.

Современные проблемы теории функций и функционального анализа

О ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ПО ЛЕБЕГУ И СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И О СЛАБЫХ P-МНОЖЕСТВАХ

А.И.Векслер, А.В.Колдунов
Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна
Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: math@sutd.ru

1. Пусть L^o и L^1 – соответственно пространства измеримых и суммируемых на [0,1] функций (по модулю меры 0). Относительно естественного порядка L^o и L^1 являются векторными решетками (**ВР**). При этом они являются K-пространствами, т.е. в них каждое порядково ограниченное множество элементов имеет супремум и инфимум. Кроме того L^1 является фундаментом в L^o, т.е. таким идеалом в L^o, что для любого $0 < x \in L^0$ найдется $y \in L^1$ такой, что $0 < y \leq x$. Само же L^o является расширенным K-пространством, т.е. не может быть погружено ни в какое K-пространство $Z \neq L^o$ в качестве фундамента.

Конечно, L^o сильно отличается от своего собственного фундамента L^1. Однако можно спросить, а могут ли они где-либо локально совпадать друг с другом. На первый взгляд отрицательный ответ очевиден. Но поскольку эти пространства не являются пространствами обычных функций на [0,1], а лишь пространствами классов функций, то требуется дать точную постановку вопроса.

Хорошо известно, что L^o, будучи расширенным K-пространством, может быть представлено в виде векторной решетки $C_\infty(Q)$ на некотором компакте Q, который мы будем называть *компактом Иосиды-Хьюитта* [1]. Он является стоуновым экстремально несвязным – т.е. в нем замыкание любого открытого множества открыто-замкнуто (*о.з.*)-компактом булей алгебры всех измеримых множеств из [0,1]. Пространство же $C_\infty(Q)$ состоит из всех непрерывных вещественных функций на Q, могущих принимать на нигде не плотных (*н.н.п.*) множествах значения $\pm\infty$. Далее мы не будем различать L^o от его указанного представления в виде $C_\infty(Q)$, а элементы L^o – от соответствующих функций из $C_\infty(Q)$. То же самое будет относится и к банаховой решетке $L^1 \subset L^o$. Заметим, что если $x \in L^o$, то $\int_o^1 xdm = \int_Q xd\mu$ (здесь μ – мера на Q, порожденная мерой Лебега m).

2. Перейдем к точной постановке вопроса, о котором шла речь.

***Определение* 1**. Для $x \in L^o_+$ будем называть *множеством локальной суммируемости* элемента x множество

$$R(x) = \bigcup\Big\{Q' \subset Q : Q' \quad \text{о.з. и} \quad \int_{Q'} x d\mu = \int_Q x|_{Q'} d\mu < +\infty)\Big\}.$$

Его дополнение $P(x) = Q \setminus R(x)$ будем называть *множеством локальной несуммируемости* x. Очевидно, если $P(x) = \emptyset$, то $x \in L^1$. Теперь положим $R = \bigcap\{R(x) : x \in L^o_+\}$ и назовем его *множеством локальной суммируемости всего* L^o. Очевидно, если $q_o \in Q$, то

$$\forall x \in L^o_+ \exists \quad \text{о.з.} \quad Q_o \ni q_o \quad \Big(\int_Q x|_{Q_o} d\mu < +\infty\Big).$$

Наконец положим $P = Q \setminus R = \bigcup\{P(x) : x \in L^o_+\}$.

Вопрос 1. Не является ли множество R пустым, т.е. $Q = P$?

Ответ на этот вопрос может показаться неожиданным.

***Теорема* 1** ([2], [3], [4]; более общая ситуация рассмотрена в [5]) (**CH**). Множество R локальной суммируемости всего L^o всюду плотно в Q.

3. Для дальнейшего нам потребуется следующее определение.

***Определение* 2**. Множество A топологического пространства T называется *слабым P-множеством* , если $cl(t_n) \subset T \setminus A$ для любой последовательности точек $(t_n) \subset T \setminus A$.

Тривиальным примером слабого P-множества является любое открытое A.Но существует огромное число нетривиальных слабых P-множеств, даже (неизолированные) слабые P-точки.

При доказательстве Теоремы 1 были получены еще некоторые факты, главным образом в [4]. Часть из них мы сейчас приведем. Заметим, что первые 3 из утверждений в следующем предложении были получены без всяких теоретико-множественных предположений.

***Предложение* 2**. Имеют место следующие утверждения.

i) Множества $P(x)$, P и R являются слабыми P-множествами, причем $P(x)$ н.н.п., а P всюду плотно.

ii) В относительной топологии $P(x)$ не содержит изолированных точек.

iii) Если $x \in L^o_+ \setminus L^1$, то слабое P-множество $P(x)$ н.н.п. в $P(x^2)$ в относительной топологии на $P(x^2)$.

iv) (**CH**). Если $x \in L^+_o \setminus L^1$, то $P(x)$ содержит слабую P-точку на Q.

Эти результаты могут натолкнуть на изучение слабых P-множеств. Здесь мы приведем некоторые их свойства, а в следующем пункте будем рассматривать вопросы, на которые наталкивает утверждение iii). Отметим, что, возможно, не все приводимые здесь свойства слабых P-множеств являются новыми и, кроме того, мы не всегда приводим их в наибольшей общности. В дальнейшем всюду T – произвольное топологическое пространство, а S – произвольный компакт.

***Предложение* 3**. i) Объединение любого семейства слабых P-множеств в T есть слабое P-множество.

ii) Пересечение конечного числа слабых P-множеств в T есть слабое P-множество.

iii) Пересечение строго убывающей последовательности (P_n) замкнутых слабых P-множеств в S не является слабым P-множеством.

iv) Пересечение убывающего семейства $\{P_\alpha : \alpha < \tau\}$ замкнутых слабых P-множеств в T, где τ-кардинал несчетной конфинальности, всегда является слабым P-множеством.

***Предложение* 4**. i) След $P \cap A$ на любом множестве $A \subset T$ слабого P-множества P является слабым P-подмножеством в A, т.е. слабым P-множеством в A в относительной топологии на A.

ii) Обратно, если $P \subset T$ и след $P \cap F$ является слабым P-подмножеством на любом сепарабельном замкнутом $F \subset T$, то P является слабым P-множеством.

iii) Слабое P-подмножество P_1 слабого P-множества $P \subset T$ есть слабое P-множество в T.

iv) След замкнутого н.н.п. слабого P-множества P на Θ-множестве (т.е. на н.н.п нуль-множестве) Θ в S есть н.н.п. слабое P-подмножество в Θ.

Замечание. В то же время в условиях iv) может быть $P \subset \Theta$.

Напомним, что вполне регулярное пространство H называется F'-*пространством*, если в нем любые непересекающиеся конуль-множества G_1 и G_2 можно отделить непересекающимися замкнутыми $F_i \supset G_i$ $(i = 1, 2)$, и называется F-*пространством*, если – соответственно – нуль-множествами F_i. Для нормального H оба определения совпадают.

***Предложение* 5**. i) Пусть P – слабое P-множество и множество типа F_σ в нормальном F-пространстве H. Тогда clP – тоже слабое P-множество.

ii) Отсюда, если (P_n)-последовательность замкнутых слабых P-множеств в таком H, то $cl \bigcup \{P_n\}$-слабое P-множество.

Замечание. Даже для компактного пространства, но не являющегося F-пространством, предложение теряет силу.

4. Вернемся к Предложению 2 iii). Из него следует, что никакое слабое P-множество вида $P(x)$ не является максимальным замкнутым н.н.п. слабым P-множеством в смысле следующего определения.

***Определение* 3**. Непустое замкнутое н.н.п. слабое P-множество P называется максимальным замкнутым н.н.п. слабым P-множеством, если не существует другого замкнутого н.н.п. слабого P-множества $P_1 \supset P$, в котором P содержится в качестве н.н.п. подмножества.

Но в компакте Иосиды-Хьюитта Q содержатся и замкнутые н.н.п. слабые P-множества (см. предл. 2ii), iv), где использовалась **CH**). Кстати, слабые P-точки содержатся в Q и при более слабом предположении $BF(c)$ (см. [7]). В [4] было доказано, что если $P(x_n)$ строго возрастают, то $\bigcup\{(P(x_n)\}$ есть слабое P-множество, не являющееся множеством типа $P(x)$, но если при некотором x выполнено $P(x) \supset \bigcup\{P(x_n)\}$, то последнее замкнуто и н.н.п. Возникает следующий вопрос.

Вопрос 2. Существует ли в Q максимальное замкнутое н.н.п. слабое P-множество?

Ответ на этот вопрос вытекает из приводимого сейчас более общего результата.

***Теорема* 6**. Пусть S – экстремально несвязный компакт с условием Суслина и пусть мощность всех его конуль-множеств $\leq c = 2^\omega$. Тогда (**CH**) в S не существует максимальных замкнутых н.н.п. слабых P-множеств. Если впридачу S не сепарабелен, то в нем существует возрастающее семейство непустых замкнутых н.н.п. слабых P-множеств $\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ такое, что каждое P_α н.н.п. в каждом P_{α_1} при $\alpha < \alpha_1$.

Следствие (**CH**). В компакте Q Иосиды-Хьюитта не существует максимальных замкнутых н.н.п. слабых P-множеств.

К Теореме 6 можно присовокупить и следующий результат.

Теорема 7 (**CH**). В стоун-чеховском наросте $\beta\omega \setminus \omega$ пространства натуральных чисел нет максимальных н.н.п. слабых P-множеств.

Вопрос 3. Можно ли получить результаты теорем 1, 6 и 7 при теоретико-множественных предположениях более слабых, чем (**CH**), или вообще без них?

В завершение приведем некоторый класс компактов, в каждом из которых есть максимальные замкнутые н.н.п. слабые P-множества.

Пусть S – произвольный компакт. Через $\Delta = \Delta(S)$ обозначим объединение в S всех открытых сепарабельных пространств, и пусть $\Gamma = \Gamma(S) = S \setminus \Delta$.

Предложение 7. Пусть S – базисно несвязный (т.е. замыкание любого коноль-множества в S открыто-замкнуто) компакт, не удовлетворяющий условию Суслина. Пусть далее Δ всюду плотно в S. Тогда $\Gamma \neq \emptyset$ и является максимальным замкнутым н.н.п. слабым P-множеством и даже наибольшим из всех таких множеств.

Литература

[1] Yosida K., Hewitt E. Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc., 1952, v.72, P.46-66.

[2] Векслер А.И., Колдунов А.В. Лозановский Г.Я. О локальном строении пространств измеримых функций на пространстве максимальных идеалов банаховой алгебры L^∞ // Научные доклады XXVII Герценовских чтений – 1974, С.50-54.

[3] Векслер А.И. Максимальные нигде не плотные множества в топологических пространствах // Изв. высш. уч. зав., Матем., 1974, №5, С.9-16.

[4] Колдунов А.В. Счетно недостижимые точки в пространстве максимальных идеалов банаховой алгебры L^∞ // Применение функционального анализа в теории приближений (Межвуз. темат. сб.), Калинин, 1977, №7, С.45-54.

[5] Векслер А.И. Топологические свойства множества точек почти бесконечности расширенной меры // Изв. высш. уч. зав., Матем., 1987, №9, С.8-13.

[6] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions – Prinston Univ. Press, 1960, 300p.

[7] Dow A. Weak P-points in compact ccc F-spaces // Trans. Amer. Math. Soc., 1982, V.269, №3, P.557-565.

К ВОПРОСУ О РАВНОМЕРНОЙ МИНИМАЛЬНОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Гаврилова И.А.
Российский государственный педагогический
университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: gavrilova.irina@gmail.com

Одним из важных вопросов спектральной теории является изучение равномерной минимальности систем корневых фунций дифференциальных операторов. Известно, что необходимым, а при некоторых дополнительных условиях и одним из достаточных условий базисности в $L_2(G)(G$ – конечный интервал) некоторой системы функций является равномерная минимальность этой системы. Многие проблемы равномерной минимальности систем корневых функций дифференциальных операторов и связь этого понятия с другими базисными свойствами рассмотрена Н.Б.Керимовым в работе [2]. В этой же работе, при доказательстве ряда теорем, связанных с равномерной минимальностью, автор требует выполнения антиаприорной оценки для систем корневых функций. В связи с этим Н.Б.Керимов обращается к результату, полученному В.Д.Будаевым в работе [1]. В этой работе В.Д.Будаев предложил преобразование, позволяющее модифицировать произвольную систему корневых функций линейного дифференциального оператора произвольного порядка в новую систему корневых функций этого же дифференциального оператора, для которой антиаприорная оценка будет выполнена с наперед заданной константой. И, как следствие, возникал вопрос о сохранении при данном преобразовании свойств равномерной минимальности. Данилов С.С. в работе [3] рассматривал на интервале $G = [0; 1]$ дифференциальный оператор

$$Lu_n = u_n^{(4)} - \mu_n^4 u_n \tag{1}$$

и систему корневых функций данного оператора

$$\left\{ e^{-\mu_n x}, -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} \right\}, \tag{2}$$

для которой после применения преобразования, предложенного в работе [1], выполнялась оценка антиаприорного типа, но система переставала быть равномерно минимальной. Поэтому возник вопрос, можно ли сохранить свойство равномерной минимальности у новой системы, полученной после применения некоторого линейного преобразования к системе (2). Настоящая работа призвана ответить на этот вопрос.

Основные определения и формулировки результатов. Будем говорить, что система функций $\{u_n\}$ равномерно минимальна в пространстве $L_2(G)$, если найдется такая константа $\delta > 0$, что для любой функции u_n выполняется неравенство

$$inf \left\{ dist \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}, V(u_j/j \in N \setminus \{n\}) \right) \right\} \geq \delta,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму $L_2(G)$, $V(\cdot)$ – замыкание линейной оболочки множества $u_j/j \in N \setminus \{n\}$. В системе (2), в качестве элементов множества $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ возьмем числа вида $\mu_n = 2^{100n}, n = 1, 2, \dots$ Выбор сделан из тех соображний, чтобы μ_n были достаточно большими числами, быстро стремящимися к $+\infty$ с ростом n. Применим к системе (2) линейное преобразование:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n,0} &= u_{n,0} \\ \tilde{u}_{n,1} &= u_{n,1} + \alpha_n \cdot u_{n,0}, \end{cases}$$

где α_n зависит от μ_n, $u_{n,0} = e^{-\mu_n x}$, $u_{n,1} = -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x}$. Рассмотрим соотношение между $\|\tilde{u}_{n,1}\|$ и $\|u_{n,1}\|$:

$$\left\| -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} + \alpha_n\, e^{-\mu_n x} \right\|^2 = \int\limits_0^1 \left(-\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} + \alpha_n\, e^{-\mu_n x} \right)^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2^4 {\mu_n}^6}\, e^{-2\mu_n x} - \frac{x\, \alpha_n}{2{\mu_n}^3} e^{-2\mu_n x} + {\alpha_n}^2 e^{-2\mu_n x} \right) dx =$$

$$= \left\| -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} \right\|^2 + \frac{\alpha_n}{2^2 {\mu_n}^4} \left(e^{-2\mu_n} + \frac{(e^{-2\mu_n} - 1)}{2\mu_n} \right) + {\alpha_n}^2 \frac{(1 - e^{-2\mu_n})}{2\mu_n} =$$

$$= \left\| -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} \right\|^2 + \Psi(\alpha_n),$$

где

$$\Psi(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{2^2 {\mu_n}^4} \left(e^{-2\mu_n} + \frac{(e^{-2\mu_n} - 1)}{2\mu_n} \right) + {\alpha_n}^2 \frac{(1 - e^{-2\mu_n})}{2\mu_n};$$

Заметим, что $\Psi(\alpha_n) = 0$ при $\alpha_n = 0$ и $\alpha_n = \frac{1}{2{\mu_n}^3} \left(\frac{1}{2\mu_n} - \frac{e^{-2\mu_n}}{(1-e^{-2\mu_n})} \right) = \frac{(1-e^{-2\mu_n} - 2\mu_n e^{-2\mu_n})}{4{\mu_n}^4 (1-e^{-2\mu_n})}$.

Будем говорить, что $\alpha_n \in A_n^-$, если $\Psi(\alpha_n) \le 0$ и что $\alpha_n \in A_n^+$, если $\Psi(\alpha_n) > 0$.
Также заметим, что при $\alpha_n \in A_n^-$

$$\left\| -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} + \alpha_n\, e^{-\mu_n x} \right\| \le \left\| -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} \right\|. \tag{3}$$

Утверждение. Если $\forall n\ \alpha_n \in A_n^-$, то система

$$\left\{ e^{-\mu_n x}; -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} + \alpha_n\, e^{-\mu_n x} \right\} \tag{4}$$

является равномерно минимальной.

Доказательство. Допустим, что система (4) не является равномерно минимальной. По определению это означает, что для любой константы $\sqrt{\delta} > 0$ найдется такая функция u_n из системы (4), для которой существует линейная комбинация элементов системы $\{u_j\}_{j \ne n}$ такая, что выполняется неравенство:

$$\left\| \frac{u_n}{\| u_n \|} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne n}}^{r} \alpha_j u_j \right\|^2 < \delta, \tag{5}$$

т.е. верно следующее равенство

$$\inf \left\{ dist\left(\frac{u_n}{\| u_n \|}, V(u_j/j \in N \setminus \{n\})\right)\right\} = 0.$$

Возможны следующие ситуации для неравенства (5) в случае системы (4)

$$1. \quad \left\| \frac{e^{-\mu_n x}}{\| e^{-\mu_n x} \|} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{r_1} a_j e^{-\mu_j x} - \sum_{j=1}^{r_2} b_j \left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right)\right\|^2 < \delta \qquad (6)$$

или

$$2. \left\| \frac{-\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} + \alpha_n\, e^{-\mu_n x}}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x} + \alpha_n\, e^{-\mu_n x}\right\|} - \sum_{j=1}^{r_3} c_j e^{-\mu_j x} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{r_4} d_j \left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right)\right\|^2 < \delta. \qquad (7)$$

Обозначим за $\tilde{a}_j = 2\, a_j \| e^{-\mu_j x}\|, \tilde{b}_j = b_j \left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right\|$, $\tilde{c}_j = 2\, c_j \| e^{-\mu_j x}\|, \tilde{d}_j = d_j \left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right\|$. Пусть $r = \max\{n, r_1, r_2, r_3, r_4\}$. Тогда неравенство (6) и (7) соответственно будут иметь вид:

$$1. \quad \left\| \sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{a}_j)}{2} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} (-\tilde{b}_j) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right\|}\right\|^2 < \delta, \qquad (8)$$

где $\exists j = n : |\tilde{a_n}| = 2$;

$$2. \quad \left\| \sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{c}_j)}{2} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} (-\tilde{d}_j) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right\|}\right\|^2 < \delta, \qquad (9)$$

где $\exists j = n :\mid \tilde{d_n} \mid= 1$. Неравенства (8) и (9) можно записать в общем виде:

$$\left\| \sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{a}_j)}{2} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} (-\tilde{b}_j) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right\|}\right\|^2 < \delta, \qquad (10)$$

где $\exists j = n :\mid \tilde{a_j} \mid= 2, \mid \tilde{b_j} \mid= 1$.

Возьмем некоторую функцию $f(x) \neq 0$ из $L_2[0,1]$. Неравенство (10) перепишем в виде:

$$\delta > \left\| \sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{a}_j)}{2} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} (-\tilde{b}_j) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right\|}\right\|^2 \cdot \left\| \frac{f(x)}{\|f(x)\|}\right\| \geq$$

по неравенству Коши-Буняковского

$$\geq \left| \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{a}_j)}{2} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} (-\tilde{b}_j) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3}\, e^{-\mu_j x} + \alpha_j\, e^{-\mu_j x}\right\|}, \frac{f(x)}{\|f(x)\|}\right)\right| =$$

$$= \left| \int\limits_0^1 \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{a}_j)}{2} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} (-\tilde{b_j}) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \right\|} \right) \cdot \overline{\frac{f(x)}{\|f(x)\|}} dx \right|^2 . \tag{11}$$

Обозначим $\gamma = \max\limits_{j=\overline{1,r}} \{ | \tilde{a}_j |, | \tilde{b}_j | \} \geq 2$. Поделим обе части неравенства (10) на γ^2, получим:

$$\frac{\delta}{\gamma^2} > \left| \int\limits_0^1 \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{a}_j)}{2\gamma} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{b_j})}{\gamma} \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \right\|} \right) \cdot \overline{\frac{f(x)}{\|f(x)\|}} dx \right|^2 , \tag{12}$$

Обозначим за $\tilde{\tilde{a}}_j = \frac{\tilde{a}_j}{\gamma}, \tilde{\tilde{b}}_j = \frac{\tilde{b_j}}{\gamma}$ и перепишем неравенство (12) как

$$\frac{\delta}{\gamma^2} > \left| \int\limits_0^1 \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{(-\tilde{\tilde{a}}_j)}{2} \frac{e^{-\mu_j x}}{\| e^{-\mu_j x} \|} + \sum_{j=1}^{r} (-\tilde{\tilde{b}}_j) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \right)}{\left\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \right\|} \right) \cdot \overline{\frac{f(x)}{\|f(x)\|}} dx \right|^2 , \tag{13}$$

При этом $\left|\tilde{\tilde{a}}_j\right|, \left|\tilde{\tilde{b}}_j\right| \leq 1 (j = \overline{1,r})$. Заметим, что при некотором $j = k$ будет верно, что $\left|\tilde{\tilde{a}}_j\right| = 1$ или $\left|\tilde{\tilde{b}}_j\right| = 1$. Рассмотрим следующие возможные ситуации: A) при некотором $j = k :| \tilde{a}_j |= \gamma$; B) при некотором $j = k :| \tilde{\tilde{b}}_j |= \gamma$.

Случай A) Возьмем в качестве $f(x) = \frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}$. Тогда неравенство (13) перепишется в виде:

$$\frac{\delta}{\gamma^2} > \left| \int\limits_0^1 \frac{(-\tilde{\tilde{a}}_k) e^{-\mu_k x} \frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}}{2 \|e^{-\mu_k x}\| \|\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}\|} dx + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} \int\limits_0^1 \frac{(-\tilde{\tilde{a}}_j) e^{-\mu_j x} \frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}}{2 \|e^{-\mu_j x}\| \|\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}\|} dx + \right.$$

$$+ \int\limits_0^1 (-\tilde{\tilde{b}}_k) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x} + \alpha_k e^{-\mu_k x} \right)}{\| -\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x} + \alpha_k e^{-\mu_k x} \|} \frac{\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}}{\|\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}\|} dx +$$

$$\left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} \int\limits_0^1 (-\tilde{\tilde{b}}_j) \frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \right)}{\| -\frac{x}{4{\mu_j}^3} e^{-\mu_j x} + \alpha_j e^{-\mu_j x} \|} \frac{\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}}{\|\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}\|} dx \right|^2 , \tag{14}$$

Оценим первое слагаемое из (14):

$$\left| \int\limits_0^1 \frac{(-\tilde{\tilde{a}}_k) e^{-\mu_k x} \frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}}{2 \|e^{-\mu_k x}\| \|\frac{x}{4{\mu_k}^3} e^{-\mu_k x}\|} dx \right| = \frac{\left| \int\limits_0^1 x e^{-2\mu_k x} dx \right|}{2 \|e^{-\mu_k x}\| \|x e^{-\mu_k x}\|} =$$

$$= \frac{(1 - e^{-2\mu_k} - 2\mu_k e^{-2\mu_k})}{8{\mu_k}^2 \|e^{-\mu_k x}\| \|x e^{-\mu_k x}\|} > \frac{1}{2\sqrt{2}} - \beta_1,$$

где $\beta_1 = \bar{o}(1)$ при $\mu_k \to \infty$. Оценим третье слагаемое из неравенства (14), учитывая (3). Заметим, что

$$\left|\int\limits_0^1 (-\tilde{\tilde{b}}_k)\frac{\left(-\frac{x}{4{\mu_k}^3}\, e^{-\mu_k x} + \alpha_k\, e^{-\mu_k x}\right)}{\| -\frac{x}{4{\mu_k}^3}\, e^{-\mu_k x} + \alpha_k\, e^{-\mu_k x}\|}\frac{\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}}{\|\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}\|}dx\right| <$$

$$< \frac{\left|\int\limits_0^1 \left(-\frac{x}{4{\mu_k}^3}\, e^{-\mu_k x} + \alpha_k\, e^{-\mu_k x}\right)\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}dx\right|}{\| -\frac{x}{4{\mu_k}^3}\, e^{-\mu_k x} + \alpha_k\, e^{-\mu_k x}\|^2} =$$

$$= \frac{\left|\int\limits_0^1 \left(-\frac{x}{4{\mu_k}^3}\, e^{-\mu_k x} + \alpha_k\, e^{-\mu_k x}\right)\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}dx\right|}{\left\|-\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x}\right\|^2 + \Psi(\alpha_n)} <$$

$$< \frac{\frac{e^{-2\mu_k}}{16\mu_k^7(1-e^{-2\mu_k})}}{\left\|-\frac{x}{4{\mu_n}^3}\, e^{-\mu_n x}\right\|^2 + \Psi\left(\frac{1-e^{-2\mu_k}-2\mu_k e^{-2\mu_k}}{8\mu_k^4(1-e^{-2\mu_k})}\right)} < \sqrt{\frac{8}{7}}2^3\mu_k^2 e^{-2\mu_k} = \beta_2,$$

где $\beta_2 = \bar{o}(1)$ при $\mu_k \longrightarrow \infty$. Оценим теперь непосредственно модуль второй из сумм в правой части неравенства (14):

$$\left|\int\limits_0^1 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^r \frac{(-\tilde{\tilde{a}}_j)\, e^{-\mu_j x}\,\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}}{2\,\|e^{-\mu_j x}\|\|\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}\|}dx\right| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^r \frac{|\,\tilde{\tilde{a}}_j\,|}{2}\left|\int\limits_0^1 \frac{e^{-\mu_j x}\,\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}}{2\,\|e^{-\mu_j x}\|\|\frac{x}{4{\mu_k}^3}e^{-\mu_k x}\|}dx\right| <$$

$$< \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^r \frac{(1-e^{-(\mu_j+\mu_k)} - (\mu_j+\mu_k)e^{-(\mu_j+\mu_k)})\sqrt{2\mu_j}\sqrt{4{\mu_k}^3}}{2(\mu_j+\mu_k)^2\sqrt{1-e^{-2\mu_j}}\sqrt{1-e^{-2\mu_k}-2\mu_k e^{-2\mu_k}-2{\mu_k}^2 e^{-2\mu_k}}} <$$

$$< \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^r \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\mu_j}\sqrt{{\mu_k}^3}}{(\mu_j+\mu_k)^2} = 2\sqrt{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^r \frac{2^{50j}2^{150k}}{(2^{100j}+2^{100k})^2} <$$

$$< 2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{2^{50j}2^{150k}}{2^{200j}2^{200(k-j)}} + 2\sqrt{2}\sum_{j=k+1}^{r}\frac{2^{50j}2^{150k}}{2^{200k}2^{200(j-k)}} =$$

$$= 2\sqrt{2}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2^{50(k-j)}} + 2\sqrt{2}\sum_{j=k+1}^{r}\frac{1}{2^{150(j-k)}} <$$

$$< 2\sqrt{2}\left(\sum_{|k-j|=1}^{r}\frac{1}{2^{50|k-j|}} + \sum_{|j-k|=1}^{r}\frac{1}{2^{150|j-k|}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{2^{50m}} + \sum_{m=1}^{r}\frac{1}{2^{150m}}\right) < 2\sqrt{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{50m}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{150m}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\frac{1}{2}^{50}}{1-\frac{1}{2}^{50}} + \frac{\frac{1}{2}^{150}}{1-\frac{1}{2}^{150}}\right) < 2\sqrt{2}\left(\frac{\frac{1}{2}^{50}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}^{150}}{1-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{48} + \left(\frac{1}{2}\right)^{148}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^{46}.$$

Последняя четвертая сумма из неравенства (14) оценивается по аналогичной схеме. Таким образом для неравенства (14) получаем:

$$\frac{\delta}{\gamma^2} > \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} - \beta_1 + o_1 + \beta_2 + o_2\right|^2 > \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

где o_1, o_2 по модулю мало отличаются от нуля и $\beta_1, \beta_2 = \bar{o}(1)$. Откуда следует, что

$$\delta > \frac{1}{16} \cdot \gamma^2 \geq 0.25,$$

так как $\gamma \geq 2$. Окончательно получили, что $\delta > Const > 0$, где $Const$ в зависимости от случая строго определена и фиксирована.

Случай B) В этой ситуации возьмем в качестве $f(x) = -\frac{x}{4\mu_k^3}\, e^{-\mu_k x} + \alpha_k\, e^{-\mu_k x}$. Подставим $f(x)$ в неравенство (12) и проведя аналогичные оценки, как и в случае A), прийдем к тому же выводу $\delta > Const > 0$, где $Const$ в зависимости от случая строго определена и фиксирована.

Общий вывод: Получили, что в случае системы (2) и $\mu_j = 2^{100j}, j = 1, 2, \ldots,$ где для любой константы $\delta > 0$ выполняется неравенство $\delta > Const > 0$, где $Const$ строго определена и фиксирована. Пришли к явному противоречию, следовательно, предположение о том, что система (4) не равномерно минимальна, является неверным. Система (4) равномерно минимальна. Утверждение доказано.

Автор выражает глубочайшую благодарность В.Д.Будаеву за постановку задачи, руководство работой и ценные советы.

Литература

[1] Будаев В.Д. Некоторые свойства корневых функций дифференциальных операторов, связанные с безусловной базисностью // Дифференциальные уравнения, 1996. – Т.32, №1, с.9-14.

[2] Керимов Н.Б. Базисность и равномерная минимальность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов: Дис.., д-ра физ.-мат.наук. – М.: МГУ, 1997.

[3] Данилов С.С. Некоторые проблемы равномерной минимальности систем корневых функций дифференциальных операторов // Исследования по краевым задачам комплексного анализа и дифференциальным уравнениям. Межвузовский научный сборник. – Смоленск, 1999. – С.40-47.

УДК 517.9

СИМВОЛ ОБЩЕГО В-ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА

Гоц Е.Г.
Воронежская Государственная Технологическая Академия
Воронеж
e-mail: gots@gmail.com

Пусть E_N^+ – часть евклидова пространства точек $x{=}(x', x'')$, $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, $x''{=}(x_{n+1}, \ldots, x_N)$, определенная неравенствами $x_1{>}0, \ldots, x_n{>}0$ и $\gamma{=}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел. Рассмотрим смешанный обобщенный сдвиг

$$(T^y f)(x) = (T_{x'}^{y'} f)(x', x'' - y''),$$

где $T_{x'}^{y'} = \prod\limits_{i=1}^{n} T_{x_i}^{y_i}$ – обобщенный сдвиг , действие которого по каждой из переменных x_i $(i = \overline{1, n})$ определяется по формуле

$$T_{x_i}^{y_i} f(x) = C(\gamma_i) \int\limits_0^\pi f\left(\ldots, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}, \ldots, x''\right) \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_i,$$

$$C(\gamma_i) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma(\frac{1}{2})}. \quad (1)$$

В работе используются конечные разности, порожденные смешанным обобщенным сдвигом, нецентрированного и центрированного вида. Эти разности будем называть о.к. разностями (обобщенными конечными разностями).

Нецентрированными смешанными о.к. разностями будем называть следующую конструкцию:

$$(\square_t^l \varphi)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k \, (T^{kt}\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k \, T_{x'}^{kt'} \varphi(x', x'' - kt''). \quad (2)$$

Центрированные смешанные о.к. разности имеют вид:

$$(\square_t^l \varphi)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k \left(T^{\left(\frac{l}{2}-k\right)t}\varphi\right)(x) = $$

$$= \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k \left(T_{x'}^{\left(\frac{l}{2}-k\right)t'} \varphi\right)\left(x', x'' - \left(\frac{l}{2} - k\right) t''\right). \quad (3)$$

Рассмотрим векторный шаг $t{=}(t', t'')$, $t'{=}(t_1, \ldots, t_n)$, $t''{=}(t_{n+1}, \ldots, t_N)$, число n фиксированно и $n \le N$.

Лемма 1. Для непрерывно дифференцируемой до порядка m и четной по каждой из первых n переменных функции $f(x)$ при $l \geqslant m$ справедливы формулы:

для нецентрированных о.к. разностей:

$$(\square_t^l f)(x) = \sum_{|\alpha|+2|\beta|=m} \left(\frac{t'}{2}\right)^{2\beta} \frac{(-t'')^\alpha}{\alpha!} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\beta_i!\ \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}+\beta_i\right)} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k\ k^m\ (B_{x'}^\beta D_{x''}^\alpha f)(x-\Theta kt); \quad (4)$$

для центрированных о.к. разностей:

$$(\square_t^l f)(x) = \sum_{|\alpha|+2|\beta|=m} \left(\frac{t'}{2}\right)^{2\beta} \frac{(-t'')^\alpha}{\alpha!} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\beta_i!\ \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}+\beta_i\right)} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k \left(\frac{l}{2}-k\right)^m (B_{x'}^\beta D_{x''}^\alpha f)(x-\Theta(l/2-k)t), \quad (5)$$

где α и β – целочисленные мультииндексы размерности n и $N-n$ соответственно, состоящие из неотрицательных чисел, $0 < \Theta < 1$.

Доказательство. Рассмотрим следующие функции параметра α:

в случае нецентрированной смешанной о.к. разности

$$A_l(\alpha) = A_l'(\alpha) = \sum_{k=0}^l (-1)^{k-1} C_l^k\, k^\alpha$$

и в случае центрированной о.к. разности

$$A_l(\alpha) = A_l''(\alpha) = 2\sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^{k-1} C_l^k \left(\frac{l}{2}-k\right)^\alpha.$$

Справедлива лемма (С.Г. Самко [1], см. также [2]): *функция* $A_l'(\alpha)$, $\alpha \in R^1$, *обращается в нуль в точках* $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, l-1$, *и только в них. Функция* $A_l''(\alpha)$ *имеет своими нулями четные числа* $\alpha = 2, 4, 6, \ldots, l-2$ *при четном* l *и нечетные числа* $\alpha = 1, 3, \ldots, l-2$ *при нечетном* l.

Из этого утверждения вытекает необходимость рассматривать только четное l при использовании центрированной о.к. разности в наших рассуждениях.

По каждой из первых n переменных воспользуемся формулой Тейлора-Дельсарта с остаточным членом в форме Лагранжа (см. [3]):

$$T_t^\tau f(t) = \sum_{\beta=0}^N \varphi_\beta (B^\beta f)(t)\tau^{2\beta} + \varphi_{N+1}(B^{N+1}f)(t+\Theta\tau)\tau^{2(N+1)}, \quad t > 0, \tau > 0,$$

где $0 < \Theta < 1$, $\varphi_\beta = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\beta!\Gamma(\beta+\frac{\gamma+1}{2})2^{2\beta}}$. А по остальным $N-n$ переменным применим формулу Тейлора. В результате получим для нецентрированной разности:

$$(\square_t^l f)(x) = \sum_{|\alpha|+2|\beta|\leqslant m-1} c(\alpha,\beta)\left[\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k k^{|\alpha|+2|\beta|}\right] B_{x'}^{\beta} D_{x''}^{\alpha} f(x)(t')^{2\beta}(t'')^{\alpha}+$$

$$+\sum_{|\alpha|+2|\beta|=m} c(\alpha,\beta)\left[\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k k^{|\alpha|+2|\beta|}\right] B_{x'}^{\beta} D_{x''}^{\alpha} f(x-\Theta kt)(t')^{2\beta}(t'')^{\alpha}.$$

Откуда

$$(\square_t^l f)(x) = \sum_{|\alpha|+2|\beta|\leqslant m-1} A_l'(|\alpha|+2|\beta|)c(\alpha,\beta) B_{x'}^{\beta} D_{x''}^{\alpha} f(x)(t')^{2\beta}(t'')^{\alpha}+$$

$$+\sum_{|\alpha|+2|\beta|=m} A_l'(|\alpha|+2|\beta|)c(\alpha,\beta) B_{x'}^{\beta} D_{x''}^{\alpha} f(x-\Theta kt)(t')^{2\beta}(t'')^{\alpha}.$$

Согласно лемме С.Г. Самко и условию $l \geqslant m$, получаем искомую формулу (4) для нецентрированных разностей.

Аналогично доказывается формула (5).

Из леммы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Для непрерывно дифференцируемой до порядка m и четной по каждой из первых n переменных функции $f(x)$ справедлива оценка:

$$|(\square_t^l f)(x)| = O(|t|^m), \quad t \to 0.$$

Общие B-гиперсингулярные интегралы (B-г.с. интегралы) вводятся как весовые интегральные операторы с особенностью ядра больше чем $N+|\gamma|$ (N – размерность пространства):

$$(\mathbf{D}_{\gamma}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{d_{N,\gamma,l}(\alpha)} \int\limits_{E_N^+} \frac{(\square_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} \prod_{i=1}^{n} t_i^{\gamma_i} dt, \tag{6}$$

где число n фиксировано, и $0 \leqslant n \leqslant N$. При $n=0$ оператор (6) – обычный г.с. интеграл, исследованный С.Г. Самко ([1, 2]). В случае же, когда число весовых переменных совпадает с размерностью пространства, т.е. $n=N$, B-г.с. интегралы введены Л.Н. Ляховым в работе [4], соответствующие исследования приведены в [5]. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что число n фиксированно и $1 < n < N$.

В (6) $d_{N,\gamma,l}(\alpha)$ – нормирующая константа, значение которой далее выбрано так, чтобы конструкция (6) не зависела от l при $l > \alpha$ (см. [6]). Регуляризация расходящегося общего г.с. интеграла в правой части (6) достигается применением смешанных о.к. разностей вида (2) или (3).

Усеченные B-г.с. интегралы определяются интегрированием по области $\{|t|>\varepsilon\}^+ = \{|t|>\varepsilon,\ t\in E_N^+\}$. Введем обозначение

$$(\mathbf{E}_{\alpha}^{\gamma}\varphi)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mathbf{E}_{\alpha,\varepsilon}^{\gamma}\varphi\right)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+} \frac{(\square_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}\,(t')^{\gamma}\,dt\,. \tag{7}$$

Теорема 1. Общие В-г.с. интегралы (6) сходятся абсолютно на функциях, имеющих в $\overline{E_N^+}$ все ограниченные производные (по переменным $x_{n+1}, \dots, x_N$) и В-производные (по переменным $x_1, \dots, x_n$) до порядка $m = 2k' + k'' = [\alpha] + 1$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{E_N^+} \left| \frac{(\Box_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} (t')^\gamma \right| dt$$

и докажем его сходимость. Представим его в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_{E_N^+} \left| \frac{(\Box_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} (t')^\gamma \right| dt = \int\limits_{\{t<1\}^+} \left| \frac{(\Box_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} (t')^\gamma \right| dt + \int\limits_{\{t>1\}} \left| \frac{(\Box_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} (t')^\gamma \right| dt.$$

Второй интеграл в сумме сходится ввиду того, что функция φ ограничена и имеет ограниченные производные, а ядро $(x')^\gamma / |x|^{N+|\gamma|+\alpha} = O(|x|^{-N-\alpha})$, $|x| \to \infty$.

Докажем сходимость первого интеграла. Из леммы для $l \geqslant m$ вытекает оценка:

$$\int\limits_{\{t<1\}^+} \left| \frac{(\Box_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} \prod_{i=1}^n t_i^{\gamma_i} \right| dt \leqslant \int\limits_{\{t<1\}^+} \frac{|t|^m}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} \prod_{i=1}^n t_i^{\gamma_i}\, dt.$$

Теперь произведем сферическое преобразование координат $t_i = \rho \Theta_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Имеем

$$\int\limits_{\{t<1\}^+} \frac{|t|^m}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} \prod_{i=1}^n t_i^{\gamma_i}\, dt = \int\limits_0^1 \rho^{m-\alpha-1} d\rho \int\limits_{S_N^+(1)} \prod_{i=1}^n \Theta_i^{\gamma_i} dS(\Theta).$$

Внутренний интеграл представляет собой площадь нагруженной сферы (см. [5]). Поэтому, учитывая условие $m = 2k' + k'' = [\alpha] + 1$, получим

$$\int\limits_{\{t<1\}^+} \left| \frac{(\Box_t^l \varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}} (t')^\gamma \right| dt \leqslant C \int\limits_0^1 \frac{1}{\rho^{\{\alpha\}}} d\rho.$$

Поскольку $\{\alpha\} < 1$, то последний интеграл сходится, что влечет за собой абсолютную сходимость общего В-г.с. интеграла (6) на функциях, имеющих все ограниченные производные (по переменным $x_{n+1}, \dots, x_N$) и В-производные (по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$) до порядка $m = 2k' + k'' = [\alpha] + 1$.

Доказательство закончено.

Обозначим через $S_{ev}(E_N^+)$ подпространство шварцевского пространства основных функций, состоящее из функций $\varphi(x)$, четных по каждой из переменных x_i, $i = 1, 2, \dots, n$. На функциях из $S_{ev}(E_N^+)$ определено и обратимо смешанное преобразование Фурье-Бесселя следующего вида

$$F_B[\varphi](\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{E_N^+} \mathbf{j}_\gamma(x'; \xi')\ e^{-i\langle x'', \xi'' \rangle} \varphi(x)\, (x')^\gamma\, dx\,, \tag{8}$$

$$\varphi(x)=F_B^{-1}[\widehat{\varphi}](x)=F_B[\widehat{\varphi}](-x).$$

В этих формулах $(x')^\gamma=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\gamma_i}$, $\mathbf{j}_\gamma(x';\xi')=\prod_{j=1}^n j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j\xi_j)$, а функция $j_\nu(t)$ связана с функцией Бесселя первого рода $J_\nu(t)$ формулой $j_\nu(t)=2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\,\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$.

Предположим $\varphi(x)\in S_{ev}(E_N^+)$. Применив к конструкции (7) смешанное интегральное преобразования Фурье-Бесселя (8), получим:

$$F_B[\mathbf{E}^\alpha_{\gamma,\varepsilon}\varphi](\xi)=\int\limits_{E_N^+}e^{-i<x'',\xi''>}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')(x')^\gamma\int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+}\frac{(\square_t^l\varphi)(x)}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}(t')^\gamma dtdx=$$

$$=\int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+}\frac{(t')^\gamma}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}\int\limits_{E_N^+}e^{-i<x'',\xi''>}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')(x')^\gamma(\square_t^l\varphi)(x)dxdt.$$

Предположим, что $\square_t^l$ – нецентрированная о.к. разность вида (2). Тогда

$$F_B[\mathbf{E}^\alpha_{\gamma,\varepsilon}\varphi](\xi)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_l^k\int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+}\frac{(t')^\gamma}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}\int\limits_{E_N^+}e^{-i<x''+kt'',\xi''>}(x')^\gamma\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')T_{x'}^{kt'}\varphi(x',x'')dxdt.$$

Самосопряженность обобщенного сдвига позволяет последнее выражение записать в виде:

$$F_B[\mathbf{E}^\alpha_{\gamma,\varepsilon}\varphi](\xi)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_l^k\int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+}\frac{(t')^\gamma}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}\int\limits_{E_N^+}e^{-i<x''+kt'',\xi''>}T_{x'}^{kt'}\mathbf{j}_\gamma(x',\xi')\varphi(x',x'')(x')^\gamma dxdt.$$

Учитывая, что $T_x^y\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{j}_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i)\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbf{j}_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(y_i\xi_i)$ (см. [3]), получим

$$F_B[\mathbf{E}^\alpha_{\gamma,\varepsilon}\varphi](\xi)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\ C_l^k\int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+}\frac{(t')^\gamma}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}e^{-i<kt'',\xi''>}\prod_{j=1}^{n}\mathbf{j}_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(kt_j\xi_j)\times$$

$$\times\int\limits_{E_N^+}e^{-i<x'',\xi''>}\mathbf{j}_\gamma(x';\xi')\varphi(x',x'')(x')^\gamma dxdt.$$

Внутренний интеграл представляет собой преобразование Фурье-Бесселя от функции $\varphi(x)$. Таким образом,

$$F_B[\mathbf{E}^\alpha_{\gamma,\varepsilon}\varphi](\xi)=|\xi|^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\ C_l^k\int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+}\frac{(\tau')^\gamma}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}e^{-i<k\tau'',\frac{\xi''}{|\xi|}>}\prod_{j=1}^{n}\mathbf{j}_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(kt_j\frac{\xi_j}{|\xi|})dt.$$

Отсюда видно, что роль нормирующей константы при определении общего В-г.с. интеграла (6) должен выполнить коэффициент

$$d_{N,\gamma,l}(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_k^l\int\limits_{\{|t|>\varepsilon\}^+}\frac{(t')^\gamma}{|t|^{N+|\gamma|+\alpha}}\mathbf{j}_\gamma\left(kt',\frac{\xi'}{|\xi|}\right)e^{-i\langle kt'',\xi''/|\xi|\rangle}dt. \qquad (9)$$

Также как в исследованиях [1] и [4], нормирующий множитель (9) не зависят от ξ при $|\xi| = 1$. Покажем это. Для этого воспользуемся представлением нормированных функций Бесселя через интеграл Пуассона и произведем преобразование координат

$$z_{2j-1} = t_j \cos\alpha_j,\ z_{2j} = t_j \sin\alpha_j,\ dz_j = t_j d\alpha_j dt_j,\ 0 \leqslant \alpha_j \leqslant \pi,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда, обозначая $E^+_{N+n} = \{(z, t'') = (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}, t''),\ z_{2i} > 0,\ i = i, i+1, \dots, n\}$ и вырезая область, содержащую особенность, получим:

$$d_{N,\gamma,l}(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} C(\gamma) \sum_{k=0}^{l} (-1)^k\ C^k_l \int\limits_{\{E^+_{N+n}\setminus\{|(z,t'')|<\varepsilon\}\}} e^{-i\sum\limits_{j=1}^{n} kz_{2j-1}\xi_j} \prod_{j=1}^{n} z_{2j}^{\gamma_j - 1} \frac{e^{-i<kt'',\xi''>}dz}{(|z|^2 + |t''|^2)^{\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}}},$$

где

$$C(\gamma) = \prod_{j=1}^{n} C(\gamma_j) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\frac{\gamma_j+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma_j}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Отделим в этом выражении весовые переменные. Для удобства введем обозначения $t' = (z_1, z_3, z_5, ..., z_{2n-1}),\ \tau = (z_2, z_4, z_6, ..., z_{2n})$. Имеем

$$d_{N,\gamma,l}(\alpha) = C(\gamma) \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C^k_l \int\limits_{\{E^+_{N+n}\setminus\{|(z,t'')|<\varepsilon\}\}} e^{-i\langle kt'\xi'\rangle} \prod_{j=1}^{n} \tau_j^{\gamma_j-1} \frac{e^{-i<kt'',\xi''>}}{(|t'|^2 + |t''|^2 + |\tau|^2)^{\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}}} dt' d\tau dt''$$

В итоге получаем:

$$d_{N,\gamma,l}(\alpha) = C(\gamma) \int\limits_{E^+_n} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \tau_j^{\gamma_j-1}}{(|\tau|^2 + 1)^{\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}}} d\tau \int\limits_{E_N} \frac{(1 - e^{-i<t,\frac{\xi}{|\xi|}>})^l}{|t|^{N+\alpha}} dt. \tag{10}$$

Последний из этих двух интегралов хорошо известен (см. [1, 2]) и представляет собой нормирующий коэффициент для обычного г.с. интеграла с нецентрированной конечно-разностной регуляризацией. Как функция параметра α он исследован С.Г. Самко в работе [2]. Будем называть его коэффициентом С.Г. Самко и обозначать $S_{N,l}(\alpha)$. Значение его вычисляется по формуле (см. [1], стр. 373):

$$S_{N,l}(\alpha) = \int\limits_{E^+_N} \frac{(1 - e^{-i<t,\frac{\xi}{|\xi|}>})^l}{|t|^{N+\alpha}} dt = \beta_N(\alpha) \frac{A'_l(\alpha)}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}, \tag{11}$$

где $\beta_N(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}+1}}{2^\alpha \Gamma(1+\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{N+\alpha}{2})}$, $\quad A'_l(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^k C^k_l k^\alpha$, а отношение $\frac{A'_l(\alpha)}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}$ при целом четном α понимается как $\lim\limits_{\varphi\to\alpha} \frac{A'_l(\varphi)}{\sin\frac{\varphi\pi}{2}} = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\alpha}{\pi} \frac{dA'_l(\alpha)}{d\alpha}$. Второй интеграл в (10) вычисляется переходом к сферическим координатам:

$$C(N,\gamma) = C(\gamma) \int\limits_{E^+_n} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \tau_j^{\gamma_j-1}}{(|\tau|^2 + 1)^{\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}}} d\tau = \frac{\Gamma\left(\frac{N+\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^n\, \Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}\right)\ \pi^{n/2}}.$$

Следовательно, нормирующая константа B-г.с. интеграла (6) со смешанной о.к. разностью (2) имеет вид

$$d_{N,\gamma,l}(\alpha) = S_{N,l}(\alpha)\, C(N,\gamma)\,, \tag{12}$$

Из (12) следует совпадение свойств нормирующих коэффициентов $d_{N,\gamma,l}(\alpha)$ и $S_{N,l}(\alpha)$. В случае применения в (6) и (7) смешанной о.к. разности (3) получено следующее представление нормирующего коэффициента (ср. с формулой (9)):

$$d_{N,\gamma,l}(\alpha) = C(\gamma) \int\limits_{E_N} \frac{\left(e^{i<\frac{t}{2},\frac{\xi}{|\xi|}>} - e^{-i<\frac{t}{2},\frac{\xi}{|\xi|}>}\right)^l}{|t|^{N+\alpha}}\, dt \int\limits_{E_n^+} \frac{\prod_{j=1}^n t_j^{\gamma_j-1}}{(1+|t|^2)^{\frac{N+|\gamma|+\alpha}{2}}}\, dt\,. \tag{13}$$

Здесь первый интеграл вновь представляет собой коэффициент С.Г. Самко, нормирующий обычные г.с. интегралы с центрированной конечно-разностной регуляризацией ([1, 2]), а второй совпадает с уже посчитанным нами коэффициентом $C(N,\gamma)$.

Из всего вышесказанного вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Символ общего B-г.с. интеграла (6) с нормирующими константами (10) и (13) равен

$$\mathfrak{D}^{\gamma}_{\alpha,\Omega}(\xi) = |\xi|^{\alpha}.$$

Литература

[1] Самко С.Г. О пространствах риссовых потенциалов // Известие АН СССР. Сер.мат. – 1976. – Т.40, №5. – С. 1443-1472.

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[3] Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // УМН, 1951. – Т.6, №2. – С.102-143.

[4] Ляхов Л.Н. Об одном классе гиперсингулярных операторов // ДАН, 1996. – Т. 315, №2. – С.291-296.

[5] Ляхов Л.Н. Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом. – Воронеж: Воронеж. гос. технол. акад., 1997. – 144 с.

[6] Гоц Е.Г., Ляхов Л.Н. Обобщенные разности и общие гиперсингулярные интегралы// ДАН, 2005. – Т. 405, №4.– С.444-447.

О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ САФАРА

Гулина О.В.
Белорусский государственный университет
Минск
e-mail:gulina_o@mail.ru

Пусть X – бесконечномерное банахово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathbf{B}(X)$ – банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих на X. Рассмотрим $T \in \mathbf{B}(X)$. Обозначим через $N(T)$ ядро оператора T, а через $R(T)$ – множество значений оператора T. Тогда $nul(T) = dimN(T)$ и $def(T) = codim(R(T))$ – нуль и дефект оператора T соответственно.

Обобщенным ядром оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ называют множество $N^\infty(T) := \cup\{N(T^k) : k = 1, 2, 3, ...\}$. Обобщенной областью значений оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ называют множество $R^\infty(T) := \cap\{R(T^k) : k = 1, 2, 3, ...\}$. Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ имеет обобщенный обратный, если существует оператор $S \in \mathbf{B}(X)$ такой, что имеет место равенство $TST = T$. Подробная информация об обобщенных обратных операторах и их свойствах содержится, например, в книге [1].

Пусть M и N – замкнутые подпространства банахова пространства X. Говорят, что M существенно содержится в N, и пишут $M \subset^e N$, если существует конечномерное подпространство F такое, что выполняется включение $M \subset N + F$, т.е. $dim(M \setminus (M \cap N)) < \infty$.

***Определение* 1**. Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется регулярным оператором, если для него существует обобщенный обратный и выполняется включение $N(T) \subset R^\infty(T)$.

Регулярный оператор, следуя [2], назовем оператором типа Сафара. Множество всех операторов типа Сафара, действующих на банаховом пространстве X, обозначается $\mathbf{S}(X)$.

***Определение* 2**. Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется существенно регулярным оператором, если для него существует обобщенный обратный и выполняется включение $N(T) \subset^e R^\infty(T)$, т.е. размерность выступа нулей оператора T на обобщенной области значений $R^\infty(T)$ конечна.

Обозначим через $\mathbf{S}_e(X)$ множество всех существенно регулярных операторов, действующих на X. Условие $N(T) \subset R^\infty(T)$ из определения оператора типа Сафара может быть сформулировано в терминах обобщенного ядра и обобщенной области значений.

***Теорема* 1**. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$ – оператор с замкнутой областью значений. Тогда следующие условия эквивалентны

$$N(T) \subset R^\infty(T) \Leftrightarrow N^\infty(T) \subset R(T) \Leftrightarrow N^\infty(T) \subset R^\infty(T)$$

Условие $N(T) \subset^e R^\infty(T)$ из определения существенно регулярного оператора также может быть сформулировано в терминах обобщенного ядра и области значений или обобщенной области значений.

***Теорема* 2**. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$ – оператор с замкнутой областью значений.

Тогда следующие условия эквивалентны

$$N(T) \subset^e R^\infty(T) \Leftrightarrow N^\infty(T) \subset^e R(T) \Leftrightarrow N^\infty(T) \subset^e R^\infty(T)$$

Доказательства сформулированных теорем приводятся в работе [3].
Операторы типа Сафара и существенно регулярные операторы порождают соответствующие спектры: спектр Сафара $\sigma_s(T)$ и существенный спектр Сафара $\sigma_{es}(T)$ соответственно, которые для $T \in \mathbf{B}(X)$ определяются следующим образом

$$\sigma_s(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin S(X)\}$$

$$\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin S_e(X)\}$$

Рассмотрим следующие подмножества комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(T - \lambda I)} = R(T - \lambda I)\},\\
&\Phi^+(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : nul(T - \lambda I) < \infty\},\\
&\Phi^-(T) := \{\lambda \in \Delta_1(T) : def(T - \lambda I) < \infty\},\\
&\Delta_3(T) := \Phi^+(T) \cap \Phi^-(T) = \Phi(T).
\end{aligned}$$

Подмножество комплексной плоскости $\Delta_1(T)$ называется областью нормальной разрешимости оператора T, подмножество $\Delta_3(T)$ – областью фредгольмовости оператора T. Подмножества $\sigma_{eg}(T) := \mathbb{C} \setminus \Delta_1(T)$ и $\sigma_{ef}(T) := \mathbb{C} \setminus \Delta_3(T)$ определяют существенный спектр Голдберга оператора T и существенный спектр Фредгольма оператора T соответственно. Более подробная информация о различных существенных спектрах линейных ограписенных операторов и их свойствах содержится в книге [4].

***Теорема* 3**. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$. Тогда существенный спектр Сафара есть непустое подмножество комплексной плоскости, для которого спаведливы включения

$$\sigma_{eg}(T) \subset \sigma_{es}(T) \subset \sigma_{ef}(T) \subset \sigma(T),$$

где $\sigma(T)$ – спектр оператора T.

Доказательство. Доказательство теоремы непосредствонно вытекает из определения соответствующих существенх спектров оператора $T \in \mathbf{B}(X)$.

***Теорема* 4**. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$ и f – функция, аналитическая в окрестности $\sigma(T)$. Тогда для существенного спектра Сафара оператора T выполняется соотношение

$$\sigma_{es}(f(T)) = f(\sigma_{es}(T))$$

Некоторые теоремы об отображениях спектров изложены в работе [5].
Обозначим через ℓ^p, где $1 < p < \infty$, банахово пространство бесконечных числовых последовательностей $x = \{x\}_{n=1}^{\infty}$, для которых норма задаётся по формуле $\|x\| := (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$. Пусть $\{a\}_{n=0}^{\infty}$ – числовая последовательность, для которой выполняются условия $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_n = L \neq 0$. Рассмотрим оператор Рэйли, являющийся обобщением дискретного оператора Чезаро, и определим для него существенный спектр Сафара.

Оператор Рэйли $R_a : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ задается нижней треугольной матрицей, элементы которой удовлетворяют условиям $a_{nk} = a_{nn}$, если $k \leq n$, и $a_{nk} =$

0 в противном случае. Для существенных спектров Голдберга и Фредгольма оператора Рэйли справедливы следующие результаты

$$\sigma_{eg}(R_a) = \sigma_{ef}(R_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{Lq}{2} \right| = \frac{Lq}{2} \right\},$$

где $0 \neq L = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)a_n$ и $q = \frac{p}{p-1}$ [6].

Для существенного спектра Сафара оператора Рэйли, действующего на банаховом пространстве ℓ^p, $1 < p < \infty$, имеет место следующая теорема.

***Теорема* 5**. Существенный спектр Сафара оператора Рэйли $R_a : \ell^p \longrightarrow \ell^p$ вычисляется по формуле

$$\sigma_{es}(R_a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda - \frac{Lq}{2} \right| = \frac{Lq}{2} \right\},$$

где $0 \neq L = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)a_n$ и $q = \frac{p}{p-1}$.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 3 и результатов существенных спектров Голдберга и Фредгольма оператора Рэйли.

Литература

[1] Caradus S.R. Generalized inverses and operator theory.– Queen's University, Kingston, Ontario, 1978.

[2] Schmoeger Ch. On operators of Saphar type // Portugaliae Mathematica. 1994.– V.51(4).– P.617-628.

[3] Kordula V., Muller V. Axiomatic theory of spectrum // Studia mathematica.– 1996. – V2. – P.109-127.

[4] Еровенко В.А. Функциональный анализ: спектральные и фредгольмовы свойства линейных операторов. – Минск: БГУ, 2002.

[5] Rakochevich V. Generalised spectrum and commuting compact perturbations // Proceedings of the Edinberg Mathematical Society. – 1993. – V.36. – P.197-209.

[6] Gulina O.V. Essential spectra of Raily operator on Banach space ℓ^p // Тезисы докл. IX Белорусской математической конференции.– Гродно: ГрГУ, 2004. – Ч.1. – С.64.

ОПЕРАТОРЫ ЛОКАЛЬНОЙ ПОДСТАНОВКИ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ ВИДА $C'(P)$

А.В.Колдунов
Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург

При изучении операторов, заданных в архимедовых векторных решетках (ВР), бывают удобными те случаи, когда исследуемый оператор представлен в виде оператора подстановки. Поэтому естественно рассмотреть свойства такого рода операторов.

Будут использоваться следующие обозначения. Пусть P произвольный компакт. Как обычно, через $C(P)$ обозначается ВР всех непрерывных на P функций. Если ВР лежит в $C(P)$, разделяет точки P и содержит тождественную единицу $e = e_p$, то эту ВР будем обозначать через $C'(P)$. Замкнутые (открытые) множества в P будем обозначать буквами F, H (соответственно G, W, U). Для $x \in C(P)$ всегда $cz\ x = \{t \in P : x(t) \neq 0\}$.

1. Оператор $S = S(G_o; \tau; \Phi)$

Пусть даны два компакта B, K. Пусть открытое $G_o \subset K$, отображение $\tau : G_o \to B$ и функция $\Phi : G_o \times R \to R$, причем $\Phi(t, 0) = 0$ для любого $t \in G_o$. Для любого $x \in C(B)$ зададим функцию $S(x) = S(G_o; \tau, \Phi)(x) : K \to R$ следующим образом: $S(x)(t) = \Phi(t, x(\tau(t))$ при $t \in G_o$ и $S(x)(t) = 0$ $t \overline{\in} G_o$.

Замечание 1.1. Для $t \in G_o$ и $x \in C(B)$ выполнено равенство $S(x)(t) = S(x(\tau(t)) \cdot e_B)(t)$. Таким образом, $S(x)$ полностью определяется значениями $S(re_B)$, где $r \in R$. Кроме того, всегда можно считать, что $G_o = \bigcup(czS(re_B) : r \in R)$, так как в противном случае заменяем G_o на $\bigcup(czS(re_B) : r \in R)$ и замечаем, что в этом случае $S(x)$ не меняется.

Замечание 1.2. Пусть F компакт в $G_o \times R$, причем $F \bigcap(G_o \times \{o\}) = \emptyset$. Пусть $\Phi(t, r)$ есть характеристическая функция F. Для $x \in C(B)$ функция $S(x)$ может быть разрывной; тем не менее множество $H = \{t \in K : S(r(t) = 1\}$ является замкнутым в G_o. Поэтому если K экстремально несвязное пространство, то $S(x)$ отлично от непрерывной функции $h \in C(K) : h(\mathrm{int}H) \equiv 1$, $h(K \setminus \mathrm{int}H) \equiv 0$ – на замкнутом нигде не плотном множестве. Если K не является экстремально несвязным, то ситуация будет иной.

Поточечная проверка дает следующий результат:

Лемма 1.3. Пусть $S = S(G_o; \tau; \Phi)$. Тогда а) $S(o) = 0$; б) S сохраняет дизъюнктность, т.е. из $|x_1| \wedge |x_2| = 0$ следует $|S(x_1)| \wedge |S(x_2)| = 0$; в) если $|x_1| \wedge |x_2| = 0$ и $x \in C(B)$, то $S(x_1 + x + x_2) + S(x) = S(x_1 + x) + S(x_2 + x)$ (т.е. S оператор с условием Хаммерштейна); г) Если S однородный оператор, то S аддитивен.

Замечание 1.4. По своему строению оператор S может не обладать обычными свойствами типа $|S(x + y) - S(x)| \leq |S(y)|$.

2. Операторы локальной подстановки

Будем говорить, что оператор $T : C'(B) \to C(K)$ является оператором локальной подстановки (в этом случае будем писать $T \in OLS(C'(B) \to C(K))$, если существуют такие G_o, τ, Φ, то для любого $x \in C'(B)$ множество $M(x) = \{t \in K : T(x)(t) = S(G_o; \tau; \Phi)(x)(t)\}$ есть множество второй категории.

***Замечание* 2.1**. Пусть $T \in OLS(C'(B) \to C(K))$, $x \in C'(B)$ и $S(x)$ непрерывна на G_o. Тогда $T(x)$ является непрерывным продолжением $S(x)$ с $G_o \cup (K \setminus clG_o)$ на все K.

***Замечание* 2.2**. Пусть $T \in OLS(C'(B) \to C(K))$. Тогда для T выполнены все свойства из леммы 1.3.

Введем следующее обозначение: пусть, как и раньше, задана тройка $(G_o; \tau; \Phi)$; через $X(B,T)$ обозначим семейства всех таких $x \in C(B)$, для которых существует $T(x) \in C(K)$, совпадающая с $S(x)$ на множестве $M(x)$ второй категории. Семейство $X(D,T)$ всегда содержит нулевой элемент. Замечание 1.2 позволяет построить такие случаи, когда $X(B,T)$ не является замкнутым относительно сложения, взятия супремума и инфимума.

***Предложение* 2.3**. Пусть $T \in OLS(C'(B) \to C(K))$, причем для любого $x \in C'(B)$ выполнено: $S(x)$ непрерывна на G_o. Тогда отображение $\tau : G_o \to B$ непрерывное.

Доказательство. Пусть W открыто в B и $t \in \tau^{-1}(W)$. По Замечанию 1.1 найдется $r \in R$, для которого $\Phi(t; r) \neq 0$. Выберем $x \in C'(B)$ со свойством: $x(\tau(t)) = r$ и $x[B \setminus W] = 0$. Докажем, что $t \in czT(x) \cap G_o \subset \tau^{-1}W$. Действительно, $T(x)(t) = S(x)(t) = \Phi(t; x(\tau(t)) \neq 0$, далее, если $p \in czT(x) \cap G_o \setminus (\tau^{-1}, W)$, то $x(\tau(p)) = 0$ и $\Phi(p; x(\tau(p)) = 0$; но в этом случае $0 \neq T(x)(p) = S(x)(p) = \Phi(p, x(\tau(p))) = 0$.

***Замечание* 2.4**. Из Замечания 1.2 следует, что $X(B,T)$ может совпадать с $C(B)$, хотя функция $\Phi(t; r)$ разрывна. Другими словами, для функции $\Phi(t,r)$ аналог предложения 2.3 неверен.

***Предложение* 2.5**. Пусть $\tau : G_o \to B$ непрерывное отображение. Пусть функция $\Phi(t; r)$ непрерывна на $G_o \times R$ и ограничена на каждом $G_o \times [-m; m]$ (где $m \in N$). Если $\beta(G_o \cup (K \setminus clG_o)) = K$, то $X(B,T) = C(B)$.

Доказательство. Пусть $x \in C(B)$. По условию $S(x)$ ограничена на G_o и на $G_o \cup (K \setminus clG_o)$. Осталось проверить, что $S(x)$ непрерывна на G_o. Для точки $(p, x(\tau(p))) \in G_o \times R$ найдем окрестность $U = G_1 \times (x(\tau(p)) - \delta; x(\tau(p)) + \delta)$, на которой функция $\Phi(t,r)$ отлична от $\Phi(p, x(p))$ не более, чем ε. Обозначим $G_2 = G_1 \cap \tau^{-1}[x^{-1}\{x(\tau(p)) - \delta, x(\tau(p)) + \delta)\}]$. Если $t \in G_2$, то $|x(\tau(t)) - x(\tau(p))| \leq \delta$ и $(t, x(\tau(t))) \in U$. Поэтому $|\Phi(t, x(\tau(t))) - \Phi(p, x(\tau(p)))| \leq \varepsilon$, что означает $|S(x)(t) - S(x)(p)| \leq \varepsilon$ на G_2.

***Замечание* 2.6**. Доказательство предложения 2.5 остается верным и для случая, когда $\Phi(t,r)$ непрерывна на множестве $M \times R$ (где M есть множество второй категории в G_o) и $\beta(M \cup (K \setminus clM)) = K$.

***Замечание* 2.7**. Если $x_1, x_2 \in X(B,T)$, то $x_1 \vee x_2$ и $x_2 \wedge x_2$ могут не принадлежать $X(B,T)$. Дополнительные условия, обеспечивающие $x_1 \vee x_2$ $x_1 \wedge x_2 \in X(B,T)$, являются более слабыми, нежели условия, обычно обеспечивающие $x_1 + x_2 \in X(B,T)$. Имеем $T(x_i) = S(x_i)$ на M_i $(i = 1, 2)$. Обозначим $W_1 = \{p \in B : x_1(p) > x_2(p)\}$, $H_1 = cl\tau^{-1}W_1$; аналогично, $W_2 = \{p \in B : x_2(p) > x_1(p)\}$, $H_2 = cl\tau^{-1}W_2$. Пусть $F = B \setminus (W_1 \cup W_2)$. Множество $M = M_1 \cap M_2 \setminus [(H_1) \setminus \tau^{-1}(W_1)) \cup (H_2 \setminus \tau^{-1}(W_2)]$ является множеством второй категории. Заметим, что $T(x_1) = T(x_2)$ на $cl\mathrm{int}\tau^{-1}(F)$ и $H_1 \cup H_2 \cup cl\mathrm{int}(\tau^{-1}(F)) = K$. Потребуем, что $H_1 \cap H_2 \subset H = \{t \in K : T(x_1)(t) = T(x_2)(t)\}$. В этом случае $[H_1 \cup cl\mathrm{int}\tau^{-1}(F)] \cap H_2 \subset H$ и функция $h : K \to R$, определенная следующим образом: $h \equiv T(x_1)$ на $H_1 \cup cl\mathrm{int}\tau^{-1}(F)$ и $h \equiv T(x_2)$ на H_2, является непрерывной. Непосредственно проверяется, что $S(x_1 \vee x_2) \equiv h$ на M. Аналогичным образом вводим $g \in C(K)$, где $g[H_2 \cup cl\mathrm{int}\tau^{-1}F] \equiv T(x_2)$ и $g \equiv T(x_1)$ на H_1; проверяем $g \equiv S(x_1 \wedge x_2)$ на M. Таким образом, $h = T(x_1 \vee x_2)$ и $g = T(x_1 \wedge x_2)$.

Предложение 2.8. Пусть $\tau : G_o \to B$ непрерывное и $x_1, x_2 \in X(B,T)$. Эквивалентны утверждения: 1)$x_1 \vee x_2 \in X(B,T)$; 2) $T(x_1) = T(x_2)$ на $H_1 \cap H_2$; 3) $x_1 \wedge x_2 \in X(B,T)$.

Доказательство. Замечание 2.7 доказывает импликации 2) $\Rightarrow$ 1) и 2) $\Rightarrow$ 3). Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 3) $\Rightarrow$ 2) очевидны.

3. Слабая порядковая непрерывность оператора локальной подстановки

Говорят, что оператор $D : X \to Y$, действующий в архимедовых ВР, слабо порядково непрерывен, если из $|x_n - x| \le \frac{1}{n}g$ следует, что $D(x_n) \to D(x)$ с регулятором $U_\alpha \downarrow 0$ (т.е. для любого α найдется $n(\alpha) \in N$: $|D(x_n) - D(x)| \le U_\alpha$ при $n \ge n(\alpha)$). Если Y является счетно дедекиндово полной ВР, то слабая порядковая непрерывность $D : X \to Y$ означает, что $x_n \xrightarrow{r} x$ означает $T(x_n) \xrightarrow{\circ} T(x)$.

С помощью Замечания 1.2 нетрудно построить оператор локальной подстановки, который будет переводить порядково ограниченное множество в порядково ограниченный, но который не будет слабо порядково непрерывным.

Будем писать $\Phi(t,r) \in (\star)$, если $|\Phi(t,r)|$ ограничена на каждом $A_n = Q_o \times [-n; n]$ числом $c_n \in R$ и $\Phi(t,r)$ непрерывна на $Q_o \times R$.

Лемма 3.1. Пусть $\Phi(t,r) \in (\star)$. Пусть $p \in G_0$ и $n \in N$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки p и число $\delta > 0$ со свойством: если $t \in W$, $|r|, |q| \le h$ и $|r - q| \le \delta$, то $|\Phi(t,r) - \Phi(t;q) \le \varepsilon$.

Доказательство. Предполагаем противное. Пусть G произвольная окрестность точки p, причем $clG \subset G_o$. Строим дискретную последовательность $(t_k) \subset G$ и две числовые последовательности (r_k) и (q_k) со свойствами: $|r_k|, |q_k| \le n$, $|r_k - q_k| \le \frac{1}{k}$ и $|\Phi(t_k; r_k) - \Phi(t_k, q_k)| \ge \varepsilon$. Всегда можно считать, что $r_k \to d \in [-n; n]$. Тогда $q_k \to d$. Возьмем $s \in cl \cup t_n \setminus \cup t_n$. Покажем, что в любой окрестности $W = U \times (d - \Delta; d + \Delta)$ точки (s, d) найдутся точки $(t_k; r_k)$, (t_k, q_k) с одинаковыми номерами (а это будет противоречить непрерывности функции $\Phi(t; r)$ в точке (s, d)). Найдем $m \in N : \Delta \ge \frac{3}{m}$. Поскольку $r_k \to d$, то существует $k_1 \in N$ со свойством: $|r_k - d| \le 1/m$ при $k \ge k_1$. Поскольку $s \in cl \cup t_k \setminus \cup t_k$, то существует $k_2 \in N$: $k_2 \ge k_1$, $k_2 \ge m$ и $t_{k_2} \in U$. Тогда $(t_{k_2}; r_{k_2}) \in W$. Далее $|q_{k_2} - d| \le |q_{k_2} - r_{k_2}| + |r_{k_2} - d| \le \frac{1}{k_2} + \frac{1}{m} < \Delta$; это означает $(t_{k_2}; q_{k_2}) \in W$.

Следствие 3.2. Пусть $\Phi(t : r) \in (\star)$ и H есть компакт в G_o; тогда для любых $n, m \in N$ существуют окрестность $W \supset H$ и число $\delta > 0$ со свойством: если $|x_1|, |x_2| \le ne_B$ и $|x_1 - x_2| \le \delta e_B$, то $|T(x_1) - T(x_2)| \le \frac{1}{m}e_k$ на W.

Доказательство: для любого $t \in H$ и $\varepsilon = \frac{1}{m}$ по лемме 3.1 найдем W_t и $\delta_t > 0$; тогда конечное семейство $\{W_{t_1}; W_{t_2}; \dots W_{t_k}\}$ покрывает компакт H; в этом случае $W = \bigcup(W_{t_i} : i \le k)$ и $\delta = \min(\delta_{t_i} : i \le k)$ искомые.

***Предложение* 3.3**. Пусть $\Phi(t;r) \in (\star)$ порождает оператор локальной подстановки $T : C'(B) \to C(K)$. 1) Если G_o компакт, то из $x_m \xrightarrow{r} x$ следует $T(x_m) \xrightarrow{r} T(x)$. 2) Пусть G_o содержит плотное коnуль-множество в K; тогда для любого $k \in N$ существует $U_n^{(k)} \downarrow 0$ со свойством: если $x_m \xrightarrow{r} x$ и $|x_m| \le ke_B$, то $T(x_m) \xrightarrow{\circ} T(x)$ с регулятором $(U_n^{(k)})$. 3) Для любого $k \in N$ существует $U_\alpha^{(k)} \downarrow 0$ со свойством: если $x_m \xrightarrow{r} x$ и $|x_m| \le ke_B$, то $T(x_m) \xrightarrow{\circ} T(x)$ с регулятором $(U_\alpha^{(k)})$.

Доказательство. 1) следует из Замечания 3.2. Докажем 2). Пусть $h \in C(K) : 0 \le h \le e_k$, $czh \subset G_o$ и $clczh = K$. Обозначим $H_m = h^{-1}([frac1m, 1])$. По замечанию 3.2 для любых $n, m \in N$ найдутся $W_m \supset H_m$ и число $\delta_m > 0$ со свойством: $W_m \subset h^{-1}([\frac{1}{m+1}, 1])$ и если $|x_1||x_2| \le ne_B$, $|x_1 - x_2| \le \delta_m e_B$, то $|T(x_1) - T(x_2)| \le \frac{1}{m} e_k$ на W_m. Как и раньше, $|\Phi(t,r)| \le c_n$ на A_n. Строим $h_m^{(n)} \in C(K) : \frac{1}{m} e_k \le h_m^{(n)} \le c_n e_k$, причем $h_m[H_m] \equiv \frac{1}{m}$ и $h_m[K \setminus W_m] \equiv 2c_n e_k$. Тогда $h_m^{(n)} \downarrow 0$ в $C(K)$. Пусть теперь $|x_p| \le ne_B$ и $|x_p - x| \le \frac{1}{p} e_B$. Докажем, что $T(x_p) \xrightarrow{\circ} T(x)$ с регулятором $(h_m^{(n)})$: фиксируем $m \in N$ и найдем $p(m) \in N$ со свойством: $p(m) \cdot \delta_m \ge 1$, если $p \ge p(m)$, то $|x_p - x| \le \frac{1}{p} e_B \le \frac{1}{p(m)} e_B \le \delta_m e_B$; что дает $|T(x_p) - T(x)| \le \frac{1}{m} e_k$ на $W_m \supset H_m$; кроме того, $|T(x_p) - T(x)| \le 2c_n e_k$. Это и дает $|T(x_p) - T(x)| \le h_m^{(n)}$ при $p \ge p(m)$.

Докажем 3). Фиксируем $n \in N$. Для любого $t \in G_o$ и $m \in N$ по лемме 3.1 найдем окрестность $W(t)$ и число $\delta_t > 0$: если $r, q \in [-n, n]$, $|r - q| \le \delta_t$, то $|\Phi(t,r) - \Phi(t,q)| \le \frac{1}{m}$ на $W(t)$. Построим $h[t,m] \in C(K) : \frac{1}{m} e_k \le h[t,m] \le 2c_n e_k$, причем $h[t,m] \equiv \frac{1}{m}$ на окрестности точки t и $h[t,m] \equiv 2c_n$ на $K \setminus W(t)$. Для конечного набора $\{(t_i; m_i) : i \le s\} = \alpha$ обозначим $h_\alpha^{(n)} = \bigwedge(h[t_i, m_i] : i \le s)$. Тогда $h_\alpha^{(n)} \downarrow 0$. Пусть $|x_p| \le he_B$ и $|x_p - x| \le \frac{1}{p} e_B$ в $C'(B)$. Докажем, что $T(x_p) \xrightarrow{\circ} T(x)$ с регулятором $(h_\alpha^{(n)})$. Индекс α задается конечным набором $\{(t_i; m_i) : i \le s\}$; для каждой пары $(t_i; m_i)$ найдем окрестность $W(t_i)$ и число $\delta_{t_i} > 0$. Полагаем $\delta = \min(\delta_{t_i} : i \le s)$. Поскольку $|x_p - x| \le \frac{1}{p} e_B$, то найдем $p_o \in N$: $p_o \cdot \delta > 1$ и получим $|x_p - x| \le \frac{1}{p} e_B \le \frac{1}{p_o} e_B \le \delta e_B \le \delta_{t_i} e_B$; тогда $|T(x_p) - T(x)| \le \frac{1}{m_i}$ на $W(t_i)$. Поскольку $|T(x_p) - T(x)| \le 2c_n e_k$, то $|T(x_p) - T(x)| \le h(t_i, m_i)$ для любого $i \le s$ и любого $p \ge p_o$. Таким образом, $|T(x_p) - T(x)| \le h_\alpha^{(n)}$ при $p \ge p_o$.

Пример 3.4. Пусть $B = [0,1]$; $k = \beta(0,1]$, $G_o = (0,1] \subset K$. Пусть $\tau : G \to B$ тождественное. Пусть $\Phi(t,r) = \min\left[\frac{|r|}{t}, 1\right]$. Тогда $\Phi(t,r) \in (\star)$. Рассмотрим $x_m = \frac{1}{m} e_B$. По предложению 3.3 2) выполнено $T(x_m) \xrightarrow{\circ} 0$. Но $T(x_m) \equiv 1$ на $K \setminus G_o$, т.е. $T(x_m) \stackrel{r}{\nrightarrow} 0$.

ОБ ОДНОИНВАРИАНТНЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Кушпель Н.Н.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: kushpel@mail.ru

Введение. В данной статье мы рассматриваем представления конечных одноинвариантных линейных групп, порядок которых равен p^s, при $s \geq 3$. Напомним основные определения, которые были даны в работах [7], [8].

Пусть V – линейное пространство над полем K и пусть $G \leq GL(V)$ – линейная группа. Обозначим $V^g = \{v \in V | g(v) = v\}$ и, соответственно, $V^G = \{v \in V | \; g(v) = v$ для всех $g \in G\}$. Будем говорить, что G **одноинвариантная**, если

$$V^g = V^G,$$

для любых $g \in G$, $g \neq 1$.

Пусть V – G-модуль. Предположим, что $V_0 \leq V_1 \leq \cdots \leq V_m = V$, где

$$V_0 = V^G, V_1 = \{v \in V \;\mid\; g(v) \equiv v (\operatorname{mod} V_0) \text{ для любого } g \in G\}, \ldots,$$

$$\ldots V_{i+1} = \{v \in V \;\mid\; g(v) \equiv v (\operatorname{mod} V_i) \text{ для любого } g \in G\}, \ldots.$$

Далее обозначим $m = \mathfrak{l}_{I_G}(V)$ и назовем число m **I_G-длиной группы G**.

В работе [8] были рассмотрены одноинвариантные группы порядка pq и p^2, I_G-длины 1. В данной работе подробно рассмотрен случай группы порядка p^3, I_G-длины 1. Но уже в этом случае мы получаем, что либо не существует неразложимого одноинвариантного представления, либо бесконечно много таких представлений.

Доказательства в этих случаях легко обобщаются и на случай групп порядка p^f, при $f > 3$ I_G-длины 1.

Во второй части работы рассматривается случай, когда I_G-длина группы больше 1. Построим цепочку $V_0 = V^G, V_1, V_2, ..., V_l$ как показано выше. Далее докажем, что существует бесконечно много неизоморфных представлений I_G-длины 2, таких, что первые два элемента соответствующих цепочек совпадают. Из этого следует, что в случае групп I_G-длины больше единицы тем более не существует конечной классификации одноинвариантных групп.

Нам также потребуется следующее понятие, которое вводилось в [7]. Пусть $g \in G$ представляется в виде

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1\,m} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2\,k+1} & \cdots & a_{2\,m} \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k\,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Обозначим $A(g)$ матрицу размером $k\times(m-k)$, которая расположена в верхнем правом углу матрицы γ.

Заметим, что если

$$S=\begin{pmatrix} B & | & X \\ --- & | & --- \\ 0 & | & C \end{pmatrix}\in GL_m(K),$$

где $B\in GL_k(K), C\in GL_{m-k\times m-k}(K)$ $, X\in M_{k\times(m-k)}(K)$. Тогда

$$A(S\gamma S^{-1})=BA(\gamma)C^{-1}.$$

(Лемма 4 [K]). Таким образом, меняя базис пространства V, мы можем производить элементарные преобразования с рядами матрицы $A(g)$.

О группах I_G-длины 1 порядка p^3.

***Теорема* 1**. Пусть K – поле характеристики p. Пусть группа $G=\langle\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\rangle$, где $\sigma_i^p=1$, $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$. Далее, пусть V – неразложимый одноинвариантный G-модуль $IG-$ длины 1. Пусть также коразмерность V^G равна k, а размерность V равна $2k+m$. Тогда

1) при $0\le m\le k$ число неизоморфных неразложимых $K[G]$-модулей бесконечно;

2) при $m>\frac{2k}{3}+k$ V – разложим.

Доказательство. 1a. Во-первых, заметим, что при $m=0$ существует бесконечное число неизоморфных G-модулей уже в случае $G=\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$ [K].

1b. Рассмотрим случай $1\le m<k$. Пусть $V=\langle u_1,\dots,u_k,\ x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+m}\rangle$, $V^G=\langle x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+m}\rangle$. Построим представление элементов $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ в виде (1), при этом

$$A(\sigma_1)=\begin{pmatrix}E_k & \mathbf{0_{k\times m}}\end{pmatrix},\ A(\sigma_2)=\begin{pmatrix}M_1 & \mathbf{0_{k\times m}}\end{pmatrix},\ A(\sigma_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{0_{k\times m}} & E_k\end{pmatrix},$$

где

$$M_1=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

Докажем, что такое представление неразложимо.

Рассмотрим $G_1=\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$ и соответствующий G_1-модуль V .

***Лемма* 1**. Если V разложим, т. е. $V=V_1\oplus V_2$, то либо V_1, либо V_2 являются подпространством $\langle x_{k+1},...,x_{k+m}\rangle$

Доказательство. Пусть $V=V_1\oplus V_2$, тогда в некотором базисе

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}N_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & N_2\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}L_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & L_2\end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $V_1^G=\langle y_1,...,y_s\rangle$, $V_2^G=\langle y_{s+1},...,y_m\rangle$. Заметим,что V_1,V_2 также G-модули IG-длины 1. Тогда пусть $V_1/V_1^G=\langle z_1,...,z_p\rangle$, $V_2/V_2^G=\langle z_{p+1},...,z_k\rangle$, где $g(z_i)\equiv z_i(\mathrm{mod}\ V_1^G)$, при $1\le i\le p$ и, соответственно, $g(z_i)\equiv z_i(\mathrm{mod}\ V_2^G)$, при $(p+1) \leq i \leq k$. Тогда в базисе $z_1, ..., z_k, y_1, .., y_{k+m}$ матрицы σ_1, σ_2 будут иметь вид

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} E_k & R_1 \\ \mathbf{0}_{k\times k} & E_{k+m} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} E_k & R_2 \\ \mathbf{0}_{k\times k} & E_{k+m} \end{pmatrix},$$

где

$$R_1 = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} A_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_i \in (M)_{p\times s}, B_i \in (M)_{(k-p)\times(k+m-s)}$. Приведем матрицу R_1 к следующему виду

$$\begin{pmatrix} E_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{k-l} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

при этом матрица R_2 сохранит вид (2), то есть останется блочной матрицей с теми же размерами блоков (матрицы A_2, B_2 при этом, возможно, изменятся). Теперь переставим базисные векторы так, что матрицы будут иметь вид:

$$R_1 = \begin{pmatrix} E_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} X & \mathbf{0} & Z \\ \mathbf{0} & Y & \mathbf{0} \end{array}\right). \tag{3}$$

Значит, при некоторой смене базиса $A(\sigma_1)$ не изменилась, а $A(\sigma_2)$ преобразовалась в (3).

Следовательно, ([K], Лемма 13) существуют такие $A \in GL_k(K), B \in GL_{k+m}$, что $AA(\sigma_1)B^{-1} = A(\sigma_1)$, $AA(\sigma_2)B^{-1} = R_2$. Из первого равенства следует ([K], Лемма 14), что матрица B имеет вид

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}_{k\times m} \\ --- & --- \\ Y & D \end{array}\right), \quad Y \in M_{m\times k}, \quad D \in GL_m(K). \tag{4}$$

Получаем равенство :

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} M_1 & \mathbf{0}_{k\times m} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & \mathbf{0}_{k\times m} \\ --- & --- \\ -D^{-1}CTA^{-1} & D^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} X & \mathbf{0} & Z \\ \mathbf{0} & Y & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

Из этого следует

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} X & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_1 \end{array}\right).$$

Это возможно только если либо $X \in GL_k(K)$, либо $Y_1 \in GL_k(K)$. Из этого следует утверждение леммы.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть теперь V разложим как G-модуль, то есть $V = V_1 \oplus V_2$, но тогда V разложим как G_1-модуль и, следовательно, либо V_1, либо V_2 является подпространством $\langle x_{k+1}, ..., x_{k+m} \rangle$. Пусть $V_2 \leq \langle x_{k+1}, ..., x_{k+m} \rangle$, рассмотрим тогда $v_0 \in V_2$, то есть $v_0 = \alpha_1 x_{k+1} + ... + \alpha_m x_{k+m}$. Обозначим $u_0 = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m$, тогда $u_0 = u_1 + u_2$, где $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$, но, поскольку, $\forall x \in V_2 (\sigma_3 - 1)(x) = 0$, получаем $(\sigma_3 - 1)(u_0) = (\sigma_3 - 1)(u_1) = x_0 \notin V_1$. Это противоречие с инвариантностью V_1.

1c. Рассмотрим случай $m = k$. Пусть тогда

$$V = \langle u_1, \dots, u_k, x_1, \dots, x_k, y_1 \dots, y_k \rangle, \ \ V^G = \langle x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \rangle.$$

Будем строить представление $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в виде (2) и положим

$$A(\sigma_1) = \begin{pmatrix} E_k & | & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ A(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & | & E_k \end{pmatrix}, \ A(\sigma_3) = \begin{pmatrix} M_1 & | & M_2 \end{pmatrix},$$

где

$$M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_k \end{pmatrix},$$

при этом $\alpha_i \neq \alpha_j$ для всех $i \neq j$ и $\alpha_i \notin F_p$ при любом i,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что данное представление неразложимо. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$. Назовём $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ и пусть $\pi : V \to U$ соответствующая проекция. Обозначим $U_1 = \pi(V_1), U_2 = \pi(V_2)$.

Пусть далее $U_1 = \langle w_1, \dots, w_l \rangle, U_2 = \langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle$ и пусть $A \in M_{l \times k}(K), B \in M_{m \times k}(K)$, где $l + m = k$, это матрицы такие, что

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_l \end{pmatrix}, \ \ B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_m \end{pmatrix}.$$

Далее, обозначим

$$L_1 = ((\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 1))V_1 = ((\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 1))U_1 \leq V^G,$$

$$L_2 = ((\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 1))V_2 = ((\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 1))U_2 \leq V^G.$$

Рассмотрим V^G как координатное векторное пространство $V_K^{2k} = \{(r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k) \ | \ r_i, s_j \in K\}$. Далее подпространства $L_1, L_2 \leq V_K^{2k}$ порождены строчками матриц

$$T_1 = \begin{pmatrix} A & | & \mathbf{0}_{l \times k} \\ \mathbf{0}_{l \times k} & | & A \end{pmatrix}, \ T_2 = \begin{pmatrix} B & | & \mathbf{0}_{m \times k} \\ \mathbf{0}_{m \times k} & | & B \end{pmatrix}$$

соответственно. Обозначим

$$\operatorname{rank} A = l, \ \operatorname{rank} B = m, \ \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = k.$$

Следовательно,

$$\dim L_1 = 2l, \quad \dim L_2 = 2m, \quad \dim L_1 + L_2 = 2k.$$

И поэтому

$$L_1 + L_2 = V^G.$$

Заметим, что $U_2 \neq 0$. Иначе, $V_1 = \pi^{-1}(U_1) + L_1 = V$, то есть $V_2 = 0$. Значит, можно считать, что $l, m > 0$. Далее,

$$L_1' = (\sigma_3 - 1)V_1 = (\sigma_3 - 1)U_1 \leq V^G,$$

$$L_2' = (\sigma_3 - 1)V_2 = (\sigma_3 - 1)U_2 \leq V^G.$$

Поскольку

$$\langle L_1, L_1' \rangle \leq V^G \cap V_1, \quad \langle L_2, L_2' \rangle \leq V^G \cap V_2, \ V_1 \cap V_2 = 0,$$

имеем

$$2l \leq \dim\langle L_1, L_1' \rangle \leq 2l, \quad 2m \leq \dim\langle L_2, L_2' \rangle \leq 2m,$$

и поэтому

$$L_1' \leq L_1, \quad L_2' \leq L_2. \tag{5}$$

Подпространство $L_1' \leq V_K^{2k}$ порождено строчками матриц

$$T_1' = \begin{pmatrix} AM_1 & | & AM_2 \end{pmatrix}$$

и, соответственно, L_2' порождено строчками матриц

$$T_2' = \begin{pmatrix} BM_1 & | & BM_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $L_1' \leq L_1$, получаем $T_1' = XT_1$ для некоторого $X \in M_{2l\times 2l}(K)$. Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1 & | & X_2 \end{pmatrix}$, где $X_1, X_2 \in M_{l\times l}(K)$. Тогда

$$T_1' = \begin{pmatrix} AM_1 & | & AM_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1A & | & X_2A \end{pmatrix}.$$

Пусть $\{A^1, \ldots, A^k\}$ множество столбцов A и пусть $\{(AM_1)^1, \ldots, AM_1)^k\}$, $\{(AM_2)^1, \ldots, AM_2)^k\}$ множество столбцов, соответственно, AM_1, AM_2. Тогда $(AM_1)^i = \alpha_i A_i = X_1 A^i$. Таким образом, A^i – собственный вектор матрицы $X_1 \in M_l(K)$ с собственным значением α_i. Так как $l < k$, и все α_i различны, среди столбцов $\{A^1, \ldots, A^k\}$ найдется $k - l$ нулевых столбцов.

Далее, по определению M_2

$$(AM_2)^1 = A^k, (AM_2)^i = A^{i-1}, i > 2.$$

Следовательно, найдется такое i, что $A^i = 0$, $(AM_2)^i \neq 0$. Но $(AM_2)^i = X_2A^i$. Противоречие. Получаем, что построенный G-модуль V неразложим.

Покажем теперь, что аналогично можно построить бесконечно много неизоморфных G-модулей . Пусть $\mathfrak{A} \in GL_k(K), \mathfrak{B} \in GL_{2k}(K)$ матрица такая, что

$$\mathfrak{A}A(\sigma_i)\mathfrak{B}^{-1} = A(\sigma_i)$$

для $i = 1, 2$. Тогда
$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathbf{0}_k \\ \mathbf{0}_k & \mathfrak{A} \end{pmatrix}.$$
Далее
$$\mathfrak{A}A(\sigma_3)\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}M_1\mathfrak{A}^{-1} & | & \mathfrak{A}M_2\mathfrak{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$
Так как M_1 – диагональная матрица с различными собственными значениями $\alpha_1, \ldots \alpha_k$, можно найти бесконечно много троек $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3')$, при этом σ_3' построим аналогично σ_3, но с новыми собственными значениями $\alpha_1', \ldots, \alpha_k'$, которые принадлежат разным $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$-орбитам (где $\mathfrak{X} \in GL_k(K), \mathfrak{Y} \in GL_{2k}(K)$.

2. Теперь рассмотрим случай $m > \frac{2k}{3} + k$ и покажем, что V разложим. Будем обозначать m_1 число $m - k$. Т. е. выполнено неравенство $m_1 > \frac{2k}{3}$.

Тогда
$$V = \langle u_1, \ldots, u_k, x_1, \ldots, x_k, y_1 \ldots, y_k, z_1, ..., z_{m_1}\rangle,$$
$$V^G = \langle x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, ..., z_{m_1}\rangle.$$
Можно считать, что $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ имеют вид (2) и при этом
$$A(\sigma_1) = \begin{pmatrix} E_k & | & \mathbf{0}_k & | & \mathbf{0}_{k\times m_1} \end{pmatrix}, \ A(\sigma_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_k & | & E_k & | & \mathbf{0}_{k\times m_1} \end{pmatrix},$$
$$A(\sigma_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m_1\times k} & | & \mathbf{0}_{m_1\times k} & | & E_{m_1} \\ A & | & B & | & C \end{pmatrix}$$
где $A, B \in M_{(k-m_1)\times k}(K), \ C \in M_{(k-m_1)\times m_1}(K)$.

Рассмотрим матрицу
$$C' = \begin{pmatrix} C & | & -E_{k-m_1} \end{pmatrix} \in M_{(k-m_1)\times k}(K), \ D = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C' \end{pmatrix} \in M_{3(k-m_1)\times k}(K).$$
Пусть $s = \mathrm{rank}\ D$. Тогда $s \le 3(k - m_1) < k$ и существует матрица
$$F = \begin{pmatrix} F' & | & \mathbf{0}_{(k-s)\times k-m_1} \end{pmatrix} \in M_{(k-s)\times k}(K), \ F' \in M_{(k-s)\times m}(K)$$
такая, что
$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C' \\ F \end{pmatrix} = k.$$
Пусть $U_1 = \langle w_1, \ldots, w_{3(k-m_1)}\rangle, U_2 = \langle \omega_1, \ldots, \omega_{k-s}\rangle$, где
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_{3(k-m_1)} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \cdots \\ \omega_{k-s} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$
Подмодули
$$L_1 = ((\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 1))U_1 \le V^G, \ L_2 = ((\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 1))U_2 \le V^G$$

порожденные строчками матриц

$$T_1 = \begin{pmatrix} A & | & \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} \\ B & | & \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} \\ C' & | & \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} \\ \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & A \\ \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & B \\ \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & C' \end{pmatrix}, \ T_2 = \begin{pmatrix} F & | & \mathbf{0}_{(k-s)\times k} \\ \mathbf{0}_{(k-s)\times k} & | & F \end{pmatrix}$$

соответственно.

Получаем $\operatorname{rank} T_1 = 2s$, $\operatorname{rank} T_2 = 2(k-s)$ и при этом $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = 2k$. Следовательно, $L_1 + L_2 = V_K^{2k}$, и $L_1 \cap L_2 = 0$. Рассмотрим

$$L_1' = (\sigma_3 - 1)U_1 \le V^G, \ \ L_2' = (\sigma_3 - 1)U_2 \le V^G.$$

Нам удобно будет считать, что матрицы A и B в определении матрицы D имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A' & | & \mathbf{0}_{k-m_1} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} B' & | & \mathbf{0}_{k-m} \end{pmatrix}, \ A', B' \in M_{(k-m_1)\times m_1}(K).$$

Заметим, что элементарными преобразованиями с матрицей D это сделать можно, пространство L_1 при этом не изменится.

Тогда $L_1' \le V_K^{2k+m_1}$ порождена строчками матрицы

$$T_1' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & A' \\ \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & \mathbf{0}_{(k-m)\times k} & | & B' \\ -A & | & -B & | & \mathbf{0}_{(k-m_1)\times m_1} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая T_1 и T_1', получаем $L_1 + L_1' = L_1 \oplus L_1''$, где $L_1'' \le V_K^{2k+m_1}$, подмодуль, порожденный строчками

$$T_1'' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & A' \\ \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & \mathbf{0}_{(k-m_1)\times k} & | & B' \end{pmatrix}$$

и $\dim L_1'' = \operatorname{rank}\, T_1'' = s - (k - m_1)$.

Далее,

$$L_2' = (\sigma_3 - 1)U_2 \le V^G = V^{2k+m_1}$$

порожден строками матрицы

$$T_2' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-s)\times k} & | & \mathbf{0}_{(k-s)\times k} & | & F' \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\dim L_2' = \operatorname{rank}\, T_2' = k - s,$$

далее

$$\dim\,(L_1'' + L_2') = \operatorname{rank}\, \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ F' \end{pmatrix} = k - (k - m_1) = m_1.$$

Рассмотрим также,

$$\dim L_1 + L_1' = 2s + s - (k - m_1) = 3s - k + m_1, \quad \dim(L_2 + L_2') = 3(k - s),$$

а тогда

$$3s - k + m_1 + 3(k - s) = \dim((L_1 + L_1') + (L_2 + L_2')) = \dim((L_1 + L_2) + (L_1' + L_2')),$$

получаем

$$\dim((L_1 + L_2) + (L_1' + L_2')) = 2k + m_1 = \dim V_K^{2k} + \dim V_K^{m_1},$$

т. е.

$$(L_1 + L_2) \cap (L_1' + L_2') = 0.$$

Так мы получаем следующее разложение

$$V = (U_1 + L_1 + L_1') \oplus (U_2 + L_2 + L_2').$$

Каждое слагаемое G-инвариантно по построению. Т. е. любое представление в данном случае разложимо. Таким образом утверждение теоремы доказано.

Заметим, что в данной статье остался открытым вопрос о существовании и конечности неизоморфных одноинвариантных представлений в случае $k < m \leq \frac{2k}{3} + k$.

Группы I_G-длины 2. Покажем теперь, что в для каждого представления IG-длины 1, найдется бесконечно много неизоморфных представлений IG-длины 2.

Пусть $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ и есть одноинвариантное представление IG-длины 1 в линейном пространстве V.

Тогда обозначим $V_0 = \langle x_1, ..., x_n \rangle$, $V_1 = \langle y_1, ... y_k \rangle$. При этом $g_i(x_j) = x_j$, $g_i(y_l) = y_l + w_i$, где $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq l \leq k$, $w_i \in V_0$

Рассмотрим теперь $V' = V \oplus \langle z \rangle$ и построим неизоморфные представления IG-длины 2 в линейном пространстве V'.

Положим

$$\tau_1(z) = z + \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_k y_k + \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n,$$

$$\tau_2(z) = z + \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_k y_k + \gamma_1 x_1 + ... + \gamma_n x_n,$$

$$\tau_1'(z) = z + \alpha_1' y_1 + ... + \alpha_k' y_k, \quad \tau_2'(z) = z + \beta_1' y_1 + ... + \beta_k' y_k,$$

причем векторы $(\alpha_1', ... \alpha_k')$, $(\beta_1' ..., \beta_k')$ и $(\beta_1, ..., \beta_n)$, $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ линейно независимы. На пространстве V τ_i и τ_i' действуют как g_i, где $1 \leq i \leq 2$ Заметим, что построенные представления одноинвариантны.

Покажем, что эти два представления неизоморфны.

Предположим, что существует линейное отображение $A : V' \to V'$ такое, что если $\tau_i(v) = u$, то $\tau_i'(Av) = Au$. Тогда, поскольку, $\tau_i(x_j) = x_j$, то $\tau_i'(Ax_j) = Ax_j$, следовательно, $Ax_j \in V_0$, для всех $1 \leq j \leq n$. Далее, $\tau_i(y_l) = y_l + w_{il}$, где $w_{il} \in V_0$, поэтому $\tau_i'(Ay_l) = Ay_l + Aw_{il}$, то есть $Ay_l \in V_1$, так как уже доказано, что $Aw_{il} \in V_0$.

Теперь рассмотрим вектор z. Пусть $Az = \lambda z + y_0 + x_0$, где $x_0 \in V_0,\ \ y_0 \in V_1$. Далее, $\tau_1(z) = z + y + x$ (обозначили $y = \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_k y_k,\ \ x = \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n$), тогда

$$\tau_1'(Az) = Az + Ay + Ax, \tag{6}$$

с другой стороны,

$$\tau_1'(Az) = \tau_1'(\lambda z + y_0 + x_0) = \lambda \tau_1'(z) + y_0 + \widetilde{x} + x_0, \tag{7}$$

где $\tau_1'(y_0) = y_0 + \widetilde{x}$, при этом $\widetilde{x}$ некоторый вектор из V_0. Из (6) и (7) получаем

$$Az + Ay + Ax = \lambda \tau_1'(z) + y_0 + \widetilde{x} + x_0$$

Но, по определению, $\tau_1'(z) = z + \alpha_1' y_1 + ... + \alpha_k' y_k = z + y'$, следовательно,

$$\lambda z + y_0 + x_0 + Ay + Ax = \lambda z + \lambda y' + y_0 + x_0 + \tilde{x},$$

получаем

$$Ay + Ax = \lambda y' + x_0 + \tilde{x}.$$

Поскольку, $Ay, \lambda y' \in V_1$, а $Ax, x_0 + \tilde{x} \in V_0$, имеем

$$Ay = \lambda y' = \lambda(\alpha_1' y_1 + \cdots + \alpha_k' y_k) \tag{8}$$

Проводя аналогичные рассуждения для $\tau_2'(z)$, получаем

$$Ay = \lambda y'' = \lambda(\beta_1' y_1 + \cdots + \beta_k' y_k) \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), получаем противоречие.

Литература

[1] Ch.Curtis, I.Reiner. Representation theory of finite groups and associative algebras. – Interscience Publishers a division of John Wiley and Sons. New York, London, 1962.

[2] R. Guralnick, R. Wiegand. Galois groups and the multiplicative structure of field extensions // Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), №2, p.563-584.

[3] P. Fleischmann, W. Lempken, P.H. Tiep. The p-intersection subgroups in quasi-simple and almost simple finite groups // J. Algebra 207 (1998), №1, p.1-42.

[4] P.Fleischmann, W. Lempken, P.H. Tiep. The primitive p-Frobenius groups // Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), №5, p.1337-1343.

[5] T.Springer. Linear Algebraic Groups, 2nd ed. Progress in Mathematics, v.9, Boston, 1998.

[6] J.Wolf. Space of constant curvature. – University of California, Berkley, California, 1972.

[7] N.Gordeev, N.Kushpel. On same-invariant linear groups. Zapiski Nauch. Seminarov POMI, v. 289 (2002), p.134-148.

[8] Н.Кушпель. О конечных одноинвариантных линейных группах. Записки научных семинаров ПОМИ, том 231 (2005), с.224-239.

[9] Ф.Гантмахер. Теория матриц. – М.: "Наука", 1967.

[10] Ч.Кэртис, И.Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – Москва, 1969.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В.А.МАРКОВА ПРИ $n = 3$

Лознер Л.Г.
Lev Lozner P.O.B. 15112 36610 Nesher
Israel
e-mail:leonris@yahoo.com

Посвящается памяти Ефима Марковича Гольберга, с которым автор впервые поделился идеей данной работы.

В 1892 г. В.А. Марков в монографии [1] поставил следующую задачу:

"Среди всех полиномов $P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + ... + p_0$, коэффициенты которых удовлетворяют уравнению $\omega(P_n) = \alpha_n p_n + \alpha_{n-1}p_{n-1} + ... + \alpha_0 p_0 = 1$, найти наименее уклоняющийся от нуля на данном отрезке" [2, с.106]. "Еще В.А. Марков указал, что его задача эквивалентна следующей: среди всех полиномов степени не выше n, удовлетворяющих условию $|P_n(x)| \leq 1$ при $x \in [a, b]$ найти тот, который доставляет максимум выражению $|\omega(P_n)| = |\alpha_n p_n + \alpha_{n-1}p_{n-1} + ... + \alpha_0 p_0|$. Другими словами задача В.А. Маркова сводится к задаче об отыскании экстремального полинома для линейного функционала ω, определенного на множестве полиномов степени не выше n" [2, с.107]. В настоящем сообщении будет решаться именно эта вторая задача. Не умаляя общности, ограничимся отрезком $[0, 1]$, а полином, максимум модуля которого на $[0, 1]$ равен 1, будем называть нормированным на $[0, 1]$.

Как показал В.А.Марков, экстремальный полином, вообще говоря, не единственен. По аналогии с дифференциальными уравнениями, определенный экстремальный полином будем называть частным решением, а формулу, содержащую все частные решения – общим решением данной конкретной задачи. Если при заданном n для любой задачи указано частное решение, то решение задачи при этом n будем называть полным, а если найдено и общее решение, то исчерпывающим. Сам В.А.Марков получил исчерпывающее решение при $n \leq 2$.

Е.В.Вороновская в статье [3] 1956 г. наметила идею решения при $n = 3$, опираясь на развитый ею метод функционалов [4]. Однако Е.В.Вороновская а) не получила общей теоремы, являющейся главным результатом настоящего сообщения; б) упустила важный частный случай (см. ниже); в) не довела решение до конца.

Теорема. У любой задачи В.А.Маркова при $n = 3$ существует решение вида

$$M \cos 3 \arccos(bx + d) + N \tag{1}$$

либо

$$A \cos 2 \arccos(2x - 1). \tag{2}$$

Доказательство опирается на 2 леммы, но предварительно дадим несколько определений. Следуя И.П.Натансону [5], будем называть точки максимального уклонения полинома $P_n(x)$ на $[0,1]$ (e)-точками. (e)-точка называется $(+)$-точкой, если $P_n(e) > 0$ и $(-)$-точкой, если $P_n(e) < 0$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^s$ — последовательность (e) – точек нормированного полинома $P_n(x)$, т.е. $|P_n(e_i)| = 1$. Если $P_n(e_s) = +1$, назовем $P_n(x)$ $(+)$ – полиномом и $(-)$ – полиномом в противном случае. Ясно, что $(-)$ – полином отличается лишь знаком от соответствующего $(+)$ – полинома.

Лемма 1 – критерий оптимальности, полученный независимо несколькими математиками, в том числе для очень общего случая В.С.Виденским. Здесь она приводится по существу в редакции Е.В.Вороновской [4].

Пусть линейный функционал $\omega(P_n)$ задан последовательностью чисел $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$ и имеется некоторый нормированный полином $P_n(x)$ с последовательностью $\{e\}$-точек $\{e_i\}_{i=1}^s$. Для экстремальности $P_n(x)$ необходимо и достаточно наличие такого набора чисел $\{\delta_i\}_{i=1}^s$, что а) $\sum_{i=1}^s \delta_i = \alpha_0 \wedge \sum_{i=1}^s e_i^k \delta_i = \alpha_k$ $(k = 1, ..., n)$, б) $P_n(e_i)\delta_i \geq 0$; $i = 1, ..., s$; в) $\sum_{i=1}^s \delta_i^2 > 0$.

Лемма 2 кажется почти очевидной, но автор не встречал ее в литературе.

Любой полином третьей степени $Q(x)$ с 2 вещественными различными корнями производной $x_1 < x_2$ может быть записан в виде (1).

Доказательство. Примем для определенности: $Q(x_1) > Q(x_2)$ (в противном случае отличие будет лишь в знаке). Интегрированием по частям получим:

$$Q(x) = a\int(x-x_2)(x-x_1)dx = a\left[(x-x_2)\frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{(x-x_1)^3}{6}\right] + C \qquad (3)$$

Подставляя в (3) вместо x последовательно x_1 и x_2, получим: $C = Q(x_1)$, $a = \frac{6[Q(x_2)-Q(x_1)]}{(x_2-x_1)^3}$, т.е.

$$Q(x) = \frac{6[Q(x_2)-Q(x_1)]}{(x_2-x_1)^3}\left[(x-x_2)\frac{(x-x_1)^2}{2} - \frac{(x-x_1)^3}{6}\right] + Q(x_1).$$

Обозначим $CT(x)$ полином вида (1) с надлежаще выбранными параметрами b, d, M, N.

Найдем b и d из системы: $bx_1 + d = -1/2 \wedge bx_2 + d = 1/2$. Имеем: $b = \frac{1}{x_2-x_1}$, $d = -\frac{1}{2}\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}$. Теперь найдем M и N из условий: $CT(x_1) = Q(x_1)$, $CT(x_2) = Q(x_2)$. Несложные подсчеты дают: $M = \frac{Q(x_1)-Q(x_2)}{2}$, $N = \frac{Q(x_1)+Q(x_2)}{2}$;

$$CT(x) = \frac{Q(x_1)-Q(x_2)}{2}\cos 3\arccos\left(\frac{1}{x_2-x_1}x - \frac{1}{2}\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\right) + \frac{Q(x_1)+Q(x_2)}{2}.$$

Значения полиномов $Q(x)$ и $CT(x)$ в 2 точках: x_1 и x_2 совпадают. Проверим совпадение еще в 2 точках. Пусть $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Имеем $Q(\frac{x_1+x_2}{2}) = CT(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{Q(x_1)+Q(x_2)}{2}$. Далее при $x = \frac{3x_2-x_1}{2}$ получим: $Q(\frac{3x_2-x_1}{2}) = CT(\frac{3x_2-x_1}{2}) = Q(x_1)$. Таким образом, значения полиномов 3-й степени $Q(x)$ и $CT(x)$ совпадают в 4 различных точках, стало быть $Q(x) \equiv CT(x)$, что и требовалось доказать. Далее будем обозначать $P_n(x)$ только экстремальный полином функционала α_0, α_1, α_2, α_3; т.е. $n \leq 3$.

Доказательство основной теоремы. Если у $P_n(x)$ все (e)-точки суть $(+)$-точки, то, по лемме 1, наряду с $P_n(x)$, есть и $P_0(x) \equiv 1$, т.е. частный случай (1). Аналогично в случае $(-)$-точек $P_0(x) \equiv -1$. Следовательно, нетривиальны лишь случаи, когда у полинома есть хотя бы 1 $(+)$-точка и 1 $(-)$-точка. Выпишем все мыслимые комбинации знаков в (e)-точках ($n \leq 3$) для $(+)$-полиномов. Ясно, что $(-)$-полиномы получаются из них умножением на -1.

1) − + − +, 2) + − +, 3) − + +, 4) − − +, 5) − +. Рассмотрим их последовательно.

1. Существует единственный полином такого типа: $\cos 3 \arccos(2x-1)$.

2. Имеется, по меньшей мере, 1 внутренний локальный экстремум. Если $e_1 > 0$ или $e_3 < 1$, выполняются условия леммы 2. Пусть $e_1 = 0$, $e_3 = 1$. Если $e_2 \neq 1/2$, то ясно, что P_2 не экстремальный и мы вновь находимся в условиях леммы 2. Если же $e_1 = 0$, $e_2 = 1/2$, $e_3 = 1$, то $P_2(x) = \cos 2 \arccos(2x-1)$ (по лемме 1).

3,4. Также есть внутренний локальный экстремум. По теореме Ролля, существует еще вещественный корень производной x_0, где $e_2 < x_0 < e_3$ в случае 3 и $e_1 < x_0 < x_2$ в случае 4, т.е. опять имеет место лемма 2.

5. Пусть вначале $e_1 = 0$. Тогда согласно [4], $e_2 \geq 1/4$. если $e_2 = 1/4$, то, по лемме 1 $P_3(x) = \cos 3 \arccos(2x-1)$. Если же $1/4 \leq e_2 \leq 1$, то аналогично $P_3(x) = \cos 3 \arccos(\frac{1}{2e_2}x - 1)$. Точно так же разбирается случай: $e_1 > 0$, $e_2 = 1$. Если же $e_1 > 0$ и $e_2 < 1$, то непосредственно применима лемма 2.

Теорема доказана.

Замечание. Случай 2 соответствует, вообще говоря, как показала Е.В.Вороновская в [3] и [4], полиномам Е.И.Золотарева Z_3, причем P_2 – предельный полином их семейства при $x_1 \longrightarrow -\infty$. Случаи 3 и 4 отвечают изученным Е.В.Вороновской полиномом W_3. Наконец, случай 5 был упущен Е.В.Вороновской.

Автор располагает возможностью анализировать разбиение 4-мерного пространства функционалов α_0, α_1, α_2, α_3 на конусы, соответствующие определенному семейству экстремальных полиномов. При этом, согласно [4], внутри каждого конуса решение всегда единственно, однозначность нарушается лишь на их гранях. Для каждого случая указывается зависимость между параметрами функционала с одной стороны и экстремального полинома с другой. Таким образом, автор располагает полным решением задачи В.А.Маркова для $n = 3$. К сожалению, весь этот материал выходит далеко за рамки объема, выделенного автору в настоящем сборнике. Однако полученное решение, в отличие от решения В.А.Маркова для $n \leq 2$, не является исчерпывающим, т.е., как правило, для каждого функционала дается лишь частное решение. Для отдельных примеров, решенных автором, общее решение оказывается слишком громоздким. Поэтому стремиться к получению исчерпывающего решения, возможно, и не стоит.

В заключение о ценности полученного решения. Как указано в [2, с.107], "... задача В.А.Маркова не может считаться решенной". Ее решение в конечном виде при $n > 4$ выглядит чрезвычайно затруднительным или даже невозможным в силу неразрешимости алгебраического уравнения в радикалах. Поэтому решение при $n < 5$ представляется не лишенным некоторого теоретического интереса. “Отметим также, что кроме теоретического интереса эта задача имеет важное практическое значение, так как ее решение явилось бы существенным вкладом в развитие математического аппарата, применяющегося в электротехнических расчетах” [там же].

Литература

[1] Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. – СПб.: 1892. – 110 с.

[2] Чесноков А.С. О задаче В.А.Маркова в теории наилучших приближений функций // Вопросы истории естествознания и техники. – М.: Наука, 1980. – №67-68. – С.106–107.

[3] Вороновская Е.В. О системе дифференциальных уравнений некоторых экстремальных полиномов // Успехи математических наук. – 1956. – Т.XI, вып. 1(67), С.251-254.

[4] Вороновская Е.В. Метод функционалов и его приложения. – Л.: Ленинградский электротехнический институт связи им. М.А.Бонч-Бруевича, 1963. – 182 с.

[5] Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 688 с.

УДК 517.518

ПРОСТРАНСТВО ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА-ВАНШТЕЙНА-КИПРИЯНОВА

Ляхов Л.Н., Половинкина М.В.
Воронежская Государственная Технологическая Академия
Воронеж
e-mail:lyakhov@box.vsi.ru

Рассматриваемые в этой работе потенциалы в частном случае (порядок потенциала равен 2) введены А.Ванштейном в исследованиях осесимметрической теории потенциала ([1]). Дальнейшее развитие теории таких потенциалов осуществлено под сильным влиянием И.А. Киприянова и его учеников (см. книгу [2] и имеющиеся там ссылки). В этой работе дается описание пространств потенциалов Рисса-Ванштейна-Киприянова, аналогичное описанию С.Г. Самко ([3]) пространства потенциалов Рисса. При этом применяется дробное B-дифференцирование Рисса, введенное в [3].

Пусть E_n^+ часть евклидова пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, определенная неравенствами $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$. Через $L_p^\gamma = L_p^\gamma(E_n^+)$, $1 \le p < \infty$ обозначим пространство всех измеримых в E_n^+ функций с конечной нормой $\|f\|_{L_p} = \left(\int_{E_n^+} |f(x)|\, x^\gamma\, dx\right)^{1/p}$.

Обобщенный сдвиг определен на непрерывных, четных по каждой из переменных $x_1, \dots, x_n$ функциях следующим образом

$$f(x) \to (T^y f)(x) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma_i\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \dots \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i-1}\alpha_i \; f(\dots, \sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i y_i \cos\alpha_i} \; \dots)\, d\alpha$$

RWK-потенциал, отвечающий плотности f, зададим выражением

$$(\mathbf{U}^\gamma f)(x) = \int\limits_{E_n^+} f(y)\; T^y \left(\frac{1}{|x|^\lambda}\right)\; y^\gamma\, dy\,, \quad -\infty < \lambda < n + |\gamma|,$$

где $0{<}\lambda{<}n{+}|\gamma|$, а число $\alpha{=}n{+}|\gamma|{-}\lambda$ называется порядком RWK-потенциала.

Соответственно, пространством RWK-потенциалов будем называть образ пространства L_p^γ при отображении $\mathbf{U}_\alpha^\gamma : \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma) = \left\{f \;:\; f = \mathbf{U}_\alpha^\gamma\varphi\,,\;\; \varphi \in L_p^\gamma\right\}$. В этом пространстве введем норму $\|f\|_{\mathbf{U}_\alpha^\gamma} = \|\varphi\|_{L_p^\gamma}$, относительно которой пространство $\mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$ банахово.

B-гиперсингулярные интегралы (далее используется сокращение B-г.с.и.) вводятся как интегральные операторы типа обобщённой свёртки, у которых особенность ядра больше чем число $n + |\gamma|$:

$$(\mathbf{D}_\alpha^\gamma\varphi)(x) = \frac{1}{d_{n,\gamma,l}(\alpha)} \int\limits_{E_n^+} \frac{(\square_t^l\varphi)(x)}{|t|^{n+|\gamma|+\alpha}}\; t^\gamma\, dt\,. \qquad (1)$$

Регуляризация конструкции (1) достигается применением обобщенных конечных разностей следующего вида $(\square_t^l\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k\, (T^{kt}\varphi)(x)\,.$

Нормирующий множитель $d_{n,\gamma}(\alpha)$ в (1) выбран так, чтобы эта конструкция не зависела от l при $l > \alpha$. По аналогии с риссовым дифференцированием выражение $\left(\mathbf{D}_{\alpha,\Omega}^\gamma\varphi\right)(x)$ будем называть также дробной B-производной Рисса (BR-производной) функции $\varphi(x)$ порядка α.

Нам понадобится также пространство функций $L_p^{\gamma,\alpha}(E_n^+)$, построенное на основе BR-дифференцирования $\mathbf{D}_\alpha^\gamma$:

$L_p^{\gamma,\alpha} = \left\{ f \;:\; f{\in}L_p^\gamma(E_n^+)\,,\;\; \mathbf{D}_\alpha^\gamma f \in L_p^\gamma(E_n^+)\right\}$, норму в котором определим равенством $\|f\|_{L_p^{\gamma,\alpha}} = \|f\|_{L_p^\gamma} + \|\mathbf{D}_\alpha^\gamma f\|_{L_p^\gamma}\,.$

Обобщая весовой функциональный класс дробной гладкости $L_p^{\gamma,\alpha}$, введем следующее пространство $L_{p,r}^{\gamma,\alpha} = \left\{f \;:\; f \in L_r^\gamma(E_n^+)\,,\;\; \mathbf{D}_\alpha^\gamma f \in L_p^\gamma\right\}\,, \quad \alpha > 0\,,\; 1 \le p < \infty\,,\;\; 1 \le r < \infty\,,\;\; \|f\|_{L_{p,r}^{\gamma,\alpha}} = \|f\|_{L_p^\gamma} + \|\mathbf{D}_\alpha^\gamma f\|_{L_r^\gamma}$, совпадающее с $L_p^{\gamma,\alpha}$ при $r = p$. Это пространство оказывается подпространством RWK-потенциалов: $L_{p,r}^{\gamma,\alpha} = L_r^\gamma \cap \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)\,.$

Мы будем опираться на результаты [5], где, по сути, получены необходимые условия принадлежности функции из L_p^γ пространству RWK-потенциалов. Эти условия окажутся достаточными и, тем самым, дадут описание пространства RWK-потенциалов, что обобщает известные классические результаты и продолжает исследования работы [6], где дается описание пространств потенциалов Бесселя, порожденных обобщенным сдвигом T^y.

1. Интегральное представление обобщенных конечных разностей.

Теорема 1. Пусть $f \in L^{\gamma,\alpha}_{p,r}(E^+_n)$, $\alpha > 0$, $1 \le p < \infty, 1 \le r < \infty$. Тогда для обобщенных конечных разностей $(\square^m_h f)(x)$ при $m \ge \alpha$ (при α нечетном $m = \alpha$) справедливо представление

$$(\square^m_h f)(x) = \int\limits_{E^+_n} \left(T^\xi (\square^m_h k^\gamma_\alpha\right)(x) \; (\mathbf{D}^\gamma_\alpha f) \; . \tag{2}$$

где k^γ_α – ядро RWK-потенциала Рисса.

Доказательство. Будем предполагать, что $\alpha - n - |\gamma| \ne 0, 2, 4, \ldots$. Пусть $\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon}$ — усечённый B-г.с. интеграл и введем обозначения $\varphi_\varepsilon(x) = \left(\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon} f\right)(x)$, $J\,\varphi = \left((\square^m_h k^\gamma_\alpha) * \varphi\right)_\gamma$. Имеем

$$J\,\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,\gamma,l}(\alpha)} \int\limits_{E^+_n} T^y_x \left(\square^m_h k^\gamma_\alpha\right)(x) \int\limits_{(|t|>\varepsilon)^+_n} \frac{\left(\square^l_t f\right)(y)}{|t|^{n+|\gamma|+\alpha}}\, t^\gamma\, dt\; y^\gamma\, dy\,.$$

Учитывая, что $\left(\square^m_h k^\gamma_\alpha\right)(x) \in L^\gamma_p$, мы можем поменять порядок интегрирования. Пользуясь самосопряженностью обобщенного сдвига, получим

$$J\,\varphi_\varepsilon(x) =$$

$$= \frac{1}{D_{n\gamma\alpha}} \sum_{k=0}^m (-1)^k C^k_m \sum_{\nu=1}^l (-1)^\nu C^\nu_l \int\limits_{E^+_n} \int\limits_{(|t|>\varepsilon)^+_n} f(y)|y|^{-\alpha-n-|\gamma|} T^{\nu t}_y T^t_x T^{kh}_x |x|^{\alpha-n-|\gamma|} y^\gamma dy t^\gamma dt.$$

Воспользуемся равенством (см. [2]) $T^{\nu t}_y T^t_x T^{kh}_x |x|^{\alpha-n-|\gamma|} = T^{kh}_y T^x_y T^{\nu t}_y |y|^{\alpha-n-|\gamma|}$, и вновь меняя порядок интегрирования и применяя свойство самосопряженности сдвига T^y, имеем

$$J\,\varphi_\varepsilon(x) =$$

$$= \frac{1}{d_{n,\gamma,l}(\alpha)} \sum_{k=0}^m (-1)^k C^k_m \int\limits_{E^+_n} \left(T^{kh}_y T^x_y\, f\right)(y) y^\gamma dy \int\limits_{(|t|>\varepsilon)^+_n} |t|^{-(n+|\gamma|+\alpha)} \left(\square^l_t k^\gamma_\alpha\right)(y) t^\gamma dt. \tag{3}$$

Во внутреннем интеграле заменой переменных $z_{2j-1} = t_j \cos\alpha_j$, $z_{2j} = t_j \sin\alpha_j$, $0 \le \alpha_j \le \pi$, $j = \overline{1,n}$ перейдем к интегрированию по $2n$-мерной области $E^+_{2n} = \{\, z \,:\, z = (z_1, \ldots, z_{2n}),\;\; z_{2j} > 0\,,\;\; m, j = \overline{1,n}\}$. В результате

$$\int_{(|t|>\varepsilon)^+_n} |t|^{-n-|\gamma|-\alpha} \left(\square^l_t k^\gamma_\alpha\right)(y)\, t^\gamma\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^l (-1)^k C^k_l \int\limits_{(|t|>\varepsilon)^+_2} |z|^{-n-|\gamma|-\alpha} |\xi - kz|^{\alpha-n-|\gamma|} \prod_{j=1}^n z_{2j}^{\gamma_j - 1}\, dz\,.$$

где $\xi = (y_1, 0, y_2, 0, \ldots, y_n, 0)$. Теперь произведем преобразование координат вращением $\omega_\xi(z)$, не затрагивающим весовых координат z_{2j} , $j{=}1, \ldots, n$, при котором единичный вектор $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ перейдет в единичный вектор $\frac{\xi}{|\xi|} = \frac{\xi}{|y|}$. Учитывая известное равенство (для обычных разностей) $\Delta_z^l |\xi|^{\alpha-n-|\gamma|} = |z|^{\alpha-n-|\gamma|} \, \Delta_{e_1}^l \left| \frac{\xi}{|z|^2} \, \omega_\xi(z) \right|^{\alpha-n-|\gamma|}$, получим

$$\int\limits_{(|t|>\varepsilon)_n^+} \frac{(\Box_t^l k_\alpha^\gamma)(y)}{|t|^{n+|\gamma+\alpha|}} \, t^\gamma \, dt = |y|^{-n-|\gamma|} \int\limits_{(|\zeta|<\frac{|y|}{\varepsilon})_{2n}^+} \left(\Delta_{e_1}^l k_\alpha^\gamma\right)(\zeta) \prod_{j=1}^n \zeta_{2j}^{\gamma_j-1} \, d\zeta \, .$$

Вернемся теперь к (3). Полагая $y{=}\varepsilon \, \eta$, имеем

$$(J \, \varphi_\varepsilon)(x) = \int\limits_{E_n^+} \left(\Box_h^m \left(T_{\varepsilon\eta}^x f\right)(\varepsilon\eta)\right) k_{l,\alpha}^\gamma(|\eta|) \, \eta^\gamma \, d\eta \, . \tag{4}$$

Отсюда представление (2) получается при $\varepsilon \to 0$. Обоснуем предельный переход в этом неравенстве. Так как $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ в L_p^γ, а $(\Box_h^m k_\alpha^\gamma)(x) \in L_1^\gamma$, то левая часть равенства (4) сходится в L_p^γ-норме. С другой стороны, так как $f \in L_r^\gamma(E_n^+)$, а $k_{\varepsilon,\alpha}^\gamma(|\eta|) \in L_1^\gamma(E_n^+)$, то правая часть в равенстве (4) сходиться к $(\Box_h^m)(x)$ по норме пространства L_r^γ. В силу равенства этих частей их пределы совпадают почти всюду. Переходя к пределу, получим (2).

Доказательство закончено.

2. Описание пространства RWK-потенциалов $\mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$. Введем пространство Лизоркина Φ_γ, состоящее из всех функций пространства Шварца основных функций φ, четных по каждой из переменных и ортогональных в смысле весовой линейной формы $\int f(x) \; g(x) \; x^\gamma \, dx$ всем четным многочленам. Соответствующее пространство распределений обозначается Φ_γ' Описание пространства $\mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$ дается в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $f \in \Phi_\gamma'(E_n^+)$. Для того, чтобы $f \in \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

1) при $1 < p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$

$$\mathbf{D}_\alpha^\gamma f \in L_p^\gamma(E_n^+) \, , \quad f \in L_{p_\alpha}^\gamma(E_n^+) \, ,$$

где $p_\alpha = \frac{(n+|\gamma|) \, p}{n+|\gamma|-\alpha p}$ – показатель Соболева для весовых пространств L_p^γ;

2) при $p \geq \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$

$$\mathbf{D}_\alpha^\gamma f \in L_p^\gamma(E_n^+) \, , \quad \left(\Box_h^l f\right)(x) \in L_p^\gamma(E_n^+) \, ,$$

где $l = \alpha$ при целом нечетном α, и $l > 2\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ в остальных случаях.

Кроме того,

$$\mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma) \cap L_r^\gamma = L_{p,r}^{\gamma,\alpha}(E_n^+ \, , \quad \alpha > 0 \, , \quad 1 \leq p < \infty \, , \quad 1 \leq r < \infty) \, .$$

Доказательство. Необходимость выполнения условий теоремы для принадлежности пространству RWK-потенциалов вытекает из их обращения посредством B-г.с. интегралов $\mathbf{D}_\alpha^\gamma$. Условие $f \in L_{p_\alpha}^\gamma$ при $1 < p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$ есть следствие ограниченности оператора $\mathbf{U}_\alpha^\gamma$ как оператора из L_p^γ в L_{p_α}.

Если, кроме того, потребовать, чтобы $f(x)=(\mathbf{U}_\alpha^\gamma\varphi)(x) \in L_r^\gamma(E_n^+)$ при $\varphi \in L_p^\gamma(E_n^+)$, то $f \in L_{p,r}^{\gamma,\alpha}$, т.е. $\mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma) \cap L_r^\gamma \subseteq L_{p,r}^{\gamma,\alpha}(E_n^+)$.

Остается доказать достаточность. Если $f \in L_{p,r}^{\gamma,\alpha}(E_n^+)$, то к этой функции применимо представление (2), правая часть которого есть обобщенная конечная разность $\square_h^m(\mathbf{U}_\alpha^\gamma \mathbf{D}_\alpha^\gamma f)(x)$. При этом действия (B-R)-потенциала $\mathbf{U}_\alpha^\gamma$ понимается в смысле распределений $\Phi_\gamma'(E_n^+)$, когда $\mathbf{D}_\alpha^\gamma f \in L_p^\gamma(E_n^+)$, $p \geq \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$. Следовательно $\square_h^m f = \square_h^m \mathbf{U}_\alpha^\gamma \mathbf{D}_\alpha^\gamma f$.

Покажем, что если обобщенные конечные разности совпадают, то сами распределения могут отличаться лишь многочленами, четными по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Действительно, равенство $\square_h^m(f-g) = 0$ в образах Фурье-Бесселя (в смысле распределений Φ_γ') влечет за собой равенство

$$\left(1 - \prod_{j=1}^n j_{\frac{\gamma_j - 1}{2}}(x_j h_j)\right)^m \left(\widehat{f}(x) - \widehat{g}(x)\right) = 0\,.$$

Исходя из общего вида распределения сосредоточенного в точке, имеем

$$(\square - h^m(f-g), \varphi)_\gamma = \left(\sum a_\beta\, B^\beta \delta_\gamma(x)\,, F_B^{-1}[\varphi](x)\right)_\gamma = \left(\sum (-1)^\beta\, a_\beta\, x^{2\beta}\,, \varphi\right)_\gamma\,.$$

Таким образом,

$$f(x) = \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)\mathbf{D}_\alpha^\gamma\, f\,(x) + P(x) \tag{5}$$

где $P(x)$ – многочлен, четный по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Но $f \in L_r^\gamma$, следовательно не содержит слагаемого многочлена. При $1 < p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$ функция $\mathbf{U}_\alpha^\gamma \mathbf{D}_\alpha^\gamma f(x) \in L_{p_\alpha}^\gamma$ и, следовательно, также не содержит слагаемого многочлена. Поэтому в этом случае $P \equiv 0$ и тогда из (5) следует, что $f(x) \in \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$.

Если же $p \geq \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$, то функция f рассматривается как элемент пространства Φ_γ' и, следовательно, определена с точностью до слагаемого (четного) многочлена. Таким образом,

$$L_{p,r}^{\gamma,\alpha} \subseteq \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)\,,$$

что вместе с (3) дает (2).

Из (2) вытекает достаточность условий теоремы для принадлежности пространству RWK-потенциалов $\mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$ при $1 < p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$ поскольку в этом случае $r = p_\alpha$. При $p \geq \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$ остается повторить эти рассуждения в пространстве распределений Φ_γ' (см. [5]).

Доказательство закончено.

Из теоремы 2 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Пространства $L_{p,r}^{\gamma,\alpha}$ не зависят от выбора порядка l обобщенной конечной разности.

Следствие 2. Пространства $L_{p,r}^{\gamma,\alpha}$ полны.

Из теоремы 2 вытекает простое достаточное условие принадлежности функции пространству RWK-потенциалов:

$$|f(x)| < \frac{c}{(1+|x|)^\lambda}\,, \quad \lambda > \frac{n+|\gamma|}{p}\,, \quad f \in C_{ev}^m(E_n^+)\,, \quad m > \alpha\,.$$

Действительно, при таком убывании на бесконечности любая непрерывная функция принадлежит пространству $L_p^{\gamma,\alpha}(E_n^+)$ и нам остается проверить, что $\mathbf{D}_\alpha^\gamma f \in L_p^\gamma(E_n^+)$. Имеем

$$\|\mathbf{D}_\alpha^\gamma f\|_{L_p^\gamma} \leq \int\limits_{E_n^+} |t|^{-n-|\gamma|-\alpha} \left(\int\limits_{E_n^+} |(\Box_t^l f)(x)|^p \, x^\gamma \, dx \right)^{1/p} t^\gamma \, dt \leq$$

$$\leq C_1 \, \|f\|_{L_p^\gamma} \int\limits_{(|t|>1)_n^+} |t|^{-n-|\gamma|-\alpha} \, t^\gamma \, dt + C_2 \int\limits_{(|t|<1)_n^+} \|\Box_t^l f|_{L_p^\gamma} \, |t|^{-n-|\gamma|\alpha} \, t^\gamma \, dt \, .$$

Для $f \in C_{ev}^m(E_n^+)$ справедлива оценка $\|\Box_t^l f\|_{L_p^\gamma} \leq C \, |t|^{2m}$, где $2m = l$ если l – четное и $2m = l+1$, если l – нечетное. Отсюда следует требуемый результат.

Приведем еще один полезный вариант описания пространства $\mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$, в котором условие сходимости по норме пространства L_p^γ заменено требованием равномерной ограниченности норм.

Теорема 3. Для того, чтобы $f \in \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$, $1 < p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f \in L_{p_\alpha}^\gamma(E_n^+) \, , \quad \text{или} \quad (1+|x|)^\alpha \, f(x) \in L_p^\gamma(E_n^+) \, ,$$

и чтобы существовала последовательность чисел $\varepsilon_k \to 0$ такая, что $|\mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_k}^\gamma f|_{L_p^\gamma} \leq C$, где постоянная C не зависит от ε_k.

Доказательство. В силу теоремы 2 в доказательстве нуждается только достаточность. Пусть для определенности для некоторой функции f выполнено первое условие из условий (11). Надо доказать существование функции $\varphi \in L_p^\gamma(E_n^+)$ такой, что $f(x) = (\mathbf{U}_\alpha^\gamma \varphi)$. Мы покажем, что искомая функция может быть найдена как предел в L_p^γ последовательности $\mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_k}^\gamma f$ в Lp^γ (по определению действие оператора $\mathbf{D}_\alpha^\gamma$ в Lp^γ понимается как предел последовательности усеченных B-г.с.интегралов $\mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon}^\gamma$). Имеем

$$\|\mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_k}^\gamma f - \mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}}^\gamma f\|_{L_p^\gamma} = \sup_{\|g\|_{L_p^\gamma}=1} \Big(g(x) \, , \; \mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_k}^\gamma f - \mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}}^\gamma f \Big)_\gamma \, .$$

Пусть $g_o(x) \in C_{0,ev}^\infty$ – такая функция, что для любого $\varepsilon > 0$ $\|g - g_o\|_{L_p^\gamma} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$, Воспользовавшись этой функцией, получим

$$\|\mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_k}^\gamma f - \mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}}^\gamma f\|_{L_p^\gamma} \leq \|g(x) - g_o(x)\|_{L_p^\gamma} \Big(\|\mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_k}^\gamma f - \mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}}^\gamma f\|_{L_p^\gamma} +$$

$$+ \left| \Big(g_o(x) \, , \; \mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_k}^\gamma f - \mathbf{D}_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}}^\gamma f \Big)_\gamma \right| \Big) \, .$$

Для второго слагаемого, имеем

$$\left|\Big(g_o(x)\,,\ \ \mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_k} f-\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}} f\Big)_\gamma\right| =$$

$$=\left|\Big(\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_k} g_o(x)-\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}} g_o\ \ ,\ \ f(x)\Big)_\gamma\right| \le \|f\|_{L_{p_\alpha}}\|\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_k} g_o(x)-\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}} g_o(x)\|_{L_{p'_\gamma}} =$$

$$= C\,\|f\|_{L_{p_\alpha}}\left\|\ \int\limits_{(1<|t|<\varepsilon_k)^+_n} |t|^{-n-|\gamma|-\alpha}\left(\square^l_t g_o\right)(x)\, t^\gamma\, dt\right\|_{L_{p'_\alpha}}.$$

Пусть $d=\sup\limits_{x\in supp\, g}|x|$. Учитывая неравенство $\sqrt{x_j^2+(kt_j)^2-2kx_jt_j\cos\alpha_j}\le x_j+kt_j\quad(x_j>0\,,\ \ t_j\in[\varepsilon_k+\omega,\varepsilon_k])$, получаем

$$\left|\Big(g_o(x)\,,\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_k} f-\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}} f\Big)_\gamma\right| \le C\,\|f\|_{L^\gamma_p}\left[\ \int\limits_{(|x|<l+d)^+_n}\left|\int\limits_{\varepsilon_{k+\omega}}^{\varepsilon_k}\rho^{l-\alpha-1}\,d\rho\right|^{p'_\alpha} x^\gamma\,dx\right]^{1/p'_\alpha}$$

Отсюда для достаточно больших номеров k и для произвольного $\varepsilon>0$

$$\left|\Big(g_o(x)\,,\,\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_k} f-\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}} f\Big)_\gamma\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

что доказывает фундаментальность последовательности $\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_k} f$ в $L^\gamma_p(E^+_n)$. Пусть

$$f(x)\in L^\gamma_p(E^+_n)\,,\quad \varphi(x)=\lim_{\substack{(L^\gamma_p)\\ \varepsilon\longrightarrow 0}}\Big(\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}} f\Big)(x)\,.$$

Воспользуемся предельной формой равенства (1), имеющего вид

$$\left(\square^m_h f\right)(x)=\lim_{\substack{(L^\gamma_p)\\ \varepsilon\longrightarrow 0}}\Big(\left(\square^m_h k^\gamma_\alpha\right)(x)*\Big(\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon_{k+\omega}} f\Big)(x)\Big)_\gamma\,.$$

Обобщенная свертка с ядром $k^\gamma_\alpha(x)$ представляет собой оператор ограниченный из L^γ_p в $L^\gamma_{p_\alpha}$. В силу теоремы об обращении RWK-потенциалов (см [5]) имеем

$$\left(\square^m_h f\right)(x)=\left(\left(\square^m_h k^\gamma_\alpha\right)(x)*\varphi(x)\right)_\gamma=\left(\square^m_h\mathbf{U}^\gamma_\alpha\varphi\right)(x)\,.$$

Отсюда получаем $f=\mathbf{U}^\gamma_\alpha\varphi$.

Доказательство закончено.

Отметим, что в силу теоремы об обращении RWK-потенциалов $\mathbf{U}^\gamma_\alpha$ функция f является не только слабым, но и сильным пределом в L^γ_p усеченных B-г.с.интегралов $\mathbf{D}^\gamma_{\alpha,\varepsilon} f$.

3 О модуле непрерывности RWK-потенциалов. Модулем непрерывности порядка m функции f в метрике весовых функциональных пространств $L^\gamma_p(E^+_n)$ будем называть величину

$$\Omega(f,h)=\sup_{|t|<h}\|\left(\square^m_t f\right)(x)\|_{L^\gamma_p}\,,$$

где $\Box_t^m$ – обобщенная конечная разность порядка l с шагом t.

Пусть $f(x) \in \mathbf{U}_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$, $1 < p < \frac{n+|\gamma|}{\alpha}$, тогда для модуля непрерывности порядка m справедливы следующие неравенства:

1) $\|\Box_t^m f\|_{L_p^\gamma} \le c|t|^\gamma \|\mathbf{D}_\alpha^\gamma f\|_{L_p^\gamma}$, $\quad m > \alpha$;

2) $\|\Box_t^\gamma f\|_{L_p^\gamma} = 0(|t|^\alpha)$ при $|t| \to 0$, $m > \alpha$.

Для доказательства этих свойств представим действие обобщенной конечной разности $\Box_t^m$ на образ RWK-потенциала $f{=}\mathbf{U}_\alpha^\gamma \varphi$ в виде

$$(\Box_t^m f)(x) = \frac{1}{A} \int\limits_{E_n^+} \varphi(y) \left(\Box_t^m \left(T_y^x |y|^{\alpha-n-|\gamma|}\right)\right)(x)\, y^\gamma\, dy =$$
$$= \frac{1}{A} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k \int\limits_{E_n^+} \varphi(y) \left(T_x^{kt} T_y^x |y|^{\alpha-n-|\gamma|}\right) y^\gamma\, dy\,.$$

Применяя последовательно свойства ассоциативности, перестановочности и самосопряженности обобщенного сдвига, получим

$$(\Box_t^m f)(x) = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k \int\limits_{E_n^+} (T^x \varphi)(y) \left(T_y^{kt} |y|^{\alpha-n-|\gamma|}\right) y^\gamma\, dy\,.$$

Отсюда

$$(\Box_h^m f)(x) = \frac{1}{A} \int\limits_{E_n^+} \left(T_{|t|\xi}^x \varphi(|t|\xi)\right) \Lambda_{v,\alpha}^\gamma(\xi, ort\, t)\, \xi^\gamma\, d\xi\,.$$

Напомним, что здесь $\varphi = (\mathbf{D}_\alpha^\gamma f)(x)$. Учитывая, что $\Lambda_{m,\alpha}^\gamma(\xi, t) = (\Box_t^m k_\alpha^\gamma)(\xi) \in L_1^\gamma(E_n^+)$ и ограниченность обобщенного сдвига как оператора из L_p^γ в L_p^γ, получим свойство 1).

Свойство 2) вытекает из неравенства

$$\left|\Lambda_{v,\alpha}^\gamma(\xi, ort\, t)\right| \le c(1+|\xi|)^{\alpha-n-l}, \quad |\xi| \ge l+1\,,$$

поскольку $T_{|t|\xi}^x \varphi(|h|\xi) = T^{|h|\xi}\varphi(x) \to \varphi(x)$ при $h \to 0$.

Литература

[1] Ванштейн А. (Weinshtein A.) Discontinious integrals and generalized potential theotheory // Trans Amer. Math. Soc. – 1948. – V.63. – P.342-354.

[2] Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. – М.: Наука. 1997. – С.199.

[3] Самко С.Г. О пространствах Риссовых потенциалов // Изв. АН, Сер. мат. – 1976. – Т.40, №5. – С.1443-1472.

[4] Ляхов Л.Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // ДАН. – 1990. – Т.315, №2. – С.291-296.

[5] Ляхов Л.Н. Обращение В-потенциалов // ДАН. – 1991. – Т.321, №3. – С. 466-469.

[6] Ляхов Л.Н., Половинкина М.В. Пространства весовых потенциалов Бесселя // Тр. МИАН. – 2005. – Т.250. – С.192-197.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ УНИКАЛЬНОСОСТАВЛЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР

Петрунин А.М., Рукшин С.Е.

Российский государственный педагогический
университет им. А.И.Герцена
Pensilvania State Univ.
Городской Математический Центр
Санкт-Петербург
e-mail: serger@math.sch239.spb.ru

В этой статье мы рассматриваем отношение равносоставленности на множестве выпуклых плоских фигур. Это задача тесно связана с определением площадей и объемов с помощью равносоставленности и равнодополняемости, возможностью определения площадей криволинейных фигур без применение инфинитезимальных методов, третьей проблемой Гильберта (см. [1], [2]).

Так, в математическом фольклоре известно следующее утверждение: круг не равносоставлен никакому многоугольнику. В процессе обобщения теоремы Бойяи-Гервина на случай *круговых многоугольников*, граница которых состоит из отрезков и дуг окружностей, удалось усилить это утверждение, доказав, что круг не равносоставлен никакой выпуклой фигуре, отличной от круга (см. [4], [5]). Такие выпуклые фигуры, не равносоставленные никакой другой выпуклой фигуре, мы будем называть уникальносоставленными. В этой статье мы дадим схему элементарного доказательства теоремы, дающей полное описание таких фигур. Первоначальное доказательство, полученное авторами, носило неэлементарный характер и докладывалось на международных конференциях (см. [6]), однако знакомство с замечательной работой [3] позволило убрать все аналитические и топологические аспекты доказательства, оставив только элементарную наглядно-геометрическую часть.

***Определение* 1**. Две плоских фигуры F и G называются **равносоставленными** (или $F \sim G$), если одну из них можно разрезать вдоль произвольных простых жордановых кривых на конечное число частей и составить из этих частей другую.

Как показано в [3], для выпуклых фигур это определение равносильно определению с разрезами вдоль спрямляемых жордановых кривых или даже прямолинейных отрезков.

***Определение* 2**. Выпуклая фигура F называется **уникальносоставленной**, если любая выпуклая фигура, равносоставленная F, является конгруэнтной F.

Как мы уже упоминали, к уникальносоставленным фигурам относится, например, круг.

***Определение* 3**. Две кривые α и β называются **равносоставленными** (или $\alpha \sim \beta$), если первую можно разбить на конечное число дуг и составить из них вторую.

***Определение* 4**. Две кривые α и β называются **стабильно равносоставлеными** (или $\alpha \approx \beta$), если из них можно исключить конечное число отрезков прямой так, что оставшиеся два набора кривых равносоставлены.

***Теорема* 1**. Две выпуклые фигуры F и G равносоставлены тогда и только тогда, когда их площади равны и кривые, их ограничивающие, стабильно равносоставлены.

Доказательство этой очевидно следует из теоремы Бойяи-Гервина.

Следующий факт имеет несколько более сложное доказательство:

***Определение* 5**. Назовём пересечение двух кругов (возможно различных радиусов) круговой линзой.

Следующий факт имеет несколько более сложное доказательство:

***Теорема* 2**. Круговая линза является уникальносоставленной фигурой в том и только в том случае, когда радиусы кругов равны.

В частности, из этой теоремы следует уникальносоставленность круга. Доказательство следует из предыдущей теоремы и следующих лемм:

***Лемма* 1**. Если выпуклая фигура F имеет границу, стабильно равносоставленную границе линзы L, то $S(F) \geq S(L)$. Более того, если $S(F) = S(L)$, то $F \cong L$.

Приступим к изучению круговых многоугольников.

***Определение* 6**. Выпуклая фигура называется круговым многоугольником, если её граница равносоставлена конечному набору дуг окружностей и отрезков прямой.

***Определение* 7**. Круговой многоугольник M называется овалом, если он обладает следующими свойствами:

– не имеет отрезков прямой на границе;

– имеет две перпендикулярные оси симметрии a и b. Давайте обозначим через A, A' и B, B' их точки пересечения с границей M;

– если граница M имеет угловые точки то они находятся на оси a, т.е. в точках A и A';

– радиусы дуг окружностей, ограничивающей M, монотонно возрастают от A до B.

Основным результатом для круговых многоугольников является следующая теорема:

***Теорема* 3**. Круговой многоугольник уникальносоставлен тогда и только тогда, когда он овален.

Нетрудно видеть, что в классе круговых многоугольников со стабильно равносоставленной границей есть единственный, с точностью до конгруэнтности, овал. Как и в случае линзы, теорема для круговых многоугольников следует из следующего экстремального принципа:

***Теорема* 4**. Если круговой многоугольник M имеет границу, стабильно равносоставленую границе овала V, то $S(M) \geq S(V)$. Более того, если $S(M) = S(V)$, то $M \cong V$.

Таким образом, овалы обладают следующим экстремальным свойством: среди всех круговых многоугольников со стабильно равносоставленной границей овалы имеют наименьшую площадь.

Доказательство экстремального принципа проводится индукцией по количеству дуг различного радиуса на границе многоугольников в два этапа: сначала мы доказываем его для центрально-симметричных круговых многоугольников, а потом сводим к этому случаю произвольный.

Перейдем к рассмотрению общего случая для произвольных выпуклых фигур.

Пусть $\alpha : [0,T) \to \mathbb{R}^2$ есть граница выпуклой фигуры параметризованная длиной в направлении против часовой стрелки. У α определена правая производная $\alpha^+(t)$. Определим угол поворота кривой $\phi(t)$ как угол от $\alpha^+(0)$ до $\alpha^+(t)$ (измеряемый от 0 до 2π против часовой стрелки). Из выпуклости α следует, что $\varphi(t)$ монотонно возрастающая функция. Это даёт возможность определить верхнюю кривизну $k(t)$ как верхний предел

$$k(t_0) = \overline{\lim_{t\to t_0}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

Так как возрастающая функция имеет производную в почти всех точках, мы получаем, что $k(t)$ конечна для почти всех t.

Определим нижний радиус кривизны через $R(t) = \frac{1}{k(t)}$ (считая $0 = 1/\infty$). Это даёт возможность обобщить определение овала на случай произвольной выпуклой фигуры F:

***Определение* 8**. Выпуклая фигура F называется овалом, если она обладает следующими свойствами:

– граница F строго выпукла;

– F имеет две перпендикулярные оси симметрии a и b (обозначим через A, A' и B, B' их точки пересечения с границей F);

– если граница F и имеет угловые точки, то они находятся на оси a, т.е. в точках A и A';

– нижний радиус кривизны кривой, ограничивающей F, монотонно возрастают от A до B.

В случае, когда граница F – гладкая кривая, последнее условие совпадает с монотонным возрастанием обычного радиуса кривизны от A до B.

Полное описание уникально составленных выпуклых фигур дает следующая

***Теорема* 5**. Выпуклая фигура уникальносоставлена тогда и только тогда, когда она овальна.

Доказательству предпошлем следующее определение

***Определение* 9**. Пусть F есть выпуклая фигура. Обозначим через $\rho_F(r)$ угловую меру участка границы F с нижним радиусом кривизны $\leq r$. Функция $\rho_F : \mathbb{R}_+ \to [0, 2\pi]$ назовем профилем фигуры F.

Например, профиль круга радиуса R есть

$$\rho_K(r) = \begin{bmatrix} 0 & \text{если} & r < R \\ 2\pi & \text{если} & r \geq R, \end{matrix}$$

а профиль любого многоугольника тождественно равен 2π.

Отметим, что в случае круговых многоугольников профиль границы есть ступенчатая функция. Равенство профилей границ круговых многоугольников равносильно стабильной равносоставленности их границ. В общем случае это уже не так. Тем не менее, равенство профилей выпуклых фигур работает почти так же, как стабильная равносоставленность границ, т.е. верно следующее утверждение

Лемма 2. Следующие два свойства пары выпуклых фигур F и G равносильны:

– F и G имеют равные профили границ и равную площадь;

– для любого $\varepsilon > 0$ найдётся пара фигур F' и G', приближающих F и G соответственно в метрике Хаусдорфа с точностью до ε и такие, что F равносоставлена с G', а G равносоставлена с F'

Перейдем к доказательству общей теоремы.

Сначала отметим, что в классе выпуклых фигур с равным профилем (не равным тождественно 2π) найдётся единственный, с точностью до конгруэнтости, овал.

Основная лемма. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, если M есть круговой многоугольник, и V есть соответствующий ему овал, то $d_H(V, M) > \varepsilon h$ влечет $S(M) - S(V) > \delta h^2$, где h обозначает ширину овала V, а d_H есть метрика Хаусдорфа.

С помощью этих утверждений доказывается экстремальный принцип:

Теорема 6. Если выпуклая фигура F имеет профиль, равный профилю овала V, то $S(F) \geq S(V)$. Более того, если $S(F) = S(V)$ то $F \cong V$.

Произвольную выпуклую фигуру F можно приблизить последовательностью круговых многоугольников M_i, так что профили M_i сходятся к профилю F. Это делается аналогично тому, как измеримую функцию на отрезке можно приближают по мере ступенчатой функцией. Пусть V_i обозначают овалы, соответствующие M_i. Тогда V_i сходятся в метрике Хаусдорфа к некоторому овалу V. Более того, полученный овал V имеет тот же профиль, что F. Из экстремального принципа следует, что $S(V_i) \leq S(M_i)$ и, перейдя к пределу, $S(V) \leq S(F)$. Остаётся только показать, что в случае равенства V и F конгруэнтны. А это следует из основной леммы.

Результаты доклада можно обобщить в различных направлениях:

1. Аффинная уникальносоставленность. Понятие равносоставленности можно также рассматривать для различных групп преобразований плоскости, как, например, для группы параллельных переносов или группы подобий. Довольно интересным случаем является группа $SL(2, \mathbb{R})$ эквиаффинных преобразований, т.е. аффинных преобразований, сохраняющих площадь.

Теорема 7. Аффинно-уникальносоставленными фигурами являются эллипсы и только они.

2. Уникальносоставленные наборы фигур. Уникальносоставленность можно обобщить на наборы из n выпуклых фигур: набор из n выпуклых фигур называется уникальносоставленным, если из равносоставленности этого набора второму набору из n выпуклых фигур следует, что каждая из фигур первого набора конгруэнтна одной из фигур второго.

Теорема 8. Набор из n выпуклых фигур уникальносоставлен тогда и только тогда, когда он состоит из конгруэнтных между собой овалов.

3. Уникальносоставленные тела.

Теорема 9. Для любого выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$ найдётся произвольно близкое в метрике Хаусдорфа уникальносоставленное выпуклое тело.

4. Равносоставленность неограниченных фигур и тел.

Можно определить равносоставленность для неограниченных фигур, считая допустимыми разрезания вдоль конечного числа лучей и отрезков прямых. Описание бесконечных уникальносоставленных фигур использует утверждение, что из каждой точки уникальносоставленной бесконечной выпуклой фигуры исходит ровно один луч, целиком содержащийся в ней.

Авторы выражают благодарность Д.В.Максимову за помощь в оформлении текста этого доклада.

Литература

[1] В.Г.Болтянский. Третья проблема Гильберта. – М.: Наука, 1977 – 208 с.

[2] В.Г.Болтянский Равновеликие и равносоставленные фигуры // "Популярные лекции по математике", Выпуск 22. – Гостехиздат, 1956 – 64 с.

[3] L.Dubins, M.Hirsch, J.Karush. Scissor congruence // Israel J. Math. 1, 1963, 239–247.

[4] А.М.Петрунин, С.Е.Рукшин. Уникальносоставленные выпуклые фигуры // IX Всесоюзная геометрическая конференция. – Кишинев: Штиинца, 1988, с.242-243.

[5] А.М.Петрунин, С.Е.Рукшин. О равносоставленности круговых многоугольников // Задачи геометрии в целом для погруженных многообразий. – СПб: РГПУ, 1991, с.111-118.

[6] S.Rukshin. Some remarks about Hilbert' third problem and equidecomposable convex figures // Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de Roumanie v. 41(89), 4 (1998), 285-288.

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НЕ ВЫПОЛНЕННОМ УСЛОВИИ КАРЛЕМАНА

Царева А.С.
Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: lean@yandex.ru

При исследовании базисности систем корневых функций дифференциальных операторов важную роль играют оценки норм этих функций. Для операторов второго и более высокого порядков этот вопрос изучался целым рядом авторов (не претендуя на полноту библиографии, назовем работы [1-10]). Для обыкновенного оператора второго порядка при всех значениях спектрального параметра точные оценки были получены В.В.Тихомировым [4]. Оценки связывающие L_p и C-нормы собственных и присоединенных функций несамосопряженного дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля по двум произвольным компактам K и K' (где $K \subset K'$) при выполненном условии Карлемана – И.С.Ломовым [5]. Неулучшаемые по порядку оценки для корневых функций дифференциального оператора произвольного четного порядка с гладкими коэффициентами ($P_l(x) \in W_1^{(n-l)}(G), l = \overline{1,n}$) при всех значениях спектрального параметра приводятся в диссертации В.Д.Будаева [6]. Для операторов произвольного порядка с гладкими коэффициентами – в диссертации Н.Б.Керимова [7]. В дальнейшем оценки, полученные Н.Б.Керимовым, были расспространены В.М.Курбановым [8] на случай дифференциалного опертора произвольного порядка с комплексозначными коэффициентами $P_l(x) \in L_1(G), l = \overline{1,n}$. При этом значения спектрального параметра произвольны.

В работе [3] В.Д.Будаева для дифференциального оператора произвольного четного порядка получены оценки при невыполнении условия Карлемана. Эти оценки связывают L_p-норму ($p \geqslant 1$) корневой функции по произвольному компакту K через сумму L_p-норм по компакту K' (где $K \subset K'$) всех корневых функций, из соответствующей цепочки, но стоящих перед рассматриваемой.

В настоящей работе получены три оценки, связывающие L_2-нормы корневых функций обыкновенного несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка по двум произвольным компактам K и K' (где $K \subset K'$) и оценка, выражающая C-норму корневых функций по произвольному связному компакту K через L_2-норму по произвольному компакту K', содержащему строго внутри себя K. При этом полученные оценки верны при невыполнении условия Карлемана (см. ниже (3)).

1. Основные понятия. На произвольном конечном интервале $G = (a, b)$ вещественной оси рассмотрим формальный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu = u'' + q(x)u, \tag{1}$$

где $q(x) \in C(G)$.

Обозначим через D класс функций, абсолютно непрерывных вместе со своими производными первого порядка на замкнутом интервале $\overline{G}$.

Следуя работам В.А.Ильина, будем исходить из обобщенной трактовки корневых функций оператора L, допускающей рассмотрение совершенно произвольных краевых условий. Рассмотрим произвольную систему $u_k(x)$, состоящую из корневых функций оператора (1). Пусть λ_k – соответствующая система собственных значений этого оператора. Потребуем, чтобы вместе с каждой присоединенной функцией порядка $s \geqslant 1$ система $u_k(x)$ содержала также соответствующую ей собственную функцию и все присоединенные функции порядка, меньшего s. Это означает, что каждый элемент $u_k(x)$ системы $u_k(x)$, неравный тождественно нулю, принадлежит классу D и почти всюду в G удовлетворяет либо уравнению $Lu_k + \lambda_k u_k = 0$ (в этом случае $u_k(x)$ – собственная функция, λ_k – собственное значение), либо уравнению $Lu_k + \lambda_k u_k = u_{\upsilon(k)}$, где номер $\upsilon(k)$ однозначно определяется номером k и $\upsilon(k_1) \neq \upsilon(k_2)$ при $k_1 \neq k_2$ (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{\upsilon(k)}$, $u_k(x)$ – присоединенная функция порядка $r \geqslant 1$, $u_{\upsilon(k)}$ – присоединенная функция порядка $r - 1$).

Наряду с собственным значением λ_k будем использовать спектральный параметр μ_k, который, следуя В.А.Ильину, для случая оператора второго порядка определим следующим образом:

$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k}, \tag{2}$$

где $[\rho \cdot \exp(i\varphi)]^{1/2} = \rho^{1/2} \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\right)$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

Будем говорить, что система $\{\mu_k\}$ удовлетворяет условию Карлемана, если существует константа C_1, такая что для всех элементов этой системы выполнено неравенство:

$$|\operatorname{Im} \mu_k| \leqslant C_1. \tag{3}$$

В работе далее предполагаем, что μ_k, определяемые соотношениями (2), не удовлетворяют условию Карлемана. Без потери общности можно предположить, что

$$\operatorname{Im} \mu_k > 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} \mu_k = +\infty. \tag{4}$$

Основным инструментом получения оценок для корневых функций являются двусторонние и односторонние формулы среднего значения.

2. Основные результаты.

Теорема. Для корневых функций оператора L при нарушении условия Карлемана (3) справедливы оценки

$$\|u_k\|_{L_2(K)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\operatorname{Im} \mu}} \cdot \|u_{k+1}\|_{L_2(K')}\,, \tag{5}$$

$$\|u_k\|_{C(K)} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\operatorname{Im} \mu}} \cdot \|u_k\|_{L_2(K')}\,, \tag{6}$$

$$\|u_k\|_{L_2(K)} \leqslant \|u_{k+1}\|_{L_2(K')} \frac{C_2}{\sqrt{\operatorname{Im} \mu}} + \|u_k\|_{L_2(K')} \frac{C_3}{|\mu| \sqrt{\operatorname{Im} \mu}}, \tag{7}$$

$$\|u_0\|_{L_2(K)} \leqslant C_4 \, |\mu|^4 \, \|u_1\|_{L_2(K')}\,, \tag{8}$$

где $\mu = \sqrt{\lambda}$, константы C, C_1, C_2, C_3 зависят лишь от выбора K, K' и $\|q\|_{C(K')}$.

Оценки типа (5) называются антиаприорными оценками.

3. Доказательство результатов. Справедливость оценок (5), (6), (7), (8) докажем методом математической индукции. Сначала убедимся в справедливости (6) при $k = 0$, т.е. убедимся в справедливости неравенства, выражающего C-норму собственной функции u_0 по произвольному связному компакту K через L_2-норму u_0 по произвольному компакту K', содержащему строго внутри себя K:

$$\|u_0\|_{C(K)} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\operatorname{Im} \mu}} \cdot \|u_0\|_{L_2(K')} \tag{9}$$

(в этой оценке постоянная C_1 зависит лишь от компактов K, K' и $\|q\|_{C(K')}$).

Для вывода данной оценки будем исходить из формулы среднего значения для собственной функции:

$$\frac{u_0(x+r) + u_0(x-r)}{2} = u_0(x)\cos(\mu r) - \frac{1}{2\mu} \int\limits_{-r}^{r} q(x+t) u_0(x+t) \sin(\mu(|t|-r)dt. \tag{10}$$

Умножим обе части равенства на $e^{i\mu r}$. Уединим первое слагаемое, стоящее в правой части равенства. Считаем, что x принадлежит компакту K, число $R > 0$ выбрано так, что $2R$ меньше расстояния компакта K от границы компакта K'. Проинтегрируем полученное равенство по r в пределах от 0 до R:

$$\int\limits_0^R u_0(x)\cos(\mu r)e^{i\mu r}dr = \int\limits_0^R \frac{u_0(x+r)+u_0(x-r)}{2}e^{i\mu r}dr -$$

$$-\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^R\int\limits_{-r}^{r} q(x+t)u_0(x+t)\sin(\mu(|t|-r)dte^{i\mu r}dr. \quad (11)$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, используя неравенство Коши-Буняковского и формулы Эйлера, оценим модули всех интегралов, стоящих в формуле (11). Получим, что для всех μ, таких, что $\operatorname{Im}\mu > \mu_0 > 0$ (где μ_0 – достаточно велико) справедлива оценка:

$$\frac{R}{4}|u_0(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\|u_0\|_{L_2(K')} + \frac{C_5}{|\mu|\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\|u_0\|_{L_2(K')}.$$

Откуда и получим требуемую оценку (9).

Теперь убедимся в справедливости антиаприорной оценки (5) при $k=0$, т.е. убедимся в справедливости неравенства:

$$\|u_0\|_{L_2(K)} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\cdot\|u_1\|_{L_2(K')}, \quad (12)$$

оценивающего собственную функцию через присоединенную (постоянная C зависит лишь от компактов K, K' и $\|q\|_{C(K')}$).

Справедливость этой оценки легко будет следовать из двух вспомогательных оценок (8) и (7) при $k=0$:

$$\|u_0\|_{L_2(K)} \leqslant \|u_1\|_{L_2(K')}\frac{C_2}{\sqrt{\operatorname{Im}\mu}} + \|u_0\|_{L_2(K')}\frac{C_3}{|\mu|\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}, \quad (13)$$

$$\|u_0\|_{L_2(K)} \leqslant C_4|\mu|^4\|u_1\|_{L_2(K')} \quad (14)$$

(в этих оценках K и K' имеют тот же смысл, что и выше, постоянные C_2, C_3, C_4 зависят от компактов K, K' и $\|q\|_{C(K')}$).

Для вывода оценки (13) будем исходить из формулы среднего значения для присоединенной функции первого порядка:

$$\frac{u_1(x+r)+u_1(x-r)}{2} = u_1(x)\cos(\mu r) - \frac{1}{2\mu}\int\limits_{-r}^{r} q(x+t)u_1(x+t)\sin(\mu(|t|-r)dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-r}^{r} u_0(x+t)\sin\left(\mu(|t|-r)\right)dt. \quad (15)$$

Из односторонней формулы среднего значения для собственной функции дифференциального оператора получим:

$$u_0(x+t) = u_0(x)\cos(\mu t) + \frac{u_0'(x)\sin(\mu t)}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int\limits_0^t q(x+\tau)u_0(x+\tau)\sin(\mu(\tau-t))d\tau. \quad (16)$$

Подставим значение $u_0(x+t)$ из формулы (16) в формулу (15). Уединим слагаемые

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-r}^{r} u_0(x)\cos(\mu t)\sin\left(\mu(|t|-r)\right)dt + u_1(x)\cos(\mu r).$$

Умножим обе части равенства на $e^{i\mu r}$. Считаем, что x принадлежит компакту K, число $R > 0$ выбрано так, что $2R$ меньше расстояния компакта K от границы компакта K'. Проинтегрируем полученное равенство по r в пределах от 0 до R:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^R\int\limits_{-r}^{r} u_0(x)\cos(\mu t)\sin\left(\mu(|t|-r)\right)e^{i\mu r}dtdr + \int\limits_0^R u_1(x)\cos(\mu r)e^{i\mu r}dr =$$

$$= \int\limits_0^R \frac{u_1(x+r)+u_1(x-r)}{2}e^{i\mu r}dr + \frac{1}{2\mu}\int\limits_0^R\int\limits_{-r}^{r} q(x+t)u_1(x+t)\sin(\mu(|t|-r)e^{i\mu r}dtdr -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^R\int\limits_{-r}^{r}\frac{u_0'(x)\sin(\mu t)}{\mu}\sin\left(\mu(|t|-r)\right)e^{i\mu r}dtdr +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\int\limits_0^R\int\limits_{-r}^{r}\int\limits_0^t q(x+\tau)u_0(x+\tau)\sin(\mu(\tau-t))d\tau\sin\left(\mu(|t|-r)\right)e^{i\mu r}dtdr. \quad (17)$$

Вычисляя два интеграла, стоящих слева, и модуль каждого интеграла, стоящего справа в формуле (17), получим неравенство:

$$\left|\frac{u_0(x)}{4}\left(e^{2i\mu R}\left(\frac{R}{2i\mu}+\frac{1}{4\mu^2}\right)-\frac{1}{4\mu^2}-\frac{R^2}{2}\right)+u_1(x)\left(\frac{e^{2i\mu R}-1}{4i\mu}-\frac{R}{2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_1\right\|_{L_2(K')} + \frac{C_6}{|\mu|\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_1\right\|_{L_2(K')} + 0 + \frac{C_7}{|\mu|\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_0(x)\right\|_{L_2(K')}.$$

Или:

$$\left|\frac{u_0(x)}{4}\left(e^{2i\mu R}\left(\frac{R}{2i\mu}+\frac{1}{4\mu^2}\right)-\frac{1}{4\mu^2}-\frac{R^2}{2}\right)+u_1(x)\left(\frac{e^{2i\mu R}-1}{4i\mu}-\frac{R}{2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_8}{2\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_1\right\|_{L_2(K')} + \frac{C_7}{|\mu|\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_0(x)\right\|_{L_2(K')}. \quad (18)$$

Вернемся к рассмотрению формулы (17). Проинтегрируем полученное равенство по r в пределах от 0 до $2R$. Получим:

$$\left|\frac{u_0(x)}{4}\left(e^{4i\mu R}\left(\frac{R}{i\mu}+\frac{1}{4\mu^2}\right)-\frac{1}{4\mu^2}-2R^2\right)+u_1(x)\left(\frac{e^{4i\mu R}-1}{4i\mu}-R\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_8}{2\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_1\right\|_{L_2(K')}+\frac{C_7}{|\mu|\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_0(x)\right\|_{L_2(K')}. \quad (19)$$

Проводя несложные рассуждения, из оценок (18) и (19) можно получить неравенство (13).

Остается установить вспомогательную оценку (14). Фиксируем произвольные связные компакты K и K' интервала G такие, что K содержится строго внутри K'. Пусть $K=[a,b]$, $K'=[a',b']$, $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ – середина компакта K, ε – положительное число, удовлетворяющее условию $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$.

Воспользуемся формулой, полученной В.А.Ильиным (см. [1], формула 47):

$$\left\|u_0\right\|_{L_2(K)}\leqslant C_5\left|\lambda\right|^2\left\|u_1\right\|_{L_2(K')}+C_6\left\|u_0\right\|_{L_2(K')}, \quad (20)$$

где $K=[a,b]$, $K'=[a',b']$, $K_\varepsilon=[a+\varepsilon,b+\varepsilon]$ и $\varepsilon<\dfrac{b-a}{6}$. Возьмем в оценке (13) вместо компакта K – компакт K_ε, а вместо K' – K и подставим в (20), учитывая, что для всех $\operatorname{Im}\mu>\mu_0$ справедливо неравенство:

$$1-O\left(\frac{1}{|\mu|\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\right)\geqslant\alpha>0$$

и замечая, что $\left|\lambda\right|^2=\left|\mu\right|^4$, придем к доказываемой оценке (14).

Теперь, когда вывод вспомогательных оценок (13) и (14) завершен, укажем, как из этих оценок получается основная оценка (12).

Рассмотрим систему произвольных связных компактов K, K', K'', ... интервала G, каждый последующий из которых содержит строго внутри себя предыдущий. Для компактов K' и K'' оценка (14) имеет вид

$$\left\|u_0\right\|_{L_2(K')}\leqslant C_4\left|\mu\right|^4\left\|u_1\right\|_{L_2(K'')}. \quad (21)$$

Используя (21) для оценки последнего члена в (13), получим, что

$$\left\|u_0\right\|_{L_2(K')}\leqslant C_9\frac{\left|\mu\right|^3}{\sqrt{\operatorname{Im}\mu}}\left\|u_1\right\|_{L_2(K'')}. \quad (22)$$

Поскольку K и K'' – произвольные связные компакты интервала G, первый из которых содержится строго внутри второго, то в оценке (22) можно заменить K на K'. Получим аналог формулы (14), но коэффициент перед $\left\|u_1\right\|_{L_2(K')}$ – значительно "улучшен". Продолжая таким образом начатый процесс, получим формулу (12).

Для вывода оценок (5), (6), (7) и (8) применим метод математической индукции. Итак, предположим, что эти оценки справедливы для всех номеров от

1 до некоторого $k \geqslant 1$, и докажем, что в таком случае эти оценки справедливы и для следующего номера $k+1$. Так как по предположению индукции оценка (5) справедлива для всех ноомеров от 1 до некоторого $k \geqslant 1$, то, последовательно записывая эту оценку для номеров $k, k-1, ..., k-(j-1)$, где j – целое положительное число, не превосходящее k, и, учитывая произвольность связных компактов K и K', первый из которых содержится строго внутри второго, придем к оценке

$$\|u_{k-j}\|_{L_2(K)} \leqslant \frac{\widetilde{C}}{\sqrt{\operatorname{Im}\mu^j}} \cdot \|u_k\|_{L_2(K')} \, (j=1,2,...,k). \tag{23}$$

Следуя схеме вывода неравенств (9), (10), (13), (14), и, воспользовавшись индукционной гипотезой (23), нетрудно получить требуемые оценки (5) – (8).

Замечание 1: Вопрос о том, являются ли данные оценки улучшаемыми в смысле порядка по $|\operatorname{Im}\mu|$, пока остается открытым.

Замечание 2: В работе [3] была получена оценка точная по порядку и при невыполнении условия Карлемана. В этой оценке L_2-норма корневой функции дифференциального оператора четного порядка по компакту K оценивается через L_2-нормы по компакту K' (где $K \subset K'$) всех корневых функций, стоящих в цепочке перед оцениваемой функцией. И в случае $k=0$ эта оценка является более точной, нежели чем полученная в данной работе оценка (7).

Автор выражает глубокую благодарность В.Д.Будаеву за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

Литература

[1] Ильин В.А. // Дифференциальные уравнения, 1980, Т.16, №5, с.771-794.

[2] Ильин В.А. // Дифференциальные уравнения, 1980, Т.16, №6, с.980-1009.

[3] Будаев В.Д. // Дифференциальные уравнения, 1992, №8, с.1454-1456.

[4] Тихомиров В.В. // Докл. АН СССР, 1983. Т.273, №4, с.807-810.

[5] Ломов И.С. // Дифференциальные уравнения, 1982, Т.18, №10, с.1684-1693.

[6] Будаев В.Д. Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. Дисс. док. физ.-мат. наук. – Москва, МГУ, 1993.

[7] Керимов Н.Б. Базисность и равномерная минимальность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. Дисс. док. физ.-мат. наук. – Москва, МГУ, 1996.

[8] Курбанов В.М. Распределение собственных значений и сходимость биортогональных разложений по корневым функциям обыкновенных дифференциальных операторов. Дисс. док. физ.-мат. наук. – Москва, МГУ, 1999.

[9] Капустин Н.Ю. // Докл. АН СССР, 1985. Т.280, №6, с.1293-1297.

[10] Капустин Н.Ю., Макин А.С. // Докл. АН СССР, 1985. Т.283, №2, с.278-280.

УДК 517.518.23

RWK-ПОТЕНЦИАЛЫ СМЕШАННОГО ТИПА С ОДНОРОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Шишкина Э.Л.
Воронежская Государственная Технологическая Академия
Воронеж
e-mail: ShishkinaEl@mail.ru

В работе [1] были рассмотрены интегральные операторы типа потенциалов, порожденные многомерным обобщенным сдвигом. В данной работе получено обобщение некоторых результатов из [1] рассмотрением сдвига смешанного вида, то есть по части переменных действуют обобщенные сдвиги интегральной природы, приспособленные для работы с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя, а по другой части переменных – обычные. Частично результаты этой работы ранее анонсировались в [2].

1. Основные определения

Пусть $\mathbb{R}_N^+$ часть евклидова пространства $\mathbb{R}_N$ точек $x{=}(x',x'')$, $x'{=}(x_1,...,x_n)$, $x''{=}(x_{n+1},...,x_N)$, определенная неравенствами $x_1>0,...,x_n>0$. Обозначим C_{ev}^∞ множество непрерывных на $\mathbb{R}_N^+$ функций, четных по каждой из первых n переменных и бесконечно дифференцируемых на $\overline{\mathbb{R}}_N^+$. Отнесем к множеству основных функций S_{ev} все функции класса C_{ev}^∞, убывающие при $|x|\to\infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Очевидно, что S_{ev} – линейное пространство. Соответствующий класс распределений, порожденный весовой линейной формой

$$(f,g)_\gamma=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} f(x)g(x)\prod_{k=1}^n x_k^{\gamma_k}\,dx,$$

где $\gamma{=}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел, будем обозначать S'_{ev}.

В работе используется смешанное преобразование Фурье-Бесселя следующего вида (см. [3]):

$$F_B[f](\xi)=\widehat{f}(x)=\int\limits_{R_N^+} f(x)\prod_{m=1}^n j_{\frac{\gamma_m-1}{2}}(x_m\xi_m)\,e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}\prod_{k=1}^n x_k^{\gamma_k}\,dx\,.$$

Здесь j_ν-функция, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν равенством $j_\nu(x_m)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x_m^\nu}\,J_\nu(x_m)$, $\nu>-1/2$. Для $f\in S_{ev}$ это преобразование обратимо и обратное преобразование Фурье-Бесселя задается равенством $F_B^{-1}[\widehat{f}](x){=}f(x)=\frac{2^{N-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\,F_B[\widehat{f}](-x)$ (см. [3]).

Многомерный оператор Пуассона $\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}$ действует на интегрируемые функции, четные по каждой из первых n переменных, по формуле (см. [3])

$$\mathcal{P}_{x'}^{\gamma}[f(x)]{=}C(\gamma)\int\limits_0^{\pi}...\int\limits_0^{\pi} f(x_1\cos\alpha_1,...,x_n\cos\alpha_n,x'')\prod_{i=1}^{n}\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha,$$

$$d\alpha=\ d\alpha_1\cdot...\cdot d\alpha_n,$$

константа имеет вид $C(\gamma)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$.

Мы будем рассматривать интегральный оператор типа RWK-потенциала порядка $\alpha>0$, характеристика которого Θ – однородная функция:

$$(\mathbf{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}\phi)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+} T_x^y\left[\frac{\Theta\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{N+|\gamma|-\alpha}}\right]\phi(y)\prod_{k=1}^{n}y_k^{\gamma_k}\,dy,\quad \alpha>0, \tag{1}$$

где

$$(T^y f)(x)=C(\gamma)\int\limits_0^{\pi}...\int\limits_0^{\pi} f(\sqrt{x_1^2-2x_1y_1\cos\alpha_1+y_1^2},...$$

$$...,\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha_n+y_n^2},x''-y'')\prod_{i=1}^{n}\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\,d\alpha$$

– обобщенный смешанный сдвиг (см. [3]). Далее, для простоты, будем предполагать, что Θ – бесконечно дифференцируемая функция вне начала координат, четная по каждой из переменных $x_1,...,x_n$.

В образах Фурье-Бесселя оператор (1) представляется следующим образом

$$F_B[(\mathbf{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}\phi)(x)](\xi)=\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)\widehat{f}(\xi),$$

где $\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)$ – его символ, определяемый как преобразование Фурье-Бесселя ядра оператора (1):

$$\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)=F_B\left[\Theta\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-N-|\gamma|+\alpha}\right](\xi). \tag{2}$$

2. Вычисление символа $\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)$ при $0<\alpha<1$

Теорема 1. При $\alpha\in(0,1)$ для символа оператора $\mathbf{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}$ имеют место представления

$$\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)=\Gamma(\alpha)\int\limits_{S_N^+}\Theta(\sigma)\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(-i\langle\sigma,\xi\rangle)^{-\alpha}\prod_{k=1}^{n}\sigma_k^{\gamma_k}\,dS(\sigma), \tag{3}$$

и

$$\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)=C(\gamma)\Gamma(\alpha)\int\limits_{S_{N+n}^+}\widetilde{\Theta}(\widetilde{\sigma})(-i\langle\widetilde{\sigma},\widetilde{\xi}\rangle)^{-\alpha}\prod_{k=1}^{n}\widetilde{\sigma}_{2k}^{\gamma_k-1}\,dS(\widetilde{\sigma}), \tag{4}$$

где S_N^+ и S_{N+n}^+ – части единичных сфер, с центром в начале координат, принадлежащие пространствам $\mathbb{R}_N^+$ и $\mathbb{R}_{N+n}^+=\{x\in\mathbb{R}_{N+n}:x_{2i}>0, i=\overline{1,n}\}$ соответственно,

$$\widetilde{\Theta}(\widetilde{\sigma})=\Theta(\sqrt{\widetilde{\sigma}_1^2+\widetilde{\sigma}_2^2},...,\sqrt{\widetilde{\sigma}_{2n-1}^2+\widetilde{\sigma}_{2n}^2},\sigma''),\tag{5}$$

$\widetilde{\sigma}\in\mathbb{R}_{N+n}^+, |\widetilde{\sigma}|=1$ и введено обозначение $(-iy)^{-\alpha}=y^{-\alpha}e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}sign(y)}$.

Доказательство. Используя равенство $\prod\limits_{m=1}^{n} j_{\frac{\gamma_m-1}{2}}(x_m\xi_m)\,e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}=\mathcal{P}_{\xi'}^{\gamma}(e^{-i\langle x,\xi\rangle})$ (см. [3]), из (2) получим

$$\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\frac{\Theta\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{N+|\gamma|-\alpha}}\prod_{m=1}^{n}j_{\frac{\gamma_m-1}{2}}(x_m\xi_m)\,e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}\prod_{k=1}^{n}x_k^{\gamma_k}\,dx=$$

$$=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_N^+}\frac{\Theta\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{N+|\gamma|-\alpha}}\;e^{-i\langle x'',\xi''\rangle}\int\limits_0^{\pi}...\int\limits_0^{\pi}e^{\left(-i\sum\limits_{m=1}^{n}x_k\xi_m\cos\beta_m\right)}\prod_{k=1}^{n}x_k^{\gamma_k}\,\sin^{\gamma_k-1}\beta_k\;d\beta\;dx.\tag{6}$$

Произведем сферическое преобразование координат $x=\rho\sigma$, $\rho=|x|$, $\sigma\in S_N^+=\{\sigma:\,|\sigma|=1,\,\sigma_i>0,\,i=1,2,...,n\}$, тогда

$$\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)=$$

$$=C(\gamma)\int\limits_{S_N^+}\Theta(\sigma)\int\limits_0^{\pi}...\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty}\rho^{\alpha-1}e^{-i\rho\left(\sum\limits_{m=1}^{n}\sigma_m\xi_m\cos\beta_m+\langle\sigma'',\xi''\rangle\right)}\,d\rho\prod_{k=1}^{n}\sigma_k^{\gamma_k}\,\sin^{\gamma_k-1}\beta_k\,d\beta\,dS(\sigma).$$

Для вычисления внутреннего интеграла используются формулы 3.761.4 и 3.761.9 из справочника [4]. В результате получим (3).

Если в (6) произведем замену переменных

$$\widetilde{x}_{2k-1}=x_k\cos\beta_k,\qquad\widetilde{x}_{2k}=x_k\sin\beta_k,\qquad k=1,2,...,n;\qquad 0\le\beta_k\le\pi,$$

то

$$\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}_{N+n}^+}e^{-i\langle\widetilde{x},\widetilde{\xi}'\rangle}\frac{\Theta\left(\frac{\sqrt{\widetilde{x}_1^2+\widetilde{x}_2^2}}{|\widetilde{x}|},...,\frac{\sqrt{\widetilde{x}_{2n-1}^2+\widetilde{x}_{2n}^2}}{|\widetilde{x}|},\frac{x''}{|x''|}\right)}{|x|^{N+|\gamma|-\alpha}}\prod_{k=1}^{n}\widetilde{x}_{2k}^{\gamma_k-1}\,d\widetilde{x},$$

где $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_{2n},x'')\in\mathbb{R}_{N+n}^+=\{\widetilde{x}\in\mathbb{R}_{N+n}:\widetilde{x}_{2i}>0,i=\overline{1,n}\}$, $\widetilde{\xi}=(\xi_1,0,\xi_2,0,...,\xi_n,\xi'')\in\mathbb{R}_{N+n}^+$. Произведя сферическое преобразование координат $\widetilde{x}=\rho\widetilde{\sigma}$, $|\widetilde{x}|=\rho$ и используя обозначение (5), получим

$$\mathfrak{U}_{\alpha,\Theta}^{\gamma}(\xi)=C(\gamma)\int\limits_{S_{N+n}^+}\widetilde{\Theta}(\widetilde{\sigma})\prod_{k=1}^{n}\widetilde{\sigma}_{2k}^{\gamma_k-1}\int\limits_0^{\infty}e^{-i\rho\langle\widetilde{\sigma},\widetilde{\xi}\rangle}\rho^{\alpha-1}\,d\rho\,dS(\widetilde{\sigma}).$$

Откуда, также как при доказательстве формулы (3), получаем (4). Доказательство закончено.

3. Вычисление символа $\mathfrak{U}^{\gamma}_{\alpha,\Theta}(\xi)$ при $\alpha \geq 1$

При распространении равенств (4) и (5) на значения $\alpha \geq 1$ возникают существенные трудности, поскольку интегралы, находящиеся в правых частях равенств (4) и (5), расходятся при $\alpha \geq 1$. Такая же ситуация возникла в [5] при исследовании классических обобщенных потенциалов Рисса и мы используем методику этой работы.

Теорема 2. Символ $\mathfrak{U}^{\gamma}_{\alpha,\Theta}(\xi)$ интегрального оператора типа В-потенциала Рисса при
$1 \leq \alpha < N + |\gamma|$ вычисляется по формуле:

$$\mathfrak{U}^{\gamma}_{\alpha,\Theta}(\xi) = \Gamma(\alpha)\, f.p. \int\limits_{S^+_N} \Theta(\sigma)\mathcal{P}^{\alpha}_{\xi'}(-i\langle\sigma,\xi\rangle)^{-\alpha} \prod_{m=1}^{n} \sigma_m^{\gamma_m}\, dS(\sigma), \tag{7}$$

где $f.p. \int\limits_{S^+_N} \Theta(\sigma)\mathcal{P}^{\gamma}_{\xi'}(-i\langle\sigma,\xi\rangle)^{-\alpha}(\sigma')^{\gamma}\, dS(\sigma)$ – конечная часть сингулярного интеграла по Адамару.

Доказательство. Если $\phi(y) \in S_{ev}$, то очевидно, что и $T^y_x[\phi(x)] \in S_{ev}$. Имеем

$$(\mathbf{U}^{\gamma}_{\alpha,\Theta}\phi)(x) = \left(\Theta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{-N-|\gamma|+\alpha}, T^y_x[\phi(x)]\right)_{\gamma} = \left(\Theta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{-N-|\gamma|+\alpha}, \psi\right)_{\gamma}.$$

Преобразование Фурье-Бесселя функции $\Theta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{-N-|\gamma|+\alpha}$, в смысле распределений S'_{ev}, определяется равенством

$$\left(F_B\left[\Theta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{-N-|\gamma|+\alpha}\right], \psi\right)_{\gamma} = \left(\Theta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{-N-|\gamma|+\alpha}, \widehat{\psi}\right)_{\gamma}, \qquad \psi \in S_{ev}.$$

Выражения справа и слева этого равенства при $\psi \in S_{ev}$ – аналитические функции параметра α в области $0 < \alpha < N + |\gamma|$. При $0 < \alpha < 1$ символ RWK-потенциала $\mathfrak{U}^{\gamma}_{\alpha,\Theta}(\xi)$ вычисляется по формулам (4) или (5). Для построения символа при $1 \leq \alpha < N + |\gamma|$ воспользуемся методом аналитического продолжения, взяв в качестве такого продолжения конечную часть по Адамару интеграла (4) при $1 \leq \alpha < N + |\gamma|$.

В силу единственности аналитического продолжения символ RWK-потенциала $\mathfrak{U}^{\gamma}_{\alpha,\Theta}(\xi) = F_B\left[\Theta\left(\frac{y}{|y|}\right)|y|^{-N-|\gamma|+\alpha}\right]$ является аналитической функцией параметра α для любого $0 < \alpha$. Доказательство закончено.

Замечание 1. Отметим, что f.p. интеграла в (7) вычисляется по формуле

$$f.p. \int\limits_{S^+_N} \Theta(\sigma)\mathcal{P}^{\gamma}_{\xi'}(-i\langle\sigma,\xi\rangle)^{-\alpha}(\sigma')^{\gamma}\, dS = \frac{|S^+_{N+n-1}|_{|\gamma|-1}}{|\xi|^{\alpha}} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1}\left[M^{\gamma}_{\Theta}(\xi',p) - \sum_{k=0}^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{p^{2k}}{2k!} \frac{\partial^{2k} M^{\gamma}_{\Theta}(\xi',p)}{\partial p^{2k}}\bigg|_{p=0}\right] \frac{(1-p^2)^{\frac{N+|\gamma|-3}{2}}}{(ip)^{\alpha}}\, dp +$$

$$+\frac{|S^+_{N+n-1}|_{|\gamma|-1}}{|\xi|^\alpha}\sum_{k=0}^{\frac{\alpha-1}{2}}\mathcal{T}(N,\gamma,\alpha,k)\frac{1}{2k!}\frac{\partial^{2k}M^\gamma_\Theta(\xi',p)}{\partial p^{2k}}\bigg|_{p=0},$$

из [2], в которой $M^\gamma_\Theta(\xi',p)$ – весовое среднее значение функции $\widetilde{\Theta}(\widetilde{\sigma})$ на плоском сечении части сферы, а константа имеет вид

$$\mathcal{T}(N,\gamma,\alpha,k)=\begin{cases}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k-\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|+2k-\alpha}{2}\right)}, & \alpha\neq 2k+1,\ k=0,1,2,...;\\ \frac{(-1)^k k!\pi}{\Gamma(k+1)}, & \alpha=2k+1,\ k=0,1,2,....\end{cases}$$

Замечание 2. В случае когда $\Theta(\sigma)\in C^\infty_{ev}$, то есть если характеристика может быть представлена равномерно сходящимся рядом по весовым сферическим функциям (эти функции введены в [6], а свойства этих функций описаны в [7]):

$$\Theta(\sigma)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m Y^\gamma_m(\sigma),\ \ \sigma\in\overline{S}^+_N,$$

то для символа интегрального оператора типа B-потенциала имеет место следующее представление

$$\mathfrak{U}^\gamma_{\alpha,\Theta}(\xi)=\Gamma(\alpha)\sum_{m=0}^{\infty}a_m\lambda(N,\gamma,\alpha,m)Y^\gamma_m(\sigma),$$

в области $\alpha>0$, где

$$\lambda(N,\gamma,\alpha,m)=\frac{|S^+_{N-1}|_\gamma}{C_m^{\frac{N+|\gamma|-2}{2}}(1)}\cdot\frac{\Gamma(N+|\gamma|+m)\Gamma(2q+m+1)\Gamma\left(\frac{N+|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)}{2^{m+1}\Gamma(N+|\gamma|)\Gamma(2q+1)m!\Gamma(m+\frac{N+|\gamma|}{2}+q+1)}.$$

Литература

[1] Ляхов Л.Н., О символе интегрального оператора типа B-потенциала с однородной характеристикой // ДАН, 1996. Т.315, №2. – С.161-165.

[2] Ляхов Л.Н., Шишкина Э.Л. Обобщенные B-потенциалы Рисса смешанного типа // ДАН, 2006. Т.406, №3. С.1-5.

[3] Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические задачи. – М.: Наука, 1997. – 199 с.

[4] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.

[5] Самко С.Г. Пространства $L_{p,r}(R_n)$ и гиперсингулярные интегралы // Stud. Math. 1977. Vol.61, №3, P.193-230.

[6] Ляхов Л.Н., Об одном классе сферических функций и сингулярных псевдодифференциальных операторов // ДАН, 1983. Т.272, №4. – С.781-784.

[7] Ляхов Л.Н., Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщенным сдвигом: Науч. изд-е, ВГТА, 1997. – 145 с.

Актуальные проблемы математического образования

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Афанасьев А.Е.
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова
Институт математики и информатики
Якутск
e-mail: mpm_imi@sitc.ru

Важнейшим условием обновления содержания образования, сориентированного на раскрытие творческого потенциала учащихся, является развитие самостоятельной творческой деятельности учащихся как важнейшее условие самореализации и развития потенциальных возможностей личности в процессе ее формирования и отказ от засилия логизированных форм и вербальных методов обучения. С этих позиций, на наш взгляд, актуальным является проблема организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся на уроке как главный путь воспитания самостоятельности личности.

К сожалению, нередко мы являемся свидетелями того, что на уроках математики царит засилие монологических излияний учителя, усвоение знаний без размышлений. А ведь недаром считают, что "мозг хорошо устроенный" ценится больше, чем "мозг хорошо наполненный". У человека, постоянно воспитывающегося в условиях репродуктивной деятельности, формируется инертный тип мышления, он лишен любознательности и творческой активности, у него не формируется умение мыслить самостоятельно, творчески, он не способен выйти за пределы ситуации, найти нестандартные решения и взять на себя ответственность за их принятие.

С другой стороны, в подавляющем большинстве учебников содержание школьного курса математики строится по законам формальной логики (т.е. представлено в виде понятий, формул, суждений, умозаключений) и ***ориентировано на усвоение знаний в готовом виде***, т.е. вывод формулы, правило или понятие дается ребенку в готовом виде, которых ученик читает, а не изучает с карандашом, бумагой и напряжением мысли, и, поэтому ***сам процесс поиска и получения их не раскрывается***. Такое обучение вводит ученика в процесс познания с завершающего этапа развития научного понятия, когда оно приобретает форму готового результата, где процесс добывания и открытия знаний "угасает" в своем продукте. Такой готовый "продукт знаний" ***может быть лишь воспроизведен и усвоен***, но он не может стать орудием развития мышления. Готовые формы знаний предполагают ***монологическое изложение*** их учителем. Поэтому не удивительно, что на уроке, как правило, говорит в основном учитель, а учащимся, подающим отдельные реплики для подтверждения мысли учителя, отводится роль пассивных слушателей.

Гиперболизация использования на уроках монологической формы изложения материала, которая реализует единственную точку зрения или взгляд, оценку, чаще всего принадлежащую учителю, – одно из главных препятствий интеллектуального развития детей.

Необходимость в мышлении возникает лишь при наличии самостоятельной поисковой ситуации в условиях коллективной деятельности учащихся и учителя, которая вовлекает ученика в активный мыслительный процесс, так как появляется задача, которую необходимо решить и найти в ней недостающее звено. Организация совместного поиска при решении задачи, рассмотрение и сравнение различных суждений, точек зрения, их столкновение, борьба мнений, которые высказываются детьми, придают уроку ***творческий характер***. На таком уроке учитель и ученик выступают не в роли отправителя и получателя сообщения, а становятся партнерами в совместном поиске, собеседниками, соучастниками общего дела. В этом случае принципиально меняется роль ученика на уроке, он становится активным участником познания, не усваивает знания в готовом виде, а самостоятельно "добывает" их, выявляет, вычленяет их с помощью мышления. Такой урок ведет ребенка по пути развития его самостоятельности и творческой активности.

На современном этапе развития психолого-педагогической науки использование школой активного внедрения самостоятельного поиска учащимися предметных знаний, реализующего различные точки зрения и развивающего самостоятельность в мышлении учащихся, предусматривает определенную организацию учебной деятельности школьников, обеспечение их взаимодеятельности как системы "учитель-ученики-ученик", которая требует не только учета индивидуально-психологических особенностей личности, но и специфику деятельности индивида, взаимодействия учителя и ученика, ученика и класса, учителя-учеников-ученика. Поэтому целенаправленная организация учебно-воспитательного процесса включает и самостоятельную познавательную деятельность учащихся, и процесс обучения с учетом индивидуального различия школьников, являясь определяющим фактором формирования гармонической личности, ее потребностей, мотивов, систем знаний, умений и навыков, творческой активности и самостоятельности.

Учитывая вышесказанное мы предприняли попытку исследовать организацию самостоятельной познавательной деятельности учащихся на уроках математики, применяемую в определенной системе при сформулировании правил, выводах формул и поиске методов решения задач, как одного из путей достижения высокого развивающего эффекта в обучении по математике.

Организуя самостоятельную познавательную деятельность учащихся на уроках математики, мы сознавали, что часть формул и методов решения задач нужно изучить традиционным сообщающим способом, что самостоятельная познавательная деятельность учащихся не может и не должна стать единственным путем в обучении: выбор конкретного подхода зависит и от учебного материала, и от задач, которые ставит учитель. Анализируя программный материал по математике, например, в IX классе, мы выявили, что имеется достаточный материал, при изучении которого можно организовать самостоятельную познавательную деятельность учащихся на уроке.

Практика показывает, что нередко учителя математики довольно часто при изучении разных тем организуют на уроках самостоятельную познавательную деятельность на основе создания поисковых ситуаций. Однако чаще всего после создания таких ситуаций учитель сам сообщает новые знания. Такой способ подачи нового материала ***не обеспечивает активности мыслительной деятельности большинства***, а тем более ***всех учащихся***. Это происходит потому, что, как правило, поставленную проблему решают и раскрывают классу сильные учащиеся, в то время, как средние и слабые только приступают к решению. Значит, в таких условиях самостоятельно усваивают знания в основном сильные учащиеся, остальные получают их в готовом виде от своих товарищей, у них воспроизводящая деятельность занимает значительный удельный вес в процессе обучения и характеризуется самостоятельной работой, появляющейся либо в абсолютном, либо в преобладающем воспроизведении знаний, умений и навыков. Таким образом, несмотря на то, что организация поисковых ситуаций в целом дает повышение эффективности обучения, она не активизирует умственную деятельность большинства учащихся.

Как показывает практика для обеспечения развития самостоятельной познавательной деятельности учащихся в обучении необходимо ***оптимальная последовательность*** поисковых ситуаций, их определенная система. Поэтому, по ходу опытной работы, проведенной в IX классах СШ №4, СШ №6 г. Нерюнгри в 2004-2005 уч. гг., с целью организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся, мы разработали разные уровни самостоятельности, и на их основе по каждому заданию (формуле, методу решения уравнений, неравенств) были сформулированы задания на ***пяти уровнях самостоятельности***. Уровни самостоятельности отличаются степенью обобщенности задачи, предложенной учащимся для решения, или степенью помощи, подсказки со стороны учителя. Пять уровней самостоятельности (высший, высокий, средний, слабый, низкий) по сути дела представляют собой: 1) несколько вариантов одного и того же задания, отличающиеся по степени обобщенности; 2) одно и то же задание для всех, но имеющее систему подсказок на каждом уровне самостоятельности. Начиная с самого высокого уровня и постепенно снижая трудности задания, учитель помогает каждому ученику справиться с заданием, корректирует ход решения задания каждым учеником.

Сущность уровней самостоятельности заключается в следующем. Например, задача: “При каких значениях параметра a оба корня уравнения $ax^2 - 2(2a-1)x + 2 - 3a = 0$ больше 1?”, основанная на системе подсказок и сформулированная на: а) высшем уровне, не содержит подсказки; б) высоком уровне содержит одну подсказку: “Геометрически как можно представить данную задачу?”; в) среднем уровне появляется вторая подсказка: “Что можно сказать об оси симметрии параболы?”; г) слабом уровне – третья подсказка: “Что можно сказать о значении данного квадратного трехчлена при $x = 1$?”; д) низком уровне, содержит ряд последовательно предлагаемых заданий и вопросов, которые постепенно подводят учащихся к решению предложенной задачи.

Организация самостоятельной познавательной деятельности учащихся проводится по ***следующей схеме***. Сначала учитель ставит общую задачу, затем предлагает классу задание, сформулированную на высшем уровне. В случае затруднения каждый ученик последовательно получает соответствующие подсказки до тех пор, пока он решит предложенную задачу. Чтобы определить, кто в состоянии самостоятельно справиться с заданием на каждом из пяти уровней, как ученик шел к правильному ответу, учащиеся фиксируют результаты своих попыток, записывая его на листочках, ставя порядковый номер уровня самостоятельности. Это дает возможность учителю контролировать работу каждого ученика на всех этапах решения предложенного задания.

Такая организация работы отнимает немало времени, однако она рациональна:

1) все дети, используя помощь учителя, самостоятельно ищут пути решения предложенного задания;

2) учитель имеет возможность проанализировать попытки, ход самостоятельного поиска путей решения задания каждым учеником, т.е. выявить индивидуальные особенности мыслительной деятельности;

3) каждый ученик убеждается в том, что если будет внимательным, подумает, применит имеющиеся знания, то самостоятельно справится с заданием;

4) подсказки учителя направляют мысль ученика, помогают овладеть мыслительными операциями: сравнением, анализом, синтезом, обобщением, при этом ученики, которые овладели мыслительными операциями, упражняются в них, а другие обучаются им постепенно;

5) воспитываются ценные качества личности – способность к напряженному умственному труду, самостоятельность, пытливость, трудолюбие.

6) формируется и совершенствуется математическая культура;

7) при такой организации урока нет изначального деления учащихся на "сильных", "средних" и "слабых" – задание всем одинаковое; конечный результат – вывести формулу или решить задачу на одном из уровней самостоятельности – показатель уровня самостоятельности и развития мыслительной деятельности учащихся.

В случаях, когда отдельные ученики не справляются с заданием ни на одном уровне самостоятельности, учитель имеет возможность определить характер затруднений, их причины (отсутствие опоры на прежние знания, непоследовательность мыслительных операций и т.п.) и своевременно помочь в зависимости от характера этих затруднений; вместе с тем он имеет возможность формировать у детей соответствующие операции, развивать мышление.

Приведем ***результаты*** (в %%) достигнутого уровня самостоятельности на каждом этапе опытно-экспериментальной работы.

Этапы	***Уровни самостоятельности***				
эксперимента	***Высший***	***Высокий***	***Средний***	***Слабый***	***Низкий***
I	3,0	9,1	15,2	21,2	51,5
II	9,1	15,2	18,2	24,2	33,3
III	21,2	24,2	24,2	18,2	12,1
IV	27,2	33,3	18,2	15,2	6,1

Как видно из приведенных данных, количество учащихся, справившихся с заданиями на высшем и высоком уровнях, увеличивается от этапа к этапу. Обнаружилось, что на I этапе (I четверть) только незначительное количество учащихся сумело самостоятельно справиться с заданиями, притом на низком уровне, т.е. тогда, когда было дано несколько подсказок или почти полная информация о выполнении заданий. На II этапе (II четверть) и особенно в III этапе (III четверть) процент значительно увеличивается. Наиболее высокий процент самостоятельного выполнения заданий соответствует к концу IV этапа обучения. Значит, если учащиеся имеют знания, на основе которых можно приобрести новые, то под руководством учителя они используют их и способны к обобщению, переносу знаний.

В процессе обучения увеличиваются показатели открытия на высоких уровнях самостоятельности: на I этапе – 12,1%, на II – 24,3%, на III – 45,4%, в IV – 60,5% и соответственно значительно снижаются показатели на низком уровне самостоятельности. Это свидетельствует об овладении приемами умственной деятельности, развития самостоятельности и активности мышления. Итак, предложенный подход в обучении позволяет в какой-то мере решить проблему управления мыслительной деятельностью каждого учащегося в условиях классно-урочной системы обучения.

Нами установлено, что учащиеся, которые справились с заданиями на высоких и средних уровнях, т.е. с большей долей самостоятельности, не допускают ошибок при решении более сложных заданий сразу после вывода формул. Те учащиеся, которые самостоятельно справились с заданиями даже на низком уровне, с большей помощью учителя, во всех письменных работах допускают меньше ошибок, чем те, которые самостоятельно не справились с заданиями.

Сравнение результатов усвоения учебного материала обучения на основе самостоятельной познавательной деятельности и традиционного обучения позволяет заключить, что при новом подходе его изучения обеспечивает более высокий уровень и устойчивость сформированных навыков. Другими словами, такая форма организации обучения развивает умение мыслить и применять знания на практике, т.е. обеспечивает математическую зоркость в поиске нестандартных подходов решения задач, подведение ее под соответствующий метод решения, выработку математической культуры.

ОБ ЭНЕРГИИ ЗАБЛУЖДЕНИЯ

Виденский В.С.

Российский государственный педагогический
университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: ilya@viden.lek.ru

1. Словосочетание "Энергия заблуждения" (кратко ЭЗ) принадлежит Л.Н.Толстому, однако, читатель не найдет такого выражения ни в "Севастопольских рассказах", ни в "Войне и мире", ни в "Анне Карениной", и вообще ни в каком ином его художественном произведении. ЭЗ встречается в письме Л.Н. от 7 апреля 1878 года к Н.Н.Страхову (см. Полное собр. соч.):

“Все как будто готово, чтобы писать, исполнять свою земную обязанность, а не достает толчка веры в себя, в *важность дела*, не достает ЭЗ, земной стихийной энергии, которую выдумать нельзя. И нельзя начинать.”

Мотив заблуждения фигурировал и за год до того в письме от 22 марта 1877 года к А.А.Фету:

“Март, начало апреля самые мои рабочие месяцы и я очень продолжаю быть в *заблуждении*, что то, что я пишу очень важно, хотя и знаю, что через месяц мне будет совестно это вспомнить.”

Мое внимание к этой теме привлекла книга известного толстоведа В.Б.Шкловского “Энергия заблуждения”. Если бы не эта книга, то, вероятно, я никогда ничего не узнал бы про ЭЗ, так как обычно не читаю посмертно изданных писем великих людей. В.Б.Шкловский обсуждает вопрос о каких заблуждениях Льва Николаевича идет речь в его письмах. По-моему, его заключения ошибочны. Но я не намерен оспаривать его мнение об ЭЗ. Эта заметка не “Анти-Шкловский”.

Я попытаюсь здесь только объяснить как по-моему было бы правильно понимать слова ЭЗ и приведенные выше отрывки из писем Л.Н.Толстого. В них Лев Николаевич коснулся своего психологического состояния в момент творческого подъема и отметил, что при этом ему необходимо ощущение *важности* исполняемого дела, более того заведомое *преувеличение этой важности*. Впрочем, по завершению работы преувеличение нередко сменяется рефлексией и сомнением. По-видимому, в толстовском смысле заблуждением является значительная внутренняя переоценка важности дела, которая обеспечивает мобилизацию всех творческих сил, то есть создает ЭЗ. В обоих письмах Лев Николаевич говорит только об особенности свой личной работы. В действительности, сказанное им носит общий характер, хотя на это, к сожалению, даже нет намека. Несомненно, что для каждого, кто успешно занимается творческим трудом, ЭЗ необходима. Легко видеть, что в ЭЗ нуждаются поэты, композиторы или живописцы. Однако, на том, в какой мере ЭЗ необходима при исследованиях по математике стоит остановиться подробнее, так как похоже, что тут требуются пояснения и примеры.

2. В наследство от древнегреческой математики нам досталось несколько знаменитых открытых проблем. Многие века они считались вызовом человеческому уму, а решения их очень важным делом. Недостатка, ни в гениальных ученых, ни в ЭЗ не было. Причина неприступности проблем крылась в уровне развития математики, который оказался достаточным лишь к концу девятнадцатого века.

Обратимся к задаче о квадратуре круга. Она была известна и популярна примерно 2500 лет тому назад, еще при жизни Сократа. Она состоит в следующем: при помощи циркуля и линейки построить квадрат такой площади, как площадь данного круга. Иными словами, выбрав отрезок длины единица, построить отрезок длины π. В древних Афинах были весьма распространены легкомысленные разговоры о квадратуре круга и самонадеянные попытки решить проблему с ходу. Отголоски этой моды дошли наших дней. Например, нам известно, что в середине пятого века философ Анаксагор утверждал, что Солнце и звезды являются мертвыми пламенеющими камнями. Это противоречило традиционному взгляду. Светила считались вечными божественными существами, одушевленными и наделенными разумом. За безбожие Анаксагор, разумеется, был заключен в темницу, где, не теряя времени и мужества, принялся за квадратуру круга. Успеха он не достиг, но, к счастью, и не погиб. Его спас Перикл – друг и бывший ученик.

Нашлось место для квадратуры круга и в комедии Аристофана "Птицы" (поставлена в 414 г. до н. э. в Афинах на Великих Дионисиях – общегосударственном празднике). На сцене в пятом эписодии комедии появляется комик Метон с циркулем и изогнутой линейкой и намеревается перекроить круглую базарную площадь в квадратную. Начинается грубая балаганная клоунада и Метона прогоняют тумаками и подзатыльниками. Между прочим, это выпад против известного астронома и геометра по имени Метон, проживавшего в то время в Афинах. Что касается публики, наполнявшей театр, то многие понаслышке были знакомы со словами "квадратура круга" и весело смеялись, но почти никто не знал, в чем суть вопроса, возможно, в том числе и сам Аристофан.

Проблема квадратуры круга не имела прикладного значения. Она относилась к абстрактной математике, или, говоря, словами Пифагора, носила характер бескорыстного исследования истины. Для какой-либо практической цели греки могли вписать в окружность сколько угодно близкий правильный многоугольник и найти его площадь.

Удвоение куба – другая из дошедших до нас проблем. В отличие от предыдущей она, напротив, трактовалась как возникшая из прикладных нужд. Существовало несколько версий ее истории. Вот одна из них. Во время эпидемии чумы делоссцы обратились к оракулу, и он повелел им увеличить вдвое кубический жертвенник, то есть требовалось каждое ребро увеличить в $\sqrt[3]{2}$ раз. Построению этого числа придавалось серьезное значение. К задаче проявлял интерес Платон, ею занимались такие великие математики как Гиппократ Хиосский, Архит, Евдокс и Менехм. Они указали несколько различных плодотворных подходов для определения этого числа, но построить $\sqrt[3]{2}$ циркулем и линейкой, разумеется не удалось, что – как мы знаем теперь – невозможно. В дальнейшем были, между прочим, изобретены простые механизмы для приближенного проведения отрезка длиной $\sqrt[3]{2}$, но чистые математики такой результат не сочли сколько-нибудь удовлетворительным для науки. Проблема удвоения куба всегда воспринималась обществом и отдельными учеными как очень важная, и, соответственно, порождала ЭЗ.

Величайшим математиком Древней Греции был Архимед (287-212 до н. э.). Его бесконечная ЭЗ производила на окружающих неотразимое впечатление. Об его одержимости и сосредоточенности сочинялись забавные и любопытные анекдоты, которые оказались вечными. До сих пор их с удовольствием пересказывают учителя физики и математики на уроках в средней школе.

3. Древние греки умели решать квадратные уравнения, но к началу эпохи Возрождения не было достигнуто никакого прогресса в исследовании уравнений более высокой степени. Известный францисканский монах Лука Пачиоло издал в 1494 году в Венеции книгу "Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности". Это была одна из первых печатных книг по математике. Она вышла в свет всего через 40 лет после изобретения книгопечатания. В конце “Суммы” автор написал, что для решения кубических уравнений искусством алгебры еще не дан способ решения, как не дан способ квадратуры круга. В те времена слова ”квадратура круга”в обыденной речи образованных людей были просто синонимом “очень трудной задачи”. Ну, скажем, как в наши дни в гуманитарной среде “бином Ньютона”. Нет оснований предполагать, что Лука Пачиоло сознавал или предчувствовал связь проблемы решения уравнений высших степеней с квадратурой круга – это выяснилось только лет 400 спустя.

Уравнения третьей степени стали восприниматься как очень важные. Соответственно пробудилась значительная ЭЗ. Формулы для решения были найдены, но закипели такие страсти, что о них помнили всю вторую половину тысячелетия. Первым, кто решил проблему, был профессор математики в Болонском университете Сципион дель Ферро (1465-1526). Можно было бы ожидать, что он с гордостью воскликнул: “тоже мне квадратура круга!”, и поспешил опубликовать результат. Но, напротив – в стиле тех времен, он всю жизнь скрывал даже факт открытия и хранил его, как военную тайну. Впрочем, некоторые его ученики знали формулу. один из них после смерти дель Ферро вызвал в 1535 году на диспут известного итальянского математика Тарталью. Как и полагалось, он предложил ему заранее ряд вопросов, – это были уравнения третьей степени. Тарталья, который лихорадочно трудился перед турниром, благодаря колоссальной ЭЗ, нашел метод решения предложенных уравнений и победил в диспуте. Тарталья, очевидно, имея в виду дальнейшее участие в публичных диспутах, по примеру предшественника тоже сохранил в тайне найденный им способ. Кстати сказать, малоотличавшийся от способа самого дель Ферро.

Вскоре на исторической сцене появился Джироламо Кардано, и интрига приняла драматический характер. Великий ученый эпохи Возрождения, знаменитый миланский профессор медицины и математики Кардано, был глубоко убежден, что скрывать знания порочно. Наоборот, необходимо их распространять, писать и печатать книги обо всем, что нам известно. Он как раз писал книгу “Практика арифметики”, страстно желал и считал очень важным (ЭЗ) включить в нее правило для решения кубического уравнения в качестве замечательного достижения научной мысли. Однако, Тарталья не соглашался ничего ему сообщить и, тем более, не давал разрешения опубликовать свой результат в трактате чужого автора. Его скрытность продолжалась ровно 4 года. Все это время Кардано усердно пытался переоткрыть метод, но тщетно. В конце концов Кардано заманил Тарталью в Милан, встретился с ним вымолил у него туманные сведения в обмен на клятвенное уверение, что он тайну не выдаст. Кардано, вдохновляемый ЭЗ затратил огромный труд, чтобы осознать метод Тартальи, и сам не мало продвинулся вперед в исследовании кубических уравнений. Его молодой ученик Луиджи Феррари, человек феноменальных способностей и яростной горячности, творчески овладел методом и аналогичным образом дал решение уравнений четвертой степени. Прошло 10 лет, а Тарталья продолжал упорствовать и скрывать свое решение, ничего не печатая по поводу уравнений. Это превзошло терпение Кардано. В 1545 году Кардано издал новую книгу “Великое искусство или о правилах алгебры”; где опубликовал решения уравнений третьей и четвертой степени. Он не присвоил себе чести их открытия, но откровенно признал, что для третьей степени результат был получен дель Ферро, затем переоткрыт Тартальей, а решение уравнений четвертой степени принадлежит Феррари. В ответ Тарталья заклеймил Кардано навеки как клятвопреступника. Теперь формула для решения уравнений третьей степени носит имя Кардано, который ее сообщил, а те, кто ее скрывал, лишь изредка упоминаются в примечаниях.

4. Естественно встала проблема решения в радикалах уравнений степени ≥ 5. Она в еще большей мере оказалась вызовом человеческому уму и провоцировала ЭЗ в течение трех столетий. Остановимся на ней, не следую хронологическому ходу развития всей математики. Были предприняты многочисленные усилия, которые, однако, остались безуспешными. В 1770 году Лагранж – один из крупнейших математиков восемнадцатого века – подверг глубокому анализу известные решения уравнений второй, третей и четвертой степени и указал единый подход к ним ко всем. Лагранж также обратил внимание на то, что здесь большое значение имеет теория перестановок корней уравнения. Этим он наметил путь, по которому в дальнейшем пошли исследования Галуа. Однако, прошло еще почти 60 лет прежде, чем Галуа и Абель – независимо друг от друга – обнаружили и доказали, что искомых общих решений в радикалах не существует. При этом по воспоминаниям их знакомых оба молодых ученых были совершенно поглощены работой, одержимы ЭЗ. Результат несомненно имел первостепенное значение, а созданные методы стали важной частью математики.

Очень интересно и достаточно неожиданно, что, применяя теорию групп Галуа почти сразу получили отрицательный ответ на возможность решать циркулем и линейкой древние задачи об удвоении куба и трисекции угла. Но вопрос о квадратуре оставался открытым, так как ответ зависел от арифметической природы числа π. Лишь в 1873 году Эрмит доказал, что число e является трансцендентным. Тождество $e^{i\pi} = -1$ делало правдоподобным, что таково же число π. Через девять лет это доказал Линдеман. Таким образом, за 25 веков выяснилось, что число π нельзя построить циркулем и линейкой, иными словами, квадратура круга невозможна.

Великие открытия Коперника, Галилея и Кеплера положили начало интенсивному развитию Новой Математики. Декарт, Ферма, Паскаль, Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц, братья Якоб и Иоганн Бернулли вели исследования с неудержимой энергией, страстью и сознанием чрезвычайной важности своего труда. Вероятно, это был тот редчайший случай когда важность действительно так велика, что преувеличить ее невозможно, а приписывать к слову “энергия” слово “заблуждения” не уместно.

Однако, в 70-ые годы семнадцатого века возникли две плодотворные проблемы, которые оказали немалое влияние на развитие математики и провоцировали ЭЗ до наших дней, то есть больше 300 лет. Это, во-первых, проблема, именуемая Великой теоремой Ферма. Через пять лет после смерти Пьера Ферма его сын в 1670 году издал книгу александрийского математика Диофанта (жил около 250 года н. э.) со следующим замечанием, оставленным отцом на полях. Если натуральное число $n \geq 3$ то уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может быть решено в натуральных числах x, y, z. Кроме того, Пьер Ферма добавил: ”Я нашел удивительное доказательство этого утверждения, но поля книги слишком узки, чтобы оно могло на них поместиться”. Формулировка очень проста – любой может понять. Но “удивительного доказательства” в бумагах Пьера Ферма не оказалось, и оно никем и никогда не было переоткрыто. Как мы видели в случае квадратуры круга, краткая и ясная постановка легко порождает иллюзии, но не гарантирует, что простое решение существует. Правда, теперь можно было надеяться, что посчастливится разгадать “удивительный” путь самого Ферма. Такая удача ни на чью долю не выпала. В общем виде проблема не поддалась усилиям самых выдающихся математиков. В восемнадцатом веке Эйлер доказал справедливость утверждения Ферма при $n = 3$ и $n = 4$. В первой половине девятнадцатого века для нескольких частных случаев получили ответы Лежандр и Дирихле. Наконец, тогда же Куммер предложил новый, более перспективный подход при помощи теории алгебраических чисел. Сама эта теория в известной мере возникла и получила развитие благодаря Великой теореме Ферма. Куммер, применяя общий метод, смог доказать теоремы для всех простых целых $n < 100$.

Безуспешные попытки одолеть проблему Ферма предпринимали и многочисленные любители – так называемые “ферматики”. Подобно изобретателям вечного двигателя, они атаковали своими сообщениями университеты, академии наук и редакции журналов. Активность ферматиков возросла в начала двадцатого века, когда некий богач завещал премию 10000 марок – по тем временам несметную сумму, впрочем обесценившуюся вскоре из-за инфляции. Все же скорее большинство старалось ради бесспорной славы, чем ради сомнительных денег.

Через 325 лет настойчивый труд математиков увенчался успехом. В 1995 г. ценой огромной концентрации ЭЗ Эндрю Уайлс доказал Великую теорему Ферма. Слава в среде математиков пришла незамедлительно, но и вышла далеко за ее пределы. Проблема Ферма выплеснулась на театральные подмостки. На Бродвее был поставлен мюзикл: “Последнее танго Ферма”. В связи с математическими проблемами это более обстоятельное ироническое сочинение, чем пятый эписодий древнегреческой комедии “Птицы”.

Главный герой, доказавший Великую теорему Ферма, выведен под вымышленной фамилией Кин. Остальные комические персонажи мюзикла носят фамилии знаменитых математиков прошлых времен: Пифагор, Евклид, Ферма, Ньютон, Гаусс. Актеры разыгрывают смешные пародии на чудаков, погруженных в абстрактные идеи и отрешенных от пустяков обыденной жизни. Эти “математики” обнаруживают в доказательстве теоремы Ферма недочет и ехидно подтрунивают над Кином. Кин удручен, но не сломлен, он, охваченный ЭЗ, мужественно уединяется в свою мансарду, отчаянно и сосредоточенно трудится и устраняется пробел к удовольствиям зрительного зала.

Спектакль был записан на компакт-диск и показан в 2001 году в Беркли на летней школе по глобальной теории минимальных поверхностей. Это развлечение позабавило участников школы. Им понравилось веселое, юмористическое изображение их собственной творческой работы и вечной манеры преувеличивать ее важность.

6. Коснемся теперь второй проблемы, упомянутой в начале пятого пункта. В первой половине 70-ых годов Лейбниц дважды посетил Лондон и имел содержательные беседы с английскими математиками о числовых и степенных рядах. В частности, Лейбниц сообщил им свое представление числа π в виде ряда:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}, \tag{1}$$

которое он вывел из разложения функции $\operatorname{arctg} x$, полагая затем $x = 1$. Но оказалось, что формулу (1) они знали, так как ее еще раньше получил Дж. Грегори. Англичане со своей стороны спросили Лейбница, не умеет ли он просуммировать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{2}$$

с чем они сами не справились. Скорее всего обе стороны предполагали, что нужно подобрать подходящий степенной ряд, как в случае формулы (1). Однако, это не удалось. Как мы теперь знаем, следовало бы разложить функцию x^2 на отрезке $[-\pi, \pi]$ по косинусам, что сразу давало

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{3}$$

но до появление тригонометрических рядов оставалось более ста лет. Лейбниц не смог найти сумму ряда (2). Представляется, что задача не была широко известной. Только почти через 20 лет Лейбниц сообщил ее братьям Якобу и Иоганну Бернулли. В 1689 году Якоб включил ее в виде вызова читателям в качестве нерешенной проблемы в свою книгу о бесконечных рядах. Но дело сдвинулось с мертвой точки только в 30-ых годах следующего столетия, когда проблема привлекла внимание Эйлера. Для него проблема оказалась исключительно продуктивной; несомненно он был захвачен ЭЗ. Эйлер не только первый открыл формулу (3), но особенной важно, что он для этого дерзновенно пошел по совершенно новому пути и применил метод, который раньше еще никогда не встречался, а именно по аналогии с полиномами, Эйлер написал равенство

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \tag{4}$$

и приравнял коэффициенты при x^2 в обеих частях, что и дает формулу (3). Затруднение состоит в том, что к тому времени еще не было теории разложения целых аналитических функций в бесконечные произведения, и потому равенство в правой части (4) было, по меньшей мере, сомнительным. Вскоре Эйлер нашел существенно другой вывод формулы (3), а также просуммировал ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{5}$$

с целыми четными s до $s = 24$.

Ряд (5) сходится при вещественных $s > 1$; сумму его, следуя Риману, обозначают через $\zeta(s)$. Размышления в связи с рядом (5) привели Эйлера к замечательному тождеству

$$\prod_{(p)} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s) \tag{6}$$

где произведение берется по всем простым p. Это тождество позволило Эйлеру найти новое – впервые после Евклида – доказательство бесконечности числа простых чисел. Благодаря (6) возникло новое направление – аналитическая теория чисел. Но прошло более ста лет раньше, чем формула (6) стала инструментом для глубоких исследований Дирихле и Чебышева. Дальнейшее существенное развитие теория простых чисел получила после того, как Риман аналитически продолжил функцию $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость, за исключение точки $s = 1$, где функция имеет простой полюс. Попутно возникла новая проблема – так называемая "гипотеза Римана", которая состоит в том, что все нетривиальные нули функции $\zeta(s)$ лежат на прямой $s = \frac{1}{2} + it$. Это опять вызов человеческому уму, провоцирующий ЭЗ вот уже 150 лет.

7. В 1900 году на международном конгрессе математиков Гильберт выдвинул свои знаменитые 23 проблемы, которые обеспечили нас ЭЗ на все столетие. Между прочим, под номером 8 в них включена гипотеза Римана. Бесспорно в этом веке возникло также много других первостепенных задач, решение которых требовало ЭЗ и огромных усилий.

В этом сообщении я обсуждал ЭЗ на знаменитых исторических примерах, так как, кажется, это более интересно и привлекательно. Однако, я вполне уверен, что любая творческая удача в математике достигается, благодаря ЭЗ. Достаточно понаблюдать за самим собой и посмотреть вокруг. Очень сомнительно, можно ли вообще получить какой-либо результат без ЭЗ. Остается пожелать читателю побольше ЭЗ и, как следствие, побольше радости от научных достижений.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КУРСЫ В МАЛЫХ УЧЕБНЫХ ГРУППАХ

А.В.Колдунов
Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург

В заметке выясняется специфика учебной работы в малых учебных группах (МУГ). Для этого сначала дается обзор некоторых учебных ситуаций, появлявшихся на математическом факультете РГПУ (речь, в основном, идет о дисциплинах, связанных с кафедрой анализа). Затем приводится пример одной МУГ и курса в ней.

1. Система преподавания математических дисциплин на математическом факультете (тогда) ЛГПИ сложилась под влиянием ЛГУ и была связана с традициями немецких университетов. Основой этой системы в педвузе (обозначим ее через С(1)) были большая лекционная форма и принцип разумного слова (разумное разъяснение материала не может не обеспечить освоение этого материала каждым студентом). Фундаментальные математические курсы (ФМК) были центром и содержанием С(1). Каждый тип заданий находил свое место в иерархии С(1). Появление нестандартных заданий было, скорее, свойственно экзаменам. С(1) не была гибкой системой, и поэтому всем участникам С(1) приходилось испытывать напряжение. Многие обстоятельства были на стороне С(1). Но со временем С(1) столкнулась с трудностями. Появился новый процесс "разбегания" студенческих групп (СГ): теперь перед преподавателем стояла не целостная и достаточно однородная (как требовала С(1) и как и было прежде) СГ, а система ее подгрупп и сегментов. Принцип разумного слова переставал работать (эта ситуация не совсем адекватно описывалась как наличие разных уровней школьной подготовки в СГ). С(1) входила в положение и превращалась в С(1,5). Естественно, что в С(1,5) ФМК потеряли часть своего значения. Нарушалась иерархия материала, свойственная С(1): тип заданий с занятным решением пускали на поток, становился приемом и далеко уходил от исходной связи, породившей это задание. Если в С(1) ее участники испытали напряжение из-за самого смысла С(1), то в С(1,5) неявно предполагалось, что организованное напряжения означает присутствие в С(1). Курс выравнивания (КВ) уровней школьной подготовки был призван цивилизовать С(1,5). Предполагалось, что целенаправленное решение студентами особых типов задач позволит сформировать у них определенные ментальные связи, которые позднее помогут им успешнее освоить рассуждения ФМК. Это было далеко от исходных представлений С(1), ориентированной на (чистый) интеллект. Впрочем, вторая часть КВ, то есть написание жесткой контрольной работы, приближал КВ к С(1). Несомненно, что шок, вызываемый КВ, позволял успешно решать вопрос с дисциплиной СГ.

2. Возможно, что формированию С(2) могут способствовать изменения в учебных программах. В этом отношении интересны малые математические курсы (ММК), в большом количестве появившиеся в учебных планах.

По своему характеру ММК динамичнее ФМК – первый должен реализоваться в один семестр. Поэтому для ММК важна его связь с определенным разделом ФМК. Далее, ММК – это всегда обозримая конструкция, в которой учитывалось итоговое оценивание. Представляется, что в условиях малых учебных групп (МУГ) это может быть осуществлено наиболее эффективным образом.

Под МУГ будет пониматься пара (СГ; ММК), где объем СГ не более 20-25 студентов. Лекционные и практические занятия ведутся одним преподавателем одним блоком. Это позволяет использовать смешанные формы учебной работы, которые мало подходят ФМК. Сам ММК строится в зависимости от уровня СГ и задач, которые целесообразно перед ней поставить. В рамках МУГ знания студентов, полученные в ФМК, могут быть эффективно востребованы и уточнены.

В качестве примера МУГ рассмотрим случай чтения математических курсов у магистрантов первого курса экономического факультета. В эту МУГ входят обычно 10-15 человек. По своим возможностям они, в основном, могли бы без затруднений учиться на математическом факультете. Математическая подготовка у них только школьная и хотя у них нет интереса к логической стороне математического курса, но они легко осваивают неизвестные им процедуры. Работать с ними удобно.

3. Кафедра анализа получала заявки на чтение этого курса в разных вариантах. Первоначально предполагалось, что будут читаться семестровые курсы математики, теории вероятностей и математической статистики и курс эконометрики. Позднее появился вариант чтения курса математики (2×2; экзамен) и аналогичного курса теории вероятностей. В последнее время читается курс математики (2×1; зачет) и такой же курс теории вероятностей. Для сравнения напомним, что на экономическом факультете (большого) Университета два семестра читается курс анализа с элементами геометрии, семестровый курс алгебры и семестровый курс теории вероятностей и математической статистики. Эти обстоятельства указывают на то, что в отведенное время серьезная техника математических процедур не может быть поставлена. Это означает, что математические курсы в этой МУГ должны быть ориентированы в основном на корректное разъяснение того или иного материала математического характера, присутствующего в дальнейших экономических курсах МУГ. Очевидно, что математическая статистика (из курса теории вероятностей) может пояснить определенные процедуры из курса (общей) статистики. Несколько иная ситуация складывается с курсом эконометрики: традиционно этот курс начинается с разбора парной линейной регрессии; причем оценки коэффициентов регрессии получаются с помощью метода наименьших квадратов (хотя более естественно их выводить с помощью точечных оценок числовых характеристик предиктора и регрессора); далее выводятся погрешности этих оценок, что позволяет доказать их несмещенность. Все эти выкладки, по сути, достаточно просты и доступны для студентов-экономистов. Затем изучается множественная регрессия, причем это делается уже на языке операций с матрицами. Следует учесть, что по существу матрицы редко упрощают конкретные теоретические рассуждения (из учебных курсов). Поэтому было бы разумнее повторить схему, примененную для случая парной линейной регрессии (т.е. с помощью выборочных оценок). Тогда оценки будут получены непосредственно и опять достаточно элементарным образом. Эта работа могла быть поучительна для студентов МУГ, так как показала современные методы теоретической экономики.

Эти соображения позволяют сделать вывод о том, что основной упор в математических курсах МУГ экономистов следует сделать на теорию вероятностей, а особенно на математическую статистику. Малый курс математики должен использовать школьные знания студентов. Из курса геометрии должны появиться прямые на плоскости (и, может быть, плоскости в пространстве для геометрической интерпретации множественной линейной регрессии); из курса алгебры – действия с матрицами, переход от систем к матрицам и наоборот, непосредственное решение различных типов матричных уравнений. Как показывает опыт, школьные навыки дифференцирования позволяют студентам-экономистам достаточно легко проводить исследования функций и строить их графики; решать задачи на экстремумы и наибольшие наименьшие значения. Наиболее важным для дальнейшего разделом анализа для экономистов является понятие определенного интеграла. Но при его изучении должны на первый план выходить качественные соображения, а не техника вычислений. Курс математики МУГ целесообразно закончить зачетом. Причем в условиях МУГ могут возникнуть разные способы его получения. С одной стороны, студент может предпочесть просто написать итоговую контрольную работу. Но он может сдавать материал по разделам (их обычно четыре); и здесь у него тоже есть выбор: он может писать домашние контрольные работы по каждому разделу, а потом обсуждать их с преподавателем; он может просто написать аудиторную работу по разделу. В любом случае он получает определенные баллы. Его цель состоит в том, чтобы сумма баллов по всем разделам была больше определенного заранее числа; в этом случае он получает зачет. Если же студент его не получает, то он пишет работу по всему материалу.

При изучении теории вероятностей выделяется два раздела. По каждому из них пишется домашняя контрольная работа. Причем вторая работа носит статистический характер. Студенты сами выбирают генеральную совокупность и два признака, а затем проводят расчет всех величин, обсуждавшихся в курсе.

После такого рода анализа можно приступить к составлению курса для МУГ. Построение курса изнутри (т.е. от выбора форм оценивания и самостоятельной работы С) наружу (т.е. организация материала ММК) существенно отличает МУГ от соответствующих построений в рамках С(1); важно и то, что в МУГ появляется элемент выбора для студента.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ АСПЕКТОВ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КАК МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА – I

Максимов Д.В., Рукшин С.Е.

Российский государственный педагогический
университет им. А.И.Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: dimax239@bk.ru, serger@math.sch239.spb.ru

Целью творчества профессионального математика является решение ранее никем не решенной проблемы или постановка новых вопросов. Отметим, что генезис новой математической проблемы, несмотря на кажущуюся противоположность процессу решения задач, неотделим от предшествующего опыта и элементов решения задач, возникающих в процессе кристаллизации формулировки проблемы. Например, сама постановка великой теоремы Ферма неотделима от задачи о целочисленных пифагоровых тройках, наличие которых было известно в Древнем Вавилоне и Египте, бесконечность их числа была доказана пифагорейцами, а общая формула для которых была описана Диофантом. Если бы ответ на вопрос оказался тривиальным, и существовал не слишком большой контрпример, то задача оказалась бы неинтересной. Но сам факт постановки вопроса потребовал решения задачи о поиске контрпримеров или решения задач для частных случаев, которые удается исследовать. Таким образом, даже сама формулировка теоремы являлась продуктом решения частных задач, и потребовала содержательной математической деятельности по постановке новых. В итоге напрашивается вывод: формулировка математической проблемы (а не только ее решение!) является не только акцептором-реципиентом и продуктом предшествующего опыта по решению задач, но и донором задач и проблем для дальнейших исследований. История появления и влияние на дальнейшее развитие математики гипотезы Римана о нулях дзета-функции и история континуум-гипотезы только подтверждают этот вывод.

В процессе обучения в различных образовательных системах задача выступает в двух независимых ипостасях: как средство и как цель. Задачи как средство, как правило, отличаются:

- Шаблонностью метода решения;
- Предварительной и относительно недавней изученностью алгоритма решения задачи;
- Относительной простотой решения;
- Отсутствием многоходовых и ветвящихся решений;
- Частотой повторения с несущественным изменением условия (например, решение квадратных уравнений или интегрирование дробно-рациональных функций);
- Тиражируемостью;
- Простотой варьирования трудности в малом диапазоне;

Такие задачи мы в дальнейшем будем называть упражнениями. Целями их применения в основном являются выработка навыков и контроль за усвоением на простейшем, репродуктивном уровне. Таким образом, в триаде **Знания-Умения-Навыки** “задачи-как-средство” используются для отработки низшего по отношению к творчеству звена – навыков. Впрочем, принижать их роль не следует, потому что обучение без них становится невозможным. Появляясь в начале изучения темы, они, по идее, должны постепенно дополняться, а далее и уступать место более изощренным, комбинированным, многоходовым, а затем и творческим задачам. На что, при нынешнем уровне математического образования в школе и университетах, времени и сил, как правило, не остается. Падение уровня математической подготовки учащихся средней школы только усугубило эту проблему в университетах.

Как вывод, можно сказать, что “задачи-как-средство”, носят недифференцированный характер, как при получении общего среднего образования, так и при получении высшего. Например, технику дифференцирования изучают как будущие фармацевты, так и студенты математических специальностей.

Следовательно, для подготовки профессионалов в области чистой и прикладной математики, специалистов в области кибернетики, теоретической физики и подготовки инженеров-исследователей высокого уровня таких задач недостаточно. Этот вывод, к сожалению, не учитывается в процессе реформировании и модернизации российского образования, опирающийся на худшие западные образцы с их “стандартизацией” и “унификацией”.

Ощущая ущербность подхода, опирающегося на преимущественное использование задач, как средства, многие преподаватели предлагают дополнять его решением так называемых “нестандартных” задач. Понятие “нестандартная задача” используется без каких бы то ни было четких определений и понимания их роли в процессе развития творческого мышления. Предпринимаемые же попытки дать определение понятия “нестандартная задача” обычно делаются без всякого учета психологии творчества и знания методологии обучения решению задач. Условно разделяя человеческую деятельность по решению задач на алгоритмический и творческий компоненты, исследователи часто дают такое определение: “задача называется нестандартной, если алгоритм ее решения не известен учащемуся к моменту начала решения задачи” (см., например, [1]). Таким образом, с одной стороны получается, что для ученика, не выучившего формулу для нахождения корней квадратного уравнения, любое такое уравнение будет нестандартной задачей, против чего авторы подобных определений (впрочем, как и авторы статьи) возражают и занимаются их дальнейшим уточнением (см. [1]). До сих пор того же определения “нестандартной задачи” придерживаются и многие современные исследователи (см. [2]). С другой стороны, многие задачи вообще не имеют алгоритмов для их решения. К таким относятся, в частности, задачи конструктивного характера, и, в частности, задачи на построение примеров и контрпримеров, роль которых в математике очевидна. Кроме того, часто возникают ситуации, когда очевидный алгоритм решения задачи по каким-либо причинам нас не устраивает. Рассмотрим, к примеру, такую задачу: сколько существует трехзначных чисел, у которых одна из цифр равна сумме двух других. Очевидно, ее решение путем перебора и проверки всех девятисот трехзначных чисел, не устроит ни обучаемого, ни преподавателя. Поэтому, как мы видим, определение нестандартной задачи нуждается в доработке (см. [3], [7]).

В современной психологии одним центральных становится понятие расширенной репрезентации знаний и понятие репрезентативной структуры (см. [6]). Согласно этим идеям и понятиям в нашей памяти знания сохраняются не только в виде “слепков” воспринятого и усвоенного, но, и в большей степени, в виде продуктов переработки этих “слепков” в процессе умственной деятельности. Хранящиеся в памяти продукты репрезентативной обработки образуют, по-видимому, упорядоченные системы, состоящие из многих подсистем и иерархических уровней. Эти системы и представляют собой:

системы хранения знаний +

+ средства познания нового +

+ средство решения творческих задач.

Накладываясь на условие полученной задачи, эти репрезентативные структуры производят его анализ, его осмысление, а затем включение определенных подсистем на разных уровнях иерархии в рабочий режим или режим готовности, и, следовательно, приводят к закономерно лучшему восприятию условия. Происходящее быстрое, практически мгновенное, включение в работу сложных упорядоченных иерархически организованных структур репрезентации знаний дает гораздо большие шансы на успешное решение творческой задачи, чем у человека, у которого те же нужные знания хранятся в отдельных “шкафчиках”, без установления связей между ними. Именно такое формирование сложных упорядоченных иерархически организованных структур восприятия и репрезентации знаний мы и называем уровнем умственного развития, достигнутого обучаемым.

Принимая такую точку зрения, мы можем назвать стандартной ту задачу, для восприятия и решения которой достаточно уже сформированных репрезентативных структур, а нестандартной – задачу, для решения которой уже установленных связей недостаточно. Результатом успешного решения такой задачи станет появление новых взаимосвязей между различными иерархическими уровнями структуры, и связей разных структур, подчас возникшим вопреки уже имеющимся связям. Именно в таких ситуациях и происходит развитие мышления, в отличие от его тренировки. Разница между ними столь же принципиальна, как между прокладкой новых трамвайных путей и многократной поездкой по одному и тому же давно известному маршруту.

В частности, одной из существенных характеристик нестандартной задачи является момент неуверенности в том, что ее в итоге удастся решить. Аналогичная ситуация возникает, когда профессиональный математик решает подставленную перед собой не решенную никем ранее проблему. И, естественным образом, творческая задача моделирует для учащихся эту сторону профессиональной деятельности. Таким образом, творческие задачи имеют еще и воспитательное значение: они учат, не фиксируясь на элементах неуверенности, преодолевать их.

Для того, того чтобы моделировать процесс решения задачи, который, как мы поняли, является основным видом деятельности профессионального математика и основным инструментом учебно-математической деятельности, мы должны понять из чего он состоит. Основные составляющие этого процесса приведены на нижеследующей схеме:

Рассмотрим эти составляющие более подробно, с целью выделить те из них, на которые можно оказать влияние при обучении, и те, на которые нужно оказывать влияние в первую очередь.

Во-первых, для того чтобы решить задачу, нужно, например, хотя бы понять о чем в ней идет речь. Поэтому, необходим хотя бы минимальный запас теоретических знаний. Как математическую проблему, так и школьную задачу, нельзя сформулировать просто так – нужны некоторые определения и договоренности об обозначениях. Запас теоретических знаний школьника меньше, однако это не означает, что поставленные перед ними задачи будут проще. Часто элементарная с виду проблема может оказаться гораздо труднее громоздкой и сложно формулируемой математической проблемы. Следует, однако, признать, что теоретические знания не могут играть главенствующую роль, хотя их необходимость очевидна.

Опыт – вторая составляющая решения задач. Он накапливается как в процессе решение других творческих задач, так и в процессе решения упражнений, которые, как кирпичики, могут составлять сложную проблему. Чтобы суметь ее решить, нужно сначала разбить ее на шаги (а чтобы это увидеть, нужно иметь опыт решения многоходовых задач), а потом еще и суметь решить задачу каждого шага (для этого нужен опыт решения упражнений). Часто помощником может выступить опыт решения аналогичных задач. Слово "аналогичные" здесь достаточно условное, ибо каждая творческая задача, ни на что не похожа и не может иметь пути решения, который возникает только по аналогии и в соответствии с прецедентами (а если это не так, то мы относим такую задачу к упражнениям). Однако некоторые особенности и аналогии, которые могут помочь, можно выделять. Так, например, мы легко отличаем задачу по геометрии или по анализу, и опыт их решения у нас может оказаться разный.

Непосредственно к опыту примыкают личностные генетические способности. Способности бывают врожденные (генетические) и приобретенные. Приобретенные способности мы относим к опыту и здесь выделяем только генетические в качестве отдельной составляющей.

Интуиция – это совершенно особенная составляющая математического мышления, ее влияние на решение задачи огромно, хотя и не до конца изучено. Может показаться, что интуиция и личностные приобретенные способности – это одно и то же, но на самом деле это не так, хотя, разумеется, они имеют общую часть. Авторы уже делали попытку рассмотреть интуицию более подробно (см. [4]), поэтому заинтересованного читателя мы отсылаем к упомянутой статье.

Мотивация – тоже важный аспект решения задачи, изучением которого занимается, в частности, педагогическая психология. Здесь лишь отметим, что школьник или студент на олимпиаде и работающий ученый мотивированы по-разному. Участник олимпиады стремится к победе, которая напрямую зависит от количества решенных им задач. Математик стремится открыть новую истину и поделиться ею с окружающими. На олимпиаде такого рода мотивация невозможна, так как участнику известно, что задача была решена составителями, а следовательно, ее решение на станет новой истиной. Дух спортивного соревнования, возникающий на олимпиаде, создается искусственно именно затем, чтобы мотивировать участников. Давать школьникам или студентам сразу ранее никем не решенные задачи нельзя, так как решение может оказаться сложным. Тогда может возникнуть ощущение неудачи, что крайне негативно скажется на дальнейшем образовании. Преподаватели должны всячески избегать создавать у своих подопечных ощущение неудачи, а, наоборот, часто создавать ощущение успеха, чтобы возникала уверенность в своих силах. Впрочем, нужно следить, чтобы ощущение постоянного успеха не порождало самоуверенность, так что неудачи – неотъемлемая часть обучения. Как, впрочем, и работы ученого.

Под концентрацией и вниманием мы здесь понимаем ту часть своих душевных сил, которую тратит на решение задачи участники олимпиады или математик, решающий проблему. Ее размер опосредовано связан с мотивацией, что мы отразили на схеме. Тем не менее, концентрация не является прямым следствием мотивации, она имеет и внутреннюю составляющую (в то время, как мотивация на математических соревнованиях основном внешняя). По-видимому, более подробное изучение этой составляющей заслуживает отдельного рассмотрения.

Наконец, чтобы решить задачу, должно повезти. Мы отражаем это на схеме составляющей, названной стохастической удачей. Прямого влияния на нее, скорей всего, у преподавателей нет, но подробное изучение (если оно возможно) для наших целей может оказаться значимым.

Следует еще раз подчеркнуть, что эти составляющие выделяются при индивидуальном решении задачи, каковое является основным видом деятельности профессионального математика, и моделируется, помимо учебного процесса, олимпиадами, проводимыми для школьников и студентов.

Однако, в работе профессионального математика существуют и другие виды деятельности, помимо индивидуального решения задач, которые также способствуют не только решению конкретной творческой задачи, но и обогащают опыт, интуицию, запас теоретических знаний, а также влияют на мотивацию, а следовательно, и на все математическое творчество в целом. Это означает, что необходимо выделить, проанализировать и научиться моделировать в процессе обучения другие аспекты математического творчества: дискуссию, обсуждение на семинаре, коллективное решение задач (и, в частности, обсуждение и доведение до решения чужых идей), проверку результатов, полемику, математическое общение, и т. д. (см. [5]). Для моделирования этих аспектов требуются коллективные формы работы по решению и обсуждению задач, например, командные математические игры и состязания, которым, как мы надеемся, будет посвящена вторая часть статьи.

Литература

[1] Шалютин С.М. О сущности творческой деятельности. Творческое мышление и научный прогресс. – Курган, 1971.

[2] Афанасьев В.В. Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач. – Ярославль: ЯГПУ, 1996.

[3] Меерсон С.И., Рукшин С.Е. Роль нестандартных задач в развитии мышления учащихся // Ученые записки ЛГОУ, серия "Математика и Информатика" Т.1. – СПб.: ЛГОУ им. Пушкина, 1998, с.80–86.

[4] Рукшин С.Е., Максимов Д.В. Структуры интуиции у студентов-математиков и ее использование при решении задач // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. – СПб.: БАН, 2005, с.152–158.

[5] Рукшин С.Е. История математических соревнований в России и СССР // Методология и история математики. сб. науч. тр. Т.5 – ЛГУ им. А.С.Пушкина. 2004, с.251–257.

[6] Чуприкова Н.И. Умственное развитие и обучение. Психологически основы развивающего обучения. – М.: Столетие, 1994.

[7] Меерсон С.И., Рукшин С.Е. Что включает в себя понятие "нестандартная задача"? // Методология и история математики, Т.2. - СПб.: ЛГОУ им. Пушкина, 2000.

ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ КУРСА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Якубсон М.Я.
Российский государственный педагогический
университет им. А.И. Герцена
Санкт-Петербург
e-mail: michaeljackubson@mail.ru

Согласно действующим Государственным стандартам (см., например, [1]) "Государственные экзамены могут проводиться по отдельным дисциплинам, входящим в циклы общепрофессиональных и предметных дисциплин, или в форме итоговых междисциплинарных экзаменов". В настоящее время на математическом факультете РГПУ им. А.И.Герцена идет дискуссия о структуре Государственного экзамена, целях его проведения и результатов, которых мы рассчитываем добиться. В связи с этим представляется интересным ознакомиться с опытом филиала РГПУ им. А.И.Герцена в г. Волхове.

Разрабатывая программу Государственного экзамена, кафедра математических и естественнонаучных дисциплин филиала выбрала вариант междисциплинарного экзамена по специальности "Математика" с включением в него некоторых вопросов, связанных с методикой преподавания математики в школе. Билет состоит из трех волросов, соответственно, по алгебре, геометрии и математическому анализу. В некоторых из вопросов требуется рассказать о связи излагаемого материала со школьным курсом математики.

Вопрос отбора материала для Государственного экзамена достаточно сложен. Понятно, что студент не может вспомнить весь материал с той же степенью подробности, что и на курсовых экзаменах. Более того, такую цель и не стоит преследовать. Как известно, "образование – это то, что остается у Вас, когда вы забудете все, чему Вас учили". Именно этот остаток и должен проверяться на Государственном экзамене.

Для этой цели вопросы, выносимые на экзамен, должны быть максимально широкими. Следует проверять не точное знание конкретных фактов и детали доказательства определенных теорем. Внимание должно уделяться основным понятиям и связям, проявлению общих закономерностей в конкретных случаях. Рассмотрим, например, вопрос "Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных. Дифференциал. Связь дифференцируемости с непрерывностью и существованием производной (частных производных). Производная в школьном курсе алгебры и начал анализа". Тема дифференцируемости и производной появляется в курсе анализа как минимум трижды: при изучении функций одной вещественной переменной, нескольких переменных и комплексной переменной. Исходным здесь является понятие дифференцируемости как "линейности в малом". Связь между дифференцируемостью и непрерывностью – также общий факт, достаточно фундаментальный и в то же время наглядный. Вопрос же о связи между дифференцируемостью и существованием полной или частных производных решается, как известно, в каждом из трех случаев по-разному. Наконец, этот вопрос дает возможность проявить знания о месте понятия производной в школьном курсе, о степени подробности и строгости, с которой вводится это понятие. Поначалу вопрос пугает своим объемом, однако этот объем задает обзорный характер ответа, позволяет хорошему студенту показать свою эрудицию, а слабому – продемонстрировать хотя бы знание основных понятий и определений.

При таком подходе к итоговой аттестации меняется отношение к обзорным лекциям, читаемым в последнем семестре обучения. Именно в рамках курса, традиционно именующегося "Общая математика", можно провести этот общий взгляд на весь курс математического анализа. Пользуясь тем, что в разные годы обучения студенты накопили достаточно много конкретных знаний, лектор может за сравнительно небольшое время (18-24 часа) повторить и обобщить материал так, как он должен быть представлен на экзамене. Многое может сделать ведущий этот курс преподаватель и для предотвращения провалов на Государственном экзамене, позорных как для студента, так и для вуза. Как правило, на младших курсах мы принимаем зачеты и экзамены достаточно строго и жестко. Студенты старших курсов, часто уже работающие в школе, воспринимаются почти как коллеги, поэтому экзамены принимаются уже без такой въедливости, а зачеты часто ставятся формально. Однако после обзорных лекций преподаватель должен принимать зачет по знанию основных определений и формулировок "как на первом курсе" и не жалеть времени на пересдачи. Не нужно считать, что это "натаскивание" на экзамен – лучше рассматривать прием данного зачета как форму итогового повторения.

В качестве приложения приведем вопросы по математическому анализу к Государственному экзамену:

1. Аксиоматика действительных (вещественных) чисел. Различные формы аксиомы полноты и следствия из нее. Числовые множества в школьном курсе алгебры.
2. Общее определение предела. Общие свойства пределов (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности).
3. Непрерывность функции одной и нескольких переменных.
4. Общие свойства непрерывных функций. Теорема Больцано – Коши.
5. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса).
6. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных. Дифференциал. Связь дифференцируемости с непрерывностью и существованием производной (частных производных). Производная в школьном курсе алгебры и начал анализа.
7. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши).
8. Исследование функций на монотонность и экстремумы.
9. Первообразная и неопределенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница.
10. Конструкция определенного интеграла Римана. Суммы Дарбу. Условия интегрируемости.
11. Спрямляемые кривые. Вычисление длин дуг кривых.
12. Квадрируемые фигуры. Вычисление площадей.
13. Вычисление объемов. Объемы в школьном курсе стереометрии.
14. Основные признаки сходимости положительных числовых рядов.
15. Абсолютная и условная сходимость.
16. Степенные ряды. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов.
17. Ряд Тейлора. Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора.
18. Элементарные функции комплексной переменной.
19. Конформные отображения (примеры)
20. Понятие о рядах Фурье по тригонометрической системе.
21. Метрические пространства. Примеры. Полные метрические пространства (критерий Коши).
22. Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений). Теорема существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
23. Линейные дифференциальные уравнения первого и второго порядков.
24. Мощность множества. Счетные и несчетные множества.
25. Замкнутые и открытые множества на прямой и плоскости.

Литература

[1] Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 032100 Математика. – 2005.

EqWorld

Мир математических уравнений

http://eqworld.ipmnet.ru

Редактор: А. Д. Полянин

Уравнения занимают центральное место в современной математике и являются основой для математического моделирования многочисленных явлений и процессов в науке и технике.

Веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях различных классов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений с частными производными (УрЧП), интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны также некоторые методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники и монографии, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук и является бесплатным для его пользователей.

- **Точные решения**
- **Методы решения**
- **Вспомогательные разделы**
- **Программы**
- **Образование**
- **Об этом сайте**
- **Для авторов**
- **Информация**

СОДЕРЖАНИЕ

Лицензия на издательскую деятельность
Серия ЛП №000066 от 20 января 1999 г.

Подписано в печать 20.03.2006		Формат 60×84 1/16
Бумага офсетная	Объем 15,75 уч. изд. л.	Тираж 100 экз.