Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

XIII школа-конференция по теории групп,
посвященная 85-летию В.А. Белоногова

ТЕОРИЯ ГРУПП И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

3–7 августа 2020 г.

Тезисы докладов

Екатеринбург 2020

Содержание

Вычисления 2-круговых единиц по модулю 2[1]

Алеев Р. Ж.
Южно-Уральский государственный университет (НИУ),
Челябинский государственный университет
aleevrz@susu.ru

Благодаря достигнутому ранее [2], можем без ущерба считать, что

$$2^n \geqslant 128 \iff n \geqslant 7.$$

Удобно ввести следующие обозначения.

1. Пусть
$$2^n = 128m \iff m = 2^{n-7} \in \{1, 2, 4, 8, \dots\}.$$

2. Положим $\zeta_{128m} = \alpha$ и не ограничивая общности можем считать, что
$$\alpha = \mathbf{C}s\frac{2\pi}{128m} + i\sin\frac{2\pi}{128m}.$$

3. Для любого целого j положим
$$s_j = \alpha^j + \alpha^{-j},\ d_j = 1 + s_j,\ r_j = s_j + s_{32m-j}.$$

1. Группа единиц кольца $\mathbf{Z}[\alpha]$

Лемма 1. *Группа единиц*
$$\mathrm{Un}\,(\mathbf{Z}[\alpha]) = \langle\alpha\rangle \times K,$$
где $K \subset \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha + \alpha^{-1}]) \subset \mathbf{R}$.

Пусть
$$P = \left\langle 1 - \alpha^k \mid k \in \{1, 2 \dots, 128m - 1\} \right\rangle \leqslant \mathbf{Q}^*_{128m}$$
— подгруппа по умножению мультипликативной группы $\mathbf{Q}^*_{128m}$ кругового поля $\mathbf{Q}_{128m}$. Тогда назовём *группой круговых единиц* поля $\mathbf{Q}_{128m}$
$$K(\alpha) = P \cap \mathrm{Un}\,(\mathbf{Z}[\alpha])\,.$$

Лемма 2.[[3]] *Пусть* $h(n)$ *— число классов поля* $\mathbf{Q}_{128m} \cap \mathbf{R}$. *Тогда*
$$|\mathrm{Un}\,(\mathbf{Z}[\alpha]) : K(\alpha)| = h(n).$$

Теорема 1. *При введённых выше обозначениях группа круговых единиц*
$$K(\alpha) = \langle\alpha\rangle \times \prod_{l=0}^{32m-2} \langle d_{2l+1}\rangle.$$

Положим
$$D = \prod_{l=0}^{32m-2} \langle d_{2l+1}\rangle = \langle d_1\rangle \times \langle d_3\rangle \times \dots \times \langle d_{64m-3}\rangle\,.$$

Как следствие теоремы получим.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-51-00007 <https://kias.rfbr.ru/index.php# и при поддержке Правительства РФ в соответствии с Постановлением №211 от 16.03.2013 г. (соглашение № 02.A03.21.0011)

Следствие 1.

1. $K(\alpha) = \langle\alpha\rangle \times D$.

2. $K(\alpha) \cap \mathbf{R} = \langle -1\rangle \times D$.

2 Подгруппа W_1

Пусть $G = \langle x\rangle$ — циклическая группа порядка $128m$ и χ_1 — характер группы G с $\chi_1(x) = \alpha$. Локальные единицы $u_{\chi_1}(\beta)$ для $\beta\mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha]$ определяются согласно [1, Определение 1]. Определим подгруппу W_1 нормализованной группы единиц $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ циклической группы G следующим образом:

$$W_1 = \langle u_{\chi_1}(\beta_1) \mid \beta_1 \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha])\rangle\,,$$

Из определения следует мультипликативность локальных единиц, что даёт

$$W_1 = \{u_{\chi_1}(\beta_1) \mid \beta_1 \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha])\}\,.$$

Теорема 2. *Пусть $\beta \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha])$. Локальная единица $u_{\chi_1}(\beta) \in \mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ тогда и только тогда, когда*

1) $\beta \in \mathrm{Un}(\mathbf{Z}[\alpha+\alpha^{-1}]) = \langle -1\rangle \times K$, *где K как в лемме ,*

2) *причём* $\beta \equiv 1 \pmod 2$.

Далее ограничимся рассмотрением *только круговых единиц*. Более точно, будут рассматриваться только элементы группы D.

Введём следующие обозначения.

1. $E = \{\lambda \in D \mid \lambda \equiv 1 \pmod 2\} = (1 + 2\mathbf{Z}[\alpha]) \cap D$.

2. $V_1 = \{u_{\chi_1}(\lambda) \mid \lambda \in D\}$.

Как непосредственное следствие получим описание строения группы W_1.

Следствие 2.

1. V_1 — *подгруппа группы* W_1.

2. $W_1 = \langle x^{64m}\rangle \times V_1$.

Лемма 3.

1. $\left|D : D^{32m}\right| = (32m)^{32m-1} = 2^{(n-2)(2^{n-2}-1)}$.

2. E *является подгруппой D, содержащей D^{32m}.*

2.1 Подгруппа F

Обозначим

$$A_0 = \{1, 3, 5, \ldots, 32m-1\} = \{2l+1 \mid l \in \{0, \ldots, 16m-1\}\}\,,$$

в этом множестве $16m = 2^{n-3}$ элементов. Также обозначим

$$B_0 = A \setminus A_0 = \{64m - (2l+1) \mid 2l+1 \in A_0 \setminus \{1\}\}\,.$$

Для любого $k \in \{1, \ldots, n-3\}$ положим

$$A_k = \{1, 3, 5, \ldots, 2^{n-2-k}-1\} = \left\{2l+1 \mid l \in \{0, \ldots, 2^{n-3-k}-1\}\right\}\,,$$

в этом множестве 2^{n-3-k} элементов. Также будем иметь

$$B_k = A_{k-1} \setminus A_k = \left\{2^{n-1-k} - (2l+1) \mid 2l+1 \in A_k\right\}.$$

Лемма 4. *При указанных выше обозначениях для любого $k \in \{0, 1, \ldots, n-4\}$ получается разбиение*

$$A = A_k \cup B_k \cup B_{k-1} \cup \cdots \cup B_0.$$

Для любого $2l+1 \in \left\{3, \ldots, 2^{n-2} - 1 = 32m - 1\right\} = A_0 \setminus \{1\}$ положим

$$q(0, 2l+1) = d_{2l+1}^{-1} d_{2^{n-1}-(2l+1)}.$$

Пусть $k \in \{1, \ldots, n-3\}$. Для любого $2l+1 \in \left\{1, \ldots, 2^{n-2-k} - 1\right\} = A_k$ положим

$$q(k, 2l+1) = d_{2l+1}^{-1} d_{2^{n-1-k}-(2l+1)}.$$

Лемма 5.

$$D = \langle d_1 \rangle \times \prod_{2l+1 \in A_0 \setminus \{1\}} \langle q(0, 2l+1) \rangle \times \prod_{k=1}^{n-3} \prod_{2l+1 \in A_k} \langle q(k, 2l+1) \rangle.$$

Для шага 0 положим

$$F_0 = \prod_{2l+1 \in A_0 \setminus \{1\}} \langle d_{2l+1}^{-1} d_{64m-(2l+1)} \rangle = \prod_{2l+1 \in A_0 \setminus \{1\}} \langle q(0, 2l+1) \rangle.$$

На шаге $k \in \{1, 2, \ldots, n-3\}$ положим

$$F_k = \prod_{2l+1 \in A_k} \langle d_{2l+1}^{-2^k} d_{32m-(2l+1)}^{2^k} \rangle = \prod_{2l+1 \in A_k} \langle q(k, 2l+1)^{2^k} \rangle.$$

Наконец,

$$F = \langle d_1^{32m} \rangle \times \prod_{k=0}^{n-3} F_k.$$

Теорема 3. *F — подгруппа в E. Кроме того,*

$$D^{32m} < F \leqslant E < D.$$

Список литературы

[1] Р. Ж. Алеев, Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп, *Матем. труды*, **3** (2000), 3–37.

[2] Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко, Локальные единицы целочисленного группового кольца циклической группы порядка 64 для характера с полем характера Q_{64}, *Челябинский физико-математический журнал*, **3** (2018), 253–275.

[3] W. Sinnott, On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field, *Ann. of Math.*, **108** (1978), 107–134.

О слабой π-мощности некоторых групп и свободных произведений

Азаров Д. Н.
Ивановский государственный университет
azarovdn@mail.ru

Напомним, что группа G называется финитно аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента x группы G существует гомоморфизм группы G на конечную группу, при котором образ элемента x отличен от единицы. Здесь рассмотрены некоторые более тонкие аппроксимационные свойства групп.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Целое положительное число n называется π-числом, если все простые делители числа n принадлежат множеству π. Элемент x группы G мы называем π-мощным, если выполняется одно из следующих двух условий.

1. Порядок элемента x бесконечен, и для любого целого положительного π-числа n существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

2. Порядок элемента x конечен, и для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента x, существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

Группу G мы называем π-мощной, если она финитно аппроксимируема и все её элементы являются π-мощными. Если π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятия π-мощного элемента и π-мощной группы совпадают с классическими понятиями мощного элемента и мощной группы.

Для элемента бесконечного порядка свойство "быть мощным"(без соответствующего термина) возникло в работе П. Стиба [1], где в качестве вспомогательного результата установлена мощность для свободных групп и для конечно порождённых нильпотентных групп без кручения. В дальнейшем понятие мощности изучалось рядом авторов и было распространено на элементы конечного порядка (см., напр., [2, 3]).

По сравнению с финитной аппроксимируемостью свойство группы "быть мощной"является достаточно жёстким ограничением. Примерами финитно аппроксимируемых групп, не являющихся мощными, служат разрешимые группы Баумслага — Солитэра $G_{1n} = (a, b; b^{-1}ab = a^n)$ при $n \geq 2$. Тем не менее, эти группы являются π-мощными, где π — множество всех простых чисел, не делящих n.

Как выяснилось, многие группы, не обладающие свойством π-мощности, являются слабо π-мощными. Понятие слабой π-мощности вводится следующим образом.

Элемент x бесконечного порядка группы G мы называем слабо π-мощным, если существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного π-числа n существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную группу, переводящий x в элемент порядка mn.

Группу G назовём слабо π-мощной, если она финитно аппроксимируема, и все её элементы бесконечного порядка являются слабо π-мощными. Если π совпадает с множеством всех простых чисел, то понятие слабо π-мощного элемента совпадает с известным понятием слабо мощного элемента (см., напр., [4]).

Полициклические группы (даже при отсутствии кручения) не являются, вообще говоря, мощными. Соответствующий пример построен в работе [3]. Тем не менее, полициклические группы финитно аппроксимируемы [5], и, более того, они являются слабо мощными (см., напр., [4, 6]). Нами получено следующее более общее утверждение.

Теорема 1. *Пусть G — финитно аппроксимируемая почти разрешимая минимаксная группа. Тогда группа G является слабо π-мощной, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G.*

В связи с формулировкой теоремы 1 напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством. Напомним также, что в любой почти разрешимой минимаксной группе G существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является либо квазициклической группой, либо бесконечной циклической группой, либо конечной группой. Спектром почти разрешимой минимаксной группы G называется множество всех простых p, для которых соответствующая квазициклическая группа присутствует среди членов упомянутого выше ряда.

Так как любая полициклическая группа финитно аппроксимируема, и её спектр пуст, то из теоремы 1 вытекает следующее хорошо известное утверждение.

Следствие 1.1. *Любая полициклическая группа является слабо мощной.*

Разрешимые минимаксные группы составляют важный подкласс в классе всех разрешимых групп конечного ранга. Напомним, что группа G имеет конечный ранг, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порождённая подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Так как любая конечно порождённая финитно аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой [7], то в качестве ещё одного следствия из теоремы 1 получается следующий результат.

Следствие 1.2. *Пусть G — конечно порождённая финитно аппроксимируемая группа конечного ранга. Тогда группа G является слабо π-мощной для некоторого множества π, состоящего из почти всех простых чисел.*

Перейдём теперь к свободным произведениям групп. Заметим прежде всего, что остаётся открытым вопрос о замкнутости класса всех мощных групп относительно свободных произведений (Коуровская тетрадь, вопрос 9.1). С другой стороны, установленные нами теоремы 2 — 7 показывают, что свойство слабой мощности (слабой π-мощности) ведёт себя достаточно "хорошо"относительно свободных конструкций.

Теорема 2. *Пусть $G = A * B$ — свободное произведение групп A и B.*
1. Если A и B — π-мощные группы без кручения, то G — π-мощная группа.
2. Если A и B — π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.
3. Если A и B — слабо π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.

Утверждение 1 этой теоремы установлено в [2] для случая, когда π совпадает с множеством всех простых чисел. Утверждение 2 является частным случаем утверждения 3, а утверждение 3 является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с конечной объединённой подгруппой H.*
Если A и B — слабо π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.

Ещё один наш результат относится к случаю, когда объединённая подгруппа H является циклической. Этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 4. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с бесконечной циклической объединённой подгруппой H. И пусть подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B, а порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в каждой из групп A и B.*
Если A и B — слабо π-мощные группы, то G — слабо π-мощная группа.

Отсюда вытекает следующий результат, установленный в [4].

Следствие 4.1. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с бесконечной циклической объединённой подгруппой H. И пусть подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B.*
Если A и B — слабо мощные группы, то G — слабо мощная группа.

Следующие три теоремы доказаны для свободного произведения $G = (A * B; H)$ финитно аппроксимируемых почти разрешимых минимаксных групп A и B с объединённой подгруппой H при различных ограничениях на H.

Теорема 5. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с циклической объединённой подгруппой H, причём $H \neq A$ и $H \neq B$. И пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы.*

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G финитно аппроксимируема.

2. Подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B.

3. Группа G является слабо π-мощной, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B.

Теорема 6. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с объединённой подгруппой H, нормальной в каждой из групп A и B, причём $H \neq A$ и $H \neq B$. И пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы.*

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G финитно аппроксимируема.

2. Подгруппа H финитно отделима в каждой из групп A и B.

3. Группа G является слабо π-мощной, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих объединению спектров групп A и B.

Теорема 7. *Пусть $G = (A * B; H)$ — свободное произведение групп A и B с объединённой подгруппой H, имеющей конечный индекс в каждой из групп A и B, причём $H \neq A$ и $H \neq B$. И пусть A и B — финитно аппроксимируемые почти разрешимые минимаксные группы.*

Тогда следующие три утверждения равносильны между собой.

1. Группа G финитно аппроксимируема.

2. В группе H существует подгруппа L конечного индекса, нормальная в G.

3. Группа G является слабо π-мощной, где π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы H.

Равносильность утвреждений 1 и 2 в теоремах 5, 6 и 7 доказана в работах [8], [9] и [10].

Список литературы

[1] P. Stibe, Conjugacy separability of certain free products with amalgamation, *Trans. Amer.Math. Soc.*, **156** (1971), 119–129.

[2] R. B. J. T. Allenby, The potency of cyclically pinched one-relator groups, *Arch. Math.*, **36** (1981), 204–210.

[3] B. Hartley, J. C. Lennox, A. H. Rhemtulla, Cyclically separated groups, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **26** (1982), 355–384.

[4] P. C. Wong, C. K. Tang, H. W. Gan, Weak potency of fundamental groups of graphs of groups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **33** (2010), 243–251.

[5] K. A. Hirsh, On infinite soluble groups, *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 81–85.

[6] C. Y. Tang, Conjugacy separability of generalized free products of certain conjugacy separable groups, *Canad. Math. Bull.*, **38** (1995), 120–127.

[7] A. Lubotzky, A. Mann, Residually finite groups of finite rank, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.,* **106** (1989), 185–188.

[8] Д. Н. Азаров, О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами, *Матем. заметки.*, **93** (2013), 483–491.

[9] Д. Н. Азаров, Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой, *Сиб. матем. журн.*, **56** (2015), 249–264.

[10] Д. Н. Азаров, О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга, *Сиб. матем. журн.*, **54** (2013), 1203–1215.

Конечные группы, факторизуемые тремя попарно перестановочными подгруппами

Балычев С. В., Селькин В. М.
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
sergej.balychev@gmail.com, vselkin@gsu.by

Все рассматриваемые в сообщении группы предполагаются конечными. Изучение групп, представимых в произведение своих двух или нескольких подгрупп, является классическим направлением в теории групп. Наиболее изученным является случай, когда группа факторизуется своими двумя подгруппами. Намного меньше работ посвящено исследованию ситуаций, когда группа факторизуется тем или иным способом своими тремя подгруппами. Отметим некоторые результаты в этом направлении. Согласно О. Кегелю [1] группа G называется трижды факторизуемой, если $G = AB = BC = AC$, где A, B, C — некоторые подгруппы группы G. В [1] была доказана нильпотентность группы G при условии нильпотентности подгрупп A, B и C и сверхразрешимость G при условии, что A и B нильпотентны, а C сверхразрешима. Л.С. Казарин [2] с использованием классификации конечных простых неабелевых групп установил разрешимость G, если A, B и C разрешимы. В работе [3] было начато исследование свойств групп $G = AB = BC = AC$, у которых подгруппы A, B и C принадлежат насыщенной формации $\mathfrak{F}$. Эти исследования были продолжены в работах [4–7]. С трижды факторизуемыми группами тесно связаны группы со следующим способом перемножения подгрупп. Пусть группа G факторизуется своими тремя подгруппами A, B и C следующим образом: $G = ABC = \{abc \,|\, a \in A, b \in B, c \in C\}$, причем $AB = BA, BC = CB$ и $CA = AC$. Обозначим через $M = AB$, $N = BC$ и $L = AC$. Тогда $G = MN = NL = LM$. Отсюда видно, что многие результаты, полученные для трижды факторизуемых групп можно распространить на группы вида $G = ABC$. Этот факт отмечен в более общем виде в работе [8]. Например, из приведенной выше теоремы Л.С. Казарина следует, что если AB, BC и CA – разрешимые подгруппы группы $G = ABC$, то G также разрешима. Обратный перенос теорем о свойствах групп вида $G = ABC$ на группы с факторизацией $G = MN = NL = LM$ является не столь очевидным. Поэтому изучение факторизаций $G = ABC$, где A, B и C – попарно перестановочные подгруппы группы G, представляет независимый интерес, что также подчеркивается недавними работами [9, 10].

В сообщении нами используются стандартные обозначения, определения, которые при необходимости можно найти в монографиях [11–13]. Напомним [14], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

Группа G называется w-сверхразрешимой, если любая силовская подгруппа группы из G является P-субнормальной в G. Класс w$\mathfrak{U}$ всех w-сверхразрешимых групп является наследственной насыщеной формацией, дисперсивных по Оре групп [14].

Согласно [14] обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

В работе [15] исследовались свойства групп, представимых в произведение своих $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп. Отметим, что в настоящее время формация w$\mathfrak{U}$ активно применяется при решении различных проблем теории групп, в частности, при изучении факторизаций групп, см., например, работы [15–17].

Нам потребуется определение и свойства еще одного класса групп, тесно связанного с классом всех сверхразрешимых групп.

Напомним, подгруппа H группы G называется субмодулярной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$ такая, что H_{i-1} — модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \ldots, s$. [18]

В [19] изучался класс всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами (обозначается через $sm\mathfrak{U}$), а также его подкласс $s\mathfrak{U}$ сильно сверхразрешимых групп, т. е. всех сверхразрешимых групп с субмодулярными силовскими подгруппами. Согласно [19] классы $sm\mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U}$ являются наследственными насыщенными формациями дисперсивных по Оре групп, причем $s\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$ и $sm\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Теорема 1. *Пусть группа $G = ABC$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A, B, C. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппы AB, AC, BC w-сверхразрешимы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G также w-сверхразрешима.*

(2) *Если подгруппы AB, AC, BC сверхразрешимы и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(3) *Если подгруппы AB, AC, BC сверхразрешимы и коммутант группы G нильпотентен, то G также сверхразрешима.*

(4) *Если подгруппы AB, BC, AC сильно сверхразрешимы и G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то G сильно сверхразрешима.*

Используя теорему 1, можно получить новые результаты о свойствах групп $G = ABC$ в терминах свойств строения и вложения факторов A, B и C.

Теорема 2. *Пусть группа $G = ABC$ является произведением своих попарно перестановочных подгрупп A, B, C. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппы A, B, C w-сверхразрешимы и $\mathbb{P}$-субнормальны в соответствующих произведениях AB, AC, BC и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(2) *Если подгруппы A, B, C сверхразрешимы и $\mathbb{P}$-субнормальны в соответствующих произведениях AB, AC, BC и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(3) *Если подгруппы A, B, C сверхразрешимы и $\mathbb{P}$-субнормальны в соответствующих произведениях AB, AC, BC и коммутант группы G нильпотентен, то G w-сверхразрешима.*

(4) *Если подгруппы A, B, C сильно сверхразрешимы и субмодулярны в соответствующих произведениях AB, AC, BC, причем G содержит нильпотентную нормальную подгруппу N и в факторгруппе G/N все силовские подгруппы элементарно абелевы, то G является $sm\mathfrak{U}$-группой.*

Список литературы

[1] O. H. Kegel, Zur Struktur mehrfach faktorisierter endlicher Gruppen, *Math. Z.* **87** (1965), 42-–48.

[2] Л. С. Казарин, Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами, *Укр. мат. журн.*, **34**:7-8 (1991), 947–950.

[3] А. Ф. Васильев, К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством, *Вопросы алгебры*, **3** (1987), 3–11.

[4] А. Ф. Васильев, О перечислении локальных формаций с условием Кегеля, *Вопросы алгебры.*, **3** (1995), 86–93

[5] A. Ballester-Bolinches, M. C. Martinez-Pastor, A. Pedraza-Aguilera, Finite trifactorized groups and formations, *J. Algebra.*, **226**:2 (2000), 990–1000.

[6] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, On formations with the Kegel property, *J. Group Theory.*, **8** (2005), 605–611.

[7] А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, Арифметические графы и классы групп, *Сиб. матем. журн.*, **60**:1 (2019), 55–73.

[8] Б. Амберг, Л. С. Казарин, Б. Хефлинг, Конечные группы с кратными факторизациями, *Фундаментальная и прикладная математика.*, **4**:4 (1998), 1251–1263.

[9] G. Busetto, E. Jabara, The fitting length of finite soluble groups I. – Hall subgroups, *Arch. Math.* (Basel), **106**:5 (2016), 409–416.

[10] G. Busetto, E. Jabara, The fitting length of finite soluble groups I. – Hall subgroups, *Arch. Math. (Basel)*, **106**:5 (2016), 409–416.

[11] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad, Products of Finite Groups, Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010, 334.

[12] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, М.: Наука, 1978, 272.

[13] K. Doerk, T. Hawkes, Finite soluble groups, Berlin/New-York: Walter de Gruyter, 1992, 891

[14] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа, *Сиб. матем. журн.*, **51**:6 (2010), 1270–1281.

[15] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О произведениях P-субнормальных подгрупп в конечных группах, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 59—67.

[16] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, A. A. Heliel, M. M. Al-Shomrani, Some results on Products of Finite Groups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. DOI 10.1007/s40840-015-0111-7.*

[17] A. Ballester-Bolinches, W. M. Fakieh, M. C. Pedraza-Aguilera, On Products of Generalised Supersoluble Finite Groups, *Mediterr. J Math. DOI.org/10.1007/s00009-019-1323-0.*

[18] I. Zimmermann, Submodular Subgroups in Finite Groups, *Math. Z.*, **202** (1989), 545–557.

[19] В. А. Васильев, Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами, *Сиб. матем. журн.*, **56**:6 (2015), 1277–1288.

Конечные группы с четырьмя классами сопряженных максимальных подгрупп[1]

Белоногов В. А.
Институт математики и механики УрО РАН
v.al.belonogov@gmail.com

Продолжается изучение конечных групп, имеющих точно 4 класса сопряжённых максимальных подгрупп. Группы с этим свойством названы $4M$-группами. В первой части [2] были описаны простые $4M$-группы и непростые неразрешимые $4M$-группы без нормальных подгрупп простого индекса. Во второй части [3] начато изучение конечных неразрешимых $4M$-групп, имеющих нормальную максимальную подгруппу.

В данной третьей части работы получено описание конечных непростых почти простых $4M$-групп. Нам потребуется следующее

Определение. *Пусть $S = L_2(q)$, где $q = p^f$, p — простое число, $p > 2$, $f \in \mathbb{N}$ и пусть $f = 2k$ чётно. Как известно, $Out(S) = \langle\delta\rangle \times \langle\phi\rangle \cong C_2 \times C_f$, где δ и ϕ — образы в $Out(S)$ диагонального и полевого автоморфизмов группы S (при этом $S.\langle\delta\rangle = PGL_2(q)$ и $S.\langle\phi\rangle = P\Sigma L_2(q)$). Теперь мы определяем группу $PGL_2^-(q) := S.\langle\delta\phi^k\rangle$ $(|\langle\delta\phi^k\rangle| = 2)$.*

Главным результатом третьей части этого исследования является следующая

Теорема. *Пусть G — конечная непростая почти простая группа с простым цоколем S. Тогда группа G является $4M$-группой если и только если $S \cong L_2(q)$, где $q = p^f$, p — простое число, $f \in \mathbb{N}$, и выполнено одно из условий:*
(1) *$q = 2^r$, где r — простое нечётное число и $G \cong P\Sigma L_2(q)$;*
(2) *$q = p^{2^m}$, $p > 2$, $m \in \mathbb{N}$ и G изоморфна $PGL_2(q)$ или $PGL_2^-(q)$;*
(3) *$q = p$, где $p = 5$ или $p \equiv \pm 1\ (mod\, 8)$ и $G \cong PGL_2(q)$.*

Список литературы

[1] В. А. Белоногов, Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп, *Матем. сборн.* **131**: 2 (1986), 225–239.

[2] В. А. Белоногов, Конечные группы с четырьмя классами максимальных подгрупп. I, *Труды Ин-та математики и механики УрО РАН.* **23**: 4 (2017), 52–62.

[3] В. А. Белоногов, Конечные группы с четырьмя классами максимальных подгрупп. II, *Сибирские электр. матем. известия.* **15** (2018), 86–91.

[4] G. Pazderski, *Ü*ber maximal Untergruppen endlicher gruppen, *Math. Nachr.* **26**: 6 (1964), 307–319.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 20-01-00456).

О дистанционно регулярных графах с массивами пересечений $\{(l+1)a, la, a+1; 1, 1, la\}$

Белоусов И. Н., Голубятников М. П., Махнев А. А.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
i_belousov@mail.ru, mike_ru@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

Рассмотрим массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 является псевдогеометрическим для сети. В [1] найдена бесконечная серия допустимых массивов пересечений $\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2), (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\}$. Случай $c_2=1$ исследован в [9], а случай $c_2=2$ – в [6]. В данной работе рассматриваются дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{(l+1)a, la, a+1; 1, 1, la\}$.

Предложение. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{(l+1)a, la, a+1; 1, 1, la\}$, $z=\sqrt{a^2+4al+4a+4}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) Γ имеет собственные значения $a(l+1), (a+z-2)/2, -1, (a-z-2)/2$ кратностей $m_0=1$, $m_1=2(al+a+1)^2a^2(l+1)l/(a^3l+4a^2l^2+za^2l+4a^2l-2zal+a^2+8al-za+4a-2z+4)$, $m_2=(a+1)a(l+1)$, $m_3=2(al+a+1)^2a^2(l+1)l/(a^3l+4a^2l^2-za^2l+4a^2l+2zal+a^2+8al+za+4a+2z+4)$;

(2) число $a^2+4al+4a+4$ является квадратом целого числа $z=a+2+2x$, $x^2+2x=a(l-x)$, x делит $a1$, a и $l-x$ делят $x^2+(a+2)x$, l делит $x(x+a+2)$.

Если $a=x$, то $l=2x+2$, $z=3x+2$ и Γ имеет массив пересечений $\{x(2x+3), 2x(x+1), x+1; 1, 1, 2x(x+1)\}$.

Если $a=x+2$, то $l=2x$, $z=3x+4$ и Γ имеет массив пересечений $\{(2x+1)(x+2), 2x(x+2), x+3; 1, 1, 2x(x+2)\}$.

Теорема. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если Γ имеет массив пересечений $\{(2x+1)(x+2), 2x(x+2), x+3; 1, 1, 2x(x+2)\}$, то $k_2=2x(2x+1)(x+2)^2$, $k_3=(2x+1)(x+3)(x+2)$, Γ имеет собственные значения $2x^2+5x+2, 2x+2, -1, -x-2$ кратностей $m_0=1$, $m_1=2(2x+1)(x+2)^2(x+1)^2/(3x+4)$, $m_2=(2x+1)(x+3)(x+2)$, $m_3=(2x+3)^2(2x+1)(x+2)x/(3x+4)$;

(2) если Γ имеет массив пересечений $\{x(2x+3), 2x(x+1), x+1; 1, 1, 2x(x+1)\}$, то $k_2=2(2x+3)(x+1)x^2$, $k_3=(2x+3)(x+1)x$, Γ имеет собственные значения $2x^2+3x, 2x, -1, -x-2$ кратностей $m_0=1$, $m_1=2(2x+3)(x+1)^3x/(3x+2)$, $m_2=(2x+3)(x+1)x$, $m_3=(2x+3)(2x+1)^2x^2/(3x+2)$.

Следствие 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{x(2x+3), 2x(x+1), x+1; 1, 1, 2x(x+1)\}$. Тогда либо $x=1$ и Γ — граф Сильвестра, либо $x=6$ и Γ имеет массив пересечений $\{90, 84, 7; 1, 1, 84\}$.

Следствие 2. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{(2x+1)(x+2), 2x(x+2), x+3; 1, 1, 2x(x+2)\}$. Тогда либо $x=2$ и Γ имеет массив пересечений $\{20, 16, 5; 1, 1, 16\}$, либо $x=12$ и Γ имеет массив пересечений $\{350, 336, 15; 1, 1, 336\}$.

Список литературы

[1] A. Makhnev, M. Golubyatnikov, W. Guo, Inverse problems in distance-regular graphs: nets, *Communications in Mathematics and Statistics*, **7**:1 (2019), 69–83.

[2] M. Golubyatnikov, A. Makhnev, On automorphisms of distance-regular graphs with intersection arrays $\{nm-1, nm-n+m-1, n-m+1; 1, 1, nm-n+m-1\}$, *Algebra & Logika*, **59** (2020).

[3] A. Makhnev, M. Nirova, On distance-regular graphs with $c_2=2$, *Discrete Mathem.*, **32**:1 (2020), 74–80.

Обратные задачи в классе Q-полиномиальных графов

Белоусов И. Н., Махнев А. А.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

Одним из направлений в решении обратных задач теории дистанционно регулярных графов является восстановление массива пересечений графа Γ, когда Γ_3 является сильно регулярным графом из некоторого семейства известных графов. К таким классам сильно регулярных графов относятся прежде всего псевдогеометрические графы для сетей, двойственных 2-схем и обобщенных четырехугольников. Массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3 с псевдогеометрическим графом Γ_3 для сетей были найдены А.А. Махневым, М.П. Голубятниковым и Го Вэнь-бинем [1], для двойственных 2-схем И.Н. Белоусовым и А.А. Махневым [2], для обобщенных четырехугольников А.А. Махневым и М.С. Нировой [6]. В этих работах найдены бесконечные серии допустимых массивов пересечений в данных классах графов. Условия, при которых дистанционно регулярные графы из указанных серий являются Q-полиномиальными, найдены в следующей теореме.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если Γ имеет массив пересечений $\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2), (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\}$, то Γ является Q-полиномиальным графом только в случае $c_2=(u^2+2u-m^2+2m-1)(u-m)/((u+m-1)(u-m+1))$;

(2) если Γ имеет массив пересечений $\{mt, (t+1)(m-1), t+1; 1, 1, (m-1)t\}$, $m\le t$, то Γ не является Q-полиномиальным графом;

(3) если Γ имеет массив пересечений $\{lt, (t-1)(l-1), t+1; 1, t-1, (l-1)t\}$, то Γ является Q-полиномиальным графом только в случае $t=(l^2-1)/2-l$.

(4) если Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$, то Γ не является Q-полиномиальным графом.

Следствие. Пусть Γ — Q-полиномиальный граф с массивом пересечений $\{c_2(u^2-m^2)+2c_2m-c_2-1, c_2(u^2-m^2), (c_2-1)(u^2-m^2)+2c_2m-c_2; 1, c_2, u^2-m^2\}$. Тогда либо Γ — свернутый 7-куб с массивом пересечений $\{7,6,5;1,2,3\}$, либо Γ имеет массив пересечений $\{191,156,117;1,4,39\}$.

Список литературы

[1] A. Makhnev, M. Golubyatnikov, W. Guo, Inverse problems in distance-regular graphs: nets, *Communications in Mathematics and Statistics*, **7**:1 (2019), 69–83.

[2] I. Belousov, A. Makhnev, Inverse problems in distance-regular graphs: dual 2-designes, *Trudy IMM UrO RAN*, **25**:4 (2019), 44–51.

[3] A. Makhnev, M. Nirova, Inverse problems in distance-regular graphs: generalized quadrangles, *Sibirean electr. Math. Reports*, **15** (2018), 927–934.

К теории графов Шилла

Белоусов И. Н., Махнев А. А., Нирова М. С.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Кабардино-Балкарский госуниверситет
i_belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru, nirova_m@mail.ru

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла положим $a = a_3$ и $b = k/a$ [2].

Ранее изучались графы Шилла с $b_2 = c_2$ (Белоусов И.Н., Махнев А.А. [2]) и с $b_2 = sc_2$ (Белоусов И.Н. [6]). В каждой из бесконечных серий допустимых массивов пересечений графов Шилла, найденных Юришичем и Видали [1], существует лишь конечное число графов [2].

На данный момент были известны только три бесконечные серии допустимых массивов пересечений графов Шилла:

1) $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ (графы с $b_2 = c_2$ и нецелыми собственными значениями),

2)$\{2r(2r^2-1)(2r+1), (2r-1)(2r(2r^2-1)+2r^2), r(2r^2+r-1); 1, r(2r^2+r-1), (2r^2-1)(4r^2-1)\}$ (Q-полиномиальные графы с $b_2 = c_2$),

3) $\{(q-1)q, (q+1)(q-2), q+1; 1, 1, (q-2)q)\}$.

Если в последней серии q является степенью простого числа, то граф существует (это унитарный неизотропный граф [1, стр. 383]). Если небольшое q не является степенью простого числа, то граф имеет массив пересечений $\{30, 28, 7; 1, 1, 24\}$ ($q = 6$), $\{90, 88, 11; 1, 1, 80\}$ ($q = 10$) или $\{132, 130, 13; 1, 1, 120\}$ ($q = 12$).

Мы докажем, что в серии 1) графов нет, найдем собственные значения графов Шилла и построим 7 новых бесконечные серий допустимых массивов пересечений графов Шилла (все с $\theta_2 = 0$).

Теорема 1. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ не существуют.

Следующие массивы из [1] считались допустимыми.

Следствие 1. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ и $\{50, 44, 5; 1, 5, 40\}$ не существуют.

Теорема 2. Собственные значения дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ являются целыми тогда и только тогда, когда $b_2 = a + b - c_2 + (b-1)c_2/t - t$ для некоторого целого числа t. В этом случае неглавные собственные значения графа равны a, $-b+t$, $-(bc_2+bt-c_2)/t$.

Следствие 2. Пусть Γ — граф Шилла с $\theta_2 = 0$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) $c_2 = b(a-b_2)$, $a - b_2 = (a, b_2)$, $a - b_2 = (a, b_2)$, $b_2 = s(a-b_2)$, b делит b_2 и s;

(2) для $b_2 = br$, $s = bl$ получим $\theta_1 = (bl+1)r/l$, $r = ln$, $a - b_2 = n$ и Γ имеет массивов пересечений $\{(bl+1)bn, (bln+n+1)(b-1), bln; 1, bn, (bl+1)(b-1)n\}$ и неглавные собственные значения $(bl+1)n, 0, -bn-b+n$, причем все числа пересечений целые;

(3) если $n = 1$, то $b_2 = br, a = br+1, c_2 = b$, $2b-1$ делит $(r+4)(r+2)$ и

(i) если $2b-1 = (r+2)/2$, то $r = 4m$ ($m > 3$) и массив пересечений графа Γ принадлежит бесконечной серии допустимых массивов $\{(2m+1)^2(m+1), 2(2m^2+2m+1)m, 4(m+1)m; 1, m+1, (2m+1)^2m\}$,

(ii) если $2b-1 = r+2$, то $r = 2m-1$ и массив пересечений графа Γ принадлежит бесконечной серии допустимых массивов $\{(2m+1)(m+1)m, (2m^2+m+1)m, (2m-1)(m+1); 1, m+1, (2m+1)m^2\}$ (при $m = 1$ получаем массив $\{6, 4, 2; 1, 2, 3\}$, а при $m = 2$ — $\{30, 22, 9, 1, 3, 20\}$),

(iii) если $2b-1 = (r+4)/2$, то $r = 4(2m-1)-2$ и массив пересечений графа Γ принадлежит бесконечной серии допустимых массивов $\{2(16m^2-12m+1)m, 2(4m-1)(2m-1)^2, 4(4m-3)m; 1, 2m, (16m^2-12m+1)(2m-1)\}$ (при $m = 1$ получаем массив $\{10, 6, 4, 1, 2, 5\}$),

(iv) если $2b-1 = r+4$, то Γ имеет массив пересечений $\{12, 10, 3, 1, 3, 8\}$,

(v) если $2b-1=(r+4)(r+2)$, то $r=2m-1$ и массив пересечений графа Γ принадлежит бесконечной серии допустимых массивов $\{2(2m^2+2m-1)(2m+1)(m+1)^2, 2(2m^2+4m+1)(2m+3)m^2, 2(2m-1)(m+1)^2; 1, 2(m+1)^2, (2m^2+4m+1)(2m^2+2m-1)(2m+1)\}$ (при $m=1$ имеем массив пересечений $\{72, 70, 8; 1, 8, 63\}$);

(4) если $n=2$, то $b_2=2bl, a=2bl+2, c_2=2b$, $3b-2$ делит $(4l+9)4(2l+3)$, $2l+3$ делит $3b(b-1)(3b-2)$ и

(i) если $3b-2=2l+3$, то $b=(2l+5)/3$, $l=3m-1$ для некоторого целого числа m и массив пересечений графа Γ принадлежит бесконечной серии допустимых массивов $\{2(6m+1)(2m+1)m, 2(12m^2+2m+1)m, 2(3m-1)(2m+1); 1, 4m+2, 4(6m+1)m^2\}$ с неглавными собственными значениями $2(6m+1)m$, 0, $-6m-1$ (при $m=1$ получим массив $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$),

(ii) если $3b-2=2(2l+3)$, то $b=(4l+8)/3$, $l=3m-2$ для некоторого целого числа m и массив пересечений графа Γ принадлежит бесконечной серии допустимых массивов $\{8(6m-1)(2m-1)m, (24m^2-16m+3)(4m-1), 8(3m-2)m; 1, 8m, 2(6m-1)(4m-1)(2m-1)\}$ с неглавными собственными значениями $2(6m-1)(2m-1), 0, -12m+2$ (при $m=1$ получим массив $\{40, 33, 8; 1, 8, 30\}$),

(iii) если $3b-2=(4l+9)/3$, то $b=(4l+15)/9$, $l=27m-24$ для некоторого целого числа m и массив пересечений графа Γ принадлежит бесконечной серии допустимых массивов $\{6(36m-31)(9m-7)(4m-3), 6(36m-29)(6m-5)^2, 18(9m-8)(4m-3); 1, 24m-18, 4(36m-31)(9m-7)(6m-5)\}$ с неглавными собственными значениями $2(36m-31)(9m-7), 0, -36m+29$ (при $m=1$ получим массив $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$),

(iv) если $3b-2=4l+9$, то $b=4t+1$ и $6t-1$ делит 30, поэтому $t=1$ и мы получим массив пересечений $\{60, 52, 10; 1, 10, 48\}$.

Из доказательства леммы 10 [2] следует, что в графе Шилла c_2 делит $(b+a)b_2$ и $(b+a)b_2=p^3_{33}c_2+(1+a)c_2$. Для всех допустимых массивов пересечений графов Шилла с b, не большим 5 ([2] и [6]), выполняется неравенство $c_2\le b_2$. Можно выдвинуть следующее предположение.

Гипотеза. Дистанционно регулярный граф Шилла с $c_2>b_2$ не существует.

Рассмотрим экстремальный случай $(b+a)b_2=(1+a)c_2$ ($p^3_{33}=0$). Заметим, что граф Γ_3 сильно регулярен тогда и только тогда, когда $b_2=1+a$. В этом случае Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), a+1; 1, a+b, a(b-1)\}$, $c_2=a+b$ делит $(a+1)(b-1)$ и по [6, лемма 3] $\bar\Gamma_3$ — псевдогеометрический граф для $pG_{a(b-1)}(ab, (a+1)(b-1)/(a+b))$.

Предложение 1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), a+1; 1, a+b, a(b-1)\}$ имеет неглавные собственные значения $a, -1, -(a+2b)$ кратностей $1/2(ab+a+2b)(ab+1)b/(a+b)^2$, $(ab+a+2b)ab/(a+2b-1)$, $1/2(ab+1)(a+1)a(b-1)b/((a+2b-1)(a+b)^2)$.

Следствие 2. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), a+1; 1, a+b, a(b-1)\}$ не существует.

В [1] получено доказательство следствия 2, использующее тот факт, что Γ_3 — сильно регулярный граф без треугольников. Нами получено доказательство с помощью изучения спектра графа Γ.

Теорема 3. Если дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ и $(a+b)b_2=(a+1)c_2$ является Q-полиномиальным, то $\theta_3=-b/2(b+1-(b-1)^2/(2a+b+1))$ и $2a+b+1$ делит $b(b-1)^2/2$. Далее, $2a+b+1$ не равно $b(b-1)$ и $(b-1)^2$.

Список литературы

[1] J. Koolen, J. Park, Shilla distance-regular graphs, *Europ. J. Combin.*, **31** (2010), 2064–2073.

[2] I. Belousov, A. Makhnev, To the theory of Shilla graphs with $b_2=c_2$, *Sibirean electr. Math. Reports*, **14** (2017), 1064–1077.

[3] I. Belousov, Distance-regular Shilla graphs with $b_2=sc_2$, *Trudy Institute of Mathematics and Mechanics*, **24**:3 (2018), 16–26.

[4] A. A. Jurišič, J. Vidali, Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3, *Des. Codes Cryptogr.*, **65** (2012), 29–47.

[5] A. Brouwer, A. Cohen, A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1989, 495.

[6] A. Makhnev, M. Nirova, On distance-regular Shilla graphs, *Matem. Zametki*, **103**:4 (2018), 558–571.

[7] I. Belousov, Codes in distance-regular Shilla graphs, *Trudy Institute of Mathematics and Mechanics*, **24**:2 (2018), 34–39.

Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$

Биткина В. В., Гутнова А. К., Махнев А. А.
Северо-Осетинский госуниверситет, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по предложению 5 из [1] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$.

В случае $c = a - 1 = q$, $p = q - 2$ по [1] граф Γ имеет массив пересечений $\{q^2 - 1, q^2 - 2q, q + 2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q > 6$, спектр $(q^2-1)^1, (2q-1)^{q(q^2-1)/6}, -1^{(q+1)(q^2+q-2)/2}, -(q+1)^{q(q-1)(q-2)/3}$ и $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(q-1, 2q+2)$. При $q = 7$ получим массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p = 7$, $\alpha_1(g) = 49(l + 1 + 3s)$, $\alpha_3(g) = 49(2l + 1)$, и $3l + 2 + 3s \le 7$;

(2) Ω является 1-кликой, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 3(7l + 16 + 21s)$, $\alpha_3(g) = 42l + 54$ и $9l + 9s + 15 \le 49$;

(3) Ω является 7-кокликой, любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 14l - 18 + 42s$ и $\alpha_3(g) = 28l - 36$;

(4) Ω содержит ребро и либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ и $p \le 11$, либо Ω — объединение двух изолированных 4-клик, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 35s + 20 + 105t$ и $\alpha_3(g) = 5 + 70s$.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Если $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/K$, то $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, $\bar{L}$ точно действует на K, $\bar{L} \cong L_2(7), A_5, A_6, PSp_4(3)$ и для полного прообраза L группы $\bar{L}$ имеем $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ и $|K| = 7^3$ в случае $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K| = 7^4$ в противном случае.

Список литературы

[1] A. A. Jurišič, J. Vidali, Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3, *Des. Codes Cryptogr.*, **65** (2012), 29-47.

Новые свойства кратно частично насыщенных формаций конечных групп

Васильев А. Ф., Симоненко Д. Н.
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Белорусский государственный университет транспорта
formation56@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения из монографий [2–4].

В последние годы активно исследуются структурные свойства и приложения n-кратно ω-насыщенных формаций групп, концепция которых была предложена в 1998 году А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в работе [4].

Классической задачей в теории классов конечных групп является изучение формаций Фиттинга, т.е. нормально наследственных формаций замкнутых относительно взятия произведений нормальных подгрупп. В этом направлении выделяется следующий известный результат Брайса и Косси [5].

Теорема 1. Разрешимая наследственная формация $\mathfrak{F}$ является формацией Фиттинга тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — примитивная формация.

Эта теорема получила развитие в работе [6] Баллестера-Болинше и Эскверо, в которой были установлены необходимые и достаточные условия насыщенности произвольной наследственной формации Фиттинга.

Отметим, что всякая примитивная формация является тотально насыщенной формацией. Тотально насыщенные формации представляют собой предельный случай понятия кратно насыщенной формации, предложенного в 1987 году А.Н. Скибой в работе [7]. Поэтому естественной является задача: по аналогии с теоремой 1 охарактеризовать n-кратно ω-насыщенные формации в терминах определенных произведений нормальных подгрупп. Эта задача нами была рассмотрена для частного случая n-кратно насыщенных формаций в статье [8].

В настоящем сообщении предлагается решение отмеченной выше задачи.

Пусть ω — непустое множество простых чисел. Напомним [4], что формация $\mathfrak{F}$ называется ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, удовлетворяющая условию $G/L \in \mathfrak{F}$, где $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$.

В наших исследованиях использовалось эквивалентное определение ω-насыщенной формации, найденное в [4]. Пусть ω — непустое множество простых чисел и через ω' обозначается дополнение к ω во множестве всех простых чисел.

Всякую функцию вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{\text{формации групп}\}$$

называют ω-локальным спутником. Если f — произвольный ω-локальный спутник, то через $LF_\omega(f)$ определяется следующий класс групп

$$(G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)),$$

где $G_{\omega d}$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G, у которой для любого ее композиционного фактора H/K имеет место $\pi(H/K) \cap \omega \neq \emptyset$, $F_p(G)$ — наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, равная пересечению централизаторов всех pd-главных факторов группы G.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω-локального спутника f, то говорят, что $\mathfrak{F}$ является ω-локальной формацией, а f — ее ω-локальный спутник. Согласно [4], всякая ω-локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник F, что $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}(F_p)$ для всех $p \in \omega$, где $\mathfrak{F}(F_p) = form(G/F_p(G)|G \in \mathfrak{F})$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}(F_p) = \emptyset$, если $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Такой спутник называется каноническим и обозначается большими латинскими буквами.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется $D_{\mathfrak{X}}$-замкнутым, если каждая группа $G = MN$, где M и N — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G и $M \cap N \in \mathfrak{X}$, принадлежит $\mathfrak{F}$.

По определению пустая формация является $D_{\mathfrak{X}}$-замкнутой для любого класса $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — ω-насыщенные формации, F и H — канонические спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Формация $\mathfrak{F}$ $D_{\mathfrak{H}}$-замкнута тогда и только тогда, когда формация $F(p)$ $D_{H(p)}$-замкнута для каждого простого $p \in \omega$.

Следствие 1. Пусть ω — множество всех простых чисел и $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — насыщенные формации, F и H — максимальные внутренние локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Формация $\mathfrak{F}$ является $D_{\mathfrak{H}}$-замкнутой тогда и только тогда, когда $F(p)$ — $D_{H(p)}$-замкнутая формация для каждого простого p.

Следствие 1 имеет многочисленные приложения для конкретных насыщенных формаций. Отметим следующие два результата.

Следствие 2. Если группа $G = AB$, где A и B — нормальные p-сверхразрешимые подгруппы, а $A \cap B$ — p-нильпотентная подгруппа в G, то G — p-сверхразрешимая группа.

Следствие 3. Если группа $G = AB$, где A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы, а $A \cap B$ — нильпотентная подгруппа в G, то G — сверхразрешимая группа.

Чтобы сформулировать следующие результаты, нам потребуется еще одно определение из [4]. Всякая формация считается 0-кратно ω-насыщенной. При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно ω-насыщенными формациями. Формация $\mathfrak{F}$ называется тотально ω-насыщенной, если она n-кратно ω-насыщена для всех n.

Следствие 4. Пусть n — неотрицательное целое число. Любая n-кратно ω-насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является $D_{\mathfrak{N}^n_{\omega}}$-замкнутой.

Следствие 5. Любая ω-насыщенная формация является $D_{\mathfrak{N}_{\omega}}$-замкнутой.

Следствие 6. Пусть n — неотрицательное целое число. Любая n-кратно насыщенная формация $\mathfrak{F}$ является $D_{\mathfrak{N}^n}$-замкнутой.

Теорема 3. Пусть n — неотрицательное целое число. Разрешимая наследственная формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно ω-насыщенной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $D_{\mathfrak{N}^n_{\omega}}$-замкнутая формация.

Следствие 7. Разрешимая наследственная формация $\mathfrak{F}$ является ω-насыщенной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $D_{\mathfrak{N}_{\omega}}$-замкнутая формация.

Следствие 8. Разрешимая наследственная формация $\mathfrak{F}$ является p-насыщенной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $D_{\mathfrak{N}_p}$-замкнутая формация.

Следствие 9. Разрешимая наследственная формация $\mathfrak{F}$ является тотально ω-насыщенной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — $D_{\mathfrak{S}_{\omega}}$-замкнутая формация.

Имеются примеры, показывающие, что требования разрешимости и наследственности формации в условии теоремы 3 являются существенными.

Список литературы

[1] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, М: Наука, 1978.

[2] K. Doerk, T. O. Hawkes, Finite soluble groups, Berlin-New York: Walter De Gruyter, 1992.

[3] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, Classes of Finite Groups, Springer, 2006.

[4] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп, *Математические труды*, **2**:2 (1999), 114–147.

[5] R. A. Bryce, J. Cossey, Fitting formations of finite soluble groups, *Math. Z.*, **127**:3 (1972), 217–223.

[6] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, On a theorem of Bryce and Cossey, *J. Austral Math. Soc. Ser. A*, **57** (1998), 455–460.

[7] А. Н. Скиба, Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины, *Вопросы алгебры*, Минск: Изд-во "Университетское **3** (1987), 21–31.

[8] А. Ф. Васильев, Д. Н. Симоненко, О формациях и произведениях нормальных подгрупп конечных групп, *Доклады НАН Беларуси*, **50**:6 (2006), 31–35.

Субмодулярные подгруппы конечных групп и формационная субнормальность

Васильев В. А.
ИООО "Эксадел"
VovichX@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. Понятие модулярной подгруппы, т. е. модулярного элемента в смысле Куроша [1, гл. 2, с. 43] решетки всех подгрупп группы, является одним из обобщений нормальной подгруппы. Подгруппа M группы G называется модулярной в G, если выполняются следующие условия:

1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и

2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Свойство нормальности, как и модулярности не является транзитивным для подгрупп. В работе [2] И. Циммерман было введено понятие субмодулярной подгруппы, которое обобщает понятие субнормальной подгруппы и обладает транзитивным свойством.

Подгруппа H группы G называется субмодулярной в G [2], если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$ такая, что H_{i-1} — модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \ldots, s$.

В [2] были найдены некоторые свойства субмодулярных подгрупп и начато изучение групп с заданными субмодулярными подгруппами, в частности, с субмодулярными силовскими подгруппами. В [3] были установлены свойства класса $sm\mathfrak{U}$ всех групп, в которых любая силовская подгруппа субмодулярна. Было доказано, что данный класс образует наследственную насыщенную формацию и найдено его локальное задание. Одним из центральных результатов работы [3] было выделение и изучение класса $s\mathfrak{U}$ всех сильно сверхразрешимых групп (т.е. сверхразрешимых групп, в которых любая силовская подгруппа субмодулярна). Также было установлено, что $s\mathfrak{U}$ образует наследственную насыщенную формацию и найден его локальный экран.

Настоящее сообщение посвящено дальнейшему исследованию свойств субмодулярных подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если подгруппа H является субмодулярной в G, то H является $s\mathfrak{U}$-субнормальной в G.*

(2) *Любая силовская подгруппа из G субмодулярна в G тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа из G $s\mathfrak{U}$-субнормальна в G.*

Отметим, что из $s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$ и (1) теоремы следует $sm\mathfrak{U}$-субнормальность H в G всякий раз, как H субмодулярна в G. Кроме того, обратное утверждение к (1) теоремы в общем случае не выполняется. Например, группа $G = AB$, где $A \simeq Z_7$ и $B \simeq \mathrm{Aut}(Z_7) \simeq Z_2 \times Z_3$, является сильно сверхразрешимой. Поэтому в G любая подгруппа $s\mathfrak{U}$-субнормальна. Легко проверяется, что подгруппа B не субмодулярна в G.

Список литературы

[1] R. Schmidt, Subgroup Lattices of Groups, Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

[2] I. Zimmermann, Submodular Subgroups in Finite Groups, *Math. Z.*, **202** (1989), 545–557.

[3] В. А. Васильев, Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами, *Сиб. матем. журн.*, **56**:6 (2015), 1277–1288.

Пермутируемые подгруппы и сверхразрешимость конечных групп

Васильева Т. И.
Белорусский государственный университет транспорта
tivasilyeva@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Пусть группа G имеет три подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G. Хорошо известно, что G абелева в случае, когда G_i абелева для $i = 1, 2, 3$. Из работ Виландта [1] и Кегеля [3] следует разрешимость (нильпотентность) группы G, если для любого $i = 1, 2, 3$ подгруппа G_i является разрешимой (соответственно нильпотентной). Однако, если G_1, G_2 и G_3 сверхразрешимы, то группа G не всегда сверхразрешима. Ряд достаточных условий сверхразрешимости группы G со сверхразрешимыми подгруппами G_1, G_2 и G_3 был найден в работах [3–7]. Настоящее сообщение относится к этому направлению исследования групп.

Пусть H — подгруппа группы G. Пермутизатором [8, с. 27] H в G называется подгруппа $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x\rangle H = H\langle x\rangle\rangle$.

Подгруппа H группы G называется [9]:

(1) пермутируемой в G, если $P_G(H) = G$;

(2) сильно пермутируемой в G, если $P_U(H) = U$ для любой подгруппы U из G такой, что $H \leq U \leq G$.

В группе G пермутируемые подгруппы не всегда являются сильно пермутируемыми. В качестве примера выступает силовская 3-подгруппа Z_3 группы $G = PSL(2, 7)$. Так как $P_G(Z_3) = G$, подгруппа Z_3 пермутируема в G. В тоже время $P_U(Z_3) = Z_3$ для подгруппы U, изоморфной знакопеременной группе A_4 степени 4, и содержащей Z_3. Поэтому Z_3 не сильно пермутируема в G.

Теорема. *Пусть группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G. Если G_1, G_2 и G_3 сильно пермутируемы в G, то G — сверхразрешимая группа.*

Заметим, если индекс $|G : M|$ максимальной подгруппы M группы G является простым числом, то ясно, что $P_G(M) = G$, т. е. M пермутируема (сильно пермутируема) в G. Кроме того, в любой сверхразрешимой группе G с $|\pi(G)| \geq 3$ найдутся различные простые числа p_1, p_2, p_3 из $\pi(G)$ и максимальные в G подгруппы G_1, G_2, G_3 такие, что G_i содержит холлову ${p_i}'$-подгруппу, при этом G_i сверхразрешима и $|G : G_i| = p_i$, $i = 1, 2, 3$. Ввиду этого получается

Следствие ([10]). *Группа G является сверхразрешимой с порядком, имеющим самое малое три различных простых делителя, тогда и только тогда, когда существуют три максимальные сверхразрешимые подгруппы из G, чьи индексы являются тремя различными простыми числами.*

Список литературы

[1] H. Wielandt, Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierbaren Gruppen, *J. Austral. Math. Soc.*, **1**:2 (1960), 143–146.

[2] O. Kegel, Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen, *Math. Z.*, **87**:1 (1965), 42–48.

[3] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, Рекурсивно распознаваемые локальные формации конечных групп, *Проблемы физики, математики и техники*, **1**:1 (2009), 44–50.

[4] N. Flowers, T. P. Wakefield, On a group with three supersolvable subgroups of pairwise relatively prime indices, *Arch. Math.*, **95**:4 (2010), 309–315.

[5] W. Guo, A. N. Skiba, On factorisations of finite groups with $\mathfrak{F}$-hypercentral intersections of the factors, *J. Group Theory*, **14** (2011), 695–708.

[6] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, Triple Factorizations and Supersolubility of Finite Groups, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **59**:2 (2016), 301–309.

[7] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, К. Л. Парфенков, Конечные группы с тремя заданными подгруппами, *Сиб. матем. журн.*, **59**:1 (2018), 65–77.

[8] Between nilpotent and solvable / M. Weinstein (Editor) Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.

[9] А. Ф. Васильев, В. А. Васильев, Т. И. Васильева, О пермутируемых подгруппах конечных групп, *Сиб. матем. журн.*, **55**:2 (2014), 285–295.

[10] K. Wang, Finite group with two supersoluble subgroups of coprime indices, *Northeast. Math. J.*, **17**:2 (2001), 221–225.

О конечных группах с заданной факторизацией расширенно сверхразрешимыми подгруппами

Вегера А. С.
Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, ИООО "Эксадел"
vegera.artem@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Произведение G_1G_2 подгрупп G_1 и G_2 группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда G_1 и G_2 являются перестановочными, то есть $G_1G_2 = G_2G_1$. Группа G называется произведением попарно перестановочных подгрупп $G_1, G_2, \cdots, G_n$, если $G = G_1G_2 \cdots G_n$ и $G_iG_j = G_jG_i$ для любых целых i и j, где $1 \leq i, j \leq n$.

Особое место при изучении групп $G = G_1G_2 \cdots G_n$ занимает случай нахождения зависимости свойств группы G от свойств парных произведений G_iG_j. Из работы [1] О. Кегеля следует, что если каждое произведение G_iG_j нильпотентно, то и группа G нильпотентна. Л.С. Казарин в работе [2] показал, что если каждое из произведений G_iG_j разрешимо, то группа G также разрешима. Ряд результатов полученных в данном направлении до 2010 года отражен в монографии [3]. В работе [4] изучались свойства группы $G = G_1G_2 \cdots G_n$ при дополнительном ограничении, когда подгруппы G_i и G_j являются взаимно sn-перестановочными подгруппами для любых пар i и j. В настоящем сообщении продолжены исследования в данном направлении.

Напомним [5], что подгруппа H группы G называется K-$\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается через H K-$\mathbb{P}$-sn G), если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для $i = 1, \ldots, n$.

Частным случаем этого понятия является понятие $\mathbb{P}$-субнормальной [6] в G подгруппы H, т. е., когда либо $H = G$, либо имеется отмеченная выше цепь подгрупп, для которой $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

В работе [5] изучались группы $G = G_1G_2$, где G_1 и G_2 являются K-$\mathbb{P}$-субнормальными в G. Естественно возникает проблема обобщения соответствующих результатов работ [4, 5] для случая группы, факторизуемой произвольным числом подгрупп.

Проблема. Пусть $G = G_1G_2 \cdots G_n$ — произведение попарно перестановочных подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n, где $n \geq 2$, причем для любой пары чисел $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, подгруппа G_i K-$\mathbb{P}$-sn G_iG_j и подгруппа G_j K-$\mathbb{P}$-sn G_iG_j. Что можно сказать о свойствах группы G в зависимости от строения подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n?

Группа G называется расширенно сверхразрешимой (кратко w-сверхразрешимой) [6], если любая ее силовская подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.

Теорема 1. *Пусть $G = G_1G_2 \ldots G_n$ — произведение попарно перестановочных расширенно сверхразрешимых подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n. Если для любой пары $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, подгруппа G_i* K-$\mathbb{P}$-*sn G_iG_j, подгруппа G_j* K-$\mathbb{P}$-*sn G_iG_j и индексы $|G_iG_j : G_i|$ и $|G_iG_j : G_j|$ взаимно просты, то G расширенно сверхразрешима.*

Следствие 1.1 [4, теорема D]. *Пусть $G = G_1G_2 \cdots G_n$ — произведение попарно взаимно sn-перестановочных (взаимно перестановочных)* w-*сверхразрешимых подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n. Если для любой пары $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, где $i \neq j$, индексы $|G_iG_j : G_i|$ и $|G_iG_j : G_j|$ взаимно просты, то G* w-*сверхразрешима.*

Напомним [6], что обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N из G, для которой G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

Теорема 2. *Пусть $G = G_1G_2 \ldots G_n$ — произведение попарно перестановочных расширенно сверхразрешимых подгрупп G_1, G_2, $\ldots$, G_n. Если подгруппы G_i* K-$\mathbb{P}$-*sn G_iG_j и G_j* K-$\mathbb{P}$-*sn G_iG_j для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$ и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Следствие 2.1 [5, теорема 5.5]. *Пусть $G = AB$ — произведение* w-*сверхразрешимых подгрупп A и B. Если A* K-$\mathbb{P}$-*sn G и B* K-$\mathbb{P}$-*sn G и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G*

w-*сверхразрешима.*

Список литературы

[1] O. Kegel, Zur Struktur mehrfach factorisierter endlicher Gruppen, *Math. Z.*, **87** (1965), 42–48.

[2] Л. С. Казарин, Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами, *Укр. мат. журн.*, **34**:7-8 (1991), 947–950.

[3] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad, Products of Finite Groups, Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

[4] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, A. A. Heliel, M. M. Al-Shomrani, Some Results on Products of Finite Groups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, (2015) DOI 10.1007/s40840-015-0111-7.

[5] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп, *Математические заметки*, **95**:4 (2014), 517–528.

[6] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа, *Сиб. матем. журн.*, **51**:6 (2010), 1270–1281.

Прямые разложения кратно σ-локальных формаций

Воробьев Н. Н., Стаселько И. И., Ходжагулыев А.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова
vornic2001@mail.ru, mars17906@mail.ru, nazar_96_nazar_96@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология [1–3] и определения и обозначения, введенные в работах [4, 5].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ (см. [1]). Если n — целое число, то символом $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \sigma(G)$.
Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}, \qquad (1)$$

называемая формационной σ-функцией. Следуя [4, 5] функции f сопоставляют класс групп

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ-функции f вида (1) имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то $\mathfrak{F}$ называется σ-локальной формацией с σ-локальным заданием f (см. [4, 5]).

Согласно концепции кратной локализации А.Н. Скибы [5], всякая формация считается 0-кратно σ-локальной. При $n \geq 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно σ-локальной, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ является классом единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где все значения f являются $(n-1)$-кратно σ-локальными формациями для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов класса конечных групп $\mathfrak{F}$. Будем писать [3] $\mathfrak{F} = \otimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i,\ j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_1 \times ... \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, ..., A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Всякое представление класса конечных групп $\mathfrak{F}$ в виде $\mathfrak{F} = \otimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ называется прямым разложением этого класса.

В работе А.Н. Скибы [6] (см. также [3]) было доказано, что всякая формация, представимая в виде прямого разложения некоторых формаций, n-кратно локальна тогда и только тогда, когда n-кратно локальна каждая из компонент этого разложения. Вместе с тем справедлива

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F} = \otimes_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций $\mathfrak{F}_i$ таких, что $\sigma(\mathfrak{F}_i) \cap \sigma(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ для всех различных $i, j \in I$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $(n \geq 1)$ σ-локальна в том и только в том случае, когда n-кратно σ-локальна каждая из формаций $\mathfrak{F}_i$.*

Список литературы

[1] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Наука, М: Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978.

[2] K. Doerk, T. Hawkes, Finite Soluble Groups, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[3] А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск: Беларуская навука, 1997.

[4] Zhang Chi, A. N. Skiba, On Σ_t^σ-closed classes of finite groups, *Ukrainian Math. J.*, **70**:2 (2018), 1707–1716.

[5] Zhang Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba, On n-multiply σ-local formations of finite groups, *Comm. Algebra*, **47**:3 (2019), 957–968.

[6] А. Н. Скиба, О дополняемых подформациях, *Вопросы алгебры*, **9** (1996), 114–118.

О косых элементах в полиадических группах специального вида нечётной арности

[1] Гальмак А. М., [2] Кулаженко Ю. И.
[1] *Могилёвский государственный университет продовольствия*
halm54@mail.ru
[2] *Белорусский государственный университет транспорта*
kulazhenko@bsut.by

Полиадическим группоидом специального вида называется l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1)+1$, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $k \geq 2$, которая была определена в [1] на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ и n-арной операции η. В частности, если $n = 3$, σ^{2s} – тождественная подстановка, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – $(2s+1)$-арная группа [2]. Два частных случая l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ изучал Э.Пост [3]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы, вторую операцию он определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

В следующей теореме и её следствиях символом $\overline{a}$ обозначается косой элемент для элемента a полиадической группы $< A, \eta >$.

Теорема. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* d*,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*,* $2s = td$ *для некоторого натурального* t*.*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} \ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} *– любая обратная последовательность в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j*. Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$*, где*

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\underbrace{\overline{a_j}\alpha_j^{-1}\ \ldots\ \overline{a_j}\alpha_j^{-1}}_{t-1}) = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}\overline{a_j}\ \ldots\ \alpha_j^{-1}\overline{a_j}}_{t-1}\alpha_j^{-1}),$$

является косым для $\mathbf{a}$*.*

Следствие 1. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *чётного порядка* d*,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*,* $2s = td$ *для некоторого натурального* t*. Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$*, где*

$$b_j = \eta(\overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}\underbrace{\overline{a_j}\,\overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})} \ldots \overline{a_j}\,\overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}}_{t-1} =$$

$$= \eta(\underbrace{\overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}\overline{a_j} \ldots \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}\overline{a_j}}_{t-1}\,\overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}),$$

является косым для $\mathbf{a}$*.*

Следствие 2. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка 2,* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$*. Тогда элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$*, где*

$$b_j = \eta(\overline{a_{\sigma(j)}}\underbrace{\overline{a_j}\ \overline{a_{\sigma(j)}} \ldots \overline{a_j}\ \overline{a_{\sigma(j)}}}_{s-1}) = \eta(\underbrace{\overline{a_{\sigma(j)}}\ \overline{a_j} \ldots \overline{a_{\sigma(j)}}\ \overline{a_j}}_{s-1}\overline{a_{\sigma(j)}}),$$

является косым для $\mathbf{a}$*.*

Список литературы

[1] А. М. Гальмак, А. Д. Русаков, О полиадических операциях на декартовых степенях, *Известия ГГУ им. Ф. Скорины*, **3** (2014), 35–40.

[2] А. М. Гальмак, О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *Вестник МГУ им. А.А. Кулешова*, **1** (2018), 4–10.

[3] E. L. Post, Polyadic groups, *Trans. Amer.Math. Soc.*, **2** (1940), 208–350.

Графы с массивами пересечений $\{104, 70, 25; 1, 7, 80\}$ и $\{272, 210, 49; 1, 15, 224\}$ не существуют [1]

Голубятников М. П.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
mike_ru1@mail.ru

И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и М.С. Нирова [2] нашли описание Q-полиномиалных дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Положим $a = a_3$. Скажем, что Γ — граф типа (I), если $c_2 + 1$ делит a, — граф типа (II), если $c_2 + 1$ делит $a + 1$, — граф типа (III), если $c_2 + 1$ не делит a и не делит $a + 1$.

Графы типа (Ii) имеют массивы пересечений

$$\left\{\frac{(s^2+su-1)(u^2-1)}{s^2-1}, \frac{(u^2-s^2)su}{s^2-1}, u^2; 1, \frac{u^2-s^2}{s^2-1}, \frac{su^3-su}{s^2-1}\right\}.$$

Эти графы являются формально самодуальными, в частности, параметры Крейна совпадают с числами пересечений $q^l_{ij} = p^l_{ij}$. В [2] доказано, что при $u = s^2$ графы не существуют.

В классе графов типа (Ii) при $s = 2$ возникает серия массивов пересечений

$$\left\{\frac{(2u+3)(u^2-1)}{3}, \frac{2u(u^2-4)}{3}, u^2; 1, \frac{u^2-4}{3}, \frac{u(u^2-1)}{3}\right\}.$$

В работе рассмотрены минимальные возможные параметры $u = 5$ и $u = 7$ и доказано, что соответствующие графы не существуют.

Список литературы

[1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495.

[2] И. Н. Белоусов, А. А. Махнев, М. С. Нирова, О дистанционно регулярных Q-полиномиальных графах Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **16** (2019), 1358–1365.

[3] K. Coolsaet, A. Jurishich, Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs, *J. Comb. Theory, Ser. A.*, **115** (2008), 1086–1095.

[4] Vidali, sage-drg Sage package, 2018. https: github.com/jaanos/sage-drg.

[5] Vidali, Using symbolic computation to prove nonexistence of distance-regular graphs, *Electron J. Comb.*, **25** (2018), 1–28.

[6] K. Urlep, Triple intersection numbers of Q-polinomial distance-regular graphs, *Europ. J. Comb.*, **33** (2012), 1246–1252.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

Особенности строения ненильпотентных групп, имеющих только строгие обобщенно максимальные подгруппы

Горбатова Ю. В.
Брянский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ
g.julia32@yandex.ru

Все группы в данной работе являются конечными. Напомним ряд понятий, используемых далее.

Подгруппа H называется **2-максимальной подгруппой** группы G, если она максимальна в некоторой максимальной подгруппе группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее.

Подгруппу H группы G называют **строго n-максимальной подгруппой**, если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G. Например, в группе $SL(2,3)$ единственная подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой, но не является строго 2-максимальной подгруппой.

Подгруппу H группы G называют **S-квазинормальной подгруппой**, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G.

Группа Шмидта – это ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами, начиная с 50-х годов прошлого столетия. Не потеряло это направление своей актуальности и в настоящее время. Среди недавних работ отметим статью [2], в которой было получено полное описание ненильпотентных групп, все строго 2-максимальные подгруппы которых нормальны. В этой же работе авторы получили описание ненильпотентных групп с S-квазинормальными 2-максимальными подгруппами и с S-квазинормальными строго 2-максимальными подгруппами. Развивая данные результаты, автором в работе [2] было получено полное описание ненильпотентных групп с нормальными строго 3-максимальными подгруппами. В свою очередь полное описание ненильпотентных групп с S-квазинормальными строго 3-максимальными подгруппами было получено автором в недавней работе [3]. Отметим также работу [4], в которой получено точное строение групп с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами.

Данная работа продолжает исследование ненильпотентных групп с заданными системами строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгрупп.

Следующие леммы являются вспомогательным результатом данной работы.

Лемма 1. *Пусть G — группа Шмидта. Если каждая 2-максимальная подгруппа в G является строго 2-максимальной, то нормальная силовская подгруппа группы G имеет простой порядок.*

Лемма 2. *Пусть G — группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является строго 2-максимальной. Тогда в том и только в том случае в группе G каждая 2-максимальная подгруппа является S-квазинормальной, когда G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта, нормальная силовская подгруппа которой имеет простой порядок.*

Следующая теорема описывает строение нинильпотентных групп, в которых любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны, и при этом каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной.

Теорема 1. *Пусть G — ненильпотентная группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной. Тогда в том и только в том случае в группе G любые две 3-максимальные подгруппы перестановочны, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r — простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:*

(1) $G = [P]Q$, где $|P| = p, |Q| = q^\beta$ $(\beta \geq 3)$; группа Q либо абелева, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$; и всякий элемент из Q, порядок которого меньше $q^{\beta-1}$, принадлежит $C_G(P)$;

(2) $G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q — группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта;

(3) $G = ([P]Q)R$, где P и R — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q — циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.

Следующая теорема описывает строение нинильпотентных групп с S-квазинормальными 3-максимальными подгруппами, для которых каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной.

Теорема 2. *Пусть G — группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является строго 3-максимальной. Тогда в том и только в том случае в группе G каждая 3-максимальная подгруппа является S-квазинормальной, когда группа G либо нильпотентна, либо является группой одного из следующих типов:*
I. $G = [P]Q$ — группа Шмидта, где $|P| = p$;
II. G — бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:

(1) $G = [P]Q$, где $|P| = p$, Q — циклическая группа и $[P]\Phi(Q)$ — группа Шмидта;

(2) $G = ([P]Q_1) \times C_q$, где $|P| = p$, $|C_q| = q$ и PQ_1 — группа Шмидта;

(3) $G = [P]Q$, где $|P| = p$, $Q = \langle a\rangle \times \langle b\rangle, |a| = |b| = q$, $P\langle a\rangle$ и $P\langle b\rangle$ — группы Шмидта;

(4) $G = [P]Q$, где $|P| = p, p > 2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;

(5) $G = ([P]Q_1)C_q$, где $|P| = p$, $Q_1 = \langle a\rangle$, $C_q = \langle b\rangle$, $|Q_1C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ ($\beta \in \mathbb{N}$), PQ_1 — группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1, изоморфной C_q;

(6) $G = [P]Q$, где P — циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;

(7) $G = [P]Q$, где $P = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = |b| = p$ и $[\langle a\rangle]Q$ и $[\langle b\rangle]Q$ — группы Шмидта;

(8) $G = [P_1 \times C_p]Q$, где $|C_p| = |P_1| = p$, P_1Q — группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p, Q] = 1$;

(9) $G = [[P_1]Q]C_p$, где $|P_1| = |C_p| = p$, $|Q| = q$ и $N_G(Q) = [Q]C_p$;
III. G — группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя p, q, r и которая является группой одного из следующих видов:

(i) $G = ([P]Q)R$, где P и R — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q — циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = [R](P \times Q)$, где $|P| = p$, $|Q| = q$ и $|R| = r$.

Список литературы

[1] Ю. В. Луценко (Горбатова), А. Н. Скиба, Конечные ненильпотентные группы с нормальными или S-квазинормальными n-максимальными подгруппами, *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины.*, **1(52)** (2009), 134–138.

[2] Ю. В. Горбатова, Строение конечных ненильпотентных групп с нормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами. *Приоритетные научные направления: от теории к практике: сборник материалов XXIV Международной научно-практической конференции*, **Часть 2** (2016), 30–35.

[3] Ю. В. Горбатова, Строение конечных ненильпотентных групп с S-квазинормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами, *Новый взгляд. Международный научный вестник*, **13** (2016), 21–31.

[4] Ю. В. Горбатова, М. Н. Коновалова, Конечные группы с субнормальными строго 2- или 3-максимальными подгруппами, *Вестник Омского университета*, **24**:3 (2019), 4–11.

О трансвекциях из произведения нерасщепимого максимального тора и сетевой группы

Джусоева Н. А., Абрекова М. Р.
Северо-Осетинский государственный университет
djusoevanonna@rambler.ru

В заметке изучаются трансвекции $(\delta_{ij}+\alpha_i\beta_j)$, которые содержатся в произведении нерасщепимого максимального тора T и сетевой группы $G(\sigma)$, где сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ ассоциированна с тором T. Доказано, что $(\delta_{ij}+\alpha_i\beta_j)\in G(\sigma)$, точнее, $\alpha_i\beta_j\in\sigma_{ij}$.

Пусть x^n-d — неприводимый многочлен степени n над полем k, $d\in k$. Тогда $e_i=\theta^{i-1}, 1\le i\le n$, образует базис радикального расширения $K=k(\sqrt[n]{d})$, $\theta=\sqrt[n]{d}$, поля $K=k(\theta)$ над k. Мы рассматриваем нерасщепимый максимальный тор $T=T(d)$, который является образом мультипликативной группы поля $K=k(\sqrt[n]{d})$ при регулярном вложении в $G=Aut_k(K)\approx GL(n,k)$, где $\widehat{t}(x)=tx$.

Для аддитивных подгрупп $A_i,\ 1\le i\le n$, основного поля k мы будем рассматривать сети вида

$$\sigma=\begin{pmatrix} A_1 & dA_n & dA_{n-1} & \dots & dA_2\\ A_2 & A_1 & dA_n & \dots & dA_3\\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots & dA_4\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots & A_1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

С каждой матрицей $C=C(\bar{x})=(C_{ij})\in T(d)$ связана обратная матрица

$$C^{-1}=C(\bar{y})=(C'_{ij})\in T(d),\quad \bar{y}=(y_1,\dots,y_n)\in k^n,$$

где $y_i=\frac{C_{1i}}{|C\ (x)|}$, причем C_{1i} — алгебраическое дополнение элемента C_{1i} матрицы $C=C(\bar{x})$.

Введем в рассмотрение подкольцо $R_0=R(d)$ [2] поля k, порожденное элементами $x_iy_j,\quad dx_ry_s$:

$$R_0=R(d)=\left\langle x_iy_j,\mu x_ry_s:\ i+j\le n+1, r+s>n+1,\ \bar{x}\in k^n\setminus\bar{0}\right\rangle.$$

Пусть σ — сеть вида (1). Тогда тор T нормализует сетевое кольцо $M(\sigma)$. В частности, тор T нормализует сетевую группу $G(\sigma)$ а потому произведение $TG(\sigma)$ является группой.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть $b=(\delta_{ij}+\alpha_i\beta_j)$ — трансвекция из группы $TG(\sigma)$, определенной в предложении. Тогда $\alpha_i\beta_j\in\sigma_{ij}$.*

В заключение отметим, что настоящее исследование является естественным продолжением работ [1,2].

Список литературы

[1] В. А. Койбаев, Трансвекции в подгруппах полной линейной группы, содержащих нерасщепимый тор, *Алгебра и анализ*, **21**:5 (2009), 70–86.

[2] Н. А. Джусоева, С. Ю. Итарова, В. А. Койбаев, Теорема о вложении элементарной сети, *Владикавказский математический журнал*, **20**:2 (2018), 57–61.

Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {30,22,9;1,3,20}

Ефимов К. С., Махнев А. А.
Уральский государственный экономический университет, Институт математики и механики УрО РАН
konstantin.s.efimov@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Пусть Γ — граф диаметра d. Тогда через Γ_i, где $i \leq d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ называется графдиаметра d, для которого значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i для любого $i = 0, ..., d$ (см. [1]).

Для автоморфизма g графа Γ через $\mathrm{Fix}(g)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, остающихся неподвижнми под действием g. Пусть $\alpha_i(g)$ — число вершин x графа Γ таких, что $d(x, x^g) = i$.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий собственное значение θ_1, равное a_3. Для графа Шилла a_3 делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a_3$. Далее, Γ имеет массив пересечений $\{a_3 b, (a_3+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a_3(b-1)\}$. Обратно, граф с таким массивом пересечений является графом Шилла. В [2] классифицированы графы Шилла с $b = 2$ и найдены массивы пересечений графов Шилла с $b = 3$.

Граф Шилла с $b = 2$ является нечетным графом степени 4, обобщенным шестиугольником порядка (2,2), графом Хэмминга $H(3,3)$, графом Доро с массивом пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$ или графом Джонсона $J(9,3)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Шилла с $b = 3$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{12, 10, 5; 1, 1, 8\}$, $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{12, 10, 3; 1, 3, 8\}$,*вляется* $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$, $\{60, 42, 18; 1, 6, 40\}$, $\{69, 48, 24; 1, 4, 46\}$, $\{93, 64, 24; 1, 6, 62\}$, $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$.

В [3], [4], [5], [6] было доказано несуществование графов Шилла с массивами персечений $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$, $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$. В данной работе найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 30 + 220 + 99 = 350$ вершин и спектр $30^1, 10^{63}, 0^{154}, -5^{132}$. Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не превосходит 7 ($1 - k/\theta_3 = 7$). Если C является 7-кликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна с 0 или ($b_1/(\theta_3+1) + 1 - k/\theta_3) = -11/2 + 1 + 6$ вершинами из C ([1, предложение 4.4.6]), противоречие. Значит, Γ не содержит 7-клик.

Теорема *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 70s + 35t$, $\alpha_3(g) = -140s + 105t$, $s = -1$ и $t = 2$ или $s = 0$ и $t \in \{0, 1, 2\}$, или $s = 1$ и $t \in \{2, 3\}$, или $s = 2$ и $t = 3$, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 25s - 50l + 25$ и $\alpha_3(g) = 75s + 100l - 75$, либо $p = 2$ и $\alpha_3(g) = 350$;*

(2) *Ω является m-кокликой, либо Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ, $m \leq 30$, $p = 5$, m делится на 5, $\alpha_1(g) = 25(2t - s + 1)$ и $\alpha_3(g) = 9m - 100t + 175s - 75$ или $p = 2$, m четно, $\alpha_1(g) = 20m + 25s - 175$, $\alpha_3(g) = 350 - 31m$ и s сравнимо с 3 по модулю 4, либо $m \leq 29$, $p = 3$, m сравнимо с 2 по модулю 3, Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 2 в Γ, $\alpha_1(g) = 30s$ и $\alpha_3(g) = 9m - 60s + 75l$;*

(3) *Ω содержит ребро и является объединением по крайней мере двух изолированных клик, $p = 2$, вершины из разных максимальных клик графа Ω находятся на расстоянии 3 в Γ, порядок*

любой максимальной клики из Ω нечетен и число максимальных клик в Ω четно;

(4) *Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 5$.*

Следствие *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{30, 22, 9; 1, 3, 20\}$, a — вершина из Γ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Тогда $S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой, цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $L_2(7), A_7, A_8$ или $U_3(5)$. Если граф Γ является реберно симметричным, a, b — смежные вершины из Γ, то $\bar{T} \cong U_3(5)$, $\bar{T}_a \cong M_{10}$, T — расширение неприводимого $F_2U_3(5)$-модуля V с помощью $U_3(5)$, размерность V над F_2 равна 20, 28, 56, 104 или 288.*

Список литературы

[1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, Distance-Regular Graphs, Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.

[2] J. H. Koolen, J. Park, Shilla distance-regular graphs, *Europ. J. Comb.*, **31** (2010), 2064–2073.

[3] A. A. Makhnev, M. P. Golubyatnikov, Shilla graph with intersection array $\{12, 10, 2; 1, 2, 8\}$ does not exist, *Mathematical notes*, **103**:5 (2018), 797–800.

[4] A. E. Brouwer, S. Sumaloj, C. Worawannotai, The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ and $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$, *Australasian J. Comb.*, **66** (2016), 330–332.

[5] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ and $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ do not exist, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **15** (2018), 1506–1512.

[6] I. N. Belousov, A. A. Makhnev, Distance-regular graph with intersection arrays $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ does not exist, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **16** (2019), 206–216.

[7] N. D. Zyulyarkina, A. A. Makhnev, On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, *Doklady Akademii nauk*, **439**:4 (2011), 443–447.

[8] P. J. Cameron, Permutation Groups, London Math Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

[9] A. L. Gavrilyuk, A. A. Makhnev, On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Akademii nauk* **432**:5 (2010), 512–515.

[10] A. V. Zavarnitsine. Finite simple groups with narrow prime spectrum, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **6** (2009), 1–12.

[11] R. Wilson, P. Walsh et. al. ATLAS of Finite Group Representations - Version 3

Поведение π-субмаксимальных подгрупп при гомоморфизмах[1]

Заварницин А. В., Ревин Д. О.
ИМ СО РАН, ИММ УрО РАН
zav@math.nsc.ru, revin@math.nsc.ru

Пусть π-некоторое множество простых чисел. Известно, что если N — нормальная подгруппа конечной группы G, то в общем случае пересечение N и π-максимальной подгруппы H группы G не является π-максимальной подгруппой в N. Для того, чтобы использовать индуктивные рассуждения в работе с π-максимальными подгруппами, Х.Виланд [1] предложил использовать понятие, несколько более широкое, чем понятие π-максимальной подгруппы. Подгруппа H конечной группы G называется *π-субмаксимальной*, если G допускает такое вложение в качестве субнормальной подгруппы в некоторую группу G^*, при котором H совпадёт с пересечением с G некоторой π-максимальной подгруппы из G^*.

Важным направлением с точки зрения поиска π-максимальных подгрупп является получение так называемых редукционных теорем. Мы говорим, что *для группы N верна редукционная π-теорема*, если при всяком вложении N в качестве нормальной подгруппы в любую конечную группу G число классов сопряженности π-максимальных подгрупп в G и G/N одно и то же. В этом случае оказывается, что образ в G/N произвольной π-максимальной подгруппы H группы G сам является π-максимальной подгруппой (в общем случае это не так).

Хорошо известным примером групп, для которых верна редукционная π-теорема, являются π-отделимые группы.

В докладе мы обсудим, возможны ли аналоги редукционных теорем для π-субмаксимальных подгрупп. Будут построены примеры, показывающие, что для π-отделимых групп такие аналоги, вообще говоря, неверны.

Список литературы

[1] H. Wielandt, Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, Finite groups, Santa Cruz Conf. 1979, *Proc. Symp. Pure Math.*, **37** (1980), 161–173.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-51-00007, а также программы I.1.1 фундаментальных исследований СО РАН, проект № 0314-2016-0001.

О новых классах Фиттинга, удовлетворяющих гипотезе Локетта

Залесская Е. Н., Исаченко Ю. В.
УО "Витебский государственный университет имени П.М. Машерова"
ZalesskayaEN@yandex.by

В настоящей работе рассматриваются только конечные группы.

Решение многих задач описания строения классов Фиттинга и их классификации связано с применением операторов Локетта "*" и "$_*$" [1]. Напомним, что каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт [1] сопоставляет класс $\mathfrak{F}^*$, который определяется как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для все групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс $\mathfrak{F}_*$ как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Класс Фиттинга называют классом Локетта [1], если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Напомним, что непустой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G для любой группы G.

Как установлено [1], для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ справедливы включения: $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$, где $\mathfrak{X}$ – некоторый нормальный класс Фиттинга. В связи с этим Локеттом была сформулирована следующая проблема, которая в настоящее время известна как

Гипотеза Локетта ([1]). Каждый класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ совпадает с пересечением некоторого нормального класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}^*$.

Первоначально гипотеза Локетта была подтверждена Брайсом и Косси [2] для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга. В [2] также установлено, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}_*$, где $\mathfrak{S}_*$ – минимальный нормальный класс Фиттинга. В последующем гипотеза нашла подтверждение для следующих семейств классов Фиттинга: разрешимых локальных вида $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{S}_{\pi'}$ (Бейдлеман и Хаук [3]), произвольных разрешимых локальных (Н.Т. Воробьев [4]). Кроме того, позднее Галледжи [5] было установлено, что локальные классы Фиттинга произвольных групп также удовлетворяют гипотезе Локетта.

Естественное обобщение гипотезы Локетта было предложено Дерком и Хоуксом [6].

$\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$ - гипотеза. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ удовлетворяет гипотезе Локетта в $\mathfrak{X}$, если справедливо равенство $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{X}_*$.

В этом случае класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ мы будем называть $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

Доказана следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс Фиттинга, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – ω-локальные классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{F}$, $\mathrm{Char}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) \subseteq \omega$ и $\mathrm{Char}(\mathfrak{X}) \subseteq \omega$. Тогда класс $\mathfrak{X}^*\mathfrak{Y}$ является $\mathfrak{L}_{\mathfrak{X}}$-классом.

Список литературы

[1] P. Lockett, The Fitting class $\mathfrak{F}^*$, *Math. Z.*, **137**:2 (1974), 131–136.

[2] R. A. Bryce, J. Cossey, A problem in Theory of Normal Fitting classes, *Math. Z.*, **141**:2 (1975), 99–110.

[3] J. C. Beidleman, P. Hauck, Uber Fittingklassen und die Lockett-Vermutung, *Math. Z.*, **167**:2 (1979), 161–167.

[4] Н. Т. Воробьев. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта, *Мат. заметки*, **43**:2 (1988), 161–168.

[5] M. P. Gallego, Fitting pairs from direct limits and the Lockett conjecture, *Comm. Algebra*, **24**:6 (1996), 2011–2023.

[6] K. Doerk, T. Hawkes, Finite solvable groups, New York, Berlin: Waltor de Gryeter, 1992, 891.

О пересечениях нильпотентных подгрупп в некоторых почти простых группах[1]

Зенков В. И.
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН
v1i9z52@mail.ru

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Определим $M_G(A,B)$ как множество минимальных по включению пересечений вида $A \cap B^g$, $g \in G$, а $m_G(A,B)$ — как подмножество минимальных по порядку элементов из $M_G(A,B)$. Положим $Min_G(A,B) =< M_G(A,B) >$ и $min_G(A,B) =< m_G(A,B) >$. Понятно, что $Min_G(A,B) \geqslant min_G(A,B)$, а также, что

$$min_G(A,B) \neq 1 \Longleftrightarrow Min_G(A,B) \neq 1.$$

В [1],[2] и [3] были получены необходимые и достаточные условия, при которых $min_G(A,B) \neq 1$ для нильпотентных подгрупп A и B в конечной группе G с неразрешимым знакопеременным цоколем. В данной работе этот результат расширяется, и доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G — конечная группа, $Soc(G)$ — спорадическая или неразрешимая знакопеременная группа, S — силовская 2-подгруппа из G, A и B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда следующие условия равносильны:
(1) $min_G(A,B) \neq 1$;
(2) $G \simeq Aut(A_6)$ или $G \simeq S_8$ и с точностью до сопряжения

$$(A,B) \in \{(min_G(S,S),S),(S,min_G(S,S)),(S,S)\},$$

а в случае $G \simeq S_8$ дополнительно еще и $(A,B) = (min_G(S,S), min_G(S,S))$. Подгруппа $min_G(S,S)$ известна по [1] и [3].

Список литературы

[1] В.И. Зенков, О пересечениях двух нильпотентных подгрупп в конечных группах с цоколем $L_2(q)$, *Сиб. мат. ж.*, **57** :6 (2016), 1280–1290.

[2] В.И. Зенков, О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных симметрических и знакопеременных группах, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **19** :3 (2013), 145–149.

[3] В.И. Зенков, О пересечениях примарных подгрупп в неразрешимых конечных группах с цоколем, изоморфным $L_n(2^m)$, *Сиб. мат. ж.*, **59** :2 (2018), 337–344.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 20-01-00456.

Несуществование спорадического композиционного фактора, изоморфного группам F_1 и F_2, в конечных группах с графом Грюнберга–Кегеля как у конечной неабелевой группы исключительного лиева типа[1]

Зиновьева М. Р.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
zinovieva-mr@yandex.ru

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

М. Хаги [1] описала конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у простой спорадической группы. А. В. Заварницин [2] изучил конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у групп J_4, $G_2(7)$ и ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1} > 3$.

Мы рассматриваем следующую общую задачу: может ли конечная группа с графом Грюнберга–Кегеля как у конечной простой неабелевой группы иметь спорадический композиционный фактор. В рамках этой большой задачи мы получили следующий результат.

Теорема 1. Пусть H – конечная простая группа исключительного лиева типа, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$, S – композиционный фактор группы G. Тогда S не изоморфна простой спорадической группе.

Теорема 2. Пусть $H = A_{n-1}(q)$ – конечная простая линейная группа над полем порядка q, $n \geq 7$, $n \neq 8, 10$, G – конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, и S – композиционный фактор группы G. Тогда S не изоморфна F_1 и F_2.

Список литературы

[1] M. Hagie, The prime graph of a sporadic simple group, *Comm. Algebra*, **31**:9 (2003), 4405–4424.

[2] А. В. Заварницин, О распознавании конечных групп по графу простых чисел, *Алгебра и логика*, **45**:4 (2006), 390—408.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта №20-51-53013.

О совпадении классов конечных групп E_{π_x} и D_{π_x} [1]

Ильенко К. А., Маслова Н. В.
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН
christina.ilyenko@yandex.ru, butterson@mail.ru

В работе мы будем использовать термин группа в значении "конечная группа".

Пусть G — группа. Через π обозначим некоторое множество простых чисел, а через π' — множество всех простых чисел, не принадлежащих множеству π. Кроме этого, под $\pi(n)$ будем понимать множество простых делителей натурального числа n, а множество всех простых делителей порядка группы G обозначим через $\pi(G)$. Группу G будем называть *π-группой*, если для нее выполняется включение $\pi(G) \subseteq \pi$. Подгруппу H группы G назовем *π-холловой подгруппой* группы G, если одновременно подгруппа H является π-группой, то есть $\pi(H) \subseteq \pi$, и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Отметим, что если $\pi = \{p\}$, то холлова π-подгруппа группы G — это в точности ее *силовская p-подгруппа*. Будем говорить, что *группа G принадлежит классу E_π*, если G содержит π-холлову подгруппу. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены в группе G, то скажем, что *группа G принадлежит классу C_π*. Если группа G принадлежит классу C_π и при этом любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что *группа G принадлежит классу D_π*. Заметим, что по определению выполняются включения $D_\pi \subseteq C_\pi \subseteq E_\pi$.

В 1956 г. Ф. Холл предположил, что *для любого множества нечетных простых чисел выполняется равенство $D_\pi = E_\pi$*. Однако гипотеза Ф. Холла была опровергнута в 1984 г. Ф. Гроссом, который показал [1], что *для любого конечного множества, состоящего из двух и более нечетных простых чисел, разность $E_\pi \setminus D_\pi$ не пуста.* Возникает

Проблема 1. Для каких множеств π выполняются равенства $E_\pi = C_\pi = D_\pi$?

Пусть x — действительное число. Обозначим через π_x множество простых чисел, больших x. В 1982 г. З. Арад и М. Уард доказали [2], что $E_{\pi_x} = D_{\pi_x}$ при значениях $x < 3$. В 2009 г. Д.О. Ревин доказал [3], что $E_{\pi_x} = D_{\pi_x}$ при значениях $x \geq 7$, и сформулировал следующую проблему:

Проблема 2. Верно ли, что $E_{\pi_x} = D_{\pi_x}$ для любого действительного числа x?

В своей работе мы получили положительное решение Проблемы 2. Нами была доказана

Теорема. Для любого действительного числа x выполняется равенство $E_{\pi_x} = D_{\pi_x}$.

Список литературы

[1] F. Gross, Odd order Hall subgrous of $\mathrm{GL}(n, q)$ and $\mathrm{Sp}(2n, q)$, *Math. Z.*, **187**: 2 (1984), 185–194.

[2] Z. Arad, M. B. Ward, New criteria for the solvability of finite groups, *J. Algebra*, **77**: 1 (1982), 234–246.

[3] Д. О. Ревин, Вокруг гипотезы Ф. Холла, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **6** (2009), 144–158.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

Об одном критерии σ-субнормальности подгруппы в конечной группе

Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомельский филиал Международного университета "МИТСО"
sfkamornikov@mail.ru, vtutanov@gmail.com

Отвечая на вопрос Кегеля [3] и Виландта [1], Кляйдман в [2] доказал, что подгруппа H конечной группы G является субнормальной в G, если $H \cap P$ — силовская p-подгруппа из H для любой силовской p-подгруппы P группы G и любого простого числа p.

Отмеченный результат инициировал соответствующий вопрос для σ-субнормальных подгрупп конечной группы, поставленный А.Н. Скибой в "Коуровской тетради" [4] под номером 19.86.

Проблема 1. *Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и G — конечная группа, обладающая холловой σ_i-подгруппой для каждого $i \in I$. И пусть H — такая подгруппа группы G, что $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i \in I$ и всякой холловой σ_i-подгруппы S_i группы G. Верно ли, что подгруппа H является σ-субнормальной в G?*

Концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы, предложена А.Н. Скибой. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы G. Далее всегда σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Группа G называется *σ-примарной*, если она является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной группой. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$.

Следующая проблема 2 является более общей по сравнению с проблемой 1. Это связано с существованием групп, обладающих несколькими классами сопряженных холловых подгрупп.

Будем говорить, что система $\Sigma = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ σ-примарных холловых подгрупп группы G является *полным холловым множеством типа* σ группы G, если выполняются следующие два условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, ..., k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup ... \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G, то, очевидно, система $\Sigma^g = \{S_1^g, S_2^g, ..., S_k^g\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы G для любого элемента $g \in G$. Группа G называется *σ-полной*, если она обладает по крайней мере одним полным холловым множеством типа σ (понятно, что для некоторых разбиений σ существуют группы, для которых множество всех полных холловых множеств типа σ является пустым).

Будем говорить, что полное холлово множество Σ типа σ группы G *редуцируется* в подгруппу H группы G, если $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H для любого $i = 1, 2, ..., k$ (возможно, что $H \cap S_i = 1$ для некоторых $i = 1, 2, ..., k$).

Проблема 2. *Пусть σ — разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел и $\Sigma = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ — полное холлово множество типа σ конечной группы G. И пусть H — такая подгруппа из G, что Σ^g редуцируется в H для любого элемента $g \in G$. Верно ли, что H является σ-субнормальной в G?*

Если в проблеме 1 требуется, чтобы любое полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцировалось в подгруппу H группы G, то в проблеме 2 речь идет только о полных холловых множествах Σ^g $(g \in G)$ для некоторого заданного полного холлового множества Σ группы G. Поэтому положительное решение проблемы 2 всегда приводит к решению проблемы 1.

В следующей теореме проблемы 1 и 2 решаются для разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}^{'}\}$, где p — простое число.

Теорема. *Пусть p — простое число, $\sigma = \{\{p\}, \{p\}^{'}\}$ и Σ — полное холлово множество типа σ конечной группы G. Если H — такая подгруппа из G, что Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$, то H является σ-субнормальной в G.*

Ключом к доказательству теоремы являются лемма, устанавливающая строение минимального контрпримера к проблеме 2 для любого разбиения σ, а также результаты Л.С. Казарина, описывающие простые неабелевы группы, которые содержат холлову $p^{'}$-подгруппу.

Список литературы

[1] O. H. Kegel, Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen, *Math. Z.*, **78** (1998), 205–221.

[2] H. Wielandt, Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, *Proc. Pure Math.*, **37** (1980), 161–173.

[3] P. B. Kleidman, A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups, *Ann. Math.*, **133** (1991), 369–428.

[4] Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2018.

О коммутанте конечной группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта

Княгина В. Н.
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
knyagina@inbox.ru

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и терминология стандартны.

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется *группой Шмидта*. Подгруппа группы, являющаяся группой Шмидта, называется *подгруппой Шмидта* этой группы.

В работах В. А. Белоногова [1] – [3] найдены новые условия для конечной группы быть группой Шмидта.

Группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, поэтому они являются универсальными объектами в теории конечных групп, а их свойства и расположение оказывают существенное влияние на строение всей группы. Исследованиям строения конечных групп по свойствам своих подгрупп Шмидта посвящены работы многих авторов. В частности, группы с холловыми подгруппами Шмидта исследовались в [4]. В [5] найдены инварианты конечных групп, у которых некоторые типы подгрупп Шмидта (p-нильпотентные, p-замкнутые, сверхразрешимые, несверхразрешимые) субнормальны. В этой работе в качестве следствия отмечается нильпотентность коммутанта группы с субнормальными подгруппами Шмидта. Позже В. А. Ведерников [6] доказал, что фактор-группа по коммутанту у группы с субнормальными подгруппами Шмидта даже циклическая.

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Очевидно, что подгруппа простого индекса полунормальна. Квазинормальная подгруппа (т. е. подгруппа, перестановочная со всеми подгруппами группы) будет полунормальной. В простой группе $SL(2, 4)$ подгруппа A, изоморфная знакопеременной группе A_4 степени 4, является полунормальной подгруппой Шмидта, но A не квазинормальна и не субнормальна. Группы с полунормальными подгруппами Шмидта изучены в [7].

Введем следующее понятие, объединяющее субнормальность и полунормальность.

Определение. Подгруппа A называется *полусубнормальной* в группе G, если A либо субнормальна в G, либо полунормальна в G.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если в группе G все подгруппы Шмидта полусубнормальны, то коммутант G' нильпотентен.*

Пример. Пусть D_n — диэдральная группа порядка n и

$$G = D_6 \times D_{10} = ([\langle x\rangle]\langle a\rangle) \times ([\langle y\rangle]\langle b\rangle), |x| = 3, |y| = 5, |a| = |b| = 2.$$

Ясно, что $F(G) = \langle x\rangle \times \langle y\rangle$ и $G/F(G) = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ — нециклическая группа. В группе G все подгруппы Шмидта полунормальны и есть несубнормальные подгруппы Шмидта $[\langle x\rangle]\langle ab\rangle$, $[\langle y\rangle]\langle ab\rangle$. Поэтому в теореме фактор-группа $G/F(G)$ может быть нециклической в отличие от групп с субнормальными подгруппами Шмидта.

Список литературы

[1] В. А. Белоногов, Конечные группы, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты. I, *Тр. ИММ УрО РАН,* **21**:1 (2015), 25–34.

[2] В. А. Белоногов, Конечные группы, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты. II, *Тр. ИММ УрО РАН,* **22**:3 (2016), 12–22.

[3] В. А. Белоногов, Условие для конечной группы быть группой Шмидта, *Тр. ИММ УрО РАН,* **22**:4 (2016), 81–86.

[4] V. N. Kniahina, V. S. Monakhov, Finite groups with Hall Schmidt subgroups, *Publ. Math. Debrecen,* **81**:3-4 (2012), 341–350.

[5] В. Н. Княгина, В. С. Монахов, О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта, *Сиб. матем. ж.,* **45**:6 (2004), 1316–1322.

[6] В. А. Ведерников, Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта, *Алгебра и логика,* **46**:6 (2007), 669–687.

[7] В. Н. Княгина, В. С. Монахов, Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта, *Алгебра и логика,* **46**:4 (2007), 448–458.

О разложении элементарной трансвекции в элементарной сетевой группе

Койбаев В. А., Уртаева А. А.
Северо-Осетинский госуниверситет, ЮМИ ВНЦ РАН
koibaev-K1@yandex.ru, urtaeva-96@mail.ru

Система $\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \le i, j \le n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью (ковром)([1]–[2], [3], вопрос 15.46) над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j . Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер). Элементарная сеть σ, называется дополняемой, если для некоторых аддитивных подгрупп (точнее, подколец) σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \le i, j \le n$ является (полной) сетью. В дальнейшем, R – коммутативное кольцо с единицей, $\sigma = (\sigma_{ij})$ – элементарная сеть порядка $n \ge 3$.

Рассмотрим набор $\omega = (\omega_{ij})$ аддитивных подгрупп ω_{ij} кольца R, определенных для любых $i \ne j$ следующим образом: $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj}$, где суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Дополним элементарную сеть ω до (полной) сети циклическим способом, полагая $\omega_{ii} = \sum_{k \ne s} \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si}$, где суммирование ведется по всем $1 \le k \ne s \le n$. Построенную сеть мы называем производной сетью (для элементарной сети σ).

Для произвольных $i \ne j$ положим $\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij}$, где $\gamma_{ij} = \Omega_{ij}\Omega_{ji} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m, \quad i \ne j$. Далее, положим $\Omega_{ii} = \sum_{k \ne i} \Omega_{ik}\Omega_{ki} = \sum_{k=1, k \ne i}^{n} \gamma_{ik}$. Сеть Ω называется сетью, ассоциированной с элементарной сетевой группой $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \le i \ne j \le n \rangle$ (здесь $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}, \ \alpha \in R$ – элементарная трансвекция).

По данным сетям $\omega = (\omega_{ij})$ и $\Omega = (\Omega_{ij})$, определенным для элементарной сети σ, мы построим новую сеть τ следующим образом. В элементарной сети Ω на позицию (1, 2) вместо Ω_{12} поставим ω_{12}, а на позицию (2, 1) вместо Ω_{21} поставим ω_{21}. Таблица, построенная таким образом, будет элементарной сетью, причем она является дополняемой элементарной сетью. Дополним ее до (полной) сети следующим образом. А именно, положим $\tau_{ii} = \Omega_{ii}, \ i = 3, \dots, n$,

$$\tau_{11} = \omega_{11} + \Omega_{13}\Omega_{31} + \ldots + \Omega_{1n}\Omega_{n1}, \quad \tau_{22} = \omega_{22} + \Omega_{23}\Omega_{32} + \ldots + \Omega_{2n}\Omega_{n2}.$$

Теорема. Пусть $n \ge 3, \quad t_{21}(\alpha) \in E(\sigma)$. Тогда $t_{21}(\alpha) = ah, \quad a \in \langle t_{12}(\sigma_{12}), t_{21}(\sigma_{21}) \rangle, \ h \in G(\tau)$. Если

$$a = diag(\begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}, e_{n-2}), \quad h = diag(\begin{pmatrix} 1 + h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & 1 + h_{22} \end{pmatrix}, e_{n-2}),$$

то $a_{ii}, h_{ii} \in \tau_{11} \cap \tau_{22} \cap \gamma_{12}. \ \ i = 1, 2,$

$$\alpha, a_{21} \in \Omega_{21}, \quad \alpha - a_{21} \in \omega_{21}, \quad a_{12}, h_{12} \in \omega_{12}, \ h_{21} \in \omega_{21},$$

$$a_{22} + a_{11}, \ a_{22} - h_{11}, \ a_{22} + h_{22}, \ h_{11} + h_{22}, \ h_{11} + a_{11} \in \omega_{11} \cap \omega_{22}.$$

Список литературы

[1] Z. I. Borevich, Subgroups of linear groups rich in transvections, *Journal of Soviet Mathematics.*, **37**:2 (1987), 928–934.

[2] V. M. Levchuk, A Note to L.Dickson's Theorem, *Algebra and Logic.*, **22**:4 (1983), 421–434 (in Russian).

[3] The Kourovka notebook : unsolved problems in group theory, *Russ. acad. of sciences, Siberian div., Inst. of mathematics. Novosibirsk,* **17** (2010) (in Russian).

О распознаваемости спорадических простых групп по графу Грюнберга—Кегеля [1]

Кондратьев А. С.
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН
a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф Грюнберга—Кегеля* (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру. Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру*, если для любой конечной группы H из равенства $\omega(H) = \omega(G)$ следует изоморфизм $H \cong G$.

С этим направлением тесно связано перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу Грюнберга—Кегеля. Конечная группа G называется *распознаваемой по графу Грюнберга—Кегеля*, если для любой конечной группы H равенство графов $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Ясно, что граф $\Gamma(G)$ однозначно определяется по множеству $\omega(G)$, поэтому из распознаваемости конечной группы по графу Грюнберга — Кегеля следует ее распознаваемость по спектру.

Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или по графу Грюнберга — Кегеля заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости (которое было введено автором в 2001 г.), более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой* по спектру (соответственно по графу Грюнберга — Кегеля), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

Для конечной группы G через $h_\Gamma(G)$ обозначается число всех попарно не изоморфных конечных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$. Если множество таких групп H бесконечно, то пишем $h_\Gamma(G) = \infty$). Группа G называется *n-распознаваемой по графу Грюнберга—Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = n < \infty$, *почти распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $1 < h_\Gamma(G) < \infty$, и *нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = \infty$. Ясно, что распознаваемость группы G по графу Грюнберга—Кегеля равносильна равенству $h_\Gamma(G) = 1$. Говорят, что *проблема распознаваемости по графу Грюнберга—Кегеля решена для конечной группы G*, если найдено значение $h_\Gamma(G)$. Эта проблема имеет смысл только для групп с тривиальным разрешимым радикалом, поскольку хорошо известно, что группы с нетривиальным разрешимым радикалом не распознаваемы даже по спектру. Для нераспознаваемой по графу Грюнберга—Кегеля конечной группы G интересен также вопрос об описании конечных групп с таким же графом Грюнберга—Кегеля, как у G.

Первой работой, связанной с распознаваемостью по графу Грюнберга—Кегеля, по-видимому, была работа Чэня [1], в которой он доказал, что каждая из 26 спорадических простых групп однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется в классе конечных групп по своему порядку и графу Грюнберга—Кегеля.

В 2003 г. М. Хаги [2] исследовала строение конечных групп, граф Грюнберга—Кегеля которых равен графу Грюнберга—Кегеля какой-либо спорадической простой группы. В частности, в этой работе были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу Грюнберга—Кегеля, а именно, спорадические простые группы J_1, M_{22}, M_{23}, M_{24}, Co_2, а также доказаны 2-распознаваемость по графу Грюнберга—Кегеля группы M_{11} и квазираспознаваемость по графу Грюнберга—Кегеля групп J_3, Suz, $O'N$, Ly, Fi_{23}, Fi'_{24}, Th, Ru, Co_1, F_1, F_2. Однако это исследование не было завершено.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках проекта № 20-51-00007.

В 2006 г. в работе А .В. Заварницина [3] была установлена распознаваемость по графу Грюнберга—Кегеля группы J_4.

Нераспознаваемость по графу Грюнберга—Кегеля спорадических групп M_{12} и J_2 была известна ранее, она следует из нераспознаваемости этих групп по спектру (см. [6, 7]). Результаты Хаги о строении конечных групп, граф Грюнберга—Кегеля которых равен $\Gamma(M_{12})$ или $\Gamma(J_2)$, были существенно усилены в работе автора и И.В. Храмцова [6].

В недавней работе автора [7] было завершено исследование Хаги для спорадических простых групп Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL и Co_3.

В данной работе мы продолжаем исследование Хаги, используя ее результаты из [2]. Для каждой из спорадических простых групп S, изоморфных HS, J_3, Suz, $O'N$, Ly, Th, Fi_{23} или Fi'_{24} (графы Грюнберга—Кегеля этих групп имеют точно три или четере компоненты связности), определены все конечные группы с таким же графом Грюнберга—Кегеля, как у S. Тем самым для этих восьми групп S завершено исследование Хаги и, в частности, решена проблема распознаваемости по графу Грюнберга—Кегеля. Доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. Группы J_3, Suz, $O'N$, Ly, Th, Fi_{23} и Fi'_{24} распознаваемы по графу Грюнберга—Кегеля.

Теорема 2. Пусть $S = HS$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда группа G изоморфна HS или $U_6(2)$.

Заметим, что остались до конца не исследованными на распознаваемость по графу Грюнберга—Кегеля только три большие спорадические простые группы: Co_1, F_1, F_2.

Обозначения конечных простых групп взяты из [6].

Список литературы

[1] G. Chen, A new characterization of sporadic simple groups, *Algebra Colloq.*, **3**: 1 (1996), 49–58.

[2] M. Hagie, The prime graph of a sporadic simple group, *Comm. Algebra*, **31**: 9 (2003), 4405–4424.

[3] А. В. Заварницин, О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел, *Алгебра и логика*, **45**: 4 (2006), 390–408.

[4] V. D. Mazurov, W. J. Shi, A note to the characterization of sporadic simple groups, *Algebra Colloq.*, **5**: 3 (1998), 285–288.

[5] C. E. Praeger, W. J. Shi, A characterization of some alternating and symmetric groups, *Comm. Algebra*, **22**: 5 (1994), 1507–1530.

[6] А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов, О конечных четырепримарных группах, *Труды Ин-та математики и механики УрО РАН*, **17**: 4 (2011), 142–159.

[7] А. С. Кондратьев, О распознаваемости спорадических простых групп Ru, HN, Fi_{22}, He, M^cL и Co_3 по графу Грюнберга—Кегеля, *Труды Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**: 4 (2019), 79–87.

[8] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Oxford: Clarendon Press, 1985.

О конечных 4-примарных неразрешимых группах [1]

Кондратьев А. С., Минигулов Н. А.
Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН
a.s.kondratiev@imm.uran.ru, nikola-minigulov@mail.ru

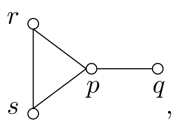
Пусть G – конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей ее порядка. Группа G называется n-примарной, если $|\pi(G)| = n$. Графом Грюнберга–Кегеля (или графом простых чисел) группы G называется граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq.

В работах 2012 [1] и 2013 [2] годов первый автор описал конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля изоморфным графу Грюнберга-Кегеля групп $Aut(J_2)$ и A_{10} соответственно. Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы.

Нами поставлена более общая задача: описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы графу $\Gamma(A_{10})$.

В рамках решения этой задачи в [3] нами доказано, что если G – конечная неразрешимая группа и граф $\Gamma(G)$ как абстрактный граф изоморфен графу $\Gamma(A_{10})$, то фактор-группа $G/S(G)$ группы G по ее разрешимому радикалу $S(G)$ почти проста, и классифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные графы изоморфны подграфам графа $\Gamma(A_{10})$. Также в рамках решения данной задачи в работах [4, 5] нами были описаны конечные 4-примарные неразрешимые группы без элементов порядка 6.

Далее будем считать, что G – конечная неразрешимая группа, граф $\Gamma(G)$ как абстрактный граф изоморфен графу $\Gamma(A_{10})$, и $S = S(G)$ – разрешимый радикал группы G. Тогда граф $\Gamma(G)$ имеет вид:



,

где r, s, p и q – попарно различные простые числа.

В данной работе нами доказана следующая теорема:

Теорема. Если q делит $|S|$, то выполняется одно из следующих утверждений:

(1) q не делит $|\overline{G}|$, $G/O_p(G) = A \rtimes B$, где A – нециклическая абелева q-группа, $B = O_p(B) \rtimes B_1$, $F^*(B) \cong O_p(B) \times F^*(B_1)$, $F^*(B_1) \cong SL_2(t)$, где $t \in \{5, 7, 9, 17\}$ и либо $p = 3$, либо $p = t = 5$ и AB_1 – группа Фробениуса;

(2) $q = 2$, $S = O_{2,2'}(G)$, $O(G) = O_p(G)$, $S/O(G)$ – элементарная абелева 2-группа, $S/O_p(G)$ как $\overline{G}$-модуль изоморфен прямой сумме естественных $GF(2^n)L_2(2^n)$-модулей, $\overline{G} \cong L_2(2^n)$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(2a) $n = 4$, $p = 17$ и $\{r, s\} = \{3, 5\}$;

(2b) n – простое число, $n \geq 5$, $p = 2^n - 1$ и $\{r, s\} = \{3, (2^n + 1)/3\}$;

(3) q – простое число Мерсена или Ферма, $q \geq 31$, $p = 2$, $\pi(q^2 - 1) = \{2, r, s\}$, $G/O_2(S) = P \circ E$, где P – 2-группа, $E \cong SL_2(q)$, $O^2(S)$ – 2-замкнутая $\{2, q\}$-группа с неединичной абелевой силовской q-подгруппой, группа E индуцирует на $\Omega_1(O^2(S)/O_2(O^2(S)))$ точный несепарабельный q'-полурегулярный модуль;

(4) $\overline{G} \cong L_2(31)$, $q = 31$, $p = 2$, $\{r, s\} = \{3, 5\}$, $\pi(S) = \{2, 31\}$, $O^2(S)$ – 2-замкнутая $\{2, 31\}$-группа с неединичной абелевой силовской 31-подгруппой, группа $S/O^2(S)O_2(S)$ – экстраспециальна и $F^*(G/O^2(S)O_2(S)) = S/O^2(S)O_2(S)$.

Наши обозначения можно найти в [6].

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

Список литературы

[1] A. S. Kondrat'ev, Finite groups with prime graph as in the group $Aut(J_2)$, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **283**: 1 (2013), 78–85.

[2] A. S. Kondrat'ev: Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10}, *Proc. Steklov Inst.*, **285**: 1 (2014), 99–107.

[3] A. S. Kondrat'ev, N. A. Minigulov, Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}, *Siberian Electr. Math. Rep.*, **15** (2018), 1378–1382.

[4] А. С. Кондратьев, Н. А. Минигулов, О конечных неразрешимых 4-примарных $3'$-группах, *Тезисы международной конференции "Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем посвященной 70-летию А.Х. Журтова.* Нальчик: издательство КБГУ, 2019. 56–57.

[5] А. С. Кондратьев, Н. А. Минигулов, О конечных неразрешимых 4-примарных группах без элементов порядка 6, *Восьмая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов": тезисы докладов.* Москва: МНЦМО, 2020. 36–37.

[6] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Oxford: Clarendon Press, 1985.

Конечные группы с холловыми 2-максимальными подгруппами

Коновалова М. Н.[1], Монахов В. С.[2]
[1] *Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Брянский филиал,* e-mail: msafe83@mail.ru;
[2] *Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,*
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Запись $M \leq G$ ($M < G$, $M \lessdot G$) означает, что M — подгруппа (соответственно собственная подгруппа, максимальная подгруппа) группы G. Подгруппа, порядок и индекс которой взаимно просты, называется холловой подгруппой.

В работах В. С. Монахова [1], Н. В. Масловой и Д. О. Ревина [2] изучены группы с холловыми максимальными подгруппами.

Пусть H — подгруппа группы G. Если существует максимальная в G подгруппа M такая, что H является максимальной подгруппой в M, то H называется 2-максимальной подгруппой группы G.

Строение группы существенно зависит от свойств ее 2-максимальных подгрупп. Наиболее ранние результаты получили Хупперт, Судзуки, Янко, В. А. Белоногов. Хупперт установил [3] сверхразрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нормальны. Судзуки [4] и Янко [5] доказали, что неразрешимая группа с нильпотентными 2-максимальными подгруппами изоморфна $PSL(2,5)$ или $SL(2,5)$. В. А. Белоногов [6] привел описание конечных разрешимых групп с нильпотентными 2-максимальными подгруппами. В текущем столетии это направление исследовалось во многих работах, см. литературу в [7]– [10].

В настоящей работе изучается группа, у которой каждая 2-максимальная подгруппа холлова. Опираясь на результаты работы Н. В. Масловой и Д. О. Ревина [2] мы получим разрешимость группы, а затем применим описание из [1].

Нам потребуются следующие определения и обозначения.

Подгруппой Гашюца группы G называется подгруппа W, удовлетворяющая следующим двум условиям:
(1) W сверхразрешима;
(2) если $W \leq A < B \leq G$, то $\mid B : A \mid$ — не простое число.

В любой разрешимой группе подгруппы Гашюца существуют и сопряжены [11, 5.29].

Сверхразрешимым корадикалом группы G называется наименьшая нормальная в G подгруппа, фактор-группа по которой сверхразрешима.

Пусть G — группа. Тогда
$|G|$ — порядок группы G;
$\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G;
G_p — силовская p-подгруппа группы G;
$\sigma(G) = \{r \in \pi(G) \,:\, |G_r| = r\}$;
$\tau(G) = \{r \in \pi(G) \,:\, |G_r| \geq r^2\}$.
Ясно, что $\pi(G) = \sigma(G) \cup \tau(G)$ и $\sigma(G) \cap \tau(G)$ — пустое множество.

Теорема. *Пусть G — конечная непримарная группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа является холловой подгруппой. Если G — сверхразрешимая группа, то ее порядок свободен от квадратов, т. е. $\pi(G) = \sigma(G)$. Пусть G — несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(1) *группа G имеет силовскую башню и каждая максимальная в G подгруппа является холловой подгруппой;*
(2) $|\sigma(G)| \geq 2$ *и* $\pi(G : W) \subseteq \tau(G)$, *где W — подгруппа Гашюца группы G;*
(3) $|\tau(G)| \geq 1$ *и* $G_{\tau(G)}$ *является сверхразрешимым корадикалом группы G.*

Доказательство. Обозначим $\sigma(G) = \sigma$ и $\tau(G) = \tau$.

Пусть M — максимальная в G подгруппа и H — максимальная в M подгруппа. Тогда H — 2-максимальная в G подгруппа и по условию H холлова в G. Предположим, что M не холлова. Тогда существует $p \in \pi(G)$ такое, что p делит $|M|$ и p делит $|G : M|$. Если M — p-подгруппа, то $H = 1$ и $|G| = p^2$, т. е. $|\pi(G)| = 1$, противоречие с условием. Следовательно, M — не p-подгруппа и можно выбрать H как максимальную в M подгруппу, содержащую силовскую p-подгруппу из M. Тогда p делит $|H|$ и делит $|G : H| = |G : M||M : H|$, противоречие. Поэтому предположение неверно и каждая максимальная в G подгруппа холлова.

Если G — сверхразрешимая группа, то ее порядок свободен от квадратов [1, следствие 3].

Предположим, что группа G неразрешима. Согласно результату Н. В. Масловой и Д. О. Ревина [2, следствие 1] разрешимый радикал $S(G)$ обладает силовской башней, а фактор-группа $G/S(G)$ либо тривиальна, либо изоморфна одной из групп $PSL(2,7)$, $PSL(2,11)$ или $PSL(5,2)$. Максимальные подгруппы этих групп известны.

Если $G/S(G)$ изоморфна $PSL(2,7)$, то выберем в G подгруппы M и H такие, что

$$S(G) \leq H \lessdot M \lessdot G,\ M/S(G) \cong S_4,\ H/S(G) \cong A_4.$$

Подгруппа H 2-максимальна в G и не холлова в G, поскольку

$$|H| = 2^2 \cdot 3 \cdot |S(G)|,\ |G : H| = 7 \cdot 2 \cdot |H|.$$

Если $G/S(G)$ изоморфна $PSL(2,11)$, то выберем в G подгруппы M и H такие, что

$$S(G) \leq H \lessdot M \lessdot G,\ M/S(G) \cong D_{12},\ H/S(G) \cong D_6.$$

Подгруппа H 2-максимальна в G и не холлова в G, поскольку

$$|H| = 2 \cdot 3 \cdot |S(G)|,\ |G : H| = 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot |H|.$$

Если $G/S(G)$ изоморфна $PSL(5,2)$, то выберем в G подгруппы M и H такие, что

$$S(G) \leq H \lessdot M \lessdot G,\ M/S(G) \cong 2^6 : (S_3 \times PSL(3,2)),\ H/S(G) \cong 2^6 : (Z_3 \times PSL(3,2)).$$

Подгруппа H 2-максимальна в G и не холлова в G, поскольку

$$|H| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot |S(G)|,\ |G : H| = 2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot |S(G)|.$$

Итак, все три возможных изоморфизма с простыми группами исключаются, поэтому фактор-группа $G/S(G)$ тривиальна, т. е. группа G разрешима.

Таким образом, группа G разрешима и все ее максимальные подгруппы холловы. Согласно [1, следствие 2] группа G имеет силовскую башню и каждая силовская подгруппа в G элементарная абелева.

Пусть $K \lessdot M \lessdot G$, подгруппа K нормальна в M, подгруппа M нормальна в G. Тогда $|G : M| = p$, $|M : K| = q$, p и q — простые числа. Поскольку M и K — холловы подгруппы, то $p \neq q$, $p = |G_p| \in \sigma$, $q = |G_q| \in \sigma$, и $|\sigma| \geq 2$. Пусть W — подгруппа Гашюца группы G. Согласно определению в цепочке подгрупп

$$W = W_0 \lessdot W_1 \lessdot \ldots W_{m-1} \lessdot W_m = G$$

все индексы $|W_{i+1} : W_i|$ — не простые числа. Так как все эти индексы примарны, то $\pi(G : W) \subseteq \tau$ и $G_\sigma \leq W$ для некоторой σ-холловой подгруппы G_σ группы G.

Пусть $H = G^{\mathfrak{U}}$ — сверхразрешимый корадикал группы G. Так как группа G не сверхразрешима, то $H \neq 1$ и $|\tau| \geq 1$. В фактор-группе G/H все 2-максимальные подгруппы холловы, поэтому $\pi(G : H) \subseteq \sigma$ и $G_\tau \leq H$. Согласно [1, следствие 1] подгруппа H холлова. Если $F(G)$ является σ-подгруппой, то $F(G)$ циклическая и группа G сверхразрешима по [1, следствие 3], противоречие. Поэтому $F(G)$ не является σ-подгруппой и существует нормальная в G неединичная r-подгруппа R

для $r \in \tau$. Ясно, что $R \le G_\tau \le H$. По [1, следствие 2] подгруппа R является силовской подгруппой группы G и минимальной нормальной в G подгруппой. Если фактор-группа G/R сверхразрешима, то $H = R$ и $H = G_\tau$. Если G/R не сверхразрешима, то по индукции

$$(G/R)^{\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{U}}/R = (G/R)_\tau = G_\tau/R,\ G^{\mathfrak{U}} = H = G_\tau.$$

Теорема доказана.

Пример. В полной линейной группе $GL(2,29)$ есть циклическая подгруппа Z_{15} порядка 15, которая действует неприводимо на элементарной абелевой группы E_{29^2} порядка 29^2. В полупрямом произведение $E_{29^2} \rtimes Z_{15}$ все максимальные подгруппы и все 2-максимальная подгруппы холловы.

Список литературы

[1] В. С. Монахов, Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами, *Матем. заметки,* **84**:3 (2008), 390–394.

[2] Н. В. Маслова, Д. О. Ревин, Конечные группы, все максимальные подгруппы которых холловы, *Матем. Труды*, **22**:2 (2012), 105–126.

[3] B. Huppert, Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen, *Math. Z.*, **60** (1954), 409–434.

[4] M. Suzuki, The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**:4 (1957), 686–695.

[5] Z. Janko, Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen, *Math. Z.*, **79** (1962), 422–424.

[6] В. А. Белоногов, Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппамиб *Матем. заметки*б **3**:1 (1968), 21–32.

[7] V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups, *Ricerche Mat.*, **62** (2013), 307–322.

[8] V. A. Kovaleva, A. N. Skiba, Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal, *J. Group Theory.*, **17**:2 (2014), 273–290.

[9] В. А. Белоногов, Конечные группы, все 2-максимальные подгруппы которых π-разложимы, *Тр. ИММ УрО РАН*, **20**:2 (2014), 29–43.

[10] В. С. Монахов, О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами, *Матем. заметки*, **105**:2 (2019), 269–277.

[11] В. С. Монахов, Введение в теорию конечных групп и их классов, Минск: Вышэйшая школа, 2006.

Важный подкласс симметрических 2-расширений решетки Λ^3 класса II.

Ковальчик Е. А., Костоусов К. В.
ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова», ИММ УрО РАН
nega-le@yandex.ru, kkostousov@gmail.com

Под d-мерной решеткой Λ^d для целого положительного числа d далее понимается d-мерная кубическая решетка, т. е. граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы $(a_1, \ldots a_d)$ из d целых чисел, причем две вершины $(a'_1, \ldots, a'_d)$ и $(a''_1, \ldots, a''_d)$ смежны тогда и только тогда, когда $|a'_1 - a''_1| + \ldots + |a'_d - a''_d| = 1$. Следуя [1], назовем связный граф Γ *симметрическим расширением решетки* Λ^d *посредством графа* Δ, если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на множестве $V(\Gamma)$ вершин графа Γ, что имеется изоморфизм φ фактор-графа Γ/σ на решетку Λ^d и блоки σ порождают в Γ подграфы, изоморфные Δ. Для целого положительного числа q граф Γ называется *симметрическим q-расширением решетки* Λ^d, если Γ является симметрическим расширением решетки Λ^d посредством некоторого графа Δ, такого что $|V(\Delta)| = q$. Четверка $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ с указанными компонентами называется *реализацией* симметрического расширения Γ решетки Λ^d посредством графа Δ или, соответственно, q-расширения Γ решетки Λ^d, а Γ мы будем называть графом этой реализации.

Наряду с чисто математическим интересом симметрические q-расширения решетки Λ^d для небольших $d \geq 1$ и $q > 1$ представляют интерес для молекулярной кристаллографии и некоторых физических теорий (см. [2]). При этом для кристаллографии из всех симметрических q-расширений решеток Λ^d наибольший интерес представляют симметрические 2-расширения. Они естественным образом возникают при рассмотрении "молекулярных" кристаллов, "молекулы" которых состоят из двух "атомов" или, более общо, имеют выделенную ось.

Естественно рассматривать реализации симметрических q-расширений решетки Λ^d (q и d — целые положительные числа) с точностью до определяемой следующим образом эквивалентности (см. [3]). Назовем две реализации $R_1 = (\Gamma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $R_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ *эквивалентными* и будем писать $R_1 \sim R_2$, если найдется изоморфизм графа Γ_1 на граф Γ_2, переводящий σ_1 в σ_2. Реализацию $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического q-расширения решетки Λ^d назовем *максимальной*, если $G = \mathrm{Aut}_\sigma(\Gamma)$ — группа всех автоморфизмов графа Γ, сохраняющих разбиение σ. Ясно, что каждая реализация симметрического q-расширения решетки Λ^d имеет эквивалентную ей максимальную реализацию. В [3, теорема 2] В.И. Трофимовым доказана конечность числа реализаций симметрических 2-расширений d-мерной решетки, с точностью до эквивалентности, для произвольного целого положительного числа d, а также предложен алгоритм для построения всех, с точностью до эквивалентности, таких реализаций.

Ранее авторами было получено описание всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2. В работе (см. [4]) были перечислены все, с точностью до эквивалентности, реализации $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрических 2-расширений решетки Λ^2, такие что лишь единичный автоморфизм графа Γ оставляет на месте все блоки системы импримитивности σ. В работе (см. [5]) перечислены остальные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2. По предложению 4 из [3] такое разбиение всех реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 на два класса совпадает с определенным следующим образом разбиением на классы I и II соответственно.

Для произвольной реализации $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 и произвольной пары смежных вершин B_1, B_2 графа Γ/σ множество ребер графа Γ, один конец которых лежит в B_1, а другой — в B_2, будем называть *связью*. Возможны следующие типы связей: *тип* 1 — четыре ребра; *тип* 2 — два ребра, не имеющие общих концов; *тип* 3 — одно ребро; *тип* $\overline{3}$ — три ребра; *тип* 4 — два ребра, имеющие общий конец. Реализациями *класса* I назовем реализации, которые обязательно содержат связи типов, отличных от 1 и 2. Реализациями *класса* II назовем реализации, связи в которых исчерпываются связями типов 1 и 2.

Ранее, в [6] Костоусовым К.В. были найдены все симметрические 2-расширения решетки Λ^3 класса I. Было показано, что существует 5350 попарно неэквивалентных реализаций класса I.

В настоящей работе мы изучаем подкласс симметрических 2- расширений решетки Λ^3 класса II, содержащий графы, связи в которых исчерпываются связями типа 2.

Для произвольной реализации $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^3 из подкласса и для произвольных $i, j, k \in \mathbb{Z}$ обозначим через $B_{i,j,k}$ полный прообраз при отображении φ вершины (i, j, k) решетки Λ^3. Комбинаторным способом нам удалось перечислить все реализации из этого подкласса, удовлетворяющие следующему условию. Подграф графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{i,j\in\mathbb{Z}} B_{i,j,0}$, является симметрическим 2-расширением решетки Λ^2, изоморфным следующим графам реализаций R_{Σ_1,γ_1}, R_{Σ_1,γ_2},R_{Σ_1,γ_3},R_{Σ_1,γ_4}, R_{Σ_1,γ_5},R_{Σ_1,γ_6}, R_{Σ_1,γ_7}, R_{Σ_1,γ_8}, полученным в [5]. Далее, подграф графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{j,k\in\mathbb{Z}} B_{0,j,k}$, является симметрическим 2-расширением решетки Λ^2 изоморфным графам реализаций R_{Σ_1,γ_1}, R_{Σ_1,γ_2},R_{Σ_1,γ_3},R_{Σ_1,γ_4}, R_{Σ_1,γ_5},R_{Σ_1,γ_6}, R_{Σ_1,γ_7}, R_{Σ_1,γ_8}, полученным в [5]. И, наконец, подграф графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{i,k\in\mathbb{Z}} B_{i,0,k}$, является симметрическим 2-расширением решетки Λ^2 изоморфным графам реализаций, указанных выше.

Таким образом, нами изучен важный подкласс исследуемого класса.

Список литературы

[1] V. I. Trofimov, Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **279**:1 (2012), 107–112. doi: 10.1134/S0081543812090088.

[2] E. A. Neganova, V. I. Trofimov, Symmetrical extensions of graphs, *Izv. Math.*, **78**:4 (2014), 809–835. doi: 10.1070/IM2014v078n04ABEH002707.

[3] V. I. Trofimov, The finiteness of the number of symmetrical 2-extensions of the d-dimensional lattice and similar graphs, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **285**:1 (2014), 169–182. doi: 10.1134/S0081543814050198.

[4] Е. А. Коновальчик, К. В. Костоусов, Симметрические 2-расширения 2-мерной решетки. I, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **22**:1 (2016), 159–179.

[5] Е. А. Коновальчик, К. В. Костоусов, Симметрические 2-расширения 2-мерной решетки. II, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **23**:4 (2017), 192–211.

[6] K. V. Kostousov, Symmetrical 2-extensions of a 3-dimensional grid. I, The Art of Descrete and Applied Mathematics, 2020. doi.org/ 10.26493/2590-9770.1353.c0e // adam-journal.eu/index.php/ADAM/article/view/1353

О тензорном произведении модулей[1]

Коныгин А. В.
Институт математики и механики УрО РАН
konygin@imm.uran.ru

Структура тензорного произведения представлений имеет важное значения в теории представлений групп лиева типа (теорема Стейнберга, коэффициенты Клебша-Гордана и др.). В работах [1,2,4] удалось в некоторых частных случаях дать точное описание структуры тензорного произведения представлений алгебраической группы.

Пусть G — линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K положительной характеристики, V_1 — KG_1-модуль и V_2 — KG_2-модуль, где G_1 и G_2 — группы, изоморфные G. Пусть V — тензорное произведение V_1 и V_2. Прямое произведение $G_1 \times G_2$ естественным образом действует на V, $G_1 \times G_2 < GL(V)$. Вопрос о возможности того, что подгруппы G_1 и $\mathrm{diag}(G_1 \times G_2)$ сопряжены в $GL(V)$, естественным образом возникает при рассмотрении известного вопроса П. Камерона (см. [3]), который можно сформулировать следующим образом: если H — конечная группа и M_1, M_2 — её различные сопряжённые максимальные подгруппы, то верно ли, что из нормальности пересечения $M_1 \cap M_2$ в группе M_1 следует её нормальность в группе H? В данной работе исследуется возможность того, что подгруппы G_1 и $\mathrm{diag}(G_1 \times G_2)$ сопряжены в $GL(V)$, когда G — связная редуктивная линейная алгебраическая группа и V_1, V_2 — полупростые модули.

Список литературы

[1] C. Bowman, S. R. Doty, S. Martin, Decomposition of tensor products of modular irreducible representations for SL_3, *Int. Electron. J. Algebra*, **9** (2011), 177–219.

[2] C. Bowman, S.Ṙ. Doty, S. Martin, Decomposition of tensor products of modular irreducible representations for SL_3: the $p \geq 5$ case, *Int. Electron. J. Algebra*, **17** (2015), 105–138.

[3] P. J. Cameron, Suborbits in transitive permutation groups, *Combinatorics: Proc. NATO Advanced Study Inst. (Breukelen, 1974). Part 3: Combinatorial Group Theory. Amsterdam: Math. Centrum.* (1974), 98–129.

[4] S. Doty, A. Henke, Decomposition of tensor products of modular irreducibles for SL_2, *Q. J. Math. Algebra*, **56** (2005), 189–207.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 20-01-00456).

О конечных группах с заданной системой абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп

Коранчук А. Г.
Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины
melchenkonastya@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Свойства вложения силовских подгрупп и их нормализаторов оказывают большое влияние на строение всей группы. Отметим следующие классические результаты. Группа нильпотентна, если любая её силовская подгруппа является нормальной (субнормальной) в ней. Согласно теореме Глаубермана, если все силовские подгруппы группы самонормализуемы, то группа является p-группой для некоторого простого числа p. В рамках теории формаций широко известны следующие обобщения субнормальности — понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной и К-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп [1, 2]. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Подгруппа H группы G называется К-$\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $H_i^{\mathfrak{F}} \leq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

В последние годы получен целый ряд значительных результатов, рассматривающих формационные вложения различных систем подгрупп в группу. Важное место в этом направлении занимает исследование проблемы, предложенной в [3, 4].

Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация. Необходимо найти условия, которым должны удовлетворять силовские подгруппы группы G, чтобы группа G принадлежала $\mathfrak{F}$.

Данная проблема изучалась в различных работах. Например, в статьях [5–7] для насыщенной формации $\mathfrak{F}$ получены свойства класса групп, у которых силовские подгруппы являются $\mathfrak{F}$-субнормальными (К-$\mathfrak{F}$-субнормальными). В работах [8–15] были найдены приложения полученных классов для решения различных конкретных задач теории групп и их формаций.

На строение конечной группы, помимо силовских подгрупп, также значительно влияют свойства вложения силовских нормализаторов (нормализаторов силовских подгрупп) в группу. В [14] изучались системы подгрупп конечной группы, $\mathbb{P}$-субнормальность ($\mathfrak{U}$-субнормальность) которых гарантирует сверхразрешимость всей группы. В частности, доказано, что группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда ее силовские нормализаторы $\mathbb{P}$-субнормальны ($\mathfrak{U}$-субнормальны) в G. В [15] доказано, что если в группе G любой ее силовский нормализатор субмодулярен, то G является сильно сверхразрешимой группой, т.е. сверхразрешимой группой, у которой все силовские подгруппы субмодулярны. В [4] были начаты исследования групп, у которых нормализаторы силовских подгрупп являются $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами, где $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

Несмотря на полученные результаты, отмеченная выше проблема остается актуальной, поскольку имеются примеры наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ и групп им не принадлежащих, у которых любая силовская подгруппа (любой силовский нормализатор) являются $\mathfrak{F}$-субнормальными, см., например, [4]. В связи с этим в [16] было введено следующее

Определение [16]. Подгруппа H группы G называется абсолютно К-$\mathfrak{F}$-субнормальной (абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной) в G, если любая содержащая ее подгруппа является К-$\mathfrak{F}$-субнормальной (соответственно, $\mathfrak{F}$-субнормальной) в G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и G — группа. Тогда подгруппы G, содержащие $\mathfrak{F}$-корадикал, являются абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальными (К-$\mathfrak{F}$-субнормальными) в G, однако, они не исчерпывают все примеры подгрупп с таким свойством.

В работе [16] для разрешимой наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ были исследованы группы, у которых все силовские подгруппы являются абсолютно К-$\mathfrak{F}$-субнормальными, а также был поставлен вопрос: можно ли отбросить требование разрешимости формации $\mathfrak{F}$? На данный вопрос мы даем частичный ответ.

Границей класса групп $\mathfrak{H}$ [1] называется класс групп $b(\mathfrak{H}) = (G \mid G \notin \mathfrak{H}$ и $G/N \in \mathfrak{H}$ всех $1 \neq N \trianglelefteq G)$. Пусть $F = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Группа G является $\mathfrak{N}$-скованной, если $C_G(F) \subseteq F$. Скажем, что насыщенная формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (*), если для каждой группы $G \in b(\mathfrak{F})$ такой, что $Soc(G)$ – p-группа для некоторого простого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ выполняется, что $G/Soc(G)$ является $\mathfrak{N}$-скованной группой.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, удовлетворяющая условию (*) и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(*1*) *Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

(*2*) *Каждый силовский нормализатор группы G является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

(*3*) *Любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

Теорема позволяет строить примеры не обязательно разрешимых наследственных формаций. Из теоремы получаем следующее

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{F}$ разрешима или граница $b(\mathfrak{F})$ состоит только из примитивных групп типа 2, то следующие утверждения попарно эквивалентны.*

(*1*) *Группа G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

(*2*) *Каждый силовский нормализатор группы G является абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

(*3*) *Любая максимальная подгруппа, содержащая некоторый силовский нормализатор группы G является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G и $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.*

Список литературы

[1] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro, Classes of Finite Groups, Springer, 2006.

[2] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, Подгрупповые функторы и классы конечных групп, Минск: Беларуская навука, 2003.

[3] А. Ф. Васильев, О влиянии примарных $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп на строение группы, *Вопросы алгебры*, **8** (1995), 31-–39.

[4] А. Ф. Васильев, Конечные группы с сильно K-$\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами, *Проблемы физики, математики и техники,* **4**(37) (2018), 66-–71.

[5] Т. И. Васильева, А. И. Прокопенко, Конечные группы с формационно субнормальными подгруппами. *Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук*, **3** (2006), 25–30.

[6] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами, *Проблемы физики, математики и техники*, **4**(9) (2011), 86—91.

[7] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, А. С. Вегера, Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп, *Сиб. матем. журн.*, **57**:2 (2016), 259-–275.

[8] В. Н. Семенчук, С. Н. Шевчук, Характеризация классов конечных групп с помощью обобщенно субнормальных силовских подгрупп, *Мат. заметки*, **89**:1 (2011), 104—108.

[9] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа, *Сиб. матем. журн.*, **51**:6 (2010), 1270-–1281.

[10] В. И. Мурашко, Классы конечных групп с обобщенно субнормальными циклическими примарными подгруппами, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1354—1353.

[11] V. I. Murashka, On analogues of Baer's theorems for widely supersoluble hypercenter of finite groups, *Asian-European J. Math.*, **11**:3 (2018), 1850043 (8 pages).

[12] В. С. Монахов, И. Л. Сохор, Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами, *Сиб. матем. журн.*, **58**:4 (2017), 851-–863.

[13] A. Ballester-Bolinches, W. M. Fakieh, M. C. Pedraza-Aguilera, On Products of Generalised Supersoluble Finite Groups, *Mediterr. J. Math.*, **16**:2 (2019), https://doi.org/10.1007/s00009-019-1323-0.

[14] V. N. Kniahina, V. S. Monakhov, On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups, *Internat. J. of Group Theory*, **2**:4 (2013), 21-–29.

[15] В. А. Васильев, О влиянии субмодулярных подгрупп на строение конечных групп, *Веснік Віцебск. дзярж. ун-та*, **2**(91) (2016), 17-–21.

[16] А. Ф. Васильев, А. Г. Мельченко, Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами, *Проблемы физики, математики и техники*, **4**(41) (2019), 44—50.

Силовская 2-подгруппа в группе автотопизмов полуполевой проективной плоскости четного порядка[1]

Кравцова О. В.
Сибирский федеральный университет
ol71@bk.ru

Полуполевая проективная плоскость является плоскостью трансляций и дуальна плоскости трансляций. Она координатизируется полуполем, т.е. алгебраической системой, удовлетворяющей аксиомам тела, за исключением, возможно, ассоциативности умножения. Известная гипотеза о разрешимости полной группы автоморфизмов всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка ([1], см. также [2], вопрос 11.76, 1990 г.) не имеет опровергающих контрпримеров, но до сих пор не получила общего подхода к доказательству. Проблема редуцируется к доказательству разрешимости группы автотопизмов (автоморфизмов, фиксирующих треугольник). Обсуждая гипотезу разрешимости, предлагаем рассмотреть полуполевые плоскости четного порядка, допускающие автотопизмы порядка два, используя метод, описанный в [3, 4]. Матричное представление бэровских инволюций и регулярного множества позволяет доказать следующий основной результат.

Теорема. *Пусть π – полуполевая плоскость π порядка 2^n, $4 \not| n$. Тогда ее группа автотопизмов Λ не содержит элементов порядка 4.*

Полученные результаты позволяют сделать вывод о порядке силовской 2-подгруппы в группе Λ, а также в группе автоморфизмов $Aut\, S$ полуполя S, координатизирующего плоскость π.

Список литературы

[1] D. R. Hughes, F. C. Piper, Projective planes, Springer–Verlag New–York Inc., 1973.

[2] В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро, Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач, (Новосибирск, 2006).

[3] О. В. Кравцова, Полуполевые плоскости, допускающие бэровскую инволюцию, *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*, **2** (2013), 26–38.

[4] O. V. Kravtsova, Elementary Abelian 2-subgroups in an Autotopism Group of a Semifield Projective Plane, *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*, **32** (2020), 49–63.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-01-00566 А.

Модулярность решетки τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций конечных групп

Лось И. П., Сафонов В. Г.
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
losIP@bsu.by, vgsafonov@bsu.by

В работе рассматриваются только конечные группы. Используется терминология, принятая в работах [2] – [2].

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, ω' — дополнение к ω во множестве всех простых чисел. Всякую функцию вида $f : \omega \bigcup \{\omega'\} \to \{\text{формации}\}$ называют ω-композиционным спутником. Для произвольного ω-композиционного спутника полагают $CF_\omega(f) = (G|G/R_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/C^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(Com(G)) \cap \omega)$, где $Com(G)$ — множество всех абелевых композиционных факторов группы G, $R_\omega(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая ω-подгруппа группы G, $C^p(G)$ — пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G, у которых композиционные факторы имеют порядок p (если таких факторов у G нет, то полагают $C^p(G) = G$).

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ для некоторого ω-композиционного спутника f, то говорят, что она ω-композиционна, а f — ω-композиционный спутник этой формации.

Всякую формацию считают 0-кратно ω-композиционной, а при $n \geq 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют n-кратно ω-композиционной, если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения f являются $(n-1)$-кратно ω-композиционными формациями. Формацию, n-кратно ω-композиционную для любого натурального n, называют тотально ω-композиционной.

Подгрупповым функтором [2] называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что: 1)$G \in \tau(G)$ для любой группы G; 2)для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $H^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Через $c^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначают τ-замкнутую тотально ω-композиционную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{X}$, т.е. $c^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}\mathfrak{X}$ — пересечение всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Для любых τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee^\tau_{\omega_\infty} \mathfrak{H} = c^\tau_{\omega_\infty}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество $c^\tau_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций относительно операций $\vee^\tau_{\omega_\infty}$ и $\cap$ образует полную решетку формаций.

Изучению свойств решеток кратно и тотально ω-композиционных формаций конечных групп посвящены работы [3]– [11]. Нами доказана

Теорема 1. *Решетка $c^\tau_{\omega_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально ω-композиционных формаций является модулярной.*

Теорема 1 имеет ряд следствий, представляющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес. В частности, если $\omega = \{p\}$ или ω — множество всех простых чисел из теоремы! 1 вытекают

Следствие 1. *Решетка $c^\tau_{p_\infty}$ всех τ-замкнутых тотально p-композиционных формаций является модулярной.*

Следствие 2. *Решетка c^τ_∞ всех τ-замкнутых тотально композиционных формаций является модулярной.*

Если τ — тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 1 получаем

Следствие 3 [3]. *Решетка c^ω_∞ всех тотально ω-композиционных формаций является модулярной.*

Отметим, что следствие 3 дает ответ на проблему 2 из [2].

Если, кроме того, ω — множество всех простых чисел имеет место

Следствие 4. *Решетка c_∞ всех тотально композиционных формаций является модулярной.*

Список литературы

[1] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков, Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп, *Украинский мат. журнал*, **52**:6 (2000), 783–797.

[2] А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск: Издательство Беларуская навука, 1997.

[3] В. Г. Сафонов, К теории тотально $\mathfrak{L}$-композиционных формаций, Препринт: ГГУ им. Ф. Скорины, **9**, 2004, 22.

[4] П. А. Жизневский, О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп, *Известия Гомельского гос. ун-та*, **(58)**:(1) (2010), 185–191.

[5] Н. Н. Воробьев, А. А. Царев, О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, *Украинский мат. журнал*, **62**:4 (2010), 453–463.

[6] Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба, А. А. Царев, Тождества решеток частично композиционных формаций, *Сибирский мат. журнал*, **52**:5 (2011), 1011–1024.

[7] A. A. Tsarev, Vorob'ev N.N. On a Question of the Theory of Partially Composition Formations, *Algebra Colloquium*, **21**:3 (2014), 437–447.

[8] A. Tsarev, Inductive lattices of totally composition formations, *Revista Colombiana de Matematicas*, **52**:2 (2018), 161–169.

[9] A. Tsarev, On the lattice of all τ-closed totally composition formations of finite groups, *Материалы конференции "Алгебра и математическая логика": материалы конференции. Казань*, (2019), 62–63.

[10] I. P. Los, V. G. Safonov, Separability of the lattice of τ-closed totally ω-composition formations of finite groups, *The XII International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 215th anniversary of V. Bunyakovsky. Vinnytsia*, (2019), 64–65.

[11] В. В. Щербина, О двух задачах теории частично тотально композиционных формаций конечных групп, *Прикладная математика & Физика*, **52**:1 (2020), 18–32.

О некоторых свойствах квазинормальных классов Фиттинга

Марцинкевич А. В.
Витебский государственный университет имени П.М. Машерова
hanna-t@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. В определениях и обозначениях мы следуем [1].

Блессенолем и Гашюцом [2] были определены нормальные классы Фиттинга. Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется нормальным, если для любой группы $G \in \mathfrak{S}$ ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G. При этом $\mathfrak{F}$-инъектор G — ее подгруппа V такая, что $V \bigcap N$ — подгруппа $\mathfrak{F}$-максимальная в N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

В работе [3] Хаук, обобщая результаты Макана [4], предложил следующую локализацию понятия нормальности класса Фиттинга. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется квазинормальным в непустом классе групп $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{X}$-квазинормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для каждого $p \in \mathbb{P}$ из $G \in \mathfrak{F}$, $G \wr Z_p \in \mathfrak{X}$ следует $G^m \wr Z_p \in \mathfrak{F}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, класс $\mathfrak{F}$ является нормальным [2].

Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^*$ обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Классом Локетта [5] называют такой класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, для которого верно $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$.

Нами доказаны некоторые общие свойства квазинормальных классов Фиттинга.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_3$ — классы Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_2$, если $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $(\mathfrak{F}_2)^*$;*

(b) *если $\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_3$ — класс Локетта, то $\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_1$ квазинормален в $\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_2$.*

Список литературы

[1] K. Doerk, T. Hawkes, Finite soluble groups, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] D. Blessenohl, W. Gaschütz, Über normale Schunk- und Fittingklassen, *Math. Z.*, **118** (1970), 1–8.

[3] P. Hauck, Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen, Diss. ... Doctor der Naturwissenschaften, 1977.

[4] A. R. Makan, Fitting classes with the wreath product property are normal, *J. London Math. Soc.*, **8** (1974), 245–246.

[5] F. P. Lockett, The Fitting class $\mathfrak{F}^*$, *Math. Z.*, **137** (1974), 131–136.

О графах Грюнберга–Кегеля конечных групп

Маслова Н. В.
ИММ УрО РАН и Уральский федеральный университет
butterson@mail.ru

Все рассматриваемые в данном докладе группы конечны. Пусть G — группа. Через $\pi(G)$ обозначим множество всех простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф Грюнберга–Кегеля* (или *граф простых чисел*) $\Gamma(G)$ группы G; множеством вершин этого графа является множество $\pi(G)$, а две различные вершины p и q смежны в этом графе тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

Понятие графа Грюнберга–Кегеля возникло в связи с изучением некоторых когомологических вопросов теории целочисленных групповых колец [4], однако оказалось очень плодотворным, например, при исследовании распознаваемости группы по спектру. Группа G называется *распознаваемой по спектру* (*распознаваемой по графу Грюнберга–Кегеля*), если любая конечная группа H со свойством $\omega(H) = \omega(G)$ (соответственно, $\Gamma(H) = \Gamma(G)$) изоморфна G. Известны примеры конечных групп, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны как абстрактные графы, но не равны как помеченные графы. Например, графы Грюнберга–Кегеля знакопеременной группы степени 10 и группы $Aut(J_2)$ изоморфны как абстрактные графы, более того, $\pi(A_{10}) = \pi(Aut(J_2))$, однако, $\Gamma(A_{10}) \neq \Gamma(Aut(J_2))$. В 2006 г. А.В. Заварницин [8] показал, что если G — группа такая, что граф $\Gamma(G)$ изоморфен как абстрактный граф графу $\Gamma(J_4)$, то $G \cong J_4$. Таким образом, группа J_4 *распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля*. Используя [8, Theorem A] и основной результат работы [6], можно показать, что группа ${}^2G_2(27)$ также распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля, более того, недавно нами при участии М. Р. Зиновьевой было показано, что группы $E_8(q)$ при $q \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$ распознаваемы по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.[1]

В данный момент для многих неабелевых простых групп и групп их автоморфизмов доказана их распознаваемость по спектру (см., например, [7]), активно исследуется вопрос распознаваемости группы по ее графу Грюнберга–Кегеля. Исследования свойств групп по свойствам их графов Грюнберга–Кегеля оформились в самостоятельное направление (см., например, обзорную работу [5]). В частности, в рамках этого направления исследований представляет интерес описание случаев совпадения графов Грюнберга–Кегеля неизоморфных групп (см., например, работы [2, 9, 10]), исследование комбинаторных свойств графов Грюнберга–Кегеля конечных групп (см., например, работы [3, 11]). В настоящем докладе мы обсуждаем недавние результаты о совпадении графов Грюнберга–Кегеля неизоморфных групп и вопросы характеризации групп по спектру и по графу Грюнберга–Кегеля.

Исследование групп автоморфизмов графов Грюнберга-Кегеля конечных групп также представляет интерес. П. Эрдёш и А. Реньи [1] показали, что "почти все графы не имеют нетривиальных автоморфизмов", т. е. величина $\frac{N_0(n)}{N(n)}$, где $N_0(n)$ — общее количество попарно неизоморфных графов на n вершинах, не имеющих нетривиальных автоморфизмов, $N(n)$ — общее количество попарно неизоморфных графов на n вершинах, стремится к 1 при n стремящемся к бесконечности. С другой стороны, графы Грюнберга–Кегеля конечных групп как абстрактные графы часто имеют нетривиальные группы автоморфизмов. Али Махмудифаром (Ali Mahmoudifar) была сформулирована гипотеза о том, что *граф Грюнберга–Кегеля любой неабелевой простой группы как абстрактный граф имеет нетривиальную группу автоморфизмов.* Мы опровергаем эту гипотезу доказав, что граф $\Gamma(E_6(3))$ как абстрактный граф не имеет нетривиальных автоморфизмов.[2] Естественным образом возникает проблема исследования групп, графы Грюнберга–Кегеля которых как абстрактные

[1]Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19-71-10067).
[2]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-51-00007.

графы не имеют нетривиальных автоморфизмов, а также проблема исследования групп автоморфизмов графов Грюнберга–Кегеля конечных групп.

Список литературы

[1] P. Erdös, A. Rényi, Asymmetric graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14** (1963), 295–315.

[2] I. B. Gorshkov, N. V. Maslova, Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs are equal to the Gruenberg–Kegel graphs of solvable groups, *Algebra and Logic*, **57**:2 (2018), 115–129.

[3] A. Gruber, T. M. Keller, M. L. Lewis, K. Naughton, B. Strasser, A characterization of the prime graphs of solvable groups, *J. Algebra.*, **442** (2015), 397–422.

[4] K. W. Gruenberg , K. W. Roggenkamp, Decomposition of the augmentation ideal and of the relation modules of a finite group, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **31**:2 (1975), 149–166.

[5] A. S. Kondrat'ev, Finite groups with given properties of their prime graphs, *Algebra and Logic*, **55**:1 (2016), 77–82.

[6] N. V. Maslova, D. Pagon, On the realizability of a graph as the Gruenberg–Kegel graph of a finite group, *Siberian Electron. Math. Reports*, **13** (2016), 89–100.

[7] A. V. Vasil'ev, On finite groups isospectral to simple classical groups, *J. Algebra*, **423** (2015), 318–374.

[8] A. V. Zavarnitsine, Recognition of finite groups by the prime graph, *Algebra and Logic*, **45**:4 (2006), 220–231.

[9] M. R. Zinov'eva, V. D. Mazurov, On finite groups with disconnected prime graph, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **283**:S1 (2013), 139–145.

[10] M. R. Zinov'eva, Finite simple groups of Lie type over a field of the same characteristic with the same prime graph, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **20**:2 (2014), 168–183.

[11] M. R. Zinov'eva, A. S. Kondrat'ev, Finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **295**:S1 (2016), 178–188.

Табулирование 3-многообразий до сложности 13. Гипотезы

Матвеев С. В.[1], Таркаев В.В.
ИММ УрО РАН, Челябинский государственный университет
svmatveev@gmail.com, trk@csu.ru

В работе кратко описывается полная таблица ориентируемых замкнутых неприводимых 3-много образий сложности ≤ 13, кроме того, формулируется ряд гипотез касающихся роста числа многообразий различных типов. Наша работа связана со следующими проблемами.

(A) *Алгоритмическое распознавание многообразий.* Даны два многообразия (заданные комбинаторными данными, скажем, разложением на симплексы), как понять, гомеоморфны ли они.

(B) *Эффективное табулирование многообразий.* Составить таблицу = список, снабженный дополнительной информацией, такой как тип геометрии Терстона, некоторая алгебраическо-тополо гическая информация и значения инвариантов Тураева-Виро для всех многообразий до определенной сложности (сложность[2] многообразия c является неотрицательным целым числом и для каждого $c \geq 0$ число замкнутых неприводимых многообразий сложности c конечно) вместе с эффективным методом сравнения любых двух многообразий сложности $\leq c$.

Эти две проблемы тесно взаимосвязаны. Действительно, имея эффективный и быстрый алгоритм для проблемы (A), можно перечислить все многообразия до некоторого уровня сложности, допуская наличие в полученном списке гомеоморфных многообразий, затем сравнить попарно многообразия из списка с помощью алгоритма и уничтожить дубликаты. Естественная модификация этой наивной процедуры также ставит в соответствие каждому многообразию его сложность.

С другой стороны, проблема (B) явно включает в себя проблему (A), ограниченную многообразиями сложности $\leq c$.

Теоретически, проблема (A) может считаться решенной: существует алгоритм, который, рассматривая два многообразия, решает, являются ли они гомеоморфными. Этот алгоритм изложен в книге [2, §6]. Проблема (A) была сформулирована В. Хакеном, по крайней мере, в 1962 году. Нетривиальные продвижения в ее решении сделаны в работе Г. Хемиона. Их результатом стало то, что проблема (A) была объявлена решенной. Несколько позже в доказательстве был найден существенный пробел. Проблема была окончательно решена в [2, Теорема 6.6.1].

К сожалению, использование этого алгоритма для сравнения двух даже относительно простых многообразий превосходит возможности современных компьютеров. Проще говоря, в теории алгоритм существует, на практике он не помогает.

В последние 15 лет [1, §2] мы вместе с другими математиками активно работали над таблицей многообразий. Новый результат — таблица всех замкнутых неприводимых многообразий сложности 13. Результат, связанный со сложностью ≤ 12 опубликован, например, в [4].

Здесь и далее $N(c)$ обозначает число замкнутых неприводимых ориентируемых трехмерных многообразий сложности c.

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Всего
$N(c)$	3	2	4	7	14	31	74	175	436	1154	3078	8421	23448	66197	103041

Напомним, что согласно результатам У. Терстона, существует 8 типов геометрий: $E^3, S^3, S^2 \times R, H^2 \times R, \widetilde{SL_2R}, Nil, Sol$ и H^3, см. [2, §8.4.1]. Трехмерное многообразие может обладать не более, чем одной из них. В приводимой ниже таблице содержится информация о многообразиях сложности ≤ 13 с точки зрения классификации Терстона.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории топологии и динамики Новосибирского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Y26.31.0025).

[2] Определение сложности см. [2, §6]

c	$S^2 \times R$	E^3	$H^2 \times R$	S^3	Nil	$\widetilde{SL_2R}$	Sol	H^3	Non-geometric
0	0	0	0	3	0	0	0	0	0
1	0	0	0	2	0	0	0	0	0
2	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	0	0	0	14	0	0	0	0	0
5	0	0	0	31	0	0	0	0	0
6	0	6	0	61	7	0	0	0	0
7	0	0	0	117	10	39	5	0	4
8	0	0	2	214	14	162	9	0	35
9	0	0	0	414	15	513	23	4	185
10	0	0	8	798	15	1416	39	25	777
11	0	0	4	1582	15	3696	83	120	2921
12	0	0	24	3118	15	9324	149	461	10357
13	0	0	9	6222	15	22916	303	1641	35091

В первой колонке этой таблицы стоят только нули, потому что, как известно, замкнутых ориентируемых многообразий, обладающих геометрией $S^2 \times R$, существует ровно 2, и оба они приводимы и по этой причине в нашей таблице не фигурируют.

Теперь посмотрим на многообразия в таблице иначе, разделим их на следующие 4 подмножества, отталкиваясь от того, блоки какого типа (зейфертовы или гиперболические) участвуют в их JSJ-декомпозиции.

- S — многообразия Зейферта;
- h — гиперболические многообразия;
- C_S — многообразия, которые не являются зейфертовыми, но могут быть склеены только из зейфертовых блоков;
- C_h — многообразия, не являющиеся гиперболическими, JSJ-декомпозиция которых включает гиперболический блок.

Предложенная классификация не совпадает с классической классификацией Терстона, хотя, очевидно, во многом с ней перекликается. То, что многообразие относится к типу S, равнозначно тому, что оно обладает геометрией одного из первых шести типов. Многообразия типа h — это в точности многообразия, обладающие гиперболической геометрией. Главное отличие имеется во взгляде на остальные многообразия. Из негеометрических многообразий выделены многообразия типа C_h. Многообразия типа C_S — это остальные негеометрические многообразия вместе с многообразиями с геометрией Sol. Разделение составных многообразий на два различных типа C_S и C_h мотивировано в частности соображениями, изложенными нами в статьях.

Приводимая далее таблица показывает, как с ростом сложности растет число многообразий каждого из определенных четырех типов.

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Всего
S	3	2	4	7	14	31	74	166	392	942	2237	5297	12481	29162	50812
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	25	120	461	1641	2251
C_S	0	0	0	0	0	0	0	9	44	208	816	3001	10482	35177	49737
C_h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	24	217	244

Напомним, что, если многообразие можно склеить из n тетраэдров, то его сложность не превышает n [4, Теорема 2.2.5]. На самом деле, для большинства многообразий их сложность равна как раз минимально возможному числу тетраэдров, из которых можно склеить многообразие, см. [4, Теоремы 2.2.6 и 2.2.7]. Число различных вариантов склейки n тетраэдров с ростом n растет очень быстро.

Теоретические оценки и численные эксперименты показывают, что рост здесь быстрее экспоненциального. Вот точные числа попарно различных склеек $1, 2, 3$ и 4 тетраэдров: $11, 169, 5959, 405607$ ([5]). Однако, наши результаты показывают, что, если рассматривать не все возможные склейки, а лишь те, которые дают замкнутые ориентируемые неприводимые многообразия, то их число растет экспоненциально.

Мы видим, что большинство многообразий низкой сложности являются Зейфертовыми,что было ожидаемо и даже доказано для очень низкой сложности. Анализ нашей таблицы позволяет предположить, что рост числа зейфертовых многообразий медленнее, чем рост общего числа многообразий, но он тоже экспоненциальный.

В то же время, можно заметить, что доля зейфертовых многообразий некоторой сложности среди всех многообразий этой сложности (т.е. величина $\frac{S(c)}{N(c)}$), начиная с $c = 6$, монотонно убывает. По-видимому, это является следствием того факта, что $\frac{S(c)}{2.5^c}$ стремится к 0 в то время, как $\frac{N(c)}{2.5^c}$ стремится к бесконечности.

Мы также видим, что относительно немногие многообразия в нашей таблице являются гиперболическими. Это, на самом деле, не ожидалось. Напомним, что, как правило, считается, что "большинство" многообразий являются гиперболическими. В фольклоре это утверждение приписывают М. Громову скорее как гипотезу. Возможно, оно нигде не опубликовано.

Гиперболические многообразия появляются в таблице на сложности 9. Доля гиперболических многообразий среди всех многообразий, т.е. величина $\frac{h(c)}{N(c)}$, где $h(c)$ обозначает число гиперболических многообразий сложности c, невелика, но монотонно растет.

В настоящее время мы знаем очень мало о сложности гиперболических многообразий, но все же предполагаем, что их доля среди всех многообразий с ростом сложности вопреки упомянутому выше мнению будет стремиться не к 1, а к 0: $\lim_{c\to\infty} \frac{h(c)}{N(c)} = 0$.

Понятно, что имеющейся информации недостаточно для формулирования обоснованных гипотез, но все же мы предполагаем, что с ростом сложности доминирующей группой будут не гиперболические многообразия, а объединение $C_S \cup C_h$. Причем, по нашему мнению, при достаточно больших значениях сложности C_h будет преобладать над C_S, т.е.

$$\lim_{c\to\infty} \frac{C_S(c) + C_h(c)}{N(c)} = 1, \quad \lim_{c\to\infty} \frac{C_s(c)}{C_h(c)} = 0.$$

Здесь через $C_S(c)$ и $C_h(c)$ обозначены, соответственно, числа многообразий типов C_S и C_h, имеющих сложность c.

С учетом отмеченных выше тенденций на сложности 14 C_S-многообразия, вероятно, обгонят зейфертовы и по общему числу.

Список литературы

[1] С. В. Матвеев, Табулирование трехмерных многообразий, *Успехи математических наук*, **60**:4(364) (2005), 97-–122.

[2] S. V. Matveev, Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. Algorithms and Computation in Mathematics, **9**. Springer-Verlag, Berlin, (2003) xii+478. ISBN: 3-540-44171-9

[3] А. Ю. Веснин, С. В. Матвеев, Е. А. Фоминых, Сложность трехмерных многообразий: точные значения и оценки, *Сибирские электронные математические известия*, **8** (2011), 341—364.

[4] А. Ю. Веснин, С. В. Матвеев, Е. А. Фоминых, Новые аспекты теории сложности трехмерных многообразий, *Успехи математических наук*, **73**:4 (442), (2018) 53-102; перевод в Russian Math. Surveys, **73**:4 (2018), 615–660

[5] Е. А. Сбродова, В. В. Таркаев, Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова, Виртуальные трехмерные многообразия сложности 1 и 2, *Труды института математики и механики УрО РАН*, **23**:4 (2017), 257–264.

Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ и $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$ не существуют

Махнев А. А., Нирова М. С.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Кабардино-Балкарский госуниверситет
makhnev@imm.uran.ru, nirova_m@mail.ru

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в графе Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$.

В работе [1] исследованы свойства дистанционно регулярного графа Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3. В [2] доказано, что дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, a-1, ap\}$, для которого граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$ с квазиклассическими параметрами $\{p+1, a\} = \{q, q\}, \{q^2, q\}, \{q^2, q^3\}, \{q-1, q+1\}$, имеет массив пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, q^2-q-2\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ или $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$.

Теорема. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ и $\{195, 168, 14; 1, 12, 182\}$ не существуют.

Следствие. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, a-1, ap\}$, для которого граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$ с квазиклассическими параметрами $\{p+1, a\} = \{q, q\}, \{q^2, q\}, \{q^2, q^3\}, \{q-1, q+1\}$, имеет массив пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, q^2-q-2\}$.

Список литературы

[1] M. Nirova, On distance-regular graphs Γ with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3, *Sibirean electr. Math. Reports*, **15** (2018), 175–185.

[2] M. Nirova, Codes in distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$, *Trudy IMM UrO RAN*, **24:3** (2018), 155–163.

Обратные задачи: дистанционно регулярные графы диаметра 4

Махнев А. А., Падучих Д. В.
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
makhnev@imm.uran.ru, dpaduchikh@gmail.com

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i \in \{1,2,3,...,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w)=i$. Граф $\Gamma_{i,j}$ определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u,w смежны в $\Gamma_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w) \in \{i,j\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. По [1] выполняется фундаментальная граница

$$(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d},\ b^- = -1 - \frac{b_1}{1+1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется плотным. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-. Хорошо известно (см., например, [1, теорема 3.2]), что плотный граф диаметра 3 является графом Тэйлора. В этом случае окрестность любой вершины является графом без треугольников или сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4. По [1] граф Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q^4_{11}=0$. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p=b^+, -q=b^-$, то все параметры Γ выражаются через p,q,r. В этом случае назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p,q,r ($AT4(p,q,r)$-графом).

В работе изучаются параметры сильно регулярных графов $\Gamma_{3,4}$ для дистанционно регулярных графов Γ диаметра 4. Обратно по параметрам сильно регулярного графа $\Gamma_{3,4}$ мы найдем возможные массивы пересечений антиподального дистанционно регулярного графа Γ диаметра 4.

Теорема 1. Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Delta=\Gamma_{3,4}$. Тогда $\lambda(\Delta)=0$, $b_0=k(\Delta)-1$, $c_2=a_1+2=\mu(\Delta)$ и $b_1=k(\Delta)-\mu(\Delta)$.

Заметим, что $AT4(p,q,r)$-граф Γ имеет сильно регулярный граф $\Gamma_{3,4}$ тогда и только тогда, когда $q=p+2$ и $r=2$. В [2] доказано, что $AT4(p,p+2,2)$-граф не существует.

Теорема 2. Пусть Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Delta=\Gamma_{3,4}$. Тогда Γ не является $AT4(p,q,r)$-графом.

Графом Крейна назовем сильно регулярный граф без треугольников, для которого достигается равенство в границе Крейна (равносильно, $q^2_{22}=0$). Граф Крейна $Kre(r)$ со вторым собственным значением r имеет параметры $((r^2+3r)^2, r^3+3r^2+r, 0, r^2+r)$. Для графа $Kre(r)$ антиокрестность вершины сильно регулярна с параметрами $((r^2+2r-1)(r^2+3r+1), r^3+2r^2, 0, r^2)$ и пересечение антиокрестностей двух смежных вершин является сильно регулярным графом с $((r^2+2r)(r^2+2r-1), r^3+r^2-r, 0, r^2-r)$.

Теорема 3. Пусть Γ – антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Delta=\Gamma_{3,4}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если Δ – граф Крейна $Kre(r)$, то $r=1$ и Γ является 4-кубом;

(2) если Δ – антиокрестность вершины в графе Крейна $Kre(r)$, то Γ не существует;

(3) если Δ – пересечение антиокрестностей двух смежных вершин графа Крейна $Kre(r)$, то $r>3$.

Список литературы

[1] A. Jurišič, J. Koolen, P. Terwilliger, Tight distance-regular graphs, *J. Algebr. Combin.*, **12** (2000), 163–197.

[2] A. Makhnev, D. Paduchikh, On strongly regular graphs with eigenvalue μ and their extensions, *Trudy IMM UrO RAN*, **19:3** (2013), 207–214.

О конечных факторизуемых группах с перестановочными подгруппами из сомножителей

Монахов В. С., Трофимук А.А .
Гомельский университет им. Ф. Скорины, Гомель
victor.monakhov@gmail.com
alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1,2]. Запись $Y \leq X$ означает, что Y — подгруппа группы X.

Напомним, что подгруппы A и B группы G называются *взаимно (тотально) перестановочными*, если $UB = BU$ и $AV = VA$ (соответственно $UV = VU$) для всех $U \leq A$ и $V \leq B$.

Идея тотально и взаимно перестановочных подгрупп впервые была инициирована в работе М. Асаада и А. Шаалана [13]. Это направление разрабатывается многими авторами, ему посвящены разделы 4–5 монографии [2].

Вполне естественно рассматривать факторизуемую группу $G = AB$, у которой некоторые подгруппы из сомножителей A и B взаимно (тотально) перестановочны. В этом направлении В. С. Монахов [4] установил разрешимость группы $G = AB$ при условии, что подгруппы A и B разрешимы и картеровы (или силовские) подгруппы из A и B перестановочны.

Введем следующее

Определение. *Подгруппы A и B группы G называются* msp-*перестановочными, если*

(1) AB *— подгруппа группы G;*

(2) P *и* Q *взаимно перестановочны, где P — произвольная силовская p-подгруппа из A, а Q — произвольная силовская q-подгруппа из B, $p \neq q$.*

В настоящей работе исследованы группы, факторизуемые двумя msp-перестановочными подгруппами.

Лемма. *Пусть A и B —* msp-*перестановочные подгруппы группы G и $G = AB$. Пусть $p, r \in \pi(G)$, p — наибольшее в $\pi(G)$, r — наименьшее. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если A и B p-замкнуты, то группа G p-замкнута;*

(2) *если A и B r-нильпотентны, то группа G r-нильпотентна;*

(3) *если A и B имеют силовские башни сверхразрешимого типа, то группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа;*

(4) *если A и B разрешимы, то G разрешима.*

Обозначим через $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Подгруппа H называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* [5] группе G, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G, \ |H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}, \ \forall i.$$

Группа, у которой все силовские подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, называется w-*сверхразрешимой*. Класс всех w-сверхразрешимых групп обозначается $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, см. [5]. В [5, теорема 2.7, предложение 2.8] доказано, что класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является насыщенной наследственной формацией и каждая группа из $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Согласно [5, теорема 2.13], [6, Теорема B], [7, теорема 2.6] группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и каждая метанильпотентная (или бипримарная) подгруппа из G сверхразрешимы.

Класс всех групп, у которых каждая примарная циклическая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, будем обозначать $\mathrm{v}\mathfrak{U}$. В [6, теорема B] доказано, что класс $\mathrm{v}\mathfrak{U}$ является насыщенной наследственной формацией и группа $G \in \mathrm{v}\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и каждая бипримарная подгруппа из G с циклической силовской подгруппой сверхразрешима. Очевидно, что справедливо включение $\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{v}\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{D}$. Здесь $\mathcal{D}$ — формация всех групп, имеющих силовскую башню сверхразрешимого типа.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— насыщенная наследственная формация такая, что* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathcal{D}$. *Пусть группа* $G = AB$ *— произведение* msp-*перестановочных подгрупп* A *и* B. *Если* $A \in \mathfrak{F}$ *и* $B \in \mathfrak{F}$, *то группа* $G \in \mathfrak{F}$.

Следствие. *Пусть группа* $G = AB$ *— произведение* msp-*перестановочных подгрупп* A *и* B. *Если подгруппы* A *и* B *сверхразрешимы* (w-*сверхразрешимы*, v-*сверхразрешимы*), *то группа* G *сверхразрешима (соответственно* w-*сверхразрешима*, v-*сверхразрешима*).

Список литературы

[1] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Berlin, Heidelberg, New York:Springer Verlag, 1967.

[2] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad, Products of finite groups, Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

[3] M. Asaad, A. Shaalan, On supersolvability of finite groups, *Arch. Math.*, **53** (1989), 318–326.

[4] В. С. Монахов, О разрешимости группы с перестановочными подгруппами, *Матем. заметки*, **93**:3 (2013), 436–441.

[5] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа, *Сиб. мат. журнал*, **51**:6 (2010), 1270–1281.

[6] V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, Finite group with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups, *Ricerche Mat.*, **62**:2 (2013), 307–323.

[7] В. С. Монахов, Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами, *Сибирский математический журнал*, **57**:2 (2016), 447–462.

Группы с экстремальными обобщенно субнормальными подгруппами

Мурашко В. И.
Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины
mvimath@yandex.ru

Рассматриваются только конечные группы. В работе используются стандартные терминология и обозначения, которые, если необходимо, могут быть найдены в [12,13]. Минимальной не-$\mathfrak{F}$-группой называется группа $G \notin \mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Класс всех минимальных не-$\mathfrak{F}$-групп обозначается через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Напомним [3], что класс групп $\mathfrak{H}$ называется *экстремальным*, если он является насыщенным гомоморфом и из $G/K \in \mathfrak{H}$, где K — единственная минимальная подгруппа G, всегда следует, что $G \in \mathfrak{H}$. Экстремальные классы групп играют важную роль при изучении локальных формаций (см., [3,4]).

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если $H = G$ или существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $H_i/\mathrm{Core}_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Одним из основных результатов является следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{E}$ — экстремальный класс групп. Тогда класс групп, все $\mathfrak{E}$-подгруппы которых $\mathfrak{F}$-субнормальны, является наследственной насыщенной формацией, совпадающей с классом групп, все $\mathfrak{E}$-подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.*

Идею доказательства данной теоремы можно применить для изучения сверхразрешимых и близких к ним групп.

Напомним [5], что подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной*, если $H = G$ или существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для всех $1 \leq i \leq n$.

Пусть $\mathfrak{P}_n$ — класс всех примарных групп, порожденных не более чем n элементами, $\mathfrak{X}$ — класс разрешимых групп G таких, что $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта, и $\mathfrak{Z} = \mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{X}$. В частности, $\mathfrak{P}_1$ — класс всех циклических примарных групп.

Теорема 2. *Верны следующие утверждения*:

(1) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда всякая ее $\mathfrak{Z}$-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна.*

(2) *Предположим, что $\mathfrak{H}$ — насыщенный гомоморф такой, что всякая группа, все $\mathfrak{H}$-подгруппы которой являются $\mathbb{P}$-субнормальными, сверхразрешима. Тогда $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{H}$.*

С помощью этой теоремы можно упростить доказательства основных результатов (теоремы 3.1-3.3) работы [6].

Следствие 2.1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *Нормализаторы всех силовских подгрупп группы G $\mathbb{P}$-субнормальны в G.*

(2) *Все холловы подгруппы группы G $\mathbb{P}$-субнормальны в G.*

(3) *Все примарные и бипримарные нециклические подгруппы с циклическими силовскими подгруппами группы G $\mathbb{P}$-субнормальны в G.*

(4) *G сверхразрешима.*

Напомним [5], что группа называется расширенно сверхразрешимой, если все ее силовские подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны.

Следствие 2.2. *Пусть $n > 1$. Верны следующие утверждения*:

(1) *Группа является расширенно сверхразрешимой тогда и только тогда, когда всякая ее $\mathfrak{P}_n$-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна.*

(2) *Предположим, что $\mathfrak{H}$ — насыщенный гомоморф такой, что группа, все $\mathfrak{H}$-подгруппы которой $\mathbb{P}$-субнормальны, является расширенно сверхразрешимой. Тогда $\mathfrak{P}_2 \subseteq \mathfrak{H}$.*

Заметим, что классы всех расширенно сверхразрешимых групп $w\mathfrak{U}$ и групп, все циклические примарные подгруппы которых $\mathbb{P}$-субнормальны, $v\mathfrak{U}$ [7] являются наследственными насыщенными формациями, обладающими многими свойствами формации всех сверхразрешимых групп. В частности, $\mathcal{M}(v\mathfrak{U}) \subseteq \mathcal{M}(w\mathfrak{U}) \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{U})$ по [5, теорема 2.9] и [7, теорема B]. Нами был построен еще один класс групп с такими свойствами.

Теорема 3. *Пусть* $e\mathfrak{U}$ *— класс групп, все* $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{X}$*-подгруппы которых* $\mathbb{P}$*-субнормальны. Тогда* $e\mathfrak{U}$ *— наследственная насыщенная формация метанильпотентных групп,* $\mathfrak{U} \subseteq e\mathfrak{U} \subseteq v\mathfrak{U}$ *и* $\mathcal{M}(v\mathfrak{U}) \subseteq \mathcal{M}(e\mathfrak{U}) \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{U})$.

Используя теорему 1, можно доказать

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{E}$ *— наименьший по включению экстремальный класс групп. Тогда* $e\mathfrak{U}$ *совпадает с классом групп* G *таких, что всякая их* $\mathfrak{E}$*-подгруппа является* $\mathbb{P}$*-субнормальной.*

Список литературы

[1] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, Москва: Наука, 1978.

[2] K. Dorek, T. Hawkes, Finite soluble groups, Berlin, New York: Walter de Gruyter 1992.

[3] R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes, Extreme classes of finite soluble groups, *J. Algebra.*, **9** (1968), 285–313.

[4] A. F. Vasil'ev, A problem in the theory of formations of finite groups, *Math. Notes*, **62**:1 (1997), 44–49.

[5] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа, *Сиб. мат. журн.*, **51**:6 (2010), 1270–1281.

[6] V. S. Monakhov, V. N. Kniahinam, On supersolvability of groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups, *Int. J. Group Theory*, **2**:4 (2013), 21–29.

[7] V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups, *Ricerche Mat.*, **62** (2013), 307–322.

К вопросу о групповых коммутативных схемах

Мухаметьянов И. Т.
Лысьвенский филиал Пермского национального исследовательского политехнического университета
muiltal@yandex.ru

Пусть X – конечное множество и пусть R_i $(i = 0, 1, \ldots, d)$ – бинарные отношения на X. $\mathfrak{X}(X) = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ называется *ассоциативной схемой отношений на d классах* (или просто *схемой на* X), если выполняются следующие условия:

(1) $R_0 = \{(x, x)|x \in X\}$;

(2) $X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_d$ и $R_i \cap R_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

(3) ${}^tR_i = R_{i'}$ для некоторого $i' \in \{0, 1, \ldots, d\}$, где ${}^tR_i = \{(x, y)|(y, x) \in R_i\}$;

(4) для любых x, $y \in X$ таких, что $(x, y) \in R_k$, число p^k_{ij} элементов z из X с условием $(x, z) \in R_i$ и $(z, y) \in R_j$, является постоянным (то есть это число не зависит от выбора x и y, а зависит только от $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, d\}$);

(5) $p^k_{ij} = p^k_{ji}$ для всех $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, d\}$.

Неотрицательные целые числа p^k_{ij} называются *числами пересечений схемы* $\mathfrak{X}(X)$.

Схема называется *симметричной*, если выполняется условие

(6) ${}^tR_i = R_i$ для любого $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$.

Определение приведено по [1], стр. 61, 62.

Всюду ниже G – конечная группа, $C_0 = \{e\}$, C_1, $\ldots$, C_r – её классы сопряжённых элементов. Определим отношения R_i на G правилом $(x, y) \in R_i \Leftrightarrow yx^{-1} \in C_i, i \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Тогда $\mathfrak{X}(G) = (G, \{R_i\}_{0\le i\le r})$ является коммутативной схемой отношений с r классами ([1], стр. 63). Назовём её *классовой групповой схемой отношений.*

Поставим вопрос: *Существует ли другое разбиение группы G в объединение $G = \{e\}\cup N_1\cup\cdots\cup N_d$ нормальных подмножеств N_i такое, что для отношений $\tilde{R}_i$, определяемых по правилу $(x, y) \in \tilde{R}_i \Leftrightarrow yx^{-1} \in N_i, i \in \{0, 1, \ldots, d\}$, конфигурация $\mathfrak{X}(G) = (G, \{\tilde{R}_i\}_{0\le i\le d})$ является коммутативной схемой отношений?*

Утвердительный ответ на этот вопрос прост. А именно, если $Out(G)$ нетривиальна, то, взяв в качестве N_i объединения классов сопряжённостей, переходящих друг в друга под действием $Out(G)$, получим очевидный ответ на вопрос. Такую схему назовём *автоморфизм-допустимой групповой схемой.* Договоримся, что наш вопрос не касается автоморфизм-допустимых схем.

Ещё один утвердительный ответ на вопрос получается из симметризации групповой схемы отношений. А именно, пусть $\mathfrak{X}(X) = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ – коммутативная несимметричная схема отношений. Определим новые отношения $\tilde{R}_i = R_i \cup R_{i'}$. Тогда $\tilde{\mathfrak{X}}(X) = (X, \{\tilde{R}_i\})$ – симметричная схема отношений. Схема $\tilde{\mathfrak{X}}(X)$ называется *симметризацией* $\mathfrak{X}(X)$ ([1], стр.65).

Примером такой групповой схемы является схема $\mathfrak{X}(M_{11})$ по группе M_{11}, которая кроме единичного класса имеет следующие классы сопряжённых элементов: 2A – класс инволюций, 3A – класс элементов порядка 3, 4A – класс элементов порядка 4, 5A – класс элементов порядка 5, 8A и 8B – классы взаимно обратных элементов порядка 8, 11A и 11B – классы взаимно обратных элементов порядка 11. И если определить групповую схему отношений отношениями $(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 2A$, $(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 3A$, $(x, y) \in R_3 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 4A$, $(x, y) \in R_4 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 5A$, $(x, y) \in R_5 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 6A$, $(x, y) \in R_6 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 8A$, $(x, y) \in R_7 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 8B$, $(x, y) \in R_8 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 11A$, $(x, y) \in R_9 \Leftrightarrow yx^{-1} \in 11B$ (здесь и везде ниже обозначения классов берём из [2]), то схема не будет симметричной в силу $R_{6'} = R_7$ и $R_{8'} = R_9$. Но если определить новые отношения $(x, y) \in \tilde{R}_i \Leftrightarrow yx^{-1} \in (i + 1)A$, i=1, $\ldots$, 5, $(x, y) \in \tilde{R}_6 = R_6 \cup R_7$, $(x, y) \in \tilde{R}_7 = R_8 \cup R_9$, то она будет симметризацией схемы $\mathfrak{X}(M_{11})$, и ответом на поставленный нами вопрос.

Поэтому мы исключаем из поставленного вопроса также симметризованные групповые схемы отношений классовых групповых схем.

Предложение. *Пусть $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_d$ – такое разбиение группы G на нормальные подмножества N_i, что $N_i = C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \dots \cup C_{i_l}$ тогда и только тогда, когда для некоторого $i' \in \{1, \dots, d\}$ имеет место $N_{i'} = C_{i'_1} \cup C_{i'_2} \cup \dots \cup C_{i'_l}$, где i'_j – такие, что ${}^tRi = R_{i'}$ для отношений R_i из классовой групповой схемы отношений. Введём отношения Q_i на группе G по правилу $(x, y) \in Q_i \Leftrightarrow yx^{-1} \in N_i$, $i \in \{0, 1, \dots, d\}$.*

Если для любых $i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}$ числа записей элементов $y \in N_k$ в виде произведения uv элементов $u \in N_j$ и $v \in N_i$ постоянны (то есть не зависят от выбора элемента $y \in N_k$, а зависят только от i, j, k), то конфигурация $\mathfrak{X}(G) = (G, \{Q_i\}_{0 \le i \le d})$ является коммутативной схемой отношений.

Схему отношений, построенную по **Предложению**, *назовём обобщённой групповой схемой отношений по разбиению $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_d$.*

Теорема 1. *Пусть $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_d$ – такое разбиение группы G с r классами сопряжённых элементов в объединение нормальных подмножеств, что для любого $N_i = C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup \dots \cup C_{i_n}$ имеет место равенство $N_i^{-1} = N_i$, в таблице характеров для n существует квадратный блок, возможно, не один, из $n \times n$ значений характеров, обладающий свойствами:*

1) блок является циклическим латинским квадратом порядка n, столбцы которого входят в столбцы под номерами $i+1, i+2, \dots, i+n$ для некоторых фиксированных $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, а строки входят в строки под номерами $l+1, l+2, \dots, l+n$ для некоторых фиксированных $l \in \{0, 1, \dots, d\}$.

При этом, если в таблице имеется более одного такого блока, то их строки входят в одни и те же строки таблицы, или их столбцы входят в одни и те же столбцы таблицы;

2) значения одних и тех же характеров для $x \in C_{i_s}$ и $y \in C_{i_t}$ (то есть в столбцах, содержащих столбцы блока) вне блоков равны: $\chi_s(x) = \chi_s(y)$ при $s \notin \{l+1, l+2, \dots, l+n\}$;

3) значения характеров в одних и тех же столбцах, не содержащих столбцы блоков, но входящих в строки, содержащие строки блока, одинаковы: $\chi_j(x) = \chi_k(x)$ для $x \notin N_i$ и $j, k \in \{l+1, l+2, \dots, l+n\}$.

Никакие два блока одинаковых размеров не пересекаются.

Тогда конфигурация $\mathfrak{X}(G) = (G, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ по разбиению $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_d$ является симметричной коммутативной схемой отношений.

Ниже мы приводим примеры групп и их разбиений на нормальные подмножества, которые приводят к обобщённым групповым коммутативным схемам отношений, отличным от классовых, автоморфизм-допустимых и симметризованных. Непосредственно по таблицам характеров можно убедиться, что они содержат блоки, удовлетворяющие условиям **Теорема 1.**

1) $G = L_2(8)$, $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_5$, где $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 7A \cup 7B \cup 7C$, $N_4 = 9A \cup 9B \cup 9C$;

2) $G = L_2(11)$, $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_5$, где $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 5A \cup 5B$, $N_4 = 6A$, $N_5 = 11A \cup 11B$;

3) $G = L_2(13)$, $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_5$, где $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 6A$, $N_4 = 7A \cup 7B \cup 7C$, $N_5 = 13A \cup 13B$;

4) $G = L_2(17)$, $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_6$, где $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 4A$, $N_4 = 8A \cup 8B$, $N_5 = 9A \cup 9B \cup 9C$, $N_6 = 17A \cup 17B$;

5) $G = L_2(19)$, $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_6$, где $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 5A \cup 5B$, $N_4 = 9A \cup 9B \cup 9C$, $N_5 = 10A \cup 10B$, $N_6 = 19A \cup 19B$;

6) $G = L_3(3)$, $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_7$, где $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 3B$, $N_4 = 4A$, $N_5 = 6A$, $N_6 = 8A \cup 8B$, $N_7 = 13A \cup 13B \cup 13C \cup 13D$.

Этот список можно очевидным образом продолжать. Но особо хочется остановиться на групповой коммутативной схеме группы $G = J_1$ по разбиению $G = \{e\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_9$, где $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 5A \cup 5B$, $N_4 = 6A$, $N_5 = 7A$, $N_6 = 10A \cup 10B$, $N_7 = 11A$, $N_8 = 15A \cup 15B$, $N_9 = 19A \cup 19B \cup 19C$. Она наделена структурой PBIB(d+1)-схемы. Напомним её определение.

Пусть $(X, \mathfrak{B})$ – блок-схема с множеством точек X и множеством блоков $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$, блоки состоят из одинакового числа точек, каждая точка лежит в одинаковом числе блоков. Пусть λ_0, λ_1, …, λ_d – попарно различные числа, такие, что для любых x и y (необязательно различных) точек из X существует λ_i такое, что пара (x, y) лежат в λ_i блоках и, обратно, для любого λ_i существует пара точек x и y (необязательно различных) точек из X, такая, что x и y одновременно лежат в λ_i блоках. Введём на X бинарные отношения R_0, R_1, ..., R_d по правилу: $(x,y) \in R_i$ тогда и только тогда, когда x и y лежат в точности λ_i блоках. Если при этом выполнены следующие свойства:

1) $|\{x|\exists y : (x,y) \in R_i\}| = n_i$, $i = 0, 1, \ldots, d$;

2) $|\{z|(x,z) \in R_i, (y,z) \in R_j (x,y) \in R_k\}| = p_{ij}^k$ – постоянно,

то блок-схема $(X, \mathfrak{B})$ называется *частично уравновешенной блок-схемой с* $d{+}1$ *типами связей*, или PBIB($d{+}1$)-*схемой*.

Ясно, что схема отношений $\mathfrak{X}(X) = (X, R_{i0 \leq i \leq d})$ наделена структурой PBIB($d{+}1$)-схемы, если на множестве X введена структура блок схемы, такой, что существуют попарно различные числа λ_0, λ_1, ..., λ_d с условием: x и y лежат в точности λ_i блоках тогда и только тогда, когда $(x,y) \in R_i$.

Пусть G – конечная простая неабелева группа, b^G – некоторый класс сопряжённых элементов группы G, $B = b^G \cup (b^{-1})^G$. Рассмотрим блок-схему (G, B) с множеством точек G и множеством блоков $\mathfrak{B} = \{Bg|g \in G\}$. Такую блок-схему назовём (*групповой*) *блок-схемой по множеству* B.

Теорема 2. *Разбиение* $G = \{e\} \cup N_1 \cup \cdots \cup N_9$ *группы* $G = J_1$, *где* $N_1 = 2A$, $N_2 = 3A$, $N_3 = 5A \cup 5B$, $N_4 = 6A$, $N_5 = 7A$, $N_6 = 10A \cup 10B$, $N_7 = 11A$, $N_8 = 15A \cup 15B$, $N_9 = 19A \cup 19B \cup 19C$, *определяет обобщённую групповую коммутативную схему отношений, которая имеет структуру PBIB*(10)*-схемы по классу* B *сопряжённых инволюций.*

Список литературы

[1] Э. Баннаи, Т. Ито, Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений: Пер. с англ., М.: Мир, 1987, 375.

[2] В. А. Белоногов, Представления и характеры в теории конечных групп, Свердловск, 1990, 380.

Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп [1]

Нужин Я. Н.
Сибирский федеральный университет
nuzhin2008@rambler.ru

Известно, что все неприводимы представления групп Шевалле над бесконечными полями и модулярные представления в хороших характеристиках полей определения исчерпываются подпредставлениями тензорных произведений их естественных представлений [1, §§12,13]. Здесь рассматриваются два конкретных таких подпредставления и на их основе получаются ответы на известные вопросы о порождающих множествах инволюций некоторых матричных групп.

Пусть $\varphi \otimes \varphi$ — тензорный квадрат представления φ группы G на векторном пространстве V над полем F. Обозначим через W подпространство в $V \otimes V$, порожденное векторами $v \otimes v$, $v \in V$. Очевидно, оно инвариантно относительно $(\varphi \otimes \varphi)(G)$. Следовательно, имеется индуцированное фактор-представление группы G на $V \otimes V/W$. Оно называется *внешним квадратом* представления φ и обозначается через $\varphi \wedge \varphi$. Подпространство U из $V \otimes V$, порожденное векторами $v \otimes w - w \otimes v$, $v, w \in V$, также инвариантно относительно группы $(\varphi \otimes \varphi)(G)$. Поэтому существует индуцированное представление группы G на $V \otimes V/U$, называемое *симметрическим квадратом* представления φ и обозначается через φ^2. Под областью целостности будем понимать коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля.

Теорема 1. *Пусть φ — естественное неприводимое представление размерности $n \geq 2$ группы $GL_n(F)$ над полем частных F области целостности D характеристики отличной от 2. Тогда симметрический квадрат φ^2 и внешний квадрат $\varphi \wedge \varphi$ являются неприводимыми представлениями и их сужения на подгруппу $SL_n(D)$ также будут неприводимыми, причем $Ker(\varphi^2) = \{1, -1\}$, $Ker(\varphi \wedge \varphi) = \{1, -1\}$ при $n \geq 3$, $Ker(\varphi \wedge \varphi) = SL_n(F)$ при $n = 2$.*

Обозначим через $n(G)$ (соответственно $n_c(G)$) — минимальное число порождающих (соответственно еще и сопряженных) инволюций группы G, произведение которых равно 1. Задачи о нахождении чисел $n(G)$ и $n_c(G)$ для конечных простых групп записаны автором в [2, вопрос 14.69], а список групп, для которых они решены указан в [3]. С использованием неравенства Л.Л.Скотта [4] и теоремы 1 настоящей работы доказывается

Теорема 2. *Пусть G есть $SL_3(D)$ или $SL_6(D)$, где D — область целостности характеристики отличной от 2. Тогда $n(G) > 5$ и, в частности, G не порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, а если D является кольцом целых чисел или конечным полем (нечетного порядка), то $n(G) = n_c(G) = 6$.*

Отметим, что размерности 3 и 6 были исключительными в многих работах, где устанавливалась порождаемость набором элементов с некоторыми определенными свойствами линейных групп этих размерностей над различными областями целостности. Исключительными в том смысле, что либо для размерностей 3 и 6 ответ оказывался противоположным ответу для других размерностей, либо они совсем не рассматривались см., например, [1, 2, 5, 6, 9]. В частности, в [1] отмечается, что вопрос о порождаемости группы SL_n над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны, неизвестен только для $n = 6, 10$.

[1] *Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1) и РФФИ (проект 19–01–00566).*

Список литературы

[1] R. Steinberg, Лекции о группах Шевалле, М.: Мир, 1975.

[2] Коуровская тетрадь, 17-е изд., Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2010.

[3] Я. Н. Нужин, О порождающих множествах инволюций простых конечных групп, *Алгебра и логика*, **58**:3 (2019), 426–434.

[4] L. L. Scott, Matricies and cohomology, *Ann. of Math.*, **5** (1977), 195–198.

[5] M. C. Tamburini, P. Zucca, Generation of certain matrix groups by three involutions, two of which commute, *J. of Algebra*, **195**:2 (1997), 650–661.

[6] Я. Н. Нужин, Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики.II, *Алгебра и логика*, **36**:4 (1997), 422–440.

[7] Я. Н. Нужин, О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны, *Владикавказский матем. журнал*, **10**:1 (2008), 68–74.

[8] D. V. Levchuk, Ya. N. Nuzhin, On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **1**:2 (2008), 133–139.

[9] J. M. Ward, Generation of simple groups by conjugate involutions, Queen Mary college, University of London, Thesis of Doctor of Philosophi, 2009.

Нижний центральный ряд АТ-группы

Рожков А. В.
Кубанский государственный университет
ros@math.kubsu.ru

В работе [1] введено естественное обобщение конструкции Станислава Владимировича Алешина [2]. Основной идеей, заложенной в конструкцию [2], является наличие двух видов порождающих: корневых и продольных. Благодаря этому, при сужении на поддеревья, мы получаем порождающие того же вида. Таким образом, АТ-группа индуцирует на поддеревьях группу, подобную себе, что позволяет вести индукцию. Именно эта индукция делает АТ-группы доступными прямому изучению.

Верхний центральный ряд в АТ-группах отсутствует, поскольку АТ-группы не имеют центра, более того, имеют единичный централизатор в объемлющей группе автоморфизмов всего дерева, над которым они заданы.

Образно выражаясь — АТ-группы каркас группы автоморфизмов всего дерева Т.

2-группа Григорчука задана над двоичным слойно однородным деревом T_2 и порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

В работе [3] было показано, что факторы нижнего центрального ряда 2-группы Григорчука — это

$$\gamma_n/\gamma_{n+1} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & ,\text{при} \quad 2^m+1 \leq n < 3 \cdot 2^{m-1}+1 \\ \mathbb{Z}_2 & ,\text{при} \quad 3 \cdot 2^{m-1}+1 \leq n < 2^{m+1}+1, \end{cases}$$

где $m = 1, 2, \ldots$

Приведенная формула была подтверждена вычислениями в пакете GAP (официальный сайт https://www.gap-system.org/) для нескольких тысяч первых членов нижнего центрального ряда (число членов зависит от мощности компьютера).

Однако, в работе [3] есть два существенных недостатка.

В базовой лемме 2 не разобран один трудно находимый случай.

Индуктивный шаг, переход к порождающим следующего члена нижнего центрального ряда, прописан недостачно четко.

Второе упущение было частично исправлено в [4], что увеличило объем текста вдвое с 10 до 20 стр.

В данной работе оба недочета устранены.

В работе [5] была предпринята попытка вычислить нижний центральный ряд 3-группы Гупты [6].

В работе вычислены первые 10 факторов нижнего центрального ряда "руками"и 26 на компьютере. Доказано, что эти факторы имеют порядок 3 или 9.

Нами получена

Теорема 1. *Факторы нижнего центрального ряда 3-группы Гупты*

$$G = gr(c, d), d := (d, c, c^{-1}),$$

где c — корневой порождающий, над 3-деревом T_3, ограничены в совокупности.

Теорема 2. *Факторы нижнего центрального ряда группы почти без кручения*

$$H = gr(c, d), d := (d, c, 1),$$

где c — корневой порождающий, над 3-деревом T_3, ограничены в совокупности.

Список литературы

[1] А. В. Рожков, К теории групп алешинского типа, *Мат. заметки*, **40**:5 (1986), 572–589.

[2] С. В. Алешин, Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах, *Мат. заметки*, **11**:3 (1972), 319–328.

[3] А. В. Рожков, Нижний центральный ряд одной группы автоморфизмов дерева, *Мат. заметки*, **60**:2 (1996), 225–237.

[4] А. В. Рожков, Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Челябинский гос. университет, Челябинск, 1997.

[5] A. C. Vieira,On the lower central series and the derived series of the gupta-sidki 3-group, *Communications in Algebra*, **26**:4 (1998), 1319–1333.

[6] N. Gupta, S. Sidki, Some infinite p-groups, *Алгебра и логика*, **22**:5 (1983), 584–589.

О тождествах решеток кратно σ-локальных и кратно Бэра-σ-локальных формаций конечных групп

Сафонова И. Н.
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
safonova@bsu.by

В работе рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения, а также ряд свойств кратно σ-локальных и Бэра-σ-локальных формаций представлены в работах [2]–[7]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е., $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Если n натуральное число, G — группа, то по аналогии с обозначениями $\pi(n)$ и $\pi(G)$, используют обозначения $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Группа G называется σ-простой, если G является σ_i-группой для некоторого i. Главный фактор H/K группы G нызывается: σ-центральным (в G), если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ-простой группой; σ_i-фактором, если H/K является σ_i-группой. Группу G называют: σ-нильпотентной, если каждый главный фактор группы G является σ-центральным; $\{\sigma_i\}$-нильпотентной, если каждый главный фактор H/K группы G с условием $\sigma(H/K) \cap \sigma_i \neq \emptyset$ является σ-центральным; обобщенно $\{\sigma_i\}$-нильпотентной, если каждый главный σ_i-фактор группы G является σ-центральным. Через $F_{\{\sigma_i\}}(G)$ (соответствено, $F_{\{g\sigma_i\}}(G)$) обозначают произведение всех нормальных $\{\sigma_i\}$-нильпотентных (соответственно, обобщенно $\{\sigma_i\}$-нильпотентных) подгрупп группы G.

Всякую функцию f вида $f : \sigma \to \{$формации групп$\}$ называют формационной σ-функцией [2], и полагают

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } \ G \neq 1 \ \text{ и } \ G/F_{\{\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что класс групп $\mathfrak{F}$ является σ-локальным и f является σ-локальным определением $\mathfrak{F}$.

Каждую формацию групп считают 0-кратно σ-локальной [2]. При $n > 0$, говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является n-кратно σ-локальной, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ — класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i)$ — $(n-1)$-кратно σ-локальная формация для всякого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$. Формацию $\mathfrak{F}$ называют тотально σ-локальной, если $\mathfrak{F}$ является n-кратно σ-локальной для всех $n \in \mathbb{N}$.

Всякую функцию f вида $f : \sigma \cup \{\emptyset\} \to \{$формации групп$\}$, где $f(\emptyset) \neq \emptyset$, называют обобщенной формационной σ-функцией [6] и полагают,

$$BLF_\sigma(f) = (G \mid G/R_\sigma(G) \in f(\emptyset) \ \text{ и } \ G/F_{\{g\sigma_i\}}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \ \sigma_i \in \sigma^+(G)),$$

где $\sigma^+(G) = \{\sigma_i \mid G$ имеет главный фактор H/K такой, что $\sigma(H/K) = \{\sigma_i\}\}$. Для класса групп $\mathfrak{F}$ полагают $\sigma^+(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma^+(G)$. Если для некоторой обобщенной формационной σ-функции f и класса групп $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, то говорят, что класс $\mathfrak{F}$ является Бэра-σ-локальным (σ-*композиционным*), а f — обобщенное σ-локальное (σ-*композиционное*) определение класса $\mathfrak{F}$.

Следуя концепции кратной локализации, предложенной А.Н.Скибой, любую формацию групп будем считать 0-*кратно Бэра-σ-локальным или* 0-*кратно σ-композиционной.* При $n > 0$, будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ является *n-кратно Бэра-σ-локальной или n-кратно σ-композиционной*, если либо $\mathfrak{F} = (1)$ — класс всех единичных групп, либо $\mathfrak{F} = BLF_\sigma(f)$, где $f(a)$ — $(n-1)$-кратно Бэра-σ-локальная формация для всякого $a \in \sigma^+(\mathfrak{F}) \cup \{\emptyset\}$. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *тотально Бэра-σ-локальной* или *тотально σ-композиционной*, если $\mathfrak{F}$ является n-кратно Бэра-σ-локальной для всех $n \in \mathbb{N}$.

Подгрупповым функтором [8] называется всякое отображение τ, сопоставляющее каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что: 1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G; 2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $H^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

Для всякой совокупности групп $\mathfrak{M}$ через $l^{\tau}_{\sigma_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}$ обозначают τ-замкнутую n-кратно σ-локальную формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{M}$, т.е. пересечение всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{M}$. Аналогично, через $c^{\tau}_{\sigma_n}\mathrm{form}\mathfrak{M}$ будем обозначать *τ-замкнутую n-кратно Бэра-σ-локальную* (или, иначе, *τ-замкнутую n-кратно σ-композиционную*) формацию, порожденную классом групп $\mathfrak{M}$, т.е. пересечение всех τ-замкнутых n-кратно Бэра-σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{M}$.

Для любых τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ через $\mathfrak{M} \vee_{l^{\tau}_{\sigma_n}} \mathfrak{H}$ обозначают τ-замкнутую n-кратно σ-локальную формацию, порожденную $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$, т.е. $l^{\tau}_{\sigma_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Соответственно, для любых τ-замкнутых n-кратно Бэра-σ-локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ полагают $\mathfrak{M} \vee_{c^{\tau}_{\sigma_n}} \mathfrak{H} = c^{\tau}_{\sigma_n}\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$. Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество $l^{\tau}_{\sigma_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций с операциями $\vee_{l^{\tau}_{\sigma_n}}$ и $\cap$ образует полную решетку. Частично упорядоченное множество $c^{\tau}_{\sigma_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно Бэра-σ-локальных (τ-замкнутых n-кратно σ-композиционных) формаций с операциями $\vee_{c^{\tau}_{\sigma_n}}$ и $\cap$ также образует полную решетку.

Нами доказана

Теорема 1. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа, τ — подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) всякое тождество решетки $l^{\tau}_{\sigma_0}$ всех τ-замкнутых формаций выполняется в каждой из решеток $l^{\tau}_{\sigma_n}$ и $c^{\tau}_{\sigma_m}$;

2) системы тождеств решеток $l^{\tau}_{\sigma_n}$ и $c^{\tau}_{\sigma_m}$ совпадают.

Приведем некоторые следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа, τ — подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) решетка $l^{\tau}_{\sigma_n}$ всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций модулярна;

2) решетка $c^{\tau}_{\sigma_m}$ всех τ-замкнутых m-кратно Бэра-σ-локальных формаций модулярна.

Пусть τ — тривиальный подгрупповой функтор.

Следствие 2. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) всякое тождество решетки l_{σ_0} всех формаций выполняется в каждой из решеток l_{σ_n} [9], *c_{σ_m};*

2) системы тождеств решеток l_{σ_n} и c_{σ_m} совпадают.

В частности, имеет место

Следствие 3. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) решетка l_{σ_n} всех n-кратно σ-локальных формаций модулярна [2];

2) решетка c_{σ_m} всех m-кратно Бэра-σ-локальных формаций модулярна.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ имеем

Следствие 4. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа, τ — подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) всякое тождество решетки l^{τ}_0 всех τ-замкнутых формаций выполняется в каждой из решеток l^{τ}_n и c^{τ}_m;

2) системы тождеств решеток l^{τ}_n и c^{τ}_m совпадают.

Следствие 5. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа, τ — подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) решетка l^{τ}_n всех τ-замкнутых n-кратно локальных формаций модулярна [8];

2) решетка c^{τ}_m всех τ-замкнутых m-кратно композиционных формаций модулярна [10]- [12].

Если, кроме того, τ — тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 1 получаем

Следствие 6. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) всякое тождество решетки l_0 всех формаций выполняется в каждой из решеток l_n [13], *c_m;*

2) системы тождеств решеток l_n и c_m совпадают.

Следствие 7. *Пусть n и m — целые неотрицательные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) решетка l_n всех n-кратно локальных формаций модулярна [13], [14];
2) решетка c_m всех m-кратно композиционных формаций модулярна [10]- [12].

Список литературы

[1] A. N. Skiba, On one generalization of the local formations, *Probl. Phys. Math. Tech.*, **34**:1 (2018), 79–82.

[2] Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba, On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups, *Probl. Phys. Math. Tech.*, **34**:2 (2018), 85–88.

[3] Z. Chi, A. N. Skiba, On Σ_t^σ-closed classes of finite groups, *Ukranian Math. J.*, **70**:2 (2019), 1707–1716.

[4] Z. Chi, A. N. Skiba, A generalization of Kramer's theory, *Acta Math. Hungar.*, **158**:1 (2019), 87–99.

[5] Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba, On n-multiply σ-local formations of finite groups, *Comm. Algebra*, **47**:3 (2019), 957–968.

[6] V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba, On one generalization of σ-local and Baer-local formations, *Probl. Phys. Math. Tech.*, **41**:4 (2019), 65–69.

[7] V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba, On Baer-σ-local formations of finite groups, *Comm. Algebra*, **48** (2020), 1–11. DOI:10.1080/00927872.2020.1753760

[8] А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Минск: Издательство Беларуская навука, 1997.

[9] A. Tsarev, Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups, *Mediterr. J. Math.*, (2020) 17:75. https://doi.org/10.1007/s00009-020-01510-w 1660-5446/20/030001-13

[10] М. В. Задорожнюк, Об элементах высоты 3 решетки τ-замкнутых ω-композиционных формаций, *Вестник Гродн. ун-та*, **2** (2008), 16–21.

[11] Н. Н. Воробъев, А. А. Царев, О модулярности решетки τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций, *Украин. матем. журнал*, **62**:4 (2010), 453–463.

[12] П. А. Жизневский, О модулярности и индуктивности решетки всех τ-замкнутых n-кратно ω-композиционных формаций конечных групп, *Известия Гом. гос. ун-та*, **58**:1 (2010), 85–88.

[13] А. Н. Скиба, О локальных формациях длины 5. Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп, *Минск* (1986), 135–149.

[14] А. Н. Скиба, Л. А. Шеметков Формации алгебраических систем, М.: Наука, 1989.

О пересечении абнормальных подгрупп, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал, в группах с операторами

Селькин М. В., Бородич Р. В., Бородич Е. Н.
Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины Гомель
Borodich@gsu.by

В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяют раскрыть многие свойства самих групп (см. монографию [[1] - [3]]).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ — гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Обозначим через $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{F}$-корадикал группы G и не принадлежащих формации $\mathfrak{F}$, индекс каждой из которых не делится на простые числа из π;

Теорема *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, и $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \neq G$. Если в группе G подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_\pi(G), A).$$

Следствие. *Пусть группа G имеет группу операторов A, $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \neq G$. Если подгруппа $\Delta_\pi(G, A)$ обладает свойством C_π, то*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A)/O_\pi(G) \in \mathfrak{F}.$$

Следствие. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_\pi}(G, A) \neq G$. Тогда*

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}_{\Delta_p}(G, A)/O_p(G) = D^{\mathfrak{F}}_{\Delta}(G/O_p(G), A).$$

Список литературы

[1] М. В. Селькин, Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп, Беларуская навука, 1997.

[2] А. Н. Скиба, Алгебра формаций, Беларуская навука, 1997.

[3] Р. В. Бородич, О пересечении максимальных подгрупп конечных групп. *Укр. мат. журн.*, **71**:11 2019, 1455–1465

О группах с сильно вложенной унитарной подгруппой[1]

Созутов А. И.
Сибирский федеральный университет
sozutov_ai@mail.ru

Собственная подгруппа B группы G называется *сильно вложенной*, если $N_G(X) \leq B$ для любой 2-подгруппы $X \leq B$ [1, определение 4.20]. Понятие сильно вложенной подгруппы составляет один из наиболее важных инструментов теории конечных простых групп [1, стр. 26-27, 196-202]. Согласно известным результатам Х. Цассенхауза, М. Судзуки и Х. Бендера, конечная простая группа с сильно вложенной подгруппой изоморфна одной из групп $L_2(2^n)$, $Sz(2^n)$, $U_3(2^n)$ [1, гл. 3, §4.2, теорема 4.24].

Периодические и смешанные группы с конечной инволюцией и сильно вложенной подгруппой начали исследоваться в [4] – [8]. Элемент a группы G называется *конечным*, если для всех $g \in G$ подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны; так, в периодической группе каждая инволюция является конечным элементом. В [6, 7] было доказано, что группа с конечной инволюцией и сильно вложенной подгруппой, изоморфной подгруппе Бореля группы $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2, локально конечна и изоморфна соответственно группе $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$. Эти результаты были востребованы и развиты в исследованиях групп с условиями насыщенности [9] – [14], в том числе были получены и характеризации унитарных групп $U_3(Q)$. В работе [15] получена характеризация групп $U_3(Q)$ без условия насыщенности:

Теорема. *Группа с конечным элементом порядка 4 и сильно вложенной подгруппой, изоморфной подгруппе Бореля группы $U_3(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики* 2*, локально конечна и изоморфна группе $U_3(Q)$.*

Отметим, что 2-транзитивность группы в доказательстве этой теоремы установлена при более слабом условии существования конечной инволюции.

Исследования М. Судзуки [2] дважды транзитивных групп Цассенхауза [1, стр. 162-167] опирались на описание Г. Хигмана [16] конечных неабелевых 2-групп, допускающих циклическую группу регулярных автоморфизмов транзитивную на множествах их инволюций. Как доказал Г. Хигман, существует четыре возможных типа 2-групп Судзуки, два из которых являются силовскими 2-подгруппами в группах $Sz(2^n)$ и $U_3(2^n)$. Н. М. Сучков установил, что произвольная локально конечная 2-группа Судзуки-Хигмана U и соответствующая ей группа автоморфизмов H представимы в виде обьединения возрастающих цепочек конечных подгрупп $U_1 < U_2 < ... < U_n < ...$ и $H_1 < H_2 < ... < H_n < ...$, в которых каждая из U_n есть конечная 2-группа Судзуки относительно H_n [17, теорема 1]. Отметим также результаты из [18,19], имеющие отношение к обсуждаемой теме: точно трижды транзитивная группа подстановок а) с периодическим стабилизатором точки, или б) с конечной инволюцией, стабилизирующей хотя бы одну точку, локально конечна.

Список литературы

[1] Д. Горенстейн, Конечные простые группы, М.: Мир, 1985.

[2] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups. I, II, *Ann. Math.*, **75**:1 (1962), 105–145; **79**:3 (1964), 514–589.

[3] H. Bender, Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlasst, *J. Algebra*, **17**:4 (1971), 527–554.

[4] T. Peterfalvi, A characterization of some 2-transitive groups, *J. Algebra*, **164**:3 (1994), 849–858.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017).

[5] В. Д. Мазуров, О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций, *Алгебра и логика*, **39**:1 (2000), 74–86.

[6] А. И. Созутов, О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой, *Алгебра и логика*, **39**:5 (2000), 602–617.

[7] А. И. Созутов, Н. М. Сучков, О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой, *Матем. заметки.*, **68**:2 (2000), 272–285.

[8] Н. М. Сучков, О периодических группах с с абелевыми централизаторами инволюций, *Матем. сб.*, **193**:2 (2002), 153–160.

[9] А. И. Созутов, А. К. Шлепкин, О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами, *Матем. заметки*, **72**:3 (2002), 433–447.

[10] Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов, Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами $U_3(2^m)$, *Алгебра и логика*, **47**:3 (2008), 288–306.

[11] Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, О группах, содержащих сильно вложенную подгруппу, *Алгебра и логика*, **48**:2 (2009), 190–202.

[12] Д. В. Лыткина, О группах, насыщенных конечными простыми группами, *Алгебра и логика*, **48**:5 (2009), 628–653.

[13] Д. В. Лыткина, А. А. Шлепкин, Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами типов U_3 и L_3, *Алгебра и логика*, **55**:4 (2016), 441-448.

[14] Д. В. Лыткина, А. А. Шлепкин, Периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3, *Математические труды*, **1** (2018), 55–72.

[15] А. И. Созутов, О группах с сильно вложенной унитарной подгруппой *Сиб. электр. матем. изв.* (в печати).

[16] G. Higman, Suzuki 2-groups, *Illinois J. Math.*, **7**:1 (1963), 79–96.

[17] Н. М. Сучков, Локально конечные 2-группы Сузуки-Хигмена, *Алгебра и логика*, **56**:6 (2017), 721–748.

[18] А. И. Созутов, Е. Б. Дураков, О локальной конечности периодических точно трижды транзитивных групп, *Алгебра и логика*, **54**:1 (2015), 70–84.

[19] А. И. Созутов, О. В. Кравцова, О KT-полях и точно трижды транзитивных группах, *Алгебра и логика*, **57**:2 (2018), 232–242.

Генетические коды некоторых групп с 3-транспозициями[1]

Созутов А. И., Синицин В. М.
Сибирский федеральный университет
sozutov_ai@mail.ru, sinkoro@yandex.ru

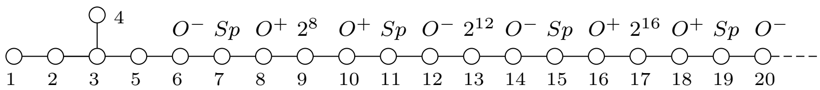
Группы Кокстера имеют многочисленные приложения в математике и за ее пределами, а группы с 3-транспозициями Фишера лежат в основе внутреннего геометрического анализа теории конечных (простых) групп. Пересечение этих классов групп состоит из конечных групп Вейля $W(A_n) \simeq S_{n+1}$, $W(D_n)$, $W(E_n)$ $(n = 6, 7, 8)$ простых конечномерных алгебр и групп Ли [1–3].

В работе продолжается исследование связи между группами Кокстера и группами $Sp_{2l}(2)$ и $O^{\pm}_{2l}(2)$ из пп. (ii) – (iii) теоремы Фишера [1, 2], организованной при помощи общего графа-дерева Кокстера Γ_n. Граф Γ_n определяет точно одну группу Кокстера G_n ранга n. Сопоставив вершинам графа Γ_n базис векторного пространства V_n над F_2 и задав по графу Γ_n квадратичную и симплектическую формы, получим систему $S_n = \{w_1, ..., w_n\}$ симплектических трансвекций, порождающих подгруппу $W_n = W(\Gamma_n)$ из $SL_n(2)$. Исследуются случаи, когда $W_n \in \{Sp_{2l}(2), O^{\pm}_{2l}(2) \mid n \geq 3\}$. Так как W_n есть гомоморфный образ группы G_n, то ее генетический код в данном представлении состоит из кода группы G_n и некоторых дополнительных соотношений.

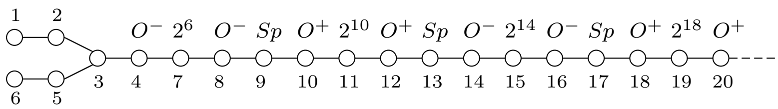
В работе указаны конкретные дополнительные слова-соотношения вида w^2 для групп W_n с графами Γ_n из E-серий $\{E_n\}$, $\{I_n\}$, $\{J_n\}$ и $\{K_n\}$. С помощью системы GAP для значений $8 \leq n \leq 20$ при четных $n = 2l$ найдены генетические коды групп $O^{\pm}_{2l}(2)$ и $\Omega^{\pm}_{2l}(2)$, а при нечетных $n = 2l + 1$ — коды групп $Sp_{2l}(2) \times Z_2$ и $Sp_{2l}(2)$.

Организующим началом используемых в работе определений и обозначений являются серии графов-деревьев Кокстера Γ_n [3, 4], введенные в [5, 6] и снабженные разметкой в [7]:

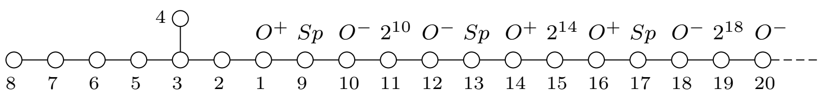
$E_n,\ n \geq 6:$



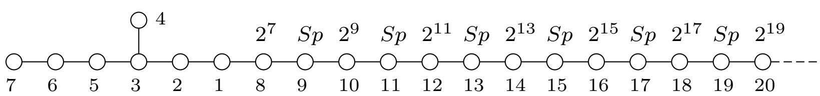
$I_n,\ n \geq 7:$



$J_n,\ n \geq 9:$



$K_n,\ n \geq 9:$



Графу Γ_n соответствует группа $W(\Gamma_n) = W_n \leq SL_n(2)$ изоморфная группе, тип которой расположен над вершиной с номером n. Если метка вершины n равна $O^{\pm}$, то n четно и $W_n = O^{\pm}_n(2)$. Если над вершиной n стоит метка Sp, то n нечетно и $W_n \simeq Sp_{n-1}(2)$. Если метка вершины n равна 2^{n-1}, то n нечетно, группа W_n обладает нормальной элементарной абелевой 2-подгруппой порядка 2^{n-1}, $W_n \simeq 2^{n-1} \cdot O^{\pm}_{n-1}(2)$ и метки вершин $n-1$ и $n+1$ совпадают. Последовательность типов групп в E-сериях $\{E_n\}$, $\{I_n\}$, $\{J_n\}$ имеет период 8, т. е. группы W_n и W_{n+8} одного типа.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований, проект № 19-01-00566 А.

Задание группы Кокстера $G(\Gamma_n) = G_n$:

$$G_n = \langle s_1, \dots, s_n \,|\, s_i^2,\ (s_k s_j)^2,\ (s_i s_j)^3,\ \text{где } 1 \le i,j,k \le n,\ (k,j) \notin \Gamma_n,\ (i,j) \in \Gamma_n \rangle. \quad (1)$$

Через $X_n = X_n(\Gamma_n)$ обозначим группу $X_n = \langle S_n \mid R_n,\ w^2 \rangle$, где $S_n = \{s_1, \dots, s_n\}$, R_n — соотношения группы Кокстера G_n, а слово w определено в (2)-(5):

$$\text{Для } \Gamma_n = E_n \text{ группа } X_n = \langle S_n \mid R_n,\ (s_4^v s_9)^2 \rangle, \quad 9 \le n \le 20, \quad \text{где} \quad (2)$$

$$v = s_3 s_2 s_1 s_5 s_6 s_7 s_8 s_3 s_2 s_5 s_3 s_4 s_6 s_5 s_3 s_2 s_7 s_6 s_5 s_3 s_4 s_1 s_2 s_3 s_5 s_6 s_7 s_8.$$

$$\text{Для } \Gamma_n = J_n, \text{ группа } X_n = \langle S_n \mid R_n,\ (s_4^v s_9)^2 \rangle, \quad 9 \le n \le 20, \quad \text{где } v \text{ — одно из слов} \quad (3)$$

$$v_1 = s_3 s_2 s_1 s_5 s_6 s_7 s_3 s_2 s_5 s_6 s_3 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1,$$

$$v_2 = s_3 s_2 s_1 s_5 s_6 s_7 s_8 s_3 s_2 s_5 s_3 s_4 s_6 s_5 s_3 s_2 s_7 s_6 s_5 s_3 s_4 s_1 s_2 s_3 s_5 s_6 s_7 s_8.$$

$$\text{Для } \Gamma_n = I_n, \quad X_n = \langle S_n \mid R_n,\ (s_4^t s_7)^2 \rangle, \quad 7 \le n \le 20, \quad \text{где} \quad (4)$$

$$t = s_3 s_2 s_1 s_5 s_6 s_3 s_2 s_5 s_3 s_4.$$

$$\text{Для } \Gamma_n = K_n \text{ группа } X_n = \langle S_n \mid R_n,\ (s_4^u s_8)^2 \rangle, \quad 8 \le n, \quad \text{где} \quad (5)$$

$$u = s_3 s_2 s_1 s_5 s_6 s_7 s_3 s_5 s_6 s_2 s_3 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1.$$

По теореме Дика [8, теорема 12.2.1] $X_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ — фактор-группа группы Кокстера G_n, где x_i — образы инволюций $s_i \in S_n$. Коммутант группы X_n обозначим через Y_n.

Теорема 1. *При $7 \le n \le 20$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Для групп $X_n = X(E_n)$ из (2) и Y_n при $n = 4k + \delta$ $(\delta = 0, 2, 3)$ имеют место изоморфизмы*

1) $X_{4k} \simeq O^-_{4k}(2)$ *и* $Y_{4k} \simeq \Omega^-_{4k}(2)$ *при нечетном* k*;*

2) $X_{4k} \simeq O^+_{4k}(2)$ *и* $Y_{4k} \simeq \Omega^+_{4k}(2)$ *при четном* k*;*

3) $X_{4k+2} \simeq O^-_{4k+2}(2)$ *и* $Y_{4k+2} \simeq \Omega^-_{4k+2}(2)$ *при нечетном* k*;*

4) $X_{4k+2} \simeq O^+_{4k+2}(2)$ *и* $Y_{4k+2} \simeq \Omega^+_{4k+2}(2)$ *при четном* k*,*

5) $X_{4k+3} \simeq Sp_{4k+2}(2) \times Z_2$*,* $Y_{4k+3} \simeq Sp_{4k+2}(2)$

2. *Для групп $X_n = X(I_n)$ и Y_n при $n = 4k + \delta$ $(\delta = 0, 1, 2)$ имеют место изоморфизмы*

1) $X_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2) \times Z_2$ *и* $Y_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2)$*;*

2) $X_{4k} \simeq O^-_{4k}(2)$ *при четном* k *и* $X_{4k} \simeq O^+_{4k}(2)$ *при нечетном* k*,*

3) $X_{4k+2} \simeq O^-_{4k+2}(2)$ *при нечетном* k *и* $X_{4k+2} \simeq O^+_{4k+2}(2)$ *при четном* k*.*

3. *Для групп $X_n = X(J_n)$ из (3) и Y_n при $n = 4k + \delta$ $(\delta = 0, 1, 2)$ имеют место изоморфизмы*

1) $X_{4k} \simeq O^-_{4k}(2)$ *и* $Y_{4k} \simeq \Omega^-_{4k}(2)$ *при нечетном* k*;*

2) $X_{4k} \simeq O^+_{4k}(2)$ *и* $Y_{4k} \simeq \Omega^+_{4k}(2)$ *при четном* k*;*

3) $X_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2) \times Z_2$*,* $Y_{4k+1} \simeq Sp_{4k}(2)$*;*

4) $X_{4k+2} \simeq O^-_{4k+2}(2)$ *и* $Y_{4k+2} \simeq \Omega^-_{4k+2}(2)$ *при четном* k*;*

5) $X_{4k+2} \simeq O^+_{4k+2}(2)$ *и* $Y_{4k+2} \simeq \Omega^+_{4k+2}(2)$ *при нечетном* k.

4. *Для групп* $X_n = X(K_n)$ *имеют место изоморфизмы* $X_{2k+1} \simeq Sp_{2k}(2) \times Z_2$ *и* $Y_{2k+1} \simeq Sp_{2k}(2)$.

Для определения конкретных генетических кодов групп $Sp_{2l}(2)$ и $\Omega^{\pm}_{2l}(2)$ используем теорему 1 и генетический код коммутанта H_n группы Коксетера G_n [4, упр. 9, стр. 46]. Обозначим $g_k = s_1 s_k$, $k = 2, ..., n$. Согласно [4, упр. 9, стр. 46]

$$H_n = \langle g_2, \ldots, g_n \,|\, g_2^3,\ g_k^2 \text{ для } k > 2,\ (g_i^{-1} g_j)^2 \text{ для } (i,j) \notin \Gamma_n,\ \text{и } (g_i^{-1} g_j)^3 \text{ для } (i,j) \in \Gamma_n \rangle. \tag{6}$$

Положим $Q_n = \{g_2, ..., g_n\}$ и P — множество слов-соотношений из (6). Слова-соотношения w^2 из (2) – (5) выразим через $g_2, ..., g_n$ (см. (7)) и обозначим эту запись через $w(g_2, ..., g_n)$.

Теорема 2. *Группы* Y_n *из теоремы 1 имеют копредставление* $Y_n = \langle Q_n \mid P_n, w(g_2, ..., g_n)\rangle$.

Слова-соотношения w^2 из (2) – (5) имеют четную длину и могут быть представлены в виде $w(g_2, ..., g_n)$ по такому алгоритму: последовательно, слева направо в слове w^2 произведения $s_i s_j$ при $1 \neq i$ и $1 \neq j$ заменяются на $g_i^{-1} g_j$, при $i = 1$ — на g_j, а при $j = 1$ — на g_i^{-1}. Так представление $w(g_2, ..., g_n)$ самого короткого слова w^2 из (2) – (5) для $\Gamma_n = I_n$ имеет следующий вид:

$$\Gamma_n = I_n : \quad w(g_2, ..., g_n) = (g_4^{-1} g_3 g_5^{-1} g_2 g_3^{-1} g_6 g_5^{-1} g_2^{-1} g_3 g_4^{-1} g_3 g_2^{-1} g_5^{-1} g_6 g_3^{-1} g_2 g_5^{-1} g_3 g_4^{-1} g_7)^2, \tag{7}$$

Для рассмотренных в работе групп W_n и G_n (при ограничении $n \leq 20$) доказано их близкое "генетическое родство": генетика группы W_n в указанной системе порождающих содержит генетику группы G_n и "богаче точно на один ген (соотношение)"для групп $O^{\pm}_{2l}(2)$, и на один, или два гена для групп $Sp_{2l}(2)$.

Выдвинута следующая гипотеза об исследуемых группах: группа W_n — это единственная фактор-группа группы G_n с тривиальным центром и неабелевым простым коммутантом.

Ведется поиск доказательств этих результатов без применения компьтерных вычислений и для произвольного n.

Список литературы

[1] B. Fischer, Finite groups generated by 3-transpositions, *Inventiones math.* **13**:3 (1971), 232–246.

[2] M. Aschbacher, 3-transposition groups, Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[3] Г. С. М. Коксетер, У. О. Дж. Мозер, Порождающие элементы и определяющие элементы дискретных групп, М.: Наука, 1980, 240.

[4] Н. Бурбаки, Группы и алгебры Ли. Группы, порождённые отражениями, Т. VI. М.: Мир, 1972, 331.

[5] А. И. Созутов, О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями *Сиб. матем. ж.* **33**:1 (1992), 140–149.

[6] А. И. Созутов, А. А. Кузнецов, В. М. Синицин, О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями *Сиб. матем. электр. изв.* **10** (2013), 285–301. doi:10.17377/semi.2013.10.022.

[7] В. М. Синицин, А. И. Созутов, О графах Коксетера групп с симплектическими 3-транспозициями *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* **22**:3 (2016), 251–258. doi:10.21538/0134-4889-2016-22-3-251-258.

[8] А. С. Кондратьев, Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009, 310.

О субнормальности $\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальных и K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальных подгрупп конечных групп

Сорокина М. М., Максаков С. П.
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского
mmsorokina@yandex.ru, msp222@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы и классы конечных групп. Символ π обозначает некоторое непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; π' — дополнение к π в $\mathbb{P}$; $\pi(G)$ — совокупность всех простых делителей порядка группы G; $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G. Для класса групп $\mathfrak{F}$ полагают

$$\pi(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\pi(G), \quad \mathfrak{F}_\pi = \{G \in \mathfrak{F} \mid \pi(G) \subseteq \pi\};$$

$\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \{G \in \mathfrak{E} \mid$ существует $N \triangleleft G$ такая, что $N \in \mathfrak{F}_1$ и $G/N \in \mathfrak{F}_2\}$ — произведение классов групп $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Через $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно обозначают классы всех конечных групп и всех конечных нильпотентных групп. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация называется наследственной, если она замкнута относительно подгрупп.

Для локальной формации $\mathfrak{F}$ в конечной группе хорошо изучены $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы, а также $\mathfrak{F}$-абнормальные и $\mathfrak{F}$-субабнормальные подгруппы (см., например, [2], [2]). Другим известным обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы (иначе, $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы в смысле Кегеля, K-$\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы), предложенное О. Кегелем в [3] (см., например, [2], [4]). При изучении ω-локальных формаций и их применений возникает необходимость рассмотрения формационно субнормальных и формационно субабнормальных подгрупп в группах с учетом множества ω.

Пусть ω — непустое множество простых чисел, $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Следуя [2], подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной ($\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальной) в G, если либо $H = G$, либо существует такая максимальная цепь подгрупп группы G

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_m = G,$$

что $H_i/(Core_{H_i}(H_{i-1}) \cap O_\omega(H_i)) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $H_i/(Core_{H_i}(H_{i-1}) \cap O_\omega(H_i)) \notin \mathfrak{F}$) для любого $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Следуя [3], подгруппу H группы G назовем K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной (K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальной) в G, если существует такая цепь подгрупп группы G

$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_m = G,$$

что для любого $i \in \{1,\ldots,m\}$ либо $H_{i-1} \triangleleft H_i$, либо $H_i/(Core_{H_i}(H_{i-1}) \cap O_\omega(H_i)) \in \mathfrak{F}$ (соответственно $H_i/(Core_{H_i}(H_{i-1}) \cap O_\omega(H_i)) \notin \mathfrak{F}$).

Из определений непосредственно следует, что всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальная подгруппа группы G является K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной в G, всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальная подгруппа группы G является K-$\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальной в G. Если $\pi(G) \subseteq \omega$, то $O_\omega(G) = G$ и, следовательно, в этом случае понятия $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальной и $\mathfrak{F}$-субнормальной подгрупп (понятия $\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальной и $\mathfrak{F}$-субабнормальной подгрупп) группы G совпадают для любого непустого класса групп $\mathfrak{F}$. В случае, когда класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно гомоморфных образов, множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субнормальных подгрупп группы G для любого множества ω содержится во множестве всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, а множество всех $\mathfrak{F}^{\omega}$-субабнормальных подгрупп группы G включает в себя множество всех ее $\mathfrak{F}$-субабнормальных подгрупп.

В теореме 1 установлены условия, при которых $\mathfrak{F}^\omega$-субабнормальные и K-$\mathfrak{F}^\omega$-субабнормальные подгруппы группы G являются субнормальными в G.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, H — подгруппа группы G, $|G : H|$ — π'-число. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *Если H — $\mathfrak{F}^\omega$-субабнормальная подгруппа группы G, то H субнормальна в G.*

2) *Если H — K-$\mathfrak{F}^\omega$-субабнормальная подгруппа группы G и $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\omega\mathfrak{F}$, то H субнормальна в G.*

Список литературы

[1] Л. А. Шеметков. Формации конечных групп, М.: Наука, 1978.

[2] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. Подгрупповые функторы и классы конечных групп, Минск: Беларуская навука, 2003.

[3] O. H. Kegel. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten, *Arch. Math.*, **30**:3 (1978), 225–228.

[4] A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. Classes of Finite Groups, Dordrecht: Springer, 2006.

Группы с абсолютно формационно субнормальными примарными подгруппами

Сохор И. Л.
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина
irina.sokhor@gmail.com

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если $G = H$ или существует такая цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\, H_1 <\cdot\, \ldots <\cdot\, H_n = G,$$

что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i, что равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$. Здесь $A_B = \bigcap_{b\in B} A^b$ — ядро подгруппы A в группе B, запись $H_{i-1} <\cdot\, H_i$ означает, что H_{i-1} — максимальная подгруппа группы H_i.

Группы с нетривиальными формационно субнормальными подгруппами исследовались в работах многих автором, см. литературу [1]. В частности, В. С. Монахов [2] описал группы, все примарные подгруппы которых $\mathfrak{U}$-субнормальны или самонормализуемы. В [3] изучено строение групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными или саммормализуемыми примарными циклическими подгруппами для случая, когда $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация.

Развивая данное направление исследований, мы описываем строение групп с абсолютно формационно субнормальными или самонормализуемыми примарными подгруппами.

Следуя [4], подгруппу A группы G назовем абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если любая содержащая ее подгруппа B $\mathfrak{F}$-субнормальна.

Теорема. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. В группе $G \notin \mathfrak{F}$ каждая примарная подгруппа абсолютно $\mathfrak{F}$-субнормальна или самонормализуема тогда и только тогда, когда G — ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы, в частности, $G = G' \rtimes \langle x\rangle$, G' — элементарная абелева p-группа, $\langle x\rangle$ — максимальная подгруппа порядка q и подгруппа Картера группы G для простых p и q, $p \ne q$.

Список литературы

[1] В. С. Монахов, И. Л. Сохор, Конечные группы с формационно субнормальными примарными подгруппами, *Сибирский математический журнал*, **58**:4 (2017), 851–863.

[2] В. С. Монахов, Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами, *Сибирский математический журнал*, **57**:2 (2016), 447–462.

[3] V. S. Monakhov, I. L. Sokhor, Finite groups with abnormal or formational subnormal primary subgroups, *Communications in Algebra*, **47**:10 (2019), 3941–3949.

[4] А. Ф. Васильев, А. Г. Мельченко, Конечные группы с абсолютно формационно субнормальными силовскими подгруппами, *Проблемы физики, математики и техники*, **4** (41) (2019), 44–50.

Критерий субнормальности подгруппы в конечной группе: редукция к простейшим бинарным разбиениям

Сунь Фенфен (Sun Fenfen), Йи Сяолан (Yi Xiaolan), Каморников С. Ф.
Zhejiang Sci-Tech University, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
sun4624@163.com, yixiaolan2005@126.com, sfkamornikov@mail.ru

В работе рассматриваются только конечные группы.

Хорошо известен следующий критерий субнормальности Виландта [1]: *подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она субнормальна в $< H, H^x >$ для любого элемента $x \in G$.*

Другой признак субнормальности предложен Кляйдманом в [2]. Отвечая на вопрос Кегеля [3] и Виландта [4], он доказал, что *подгруппа H группы G является субнормальной в G, если для любого простого числа p подгруппа H является p-субнормальной в G*, т.е. $H \cap P$ — силовская p-подгруппа из H для любой силовской p-подгруппы P группы G.

Объединение этих результатов в один приводит к следующему критерию:

Подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда для любого простого числа p она p-субнормальна в $< H, H^x >$ для каждого элемента $x \in G$.

Двойственный признак субнормальности подгруппы, апеллирующий к понятию σ-субнормальной подгруппы для специальных разбиений σ, приводится ниже.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Если $\sigma = \{\pi, \pi^{'}\}$ для некоторого множества π простых чисел, то разбиение σ будем называть *бинарным*, а если, кроме того, $\pi = \{p\}$, где p — некоторое простое число, то будем говорить, что $\sigma = \{\{p\}, \{p\}^{'}\}$ — *простейшее бинарное разбиение.*

В работе предлагается подход, который позволяет для ряда разбиений σ редуцировать решение некоторых задач, связанных с исследованием свойств σ-субнормальных подгрупп, к случаю простейших бинарных разбиений.

Концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы, предложена А.Н. Скибой в работе [5]. Эта концепция базируется на следующих определениях.

Группа G называется *σ-примарной*, если она является σ_i-группой для некоторого $i \in I$. Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной группой. В случае простейшего бинарного разбиения $\sigma = \{\{p\}, \{p\}^{'}\}$ подгруппа H группы G является σ-субнормальной, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является p-группой, либо $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является $p^{'}$-группой.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$. Отметим еще, что $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальная подгруппа не всегда является субнормальной в G (например, любая подгруппа $p^{'}$-группы G является $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальной в G.

Главная цель данной работы — доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $\pi = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ — некоторое множество простых чисел. Если $\sigma = \{\{p_1\}, \{p_2\}, ..., \{p_n\}, \{\pi\}^{'}\}$, то подгруппа H группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда она $\{\{p_i\}, \{p_i\}^{'}\}$-субнормальна в G для любого $i = 1, 2, ..., n$.*

Следствие 1. *Подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальна в G для любого простого числа p.*

Соединяя следствие 1 с критерием Виландта, имеем

Следствие 2. *Подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда для любого простого числа p она $\{\{p\}, \{p\}^{'}\}$-субнормальна в $< H, H^x >$ для каждого элемента $x \in G$.*

Список литературы

[1] H. Wielandt, Criterion of subnormality in finite groups, *Math. Z.*, **138** (1974), 199–203.

[2] P. B. Kleidman, A proof of the Kegel-Wielandt conjecture on subnormal subgroups, *Ann. Math.*, **133** (1991), 369–428.

[3] O. H. Kegel, Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen, *Math. Z.*, **78** (1998), 205–221.

[4] H. Wielandt, Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute, *Proc. Pure Math.*, **37** (1980), 161–173.

[5] A. N. Skiba, On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups, *J. Algebra*, **436** (2015), 1–16.

Об одном вложении универсальной группы Ф. Холла[1]

Сучков Н. М.
Сибирский федеральный университет
ns7654321@mail.ru

Подстановка g множества натуральных чисел N называется ограниченной, если

$$\max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Все такие подстановки образуют группу $G = \mathrm{Lim}(N)$.

Теорема. *В группу G изоморфно вложима универсальная счетная локально конечная группа Ф. Холла.*

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10017).

Порождённые инволюциями группы и многогранники с условиями симметричности

Тимофеенко А. В.
Сибирский федеральный университет
A.V.Timofeenko62@mail.ru

Напомним, что если группа симметрий многогранника действует транзитивно на множестве его флагов, то сам многогранник в евклидовом пространстве каждой конечной размерности над полем действительных чисел называется правильным. Флагом трёхмерного многогранника называется тройка, состоящая из его вершины F_0, ребра F_1 и грани F_2 таких, что $F_0 \in F_1 \subset F_2$. В докладе будут рассмотрены многогранники с более слабыми, чем правильность условиями, [1–3], и разбиения пространства на такие тела, [4]. Ослабление правильности сводится, как правило, к переходу от транзитивности на флагах к локальной транзитивности на множествах F_0 и(или) F_1. На конечные и бесконечные группы симметрий будем смотреть с общей точки зрения, изложенной в работе [5], а для классических групп симметрий применены обозначения Коксетера-Джонсона.

Правее обозначения группы расположено ниже название и в большинстве случаев описан многогранник такой группой симметрий или поворотов обладающий. «Живые» модели этих многогранников и их строение можно найти в работе [3] по указанным в ней ссылкам на электронные Атласы. Завершается описание каждой группы именем файла с её компьютерной моделью для системы компьютерной алгебры GAP. Группа:

$[n]^+$ циклическая порядка n поворотов неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием, $c\_n.txt$,

$[2]^+$ порядка два поворотов дважды наращенного трёхскатного прямого бикупола $P_{4,12}$,

$[]^+$ единичная;

$[2,n]^+$ поворотов диэдра порядка $2n$ или двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием, $d\_n.txt$;

$[3,3]^+$ поворотов тетраэдра, $tetr.txt$;

$[3,4]^+$ поворотов куба, $cube.txt$;

$[3,5]^+$ поворотов икосаэдра, $icos.txt$;

$[n]$ диэдральная симметрий неправильногранной правильной пирамиды с n-угольным основанием, $2c\_n.txt$,

$[\,]$ порядка два симметрий наращенной 4-угольной пирамиды $P_{2,22}$ (скошенной 3-угольной призмы);

$[2^+,2n^+]$, расширяющая при нечётных n группу $[n]^+$ отражением от точки, $2.c\_n.txt$,

$[2^+,2^+]$ порядка 2 отражения от точки или симметрий параллелепипеда без прямоугольных граней и с различными рёбрами в каждой вершине;

$[2,n^+]$, расширяющая группу $[n]^+$ поворотов отражением от плоскости, перпендикулярной оси поворотов, $d1cn.txt$;

$[3,3]$ симметрий тетраэдра, $tetr\_2.txt$;

$[3,4]$ симметрий куба, $cube\_2.txt$;

$[3^+,4]$, расширяющая отражением от точки группу поворотов тетраэдра, $2.tetr.txt$;

$[3,5]$ симметрий икосаэдра, $icos\_2.txt$;

$[2,n]$ симметрий двойной правильной неправильногранной пирамиды с n-угольным основанием, $d\_1d\_n.txt$,

$[2,2]$ симметрий прямой ромбической призмы, $P_{2,2}$;

$[2^+,2n]$ симметрий антипризмы A_n порядка $4n$ при $n>3$, $d\_2n.txt$,

$[2^+,6]$ симметрий дважды наращенного октаэдра $P_{4,11}$ с шестью ромбическими гранями,

$[2^+,4]$ симметрий C-антипризмы CA_2;

$[2,2]^+$ Клейна четверная поворотов прямой ромбической призмы $P_{2,2}$, $4\_Klein.txt$;

$[2^+,2]=[2,2^+]$ Клейна четверная с вращательной симметрией или симметрий скошенного куба $P_{4,30}$, $K4.txt$;

[2] Клейна четверная отражений или симметрий клинокороны $P_{1,28}=M_{22}$.

Как способы заполнения пространства правильногранными пирамидами, так и нахождение всех паркетогранников путём соединения известных одинаковыми гранями иллюстрирует

Теорема 1. *Выпуклый многогранник с рёбрами длины один или два составлен из не более семнадцати правильногранных пирамид с единичными рёбрами тогда и только тогда, когда он является одним из следующих тел, справа от обозначения каждого из которых указана группа его симметрий:*

$$M_1[3,3],\ M_2[4], M_3[5]; \tag{8}$$

$$M_1+M_1[2,3], M_1+M_2[\,], M_2+M_2[3,4], M_3+M_3[2,5]; \tag{9}$$

$$^\circ S_{2,2}+M_1[2], S_{2,2}+M_2[3],\ ^\circ S_{2,2}+M_2[2]; \tag{10}$$

$$^\circ S_{3,1}+M_2[2],\ ^\circ S_{3,1}+M_2[\,], S_{3,2}+M_1[2^+,6], S_{2,2}+S_{2,2}[2^+,2], S_{2,2}+S_{2,2}[2]^+,\ ^\circ S_{2,2}+S_{2,2}[2]; \tag{11}$$

$$^\circ S_{4,1}+M_1[3],\ ^\circ S_{4,4}+M_2[\,]; \tag{12}$$

$$S_{5,1}+M_1[3,3],\ ^\circ S_{5,2}+M_1[\,]^+,\ ^\circ S_{5,2}+M_2[2,2],\ ^\circ S_{4,4}+S_{2,2}[\,],\ ^\circ S_{3,1}+S_{3,1}[2]; \tag{13}$$

$$^\circ S_{6,2}+M_2[\,],\ ^\circ S_{6,4}+M_2[\,],\ ^\circ S_{6,5}+M_2[\,], S_{4,6}+S_{3,1}[3],\ ^\circ S_{4,6}+S_{3,3}[\,]; \tag{14}$$

$$\begin{array}{lll} ^\circ S_{7,1}+M_1[2^+,2], & ^\circ S_{7,2}+M_1[\,], & ^\circ S_{7,3}+M_1[\,], \\ S_{7,4}+M_2[\,], & ^\circ S_{6,2}+S_{2,2}[2^+,2], & ^\circ S_{6,5}+S_{2,2}[2^+,2^+]; \end{array} \tag{15}$$

$$^\circ S_{8,4}+M_1[\,],\ ^\circ S_{8,4}+M_2[\,],\ ^\circ S_{6,4}+S_{3,1}[2^+,4],\ ^\circ S_{6,4}+S_{3,3}[4]; \tag{16}$$

$$^\circ S_{9,1}+M_2[\,]^+,\ ^\circ S_{9,2}+M_2[2,3],\ S_{9,4}+M_2[4],\ ^\circ S_{8,4}+S_{2,2}[\,]^+,\ ^\circ S_{5,1}+S_{5,1}[2,3]; \tag{17}$$

$$^\circ S_{10,1}+M_2[\,],\ ^\circ S_{10,4}+M_2[\,]^+,\ ^\circ S_{10,5}+M_1[3]; \tag{18}$$

$$^\circ S_{11,2}+M_1[\,]^+, S_{11,3}+M_1[2,3],\ S_{9,2}+S_{3,1}[2^+,2],\ ^\circ S_{9,2}+S_{3,1}[2],\ ^\circ S_{9,4}+S_{3,1}[\,]; \tag{19}$$

$$^\circ S_{12,3}+M_2[\,],\ ^\circ S_{12,4}+M_1[\,],\ ^\circ S_{10,4}+S_{3,1}[\,]; \tag{20}$$

$$\begin{array}{lll} ^\circ S_{13,1}+M_1[\,], & ^\circ S_{13,1}+M_2[2^+,2], & ^\circ S_{13,3}+M_2[\,]^+, \\ ^\circ S_{12,3}+S_{2,2}[\,]^+, & S_{7,4}+S_{7,4}[2^+,6], & S_{7,4}+S_{7,4}[3,4]; \end{array} \tag{21}$$

$$^\circ S_{14,1}+M_2[\,],\ S_{14,5}+M_2[\,],\ S_{14,6}+M_2[4],\ S_{12,4}+S_{3,3}[3,3],\ ^\circ S_{12,4}+S_{3,3}[\,]; \tag{22}$$

$$\begin{array}{llll} S_{15,1}+M_1[2^+,2], & ^\circ S_{15,2}+M_2[\,], & S_{15,2}+M_2[2]^+, & ^\circ S_{15,3}+M_2[2], \\ S_{15,3}+M_2[2,4], & ^\circ S_{15,4}+M_1[3], & S_{15,5}+M_1[\,], & ^\circ S_{14,4}+S_{2,2}[2^+,2^+], \\ ^\circ S_{13,1}+S_{3,1}[\,], & ^\circ S_{12,5}+S_{4,2}[2^+,2]; & & \end{array} \tag{23}$$

$$^\circ S_{16,2}+M_2[3],^\circ S_{16,2}+M_2[\,],^\circ S_{16,4}+M_2[2],^\circ S_{16,4}+M_2[3],^\circ S_{16,9}+M_2[\,]^+,^\circ S_{13,3}+S_{4,6}[3]. \quad (24)$$

Многогранник $S_{i,j}$ расположен в списке (i) на j-м месте:

$$S_{1,1}=M_1, S_{1,2}=M_2, S_{1,3}=M_3, S_{2,1}=S_{1,1}+M_1, \ldots, S_{17,6}=S_{13,3}+S_{4,6}.$$

Кружком помечены тела с фиктивными вершинами.

В доказательствах теоремы 1 и других результатов доклада применены алгоритмы, опирающиеся на системы компьютерной алгебры, визуализацию и электронные атласы групп и многогранников. Выделим из них Атлас $(2\times 2, 2)$-троек инволюций, распределённых по классам сопряжённых элементов и парам порядков произведений двух инволюций в названной тройке, [6].

Список литературы

[1] В. И. Субботин, Симметричные многогранники с ромбическими вершинами, *Владикавк. матем. журн.*, **20**:3 (2018), 87–93.

[2] В. И. Субботин, Об одном классе многогранников с симметричными звездами вершин, *Материалы международной конференции «Геометрические методы в теории управления и математической физике», посвященной 70-летию С. Л. Атанасяна, 70-летию И. С. Красильщика, 70-летию А. В. Самохина, 80-летию В. Т. Фоменко. Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина, Рязань, 25–28 сентября 2018 г. Часть 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **20**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 88–97.

[3] А. В. Тимофеенко, К перечню выпуклых правильногранников, *Современные проблемы математики и механики.*, Том **VI**. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова. Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011, 155–170.

[4] А. В. Тимофеенко, Е. С. Окладникова, Составленные из правильногранных пирамид паркетогранники как содержательная основа исследовательской работы старшеклассников, *Информационные технологии в математике и математическом образовании: материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием*, Красноярск, 14–15 ноября 2018 г. Отв. ред. В. Р. Майер; С. 151–160. http://elib.kspu.ru/document/32581

[5] В. А. Артамонов, С. Санчес, О группах симметрий квазикристаллов, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 323–329.

[6] А. В. Тимофеенко, А. И. Макосий, О нахождении $(2\times 2, 2)$-троек инволюций конечных групп, *Материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-метод. конф. "Информационные технологии в математике и математическом образовании посвящённой 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича. Отв. ред. В. Р. Майер; Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева*, 2019, 63–72.

Об аппроксимируемости обобщенных прямых произведений групп[1]

Туманова Е. А.
Ивановский государственный университет
helenfog@bk.ru

В ходе описания и изучения свойств базовых теоретико-групповых конструкций нередко вводятся другие, более сложно устроенные, конструкции. Так, например, с целью описания подгрупп свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой А. Каррасом и Д. Солитэром [1] было введено древесное произведение групп и выявлены условия его существования. В [2] определяется конструкция обобщенного прямого произведения, ассоциированного с графом групп, используемая при изучении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп. В данной работе рассматривается частный случай последней конструкции — когда граф состоит из двух вершин и соединяющего их ребра. Ассоциированное с таким графом прямое произведение называется *обобщенным прямым произведением двух групп с объединенными подгруппами* или *центральным произведением.* Эта конструкция является также частным случаем обобщенного прямого произведения семейства групп, введенного Б. Нейманом и Х. Нейман в [3]. Напомним, как она определяется.

Пусть A и B — некоторые группы, H — центральная подгруппа группы A, K — центральная подгруппа группы B, $\varphi\colon H \to K$ — изоморфизм подгрупп. Тогда обобщенным прямым произведением групп A и B с подгруппами H и K, объединенными в соответствии с изоморфизмом φ, называется группа $G = \langle A \times B;\ H = K,\ \varphi\rangle$, образующими которой являются образующие групп A и B, а определяющими соотношениями — соотношения групп A и B, а также всевозможные соотношения вида $[a, b] = 1$ $(a \in A,\ b \in B)$ и $h = h\varphi$ $(h \in H)$. Все введенные только что обозначения предполагаются фиксированными до конца изложения.

Отметим, что, благодаря центральности объединяемых подгрупп в сомножителях, тождественные отображения образующих групп A и B в группу G определяют инъективные гомоморфизмы и потому группы A и B можно считать подгруппами их обобщенного прямого произведения G (см., например, [2]). Описание некоторых других свойств группы G приводится в [4–7].

В данной работе изучаются аппроксимационные свойства обобщенного прямого произведения двух групп. Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой некоторым классом групп* $\mathcal{K}$ (*$\mathcal{K}$-аппроксимируемой*), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ найдется гомоморфизм группы X на группу из класса $\mathcal{K}$ (*$\mathcal{K}$-группу*), переводящий x в неединичный элемент. Далее будем предполагать, что все рассматриваемые классы групп содержат хотя бы одну неединичную группу.

Одним из наиболее результативных методов исследования аппроксимационных свойств теоретико-групповых конструкций выступает фильтрационная методика, первоначально предложенная Г. Баумслагом [8] с целью изучения свойства финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух групп. Аналогичный способ исследования аппроксимируемости классом всех конечных групп конструкции HNN-расширения указан в [9]. Адаптация фильтрационной методики, дающая возможность изучать финитную аппроксимируемость обобщенного прямого произведения двух групп, была осуществлена Д. И. Молдаванским и А. В. Агафоновой [4].

В [10,11] применительно к конструкциям обобщенного свободного произведения и HNN-расширения автором был предложен подход, позволивший использовать фильтрационную методику для изучения свойства аппроксимируемости не конкретным классом, а набором классов групп, удовлетворяющих некоторым условиям. Этот подход привел к получению целого ряда результатов об аппроксимируемости указанных конструкций различными классами групп (см., например, [10–13]). Цель данной работы состоит в том, чтобы распространить методику исследования аппроксимируемости некоторым набором классов групп на обобщенное прямое произведение двух групп.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-31-00187.

Для конструкции обобщенного прямого произведения в качестве требований, накладываемых на аппроксимирующий класс, были зафиксированы замкнутость относительно взятия подгрупп, расширений и фактор-групп. Более того, при доказательстве основных результатов требование замкнутости класса групп относительно расширений было ослаблено до требования замкнутости относительно взятия прямых произведений конечного числа сомножителей, которое далее для краткости будем называть просто замкнутостью относительно прямых произведений. Примерами классов, замкнутых относительно взятия подгрупп, расширений и фактор-групп, могут служить класс всех конечных групп, конечных p-групп (где p — некоторое простое число), конечных π-групп (где π — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп, полициклических групп, всех периодических групп. Если же требование замкнутости класса групп относительно расширений ослабить до требования замкнутости относительно прямых произведений, то приведенный список можно дополнить классами всех нильпотентных групп, разрешимых и нильпотентных групп ступени, не выше заданной. Отметим, что свойства замкнутости относительно взятия подгрупп, фактор-групп, расширений и прямых произведений сохраняются при пересечении классов групп.

Основные результаты работы содержат приведенные далее теоремы 1 и 2. Чтобы сформулировать их, напомним ряд понятий, восходящих к [8].

Семейство $\{Y_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ нормальных подгрупп некоторой группы X будем называть *фильтрацией*, если $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} Y_i = 1$. Подгруппы R и S групп A и B соответственно называются (H, K, φ)-*совместимыми*, если выполнено равенство $(H \cap R)\varphi = K \cap S$. Кроме того, для произвольных класса $\mathcal{K}$ и группы X через $\mathcal{K}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{K}$.

Теорема 1.. *Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп, $\{(R_\lambda, S_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всевозможных пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп семейств $\mathcal{K}^*(A)$ и $\mathcal{K}^*(B)$ соответственно.*

1. *Если $\mathcal{K}$ — наследственный класс групп и группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то каждое из семейств $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является фильтрацией.*

2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия прямых произведений и фактор-групп. Если семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ являются фильтрациями и хотя бы одна из фактор-групп A/H, B/K $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Данная теорема обобщает и усиливает полученные в [4] условия финитной аппроксимируемости рассматриваемой конструкции.

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, прямых произведений и фактор-групп, то разница между необходимым и достаточным условиями $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G, доставляемыми теоремой 1, состоит лишь в требовании $\mathcal{K}$-аппроксимируемости одной из фактор-групп A/H, B/K. Можно привести примеры, показывающие, что указанное требование не является необходимым для $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G, но в то же время не может быть отброшено.

Проверка того, являются ли указанные в теореме 1 семейства $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фильтрациями, представляет собой нетривиальную задачу. Поэтому были найдены ограничения, накладываемые на сомножители и объединяемые подгруппы, которые позволяют упростить решение этой проблемы. Основным из них является требование $\mathcal{K}$-регулярности одного из сомножителей по объединяемой подгруппе [10]. Напомним, в чем оно состоит.

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа. Будем говорить, что группа X *$\mathcal{K}$-регулярна* по своей нормальной подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathcal{K}^*(Y)$, нормальной в X, найдется подгруппа $N \in \mathcal{K}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$.

Теорема 2.. *Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, прямых произведений и фактор-групп. Если группы A, B/K $\mathcal{K}$-аппроксимируемы и группа B $\mathcal{K}$-регулярна по подгруппе K, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Теорема 2 имеет ряд следствий, которые, в свою очередь, упрощают проверку задействованного условия $\mathcal{K}$-регулярности.

Следствие 1.. *Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и фактор-групп. Если A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа и $K \in \mathcal{K}^*(B)$, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Следствие 2.. *Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и фактор-групп, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, B — конечно порожденная нильпотентная группа.*

1. *Если класс $\mathcal{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

2. *Пусть класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и $\pi(\mathcal{K})$ обозначает множество всех простых делителей порядков элементов всевозможных $\mathcal{K}$-групп. Пусть также подгруппа K $\pi(\mathcal{K})'$-изолирована в группе B (т. е. для произвольного элемента $b \in B$ и произвольного простого числа $q \notin \pi(\mathcal{K})$ из включения $b^q \in K$ следует, что $b \in K$). Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Отметим, что условие $\pi(\mathcal{K})'$-изолированности подгруппы K в группе B, содержащееся в утверждении 2 следствия 2, не является необходимым для $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G.

Следствие 3.. *Пусть $\mathcal{K}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и фактор-групп, хотя бы одна из групп A и B аппроксимируется $\mathcal{K}$-группами без кручения, а другая — $\mathcal{K}$-группами, подгруппы H и K имеют конечный ранг. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Список литературы

[1] A. Karras, D. Solitar, The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150** (1970), 227–255.

[2] Е. В. Соколов, Е. А. Туманова, Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп, *Алгебра и логика*, **58**:6 (2019), 720–740.

[3] B. H. Neumann, H. Neumann, A remark on generalized free products, *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 202–204.

[4] А. В. Агафонова, Д. И. Молдаванский, О финитной аппроксимируемости обобщенных прямых произведений групп. *Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика.* **6** (2008) 3–8.

[5] Д. И. Молдаванский, О финитной аппроксимируемости относительно сопряженности обобщенного прямого произведения групп, *Вестник Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки.*, **2** (2009), 113–116.

[6] D. Lewis, A. Almousa, E. Elert, Embedding properties in central products, arXiv:1408.0076v2 [math.GR].

[7] S. Hatul, L. R. Vermani, M. K. Yadav, The Schur multiplier of central product of groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **222**:10 (2018), 3293–3302.

[8] G. Baumslag, On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 193–209.

[9] B. Baumslag, M. Tretkoff, Residually finite HNN-extensions, *Comm. Algebra*, **6** (1978), 179–194.

[10] Е. А. Туманова, Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением, *Изв. вузов. Математика*, **10** (2015), 27–44.

[11] Е. А. Туманова, Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп, *Модел. и анализ информ. систем.*, **21**:4 (2014), 148–180.

[12] Е. А. Туманова, Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра, *Сиб. матем. журн.*, **58**:3 (2017), 700–709.

[13] Е. В. Соколов, Е. А. Туманова, Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами, *Изв. вузов. Математика*, **3** (2020), 48–63.

О конечных группах с тремя заданными несопряженными формационными максимальными подгруппами

Фурс А. К.
Гомельский Государственный университет им. Ф. Скорины
andreyfurss@gmail.com

В работе рассматриваются только конечные группы. Настоящее сообщение посвящено исследованию задачи распознавания принадлежности заданному классу $\mathfrak{F}$ группы G, имеющей три попарно несопряженные максимальные подгруппы из $\mathfrak{F}$. Начало рассмотрения этой задачи восходит к работе В.А. Белоногова [1], в которой им было установлено, что группа нильпотентна, если она имеет три попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы. В [2] В.Н. Семенчук в классе разрешимых групп получил аналогичный результат для класса всех p-замкнутых групп. В работе [3] А.Ф. Васильевым в классе разрешимых групп были описаны все нормально наследственные локальные формации $\mathfrak{F}$, содержащие всякую группу G, имеющую три попарно несопряженные максимальные подгруппы из $\mathfrak{F}$. Отметим, что в полученном им списке формаций отсутствует формация всех сверхразрешимых групп. В работе [4] было показано, что разрешимая группа сверхразрешима, если она имеет три попарно несопряженные абнормальные сверхразрешимые максимальные подгруппы. В связи с вышесказанным возникает следующая естественная

Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — формации групп и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Найти все формации $\mathfrak{F}$, которые содержат каждую $\mathfrak{X}$-группу G, имеющую три попарно несопряженные (абнормальные) максимальные подгруппы из $\mathfrak{F}$.

Рассмотрению ряда случаев данной проблемы и посвящено данное сообщение.

Напомним некоторые определения [5]:

Определение 1. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

Определение 2. Группа G называется расширенно сверхразрешимой (кратко, w-сверхразрешимой), если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G.

Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех w-сверхразрешимых групп является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп [5].

В работе [6] был введен класс групп, у которых каждая примарная циклическая подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной. Такой класс обозначается $\mathrm{v}\mathfrak{U}$. В [6] было установлено, что $\mathrm{v}\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп. Ряд свойств класса $\mathrm{v}\mathfrak{U}$ был получен в [7]. Отметим, что $\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathrm{v}\mathfrak{U}$.

Теорема 1. *Пусть разрешимая группа G имеет три попарно несопряженные абнормальные* w*-сверхразрешимые* (v*-сверхразрешимые*) *максимальные подгруппы. Тогда G сама является* w*-сверхразрешимой* (*соответственно* v*-сверхразрешимой*)*.*

Замечание. В классе произвольных групп утверждение теоремы 1 неверно. В качестве контрпримера можно взять группу Янко J_1.

Напомним [8], что формация $\mathfrak{F}$, называется формацией Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$ группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$, является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, замкнутая относительно взятия подгрупп Шмидта в группах. Тогда следующее утверждения эквиваленты.*

(1) $\mathfrak{F}$ *содержит всякую группу, имеющую три попарно несопряженные максимальные подгруппы из* $\mathfrak{F}$.

(2) $\mathfrak{F}$ *является наследственной формацией Шеметкова в классе разрешимых групп.*

Список литературы

[1] В. А. Белоногов, Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп, *ДАН СССР*, **161**:6 (1965), 1255–1256.

[2] В. Н. Семенчук, Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-групп, Подгрупповое строение конечных групп, Минск: Наука и техника, 1981, 138–148.

[3] А. Ф. Васильев, К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством, *Вопросы алгебры*, **3** (1987), 3–11.

[4] А. Ф. Васильев, О некоторых свойствах локальных формаций, *Вопросы алгебры*, **1** (1985), 4–9.

[5] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О конечных группах сверхразрешимого типа, *Сиб. матем. журн.*, **51**:6 (2010), 1270–1281.

[6] V. S. Monakhov, V. N. Kniahina, Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups, *Ric. Mat.*, **62**:2 (2013), 307–322.

[7] В. И. Мурашко, Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами, *Докл. НАН Беларуси*, **58**:1 (2014), 5–8.

[8] И. Н. Халимончик, Формации Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$, *Известия Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины*, **55**:4 (2009), 219–223.

Полурешеточные подгрупповые функторы в классе $\mathfrak{X}$

Халимончик И. Н.
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины
vifh@rambler.ru

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Отображение θ, ставящее в соответствие каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп и удовлетворяющее условию $(\theta(G))^{\phi} = \theta(G^{\phi})$ для любого изоморфизма ϕ группы G называется подгрупповым функтором в $\mathfrak{X}$ (подгрупповым $\mathfrak{X}$-функтором) [1].

В настоящее время подгрупповые функторы широко используются как аппарат изучения групп и их классов.

Одним из наиболее важных является субнормальный подгрупповой функтор sn, выделяющий в каждой группе G множество всех ее субнормальных подгрупп. С развитием теории формаций возник ряд обобщений функтора sn. В частности, функтор $sn_{\mathfrak{F}}$, выделяющий в группе G множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа K группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной [2], если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{j-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Естественной является задача изучать подгрупповые функторы, обладающие свойствами, близкими к свойствам функтора sn.

В 2001 году в работе [3] Васильевым А.Ф. и Каморниковым С.Ф. было введено и изучено понятие естественного транзитивного решеточного подгруппового функтора (кратко, ETP-функтора).

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ называется [1]:

1) регулярным (функтором Скибы) в $\mathfrak{X}$, если для любой нормальной подгруппы N группы $G \in \mathfrak{X}$:

a) из $H \in \theta(G)$ всегда следует $HN/N \in \theta(G/N)$;

b) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$;

2) наследственным в $\mathfrak{X}$, если для любой $\mathfrak{X}$-подгруппы H группы $G \in \mathfrak{X}$ справедливо $\{H \cap R \mid R \in \theta(G)\} \subseteq \theta(H)$;

Подгрупповой функтор обладающий свойствами 1) и 2) называется естественным в $\mathfrak{X}$;

3) транзитивным в $\mathfrak{X}$, если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ всегда из $S \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G) \cap \mathfrak{X} = \{R \in \theta(G) \mid R \in \mathfrak{X}\}$ следует $S \in \theta(G)$;

4) решеточным в $\mathfrak{X}$, если всегда из $H, K \in \theta(G)$ следует, что $H \cap K \in \theta(G)$ и $\langle H, K \rangle \in \theta(G)$ для любой группы G из $\mathfrak{X}$.

В работе [3] были описаны ETP-функторы в классе всех разрешимых групп. Из данного описания следует, что все разрешимые ETP-функторы исчерпываются $\mathfrak{F}$-субнормальными функторами $sn_{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная насыщенная решеточная формация. В то же время С.Ф. Каморниковым в [4] был построен континуум ETP-функторов в классе всех конечных групп, не отвечающих никаким наследственным решеточным формациям.

В работе [5] была введена следующая классификация $\mathfrak{X}$-функторов относительно их решеточного свойства:

Определение 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор θ назовем:

1) нижнерешеточным (кратко, L_*-функтором), если из $G \in \mathfrak{X}$, $A \in \theta(G)$ и $B \in \theta(G)$ следует, что $A \cap B \in \theta(G)$;

2) верхнерешеточным (кратко, L^*-функтором), если из $G \in \mathfrak{X}$, $A \in \theta(G)$ и $B \in \theta(G)$ следует, что $\langle A, B \rangle \in \theta(G)$;

3) полурешеточным (кратко, L_0-функтором), если θ является L_*-функтором и из $G \in \mathfrak{X}$, $A \in \theta(G)$ и $B \in \theta(G)$, где $AB = BA$ следует, что $AB \in \theta(G)$;

4) решеточным (кратко, L-функтором), если θ является L_* и L^*-функтором одновременно.

В дальнейшем все рассматриваемые функторы подразумеваем естественными транзитивными.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп и θ — подгрупповой функтор в $\mathfrak{X}$. Определим следующий класс групп:

$$\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta) = (G \in \mathfrak{X} \mid 1 \in \theta(G) \text{ и } P \in \theta(G) \text{ для любой силовской подгруппы } P \text{ из } G).$$

Следующие леммы, определяют формационные свойства класса $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

Лемма 1 [5]. Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная формация и θ — подгрупповой L_*-функтор в $\mathfrak{X}$. Тогда $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ — наследственная формация.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Формация $\mathfrak{F}$ является формацией с условием Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$ [1], если каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа из $\mathfrak{X}$ является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Лемма 2 [6]. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^n$, $n \geq 2$. Если θ — подгрупповой L_0-функтор в $\mathfrak{X}$, то класс $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ является формацией с условием Шеметкова в $\mathfrak{X}$.

Лемма 3 [6]. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^n$, $n \geq 2$. Если θ — подгрупповой L_0-функтор в $\mathfrak{X}$, то класс $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ является насыщенной формацией.

Ясно, что любой L-функтор является L_0. Обратное утверждение в общем случае не верно. В классе $\mathfrak{N}^2$ можно получить следующий результат:

Теорема 1. Пусть θ — подгрупповой L_0-функтор в классе $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) класс $\mathfrak{F} = \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ является наследственной насыщенной формацией с условием Шеметкова в классе $\mathfrak{X}$ и имеет максимальный внутренний локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \varnothing$, для любого $p \in \pi\prime(\mathfrak{F})$;

2) $\theta(G) = sn_{\mathfrak{F}}(G)$ для любой группы $G \in \mathfrak{X}$;

3) θ является L-функтором в классе $\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{S}_{p\prime}\mathfrak{N}_p$ — формация всех разрешимых p-нильпотентных групп. Из основного результата работы [7] следует, что подгрупповой функтор $sn_{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{p\prime}\mathfrak{N}_p$, не является L-функтором в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп. Ввиду [8] подгрупповой функтор $sn_{\mathfrak{F}}$ является L_0-функтором в $\mathfrak{S}$. В классе $\mathfrak{N}^2$ можно получить

Следствие. Пусть G — метанильпотентная группа. Тогда множество всех $\mathfrak{S}_{p\prime}\mathfrak{N}_p$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп группы G.

Список литературы

[1] С. Ф. Каморников, М. В. Селькин, Подгрупповые функторы и классы конечных групп, Минск: Беларуская навука, 2003, 254.

[2] Л. А. Шеметков, Формации конечных групп, М.: Наука, 1978, 272.

[3] А. Ф. Васильев, С. Ф. Каморников, О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп, *Сиб.мат.журнал*, **2** (2001), 30–40.

[4] С. Ф. Каморников, Об обном классе решеточных подгрупповых функторов, *Матем. Заметки*, **89**:3 (2011), 355–364.

[5] И. Н. Халимончик, А. Ф. Васильев, О решетках подгрупп субнормального типа в конечных группах, *Труды института математики*, **21**:1 (2013), 25–34.

[6] I. N. Khalimonchik, On generalized subnormal subgroups of finite metanilpotent groups, *Asian-European Journal of Mathematics*, **11**:1 (2018), 1850018-1–1850018-11.

[7] A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M. D. Perez-Ramos, On the lattice of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups, *J. Algebra*, **115** (1992), 393–396.

[8] В. Н. Семенчук, С. А. Мокеева, О. А. Мокеева, Произведение обобщенно субнормальных подгрупп в конечных группах, *Сиб. матем. журн.*, **50**:4 (2009), 890–901.

Порождающие тройки инволюций групп $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ для малых n

Шаипова Т. Б.
Сибирский федеральный университет
663431@mail.ru

В 2008 г. Д.В. Левчук и Я.Н. Нужин [2,3] доказали, что при $n \geqslant 7$ проективная специальная линейная группа $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Причем порождающие указывались явно и при $n \neq 4k+2$ они брались из $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$. Следовательно, при $n \neq 4k+2$ и группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. С другой стороны, группа $SL_2(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ обладает только одной инволюцией и поэтому она не порождается никаким множеством инволюций, а группа $SL_3(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ не может порождаться тремя инволюциями, две из которых перестановочны, поскольку такими тройками не порождается ее гомоморфный образ $PSL_3(9)$. Совсем недавно Я.Н.Нужин [4] установил, что группы $SL_3(D)$ и $SL_6(D)$, где D — область целостности характеристики отличной от 2, не порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Таким образом, при малых $n \leqslant 6$ остаются открытыми следующие вопросы.

А) *Порождаются ли при $n = 3, 4, 5, 6$ группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями (без условия перестановочности двух из них)?*

Б) *Порождаются ли группы $SL_4(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $SL_5(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны?*

Теорема 1. *При $n = 3$ и $n = 5$ группа $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями.*

Доказательство теоремы 1 состоит в том, что порождающие тройки инволюций указываются явно и, применяя методы работы [1], из них получаются уже известные порождающие множества группы $SL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$.

Список литературы

[1] Я. Н. Нужин, О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны, *Владикавказский матем. журнал*, **10**:1 (2008), 68–74.

[2] D. V. Levchuk, Ya. N. Nuzhin, On generation of the group $PSL_n(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ by three involutions, two of which commute, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **1**:2 (2008), 133–139.

[3] Д. В. Левчук, О порождаемости группы $PSL_7(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны, *Вестник НГУ*, **1** (2009), 35–38.

[4] Я. Н. Нужин, Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп, *Труды ИММ УрО РАН* (представлена).

О группах, насыщенных полными линейными группами[1]

Шлепкин А. А.
Сибирский федеральный университет
shlyopkin@gmail.com

По определению, группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X (множество X называется *насыщающим множеством* для группы G) [1]. В [2] доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества групп $\{GL_2(p^n)\}$, где p и n не фиксируются, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q — локально конечное поле. Естественно рассмотреть случай, когда периодическая группа Шункова насыщена группами из множеств групп $\{GL_3(p^n)\}$. Поучен следующий результат.

Теорема. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\{GL_3(2^n)\}$, где n не фиксируется, изоморфна $GL_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики* 2.

Список литературы

[1] А. К. Шлепкин, О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами, *Математические труды*, **1**:1 (1998), 129–138.

[2] А. А. Шлепкин, О группах, насыщенных $GL_2(p^n)$, *Вестн. СибГАУ*, **1** (2013), 100—108.

[1]Работа автора выполнена за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 19-71-10017.

О периодической части группы Шункова, насыщенной прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп и группы $U_3(2^n)$ [1]

Шлепкин А. К., Филлипов К. А., Филлипова А. Н.
Красноярский государственный аграрный университет
ak_kgau@mail.ru, filippov_kostya@mail.ru

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [2].

Напомним, что группа G (сопряженно бипримитивно конечная группа в определении В.П. Шункова, [3] называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H \leq G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Отметим, что группа Шункова, порожденная элементами конечных порядков, не обязана быть периодической. Примеры таких смешанных групп существуют уже в классе разрешимых групп [1].

Пусть I_n — прямое произведение n экземпляров группы порядка 2.

Доказана следующая

Теорема *Бесконечная группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{U_3(q) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, где $2 < q = 2^k$ - фиксированное наутральное число, обладает периодической частью, которая локально конечна и изоморфна $U_3(q) \times I$, где I — бесконечная группа периода 2.*

Список литературы

[1] А. А. Череп, О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе, *Алгебра и логика*, **26**:4 (1987), 518–521.

[2] А. К. Шлепкин, О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами, *Матем. тр. ИМ СО РАН*, **1**:1 (1998), 129–138.

[3] В. П. Шунков, Об одном классе p-групп, *Алгебра и логика*, **9**:4 (1970), 484–496.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках проекта № 20-51-00007.

Группы центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса ранга 1[1]

Шумакова Е. О.
ФГБОУ ВО Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет
shumakovaeo@cspu.ru

Целью данной работы является изучение и описание групп обратимых элементов из центров целочисленных групповых колец для метациклических групп Фробениуса $F_{m,n} = \langle b\rangle_m \leftthreetimes \langle a\rangle_n$ с ядром $\langle b\rangle$ порядка m и дополнением $\langle a\rangle$ порядка n.

Для конечной группы G обозначим целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}G$, группу обратимых элементов центра такого кольца $U(Z(\mathbb{Z}G))$, а $r(U(Z(\mathbb{Z}G)))$ — ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}G))$, то есть число бесконечных прямых циклических сомножителей в конечно порожденной абелевой группе $U(Z(\mathbb{Z}G))$.

Группа центральных единиц кольца $\mathbb{Z}G$ для метациклических групп Фробениуса исследована автором в [3], доказана формула вычисления ранга группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$ для произвольных m и n, подробно исследован случай, когда m является простым числом. Доказано, при каких m и n (m простое) ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$ равен 0 или 1 (Таблица 1).

Таблица 1 — Ранг группы $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$

m	n	$r(U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n})))$
3	2	0
5	2	1
5	4	0
7	3	0
7	6	0
11	5	1
13	3	1
13	6	1
13	12	1

В статье [2] приведены значения рангов групп $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$ для простых чисел m, не превосходящее 100.

Определённый интерес представляет задача описания групп $U(Z(\mathbb{Z}F_{m,n}))$ ранга 1 в терминологии порождающих элементов. Поиски решений указанной задачи заняли довольно длительное время, частично результаты были представлены в [1].

На сегодняшний день найдены порождающие элементы группы центральных единиц целочисленного группового кольца метациклической группы Фробениуса порядка 10, 55, 78 и 39, таким образом исследованы четыре случая из пяти возможных, при которых ранг группы единиц равен 1. Исследование случая для группы Фробениуса порядка 156 не окончены и ведутся в настоящее время.

Упордядочим базисы $\mathbb{C}$–пространства из классовых сумм $y(g)$ (g – представитель класса сопряженных элементов группы $F_{m,n}$) и из минимальных центральных идемпотентов $e_0 \dots e_k$ для центра комплексной групповой алгебры $\mathbb{C}F_{m,n}$ в соответствии с таблицами характеров, построенных для конкретных групп. Обозначим $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Сформулируем полученные результаты в четырех теоремах.

Теорема 1. [1] Группа единиц центра целочисленного группового кольца группы $F_{5,2} = \langle b\rangle_5 \leftthreetimes \langle a\rangle_2$ имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}F_{5,2})) = \langle -1\rangle \times \langle u\rangle$, где

$$u = 1 + e_1 - \alpha^2 e_2 - \alpha^{-2} e_3 = -1 + y(b^2).$$

[1]Работа выполнена при поддержке ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», по договору о выполнении НИР по теме «Изучение групп центральных единиц целочисленных групповых колец» заявка № ШК-20-04-17/1 от 17.04.2020.

Теорема 2. [1] Группа единиц центра целочисленного группового кольца группы $F_{11,5} = \langle b \rangle_{11} \leftthreetimes \langle a \rangle_5$ имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}F_{11,5})) = \langle -1 \rangle \times \langle u \rangle$, где

$$\begin{aligned} u &= 1 + (4181 + 6765\omega)(e_1 + e_4) + (10946 - 6765\omega)(e_2 + e_3) + e_5 + e_6 = \\ &= 551 + 550(y(b)) + y(b^2)) + 170(y(a) + y(a^4)) - 445(y(a^2) + y(a^3)). \end{aligned}$$

Теорема 3. Группа единиц центра целочисленного группового кольца группы $F_{13,6} = \langle b \rangle_{13} \leftthreetimes \langle a \rangle_6$ имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}F_{13,6})) = \langle -1 \rangle \times \langle u \rangle$, где

$$\begin{aligned} u &= 1 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - \lambda^{-2}e_6 - \lambda^2 e_7 = \\ &= -5 + 2y(b) - y(b^2). \end{aligned}$$

Теорема 4. Группа единиц центра целочисленного группового кольца группы $F_{13,3} = \langle b \rangle_{13} \leftthreetimes \langle a \rangle_3$ имеет вид $U(Z(\mathbb{Z}F_{13,3})) = \langle -1 \rangle \times \langle u \rangle$, где

$$\begin{aligned} u &= 1 + e_1 + e_2 - \lambda^{-2}(e_3 + e_5) - \lambda^2(e_4 + e_6) = \\ &= -5 + 2(y(b) + y(b^{-1})) - y(b^2) - y(b^{-2}). \end{aligned}$$

Список литературы

[1] Е. О. Шумакова, Группы центральных единиц целочисленных групповых колец конечных разрешимых групп: автореферат диссертации ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург. (2009), 12.

[2] Е. О. Шумакова, Ранги групп центральных единиц целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса, *Современные проблемы физико-математических наук: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием*, Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева, (2018), 132–136.

[3] Е. О. Шумакова, Центральные единицы целочисленных групповых колец метациклических групп Фробениуса, *Сибирские электронные математические известия*, **5** (2008), 691–698.

Siamese twins construction of non-injective discrete representations of uniform hyperbolic lattices

Apanasov B. N.
University of Oklahoma
apanasov@ou.edu

We discuss our new "Siamese twins construction"of non-injective discrete representations of uniform hyperbolic lattices with arbitrary large kernels. This construction can be considered as an enhancement to the conformal category of the Gromov-Piatetski-Shapiro interbreeding construction for creation of non-arithmetic uniform hyperbolic lattices in any dimension [11]. Its main application is:

Theorem. *For any large natural N there exist a natural number $m \geq N$, a uniform hyperbolic lattice $\Gamma \subset \operatorname{Isom} H^3$ and its discrete representation $\rho\Gamma \to G \subset \operatorname{Isom} H^4$ such that its kernel is a free subgroup $F_m \subset \Gamma$ of rank m.*

This new phenomenon brings several advances in the study of a variety of conjugacy classes of discrete representations of uniform hyperbolic lattices $\Gamma \subset \operatorname{Isom} H^3$ into the isometry group of the hyperbolic 4-space, $\rho\colon\Gamma \to G \subset \operatorname{Isom} H^4$. They may have connected components whose dimensions differ by arbitrary large numbers -cf. [3,5]. Another application is to deformations of hyperbolic 3-manifolds/orbifolds their Teichmüller spaces of conformally flat structures -cf. [1]- [5]. Such non-injective discrete representations of uniform hyperbolic lattices with arbitrary large kernels are related to our method of block-building of hyperbolic 4-cobordisms, their "bending"deformations and the group growth in hyperbolic groups. Also this has several applications (solving old problems) to differential geometry, topology and geometric analysis. This is related to W.Thurston "non-rigidity theorem"for cusped hyperbolic 3-manifolds (the Dehn surgery - cf. [2]), to varieties of conformally flat structures on closed hyperbolic 3-manifolds, to the shape of non-trivial compact 4-dimensional cobordisms M (cf. [9], [4]) whose interiors have complete hyperbolic structures (how the global geometry and topology of such cobordisms depends on properties of the variety of discrete representations of the fundamental group of its boundary ∂M -cf. [1, 2]), to different ergodic actions of a uniform hyperbolic 3-lattice [5], as well as to M.A.Lavrentiev, Pierre Fatou and Matti Vuorinen problems on locally homeomorphic quasi-regular mappings in 3-space [6], cf. [10], [12], [13], [14], [15].

Список литературы

[1] Boris Apanasov, *Nontriviality of Teichmüller space for Kleinian group in space.* - In: Riemann Surfaces and Related Topics, Proc. 1978 Stony Brook Conference (I.Kra and B.Maskit, eds), Ann. of Math. Studies **97**, Princeton Univ. Press, 1981, 21–31.

[2] B. Apanasov, Conformal geometry of discrete groups and manifolds, *De Gruyter Exp. Math.*, **32**, Berlin - New York: W. de Gruyter, 2000.

[3] B. Apanasov, Nonstandard uniformized conformal structures on hyperbolic manifolds, *Invent. Math.*, **105** (1991), 137–152.

[4] B. Apanasov, Hyperbolic 4-cobordisms and group homomorphisms with infinite kernel, *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia*, **57** (2010), 31–44.

[5] B. Apanasov, Group Actions, Teichmüller Spaces and Cobordisms, *Lobachevskii J. Math.*, **38** (2017), 213–228.

[6] B. Apanasov, Topological barriers for locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-space, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **43** (2018), 579–596.

[7] B. Apanasov, Hyperbolic topology and bounded locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-space, - (Bogdan Bojarski Memorial Volume), *J. Math. Sci.*, **242** (2019), 760–771

[8] B. Apanasov, Non-faithful discrete representations of hyperbolic lattices, hyperbolic 4-cobordisms and applications, Preprint, Univ. of Oklahoma, 2020, 25.

[9] B. N. Apanasov, A. V. Tetenov, Nontrivial cobordisms with geometrically finite hyperbolic structures, *J. of Diff. Geom.*, **28** (1988), 407–422.

[10] K. F. Barth, D. A. Brannan, W. K. Hayman, Research problems in complex analysis, *Bull. London Math. Soc.*, **16**:5 (1984), 490–517.

[11] M. Gromov, I. I. Piatetski-Shapiro, Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces, *Publ. Math. IHES* **66** (1988), 93–103.

[12] W. K.Hayman, E. F. Lingham, Research problems in function theory, ArXiv: 1809.07200

[13] M. A. Lavrentiev, On a class of continuous mappings, *Mat. Sbornik*, **42** (1935), 407–424. (in Russian).

[14] S. Rickman, Quasiregular Mappings, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **26**, Berlin, Heidelberg: Springer, 1993.

[15] M. Vuorinen, Conformal geometry and quasiregular mappings, Lecture Notes in Math **1319**, Berlin-Heidelberg: Springer, 1988.

Spectra of some exceptional almost simple groups of Lie type[1]

Buturlakin A. A., Grechkoseeva M. A.
Sobolev Institute of Mathematics
buturlakin@gmail.com, grechkoseeva@gmail.com

The spectrum $\omega(G)$ of a finite group G is the set of orders of elements of G. Denote by $\mu(G)$ the set of elements of $\omega(G)$ that are maximal with respect to the divisibility. Since the spectrum is closed under taking divisors, it is uniquely determined by any set $\nu(G)$ such that $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

If L is a nonabelian simple group of Lie type, then $\operatorname{Inndiag} L$ denotes the group of inner-diagonal automorphisms of L. Our purpose is to find $\omega(\operatorname{Inndiag} L)$ for exceptional groups. Since the spectrum of L itself is known (see [1]), we may assume that $\operatorname{Inndiag} L \neq L$, and so $L = E_6(q)$ with $q \equiv 1 \pmod 3$, or $L = {}^2E_6(q)$ with $q \equiv -1 \pmod 3$, or $L = E_7(q)$ with q odd.

It is convenient to write $E_6^\varepsilon(q)$, where $\varepsilon \in \{+,-\}$, $E_6^+(q) = E_6(q)$ and $E_6^-(q) = {}^2E_6(q)$. Also we write ε instead of $\varepsilon 1$ in arithmetic expressions for brevity. If a and b are numbers, then $(a \pm 1)(b \mp 1)$ is a short form of $(a+1)(b-1), (a-1)(b+1)$. If p is a prime and n is a positive integer n, then $p(n)$ denotes the least power of p greater than n.

Theorem 1. *Let $L = E_6^\varepsilon(q)$, where q is a power of a prime p and 3 divides $q-\varepsilon$, and let G be the group of inner-diagonal automorphisms of L. Define the set $\nu(G)$ to be the union of the following sets:*

(1) $\{\frac{q^6-1}{(3,q-\varepsilon)}, q^6+\varepsilon q^3+1, (q^2+\varepsilon q+1)(q^4-q^2+1), (q-\varepsilon)(q^2+1)(q^3+\varepsilon), (q^2-1)(q^4+1), (q+\varepsilon)(q^5-\varepsilon)\}$;

(2) $p \cdot \{\frac{q^6-1}{q-\varepsilon}, q^5-\varepsilon, (q^3+\varepsilon)(q-\varepsilon)\}$;

(3) $p(2) \cdot \{(q^3-\varepsilon)(q+\varepsilon), q^4+q^2+1, q^4-1\}$;

(4) $p(5) \cdot \{q^2-1, q^2+\varepsilon q+1\}$;

(5) $p(7) \cdot \{q-\varepsilon\}$;

(6) $\{p(11)\}$.

Then $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

Theorem 2. *Let $L = E_7(q)$, where q is a power of an odd prime p and let G be the group of inner-diagonal automorphisms of L. Define the set $\nu(G)$ as the union of the following sets:*

(1) $\{(q^2 \pm q+1)(q^5 \mp 1), (q \pm 1)(q^6 \mp q^3+1), q^7 \pm 1, (q^3 \pm 1)(q^4-q^2+1), (q \pm 1)(q^5 \mp 1), \frac{q^8-1}{2(q\pm 1)}, q^6-1\}$;

(2) $p \cdot \left\{\frac{q^6-1}{2}, q^5 \pm 1, (q^4+1)(q^2 \pm 1), (q^3 \pm 1)(q^2+1)(q \mp 1), q^4-q^2+1, q^4-1\right\}$;

(3) $p(3) \cdot \left\{\frac{q^4-1}{2}, (q^3 \pm 1)(q \mp 1)\right\}$;

(4) $p(5) \cdot \left\{q^3 \pm 1, (q^2+1)(q \pm 1)\right\}$;

(5) $p(7) \cdot \left\{q^2-1\right\}$;

(6) $p(11) \cdot \{q \pm 1\}$;

(7) $\{p(17)\}$.

Then $\mu(G) \subseteq \nu(G) \subseteq \omega(G)$.

The proof of Theorems 1 and 2 follows the same lines as [2,3] and involves calculations in MAGMA [4].

References

[1] A. A. Buturlakin, Spectra of groups $E_8(q)$, *Algebra Logic*, **57** (2018), 1–8.

[2] A. A. Buturlakin, Spectra of the finite simple groups $E_7(q)$, *Siberian Math. J.*, **57** (2016), 769–777.

[3] A. A. Buturlakin, Spectra of finite simple groups $E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$, *Algebra Logic*, **52** (2013), 284–304.

[1]The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. 0314-2019-0001).

[4] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, The Magma algebra system. I. The user language, *J. Symbolic Comput.*, **24** (1997), 235–265.

On locally solvable subgroups of a finitary linear group

Dashkova O. Yu., Shpyrko O. A.
Branch of Moscow state university in Sevastopol
odashkova@yandex.ru

Let K be an associate ring with unity and let ν be a linearly ordered set with an order $\leq$. Let $A = (m_{ij}(A))$ be a matrix of degree ν over the ring K in which $1 \leq i, j$ and $i, j \in \nu$. Consider all possible subsets $\nu' \subseteq \nu$ such that outside $\nu' \times \nu'$ the matrix A coincides with the identity matrix. The intersection of all sets ν' with the given property itself has this property and therefore it is the smallest set with such property which is called the support of matrix A and denoted by $supp(A)$. Matrices with finite supports are called the *finitary* matrices. Finitary matrices are multiplied by the natural way $m_{ij}(AB) = \sum_k m_{ik}(A)m_{kj}(B)$ where the sum on the right side contains only a finite numbers of nonzero elements. It is obviously that $supp(AB) \subseteq supp(A) \cup supp(B)$. For all invertible matrixes A we have $supp(A^{-1}) = supp(A)$. Hence the set $FL_\nu(K)$ of all invertible finitary matrices of degree ν over K forms a group under multiplication which is called a *finitary linear group* of degree ν over K.

The subgroup $UT_\nu(K)$ of $FL_\nu(K)$ consisting all $A \in FL_\nu(K)$ with the additional unitriangularity condition that $m_{ij}(A) = \delta_{ij}$ for $i \geq j$ is called the *finitary unitriangular group*.

Finitary linear groups of degree ν over a ring K was introduced by Yu.I. Merzlyakov in [1] and in the same paper was established that $UT_\nu(K)$ does not satisfy the normalizer condition for any ring K with unity and for any infinite linearly ordered set ν.

The investigation of $FL_\nu(K)$ was started in [2] and actively continued in [1, 3–7].

In this paper we continue to study a finitary linear group. It is the well-known fact that a locally solvable finite-dimensional linear group over a field is solvable (corollary 3.8 [8]). However in the case of a group $FL_\nu(K)$ over a field K this statement is incorrect. We proved the theorem.

Theorem. Let $FL_\nu(K)$ be a finitary linear group, K be a field. If G is a locally solvable subgroup of $FL_\nu(K)$ then G is hyperabelian.

References

[1] Yu. I. Merzlyakov, Equisubgroups of unitriangular groups: a criterion for self-normalizability, *Dokl. Akad. Nauk.*, **339** (1994), 732–735.

[2] V. M. Levchuk, Some locally nilpotent rings and their associated groups, *Mat. Zametki.* **42** (1987), 631–641.

[3] V. M. Levchuk, O. V. Radchenko, Derivations of the locally nilpotent matrix rings, *J. Algebra Appl.*, **9** (2010), 717–724.

[4] F. Kuzucuoglu and V. M. Levchuk, Jordan isomorphisms of radical finitary matrix rings, *J. Algebra Appl.*, **9** (2010), 659–667.

[5] F. Kuzucuoglu and V. M. Levchuk, Isomorphisms of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings, *Acta Appl. Math.*, **82** (2004), 169–181.

[6] O. Yu. Dashkova, M. A. Salim, O. A. Shpyrko, On the structure of a finitary linear group, *Proceedings of the Institute of mathematics and mechanics UrB RAS*, **23** (2017), 98–104.

[7] V. Bovdi, O. Yu. Dashkova, M. A. Salim, Subgroups of a finitary linear group, *Ric. Mat.*, **68** (2019), 803-–809.

[8] B. A. F. Wehrfritz, Infinite linear groups. An account of the group-theoretic properties of infinite groups of matrices. Ergebnisse der Matematik und ihrer Grenzgebiete, Band 76, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, 229.

The calculation of combinatorial sums on P. Hall's commutator theory [1]

Egorychev G. P., Kolesnikov S. G., Leontiev V. M.
Siberian Federal University
sklsnkv@mail.ru

In 1934, P. Hall proved the formula in [1] that expresses the product $(xy)^n$ in terms of x^n, y^n and commutators of x and y. The formula later called Hall's collection formula led to new directions of the study of p-groups and was also used by A.I. Kostrikin in solving of the restricted Burnside problem for groups of exponent 5 with two generators. In 2016, V.M. Leontiev [2] (see also [3-5]) proposed a parametrization of uncollected part of Hall's collection formula, which allows one to uniformly calculate the exponents of the commutators for known and some new series, as well as to obtain new collection formulas. Moreover, it constantly arises as a problem of computing in a closed form of combinatorial sums of various types, and their estimate modulo prime number. To solve this problem, the authors regularly used the Egorychev method coefficients [6-8], devoted the author in the end 1970's and connected with the theory of residues in one and several complex variables. In particular, we compute two following multiple combinatorial sums with linear restrictions on the summation indices, special cases of which were used in proving of the main results in [3].

Theorem 1. *Suppose $r, n, m \in \mathbb{N}$ and $i \in \mathbb{N}_0$. Then we have the r-multiple formula of summation*

$$\sum_{s_{r-1}=0}^{n} \sum_{s_{r-2}=0}^{s_{r-2}} \cdots \sum_{s_3=0}^{s_2} \sum_{s=0}^{s_1} \binom{s}{i+1}^m = \begin{cases} \binom{n+r}{i+r+1} & \text{if } m = 1, \\ \sum_{s=0}^{n-i-1} \binom{r+n-i-s-2}{r-1} \binom{0+s+1}{s}^m, & \text{if } m > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Theorem 2. *Suppose $r, m, n, i \in \mathbb{N}_0$, $r > 1$, $s_1(m, r)$ are the Stirling numbers of the first kind. Then we have the r-multiple formula of summation*

$$\sum_{s_{r-1}=0}^{n} \sum_{s_{r-2}=0}^{s_{r-2}} \cdots \sum_{s_3=0}^{s_2} \sum_{s=0}^{s_1} \binom{\binom{n}{i+1}}{m} \frac{1}{m!} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-i-1} s_1(m, j) \binom{n+u-i-s-2}{r-1} \binom{i+s+1}{s}^j. \tag{2}$$

We have solved also an original problem of finding of the necessary and sufficient conditions imposed on family of free parameters n, k, u, v at which the following identity is valid

$$\sum_{i=\max(0,v-k,u-k-1)}^{n-k-1} \binom{n-i-1}{k} \binom{i}{u-k+1} \binom{i}{n-k} =$$
$$\sum_{i=\max(0,v-u-1)}^{\min(v-k,n-u-2)} \binom{v-k}{i} \binom{n}{i+u+2} \binom{u-k+i+1}{v-k}. \tag{3}$$

Let's note, that this difficult problem has arisen in [3] in connection with necessity of an estimation of the sum in the right-hand side of (3) modulo prime p.

It is known that the combinatorial interpretation of the original identities, and their particular generalizations, often gives new and very significant information about the structure of the enumerated set of objects. R. Stanley ([9], pp. 296–318) gave various interpretations for a wide range of combinatorial numbers and identities with them, which arose in the most diverse fields of mathematics and its applications.

[1]This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2020-1534/1).

For example, he points out that 140 different interpretations are known for ordinary Catalan numbers. The following problem naturally arises: to give a combinatorial-algebraic interpretation of identities (1) and (2).

References

[1] P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime-power order, *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1934), 29–95.

[2] V. M. Leontiev, P. Hall's collection formulas with some restrictions on commutator subgroup (in Russian), *August Möbius Contest*, (2016) http://www. moebiuscontest.ru/files/ 2016/leontiev.pdf.

[3] S. G. Kolesnikov, V.M. Leontiev, G.P. Egorychev Two collection formulas, *Journal of Group Theory*, **4** (2020), 607–628.

[4] V. M. Leontiev, Combinatorial problems connected with P. Hall's collection process, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **17** (2020), 873–889 (in Russian).

[5] V. M. Leontiev, On divisibility of some sums of binomial coefficients arising from collection formulas, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **5** (2018), 603—614.

[6] G. P. Egorychev, Integral Representation and the Computation of Combinatorial Sums. Nauka, Novosibirsk, 1977 (in Russian). Translation of Mathematical Monographs, volume 59, American Mathematical Society, RI 1984; 2nd ed. in 1989.

[7] V. K. Leontiev, The selected problems of combinatorial analysis, M.:MGTU, 2001 (in Russian).

[8] M. R. Riedel, Egorychev method and the evaluation of binomial coefficient sums, *Pnp. mathematic. uni-stuttgart. de. June 25*, (2020), 218.

[9] R. P. Stanley, Enumerative combinatorics, Vol. 2, Cambridge: Cambridge University Press, 2001, Transl. in Russian. M.:Mir, 2005, 767.

Recognition by spectrum for the simple groups $L_4(q)$ and $U_4(q)$

Grechkoseeva M. A.
Sobolev Institute of Mathematics
grechkoseeva@gmail.com

We say that finite groups are isospectral if they have the same sets of orders of elements. The recognition by spectrum problem for a finite group L is to find all finite groups isospectral to L, and if L is the only group with this property, then L is said to be recognizable by spectrum. The recognition by spectrum problem is solved for all nonabelian simple groups except for some classical groups in dimension up to 36 in odd characteristic (see [1, 2]).

We consider this problem for the groups $L_4(q)$ and $U_4(q)$ with q odd. Suppose that L is one of these groups and G is a finite group isospectral to L. It is known that the quotient of G by its solvable radical is an almost simple group whose socle S is a simple group of Lie type; furthermore, if S is a group in characteristic dividing q, then $S \simeq L$ (see [3]). Hence we have three possibilities: either S is a group in characteristic not dividing q, or G includes a proper cover of L (that is, a group whose quotient by some nontrivial group is isomorphic to L), or G is an almost simple group with socle L.

First, we prove that a proper cover of L cannot be isospectral to L, and so exclude the second possibility (a joint result with S.V. Skresanov [4]). Second, we show that S cannot be a group of Lie type in characteristic not dividing q (a joint result with M.A. Zvezdina). It follows that G is an almost simple group with socle L, and so conditions for G to be isospectral to L can be found in [5]. Thus we have

Theorem. *Let $L = L_4(q)$ or $L = U_4(q)$, where q is odd. Then every finite group isospectral to L is an almost simple group with socle L. Moreover, all such groups are known.*

We do not give an explicit list of groups isospectral to L because it is rather cumbersome. For example, if $L = L_4(5^{2^t})$, then groups isospectral to L are precisely extensions of L by φ, where φ is either trivial, or a nontrivial field automorphism, or a product of a nontrivial field automorphism and a graph automorphism, in particular, there are $2t + 1$ such groups. It is worth noting that all groups $L_4(2^m)$ and $U_4(2^m)$ except for $U_4(2)$ are recognizable by spectrum [6].

References

[1] M. A. Grechkoseeva, A. V. Vasil'ev, On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups, *J. Group Theory*, **18** (2015), 741–759.

[2] A. Staroletov, On almost recognizability by spectrum of simple classical groups, *Int. J. Group Theory*, **6** (2017), 7–33.

[3] A. V. Vasil'ev, M. A. Grechkoseeva, A. M. Staroletov, On finite groups isospectral to simple linear and unitary groups, *Siberian Math. J.*, **52** (2011), 30–40.

[4] M. A. Grechkoseeva, S. V. Skresanov, On element orders in covers of $L_4(q)$ and $U_4(q)$, *Sib. Élektron. Mat. Izv.*, **17** (2020), 585–589.

[5] M. A. Grechkoseeva, On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle, *J. Group Theory*, **20** (2017), 1191–1222.

[6] V. D. Mazurov, G. Y. Chen, Recognizability of the finite simple groups $L_4(2^m)$ and $U_4(2^m)$ by the spectrum, *Algebra Logic*, **47** (2008), 49–55.

On products of groups and indices of elements

Kazarin L. S.
Yaroslavl P.Demidov State University
kazarin@uniyar.ac.ru

The sizes of a conjugacy classes of a finite group are of permanent interest in group theory since the famous W.Burnside's $p^a q^b$-theorem in [1]. Clearly, this result leads to a great progress concerning finite groups with the restrictions on the lengths of the conjugacy classes of elements (in R.Baer's termnology, the indices of elements).

On one hand, the theory of products of finite groups and on the other hand, the study of the influence of sizes of conjugacy class sizes (indices of elements) on the structure of finite groups. The survey [2] gives a general overview about this subjects untill 2011.

In the recent approach, which combines the above mentioned lines within the theory of groups, the main aim is to analize how the indices of some elements of the factors of a factorized group influence the structure of the whole group.

In the last years mathematicians from Valencia (Spain) with my participation have proved some new results concerning factorized groups and indices of elements of the factors (see, for instance [3]).

The following result was obtained also in the joint work with M.J.Felipe, A.Martinez-Pastor and V.M.Ortiz-Sotomayor.

Theorem. *Let the group $G = AB$ be the product of its subgroups A and B and let p be a prime. Then p does not divide $i_G(x)$ for every p-regular element of prime power order $x \in A \cup B$ if and only if G is p-decomposable, i.e. $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$.*

Let π be a set of primes. Recall that the group G is a π-decomposable if $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$. If $x \in G$ is an element, then $i_G(x) = |G : C_G(x)|$ is its *index*. If $G = AB$ is the product of subgroups A and B, then we say that this product is *mutally permutable*, provided every subgroup of A is permutable with B and every subgroup of B is permutable with A.

As a corollary, we have the following result due to A.Ballester-Bolinches, J.Cossey and Y.Li [4]:

Corollary. *Let the group $G = AB$ be the mutally permutable product of the subgroups A and B, and let p be a prime. Then: i) No index $i_G(x)$, where x is a p-regular element in $A \cup B$,is divisible by p if and only if $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$.*

ii) $i_G(x)$ is not divisible by p for every element $x \in A \cup B$ if and only if $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$ with $O_p(G)$ abelian.

Note, that there are no restrictions on the structure of the subgroups A and B in our Theorem and no additional information on permutation of subgroups.

As a very important instrument in the proof of Theorem is an information on the prime graph of a simple finite group in [5] and in [6]. Recall that the prime graph $\Gamma(N)$ of a simple group N (Grünberg - Kegel graph)is the graph with the set of vertices $V = \pi(G)$, where vertices p and q in V are adjacent if N contained an element of order pq.

Define the center $Z(\Gamma(N))$ of the graph $\Gamma(N)$ the set of vertices that are adjacent with each vertex of $\Gamma(N)$. The following lemma can be derived from [7], Proposition 2.9.

Lemma 1. *If N is a finite simple group of Lie type, then $Z(\Gamma(N)) = \emptyset$.*

Next lemma is the refinement of Lemma 2.6 in [8], but the result is slightly stronger:

Lemma 2. *Let N be a finite simple group. Then there exists $r \in \pi(N) \setminus \pi(Out(N))$ such that $(r, |C_N(\alpha)|) = 1$ for every non-trivial $\alpha \in Out(N)$ of order coprime to $|N|$.*

Clearly, our approach gives the possibility to describe the structure of a finite simple group G such that the order of a centralizer of every element in G is divisible by a ixed prime $p > 2$.

Acknowledgment Authors research supported by Project VIP-008 of Yaroslavl P.Demidov State University.

References

[1] W. Burnside, On groups of order $p^a q^b$,*Proc. London Math. Soc.,* **2** (1904), 388–392.

[2] A. R Camina, R. D. Camina, The influence of conjugacy class sizes on the structure of finite groups: a survey, *Asian-Eur J.Math*, **4** (2011), 559–588.

[3] L. S. Kazarin, A. Martinez-Pastor, M. D. Perez-Ramos, On the product of two π-decomposable groups, *Rev.Mat.Iberoamericana*, **31**:1 (2015), 51–68.

[4] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, Y. Li, Mutally permutable products and conjugacy classes, *Monatsh.Math.*, **170** (2013), 305–310.

[5] J. S. Williams, Prime graph components of finite groups, *J.Algebra*, **69** (1981), 487- 513.

[6] A. S. Kondrat'iev, On prime graph components of finite simple groups, *Math.Sb.*, **67**:1 (1990), 235–247. Translation from Mat.Sb.180(6) (1989), 787 –797.

[7] H. He, W Shi, A note on the Adjacency Criterion for the Prime Graph and the Characterization of $C_p(3)$, *Algebra Colloq.*, **19**:3 (2012), 553–562.

[8] S. Dolfi, E. Pacifici,L. Sanus, P. Spiga On the orders of zeros of irreducible characters, *J. Algebra*, **321** (2009), 345–352.

On the periodic groups saturated with finite simple groups of Lie type B_n, $n \geqslant 3$

Lytkina D. V.[1], Mazurov V. D.[2]
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
daria.lytkin@gmail.com, mazurov@math.nsc.ru

Let $\mathfrak{M}$ be a set of groups. A group G is said to be *saturated with groups from* $\mathfrak{M}$ (*saturated with* $\mathfrak{M}$, for brevity) if any finite subgroup of G is contained in a subgroup of G which is isomorphic to one of the elements of $\mathfrak{M}$.

Let L be a simple group of Lie type [1] and X the Lie type of L, that is: A_n, $n \geqslant 1$; B_n, $n \geqslant 2$; C_n, $n \geqslant 3$; D_n, $n \geqslant 4$; E_6; E_7; E_8; F_4; G_2; ${}^2A_n$, $n \geqslant 2$; ${}^2B_2$; ${}^2D_n$, $n \geqslant 4$; ${}^3D_4$; ${}^2E_6$; ${}^2F_4$ or ${}^2G_2$. It follows from [2–6] that a locally finite group G saturated with finite simple groups of type X is isomorphic to a group $X(F)$ of the type X over a locally finite field F.

It is known that the assumption of local finiteness of a group can be replaced with the assumption of its periodicity for the types A_1, A_2, ${}^2A_2$, B_2, ${}^2B_2$, ${}^2G_2$ [7–11]. In addition, a periodic group saturated with one of the sets $\{{}^3D_4(q) \mid q \text{ odd}\}$ or $\{G_2(q) \mid q \text{ odd}\}$ is isomorphic to ${}^3D_4(F)$ or $G_2(F)$ respectively for a locally finite field F of odd characteristic [12, 13].

Recently the authors got a similar result for the periodic groups saturated with the set $\{B_3(q) \mid q \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8)\}$ [14].

Here we transfer this result to an arbitrary dimension.

Theorem. *Let $n \geqslant 3$ be an integer and G a periodic group saturated with the set*

$$\mathfrak{M} = \{B_n(q) \mid q \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8)\}.$$

Then G is isomorphic to $B_n(F)$ for some locally finite field F of odd characteristic.

References

[1] R. W. Carter, Simple groups of Lie type. London, John Wiley & Sons, 1972.

[2] V. V. Belyaev, Locally finite Chevalley groups (in Russian). *Studies in Group Theory, Sverdlovsk, Ural Scientific Centre of the AS USSR*, (1984), 39–50.

[3] A. V. Borovik, Embeddings of finite Chevalley groups and periodic linear groups, *Sib. Math. J.*, **24**:6 (1983), 843–851.

[4] B. Hartley, G. Shute, Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type. *Q. J. Math. Ser. 2*, **35**:137 (1984), 49–71.

[5] S. Thomas, The classification of the simple periodic linear groups, *Arch. Math.*, **41** (1983), 103–116.

[6] M. J. Larsen, R. Pink, Finite subgroups of algebraic groups, *J. Amer. Math. Soc.*, **24**:4 (2011), 1105–1158.

[7] A. K. Shlöpkin, On some periodic groups saturated by finite simple groups (in Russian), *Mat. Tr.* , **1**:1 (1998), 129–138.

[8] A. G. Rubashkin, K. A. Filippov, Periodic groups saturated with the groups $L_2(p^n)$, *Sib. Math. J.*, **46**:6 (2005), 1119–1122.

[9] D. V. Lytkina, A. A. Shlöpkin, Periodic groups saturated with finite simple groups of the types U_3 and L_3, *ALgebra and Logic*, **55**:4 (2016), 289–294.

[1]The work of D. V. Lytkina was supported by Mathematical Center in Akademgorodok under agreement No. 075–15–2019–1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.
[2]The work of V. D. Mazurov was supported by Russian Science Foundation (project No. 19–11–00039).

[10] K. A. Filippov, Groups saturated with finite nonabelian groups and their extensions (in Russian), Ph.D. thesis. Krasnoyarsk, 2005.

[11] K. A. Filippov, On periodic groups saturated by finite simple groups, *Sib. Math. J.*, **53**:2 (2012), 345–351.

[12] D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, Characterization of simple symplectic groups of degree 4 over locally finite fields in the class of periodic groups, *Algebra and Logic*, **57**:3 (2018), 201–210.

[13] X. Wei, W. Guo, D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, Characterization of locally finite simple groups of the type $^3D_4$ over fields of odd characteristic in the class of periodic groups, *Sib. Math. J.*, **59**:5 (2018), 799–804.

[14] D. V. Lytkina, V. D. Mazurov, On the periodic groups saturated with finite simple groups of Lie type B_3, *Sib. Math. J.*, **61**:3 (2020), 634–640.

Embedding theorems for solvable groups

Roman'kov V. A.
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk Branch, Omsk; Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia
romankov48@mail.ru

The main aim of this paper is to study embeddings of finitely generated groups in 2- or 4-generated groups. Let G stand for a finitely generated group which lies in a variety $\mathcal{M}$, and H for a 4-generated group in which G can be embedded. We show that H can be found in the variety $\mathcal{M}\mathcal{A}$, where $\mathcal{A}$ denote the variety of abelian groups. It follows that every finitely generated solvable group of the derived length l can be embedded in a 4-generated solvable group of length $l+1$.

We also study what further properties of G our embedding procedure endow H. Finiteness is one of them, and if G is a finite p-group (p is a prime) , H can be chosen as a finite p-group. Also, if G has finite exponent, then H can be made to have finite exponent. If G is a counable group such that the abelianization G_{ab} is a free abelian group then H can be found as a 2-generated group.

Thus, we refine the classical results on embeddings of countable groups, a brief overview of which is given below. These results refer to embeddings in 2-generated groups. We do not know whether parameter 4 can be lowered in our results. We believe that this cannot be done.

In the late 1940s, G. Higman, B. H. Neumann and H. Neumann showed that every countable group embeds in a 2-generator group, in the same paper [1] in which they introduced and succesifully applied HNN-extensions. Their method using free constructions of groups did not give similar results for varieties of groups. So then B. H. Neumann and H. Neumann in [4] applied wreath products to prove that every countable group G lying in a variety $\mathcal{M}$ can be embedded in a 2-generated group $H \in \mathcal{M}\mathcal{A}^2$. If G is finite (p-) group, then H can be chosen as finite (p-) group. Also, if G has finite exponent, then H can be made to have finite exponent.

It follows that every countable solvable group of the derived length l can be embedded in some 2-generated solvable group of length $l+2$. Note that this bound is sharp. Namely, the group $\mathbb{Q}$ of rationals does not embed into any finitely generated metabelian group M. Indeed, M is residually finite by Hall′s theorem, but $\mathbb{Q}$ is not. Thus we cannot lower $l+2$ to $l+1$ in the Neumann-Neumann embedding theorem.

Every finitely generated nilpotent group satisfies the maximal condition on subgroups, that is, every subgroup is finitely generated (see [7]). Hence each non-finitely generated nilpotent group cannot be embedded in a finitely generated nilpotent group. However every finitely generated nilpotent group embeds in some 2-generated nilpotent group of sufficiently large class [5]. Similarly, every polycyclic group embeds in a 2-generated polycyclic group [6].

Let G be a group and $g, f \in G$. Further in the paper g^f denotes $f^{-1}gf$ (conjugate of g by f) and $[g, f]$ stands for $g^{-1}f^{-1}gf$ (commutator of g and f). Also $[g, f; 1]$ means $[g, f]$ and inductively $[g, f; k+1]$ stands for $[[g, f; k], f], k = 1, 2, ...$ By G'we denote the derived subgroup of G. Then $G_{ab} = G/G'$ is the abelianization of G. $\mathbb{Z}$ means the infinite cyclic group and $\mathbb{Z}_n$ denotes a cyclic group of order n.

Recall that the Cartesian wreath product of groups is defined as follows. Let A and B be groups and D a group of all functions $f : B \to A$ with multiplication $(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$ for $x \in B$. The group B acts on D from the left by shift automorphisms: $f^b(x) = f(bx)$ for all $f \in D$, $b, x \in B$, and the associated with this action semidirect product $D \rtimes B$ is called the *Cartesian wreath product* of the groups A and B, denoted by $AWrB$. The subgroup D is called *base subgroup* of $A\ Wr\ B$. Thus, every element of $AWrB$ has a unique presentation as bf $(b \in B, f \in D)$ and the multiplication rule follows from the conjugation formula

$$f^b(x) = f(bx) \tag{25}$$

in $AWrB$ for any $b, x \in B$ and $f \in D$. If instead of D one takes the smaller group consisting of all functions with finite support, that is, functions taking only non-identity values on a finite set of points, then one obtains a subgroup of $A\ Wr\ B$ called the *wreath product* (*direct wreath product*); it is denoted by $A\ wr\ B$.

The following question was posed by V. H. Mikaelian and A. Yu. Olshanskii in [3] and was also written by A. Yu. Olshanskii in [2](Question 18.73):

Does every finitely generated solvable group of derived length $l \geq 2$ embed into a 2-generated solvable group of length $l+1$? Or at least, into some k-generated $(l+1)$-solvable group, where $k = k(l)$?

We prove the following embedding theorems that imply an affirmative answer to Mikaelian-Olshanskii$'$ question. In the following statements, $\mathcal{M}$ means an arbitrary variety of groups and $\mathcal{A}$ is the variety of abelian groups. For $s \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_s$ means the variety of abelian groups of exponent s.

Theorem 1. Let G be a countable group such that the abelianization G_{ab} is a free abelian group. Then G embeds in some 2-generated subgroup H of the Cartesian wreath product $GWr\mathbb{Z}$.

Corollary 2.

1. Let $G \in \mathcal{M}$ be a countable group such that the abelianization G_{ab} is a free abelian group. Then G embeds in some 2-generated group $H \in \mathcal{M}A$. In particular, every finitely generated group $G \in \mathcal{M}$ such that the abelianization G_{ab} is torsion-free, embeds in some 2-generated group $H \in \mathcal{M}A$.
2. Let G be a countable solvable group of derived length l such that the abelianization G_{ab} is a free abelian group. Then G embeds in some 2-generated solvable group H of length $l+1$. In particular, every finitely generated solvable group G of derived length l such that the abelianization G_{ab} is torsion-free, embeds in some 2-generated solvable group H of length $l+1$.
3. Every finitely generated group $G \in \mathcal{M}$ has a subgroup K of finite index that can be embedded in some 2-generated group $H \in \mathcal{M}A$. In particular, every finitely generated solvable group G of derived length l has a subgroup K of finite index that can be embedded in some 2-generated solvable group H of length $l+1$.

Theorem 3. Let G be a countable group such that the abelianization G_{ab} is a direct product of a free abelian group and a finite group. Then G embeds in some 4-generated subgroup H of the Cartesian wreath product $G\ Wr\ \mathbb{Z}^3$.

Corollary 4.

1. Let $G \in \mathcal{M}$ be a countable group such that the abelianization G_{ab} is a direct product of a free abelian group and a finite group. Then G embeds in a 4-generated subgroup $H \in \mathcal{M}A$. In particular, every finitely generated group $G \in \mathcal{M}$ embeds in some 4-generated group $H \in \mathcal{M}A$.
2. Let G be a countable solvable group of derived length l such that the abelianization G_{ab} is a direct product of a free abelian group and a finite group. Then G embeds in a 4-generated solvable group H of length $l+1$. In particular, every finitely generated solvable group G of derived length l embeds in some 4-generated solvable group H of length $l+1$.

Theorem 5. Let G be a group generated by a finite set $u_1, ..., u_m$ of elements of finite orders $l_1, ..., l_m$, respectively. Then G embeds in some 4-generated subgroup H of $\tilde{W}_s = G\ wr\ (\mathbb{Z}_{s^2} \times \mathbb{Z}_s^2)$ where $s = \mathrm{lcm}(l_1^m, ..., l_m^m)$.

Corollary 6.

1. Let $G \in \mathcal{M}$ be a m-generated group of exponent e. Then G embeds in a 4-generated group $H \in \mathcal{M}\mathcal{A}_s$ where $s = e^{m+1}$, and so has exponent e^{m+2}.
2. Let $G \in \mathcal{M}$ be a finite group. Then G embeds in some 4-generated finite group $H \in \mathcal{M}A$. In particular, every finite solvable (p-) group G of derived length l embeds in some 4-generated finite solvable (p-) group H of length $l+1$.

The research was supported with a grant from the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10017

References

[1] G. Higman, B. H. Neumann, H. Neumann, Embedding theorems for groups, *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 247–254.

[2] The Kourovka Notebook. Unsolved problems in group theory. (Editors E. I. Khukhro and V. D. Mazurov). **19**, (Russian Academy of Sciences. Siberian Branch. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia, 2018).

[3] V. H. Mikaelian, A. Yu. Olshanskii, On abelian subgroups of finitely generated metabelian groups, *J. Group Theory*, **16** (2013), 695–705.

[4] B. H. Neumann, H. Neumann, Embedding theorems for groups, *J. London Math. Soc.*, **34** (1959), 465–479.

[5] V. A. Roman'kov, Embedding theorems for nilpotent groups, *Siberian Math. Journal*, **13** (1972), 859–867.

[6] V. A. Roman'kov, An embedding theorem for polycyclic groups, *Math. Notes*, **14** (1973), 983–984.

[7] V. A. Roman'kov, Essays in group theory and cryptology: solvable groups, Dostoevsky Omsk State Univ. Publisher, 2017.

On groups of automorphisms of antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\mu = 1$ [1]

Tsiovkina L. Yu.
IMM UB RAS
tsiovkina@imm.uran.ru

The present talk is devoted to the problem of the classification of antipodal distance-regular graphs of diameter three with edge-transitive automorphism groups.

In the talk, we will study admissible automorphisms of antipodal distance-regular graphs of diameter three satisfying $\mu = 1$, and find several restrictions on the automorphism group of such a graph in case when the group acts 2-homogeneously on the fibres, correcting a previous result from [1]. As a corollary, we will provide a classification of antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\mu = 1$ that possess an arc-transitive or edge-transitive group of automorphisms. The study of the subclass of graphs with $\mu = 1$ is also motivated by the problem of classification of geodetic graphs of diameter two, stated in [2]. The talk is based on the joint work in progress with A.A. Makhnev and A.L. Gavrilyuk.

References

[1] A. L. Gavrilyuk, A. A. Makhnev, Geodesic graphs with homogeneity conditions, *Doklady Mathematics*, **78** (2008), 743–745.

[2] A. Blokhuis, A. E. Brouwer, Geodetic graphs of diameter two, *Geom. Dedicata*, **25** (1988), 527–533.

[1] This research is supported by the Russian Science Foundation under grant no. 20-71-00122.

Finite groups with partially σ-subnormal and σ-permutable subgroups

Zakrevskaya V. S.
Francisk Skorina Gomel State University
tory.zakreuskaya@gmail.com

All considered groups are finite and G always denotes a finite group.

We say that a subgroup A of G is *strongly* $\mathfrak{U}$*-subnormal* [1] in G if either A is normal in G or $A_G \neq A^G$ and every chief factor of G between A_G and A^G is cyclic.

The symbol $\sigma(n)$ denotes the set $\{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. G is said to be: *σ-primary* [2] if G is a σ_i-group for some $i \in I$; *σ-decomposable* (Shemetkov [4]) or *σ-nilpotent* (Skiba [2])if G is σ_i-closed for all i; *σ-soluble* [2] if every chief factor of G is σ-primary.

A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is a *complete Hall σ-set* of G [3] if every member $\neq 1$ of $\mathcal{H}$ is a Hall σ_i-subgroup of G for some $\sigma_i \in \sigma$ and $\mathcal{H}$ contains exactly one Hall σ_i-subgroup of G for every $\sigma_i \in \sigma(G)$: G is said to be *σ-full* if G possesses a complete Hall σ-set.

A subgroup A of G is called [2]: *σ-subnormal* in G [2] if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_t = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ is σ-primary for all $i = 1, \ldots, t$; *σ-permutable* in G if G is σ-full and A permutes with all Hall σ_i-subgroups of G for all i.

In the classical case when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ (we use here the notations in [3]), σ-permutable subgroups, are also called *S-permutable* [5], and in this case σ-subnormal subgroups are exactly subnormal subgroups of the group. Note also in passing that every σ-permutable subgroup is also σ-subnormal [2].

The σ-subnormal and σ-permutable subgroups proved to be very useful and found many applications in the study of various classes of generalized solvable groups (see, for example, [1–3, 6, 12–16]). In this paper, we consider the following generalization of the concept of a σ-subnormal subgroup.

We say that a subgroup A of G is *partially σ-subnormal* (respectively *partially subnormal*) in G if $A = \langle L, T \rangle$, where L is a strongly $\mathfrak{U}$-subnormal subgroup and T is a σ-subnormal (respectively partially subnormal) subgroup of G.

Recall that if $M_n < M_{n-1} < \ldots < M_1 < M_0 = G$ (*), where M_i is a maximal subgroup of M_{i-1} for all $i = 1, \ldots, n$, then the chain (*) is said to be a *maximal chain of G of length n* and M_n ($n > 0$), is an *n-maximal subgroup* of G.

The relationship between n-maximal subgroups (where $n > 1$) of G and the structure of G was studied by many authors. One of the earliest results in this line research was obtained by Huppert in the article [8] who established the supersolubility of the group whose all second maximal subgroups are normal. In the same article Huppert proved also that if all 3-maximal subgroups of G are normal in G, then the commutator subgroup G' of G is a nilpotent group and the principal rank of G is at most 2. These two results were developed by many authors. Spencer studied [9] the groups G whose every n-maximal chain includes at least one proper subnormal subgroup of G. Mann proved [10] that if all n-maximal subgroups of a soluble group G are subnormal and $n \leq |\pi(G)| - 1$, then G is nilpotent; but if $n \leq |\pi(G)| + 1$, then G is ϕ-dispersive for some ordering ϕ of the set of all primes $\mathbb{P}$. Finally, in the case $n \leq |\pi(G)|$ Mann described G completely.

Our main goal here is to obtain generalizations of some of these results on the base of the following

Theorem 1. (i) *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 3, one of M_3, M_2 and M_1 is partially σ-subnormal in G, then G is σ-soluble.*

(ii) *If every 2-maximal subgroup of G is σ-permutable, then G is either σ-nilpotent or supersoluble.*

Corollary 1. (Spencer [9]). *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 3, one of M_3, M_2 and M_1 is subnormal in G, then G is soluble.*

Corollary 2. (Agrawal [11]). *If every 2-maximal subgroup of G is S-permutable in G, then G is supersoluble.*

Corollary 3. (Huppert [8]). *If every 3-maximal subgroup of G is normal in G, then G is soluble.*
Corollary 4. (Guo, Skiba in [12]). *If in every maximal chain $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ of G of length 3, one of M_3, M_2 and M_1 is σ-subnormal in G, then G is σ-soluble.*

References

[1] A. N. Skiba, On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets, *J. Algebra*, **550** (2020), 69–85.

[2] A. N. Skiba, On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups, *J. Algebra*, **436** (2015), 1–16.

[3] A. N. Skiba, Some characterizations of finite σ-soluble $P\sigma T$-groups, *J. Algebra*, **495** (2018), 114–129.

[4] L. A. Shemetkov, Formations of finite groups, *Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature*, 1978.

[5] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad, Products of Finite Groups, Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010.

[6] J. C. Beidleman, A. N. Skiba, On τ_σ-quasinormal subgroups of finite groups, *J. Group Theory*, **20**:5 (2017), 955–964.

[7] W. Guo, Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups, Heidelberg-New York-Dordrecht-London: Springer, 2015.

[8] B. Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, *Math. Z.*, **60** (1954), 409–434.

[9] A. E. Spencer, Maximal nonnormal chains in finite groups, *Pacific J. Math.*, **27**:1 (1968), 167–173.

[10] A. Mann, Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal, *Trans Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 395–409.

[11] R. K. Agrawal, Generalized center and hypercenter of a finite group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **54** (1976), 13–21.

[12] W. Guo, A. N. Skiba, Finite groups whose n-maximal subgroups are σ-subnormal, *Science in China. Math.*, **60**:12 (2019), 1355–1372.

[13] V. A. Kovaleva, A criterion for a finite group to be σ-soluble, *Comm. Algebra*, **46**:12 (2019), 5410–5415.

[14] M. M. Al-Shomrani, A. A. Heliel, A. Ballester-Bolinches, On σ-subnormal closure, *Comm. Algebra*, **48** (2020), 3624–3627.

[15] A. Ballester-Bolinches, S. F. Kamornikov, M. C. Pedraza-Aguilera, V. Perez-Calabuig, On σ-subnormality criteria in finite σ-soluble groups, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, **114**:94 (2020), 1–9.

[16] S. F. Kamornikov, V. N. Tutyanov, σ-subnormal subgroups of finite groups, *Siberian Math. J*, **61**:2 (2020), 337–343.