

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УФИМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ

**ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
С ВЦ УНЦ РАН**

Выпуск 1

Уфа
РИЦ БашГУ
2008

ББК В22
УДК 517

Ответственный редактор: чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор В.В. Напалков

Ответственный за выпуск: доктор физико-математических наук, профессор Р.С. Юлмухаметов

Члены ред. коллегии сборника: Р.А. Башмаков, Р.Н. Гарифуллин, О.А. Кривошеева, А.А. Румянцева

Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН: Выпуск 1 — Уфа: РИО БашГУ, 2008. — 236 с.
ISBN 978-5-7477-2045-9

В первый выпуск сборника трудов вошли материалы, представленные участниками международной конференции "Нелинейные уравнения и комплексный анализ" (1-5 декабря 2008г.).

© БашГУ, 2008
© ИМВЦ УНЦ РАН, 2008
© Коллектив авторов, 2008

Содержание

Н. Т. Ахтямов, И. Х. Мусин ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ	5
Н. К. Бакиров ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ГЛАДКОГО ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА	10
С. В. Баталов, Е. М. Маслов, А. Г. Шагалов РЕЗОНАНСНЫЙ ЗАХВАТ ФАЗЫ В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА	14
Р. А. Башмаков, Р. С. Юлмухаметов УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ БАЗИСОВ РИССА ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(I, \exp h)$	17
Н. Ф. Валеев, Э. Р. Нугуманов, С. А. Рабцевич ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ	28
Н. Ф. Валеев, С. А. Рабцевич, Э. Р. Нугуманов О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО СПЕКТРУ	35
Н. Ф. Валеев О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПО СПЕКТРУ	45
А. М. Гайсин, И. Г. Кинзябулатов НЕПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ НА ДУГАХ	50
Р. Н. Гарифуллин ПОСТРОЕНИЕ ВНЕШНЕГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СУБГАРМОНИЧЕСКОМ АВТОРЕЗОНАНСЕ $n = 2$	61
И. И. Голичев ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ТИПА НЬЮТОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА, СХОДЯЩЕГОСЯ С ЛЮБОГО НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ	70
А. М. Дильмухаметова, В. В. Напалков ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	76
А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ДАРБУ	84
Л. С. Ибрагимова, С. А. Муртазина, М. Г. Юмагулов КОРАЗМЕРНОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ОПЕРАТОРНЫХ АНАЛОГОВ	93
К. П. Исаев, А. А. Путинцева, Р. С. Юлмухаметов ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ АСИМПТОТИКОЙ	100
Н. А. Казаева, В. И. Луценко, А. З. Минисламов ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ	108
Л. А. Калякин, А. Т. Харисов, М. А. Шамсутдинов АВТОРЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРЕЦЕССИЕЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ В ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЁНКЕ	116
В. Э. Ким ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ	126
О. А. Кривошеева ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП Л.ЭЙЛЕРА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ	131
С. Г. Мерзляков О СВЯЗИ КОРНЕЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЕЕ РОСТОМ	141
Ю. Г. Михайлова КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ СЕРИЙ A_n и B_n	146
Р. Д. Муртазина ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ МСГ	156
И. Х. Мусин, П. В. Федотова ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ГОЛОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ В $\mathbb{C}^n$	165
В. В. Напалков, А. А. Румянцева, Р. С. Юлмухаметов ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА $\mathbb{R}$	173
В. В. Напалков(мл.) СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ВЕСОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ	185
Б. И. Сулейманов О ФУНКЦИЯХ ВОЛНОВЫХ КАТАСТРОФ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРИРУЕМЫМ УРАВНЕНИЯМ	192

В. А. Таров. НЕСКОЛЬКО СВОЙСТВ ПРАВИЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ	201
С. В. Хабиров ДВИЖЕНИЕ ГАЗА БЕЗ РАСХОЖДЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ	208
Н. Н. Юсупова ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ЛАКУНАМИ ФЕЙЕРА	216
I. T. Habibullin ON THE CLASSIFICATION OF DARBOUX INTEGRABLE CHAINS	224

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Т. Ахтямов, И. Х. Мусин

*СамГУПС, Институт Математики с ВЦ УНЦ РАН,
nail9119@rambler.ru, musin@matem.anrb.ru*

Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ пусть $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ – евклидова норма в $\mathbb{C}^n$. $H(\mathbb{C}^n)$ – совокупность целых функций в $\mathbb{C}^n$.

Для функции $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|} = +\infty,$$

пусть $\varphi^*(\lambda) = \sup_{\xi \in \mathbb{C}^n} (Re \langle \lambda, \xi \rangle - \varphi(\xi))$. Функция φ^* называется преобразованием Юнга-Фенхеля функции φ [1].

С функцией φ , выпуклой в $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющей вышеприведённому условию, свяжем пространство

$$E(\varphi) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi(z)}} < \infty\}.$$

С нормой $\|\cdot\|_\varphi$ пространство $E(\varphi)$ – банахово.

Определим весовое пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$ следующим образом. Пусть числа μ и ρ таковы, что $0 < \mu \leq \rho$. Пусть $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ – совокупность выпуклых функций в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1). $\exists A > 0 \exists B > 0 \forall m \in \mathbb{N} \exists C_m > 0 \exists D_m > 0$:

$$C_m \|z\|^\mu - D_m \leq \varphi_m(z) \leq A \|z\|^\rho + B, \quad z \in \mathbb{C}^n;$$

2). $\exists a > 0 \forall m \in \mathbb{N} \exists b_m > 0$

$$\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z) \geq a \ln(1 + \|z\|) - b_m, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Заметим, что $\forall m \in \mathbb{N}$ справедливо включение $E(\varphi_{m+1}) \subset E(\varphi_m)$. Действительно, пусть $f \in E(\varphi_{m+1})$. Тогда $\forall z \in \mathbb{C}^n$

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\varphi_{m+1}} e^{\varphi_{m+1}(z)} \leq \|f\|_{\varphi_{m+1}} e^{b_m} e^{\varphi_m(z)}.$$

Следовательно, $\|f\|_{\varphi_m} \leq e^{b_m} \|f\|_{\varphi_{m+1}}$, $f \in E(\varphi_{m+1})$. Итак, $f \in E(\varphi_m)$. Кроме того, вложение $i_m : E(\varphi_{m+1}) \rightarrow E(\varphi_m)$ непрерывно.

Пусть $E(\Phi) = \bigcap_{m=1}^{\infty} E(\varphi_m)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $E(\Phi)$ становится линейным пространством. Наделим $E(\Phi)$ топологией проективного предела пространств $E(\varphi_m)$. Базис окрестностей нуля в $E(\Phi)$ образуют множества

$$U_{m,\delta} = \{f \in E(\Phi) : \|f\|_{\varphi_m} < \delta\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0.$$

Отметим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}^n$ функция $f_\lambda(z) = e^{<\lambda, z>}$ принадлежит $E(\Phi)$. Действительно, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\|f_\lambda\|_{\varphi_m} = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|e^{<\lambda, z>}|}{e^{\varphi_m(z)}} = e^{\varphi_m^*(\lambda)} < \infty.$$

Пусть $\Phi^* = \{\varphi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$. Поскольку $\varphi_m^*(z) \leq \varphi_{m+1}^*(z) + b_m$ всюду в $\mathbb{C}^n$, то $\forall m \in \mathbb{N}$ пространство $E(\varphi_m^*)$ непрерывно вложено в $E(\varphi_{m+1}^*)$.

Пусть $E(\Phi^*) = \bigcup_{m=1}^{\infty} E(\varphi_m^*)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $E(\Phi^*)$ становится линейным пространством. Наделим $E(\Phi^*)$ топологией индуктивного предела нормированных пространств $E(\varphi_m^*)$.

Через $E'(\Phi)$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $E(\Phi)$, через $E^*(\Phi)$ – сильное сопряженное пространство к пространству $E(\Phi)$.

Преобразованием Лапласа функционала $S \in E'(\Phi)$ называется функция $\hat{S}(\lambda) = (S, e^{<\lambda, z>})$, $\lambda \in \mathbb{C}^n$.

В работе [2] была доказана

Теорема А. *Отображение $L : S \in E^*(\Phi) \rightarrow \hat{S}$ устанавливает топологический изоморфизм пространств $E^*(\Phi)$ и $E(\Phi^*)$.*

Отметим, что для различных весовых пространств целых функций задача описания сопряженного изучалась в работах Б.А. Тейлора [3], В.С. Ткаченко [4], Ф. Хаслингера [5], С.В. Попёнова [6]. Наиболее сильный

результат среди упомянутых содержится в работе [6], в которой (наряду с другими условиями на веса) допускался линейный относительно $\|z\|$ зазор между весовыми функциями. В отличие от работ [3-6], в нашем случае допустим более узкий зазор между весовыми функциями (он может быть логарифмическим). Однако, уменьшая зазор, мы вынуждены оперировать весовыми функциями (специального) полиномиального роста. Кроме того, наше пространство может не быть инвариантным относительно сдвига. Таким образом, $E(\Phi)$ может не относиться к классу локализуемых аналитически равномерных пространств в смысле Эренпрайса-Паламодова-Хансена. Однако легко проверить, что оно инвариантно относительно дифференцирования. Кроме того, в пространстве $E(\Phi)$ операции умножения на полиномы непрерывны.

В данной работе изучаются дифференциальные операторы с частными производными в пространстве $E(\Phi)$.

Пусть $P(z) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha z^\alpha$ – полином степени N , $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D_z^\alpha$ –

соответствующий дифференциальный оператор конечного порядка.

Основные результаты работы – следующие две теоремы.

Теорема 1. *Оператор $P(D)$ сюръективен в пространстве $E(\Phi)$.*

Через E обозначим множество экспоненциальных полиномов вида $Q(z) \exp \langle z, Q \rangle$ (Q – полином), принадлежащих ядру оператора $P(D)$. Пусть W – множество всех решений уравнения $P(D)(f) = 0$, принадлежащих пространству $E(\Phi)$.

Теорема 2. *Линейная оболочка множества E плотна в W .*

Доказательство теорем 1 и 2 проводится стандартными методами теории двойственности (см, напр., [9]) (и здесь не приводится) на основе следующих утверждений.

В [2] были доказаны следующие четыре леммы.

Лемма 1. *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ вложения $i_m : E(\varphi_{m+1}) \rightarrow E(\varphi_m)$, $j_m : E(\varphi_m^*) \rightarrow E(\varphi_{m+1}^*)$ вполне непрерывны.*

Таким образом, $E(\Phi)$ является пространством (M^*) , а пространство $E(\Phi^*)$ – пространством (LN^*) (см. [7]).

Лемма 2. *Пусть $\nu > 1$, а функция $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при некоторых положительных C_φ и D_φ всюду в $\mathbb{C}^n$ $\varphi(z) \geq C_\varphi \|z\|^\nu - D_\varphi$.*

Тогда функция φ^ удовлетворяет условию: существует положительное число M такое, что*

$$|\varphi^*(z) - \varphi^*(\zeta)| \leq M$$

для всех $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ таких, что $\|z - \zeta\| \leq \frac{1}{(1+\|\zeta\|)^{\frac{1}{v-1}}}$.

Лемма 3. Существует число $h > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ при некотором $l_m > 0$

$$\varphi_{m+1}^*(z) - \varphi_m^*(z) \geq h \ln(1 + \|z\|) - l_m, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Лемма 4. Полиномы плотны в $E(\Phi)$.

В следующей лемме (лемме Эренпрайса-Мальгранжа)(см., напр., [8]) $B(z, r) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \|\zeta - z\| < r\}$.

Лемма 5. Пусть p – полином степени m . Тогда существует число $c > 0$ такое, что для любых $r > 0, z \in \mathbb{C}^n$ и для любой функции $f \in H(B(z, r))$ такой, что $\frac{f(z)}{p(z)} \in H(B(z, r))$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{f(z)}{p(z)} \right| \leq cr^{-m} \sup_{\zeta \in B(z, r)} |f(\zeta)|.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00779, 08-01-97023), программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант Президента Российской Федерации НШ 3081.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*, М., Мир, 1973.
2. Ахтямов Н. Т. *О весовом пространстве целых функций в $\mathbb{C}^n$* // Матем. заметки. – 2008. – Т. 83. – № 4. – С. 483–492.
3. Taylor B. A. *The fields of quotients of some entire functions*, Entire functions and related parts of analysis // Amer. Math. Soc., Providence, R.I. – 1968. – Р. 468–474.
4. Ткаченко В. С. *Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста* // Матем сб. – 1977. – Т. 102. – № 3. – С. 435–456.
5. Haslinger F. *Weighted spaces of entire functions* // Indiana Univ. Math. J. – 1986. – V. 35. – Р. 193–208.

6. Попёнов С.В. *О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^m$* // Матем. заметки. – 1986. – Т. 40. – № 3. – С. 374-384.
7. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // сб. пер. Математика. – 1957. – Т. 1. – № 1. – С. 60-77.
8. Hansen S. *On the "Fundamental Principle" of L. Ehrenpreis* // Partial differential equations. Banach center publications. Warsaw. PWN-Polish Scientific Publishers. – 1983. – V. 10. – P. 185-203.
9. Напалков В.В. *Уравнения свёртки в многомерных пространствах*, М., Наука, 1982. – 240 с.

ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА ГЛАДКОГО ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Н. К. Бакиров

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
bakirovnik@rambler.ru*

Пусть $\xi(t), t \in [0, T]$ – дифференцируемый в среднем квадратичном гауссовский центрированный стационарный случайный процесс (сл.пр.) с ковариационной функцией $R(t, s) = R(t - s)$:

$$R(t) = 1 - \frac{\gamma_1 t^2}{2!} + \frac{\gamma_2 t^4}{4!} + \sum_{k=3}^4 \frac{\gamma_k t^{2k}}{(2k)!} + o(t^8), \quad t \rightarrow 0, \gamma_1 > 0. \quad (1)$$

Без ограничения общности считаем, что траектории сл.пр. $\xi(t)$ дифференцируемы соответствующее число раз. В работе рассматривается задача о близости вероятностей вида

$$\beta_i = P\{\xi(t) \leq a_i(t), \forall t \in [0, T]\}, \quad i = 1, 2,$$

где $a_i(t)$ – непрерывные функции. При различных дополнительных условиях оценки их близости могут быть получены, например, с использованием результатов работ [1]–[2] и других. Обозначим

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} - 1}, \quad a(t, s) = a_1(t)(1 - s) + a_2(t)s,$$

$$K(t, s) = \frac{\sigma + |a(t, s)\sqrt{\gamma_1} + a''(t, s)/\sqrt{\gamma_1}|}{\sqrt{2\pi}}.$$

Для определенности положим $T = 1$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1), а функции $a_i(t)$, $i = 1, 2$ трижды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, 1]$. Справедлива оценка

$$|\beta_2 - \beta_1| \leq \int_0^1 ds \int_0^1 dt K(t, s) \frac{|a_2(t) - a_1(t)|}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{a^2(t, s)}{2} \right\}.$$

Следствие. Полагая здесь $a_1(t) = x$, $a_2(t) = x + \Delta x$, $\forall t \in [0, 1]$, деля обе части неравенства на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем оценку для плотности распределения максимума сл.пр. $\xi(t)$ на отрезке $[0, 1]$: она не превосходит $\varphi(x)(\sigma + \sqrt{\gamma_1}|x|)/\sqrt{2\pi}$, где $\varphi(x)$ – плотность распределения стандартной гауссовской случайной величины (сл.в.). Данная оценка лучше универсальной оценки плотности распределения максимума гауссовского сл.пр. из работы [2], в чем нетрудно убедиться, подсчитав асимптотику в нуле интеграла Дадли (фигурирующего в оценке из [2]), кроме того наши оценки, в отличие от оценки из [2] справедливы на всей числовой оси, а также лучше оценки из [3], стр. 76, если $\gamma_1 = 1$, $\sigma < \sqrt{2\pi}$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$\begin{aligned} t_k &= \frac{k}{n}, \quad \xi_k = \xi(t_k), \quad a_k = a_1(t_k), \quad \Delta_k = a_1(t_k) - a_2(t_k), \\ k &= 1, 2, \dots, n, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad \Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n), \\ \delta &= (\delta(t_1), \delta(t_2), \dots, \delta(t_n)) \end{aligned}$$

и определим функционал $P_n(\delta) = P\{\xi(t_j) \leq a_1(t_j) - \delta(t_j), j = 1, 2, \dots, n\}$. Ясно, что

$$\beta_2 - \beta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n,$$

где $J_n = P_n(\Delta) - P_n(0)$. Для разности J_n имеем

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 \frac{d}{ds} P_n(s\Delta) ds, \\ \frac{d}{ds} P_n(s\Delta) &= \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_n} \frac{d}{ds} \phi(x - s\Delta) dx, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\phi(x)$ – плотность вероятностного распределения случайного вектора ξ . Производя дифференцирование плотности ϕ , получаем

$$\frac{d}{ds} \phi(x - s\Delta) = - \sum_{j=1}^n \Delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x - s\Delta), \quad \frac{d}{ds} P_n(s\Delta) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=1}^n \Delta_j \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} \dots \int_{-\infty}^{a_n} \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x - s\Delta) dx = \\
&= - \sum_{j=1}^n \Delta_j M_j p_j(a_j - s\Delta_j),
\end{aligned} \tag{3}$$

здесь

$$M_j = P \left\{ \eta_k \leq a_k, \forall k \neq j \mid \eta_j = a_j \right\}, \quad \eta_k = \xi_k + s\Delta_k, \tag{4}$$

$P\{\cdot|\cdot\}$ – условная вероятность, $p_j(\cdot)$ – плотность распределения сл.в. ξ_j . Обозначим

$$L_k(t) = L_k(t, s) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\xi(t) - a(t, s)), \quad k = 0, 1, 2,$$

$$U(\tau, t) = L_0(\tau) - R(\tau - t)L_0(t).$$

Заметим, что в силу гауссовости рассматриваемых процессов мы можем линейным преобразованием избавиться от условий в (4): $M_j = P\{D_j\}$, где

$$\begin{aligned}
D_j &= \{U(t_k, t_j) \leq 0, \forall k\} \subseteq \{U(t_{j-1}, t_j) \leq 0, U(t_{j+1}, t_j) \leq 0\} \subseteq \\
&\subseteq \{|L_1(t_j)| \leq -(\gamma_1 L_0(t_j) + L_2(t_j))/(2n) + B\delta_j/n^2\} \stackrel{def}{=} D_{jj},
\end{aligned}$$

здесь символом B и ниже обозначаются положительные константы, зависящие только от характеристик сл.пр. $\xi(t)$ и не обязательно одни и те же,

$$\delta_j = |L_0(t_j)| + \sup_{t \in [0,1]} |\xi'''(t)| + 1$$

и мы использовали разложение (1) и формулу Тейлора:

$$L_0(t_{j-1}) = L_0(t_j) - \frac{1}{n}L_1(t_j) + \frac{1}{2n^2}L_2(t_j) + \frac{1}{6n^3}O(\delta_j),$$

$$L_0(t_{j+1}) = L_0(t_j) + \frac{1}{n}L_1(t_j) + \frac{1}{2n^2}L_2(t_j) + \frac{1}{6n^3}O(\delta_j).$$

Используя далее работу [2], нетрудно получить оценку $P\{\delta_j \geq n^{1/2}\} \leq Bn^{-2}$ (здесь мы учли, что для сл.пр. $\xi'''(t)$ энтропийный интеграл Дадли сходится и легко оценивается). Случайный вектор $(\nu_1, \nu_2) \stackrel{def}{=} (L_1(t_j),$

– $\gamma_1 L_0(t_j)/2 - L_2(t_j)/2$) в силу предположения $\gamma_1 > 0$ (см. (1)) невырожден. Пусть $q(\cdot)$ – плотность распределения сл.в. ν_2 . Учитывая вышеуказанную оценку для распределения сл.в. δ_j , запишем для $\psi = \nu_1 - E\nu_1$, $E\psi^2 = E(\xi'(0))^2 = \gamma_1$, при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} nM_j &\leq nP\{D_{jj}\} \leq nP\{|\nu_1| \leq \nu_2/n + n^{-3/2}\} + o(1) \leq \\ &\leq nP\{|\nu_1 - E\nu_1| \leq \nu_2/n + n^{-3/2}\} + o(1) = \\ &= o(1) + n \int_{-\infty}^{\infty} q(y) P\{|\psi| \leq y/n + n^{-3/2}\} dy \leq \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} E|\nu_2 + n^{-1/2}| + o(1), \end{aligned} \quad (5)$$

здесь мы использовали: а) в третьем неравенстве симметричность и одновершинность распределения сл.в. ψ (ввиду ее гауссовости), б) независимость сл.в. ψ и ν_2 при записи интеграла (эти сл.в. не коррелируют) и в) грубую оценку под знаком интеграла для гауссовской центрированной сл.в. ψ :

$$P\{|\psi| \leq z\} = \int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} e^{-\frac{x^2}{2\gamma_1}} dx \leq \frac{2|z|}{\sqrt{2\pi\gamma_1}}.$$

Используя (5) и переходя в (2),(3) к пределу при $n \rightarrow \infty$ получаем утверждение теоремы с

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} E|\nu_2| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} E \left| \gamma_1 [\xi(t) - a(t, s)] + \xi''(t) - a''(t, s) \right| \leq \\ &\leq \frac{|\gamma_1 a(t, s) + a''(t, s)|}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} E \left| \gamma_1 \xi(t) + \xi''(t) \right| = \\ &= \frac{|\gamma_1 a(t, s) + a''(t, s)|}{\sqrt{2\pi\gamma_1}} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дмитриевский В.А. *Оценки распределения максимума гауссовского поля*. В сб.: Случайные процессы и поля. М.: Изд-во МГУ, 1979, С.22-31.
2. Лифшиц М.А. *О распределении максимума гауссовского процесса* // Теория вероятностей и ее примен. – 1986. – Т. 31. – №1. – С.134-142.
3. Azais J.-M., Wschebor M. *On the regularity of the distribution of the maximum of one-parameter Gaussian processes* // Probability Theory and Related Fields. – 2001. – V. 119, – PP.70–98.

РЕЗОНАНСНЫЙ ЗАХВАТ ФАЗЫ В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

С. В. Баталов¹, Е. М. Маслов², А. Г. Шагалов³

^{1,3} *Институт физики металлов УрО РАН, г. Екатеринбург,
svbatalov@gmail.com, shagalov@imp.uran.ru*

² *ИЗМИРАН, Московская обл., г. Троицк, zheka@izmiran.ru*

В данной работе мы исследовали воздействие на солитон нелинейного уравнения Шредингера внешнего волнового возмущения с медленно изменяющейся частотой. Целью работы был поиск условий, при которых возможно управление амплитудой солитона НУШ посредством явления автофазировки (авторезонанса). Исходное уравнение имело вид:

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = \varepsilon e^{ikx+i\psi(t)}, \quad (0 < \varepsilon \ll 1).$$

Здесь $\dot{\psi}(t) = \Omega(t)$ – частота накачки, $\dot{\Omega} = \alpha$, $|\alpha| \ll 1$. При $\varepsilon = 0$ уравнение имеет односолитонное решение. В адиабатическом приближении при $\varepsilon \neq 0$ решение представляется в виде $u(x, t) = \varphi(x, t) + \chi(x, t)$, где $\varphi(x, t) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$). Локализованная часть решения имеет вид

$$\varphi(x, t) = \frac{A}{\text{ch} z} e^{i\Phi},$$

где $\Phi = \frac{V}{A}z + \theta$, $z = A(x - \xi)$. Входящие в это выражение величины имеют следующий смысл: A – амплитуда локализованной волны, ξ – координата максимума огибающей, V – (при $\varepsilon = 0$) скорость перемещения волны.

Индукцированная волна $\chi(x, t)$ имеет вид (с ошибкой порядка $O(\varepsilon\alpha)$)

$$\chi(x, t) = -\frac{2\varepsilon}{2\Omega + k^2} e^{ikx+i\psi(t)}.$$

При помощи вариационного принципа была получена система четырех дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая эволюцию параметров солитона с точностью до членов порядка ε . Идентичная система уравнений получается с использованием теории возмущений, основанной на обратной задаче рассеяния.

Было установлено, что полученная система уравнений обладает интегралом движения $P = A(V - k) = \text{const}$ (закон сохранения "импульса"), что позволило свести задачу к решению только двух уравнений:

$$A_t = -\varepsilon \frac{g(A)}{2\Omega + k^2} \sin \delta, \quad (1)$$

$$\delta_t = \Delta\omega - \varepsilon \frac{g'(A)}{2\Omega + k^2} \cos \delta, \quad (2)$$

где введены обозначения $\delta = \theta - \psi - k\xi$, $g(A) = A^2 F\left(\frac{P}{A^2}\right)$, $F(x) = \pi(1+x^2)\text{sech}\frac{\pi x}{2}$, $\Delta\omega = \frac{1}{2A^2}(A^4 - k^2 A^2 + P^2) - \Omega$. Нетрудно увидеть, что это Гамильтонова система уравнений. Согласно результатам численного интегрирования, полученная система уравнений хорошо описывает поведение солитона НУШ (при не слишком малых амплитудах A) на временах $0 \leq t \lesssim \varepsilon^{-1}$.

Дальнейшее исследование полученной системы уравнений проводилось в приближении нелинейного маятника. Дифференцируя уравнение (2) и используя (1), получим уравнение второго порядка. Поскольку захват фазы происходит на начальных временах, почти сразу после включения возмущения, коэффициенты в последнем уравнении можно взять в момент $t = 0$. В результате получим уравнение нелинейного маятника

$$\delta_{\tau\tau} = \lambda \sin \delta - \beta, \quad (0 \leq \tau \ll O(\varepsilon^{-1/2})) \quad (3)$$

где $\tau = \varepsilon^{1/2}t$ – медленное время, $\beta = \alpha/\varepsilon$,

$$\lambda = - \left[\frac{(\Delta\omega)'g(A) - \Delta\omega g'(A)}{2\Omega + k^2} \right]_{t=0},$$

штрих обозначает дифференцирование по A . Отметим, что как β , так и λ могут иметь произвольный знак.

Для существования стационарных точек на фазовой плоскости нелинейного маятника необходимо, чтобы $|\beta/\lambda| \leq 1$, в противном случае решения $\delta(\tau)$ быстро растут со временем, захвата фазы не происходит. Однако указанное условие не является достаточным.

Достаточное условие захвата фазы состоит в том, чтобы начальное состояние маятника на фазовой плоскости находилось внутри какой-либо сепаратрисной петли. Замкнутые траектории внутри петли соответствуют периодическим решениям, то есть режиму автофазировки. Для таких решений амплитуда солитона будет в среднем расти, если $\beta/\lambda < 0$ и убывать, если $\beta/\lambda > 0$.

Анализ показывает, что достаточное условие автофазировки в нелинейном маятнике описывается уравнением вида

$$\cos \delta + \frac{\beta}{\lambda} \delta = -\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2} + \frac{\beta}{\lambda} \left((2n+1)\pi - \arcsin \frac{\beta}{\lambda} \right), \quad (4)$$

где δ – начальное значение фазы в (3), целое число n должно быть выбрано определенным образом. А именно, при $\beta < 0$, $\lambda < 0$ в последнем уравнении следует брать $n = 0$ ($0 \leq \delta(0) < \pi$) и $n = 1$ ($\pi \leq \delta(0) \leq 2\pi$). Захват фазы происходит при $\beta/\lambda < (\beta/\lambda)_{cr}$, где $(\beta/\lambda)_{cr}$ – решение уравнения (4). Для трех других комбинаций знаков β и λ также установлены необходимые и достаточные условия автофазировки, аналогичные приведенным. Найденные условия подтверждаются численным моделированием исходного НУШ.

Подробный вывод уравнений (1),(2) можно найти в [1]. Детальный анализ условий автофазировки в модели нелинейного маятника (3) приведен в [1,2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баталов С., Маслов Е., Шагалов А. *Автофазировка солитонов, ЖЭТФ* (в печати).
2. Маслов Е., Калякин Л., Шагалов А. *Резонансный захват фазы брызга внешним возмущением*, ТМФ, 2007, т. 152.

УСЛОВИЯ ОТСУТСТВИЯ БАЗИСОВ РИССА ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(I, \exp h)$

Р. А. Башмаков, Р. С. Юлмухаметов

*Башкирский государственный университет,
Bashmakov_Rustem@mail.ru, Yulmukhametov@mail.ru*

Пусть I — интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале.

Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z, r)$ обозначим круг $\{w : |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z, r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z, r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f, z, r)$ — расстояние от функции f до подпространства гармонических в $B(z, r)$ функций:

$$d(f, z, r) = \inf\{\|f - H\|_r, H - \text{гармонична в } B(z, r)\}.$$

Если $u(x)$ — выпуклая функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$, то функция $u(w) = u(\operatorname{Re} w)$ является непрерывной функцией в вертикальной полосе $I + i\mathbb{R}$ на плоскости. Для положительного числа p положим

$$\tau(u, z, p) = \sup\{r : d(u, z, r) \leq p\},$$

$$\rho_2(u, x, p) = \sup\left\{t > 0 : \int_{x-t}^{x+t} |u'(\tau) - u'(x)| d\tau \leq p\right\}.$$

Из результатов работы [3] следуют, что величины $\tau(u, z, p)$ и $\rho_2(u, \operatorname{Re} z, p)$ эквивалентны.

Пусть далее $L^2(I, \exp h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I , удовлетворяющих условию

$$\|f\| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt} < \infty.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_I f(t) \overline{g(t)} e^{-2h(t)} dt.$$

Семейство $\{e^{\lambda_k t}, k = 1, 2, \dots\}$ называется безусловным базисом в пространстве $L^2(I, \exp h)$, если

- 1) семейство $\{e^{\lambda_k t}, k = 1, 2, \dots\}$ полно в пространстве $L^2(I, \exp h)$;
- 2) существуют положительные постоянные m, M такие, что для любой конечной последовательности $a_k \in \mathbb{C}$ справедлива двусторонняя оценка

$$m \sum_k |a_k|^2 \|e^{\lambda_k t}\|^2 \leq \left\| \sum_k a_k e^{\lambda_k t} \right\|^2 \leq M \sum_k |a_k|^2 \|e^{\lambda_k t}\|^2.$$

Мы здесь придерживаемся определения из работы [1]. Как отмечено в этой работе, если система $\{e^{\lambda_k t}\}$ образует безусловный базис в пространстве $L^2(I, \exp h)$, то любая функция $f \in L^2(I, \exp h)$ единственным образом разлагается в безусловно (перестановочно) сходящийся ряд по этой системе:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k t}, \quad t \in I.$$

Воспользуемся следующей теоремой (см. [2])

Теорема. Пусть $h(x)$ — выпуклая функция на интервале I вещественной оси.

$$J = \{x : \tilde{h}(x) = \sup_{t \in I} (xt - h(t)) < \infty\}$$

$$K(\lambda) = \int_I e^{2xt - 2h(t)} dt = \|e^{\lambda t}\|^2, \quad \lambda = x + iy.$$

$L(\lambda)$ — функция, аналитическая в полосе $J + i\mathbb{R}$, с простыми нулями $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, при некотором P удовлетворяющая двусторонней оценке

$$\frac{1}{P} K(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq P K(\lambda), \quad (1)$$

$$\tau(\lambda) = \tau(\ln K, \lambda, \ln 5P)$$

Тогда в любом ограниченном множестве B , содержащем хотя бы две из точек λ_k , $k = 1, 2, \dots$, найдется точка λ_n так, что

$$\sum_{\lambda_k \in B, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2} \leq \frac{(5P)^{12}}{\tau^2(\lambda_n)}. \quad (2)$$

Пользуясь этой теоремой можно показать, что существование базисов Рисса из экспонент в рассматриваемых пространствах скорее исключение, чем правило.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого $p > 0$ существуют последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел τ_m , $m = 1, 2, \dots$, так, что*

1) *для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$*

$$\delta \tau_m \leq \tau(\ln K(z), x, p) \leq \tau_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

2) *имеет место соотношение*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{\tau_m} = \infty,$$

тогда в пространстве $L^2(I, \exp h)$ не существует базиса Рисса из экспонент.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если условия теоремы выполнены для некоторого p , то эти условия выполнены для любого $p > 0$.

Допустим, что в пространстве $L^2(I, \exp h)$ система $\{e^{\lambda_k t}\}$ образует базис Рисса. Тогда существует целая функция с простыми нулями в точках λ_k , для которой выполняется соотношение.

$$\frac{1}{P} K(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2 K(\lambda_k)}{|L'(\lambda_k)|^2 |\lambda - \lambda_k|^2} \leq P K(\lambda).$$

Далее будем считать, что в условии теоремы в качестве числа p фигурирует число $\ln(5P)$. Совокупность точек λ_k обладает свойством (2). Возьмем произвольный индекс m . Пусть

$$\tau_m = \sup_{\lambda \in [a_m, b_m]} (\tau(\lambda)),$$

s_m — наибольшее натуральное число, такое, что

$$a_m + 4s_m\tau_m \leq b_m.$$

Тогда

$$a_m + 4(s_m + 1)\tau_m \geq b_m - a_m,$$

поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(a_m + s_m\tau_m) - a_m}{\tau_m} = \infty.$$

Для простоты записи впредь будем считать, что $a_m + s_m\tau_m = b_m$. При фиксированном индексе m рассмотрим систему $\mathcal{P}$, состоящую из квадратов со стороной $4\tau_m$

$$P_{ql} = \{z : a_m + 2l\tau_m \leq \Re z \leq a_m + 2(l+1)\tau_m, \quad 2q\tau_m \leq \Im z \leq 2(q+1)\tau_m\},$$

$$l = 0, 1, \dots, s_m - 1, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Два квадрата из этой системы будем называть смежными, если они имеют общую вершину. Пусть Q_1, Q_2 — два не смежных квадрата из данной системы и $z_1, w_1 \in Q_1, z_2, w_2 \in Q_2$. Тогда

$$|z_1 - z_2| \leq 4|w_1 - w_2|. \quad (1)$$

В самом деле, из того, что квадраты не смежные, следует, что $|w_1 - w_2| \geq 4\Delta\tau_m$ или

$$\tau_m \leq \frac{1}{4}|w_1 - w_2|.$$

Значит

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - w_1| + |w_1 - w_2| + |w_2 - z_2| \leq 8\sqrt{2}\tau_m + |w_2 - z_2| \leq 4|w_2 - z_2|.$$

Центр квадрата P_{ql} обозначим через ζ_{ql} . Каждый квадрат P_{ql} содержит круг $B(\zeta_{ql}, 2\tau_m)$, который, в свою очередь в условиях теоремы содержит круг $B(\zeta_{ql}, 2\tau(\zeta_{ql}))$. В этом круге содержится хотя бы одна точка из системы показателей λ_k . Возьмем достаточно большое N и через B_N обозначим объединение квадратов P_{ql} по всем q и l , $|l| \leq N$. Применим теорему 5 к системе λ_k и к множеству B_N . Найдется номер n такой, что выполняется соотношение

$$\sum_{\lambda_k \in B_N, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} < \frac{(5P)^{12}}{\tau^2(\lambda_n)}.$$

По условию 1) доказываемой теоремы отсюда следует оценка

$$\sum_{\lambda_k \in B_N, k \neq n} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|^2} < \frac{(5P)^{12}}{\delta^2 \tau_m^2}. \quad (2)$$

Пусть Q_0 — квадрат из системы $\mathcal{P}$, содержащий точку λ_n , а точка λ_k лежит в квадрате Q (из нашей системы), не смежном с Q_0 . Возьмем любую точку $\lambda \in Q$ и воспользуемся соотношением (1):

$$|\lambda_k - \lambda_n| \leq 4|\lambda - \lambda_n|$$

или

$$\frac{1}{16|\lambda - \lambda_n|^2} \leq \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2}.$$

Проинтегрируем это неравенство по λ по всему квадрату Q :

$$\frac{1}{16\tau_m^2} \int_Q \frac{1}{16|\lambda - \lambda_n|^2} dv(\lambda) \leq \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_n|^2}.$$

Через B'_N обозначим множество B_N , из которого удалены квадраты, смежные с Q_0 . Поскольку в каждом квадрате есть по крайней мере одна точка из системы показателей, то из последнего неравенства и из соотношения (23) получим

$$\int_{B'_N} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^2} dv(\lambda) \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2}.$$

Пусть $Q_0 = P_{sj}$ и для определенности предположим, что $j < 0$, $s \leq \frac{s_m}{2}$ и положим

$$\tilde{B}_N = \{\lambda : a_m + (s+2)\tau_m \leq \Re \lambda \leq b_m, (j+2)\tau_m \leq \Im \lambda \leq (N+1)\tau_m\}.$$

Тогда $\tilde{B}_N \subset B'_N$ поэтому выполняется неравенство

$$\int_{\tilde{B}_N} \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^2} dv(\lambda) \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2}.$$

Воспользуемся заменой переменных $\lambda - (a_m + (s+2)\tau_m + i(j+2)\tau_m) = \tau_m w$ и через w_0 обозначим образ точки λ_n при этой замене:

$$\int_0^{s_m-s-1} \int_0^{N+1} \frac{1}{|w - w_0|^2} dv(\lambda) \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2},$$

при этом для точки w_0 имеем $-2 \leq \operatorname{Re} w_0$, $\operatorname{Im} w_0 \leq -1$. Следовательно, можем считать, что $w_0 = -2 - 2i$ — левая часть в последнем неравенстве только уменьшится и неравенство сохранится. От индексов m , N зависят только пределы интегрирования, поэтому можем в последнем неравенстве перейти к пределу при $m, N \rightarrow \infty$. С учетом того, что

$$s_m = \frac{b_m - a_m}{\tau_m} \rightarrow \infty$$

и поскольку мы предполагаем, что $s \leq \frac{s_m}{2}$, то $s_m - s - 2 \geq \frac{s_m}{2} - 2 \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(x+2)^2 + (y+2)^2} dx dy \leq \frac{256(5P)^{12}}{\delta^2}.$$

Но интеграл слева расходящийся, получили противоречие.

Теорема доказана.

Данная теорема требует вычисления функции $K(x)$, что не всегда просто. Оказывается можно обойтись вычислением функции $\tilde{h}$.

Теорема 1a. Пусть I — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале,

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in I} (xt - h(t)).$$

Предположим, что для некоторого $p > 0$ существуют последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел t_m , $m = 1, 2, \dots$, так, что

1) для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$

$$\delta t_m \leq \tau(2\tilde{h}, x, p) \leq t_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

2) имеет место соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{t_m} = \infty.$$

Тогда в пространстве $L^2(I, \exp h)$ не существует базиса Рисса из экспонент.

Действительно, при некоторых константах $c, C > 0$ будет выполняться оценка

$$c \frac{e^{2\tilde{h}(x)}}{\tau(2\tilde{h}, x, p)} \leq K(x) \leq C \frac{e^{2\tilde{h}(x)}}{\tau(2\tilde{h}, x, p)}.$$

В условиях теоремы получаем

$$c \leq K(x)e^{-2\tilde{h}(x)t_m} \leq \frac{C}{\delta}.$$

Положим $C' = \max(|\ln c|, |\ln C - \ln \delta|)$. Тогда

$$|\ln K(x) - (2\tilde{h}(x) - \ln t_m)| \leq C', \quad x \in [a_m; b_m].$$

Очевидно, что $\tau(2\tilde{h}, x, p) = \tau(2\tilde{h} - t_m, x, p)$. Пусть $a'_m = a_m + t_m$, $b'_m = b_m - t_m$.

Положим $t'_m = \frac{p+C'}{p}t_m$, $\delta' = \frac{\delta p^2}{(p+C')^2}$. Последние неравенства дают

$$\delta' t'_m \leq \tau(\ln K, x, p) \leq t'_m, \quad x \in [a'_m; b'_m],$$

причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b'_m - a'_m}{t'_m} = \infty.$$

Таким образом выполнены условия теоремы 1 и теорема 1а доказана.

В формулировке последней теоремы использована величина $\tau(\lambda)$, которую не всегда просто вычислить. Докажем лемму, облегчающую вычисление величины $\tau(\lambda)$ в конкретных примерах.

Лемма. Пусть $u(x)$ — дважды дифференцируемая неотрицательная выпуклая функция на некотором интервале $I \subset \mathbb{R}$. Допустим, что для некоторой точки $y \in I$ при некоторых константах $A, B, C > 0$ выполняется соотношение

$$A \leq \frac{u''(x)}{(u''(y))} \leq B, \quad \text{когда } |x - y| \leq C \sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

Тогда

$$\min\left(C, \frac{p}{BC}\right) \sqrt{\frac{1}{u''(y)}} \leq \tau(u, y, p) \leq 32 \max\left(C, \frac{p}{AC}\right) \sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

Поскольку

$$u'(x) - u'(y) = u''(x^*)(x - y),$$

где x^* — точка между x, y , то в условиях теоремы имеем

$$Au''(y)|x - y| \leq |u'(x) - u'(y)| \leq Bu''(y)|x - y|, \quad \text{если } |x - y| \leq C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

Следовательно, для любого $r \in [0; C\sqrt{1/u''(y)}]$ верно

$$\begin{aligned} \int_{y-r}^{y+r} |u'(x) - u'(y)| &\leq Bu''(y) \int_{y-r}^{y+r} |x - y| = Bu''(y)r^2 \leq BC^2, \\ \int_{y-r}^{y+r} |u'(x) - u'(y)| &\geq Au''(y) \int_{y-r}^{y+r} |x - y| = Au''(y)r^2, \end{aligned}$$

Из первого неравенства вытекает оценка

$$\rho_2(u, y, BC^2) \geq C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

Воспользуемся неравенствами:

$$\rho_2(u, y, p) \geq \begin{cases} C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p \geq BC^2, \\ \frac{p}{BC}\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p \leq BC^2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\rho_2(u, y, p) \geq \min\left(C, \frac{p}{BC}\right) \sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

С другой стороны, при $r = C\sqrt{1/u''(y)}$ имеем

$$\int_{y-r}^{y+r} |u'(x) - u'(y)| dx \geq Au''(y)r^2 = AC^2,$$

поэтому

$$\rho_2(u, y, AC^2) \leq C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

Из определения характеристики $\rho_2(u, y, p)$ получаем:

$$\rho_2(u, y, p) \leq \begin{cases} C\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p \leq AC^2, \\ \frac{p}{AC}\sqrt{\frac{1}{u''(y)}}, & \text{если } p \geq AC^2. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом,

$$\rho_2(u, y, p) \leq \max\left(C, \frac{p}{AC}\right) \sqrt{\frac{1}{u''(y)}}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \min\left(C, \frac{p}{BC}\right) \sqrt{\frac{1}{u''(y)}} &\leq \rho_2(u, y, p) \leq \rho_2(u, y, 2p), \\ \rho_2(u, y, 2p) &\leq 2\rho_2(u, y, p) \leq 2 \max\left(C, \frac{p}{AC}\right) \sqrt{\frac{1}{u''(y)}}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получается утверждение леммы.

Теперь мы можем сформулировать полезный частный случай теоремы 1а.

Теорема 1б. Пусть I — произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале,

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in I} (xt - h(t)).$$

Предположим, что для некоторого $p > 0$ существуют последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел t_m , $m = 1, 2, \dots$, так, что

1) для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$

$$\delta t_m \leq \sqrt{\frac{1}{\tilde{h}''(x)}} \leq t_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

2) имеет место соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{t_m} = \infty.$$

тогда в пространстве $L^2(I, \exp h)$ не существует базиса Рисса из экспонент.

Примеры.

1. Пусть $I = \mathbb{R}$ и $h(t) = A|t|^\alpha$, где $\alpha \geq 1$.

1а. Если $\alpha > 1$, то

$$\tilde{h}(x) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{A\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} |x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

то есть сопряженные по Юнгу имеют вид $B|x|^\beta$, где $\beta > 1$ и определяется условием $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Тогда при $x \neq 0$

$$\sqrt{\frac{1}{\tilde{h}''(x)}} = \sqrt{\frac{1}{B\beta(\beta-1)}}|x|^{-\frac{\beta}{2}+1}$$

и условие 1 теоремы 1б выполняется, например, для последовательности промежутков $[n; 2n]$. Таким образом в пространствах $L^2(\mathbb{R}, e^{A|t|^\alpha})$ базисов Рисса из экспонент не существует.

1б. Если $\alpha = 1$, то есть $h(t) = A|t|$, то

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq A, \\ +\infty, & |x| > A, \end{cases}$$

и $\rho(\tilde{h}, x, 1) = 1 - |x|$. Следовательно, условия теоремы 1а не могут выполняться и утверждать, что в пространстве $L^2(\mathbb{R}, e^{A|t|})$ не существует базисов Рисса мы не можем.

2. Пусть $I = [-1; 1]$ и $h(t) = \frac{A}{(1-|t|)^\alpha}$, где $A > 0$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\tilde{h}(x) = |x| - B|x|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}, \quad B = \frac{A(\alpha+1)}{(A\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}$$

и

$$\sqrt{\frac{1}{\tilde{h}''(x)}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{B}(\alpha+1)}|x|^{\frac{\alpha-2}{2(\alpha+1)}}$$

и снова условие 1 теоремы 1б выполняется, например, для последовательности промежутков $[n; 2n]$. Таким образом в пространствах $L^2(\mathbb{R}, \exp \frac{A}{(1-|t|)^\alpha})$ базисов Рисса из экспонент не существует.

2а. В примере 2 возьмем $A = 0$. Тогда

$$h(t) = 0, \quad |t| \leq 1$$

то есть $L^2(I, e^{h(t)}) = L^2[-1; 1]$ и

$$\tilde{h}(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\rho(\tilde{h}, x, 1) \geq |x| + 1.$$

Пусть существует последовательность промежутков $[a_m; b_m]$, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Допустим, что $b_m > 0$, тогда для больших номеров m

$$b_m - a_m \geq 2\tau_m \geq 2\rho(\tilde{h}, b_m, 1) \geq 2b_m + 2,$$

значит,

$$a_m \leq -b_m - 2 < 0$$

и $0 \in [a_m; b_m]$. Тогда должно выполняться оценка $\rho(\tilde{h}, 0, 1) \geq \delta\tau_m$. Так как $\rho(\tilde{h}, 0, 1) = 1$, то $\delta \leq \frac{1}{\tau_m}$. Однако, $\tau_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, значит $\delta = 0$. Получили противоречие и теорема 1 не применима в данном случае.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* // Препринт ЛОМИ – Р-8-80.
2. Башмаков Р. А. *Системы экспонент в весовых гильбертовых пространствах на $\mathbb{R}$* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук – Институт математики с ВЦ УНЦ РАН – 2006.
3. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Теорема Пэли-Винера в пространствах Смирнова* // Труды МИАН им. В.А. Стеклова – 1991 – Т.200 – С.245-254.
4. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // Сб. БНЦ УрО АН СССР – Уфа – 1989.

ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Н. Ф. Валеев, Э. Р. Нугуманов, С. А. Рабцевич

*Башкирский государственный университет,
valeevnf@mail.ru, eduard-nugumanov@yandex.ru, rabtsevichsa@rambler.ru*

В статье исследуется обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля. К данной задаче сводятся проблемы управления и диагностики линейных механических, электрических и прочих систем по их собственным колебаниям. В работе описан метод численной реализации и выполнены численные расчеты.

Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} -y''(x) + \rho(x)y(x) &= \lambda y(x), \\ y(0) &= y(l) = 0. \end{aligned}$$

Известно, что решение обратной спектральной задачи состоит в следующем: по известным значениям λ требуется определить функцию $\rho = \rho(x)$. Ясно, что такая постановка задачи делает невозможным ее решение в аналитическом виде. Для того, чтобы разрешить данную проблему мы поставим обратную задачу в другом виде.

Перейдем к дискретному аналогу задачи Штурма - Лиувилля:

$$\begin{aligned} -y''(x_i) + \rho(x_i)y(x_i) &= \lambda y(x_i), \\ y(x_0) &= y(x_{n+1}) = 0, \quad i = \overline{1, n+1} \end{aligned}$$

где $-y''(x_i) = -\frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1}))}{h^2}$ - аппроксимация второй производной, h - шаг дискретизации. Запишем задачу в матричном виде:

$$B(\vec{p}, \lambda) = B_0 + p_1 B_1 + \dots + p_{m-1} B_{m-1} + p_m B_m - \lambda I,$$

где $B_k > 0$, $B = B^*$, $B_k : E^n \longrightarrow E^n$, $k = 0, 1, \dots, m \leq n$, $\vec{p} \in \mathbb{R}^m$, I - единичная матрица.

$$B_0 = \begin{pmatrix} 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/h^2 & 2/h^2 \end{pmatrix};$$

$$\rho \Leftrightarrow p_1 B_1 + p_2 B_2 + \dots + p_{m-1} B_{m-1} + p_m B_m.$$

Теперь сформулируем новую задачу, которая будет эквивалентна, в известном смысле, уже поставленной выше обратной задаче: требуется определить всевозможные значения вектора $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m$, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ являются собственными значениями оператора

$$B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + p_2 B_2 + \dots + p_{m-1} B_{m-1} + p_m B_m.$$

Поставленную задачу будем называть многопараметрической обратной спектральной задачей (сокращенно МПОСЗ).

Основные утверждения

Определение 1. Решением многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, будем называть вектор $\vec{p}^*$ из пространства $\mathbb{R}^m$ такой, что эти числа будут собственными значениями оператора $B(\vec{p}^*)$. При этом набор чисел $\mu_1, \dots, \mu_m$ будем называть спектральными данными, а $\vec{p}^*$ условимся называть вектором управления.

В качестве области Ω будем рассматривать m -мерный куб из $\mathbb{R}^m$.

Выражением $\lambda = \lambda(\vec{p})$ будем сокращенно обозначать собственные значения $\lambda(B(\vec{p}))$.

Будем говорить, что $\lambda(\vec{p}_1) < \lambda(\vec{p}_2)$, если $\lambda_i(\vec{p}_1) < \lambda_i(\vec{p}_2)$, $i = \overline{1, m}$

Определение 2. Точка $\vec{a} \in \Omega$ называется минимальной (максимальной) точкой области Ω , если $\forall \vec{p} \in \Omega : \vec{p} \neq \vec{a}$ выполняется $a_i < p_i$ ($a_i > p_i$), $i = \overline{1, m}$

Теорема 1. Функция $\lambda = \lambda_k(\vec{p})$ является монотонной по каждой координате вектора $\vec{p}$.

Теорема 2. Если внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ существует вектор управления $\vec{p}^*$, то $\lambda(\vec{a}) < \lambda(\vec{p}^*) < \lambda(\vec{b})$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ - минимальная и максимальная точки в Ω .

Будем говорить, что область Ω не содержит решений МПОСЗ, если нарушается хотя бы одно из неравенств

$$\lambda_i(\vec{a}) < \mu_i < \lambda_i(\vec{b}), \quad i = \overline{1, m},$$

а если все они выполняются, то будем говорить, что в Ω выполняется необходимое условие существования решения.

Символом $\Omega(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ будем обозначать m -мерный куб $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с минимальным и максимальным элементами равными $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ соответственно.

Алгоритм численного решения МПОСЗ.

Определим область $\Omega(\vec{a}, \vec{b}) \subset \mathbb{R}^m$ в которой будем искать решения. Возьмем точку $\vec{c} \in \Omega$, которая будет являться центром Ω и лежать на отрезке, соединяющий точки $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нетрудно заметить, что три точки образовали области $\Omega(\vec{a}, \vec{c})$ и $\Omega(\vec{c}, \vec{b})$, которые в свою очередь являются подобластями $\Omega(\vec{a}, \vec{b})$. Таким образом, центр m -мерного куба $\vec{c}$ и противоположные вершины $\vec{a}$ и $\vec{b}$, порождают 2 подобласти. Так как у m -мерного куба всего 2^m вершин, то можно сформировать 2^m подобластей Ω :

$$\Omega_i \subset \Omega, \quad i = \overline{1, 2^m} : \bigcap_{i=1}^{2^m} \Omega_i = \vec{c}, \quad \bigcup_{i=1}^{2^m} \Omega_i = \Omega$$

Далее, в каждой области Ω_i , $i = \overline{1, 2^m}$ проверим выполнение необходимого условия существования решения. Если условие не выполняется, то рассматриваемая область не содержит решений, если же условие выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем ее разбиение и переходим к следующей подобласти.

Продолжив данную процедуру конечное число раз мы получим локализации всевозможных решений нашей задачи. Далее, чтобы достичь приемлемой точности используем итерационный метод (например метод градиентов). В качестве начального приближения целесообразно использовать центры подобластей, полученных на последнем шаге разбиения. Описанный алгоритм решения был реализован в виде файл-функции в пакете MATLAB 7.

Численный расчет модели управления собственными частотами нагруженной струны

Рассмотрим струну с жестким закреплением на концах $y(0) = y(l) = 0$. На струне имеется n точечных масс, величину которых мы можем изменять. Плотность струны вне расположения точечных масс постоянна. В зависимости от того, какими по величине будут эти сосредоточенные массы, струна будет иметь спектр собственных колебаний λ . Прямая задача заключается в определении спектра струны по весовым характеристикам расположенных на ней масс. Мы же поставим обратную задачу, какими по величине должны быть сосредоточенные массы, чтобы в спектре частот струны присутствовали наперед заданные значения?

Колебания нагруженной струны описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0,$$

где $\rho(x)$ - плотность струны. Методом разделения переменных от дифференциального уравнения в частных производных получим задачу Штурма-Лиувилля на отрезке $[0, l]$:

$$y''(x) + \lambda \rho(x)y(x) = 0.$$

Используя метод сеток, перейдем к дискретному аналогу задачи, но перед этим конкретизируем условия. Пусть плотность струны вне точечных масс равна 2. Длина струны равна 1. Будем рассматривать 5 точечных масс на струне, которые расположены в точках $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.4$, $x_4 = 0.6$, $x_5 = 0.8$. Тогда получим следующую разностную аппроксимацию задачи:

$$A(\vec{p}, \lambda) = A_0 - \lambda(p_1 A_1 + \dots + p_5 A_5 + A_6),$$

где $\vec{p}$ - вектор значений точечных масс, A_0 - трехдиагональная матрица, аппроксимирующая вторую производную, $A_1 \dots A_5$ - матрицы расположения i -ой точечной массы на струне, A_6 - матрица постоянной плотности струны. Шаг сетки возьмем $h = 0.05$, поэтому размерность всех матриц будет 19×19 .

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/h^2 & 2/h^2 \end{pmatrix}$$

$A_1, \dots, A_5$ - нулевые матрицы, у которых на главной диагонали в позиции (j, j) стоит единица, характеризующая положение конкретнй массы на струне. $j = x/h$.

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим $A(\vec{p}, \lambda)$ слева и справа на $A_0^{-\frac{1}{2}}$ и разделим на $-\lambda$. Получим:

$$B(\vec{p}, \lambda) = -\frac{1}{\lambda}I + A_0^{-\frac{1}{2}}(p_1A_1 + \dots + p_5A_5 + A_6)A_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Выполнив обозначения $B_0 = A_0^{-\frac{1}{2}}A_6A_0^{-\frac{1}{2}}$, $B_i = A_0^{-\frac{1}{2}}A_iA_0^{-\frac{1}{2}}$, $i = \overline{1, 5}$, перейдем к уравнению вида:

$$B(\vec{p}, \lambda) = B_0 + p_1B_1 + p_2B_2 + p_3B_3 + p_4B_4 + p_5B_5 - \frac{1}{\lambda}I.$$

Легко заметить, что $\frac{1}{\lambda}$ является спектром оператора

$$B(\vec{p}) = B_0 + p_1B_1 + p_2B_2 + p_3B_3 + p_4B_4 + p_5B_5.$$

Таким образом мы получили МПОСЗ в стандартном виде.

Решим прямую задачу. Пусть $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$, $p_4 = 0.4$, $p_5 = 0.5$. Вычислив спектр оператора $B(\vec{p})$, получим значения $\frac{1}{\lambda}$:

$$(1.3030 \ 1.3279 \ 1.3652 \ 1.4255 \ 1.4780 \ 1.6630 \ 1.7891 \ 1.9777 \ 2.2527 \ 2.5258 \ 3.1022 \\ 3.7520 \ 4.7770 \ 6.3866 \ 8.6252 \ 13.6956 \ 23.9408 \ 53.4659 \ 212.3718)^T \times 10^{-3}$$

Определим λ .

$$(4.7087 \ 18.704 \ 41.77 \ 73.016 \ 115.94 \ 156.58 \ 209.33 \ 266.52 \ 322.35 \ 395.91 \\ 443.91 \ 505.64 \ 558.94 \ 601.33 \ 676.58 \ 701.52 \ 767.45 \ 732.49 \ 753.04)^T$$

Необходимо обратить внимание на то, что индексы собственных значений оператора $A(\vec{p})$ и оператора $B(\vec{p})$ связаны между собой формулой

$$ind_1 = n - ind_2 + 1,$$

где ind_1 - индексы собственных значений оператора $A(\vec{p})$, ind_2 - индексы собственных значений оператора $B(\vec{p})$, n - размерность матриц. Т.е. в нашем случае, если λ_1 - собственное значение оператора $A(\vec{p})$ с индексом 1, то $\frac{1}{\lambda_1}$ - будет являться собственным значением оператора $B(\vec{p})$ с индексом 19.

В качестве области, где будем искать решения, возьмем m -мерный куб $\Omega(\vec{a}, \vec{b})$, где точка $\vec{a} = (-10, -10, -10, -10, -10)$, а $\vec{b} = (10, 10, 10, 10, 10)$. Не ограничивая общности, возьмем первые 5 собственных частот колебаний струны (т.е. первые 5 собственных значений оператора $A(\vec{p})$):

$$\begin{pmatrix} 4.7087 \\ 18.704 \\ 41.77 \\ 73.016 \\ 115.94 \end{pmatrix}$$

Это эквивалентно тому, что в качестве спектральных данных мы возьмем последние 5 собственных значений оператора $B(\vec{p})$

$$\begin{pmatrix} 8.6252 \\ 13.6956 \\ 23.9408 \\ 53.4659 \\ 212.3718 \end{pmatrix} \times 10^{-3}$$

Выполнив расчеты, используя написанную в MATLAB 7 программу, у нас получилось, что условия задачи будут выполняться, если вектор управления будет принимать следующие значения:

$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$	$\vec{p}_4$
0.10000000004	7.0327194518	7.1775149857	0.1263439134
0.20000000003	-3.257615027	-3.294633709	0.1484248429
0.30000000001	-5.804221232	-0.780192681	0.8606754565
0.40000000000	6.3401518862	4.0971863237	-0.156763541
0.49999999998	-0.989479758	-4.77180697	0.533286095

Как видим, вектор управления $\vec{p}_1$ с хорошей точностью приближается к тем значениям, которые мы взяли для решения прямой задачи.

Проверим остальные векторы $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$, $\vec{p}_4$.

$\lambda(\vec{p}_2)$	$\lambda(\vec{p}_3)$	$\lambda(\vec{p}_4)$
-484.8217	-466.9576	4.7087
-104.1292	-170.9565	18.7035
4.7087	4.7087	41.7697
18.7035	18.7035	73.0161
41.7697	41.7697	115.9391
73.0161	73.0161	156.1768
115.9391	115.9391	208.6772
142.1673	149.3348	267.4343
203.8188	196.7443	323.9265
288.6851	332.0349	396.9301
390.6927	369.5391	442.6269
414.5311	415.3722	501.6233
424.8224	424.5174	561.8848
549.146	505.6164	611.6264
601.6721	592.8676	675.6767
622.0724	663.0733	698.3673
680.4409	673.9271	728.8867
687.4497	688.5591	757.1876
1059.0576	939.8540	792.9055

Видно, что все полученные векторы управления удовлетворяют поставленному условию. Но из-за физических особенностей задачи, в качестве ответа мы принимаем только вектор $\vec{p}_1$, т.к. масса не может быть отрицательной.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тихонов А., Самарский А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы*. М.: Наука, 1987.
3. Марченко В. А. *Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля и их приложения*. Киев: Наукова думка, 1972.

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЯ ПО СПЕКТРУ

Н. Ф. Валеев, С. А. Рабцевич, Э. Р. Нугуманов

*Башкирский государственный университет,
valeevnf@yandex.ru, rabtsevichsa@rambler.ru, eduard-nugumanov@yandex.ru*

Введение. Постановка задачи

Рассмотрим на $(0,1)$ регулярный дифференциальный оператор

$$L(\lambda)y = (a(x)y')' + (\lambda^2 b(x) + c(x))y = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y'(0, \lambda) + (p_1 + p_2 \lambda^2)y(0, \lambda) = 0 \quad (2)$$

$$-y'(1, \lambda) + (p_3 + p_4 \lambda^2)y(1, \lambda) = 0 \quad (3)$$

Относительно коэффициентов a, b, c будем предполагать, что

$$a(x) > 0, a(x) \in C[0; 1], b(x) \neq 0, c(x); b(x) \in C[0; 1] \quad (4)$$

Известно, что суть прямой спектральной задачи для оператора $L(\lambda)$ состоит в нахождении таких значений спектрального параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения $y(\lambda, x)$ краевой задачи (1)-(3). В силу наложенных на коэффициенты $a(x), b(x)$ и $c(x)$ условий (4) собственные значения λ оператора $L(\lambda)$ образуют дискретное множество точек с единственной точкой сгущения на бесконечности. При этом собственные значения λ_k являются аналитическими функциями от параметров $p_k, k = \overline{1, 4}$. Также можно показать, что при вышеперечисленных условиях и $p_k \in R$ собственные значения $\lambda_k \in R$.

К краевой задаче (1)-(3) сводятся некоторые модели, описывающие динамику линейных колебаний стержня, струны, линий электропередач с

соответствующими граничными условиями. В качестве примера рассмотрим задачу об электрических колебаниях в протяженной линии. Она сводится к нахождению решений телеграфного уравнения

$$i_{tt} = a^2 i_{xx}, x \in (0; l) \quad (5)$$

удовлетворяющих следующим граничным условиям

$$i_x(0, t) = CL_0 i_{tt}(0, t) + \frac{C}{C_0} i(0, t) \quad (6)$$

$$-i_x(l, t) = C\tilde{L}_0 i_{tt}(l, t) + \frac{C}{\tilde{C}_0} i(l, t) \quad (7)$$

Граничные условия описывают ситуацию, когда левый конец провода длины l заземлен через сосредоточенную самоиндукцию L_0 и емкость C_0 , соединенные последовательно, а правый - через сосредоточенную самоиндукцию $\tilde{L}_0$ и емкость $\tilde{C}_0$. Далее, для определенности, будем считать $l = 1$.

Известно, что данная динамическая система обладает собственными колебаниями, которые описываются собственными значениями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x, \lambda) + q(x)y(x, \lambda) = \lambda^2 y(x, \lambda) \quad (8)$$

$$y'(0, \lambda) - (p_1 + p_2 \lambda^2)y(0, \lambda) = 0 \quad (9)$$

$$y'(1, \lambda) + (p_3 + p_4 \lambda^2)y(1, \lambda) = 0 \quad (10)$$

где $p_1 = \frac{C}{C_0}, p_2 = -\frac{L_0}{L}, p_3 = \frac{C}{\tilde{C}_0}, p_4 = -\frac{\tilde{L}_0}{L}$, C и L - коэффициенты емкости и самоиндукции, рассчитанные на единицу провода, $0 < x < 1$.

Исходя из физического смысла задачи коэффициенты p_1, p_2, p_3, p_4 должны быть вещественными, и более того $p_1 \geq 0, p_3 \geq 0$ и $p_2 \leq 0, p_4 \leq 0$.

Теперь сформулируем обратную спектральную задачу для данного оператора $L(\lambda)$.

Пусть известно, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ являются собственными значениями $L(\lambda)$. Требуется найти возможные значения $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ коэффициентов граничных условий (2) и (3).

Далее нас будут интересовать условия существования решений данной задачи; условия изолированности и устойчивости решений относительно малых возмущений собственных значений и коэффициентов. Прежде всего покажем, что данную задачу можно свести к многопараметрической обратной спектральной задаче (см. [3]). Обозначим через $U(x, \lambda)$ и

$V(x, \lambda)$ линейно-независимые решения уравнения (1) удовлетворяющих следующим начальным условиям

$$U(0, \lambda) = 1; U'(0, \lambda) = 0; V(0, \lambda) = 0; V'(0, \lambda) = 1 \quad (11)$$

Тогда любое решение краевой задачи (1)-(3) можно представить в виде

$$y(x, \lambda) = C_1(\lambda, \vec{p})U(x, \lambda) + C_2(\lambda, \vec{p})V(x, \lambda) \quad (12)$$

Заметим, что $U(x, \lambda)$ и $V(x, \lambda)$ от $\vec{p}$ не зависят. Теперь подставляя (12) в граничные условия (2) и (3) и учитывая (11) для векторов $\vec{C}(\lambda) = (C_1(\lambda, \vec{p}); C_2(\lambda, \vec{p}))$ получим векторно-матричное уравнение:

$$B(\lambda, \vec{p})\vec{C} = 0 \quad (13)$$

, где

$$B(\lambda, \vec{p}) = \begin{pmatrix} p_1 + \lambda^2 p_2 & 1 \\ -U'(1, \lambda) + (p_3 + \lambda^2 p_4)U(1, \lambda) & -V'(1, \lambda) + (p_3 + \lambda^2 p_4)V(1, \lambda) \end{pmatrix}$$

Положим

$$B_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U'(1, \lambda) & -V'(1, \lambda) \end{pmatrix};$$

$$B_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_2(\lambda) = \lambda^2 B_1(\lambda)$$

$$B_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U(1, \lambda) & V(1, \lambda) \end{pmatrix};$$

$$B_4(\lambda) = \lambda^2 B_3(\lambda)$$

и представим уравнение (13) в виде

$$B(\vec{p}, \lambda)\vec{C}(\lambda) = \left[B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^4 p_k B_k(\lambda) \right] \vec{C} = 0 \quad (14)$$

Очевидно, что теперь решение задачи сводится к решению системы уравнений

$$B(\vec{p}, \lambda_k) \vec{C}(\lambda_k) = 0, k = \overline{1, 4} \quad (15)$$

В данной системе уравнений, вообще говоря, неизвестными являются величины $p_k, k = \overline{1, 4}$ и векторы $\vec{C}(\lambda_k), k = \overline{1, 4}$, всего восемь неизвестных. Но поскольку нас интересуют только величины p_k , то систему (15) можно заменить на эквивалентную

$$\det(B(\vec{p}, \lambda)_k) = 0 \quad (16)$$

Каждое уравнение системы (16) является алгебраическим уравнением второй степени относительно коэффициентов p_k . Это в свою очередь означает, что для (16) возможны следующие случаи: система не имеет решений; система имеет бесконечно много решений (не изолированные решения) и система имеет конечное число изолированных решений (см. [1]). Поскольку данная задача является прежде всего прикладной, то решения этой МПОСЗ должны быть устойчивыми к возмущениям коэффициентов матриц $B_k(\lambda)$ и собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, что возможно только для изолированных решений.

Заметим, что в случае изолированности решений алгебраической системы нелинейных уравнений известна оценка количества решений m^n , где m - порядок уравнения, n - количество неизвестных (см. [1]). Так что для рассматриваемой задачи система имеет не более 16 решений.

Изолированность решений.

В данном пункте сформулированы достаточные условия изолированности решений. Введем в рассмотрение следующие функции

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_i) &= \det \begin{pmatrix} V'(1, \lambda_k) & V(1, \lambda_k) & \lambda_k^2 V(1, \lambda_k) \\ V'(1, \lambda_j) & V(1, \lambda_j) & \lambda_j^2 V(1, \lambda_j) \\ V'(1, \lambda_i) & V(1, \lambda_i) & \lambda_i^2 V(1, \lambda_i) \end{pmatrix} \\ f_2(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_i) &= \det \begin{pmatrix} U'(1, \lambda_k) & V(1, \lambda_k) & \lambda_k^2 V(1, \lambda_k) \\ U'(1, \lambda_j) & V(1, \lambda_j) & \lambda_j^2 V(1, \lambda_j) \\ U'(1, \lambda_i) & V(1, \lambda_i) & \lambda_i^2 V(1, \lambda_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Теорема. Пусть для любых 3-х попарно различных собственных значений $\lambda_k; \lambda_j$ и λ_i $f_1(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_i) \neq 0$ (17) и $f_2(\lambda_k; \lambda_j; \lambda_i) \neq 0$ (18). Тогда все решения обратной спектральной задачи изолированы.

Доказательство

Предположим, что обратная спектральная задача для собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ имеет неизоллированные решения $\vec{p}^k = (p_1^k; p_2^k; p_3^k; p_4^k)$,

$k = \overline{1; \infty}$ с точкой сгущения $\vec{p}^*$. Тогда хотя бы одна из координат имеет точку сгущения. Указанную компоненту вектора $\vec{p}^*$ обозначим через z_k . В этом случае остальные координаты вектора $\vec{p}^*$ можно выразить через z_k как алгебраические функции. Соответственно $\vec{p}(z)$ - алгебраическая вектор-функция будет решением системы уравнений $B(\vec{p}(z), \lambda_k) = 0, k = \overline{1; 4}$ при любых z , за исключением дискретного множества. Известно, что у алгебраической функции существует хотя бы одна особая точка (учитывая $z = \infty$), в окрестности которой она неограничена, указанную точку обозначим z^* . Теперь обозначим $\rho_1(z) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ и $\rho_2(z) = \sqrt{p_3^2 + p_4^2}$ и исследуем пределы при $z \rightarrow z^*$ системы

$$\begin{pmatrix} \rho_1^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \rho_2^{-1}(z) \end{pmatrix} B(\vec{p}(z), \lambda_k) \begin{pmatrix} C_1(\lambda_k, z) \\ C_2(\lambda_k, z) \end{pmatrix} = 0$$

Возможны три случая:

- а) $\rho_1(z) \rightarrow \infty$ и $\rho_2(z) \rightarrow \infty$
- б) $\rho_1(z) \rightarrow \infty$ и $\rho_2(z) \rightarrow \rho_2^* < \infty$
- в) $\rho_1(z) \rightarrow \rho_1^*$ и $\rho_2(z) \rightarrow \infty$

При реализации случая а) мы получим следующую предельную систему

$$(p_1^* + \lambda_k^2 p_2^*) C_1 + 0 C_2 = 0$$

$$(p_3^* + \lambda_k^2 p_4^*) (U(1, \lambda_k) C_1 + V(1, \lambda_k) C_2) = 0, k = \overline{1; 4}$$

Откуда вытекает, что найдутся хотя бы 2 собственных значения λ_k и λ_j , для которых $V(1, \lambda_k) = 0$. Последнее невозможно, поскольку в этом случае $f_1(\lambda_{k_1}; \lambda_{j_1}; \lambda_{i_1}) = 0$ и $f_2(\lambda_{k_2}; \lambda_{j_2}; \lambda_{i_2}) = 0$ для любых i_1 и i_2 .

В случае б) получим систему следующего вида

$$(p_1^* + \lambda_k^2 p_2^*) C_1 + 0 C_2 = 0$$

$$(-U'(1, \lambda_k) + (p_3^* + \lambda_k^2 p_4^*) U(1, \lambda_k)) C_1 +$$

$$+ (-V'(1, \lambda_k) + (p_3^* + \lambda_k^2 p_4^*) V(1, \lambda_k)) C_2 = 0, k = \overline{1; 4}$$

Тогда хотя бы для трех собственных значений $C_1 = 0, C_2 = 1$ и соответственно $(-V'(1, \lambda_k) + (p_3^* + \lambda_k^2 p_4^*) V(1, \lambda_k)) = 0$, что противоречит условию (17) теоремы.

Если же окажется, что $\rho_1(z) \rightarrow \rho_1^* < \infty$ и $\rho_2(z) \rightarrow \infty$, тогда мы можем утверждать, что хотя бы для трех собственных значений $-(p_1^* + \lambda_k^2 p_2^*) V(1, \lambda_k) + U(1, \lambda_k) = 0$, что невозможно в силу условия (18) настоящей теоремы.

Таким образом, алгебраические функции $p_k(z)$ не имеют особых точек, в которых они неограничены. Полученные противоречия вызваны предположением о существовании неизолированных решений. Теорема доказана.

Монотонность зависимости собственных значений от параметров.

В данном пункте сформулированы достаточные условия для существования монотонной зависимости собственных значений от параметров. Наличие такой зависимости для данного класса операторов позволяет построить эффективный численный алгоритм для решения поставленной выше задачи.

Теорема. Для задачи (1)-(3) имеет место монотонная зависимость собственных значений от параметров граничных условий.

Доказательство

Для доказательства, следуя [2], приведем краевую задачу (1)-(3) на собственные значения к эквивалентному виду.

Обозначим $H = L_2(0, 1) \oplus C^2$ - сепарабельное гильбертово пространство элементов вида $\tilde{y} = (y(x), a, b)$, где $y(x) \in L_2(0, 1)$; $a, b \in C$ со скалярным произведением $(\tilde{y}, \tilde{z}) = \int y(x)\bar{z}(x)dx + a \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{d}$, где $\tilde{z} = (z(x), c, d) \in H$.

Рассмотрим в H оператор $B_0 : H \rightarrow H$, определенный следующим образом

$$B_0(\lambda)\tilde{y} = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(0) \\ -y'(1) \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$D(B_0) = (y(x), y(0), y(1)) \in H | y(x) \in L_2(0, 1), y(0), y(1) \in C$$

Введем в рассмотрение оператор $\tilde{L}(\vec{p}, \lambda) : H \rightarrow H$, такой что

$$\tilde{L}(\vec{p}, \lambda) = B_0 + p_1 B_1 + p_2 \lambda^2 B_2 + p_3 B_3 + p_4 \lambda^2 B_4 - \lambda^2 B_5,$$

где

$$B_1 = B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_3 = B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оператор $\tilde{L}$ замыкаемый. Обозначим через L минимальное замыкание $\tilde{L}$. Далее рассмотрим задачу на собственные значения $L(\vec{p}, \lambda)\tilde{y} = 0$ (19). Приведем уравнение (19) к виду $L_1(\vec{p})\tilde{y} = \lambda^2 L_2(\vec{p})\tilde{y}$ (20). Исследуем методами теории возмущений данное уравнение. Зафиксируем набор параметров $\vec{p}^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*)$ и придадим малое возмущение одному из параметров. Не ограничивая общности будем считать, что малое возмущение придано p_3 , т. е. $\vec{p}_\epsilon^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^* + \epsilon, p_4^*)$. Будем считать ϵ независимым параметром задачи. Если $\epsilon = 0$, то мы получим в точности исходную задачу на собственные значения. Следующий шаг состоит в поиске решения возмущенной задачи в виде ряда по степеням ϵ . Разложим $\tilde{y}$ и λ в формальные ряды по степеням ϵ :

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y(x, \lambda) \\ y(0) \\ y(1) \end{pmatrix} = \tilde{y}_0 + \epsilon \tilde{y}_1 + \dots = \begin{pmatrix} y_0(x, \lambda) \\ y_0(0) \\ y_0(1) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_1(0) \\ y_1(1) \end{pmatrix} + \dots$$

$$\lambda^2 = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots,$$

подставим их в уравнение (20) и получим прямое разложение теории возмущений. Здесь под многоточием понимаются слагаемые с множителями ϵ^n , где $n \geq 2$.

Далее приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ϵ . В результате получим бесконечный набор уравнений

$$\epsilon^0 : L_1 \tilde{y}_0 = \lambda_0 L_2 \tilde{y}_0$$

$$\epsilon^1 : L_1 \tilde{y}_1 + B_3 \tilde{y}_0 = \lambda_0 L_2 \tilde{y}_1 + \lambda_1 L_2 \tilde{y}_0$$

...

В виду исследования вопроса монотонности зависимости, будем использовать лишь первые два уравнения на коэффициенты при ϵ . Не ограничивая общности положим, что $\|\tilde{y}_0\| = 1$. Рассмотрим второе уравнение на коэффициенты при ϵ^1 . Умножая данное уравнение скалярно на $\tilde{y}_0$ и пользуясь самосопряженностью L_1 получим

$$(\tilde{y}_1, L_1 \tilde{y}_0) + (B_3 \tilde{y}_0, \tilde{y}_0) = \lambda_0 (L_2 \tilde{y}_1, \tilde{y}_0) + \lambda_1 (L_2 \tilde{y}_0, \tilde{y}_0)$$

Далее используя первое уравнение на коэффициенты при ϵ^0 и сокращая одинаковые слагаемые получим

$$\lambda_1 = \frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p} = \frac{(B_3 \tilde{y}_0, \tilde{y}_0)}{(L_2 \tilde{y}_0, \tilde{y}_0)} = \frac{|y_0(1)|^2}{\int y_0^2(x, \lambda) dx - p_2 |y_0(0)|^2 - p_4 |y_0(1)|^2} > 0$$

Учитывая физический смысл коэффициентов p_2 и p_4 получим, что зависимость $\lambda(p)$ монотонно возрастает при увеличении p . Теорема доказана.

Построение алгоритма численного решения задачи.

В данном пункте будет построен метод численного решения, существенно использующий монотонность зависимости собственных значений от параметров. Обозначим через $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \mu_3(\vec{p}), \mu_4(\vec{p})$ первые четыре собственных значения оператора L при некотором значении вектора $\vec{p}$.

Рассмотрим обратную спектральную задачу в следующей постановке. Требуется найти такое значение $\vec{p}^*$ из заданного прямого параллелепипеда Π , чтобы $\mu_1(\vec{p}^*), \mu_2(\vec{p}^*), \mu_3(\vec{p}^*), \mu_4(\vec{p}^*)$ были равны наперед заданным числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ - спектральным данным обратной спектральной задачи.

Областью несуществования для заданного числа λ_1 будем называть область, в которой не существует такого вектора p^* , что $\mu_1(p^*)$ было равно λ_1 .

Прямой параллелепипед Π с вершиной с наименьшими координатами в точке $P_{min} = (p_1^{min}, p_2^{min}, p_3^{min}, p_4^{min})$ и вершиной с наибольшими координатами в точке $P_{max} = (p_1^{max}, p_2^{max}, p_3^{max}, p_4^{max})$ будем обозначать $\Pi(P_{min}, P_{max})$.

Теорема.

Если нарушается хотя бы одно из следующих условий:

$$\lambda_1 \geq \mu_1(P_{min}); \lambda_1 \leq \mu_1(P_{max})$$

$$\lambda_2 \geq \mu_2(P_{min}); \lambda_2 \leq \mu_2(P_{max})$$

$$\lambda_3 \geq \mu_3(P_{min}); \lambda_3 \leq \mu_3(P_{max})$$

$$\lambda_4 \geq \mu_4(P_{min}); \lambda_4 \leq \mu_4(P_{max})$$

в прямом параллелепипеде $\Pi(P_{min}, P_{max})$, то данный параллелепипед является областью несуществования.

Доказательство.

Пусть нарушено первое неравенство, т.е. $\lambda_1 < \mu_1(P_{min})$. Из монотонности зависимости собственных значений от параметров следует, что

$\mu_1(P_{min}) \leq \mu_1(P)$, для любого $P > P_{min}$, а значит и для любого $P \in \Pi(P_{min}, P_{max})$. То есть наименьшее собственное значение $\mu_1(P_{min})$ оператора $L(\vec{p})$ в точке P_{min} будет больше, чем λ_1 , что невозможно, так как в этом случае прямой параллелепипед $\Pi(P_{min}, P_{max})$ будет областью несуществования. Выполнение последующих трех неравенств следует из аналогичных рассуждений.

Пусть теперь нарушено пятое неравенство, то есть $\lambda_1 > \mu_1(P_{max})$. Из монотонности зависимости собственных значений от параметров следует, что $\mu_1(P_{max}) \geq \mu_1(P)$, для любого $P < P_{max}$, а значит и для любых $P \in \Pi(P_{min}, P_{max})$. То есть наибольшее собственное значение $\mu_1(P_{max})$ оператора $L(\vec{p})$ в точке P_{max} будет меньше, чем λ_1 , что невозможно, так как в этом случае прямой параллелепипед $\Pi(P_{min}, P_{max})$ будет областью несуществования. Выполнение последних трех неравенств следует из аналогичных рассуждений. Теорема доказана.

Рассмотренная выше теорема позволяет находить области существования решения в заданном параллелепипеде $\Pi(P_{min}, P_{max})$. Не ограничивая общности, для облегчения восприятия, зафиксируем третью и четвертую координаты у всех точек параллелепипеда и рассмотрим образовавшийся прямоугольник $\Pi(P_{min}^*, P_{max}^*)$, где $P_{min}^* = (p_1^{min}, p_2^{min})$ и $P_{max}^* = (p_1^{max}, p_2^{max})$. Вычислим собственные значения $\mu_k(P_{min}^*)$ и $\mu_k(P_{max}^*)$ оператора $L(\vec{p})$. Если не выполнены условия теоремы, то данный прямоугольник является областью несуществования. В противном случае, если выполнены все условия теоремы, рассмотрим середину вектора P_{max}^* - точку $S = (s_1, s_2)$. Для прямоугольников $\Pi_1(P_{min}^*, S)$ и $\Pi_4(S, P_{max}^*)$ проверим выполнение условий теоремы. Пусть условия теоремы выполнены для $\Pi_1((p_1^{min}, p_2^{min}), (s_1, s_2))$, тогда, согласно теореме, остальные прямоугольники $\Pi_2((s_1, 0), (p_1^{max}, s_2))$, $\Pi_3((0, s_2), (s_1, p_2^{max}))$ и $\Pi_4((s_1, s_2), (p_1^{max}, p_2^{max}))$ будут областями несуществования. Далее для прямоугольника Π_1 применяются те же рассуждения, что и для прямоугольника $\Pi(P_{min}^*, P_{max}^*)$. Пусть теперь условия теоремы выполнены для прямоугольника $\Pi_4((s_1, s_2), (p_1^{max}, p_2^{max}))$, тогда согласно теореме, областями несуществования являются остальные прямоугольники $\Pi_1((p_1^{min}, p_2^{min}), (s_1, s_2))$, $\Pi_2((s_1, 0), (p_1^{max}, s_2))$ и $\Pi_3((0, s_2), (s_1, p_2^{max}))$ и необходимо рассматривать прямоугольник $\Pi_4((s_1, s_2), (p_1^{max}, p_2^{max}))$. В случае, когда условия теоремы не выполнены ни для прямоугольника Π_1 , ни для Π_4 , необходимо перейти к рассмотрению Π_2 и Π_3 .

Применяя описанную выше процедуру требуемое число раз, получим локализацию областей существования решения с любой необходимой точностью. Далее, применяя метод градиентного спуска для каждой лока-

лизованной области существования, можно уточнить решения поставленной задачи до требуемой точности.

Описанный выше алгоритм реализован в пакете MATLAB.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*. М., 528 стр., 1969.
2. Шкаликов А. А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*. // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1983. – №9 –С. 190-229.
3. Валеев Н. Ф. *Об одной модели управления собственными колебаниями динамических систем*. // Вестник УГАТУ. – 2008. – т.2 –С. 45-55.

ПРИЛОЖЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Н. Ф. Валеев

*Башкирский государственный университет,
valeevnf@yandex.ru*

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве E^n задано семейство m -параметрических операторов вида

$$B(\vec{p}, \lambda) = B_0(\lambda) + p_1 B_1(\lambda) + p_2 B_2(\lambda) + \dots + p_{m-1} B_{m-1}(\lambda) + p_m B_m(\lambda), \quad (1)$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \mathbb{C}^m$, линейные операторы $B_k(\lambda) : E^n \rightarrow E^n$ аналитически зависят от спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. При этих условиях число $\lambda \in \mathbb{C}$ будем называть собственным значением оператора $B(\vec{p}, \lambda)$, если оператор $[B(\vec{p}, \lambda)]^{-1}$ не существует.

Постановка многопараметрической обратной спектральной задачи (МПОСЗ).

Требуется найти возможные значения вектора $\vec{p}$ из пространства $\mathbb{C}^m$, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ являются собственными значениями оператора $B(\vec{p}, \lambda)$. При этом набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ будем называть спектральными данными и обозначать $\vec{\lambda}$.

Сформулированная постановка задачи часто возникает в математических моделях диагностики или идентификации технических систем по ее собственным колебаниям. Аналогичные постановки обратных спектральных задач полезны также при исследовании моделей управления резонансными характеристиками объекта, когда посредством подбора доступных параметров объекта (линейной динамической системы) требуется придать ей те или иные частотно-резонансные характеристики. Этим задачам посвящено большое количество работ, см., например, работу [1] и библиографию к ней.

Поскольку МПОСЗ тесно связана с прикладными техническими проблемами, то ее решения соответственно должны быть устойчивыми к малым возмущениям (погрешностям измерений) матриц $B_k(\lambda)$ и спектральных данных $\vec{\lambda}$ задачи. В связи с этим введем важное понятие. Обозначим $b(\vec{p}, \lambda) = \det(B(\vec{p}, \lambda))$, тогда решение МПОСЗ эквивалентно решению системы из k уравнений

$$b(\vec{p}, \lambda_k) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Пусть $\vec{e}_j$ - ортонормированный базис пространства E^n и

$$W(\vec{p}, \vec{\lambda}) = \sum_{j=1}^n b(\vec{p}, \lambda_j) \vec{e}_j.$$

Решение МПОСЗ $\vec{p}^*$, соответствующее спектральным данным $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}^*$, будем называть регулярным, если $\det \frac{dW}{d\vec{p}}(\vec{p}^*, \vec{\lambda}^*) \neq 0$

Прямое исследование существования регулярных решений, их количества и, тем более, построение алгоритмов, гарантирующих нахождение всех ее решений, для системы алгебраических уравнений () в общем случае затруднительны. Причиной тому является довольно сложный вид системы полиномиальных уравнений от переменных p_j .

В связи с этим, следуя работам [2] и [3], преобразуем систему () к виду, в котором координаты вектора $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ окажутся "разделенными" между собой. Говоря точнее, мы построим полиномы от одной переменной для каждой координаты вектора управления.

Обозначим через $H_m = E^n \otimes E^n \dots \otimes E^n$ тензорное произведение m - экземпляров евклидовых пространств E^n . Пусть Ω множество всех перестановок чисел $\{1, 2, \dots, m\}$. Если $\omega = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \in \Omega$, положим $\omega(k) = i_k$, а через $I(\omega)$ обозначим количество беспорядков (инверсий) в перестановке ω . Введем в рассмотрение оператор $\Delta_0 : H_m \mapsto H_m$:

$$\Delta_0 = \sum_{\omega \in \Omega} (-1)^{I(\omega)} B_{\omega(1)}(\lambda_1) \otimes B_{\omega(2)}(\lambda_2) \otimes \dots \otimes B_{\omega(m)}(\lambda_m).$$

Теперь полагая $B_k(\lambda_j) = B_0(\lambda_j)$ в формуле для Δ_0 определим операторы $\Delta_k : H_m \mapsto H_m, k = 1, \dots, m$. Операторы $\Delta_k : H_m \mapsto H_m, k = 0, \dots, m$ подробно изучены в работах [2] и [3]. **Теорема 1.** Пусть $\text{rank}(\Delta_0) = N_1$, тогда МПОСЗ для оператора () имеет ровно N_1 регулярных решений.

Введем в рассмотрение ортогональные проекторы G_k на подпространства $V_k = \text{Ker}(\Delta_k) \cap \text{Ker}(\Delta_0)$ и полиномы от одной переменной:

$$f_k(s) = \det((-1)^k \Delta_k + s \Delta_0 + G_k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Следующее утверждение позволяет конструктивно строить все регулярные решения МПОСЗ.

Теорема 2. Пусть вектор $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ регулярное решение МПОСЗ для оператора (), тогда $f_k(p_k) = 0$.

Таким образом, построение регулярных решений МПОСЗ сводится к поиску нулей многочленов $f_k(s)$.

МПОСЗ для операторов Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим дискретный оператор Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i q_i y_i = \lambda y_i, \quad (3)$$

где $0 < i < m + 1$, а граничные условия имеют вид $y_0 = 0$, $y_{m+1} = 0$.

Для этого оператора можно рассматривать задачу о восстановлении потенциала этого оператора $q = (p_1 q_1, p_2 q_2, \dots, p_m q_m)$ по m собственным значениям $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$. Данная задача легко приводится к МПОСЗ для оператора вида () и при этом $\text{rank}(\Delta_0) = m!$. Это означает, что, во-первых, многопараметрическая обратная спектральная задача разрешима для оператора () с любым набором собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$; во-вторых, МПОСЗ имеет ровно $m!$ регулярных решений.

МПОСЗ для дифференциальных операторов в гильбертовых пространствах можно исследовать с помощью теорем предыдущего пункта и используя некоторые методы теории вращения компактных векторных полей (см. [4]).

Рассмотрим самосопряженный оператор Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x, \lambda) + \lambda^2 q(x, \vec{p}) y(x, \lambda) = 0, \quad (4)$$

с потенциалом вида $q(x, \vec{p}) = \sum_{k=1}^m p_k q_k(x)$, $q_k(x) \in C[0, 1]$ и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$.

Как и выше рассмотрим задачу восстановления по спектральным данным $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ потенциала $q(x, \vec{p})$. Для исследования существования изолированных решений $\vec{p}$ обратной спектральной задачи для оператора () можно воспользоваться проекционными методами решения операторных уравнений. Тогда исходная задача будет сведена к МПОСЗ в конечномерном пространстве. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть при каждом $\vec{p} \in \mathbb{C}^m$, $||\vec{p}|| = 1$ функция $q(x, \vec{p}) = \sum_{k=1}^m p_k q_k(x)$ на $[0, 1]$ имеет конечное число нулей, тогда у МПОСЗ для оператора () существуют изолированные решения.

Аналогичные результаты справедливы и для самосопряженных дифференциальных операторов более высокого порядка. Также эту теорему можно переформулировать для самосопряженных дифференциальных операторов в частных производных.

Теперь рассмотрим задачу о восстановлении коэффициентов граничных условий оператора Штурма-Лиувилля. Пусть задан оператор Штурма - Лиувилля:

$$-(a(x)y'(x, \lambda))' + (\lambda^2 b(x) + c(x))y(x, \lambda) = 0, \quad (5)$$

с граничными условиями $y'(0, \lambda) + (p_1 + \lambda^2 p_2)y(0, \lambda) = 0$, $-y'(1, \lambda) + (p_3 + \lambda^2 p_4)y(1, \lambda) = 0$.

На коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ наложим следующие условия:

$a(x) \in C^1[0, 1]$, $a(x) > 0$, $b(x) \in C[0, 1]$, $b(x) > 0$ и $c(x) \in C[0, 1]$, $c(x) > 0$.

Предположим, что нам известны 4 собственных значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ данного оператора и рассмотрим задачу восстановления по этим собственным значениям вектора управления $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$. Обозначим через $u(x, \lambda), v(x, \lambda)$ два линейно-независимых решения уравнения (5), удовлетворяющих начальным условиям

$$u(0, \lambda) = 1, \quad v(0, \lambda) = 0, \quad u'(0, \lambda) = 0, \quad v'(0, \lambda) = 1. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение следующие функции от собственных значений оператора (5):

$$f_1(\lambda_k, \lambda_j, \lambda_i) = \det \begin{pmatrix} v'(1, \lambda_k) & v(1, \lambda_k) & \lambda_k^2 v(1, \lambda_k) \\ v'(1, \lambda_j) & v(1, \lambda_j) & \lambda_j^2 v(1, \lambda_j) \\ v'(1, \lambda_i) & v(1, \lambda_i) & \lambda_i^2 v(1, \lambda_i) \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$f_2(\lambda_k, \lambda_j, \lambda_i) = \det \begin{pmatrix} u(1, \lambda_k) & v(1, \lambda_k) & \lambda_k^2 v(1, \lambda_k) \\ u(1, \lambda_j) & v(1, \lambda_j) & \lambda_j^2 v(1, \lambda_j) \\ u(1, \lambda_i) & v(1, \lambda_i) & \lambda_i^2 v(1, \lambda_i) \end{pmatrix}. \text{ В терминах функ-}$$

ций $u(x, \lambda), v(x, \lambda)$ и их производных задачу можно легко свести к МПОСЗ для оператора вида (5), заданного в пространстве E^2 .

Теорема 4. Пусть для любых попарно различных собственных значений $\lambda_k, \lambda_j, \lambda_i$ оператора (5) выполнены условия: $f_1(\lambda_k, \lambda_j, \lambda_i) \neq 0$ и $f_2(\lambda_k, \lambda_j, \lambda_i) \neq 0$. Тогда МПОСЗ имеет ровно 6 изолированных решений.

Таким образом, 4 неизвестных параметра граничных условий можно восстановить с помощью 4 собственных значений оператора. Заметим,

что если коэффициенты дифференциального выражения () постоянные величины, то $f_1(\lambda_k, \lambda_j, \lambda_i) = f_2(\lambda_k, \lambda_j, \lambda_i)$. При этом решения соответствующей МПОСЗ можно получить в явном виде.

В заключении отметим, что доказательства всех утверждений, сформулированных в данной статье, построены на теории вращений аналитических векторных полей (см. [4]) и методе продолжения по параметру.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Биргер К. Н., *Техническая диагностика*. М.: Машиностроение, 1978.
2. Ф. М. Аткинсон *Многopараметрические задачи на собственные значения*. New York: McGRAW-Hill Book Company inc., 1972.
3. Исаев Г. А *К многopараметрической спектральной теории* // Доклады Академии Наук СССР. – 1976. – Т. 229. – № 2 –С. 284–286.
4. Красносельский М. А., Вайненко Г. М., Забрейко П. П., Рутцкий Я. Б., Стеценко В. Я. *Приближенное решение операторных уравнений*. М.: Наука, 1969.

НЕПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ НА ДУГАХ

А. М. Гайсин, И. Г. Кинзябулатов

*Башкирский государственный университет,
GaisinAM@mail.ru, KinzyabulatonIG2@mail.ru*

Введение

Теорема Мюнца утверждает, что система $\{x^{\lambda_n}\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) полна в $C[a, b]$ ($0 < a < b$) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty. \quad (1)$$

Пусть I — отрезок, не параллельный мнимой оси. Для того, чтобы система $\{e^{\lambda_n z}\}$ ($0 < \lambda_n \uparrow \infty$) была полна в $C(I)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1) [1].

Для произвольных дуг γ теорема типа Мюнца не имеет места. Она справедлива, если γ есть ломанная, состоящая из конечного числа отрезков без вертикальных хорд [2]. Для полноты системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ при единственном условии (1) требование, чтобы γ пересекалась с каждой вертикальной прямой не более, чем в одной точке, необходимо. Для спрямляемых дуг γ , у которых все хорды имеют угловые коэффициенты, не превосходящие по модулю 1, условие (1) достаточно для того, чтобы система $\{e^{\lambda_n z}\}$ была полна в $C(\gamma)$ [3]. В случае когда γ составлена из конечного числа аналитических дуг $\gamma_s : y = f_s(x)$, $|f'_s(x)| < 1$, такой же результат установлен в [4]. С другой стороны, в [3] — [5] доказано, что если γ — аналитическая дуга и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \quad (2)$$

то система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна в $C(\gamma)$. В [6] этот результат установлен для некоторого класса бесконечно дифференцируемых дуг, содержащего и

множество всех аналитических дуг. В случае же когда последовательность $\{\lambda_n\}$ подчинена более сильным условиям регулярности:

$$\lambda_n \geq \mu_n, \quad 0 < \mu_n \uparrow \infty, \quad \frac{n}{\mu_n} \downarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} < \infty, \quad (3)$$

неполнота системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ в $C(\gamma)$ установлена в [7] для кривых γ , все хорды которых имеют угловые коэффициенты, не превосходящие по модулю $q = q(\gamma) < 1$. Хорошо известно, что группа условий (3) равносильна условию типа Левинсона

$$\int_0^d \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad (4)$$

где

$$h(\delta) = \int_0^{\infty} Q(ir) e^{-\delta r} dr, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right),$$

а $d > 0$ такое, что $h(d) = e$. В [8] показано, что при условии (4) приведенный выше результат из [7] верен для $q(\gamma) < \infty$.

Цель статьи — показать, что при выполнении условия Левинсона имеет место более сильное утверждение.

§1. Предварительные сведения

Через L обозначим класс всех непрерывных на $[0, \infty)$ функций $w = w(x)$, таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty, x \rightarrow \infty$. Пусть

$$W = \{w : w \in L, \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty\}, \quad \Omega = \{w \in W : \frac{w(x)}{x} \downarrow 0, x \rightarrow \infty\}.$$

Лемма 1. [9]. (Carleman-Milloux). Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $\overline{D}(z_0, R) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$,

$$m = \max_{\gamma} |g(z)|, \quad M = \max_{\overline{D}(z_0, R)} |g(z)|,$$

γ — любая кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\partial \overline{D}(z_0, R)$. Тогда для всех $z \in \overline{D}(z_0, \frac{R}{6})$

$$|g(z)| \leq m^{\frac{1}{4}} M^{\frac{3}{4}}.$$

Лемма 2. Пусть функция $u(r)$ непрерывна при $r \geq r_0$, не убывает, $u(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если $K(u)$ — непрерывная и положительная при $u \geq u_0 = u(r_0)$ функция, такая, что $K(u) \downarrow$ при $u \rightarrow \infty$ и

$$\int_{u_0}^{\infty} K(u) du < \infty,$$

то для любого $\epsilon > 0$, для всех $r \geq r_0$ вне некоторого множества $E \subset [r_0, \infty)$ конечной меры mE ,

$$mE \leq \epsilon^{-1} \int_{u_0}^{\infty} K(u) du + K(u_0),$$

выполняется оценка

$$u(r + K(u(r))) < u(r) + \epsilon.$$

Лемма 2 доказана в [8] и является уточненным вариантом теоремы Бореля-Неванлинны из работы [10].

Пусть $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — кривая, имеющая вид $\gamma(t) = t + ig(t)$. Если

$$\sup_{t_1 \neq t_2} \left| \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} \right| = M_\gamma < \infty,$$

то γ называется кривой ограниченного наклона. Множество всех кривых γ ограниченного наклона будем обозначать через G . Для любого q , $0 < q < \infty$, введем множество $G_q = \{\gamma \in G : M_\gamma \leq q\}$. Через $G_q(a, b)$ обозначим множество всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($-\infty < a < b < \infty$), для которых $M_\gamma \leq q$.

Пусть $\Delta(\alpha, \beta) = \{z : |\arg[-(z - \alpha)]| \leq \beta < \frac{\pi}{2}\}$, $T(\alpha, \beta)$ — треугольник, а именно $T(\alpha, \beta) = \Delta(\alpha, \beta) \cap \Pi_{b-1}$ ($b = \operatorname{Re} \alpha$), где $\Pi_a = \{z : \operatorname{Re} z \geq a\}$.

Определение. Будем говорить, что система $\{e^{\lambda_n z}\}$ T -усиленно не полна, если для любых $\alpha \in \mathbb{C}$, β ($0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$), для любого q ($0 < q < \infty$), для любого $\nu > 0$, $\nu \neq \lambda_n$

$$\inf_{\gamma} \inf_{c_n} \|e^{\nu z} - \sum_n c_n e^{\lambda_n z}\|_{\gamma} = \epsilon_{\nu}(\alpha, \beta, q, \Lambda) > 0.$$

Здесь внешняя точная нижняя грань берется по всем кривым $\gamma \in G_q(a, b)$ ($b = \operatorname{Re} \alpha$, $a = b - 1$), содержащимся в треугольнике $T(\alpha, \beta)$ и таким, что $\gamma(b) = \alpha$, $\sum_n c_n e^{\lambda_n z}$ — квазиполином, $\|g(z)\|_\gamma = \max_{z \in \gamma} |g(z)|$.

Естественным образом вводится и понятие Т-усиленно свободной системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ (для этого в предыдущем определении выражение $\|e^{\nu z} - \sum_n c_n e^{\lambda_n z}\|_\gamma$ следует заменить на $\|e^{\lambda_k z} - \sum_{n \neq k} c_n e^{\lambda_n z}\|_\gamma$).

Ясно, что если система экспонент Т-усиленно не полна, то она не полна в $C(\gamma)$ для любой дуги $\gamma \in G$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ Т-усиленно свободна, то для любой кривой $\gamma \in G$ сумма ряда Дирихле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad \sup_n |a_n| \neq 0,$$

абсолютно сходящегося во всей плоскости, не может быть ограничена.

Доказательство. Пусть $\gamma \in G$, т.е. $M_\gamma < \infty$. Предположим, что $\|F\|_\gamma = \sup_\gamma |F(z)| \leq M < \infty$. Пусть, далее, $\{\alpha_m\}$ — последовательность точек α_m , $\alpha_m \in \gamma$, $\alpha_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Для любого $m \geq 1$ найдется номер N_m , такой, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_m} a_n e^{\lambda_n z} \right\|_{\gamma_m} \leq 2M,$$

где $\gamma_m = \{z : z \in \gamma, \operatorname{Re} \alpha_m - 1 \leq \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} \alpha_m\}$. Если $a_1 \neq 0$, то отсюда имеем

$$\|e^{\lambda_1 z} - \sum_{n=2}^{N_m} b_n e^{\lambda_n z}\|_{\gamma_m} \leq \frac{2M}{|a_1|}, \quad b_n = \frac{a_n}{|a_1|}.$$

Полагая $z = w + \alpha_m$, видим, что

$$\|e^{\lambda_1 w} - \sum_{n=2}^{N_m} c_n^{(m)} e^{\lambda_n w}\|_{\gamma_m^*} \leq \frac{2M}{|a_1|} e^{-\lambda_1 \sigma_m},$$

где $\sigma_m = \operatorname{Re} \alpha_m$, $c_n^{(m)} = b_n e^{(\lambda_n - \lambda_1) \alpha_m}$, а γ_m^* — кривая из $G_q(-1, 0)$ ($q = M_\gamma$), причем $\gamma_m^*(0) = 0$. Поскольку $q < \infty$, то все кривые γ_m^* , получаемые

сдвигом отрезков γ_m кривой γ , содержатся при некотором β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) в треугольнике $T(0, \beta)$. Так как $\sigma_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то

$$\inf_{c_n^{(m)}} \|e^{\lambda_1 w} - \sum_{n=2}^{N_m} c_n^{(m)} e^{\lambda_n w}\|_{\gamma_m^*} = 0,$$

т.е. система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не является Т-усиленно свободной. Полученное противоречие и означает, что $\sup_{\gamma} |F(z)| = \infty$.

§2. Основной результат

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $n = o(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$,

$$h(\delta) = \int_0^\infty Q(ir) e^{-\delta r} dr, \quad Q(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть

$$\int_0^{d_0} \ln \ln h(\delta) d\delta < \infty, \quad h(d_0) = e. \quad (6)$$

Тогда система $\{e^{\lambda_n z}\}$ Т-усиленно не полна и Т-усиленно свободна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не является Т-усиленно не полной. Тогда найдутся $\alpha \in \mathbb{C}$, β ($0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$), q ($0 < q < \infty$), $\nu > 0$, $\nu \neq \lambda_n$ ($n \geq 1$) такие, что

$$\inf_{\gamma} \inf_{c_n} \|e^{\nu z} - \sum_n c_n e^{\lambda_n z}\|_{\gamma} = 0,$$

где $\gamma : [a, b] \rightarrow T(\alpha, \beta)$, $\gamma \in G_q(a, b)$, $b = Re\alpha$, $a = b - 1$, $\gamma(b) = \alpha$. Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ найдутся кривая $\gamma_\epsilon \in G_q(a, b)$, $\gamma_\epsilon : [a, b] \rightarrow T(\alpha, \beta)$, $\gamma_\epsilon(b) = \alpha$, квазиполином $\sum_n c_n e^{\lambda_n z}$, такие, что

$$\|e^{\nu z} - \sum_n c_n e^{\lambda_n z}\|_{\gamma_\epsilon} < \epsilon.$$

Отсюда

$$\|g(z)\|_{\gamma_\epsilon} < 1, \quad g(z) = a_\nu e^{\nu z} - \sum_n a_n e^{\lambda_n z},$$

где $a_\nu = \epsilon^{-1}$, $a_n = c_n \epsilon^{-1}$.

Введем в рассмотрение интерполирующую функцию А.Ф. Леонтьева [1]

$$\omega(\mu, \xi, g) = e^{-\xi\mu} \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(t) \left(\int_0^t g(t + \xi - \eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) dt, \quad (7)$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$ — сопряженную диаграмму функции $M(\lambda) = (\lambda - \nu)Q(\lambda)$ ($Q(\lambda)$ — функция, определенная формулой (5), а $\varphi(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $M(\lambda)$). Пусть D' — область, ограниченная контуром C . Когда η пробегает отрезок от 0 до t , точка $t - \eta$ также пробегает этот отрезок. Поскольку $0 \in \overline{D}$, то $t + \xi - \eta \in D'_\xi$, где D'_ξ — смещение D' на вектор ξ . Так как $g(z)$ — целая функция, то параметр ξ — любое комплексное число.

Имеется последовательность окружностей $C_k = \{\mu : |\mu| = r_k, 0 < r_k \uparrow \infty, r_k < r_{k+1} \leq 2r_k\}$, такая, что при $|\mu| = r_k \rightarrow \infty$ [1]

$$-\ln |M(\mu)| = o(|\mu|). \quad (8)$$

Пусть K — граница угла $\{\mu : |\arg \mu| \leq \varphi_0 (0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{4})\}$, γ_k — конечный замкнутый контур, образованный дугой $d_k = \{\mu : |\mu| = r_k, |\arg \mu| \leq \varphi_0\}$ и частью K , отсекаемой окружностью $\{\mu : |\mu| = r_k\}$. Тогда для любого z при $k \geq k_0$ [1]

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{\omega(\mu, \xi, g)}{M(\mu)} e^{\mu z} d\mu. \quad (9)$$

Поскольку последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеет нулевую плотность, то $\overline{D} = \{0\}$. Имея это в виду, в формуле (7) в качестве C возьмем контур $\{t : |t| = \frac{\delta}{6} (0 < \delta < \frac{\pi}{4})\}$. Параметры ξ и δ в определении интерполирующей функции $\omega(\mu, \xi, g)$ выберем позже специальным образом.

Введем в рассмотрение угол

$$\Delta(\xi, \varphi'_0) = \{z : |\arg[-(z - \xi)]| \leq \psi'_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 2\epsilon_0\},$$

где $0 < \epsilon_0 < \frac{\pi}{8}$. Из точки α проведем горизонтальный луч l_+ вправо. Пусть $l_\epsilon = \gamma_\epsilon \cup l_+$, а β_1 и β_2 — произвольные точки на γ_ϵ , $Re\beta_1 < Re\beta_2$. Соединим их хордой. Так как $\gamma_\epsilon \in G_q(a, b)$ ($b = Re\alpha$, $a = b - 1$), то

$$\left| \frac{Im(\beta_2 - \beta_1)}{Re(\beta_2 - \beta_1)} \right| \leq q < \infty$$

равномерно для всех $\epsilon > 0$, $\beta_1 \in \gamma_\epsilon$, $\beta_2 \in \gamma_\epsilon$. Тогда существуют φ_0, ϵ_0 ($0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{4}$, $0 < \epsilon_0 < \frac{\pi}{8}$), такие, что для любого $\epsilon > 0$, для всех $\beta_1 \in \gamma_\epsilon$, $\beta_2 \in \gamma_\epsilon$ ($Re\beta_1 < Re\beta_2$) угол $\Delta(\beta_1, \psi'_0)$ будет содержаться в угле $\Delta(\beta_2, \psi'_0)$. Тогда тем более $\Delta(\beta_1, \psi_0) \subset \Delta(\beta_2, \psi_0)$, где $\psi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \epsilon_0$.

Пусть $\xi \in l_\epsilon$, $Re\xi = \sigma$. Тогда функция $\Phi_\epsilon(\sigma) = \max_{t \in \Delta(\xi, \psi_0)} |g(t)|$ определена на луче $[a, \infty)$. В силу выбора ψ_0 функция $\Phi_\epsilon(\sigma)$ неубывающая и непрерывная на этом луче, $\Phi_\epsilon(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Пусть $\xi \in l_\epsilon$, $\xi' \in l_\epsilon$, причем $Re\xi' = Re\xi + d\delta$, $d = \pi\epsilon_0^{-1}$. Через 2φ обозначим угол, под которым виден круг $\overline{D}(\xi, \delta) = \{z : |z - \xi| \leq \delta\}$ из точки ξ' . Ясно, что $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$. Поскольку

$$\frac{2}{\pi}\varphi \leq \sin \varphi \leq \frac{1}{d} = \frac{\epsilon_0}{\pi},$$

то видим, что $2\varphi \leq \epsilon_0$. Следовательно, круг $\overline{D}(\xi, \delta)$ целиком содержится в угле

$$\Delta(\xi', \psi_0) = \{z : |\arg[-(z - \xi')]| \leq \psi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \epsilon_0\}.$$

Действительно, $\Delta(\xi, \psi'_0) \subset \Delta(\xi', \psi'_0)$, в частности, $\xi \in \Delta(\xi', \psi'_0)$. Поскольку $2\varphi \leq \epsilon_0$, $\xi \in \Delta(\xi', \psi'_0)$, $\psi'_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - 2\epsilon_0$, $Re\xi' = Re\xi + d\delta$, $1 < d = \frac{\pi}{\epsilon_0}$, то круг $\overline{D}(\xi, \delta)$ целиком содержится в угле $\Delta(\xi', \psi_0)$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \epsilon_0$.

Оценим функцию $M(\mu)$ на лучах $\{\mu : \arg \mu = \pm\varphi_0\}$. Имеем [1, гл.I, §3, п.5]

$$-\ln |M(re^{i\varphi_0})| \leq n(pr) \ln \frac{1}{\varphi_0} + 2r^2 \int_{pr}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t^2 - r^2)} dt,$$

где $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1 + 1$, $p > 1$, $r > 0$. Отсюда получаем, что

$$-\ln |M(re^{i\varphi_0})| \leq n(pr) \ln \frac{1}{\varphi_0} + 2r^2 \frac{p}{p-1} \int_{pr}^{\infty} \frac{n(t)}{t^3} dt.$$

Далее, из условия (6) следует, что для некоторой функции $w_1 \in \Omega$ [11]

$$\ln M(r; M) \leq w_1(r).$$

Поскольку $n(r) \leq \ln M(er; M)$, то $n(r) \leq w_2(r)$, $w_2 \in \Omega$, $w_2(r) = w_1(er)$. Следовательно,

$$-\ln |M(re^{i\varphi_0})| \leq w_2(pr) \ln \frac{1}{\varphi_0} + \frac{2}{p(p-1)} w_2(pr) = w_3(r), \quad (10)$$

где $w_3 \in \Omega$.

Убедимся, что $\Phi_\epsilon(a) \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Действительно, в формуле (7) положим $\xi = \alpha - 2$, $C = \{t : |t| = \rho, \rho = \sin \psi_0\}$. Тогда [1]

$$a_\nu = \frac{1}{\epsilon} = \frac{w(\nu, \alpha - 2, g)}{M'(\nu)} \quad (0 < \nu \neq \lambda_n, n \geq 1).$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{\epsilon} \leq \frac{1}{|M'(\nu)|} \max_{|t|=\rho} |\varphi(t)| \max_{|s-(\alpha-2)|=\rho} |g(s)| e^{-(\alpha-2)\nu} e^\nu. \quad (11)$$

Поскольку при $\rho = \sin \psi_0$, $\xi = \alpha - 2$ круг $\overline{D}(\xi, \rho)$ целиком содержится в угле $\Delta(\alpha - 1, \psi_0)$, то из (11) получаем оценку

$$\frac{1}{\epsilon} \leq C(\nu, \alpha) \Phi_\epsilon(a), a = \operatorname{Re} \alpha - 1.$$

Здесь $\nu > 0$, α — фиксированное число, а $C(\nu, \alpha)$ — постоянная, не зависящая от ϵ . Следовательно, $\Phi_\epsilon(a) \rightarrow \infty$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Пусть $\sigma \in [a, \frac{a+b}{2}]$, $a = \operatorname{Re} \alpha - 1$, $b = \operatorname{Re} \alpha$. Рассмотрим функцию $h^*(\delta) = h_0(\delta)h(\frac{\delta}{6})$, где

$$h_0(\delta) = \int_0^\infty e^{w_3(r) - \delta r} dr, \quad h(\delta) = \int_0^\infty M(ir) e^{-\delta r} dr,$$

а w_3 — функция из оценки (10). Пусть $c = \min(d_1, d_2)$, где $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ такие, что $h(\frac{d_1}{6}) = e$, $h_0(d_2) = e$. Так как функция $h^*(\delta)$ непрерывна при $0 < \delta < \infty$, $h^*(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$, $h^*(\delta) \downarrow$ при $\delta \uparrow$, то для любого $\sigma \geq a$ уравнение

$$h^*(\delta) = \Phi_\epsilon^{\frac{1}{\delta}}(\sigma) \quad (12)$$

имеет единственное решение $\delta = \delta(\sigma)$, $0 < \delta(\sigma) < \frac{\pi}{4}$, если $\epsilon = \epsilon_1$ достаточно мало. Ясно, что функция $\delta = \delta(\sigma)$ невозрастающая. Поскольку $\delta(a) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$, то ϵ_1 можно выбрать так, что

$$e \leq \Phi_{\epsilon_1}(a), \quad L\delta(a) < \frac{1}{3} \quad (L = 2d + 1). \quad (13)$$

Далее, в формуле (7) выберем ξ так, чтобы $\xi \in l_{\epsilon_1}$, $\operatorname{Re} \xi = \sigma + d\delta$. Тогда для всех z из множества $E(\sigma) = \{z : |\arg[-(z - \xi)]| \leq \psi_0, |z - \xi| \geq d\delta\}$ имеем

$$|e^{(z-\alpha)\mu}| \leq e^{-rd\delta \sin \epsilon_0} < e^{-2r\delta}, \quad |\mu| = r, \quad \mu \in \gamma_k \quad (k \geq 1),$$

где γ_k — контур из формулы (9). Значит, учитывая (8), заключаем, что при $z \in E(\sigma)$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{d_k} \frac{\omega(\mu, \xi, g)}{M(\mu)} e^{\mu z} d\mu$$

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Следовательно для всех z из $E(\sigma)$ имеет место представление

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\omega(\mu, \xi, g)}{M(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad (14)$$

где K — граница угла $\{\mu : |\arg \mu| \leq \varphi_0\}$.

Пусть $\xi' \in \gamma_{\epsilon_1}$, $Re \xi' = \sigma$. Поскольку угол $\Delta(\xi', \psi_0)$ содержится в $E(\sigma)$, то из (14) получаем, что

$$\Phi_{\epsilon_1}(\sigma) \leq h^*(\delta) \max_{|s-\xi| \leq \frac{\delta}{6}} |g(s)|. \quad (15)$$

Пусть $\xi'' \in l_{\epsilon_1}$, $Re \xi'' = Re \xi + d\delta$. Как было показано выше, при таком выборе ξ'' имеет место включение $\overline{D}(\xi, \delta) \subset \Delta(\xi'', \psi_0)$. Следовательно, применяя лемму 1, учитывая оценку $\|g(z)\|_{\gamma_{\epsilon_1}} < 1$ и уравнение (12) при $\epsilon = \epsilon_1$, из (15) окончательно получаем оценку

$$\Phi_{\epsilon_1}^{\frac{7}{8}}(\sigma) \leq \Phi_{\epsilon_1}^{\frac{3}{4}}(\sigma + L\delta), \quad (16)$$

где $\sigma \in [a, \frac{a+b}{2}]$, $a = Re \alpha - 1$, $b = Re \alpha$, $L = 2d + 1$.

Оценим функцию $\Phi_{\epsilon_1}(\sigma + L\delta)$ сверху. Для этого уравнение (12) перепишем в виде

$$\ln \ln h^*(\delta) = u(\sigma), \quad u(\sigma) = -\ln 8 + \ln \ln \Phi_{\epsilon_1}(\sigma).$$

Пусть $K = K(t)$ — функция, обратная к функции $t = \ln \ln h^*(\delta)$. Тогда $K(u(\sigma)) = \delta$. Ясно, что функция $K(t)$ непрерывна, не убывает при $\sigma \geq a$ ($a = Re \alpha - 1$), $u(\sigma) \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Поскольку $w_3 \in \Omega$, то [8], [9]

$$\int_0^{d_2} \ln \ln h_0(\delta) d\delta < \infty, \quad h_0(d_2) = e.$$

Тогда с учетом условия (6) заключаем, что

$$\int_0^c \ln \ln h^*(\delta) d\delta < \infty,$$

где $h^*(\delta) = h_0(\delta)h(\frac{\delta}{6})$, $c = \min(d_1, d_2)$, $h^*(c) > e$. Следовательно,

$$\int_{u(a)}^{\infty} K(u)du < \infty, \quad a = \operatorname{Re} \alpha - 1. \quad (17)$$

Применим теперь лемму 2. Тогда для любого $\tau > 0$, для всех $\sigma \geq a$, но вне некоторого множества $F \subset [a, \infty)$,

$$mF \leq L\tau^{-1} \int_{u(a)}^{\infty} K(u)du + LK(u(a)), \quad K(u(a)) = \delta(a),$$

выполняется оценка

$$u(\sigma + LK(u(\sigma))) < u(\sigma) + \tau,$$

то есть

$$\ln \ln \Phi_{\epsilon_1}(\sigma + L\delta) < \ln \ln \Phi_{\epsilon_1}(\sigma) + \tau. \quad (18)$$

Пусть $\tau = \tau_0 > 0$ такое, что $e^{\tau_0} < \frac{8}{7}$. Поскольку $u(a) \rightarrow \infty$, $\delta(a) \rightarrow 0$ при $\epsilon_1 \rightarrow 0$, то ϵ_1 можно выбрать так, чтобы кроме условий (13) имела место оценка $mF \leq \frac{1}{4}$. Это возможно, так как интеграл (17) сходится, а τ_0 фиксировано. Но $b - a = 1$. Следовательно, найдется точка σ^* , $\sigma^* \in [a, \frac{a+b}{2}] \setminus F$, причем $\sigma^* + L\delta^* \leq \frac{a+b}{2} + L\delta(a) < b$, где $\delta^* = \delta(\sigma^*)$ — решение уравнения (12). Тогда из (16), (18) получаем, что

$$\frac{7}{6} \ln \Phi_{\epsilon_1}(\sigma^*) < e^{\tau_0} \ln \Phi_{\epsilon_1}(\sigma^*) < \frac{8}{7} \ln \Phi_{\epsilon_1}(\sigma^*).$$

Получили противоречие. Значит, система $\{e^{\lambda_n z}\}$ Т-усиленно не полна.

Ясно, что при условии (6) любая подсистема системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ Т-усиленно не полна (условие (6) для любой подпоследовательности $\{\lambda_n\}$ не нарушится). Поэтому при выполнении условия (6) система $\{e^{\lambda_n z}\}$ Т-усиленно свободна.

Теорема 2 полностью доказана.

Следствие. При условии (4) система $\{e^{\lambda_n z}\}$ не полна в $C(\gamma)$, где γ — любая гладкая кривая.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №08-01-00779-а. И гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ, НШ-3081-2008.1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Леонтьев А. Ф. *Последовательности полиномов из экспонент*. М.: Наука, 1980.
2. Korevaar J. *Müntz approximatioon on arcs and Macintyre exponents* // Lecture notes in Mathematics – 1978. – v. 747. – p. 205–218.
3. Korevaar J. *Approximation on curves by linear combinations of exponentials* // Approximation theory. New York and London – 1973. – p. 387–399.
4. Леонтьев А. Ф. *О полноте системы экспонент на кривой* // Сиб. матем. журн. – 1973. – т. 15. – № 5. – с. 1103–1114.
5. Malliavin P., Siddiqi J. *Approximation polynomiale sur un arc analitique dans le plan complexe* // Comptus rendus Acad. – Sci. – 1971. – v. 273. – № 2. – p. 105–108.
6. Siddiqi J., Baille A. *Approximation polynomiale sur un arc analitique dans le plan complexe* // Comptus rendus Acad. – Sci. – 1975. – v. 281. – № 10. – p. 791.
7. Korevaar J. and Dixon M. *Nonspanning sets of exponentials on curves* // Acta Math. Acad. Sci. – Hungaricae, – 1979. – v. 33. – № 1–2. – p. 89–100.
8. Гайсин А. М. *Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра* // Матем. сб. – 1991. – т. 182. – № 7. – с. 931–945.
9. Korevaar J., Dixon M. *Interpolation. strongly nonspanning powers and Macintyre exponents* // Indag. Math. (N.S.) – 1978. – v. 40. – № 2. – p. 243–258.
10. Гольдберг А. А. *Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций*. М.: Наука. – 1970.
11. Кацнельсон В. Э. *Целые функции класса Карптрайт с нерегулярным поведением* // Функциональный анализ и его приложения. – 1976. – т. 10 – № 4. – с. 35–44.

ПОСТРОЕНИЕ ВНЕШНЕГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СУБГАРМОНИЧЕСКОМ АВТОРЕЗОНАНСЕ $n = 2$

Р. Н. Гарифуллин

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
rustem@matem.anrb.ru*

1. Введение

Постановка задачи. В данной работе исследуется нелинейное уравнение второго порядка, возмущенное быстро осциллирующей функцией с малой амплитудой:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + V'(u) = \varepsilon f(\tau) \cos\left(\frac{\Phi(\tau)}{2\varepsilon^2}\right), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \tau = \varepsilon^2 t. \quad (1)$$

В качестве фазы возмущения берется функция $\Phi(\tau) = \tau - \tau^3 \phi(\tau)$; здесь $f(\tau), \phi(\tau) \neq 0$ - гладкие функции. От потенциала $V(u) \in C^\infty$ требуется, чтобы $V(0) = V'(0) = 0, V''(0) = 1$, т.е. чтобы точка $u = 0$ была точкой устойчивого равновесия невозмущенного уравнения. Рассматриваются решения, которые в начальный момент находятся вблизи устойчивого положения равновесия невозмущенного уравнения:

$$(|u| + |\dot{u}|)|_{t=0} = O(\varepsilon^{2/3}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для таких решений ставится задача о построении асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$, пригодной на большом временном интервале $0 < t \leq O(\varepsilon^{-1})$. Особый интерес представляют решения, амплитуда которых нарастает со временем до величин порядка $O(1)$. Назовем такие решения авторезонансными.

Авторезонансом принято называть явление значительного роста амплитуды колебаний нелинейных систем под действием малого возмущения [1,2,3]. Подобные эффекты возникают и играют важную роль в ряде физических систем, например, в ускорителях релятивистских частиц

[4,5,6]. В данной задаче собственная частота кратна частоте возмущения в начальный момент времени и поэтому возможно явление субгармонического авторезонаса.

В данной работе строится двухпараметрическое асимптотическое решение пригодное в области $\varepsilon^{-2/3} \ll t \leq O(\varepsilon^{-2})$. Асимптотика решений на более малых временах известна, из нее в частности следует, что для амплитуды первой гармоники и сдвига фаз во внешней области должна быть верна следующая асимптотика:

$$A = A_0(\tau) + O(\varepsilon^{7/6}), \Omega = \Omega_0(\tau) + O(\varepsilon^{1/6}). \quad (2)$$

Эти асимптотики определяют структуру внешнего разложения. Такая ситуация характерна для метода согласования [7].

В случае отсутствия 2 в знаменатели фазы, требуемая асимптотика построена в работе [12]. Построение асимптотики в данном случае проводится тем же методом, однако при усреднение по быстрой переменной возникают дополнительные сложности.

2. Решения невозмущенного и линеаризованных уравнений.

Конструкция внешнего разложения будет основываться на решениях невозмущенного уравнения. В этом разделе решается невозмущенное уравнение:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + V'(w) = 0. \quad (3)$$

Это уравнение является автономным, поэтому одна произвольная константа содержится в сдвиге фаз.

Для решений этого уравнения можно доказать следующее утверждение:

Теорема 1. *У невозмущенного уравнения существует 2-х параметрическое семейство решений $w(t; A, t_0) = W(\sigma, A)$, где $\sigma = \omega(A)t + t_0$, A, t_0 – произвольные параметры, функция $W(\sigma, A)$ – 2π периодическая четная по переменной σ , гладкая по A , $\omega(A)$ определяемая функция, параметр A – амплитуда первой гармоники.*

Доказательство утверждения следует из интегрируемости уравнения (3). Гладкость по A в окрестности нуля $A \in [0, A^0]$ можно показать, воспользовавшись гладкостью решения уравнения по начальным данным [10].

Для функций $W(\sigma, A), \omega(A)$ методом Ляпунова-Пуанкаре [10] можно построить асимптотики при $A \rightarrow 0$. Они имеют вид:

$$W(\sigma, A) = A \cos \sigma + \frac{A^2 V'''(0)}{12} (\cos 2\sigma - 3) + O(A^3), \quad (4)$$

$$\omega(A) = 1 + \frac{A^2}{48}(3V^{(4)}(0) - 5(V'''(0))^2) + O(A^4), A \rightarrow 0. \quad (5)$$

Также можно показать, что $\omega(A)$ – четная функция A . Для энергии невозмущенных колебаний

$$E = \omega^2(A) \frac{(\partial_\sigma W)^2}{2} + V(W) \quad (6)$$

при $A \rightarrow 0$ верна асимптотика:

$$E(A) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{576}(27V^{(4)}(0) - 37(V'''(0))^2) + O(A^5), A \rightarrow 0.$$

Для всех приведенных функций существует полное асимптотическое разложение в виде рядов по целым степеням A .

Описанное в лемме решение будет использоваться в качестве главного члена внешнего разложения при подходящей модуляции амплитуды A и сдвига фазы t_0 .

При построении асимптотического решения существенную роль играют решения неоднородных линеаризованных уравнений, правая часть которых является 4π периодической функцией σ и содержит два произвольных параметра S, D . Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\omega^2 \partial_\sigma^2 Q + V''(W)Q = F(\sigma, A) - 2\omega S \partial_\sigma^2 W - D(\omega' \partial_\sigma W + 2\omega \partial_{A\sigma} W), \quad (6)$$

здесь $W(\sigma; A)$ – решение нелинейного уравнения (3), $F(\sigma)$ – 2π периодическая функция σ , зависимость от параметра A возникает в правых частях уравнений (6) и, следовательно, в решении $Q(\sigma; A)$.

Ведem два определения, в терминах которых удобно исследовать линеаризованное уравнение (6):

Определение 1. Обозначим через $\langle P \rangle$ и $[P]$ среднее по периоду от P и интеграл от функции P без среднего значения:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} P(\sigma) d\sigma, \quad [P](\sigma) = \int_0^\sigma (P(\sigma') - \langle P \rangle) d\sigma'.$$

Определение 2. Обозначим через $\mathcal{A}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ множество функций, зависящих от A и возможно от других переменных со следующим свойством. Функция $F(A) \in \mathcal{A}^n \Leftrightarrow F(A) = A^n \tilde{F}(A)$, где $\tilde{F}(A)$ гладкая функция, которая разлагается в ряд Тейлора при $A \rightarrow 0$.

Нас интересуют ограниченные периодические по σ , не содержащие первую гармонику, решения уравнения (6). Известно [10], что ограниченные решения существуют лишь при выполнении некоторого условия. Это условие определяет D :

$$D = \omega(A) \langle W_\sigma(\sigma, A) F(\sigma, A) \rangle / E'(A). \quad (7)$$

Если D выбраны в соответствие с (7), то для уравнения (6) существует однопараметрическое семейство периодических решений:

$$Q(\sigma; A) = \left(W_\sigma(\sigma) \left(C_1 - \frac{\omega'}{\omega} [W_\sigma G](\sigma) + [W_A G](\sigma) \right) + W_A(\sigma) \left([W_\sigma G](\sigma) + S \frac{E'}{\omega'} - \langle [\partial_\sigma W F] \rangle + \frac{\omega}{\omega'} \langle \partial_A W F \rangle \right) \right) / E'(A). \quad (8)$$

Оно содержит одну произвольную константу C_1 .

Требование отсутствия первых гармоник в функции $Q(\sigma)$ определяет параметры S, C_1 . В частности S определяется из требования:

$$\langle Q(\sigma; A) \cos \sigma \rangle = 0. \quad (9)$$

Таким образом сформулируем утверждение:

Лемма 1. 1) Для уравнения (6) существует периодическое решение, не содержащих первых гармоник вида (8), тогда и только тогда, когда S и D определены из соотношений (7), (9). 2) Если $F(\sigma, A) \in \mathcal{A}^n$, тогда $Q(\sigma, A) \in \mathcal{A}^n$, $D(A) \in \mathcal{A}^n$, $S(A) \in \mathcal{A}^{n-1}$. 3) Если правая часть $F(\sigma, A)$ содержит лишь полуцелые гармоники, то $S = D = 0$, решение уравнения (6) содержит лишь полуцелые гармоники.

Доказательство. Первые два утверждения доказаны в работе [12], докажем третье. Если $F(\sigma, A)$ содержит лишь полуцелые гармоники, то в силу формулы (7) получаем $D = 0$, так как находится среднее от полуцелых гармоник. Также равны 0 все средние значения в формулах (9), (8). Из этого следует утверждение леммы. Лемма доказана.

3. Усреднение в быстрой переменной.

Целью данного пункта является переход к усредненным уравнениям. Для рассматриваемого уравнения (1) с внешней осциллирующей силой существует много решений с двухфазной асимптотикой [11]. В данной работе мы интересуемся однофазными решениями, которые выделяются резонансным условием близости собственной и вынуждающей частоты:

$|\omega(A) - \Phi'(\tau)| \ll 1$. В качестве главного члена асимптотического решения берется решение невозмущенного уравнения с медленной деформацией параметров:

$$u \approx W(\sigma, A), \quad \sigma = \varepsilon^{-2}\Phi(\tau) + \Omega(t, \varepsilon), \quad A = A(t, \varepsilon).$$

Как видим структура быстрой фазы $\sigma \approx \varepsilon^{-2}\Phi(\tau)$ фиксируется в главном.

Переход от исходного уравнения (1) к усредненным уравнениям осуществляется посредством замены

$$u(t, \varepsilon) = U(\sigma, A, \Omega, \tau, \alpha, \varepsilon), \quad \tau = \varepsilon t, \quad \alpha = \omega(A) - \Phi'(\tau),$$

где $\Omega(t, \varepsilon)$, $A(t, \varepsilon)$ новые неизвестные переменные. Как это делается в похожих задачах [9] замена выбирается не точной, а асимптотической:

$$U(\sigma, \Omega, A, \tau, \varepsilon, \alpha) = W(\sigma, A) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^k \alpha^m U_{km}(\sigma, \Omega, A, \tau). \quad (10)$$

В отличие от известных методов [9] предлагаемый анзац содержит разложение по малой величине

$$\alpha = \omega(A) - \Phi'(\tau), \quad (11)$$

которая априори неизвестна, поскольку функцию $A(t, \varepsilon)$ еще предстоит найти. Такой подход значительно упрощает изложение и позволяет найти эффективные асимптотические формулы.

Здесь и ниже все ряды понимаются как асимптотические; вопрос о сходимости рядов не обсуждается.

Целью замены является переход к таким уравнениям для A, Ω , которые бы не содержали зависимости от быстрой переменной σ . Такие уравнения обычно называются усредненными. Они являются аналогами уравнений эйконала и переноса в методах типа ВКБ:

$$\frac{d(\varepsilon^{-2}\Phi(\tau) + \Omega)}{dt} = \omega(A) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \alpha^m S_{km}(\Omega, A, \tau), \quad (12a)$$

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} \alpha^m D_{km}(\Omega, A, \tau). \quad (12b)$$

На данном этапе вычисляются коэффициенты рядов (10), (12). Дополнительным ограничением является требование периодичности функций $U_{km}(\sigma, \Omega, A, \tau)$ по быстрой переменной σ . Именно это (секулярное)

условие, вместе с требованиями отсутствия первых гармоник, приводит к однозначному определению коэффициентов рядов. Отсутствие нечетных степеней ε в рядах (12) объясняется, тем что $U_{2k-1,m}$ зависят только от полуцелых гармоник, что следует из формулы (8).

С учетом замены уравнение на $U(\sigma, A, \Omega, \tau, \alpha, \varepsilon)$ приобретает вид:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + V'(U) = \varepsilon f \cos((\sigma - \Omega)/2). \quad (13)$$

Здесь оператор полной производной по t от функции U выписывается обычным образом с учетом зависимости от t всех переменных.

Рекуррентная система задач для U_{km} получается обычным образом. Зависимость от быстрой переменной σ находится из линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \omega^2 \partial_\sigma^2 U_{km} + V''(W) U_{km} = G_{km}(\sigma, A, \Omega, \tau) - 2\omega S_{k/2,m} \partial_\sigma^2 W - \\ - D_{k/2,m} (\omega'(A) \partial_\sigma W + 2\omega \partial_\sigma \partial_A W), k \geq 1, m \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Функции G_{km} из правых частей вычисляются через предыдущие поправки. В этих уравнениях предполагается $S_{k/2,m}$, $D_{k/2,m}$ равны нулю при полуцелых индексах. На каждом шаге правые части содержат пару коэффициентов S_{km} , D_{km} рядов (12). Эти коэффициенты определяются одновременно с решениями $U_{2k,m}$ из секулярных условий (7),(9).

Для решений уравнений (14) доказывается верна

Теорема 2. 1) Для исходного уравнения (1) существует асимптотическая замена вида (10) такая, что усредненные уравнения (12) на новые неизвестные A, Ω не содержат переменной σ . 2) Для U_{km} , D_{km} , S_{km} верно: $U_{2l,m} \in \mathcal{A}^{1-l}$, $D_{lm} \in \mathcal{A}^{1-l}$, $S_{lm} \in \mathcal{A}^{-l}$, $U_{2l+1,m} \in \mathcal{A}^{-l}$, $U_{2l,m}$ содержит лишь целые гармоники, $U_{2l+1,m}$ – полуцелые гармоники.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы, если доказать, что $G_{2l,m} \in \mathcal{A}^{1-l}$, $G_{2l+1,m} \in \mathcal{A}^{-l}$ и целость-полуцелость гармоник. Эти утверждения доказываются индукцией по k . Теорема доказана.

Как видно из полученных результатов, коэффициенты асимптотических рядов (10),(12) имеют особенности при $A \rightarrow 0$. В частности, коэффициент $S_{10} \approx A^{-1}$ при $A \rightarrow 0$. Возникновение такого рода особенностей – обычная ситуация в задачах с бисингулярным возмущением, решаемых методом согласования [7]. Итогом данного параграфа являются усредненные уравнения (12).

4. Решение уравнений в медленных переменных.

Полученные уравнения (12) имеют ту же структуры, что и уравнения (13) в статье [12], единственное отличие вместо ε стоит ε^2 . Поэтому результаты исследования этой системы возьмем из статьи [12].

Единственное отличие получается при исследовании алгебраических уравнений на главные члены асимптотики функций $A(t, \varepsilon), \Omega(t, \varepsilon)$:

$$A = A_0(\tau) + \varepsilon^{7/6} \lambda(\tau) A_1(t, \varepsilon), \quad \Omega = \Omega_0(\tau) + \varepsilon^{1/6} \Omega_1(t, \varepsilon). \quad (15)$$

Степени $7/6, 1/6$ появляются из требования согласования с внутренним разложением. Здесь $A_0(\tau), \Omega_0(\tau)$ описывают амплитуду и сдвиг фазы в главном; функции A_1, Ω_1 описывают поправки; множитель $\lambda(\tau)$ добавлен для удобства. Эти уравнения имеют вид:

$$\omega(A_0) = \Phi'(\tau), \quad D_{10}(\Omega_0, A_0, \tau) = A'_0(\tau). \quad (16)$$

Для решений уравнений (16) доказываем утверждение:

Теорема 3. Пусть $3V^{(4)}(0) - 5(V'''(0))^2 \neq 0$ и выполнены условия

$$\frac{f^4(0)}{81} > \frac{3\phi(0)}{3V^{(4)}(0) - 5(V'''(0))^2} > 0.$$

Тогда существует $\tau^* > 0$ такое, что при $\tau \in [0, \tau^*]$ уравнения (16) разрешимы в классе гладких функций, причем $A_0(\tau) \geq 0$.

Доказательство. Разрешимость первого уравнения доказана в [12]. Из доказательства следует формула:

$$A_0(\tau) = \tau \sqrt{\tilde{R}_0(\tau)} = \tau \tilde{A}_0(\tau), \quad (17)$$

где $\tilde{A}_0(\tau)$ - гладкая функция.

Докажем разрешимость второго уравнения (16). При $\tau = 0$ имеем:

$$A_0(0) = 0, \quad A'_0(0) = \sqrt{\frac{48\phi(0)}{3V^{(4)}(0) - 5(V'''(0))^2}},$$

$$D_{10}(\Omega_0(0), 0, 0) = - \langle \sin \sigma U_{10}^2(\sigma, \Omega_0(0), 0, 0) \rangle = -\frac{4f^2}{9} \sin \Omega_0(0)$$

Следовательно при $\tau = 0$ уравнение (16) приобретает вид:

$$-\frac{4f^2(0)}{9} \sin \Omega_0(0) = \sqrt{\frac{48\phi(0)}{3V^{(4)}(0) - 5(V'''(0))^2}}$$

Это уравнение разрешимо при выполнении условий теоремы. Локальная разрешимость уравнения (16) при $\tau \in [0, \tau_0]$ следует из теоремы о неявной функции. Теорема доказана.

Необходимо заметить, что при выполнении условий теоремы для первого уравнения существует единственный положительный корень, а для второго уравнения (16) существует два корня на отрезке $(-\pi, \pi)$. Один из корней соответствует двухпараметрическому семейству ограниченных решений уравнений для A_1, Ω_1 , второй однопараметрическому семейству и нам не подходит.

На функции A_1, Ω_1 получаем следующую систему:

$$\varepsilon \frac{dA_1}{d\tau} = D(\tau)\Omega_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/6} B_n(\tau, A_1, \Omega_1), \quad (18a)$$

$$\varepsilon \frac{d\Omega_1}{d\tau} = \text{sign}(\omega_1(\tau)\bar{D}_{10})D(\tau)A_1 + \sum_{n=5}^{\infty} \varepsilon^{n/6} F_n(\tau, A_1, \Omega_1). \quad (18b)$$

Для решение исходной задачи требуется построить асимптотику решений системы (18) пригодную на временах $\tau = O(1), \varepsilon \rightarrow 0$. Эта асимптотика строится полностью аналогично [12], здесь же просто выпишем главный член асимптотики:

$$\begin{pmatrix} A_1(\tau, \varepsilon) \\ \Omega_1(\tau, \varepsilon) \end{pmatrix} = C^0 \tau^{-1/4} \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix} + O(\varepsilon^{1/6}),$$

где фаза s имеет вид:

$$\begin{aligned} s(\tau, \varepsilon) = & \varepsilon^{-1} \tau^{3/2} s_0(\tau) + \varepsilon^{-2/3} \tau s_1(\tau, C^0) \\ & + \varepsilon^{-1/3} \tau^{1/2} s_2(\tau, C^0) + s_3(\tau, C^0) \ln \tau + s^0. \end{aligned}$$

Здесь s^0, C^0 произвольные постоянные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00134-а и 09-01-92436-КЭ_а), программы Президента “Молодые кандидаты” (проект МК-1239.2007.1), “Ведущие научные школы” (проект НШ-2215.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fajans J., Friedland L. *Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators* // Am. J. Phys. 2001. **69**, № 10. P. 1096–1102.

2. Голованевский К. С. *Гиромагнитный авторезонанс с переменной частотой* // Ф. плазмы. 1985. **11**, в.3. С.295-299.
3. Friedland L. *Autoresonant Excitation and Evolution of Nonlinear Waves: The Variational Approach* // Physical Review E. 1997. **55**. P.1929–1939.
4. Векслер В. И. *Новый метод ускорения релятивистских частиц* // Доклады АН СССР. 1944. **43**, С. 346-348.
5. Андронов А. А., Горелик Г. А. *О резонансных явлениях при движении релятивистской частицы в циклотроне* // Доклады АН СССР. 1945. **49**, № 9. С. 664-666.
6. McMillan E. M. *The Synchrotron—A Proposed High Energy Particle Accelerator* // Phys. Rev. 1945. **68**. P.143-144.
7. Ильин А. М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.: Наука. 1989.
8. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука. 1974. 501.
9. Кузмак Г. Е. *Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами* // Прикладная математика и механика. 1951. **23**, с.519-526.
10. Моисеев Н. Н. *Асимптотические методы нелинейной механики*. М.: Наука. 1969. 379 с.
11. Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. *Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях* // Итоги науки и техники, 1980., **15**, с. 4-94.
12. Гарифуллин Р. Н. *Асимптотика авторезонансных колебаний. Внешнее разложение*. // ЖВММФ, 2006, т.42, №5, с.665-675.

ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ТИПА НЬЮТОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА, СХОДЯЩЕГОСЯ С ЛЮБОГО НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

И. И Голичев

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
shaig@anrb.ru*

Исследованию уравнений Навье-Стокса посвящено большое число работ (см. например, работы [1]-[7] и их библиографию). Итерационные процессы рассматривались в основном на конечномерных аппроксимациях или при условии достаточной близости начального приближения.

В работе [7] построен итерационный процесс, сходящийся с любого начального приближения на основе использования априорных оценок. Численная реализация предлагаемого метода обоснована и протестирована в работе [10].

В методе, рассматриваемом в работах [7], [10] нелинейный член рассматривался как младший, поэтому при малом коэффициенте вязкости его скорость сходимости оказалась невысокой. В настоящей работе предлагается другой метод линеаризации уравнений Навье-Стокса, который обеспечивает высокую скорость сходимости и при малом коэффициенте вязкости.

1. Постановка задач и построение итерационного процесса.

Пусть Ω - ограниченная область в R^n и $Q = \Omega \times [0, T]$. Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u - \sum_{i=1}^n u_i u_{x_i} - f - \operatorname{grad} p = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = h \text{ на } \Omega, \quad (4)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, $S = \partial\Omega \times [0, T]$, $\partial\Omega$ - граница области Ω .

Введем следующие обозначения: $W = \{v \in [\dot{W}_2^1(\Omega)]^n : \operatorname{div} v = 0\}$, H - замыкание W в $[L_2(\Omega)]^n = L_2^n(\Omega)$, $\|u\|_H = \|u\|_{L_2^n(\Omega)}$, $\|u\|_{H,a,b}^2 = \int_a^b \|u\|_H^2 dt$,

$$\begin{aligned} \|u_x\|_H^2 &= \sum_{i=1}^n \|u_{i,x}\|^2 = \sum_{i,k=1}^n \|u_{i,x_k}\|^2, \quad \|u_x\|_{H,a,b} = \int_a^b \|u_x\|_H^2 dt, \\ \bar{Z}_a^b &= \bar{Z}(Q_a^b) = W_2^1(a, b; W \cap [W_2^2(\Omega)]^n) \cap L_\infty(0, T; W), \quad \bar{Z} = \bar{Z}_0^T, \\ \|u\|_{\bar{Z}_a^b} &= \operatorname{vrai} \max_{t \in [a,b]} \|u_x(x, t)\|_H + \|\Delta u\|_{H,a,b} + \|u_t\|_{H,a,b}, \\ \|u\|_{\tilde{Z}_a^b} &= \operatorname{vrai} \max_{t \in [a,b]} \|u_x(x, t)\|_H + \|\Delta u\|_{H,a,b}. \end{aligned}$$

Методом последовательных приближений будем искать сильное решение $\{u, p\} \in \bar{Z} \times W_2^{1,0}(Q)$ задачи (1)-(4) в предположении, что оно существует и известна априорная оценка

$$\|u\|_{\tilde{Z}_0^{t_0}} \leq M_0(t_0) \leq M_0 < \infty \quad (5)$$

при любом $t_0 \in [0, T]$. В этом случае известна также оценка

$$\|u_x(x, t)\| \leq N_0(t) \leq N_0 < \infty, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6)$$

Обозначим

$$\alpha_R(a, b, u) = \min \left[1, R \|u\|_{\bar{Z}_a^b}^{-1} \right], \quad (7)$$

$$\alpha_R(t, u) = \min \left[1, R(t) \|u_x\|_H^{-1} \right] \quad (8)$$

Тогда $P_1 u = \alpha_R(a, b, u) u$ есть срезка вектора u на область $\{v \in Z_a^b : \|v\|_{\tilde{Z}_a^b} \leq R\}$, поэтому

$$\|P_1 u - P_1 v\|_{\tilde{Z}_a^b} \leq \|u - v\|_{\tilde{Z}_a^b} \quad \forall u, v \in \tilde{Z}_a^b \quad (9)$$

в силу хорошо известного (см., например, [9], гл.1) свойства срезающего оператора.

Аналогичным образом устанавливаем, что если $P_2 u = \alpha_R(t, u) u$, то

$$\|(P_2 u - P_2 v)_x\|_H \leq \|u_x - v_x\| \quad \forall u, v \in [\dot{W}_2^1(\Omega)]^n. \quad (10)$$

Пусть $P_i u_k$ - k -ая координата вектора $P_i u$ ($i = 1, 2$), $B(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_{x_i}$, $R(u) = B(u, u) - f$, $R'(u)v = B(u, v) + B(v, u)$, $b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n u_i v_j x_i w_j$.

Из определения операторов P_i ($i = 1, 2$) следует, что

$$\begin{aligned}\alpha_R(a, b, u) \sum u_i v_{x_i} &= \sum P_1 u_i v_{x_i} = \\ &= u_i (P_1 v)_{x_i} = B(u, P_1 v) = B(P_1 u, v),\end{aligned}$$

а $\alpha_R(t, u)B(u, v) = B(u, P_2 v)$.

Будем искать решение на интервале $[0, t_0]$ ($t_0 \leq T$) с помощью следующего итерационного процесса:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} - \nu \Delta u^{k+1} + \alpha_M(0, t_0, u^k) R'(u^k) u^{k+1} + \text{grad } p^{k+1} &= \\ &= f + \alpha_n(0, t_0, u^k) R'(u^k) u^k - \alpha_n(t, u^k) B(u^k, u^k),\end{aligned}\quad (11)$$

$$\text{div } u^{k+1} = 0, \quad (12)$$

$$u^{k+1}(x, 0) = h, \quad (13)$$

$$u^{k+1}|_S = 0. \quad (14)$$

Теорема 1. Пусть область Ω ограничена, $\partial\Omega \subset C^2$, $h \in W$, $f \in L_2(0, T; H)$ и существует решение $u \in \bar{Z}$ задачи (1)-(4) с оценками (5), (6). Тогда последовательности $\{u^k\}_{k=0}^\infty$, $\{p^k\}_{k=0}^\infty$, определенные итерационным процессом (11)-(14), сходятся в пространствах $\bar{Z}_0^{t_0}$, $W_2^{1,0}(Q_0^{t_0})$ при любых $u^0 \in \bar{Z}$, $M > M_0(t_0)$, $N(t) \geq N_0(t)$, $t_0 \in [0, T]$ и по любому $q \in (0, T)$ найдется такое $c(q)$, что

$$\|u^k - u\|_{\bar{Z}_0^{t_0}} \leq C(q) q^k \|u - u^0\|_{\bar{Z}_0^{t_0}}, \quad (15)$$

$$\|p^k - p\|_{W_2^{1,0}(Q_0^{t_0})} \leq C(q) q^{k+1} \|p - p^1\|_{W_2^{1,0}(Q_0^{t_0})}. \quad (16)$$

2. Некоторые замечания и уточнения.

Замечание 1. Если в срезающих операторах P_1 и P_2 положить $M > M_0$, $N(t) \geq N_0(t) + \delta$ ($\delta > 0$), то итерационный процесс (11)-(14) сходится с характерной для метода Ньютона квадратической скоростью.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $M > M_0$, $N(t) \geq N_0(t) + \delta$ ($\delta > 0$), тогда

$$\|u^k - u\|_{\bar{Z}_0^t} \leq C(q) q^{2^k}, \quad \|p^k - p\|_{W_2^{1,0}(Q_0^t)} \leq C(q) q^{2^k} \quad (17)$$

при любом $q \in (0, T)$ и $u^0 \in \bar{Z}$.

Замечание 2. Отметим еще, что хотя построенный итерационный процесс сходится на любом интервале $(0, t_0)$ ($t_0 \in (0, T)$) практически его более целесообразно использовать на достаточно малых интервалах. Дело в том, что при достаточно малом t_0 можно доказать, что

$$\|u^k - u\|_{\bar{Z}_0^{t_0}} \leq q_n(1 - q_n)^{-1} \|u^k - u^{k-1}\|_{\bar{Z}_0^{t_0}}, \quad (18)$$

где $q_n = 2\gamma_n(t)[1 - \gamma_n(t)]$, $\gamma_n(t) = (2 + \nu^{-1})\beta_n M t^{2-n}$. Постоянная β_n зависит от размерности пространства и области Ω . При n равном 2 и 3 β_n определяется соотношениями

$$\beta_2 = 2^{\frac{1}{4}} \lambda_1^{-\frac{1}{4}} C_0^{\frac{1}{2}} C_2(\Omega), \quad \beta_3 = 2^{\frac{2}{3}} \lambda_1^{-\frac{1}{8}} C_0^{\frac{3}{4}} C_2(\Omega),$$

где λ_1 - первое собственное значение оператора Лапласа в области Ω с однородными краевыми условиями Дирихле; C_0 - константа из второго энергетического неравенства $\|v_{xx}\| \leq c_0 \|\Delta v\| \quad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ (для выпуклой области Ω $c_0 = 1$); $c_2(\Omega)$ и $c_3(\Omega)$ - константы из мультипликативных неравенств [8]

$$\|v\|_4 \leq C_2(\Omega) \|v_x\|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_4 \leq C_3(\Omega) \|v_x\|^{\frac{3}{4}} \|v\|^{\frac{1}{4}},$$

справедливых для любых функций v из $\dot{W}_2^1(\Omega)$ и $v \in W_2^1$, удовлетворяющих условию $\int_{\partial\Omega} v(x) dx = 0$. Если $v(x) = 0$ на $\partial\Omega$, то постоянные C_2 и C_3 независят от области Ω и равны, соответственно $2^{1/4}$ и $2^{1/2}$; если $\int_{\partial\Omega} v(x) dx = 0$, то для получения явных оценок констант $C_2(\Omega)$ и $C_3(\Omega)$ можно воспользоваться результатами работы [7].

Замечание 3. Сходимость итерационного процесса вида (11)-(14), где $R'(0) \equiv 0$, доказана в работе [7]. При этом доказаны оценки вида (15)-(18) и найдены априорные оценки (5), (6) через данные задачи. Отметим только, что существование последних оценок при $n = 2$ на всем интервале $[0, T]$, а при $n = 3$ при достаточно малом T хорошо известно (см. [1], [5]). Однако для практического использования построенного метода требуется задать величину постоянных M_0 и N_0 , т.е. необходимо получить явные оценки (5), (6). Такие оценки получены в работе [7].

Замечание 4. Линеаризованную задачу (11)-(14) будем рассматривать как задачу оптимального управления (индекс $k+1$ опускаем), в которой $\text{grad } p^{k+1} = v$ рассматривается как управление, а минимизируется

квадрат дивергенции. То есть рассматривается задача

$$J(v) = \|\operatorname{div} U_v\|_H \rightarrow \inf_{v \in H^\perp}, \quad (19)$$

где u_v - обобщенное решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \vartheta \Delta u + \alpha_M(0, t_0, U^k) R'(u^k) u + v = F(u^k), \quad (20)$$

$$u(x, 0) = h, \quad u|_s = 0. \quad (21)$$

Найден градиент функционала $J(v)$, показано, что градиент удовлетворяет условию Липшица, получена оценка константы Липшица, а также оператор проектирования на пространство $H^\perp$ ($H^\perp$ - ортогональное дополнение H в $L_2(Q)$). Для решения задачи (19)-(21) используется и обосновывается итеративная регуляризация метода проекции градиента [9].

Задача (19)-(21) мало отличается от случая $R'(u^k, u) \equiv 0$, рассмотренного в работе [10], где изучались вопросы разностной аппроксимации предлагаемых процессов, их устойчивость и приведены результаты расчетов на модельном примере.

Литература

1. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М.: Наука, 1970. – 288 с.
2. Белоносов С.М., Черноус К.А. *Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса*. М.: Наука, 1985. – 312 с.
3. Шифрин Б. *Метод итераций и условия разрешимости для уравнений типа Навье-Стокса* // Известия АН ЭССР. Физика. Математика. – 31. – № 3. – С. 249–260.
4. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. М.: Мир. 1972. – 608 с.
5. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса*. М.: Мир. 1981. – 400 с.
6. Белоцерковский О.М. *Численное моделирование в механике сплошных сред*. М.: Физматлит, 1994. – 448 с.
7. Голичев И.И. *Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений*. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989. – 172 с.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач*. М.: Наука, 1981. – 400 с.

10. Голичев И.И., Шарипов Т.Р. *Разработка методов, алгоритмов и программ для решения уравнений Навье-Стокса как задачи оптимального управления* // Вестник УГАТУ. Математика. – 2007. – Т. 9. – № 3(21). – С. 51-57.

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. М. Дильмухаметова, В. В. Напалков

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
aliya-0887@mail.ru*

В работе вводится класс $\mathcal{A}$, находятся необходимые и достаточные условия при которых заданный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами из этого класса может быть преобразован в линейный дифференциальный оператор в обобщенных производных с постоянными коэффициентами. А также, найдены собственные функции класса $\mathcal{A}$ и доказан фундаментальный принцип Эйлера для уравнений этого класса.

1°. Введение

$H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций с топологией компактной сходимости. Через $H^*(\mathbb{C})$ обозначим сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов. Известно, что пространство $H^*(\mathbb{C})$ изоморфно $H_0(\{\infty\})$ — пространству аналитических функций в окрестности бесконечно удаленной точки, обращающихся в точке $\{\infty\}$ в нуль. Если $F \in H^*(\mathbb{C})$ и $\gamma_F(z) \in H_0(\{\infty\})$ — соответствующая функция (согласно указанному изоморфизму), то

$$(F, f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) \gamma_F(z) dz, \quad (1.1)$$

где $f \in H(\mathbb{C})$, а K — замкнутый спрямляемый контур, охватывающий все особенности функции $\gamma(z)$ и лежащий в области аналитичности этой функции.

Пусть

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

—целая функция порядка ρ и типа $\sigma \neq 0, \infty$, причем $a^k \neq 0$ ($k \geq 0$). Функция $g(z)$ порождает обобщенную производную Гельфонда-Леонтьева D произвольной функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

(см.[2]) регулярной в круге $|z| < R$, $0 < R$, вида

$$Df = D(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{a_{k-1}}{a_k} z^{k-1}.$$

Обобщенная производная порядка n функции $f(z)$ определяется по формуле:

$$D^n f = D^n(f, g) = D(D^{n-1})(f, g) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}. \quad (1.2)$$

В работе [3] был рассмотрен частный вид порождающей функции, а именно,

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{p(1)p(2)...p(k)}, \quad (1.3)$$

где $p(z)$ многочлен $p(z) = \alpha_r z^r + \alpha_{r-1} z^{r-1} + \dots + \alpha_1 z$, причем $p(k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Отметим, что если $p(z) = z$, то $f(z) = e^z$.

Когда оператор D порождается функцией вида (1.3), его можно записать в виде ряда

$$Df = \sum_{k=1}^{\infty} b_k p(k) z^{k-1}. \quad (1.4)$$

Заметим, что в такой записи условие $p(k) \neq 0, k = 1, 2, \dots$ уже не важно.

Отметим, что данный оператор тесно связан с операцией умножения Адамара [1] и операторами Данкла [7], имеющими применение в математической физике.

Основным результатом данной статьи является введение одного класса $\mathcal{A}$ дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и

нахождение необходимого и достаточного условия при котором операторы данного класса могут быть сведены к дифференциальным операторам в обобщенных производных с постоянными коэффициентами вида

$$R = \sum_{k=0}^m c_k D^k f(z).$$

Используя этот факт будут найдены собственные функции класса $\mathcal{A}$ и доказан фундаментальный принцип Эйлера для уравнений этого класса.

2°. Другой вид оператора обобщенного дифференцирования D .

Пусть $p(z)$, как и во введении, многочлен, Df — оператор обобщенного дифференцирования, порожденный функцией вида (1.3), $F \in H^*(\mathbb{C})$ — функционал, преобразование Лапласа которого совпадает с $p(z)$.

Лемма 1. Оператор D можно представить в виде

$$Df = \frac{1}{z}(F_\xi, f(e^\xi z)), \quad (2.1)$$

здесь функционал F действует по переменной ξ .

Пусть n — произвольное целое число. Рассмотрим многочлен $p_n(z) = p(z)p(z-1)\dots p(z-n+1)$ ($p_1(z) = p(z)$), он порождает функционал $F_n \in H^*(\mathbb{C})$ ($F_1 = F$). Тогда верно следующее утверждение.

Лемма 2. Оператор обобщенного дифференцирования n -ого порядка представляется в следующем виде

$$D^n f = \frac{1}{z^n}(F_{n\xi}, f(e^\xi z)). \quad (2.2)$$

Теорема 1. Пусть $F \in H^*(\mathbb{C})$ — произвольный функционал, порожденный многочленом $p(z)$, $f(z) \in H(\mathbb{C})$. Тогда

$$(F_\xi, f(e^\xi z)), \quad (2.3)$$

где F — некоторый функционал, действующий по ξ является оператором Эйлера. И обратно, любой оператор Эйлера конечного порядка может быть представлен в виде (2.3).

Первое утверждение Теоремы доказывается непосредственной проверкой. Что касается второй части, при замене $z = e^w$ оператор Эйлера

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f^{(k)}(z) z^k$$

сводится к оператору с постоянными коэффициентами,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f^{(k)}(z) z^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{e^{wk}} \sum_{i=1}^k \beta_k f^{(i)}(w) = \sum_{k=1}^n \gamma_k f^{(k)}(w). \end{aligned}$$

Характеристическая функция полученного оператора – многочлен, являющийся преобразованием Лапласа некоторого функционала F . Как нетрудно видеть, этот функционал по формуле (2.3) порождает заданный оператор Эйлера.

Рассмотрим произвольный оператор D , порожденный функцией $g(z)$ (см. Введение), т.к. $g(\lambda z)$ с условием $g(0) = 1$ удовлетворяет уравнению $Df(\lambda z) - \lambda f(\lambda z) = 0$, где λ - постоянная, то она является собственной функцией оператора D . Нетрудно показать, что она единственна.

3°. Фундаментальный принцип для операторов класса A .

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка m :

$$R(f) = c_1 Df + c_2 D^2 F + \dots + c_m D^m f = 0, \quad (3.1)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_m$ комплексные постоянные. Многочлен

$$l(\lambda) = c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots + c_m \lambda^m,$$

как и в классическом случае, называется характеристическим многочленом оператора (3.1). Из равенства $R(f(\lambda z)) = l(\lambda)f(\lambda z)$ следует, что функция $f(\lambda z)$ будет решением уравнения (3.1), если $l(\lambda) = 0$. Характеристический многочлен имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ кратности $k_1, k_2, \dots, k_s$ соответственно.

В работе [6] найдено решение операторного уравнения (3.1):

Теорема 2. Общее решение однородного операторного уравнения (3.1) с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f = \sum_{l=1}^m \sum_{k=0}^{k_l-1} r_{l,k} z^k g^k(\lambda_l z), \quad (3.2)$$

где $r_{l,k}$ - произвольные коэффициенты из $\mathbb{C}$.

Введем класс $\mathcal{A}$ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами вида

$$Lf = \sum_{k=0}^q P_k(z) f^{(k)} z, \quad (3.3)$$

где $P_k(z)$ - многочлен степени не выше k .

Теорема 3. Для того чтобы дифференциальный оператор с переменными коэффициентами L можно было представить в виде линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в обобщенных производных, порожденных функцией вида (1.3), необходимо и достаточно, чтобы после замены переменных он представлялся в виде:

$$\begin{aligned} & \alpha_0^0 \tilde{f}(w) + \frac{1}{e^w} \sum_{k=1}^m \alpha_k^1 \tilde{f}^k(w) + \\ & + \frac{1}{e^{2w}} \sum_{k=1}^{2m} \alpha_k^2 \tilde{f}^k(w) + \dots + \frac{1}{e^{rw}} \sum_{k=1}^{rm} \alpha_k^r \tilde{f}^k(w), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где через $\tilde{f}(w)$ обозначена композиция двух отображений $f \circ e \equiv f(e^w)$ и $p(z)$ - характеристический многочлен выражения стоящего после $\frac{1}{e^w}$, $p_k(z)$ - выражения стоящего после $\frac{1}{e^{kw}}$, ($k = 2, 3, \dots, n$), соответственно. Заметим, что $p(0) = 0$.

Для доказательства необходимости достаточно преобразовать дифференциальный оператор в обобщенных производных

$R = \sum_{k=0}^m c^k D^k f(z)$, используя формулу (2.2), после замены $z = e^w$ получим

выражение, где перед коэффициентами стоят дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, у которых соответствующая характеристическая функция совпадает с

$p_k(z) = p(z)p(z-1)\dots p(z-k+1)$.

Достаточность доказывается непосредственной проверкой.

Предыдущие теоремы позволяют получить следующие результаты.

Теорема 4. Для любого оператора L из класса $\mathcal{A}$ существует конечная фундаментальная система решений однородного уравнения $Ly = 0$, линейная оболочка которой совпадает с множеством целых решений оператора R_L .

Используя результат работы [5] верно следующее утверждение.

Теорема 5. Для любого оператора L из класса $\mathcal{A}$ уравнение $Ly = h(z)$ разрешимо для любой целой функции $h(z)$.

4°. Случай, когда многочлен равен 0 в других точках.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Если многочлен $p(z)$ такой, что он равен 0 в точке m и $p(k) \neq 0$ $k = m+1, m+2, \dots$, то собственная функция имеет вид

$$g(z) = z^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{z^k}{p(m+1)p(m+2)\dots p(k)}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} Dg(\lambda z) &= \lambda \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} z^{k-1} p(k)}{p(m+1)p(m+2)\dots p(k)} = \\ &= \lambda(\lambda^m z^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k p(k)}{p(m+1)p(m+2)\dots p(k)}) = \lambda g(\lambda z). \end{aligned}$$

Можно проверить, что собственная функция единственна.

Лемма 6. Пусть $m > 0$ — максимальный целый корень многочлена $p(z)$ и

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k z^k$$

— решение однородного уравнения $R(y) = 0$ (см.[5]), тогда в разложении функции $h(z)$ коэффициенты $c_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Таким образом, ядро оператора R составляют функции вида

$$f(z) = z^m \sum_{k=m}^{\infty} c^k z^{k-m},$$

переобозначим $\tilde{c}_k = c_{k+m}$, тогда

$$f(z) = z^m \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}^k z^k.$$

Тогда, в таких определениях, $\tilde{p}(z) = p(z+m)$ и приходим к операторам, которые изучались выше (§2, §3).

5°. Примеры.

Приведем некоторые примеры операторов L из класса $\mathcal{A}$ и соответствующих операторов R_L .

1. Пусть многочлен $p(z)$ в определении оператора обобщенного дифференцирования степени 3. Предположим, что $p(z)$ в целых точках $\neq 0$, а $p(0) = 0$. Так как $D^i(f, g) = z^m \sum_{k=i}^3 i \Delta_k^{(i)} z^{k-i} f^{(k)}(z)$, $i = 1, 2, 3$, получим:

$$R(f) = \sum_{k=0}^3 c_k D^k(f) = \sum_{k=0}^9 P_k(z) f^{(k)}(z) = L(f).$$

где $P_k(z) = d_k^{l_k} z^{k-l_k} + d_k^{l_k-1} z^{k-l_k-1} + \dots + d_k^0$, $d_k^i = c_i \Delta_k^i$, степень k -го многочлена не больше k .

2. Предположим, что многочлены $P_k(z)$ имеют вид:

$$P_1(z) = d_1^1, P_2(z) = d_2^1 z + d_2^2, P_3(z) = d_3^1 z^2 + d_3^2 z,$$

$$P_4(z) = d_4^2 z^2, P_5(z) = d_5^2 z^3, P_6(z) = d_6^2 z^4.$$

Замена $z = e^w$ превращает оператор

$$L(f) = \sum_{k=0}^6 P_k(z) f^{(k)}(z) \text{ в}$$

$$\alpha_0^0 \tilde{f}(w) + \frac{1}{e^w} \sum_{k=1}^3 \alpha_i^1 \tilde{f}^i(w) + \frac{1}{e^2 w} \sum_{k=1}^2 \alpha_i^2 \tilde{f}^i(w),$$

следовательно, его можно представить в виде

$$c_0 f(z) + c_1 Df(z) + c_2 D^2 f(z).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* // М.: Наука. – 1967.
2. Гельфонд А. О *Об одном обобщении ряда Фурье* // С- Матем. сб.. – 1951. – Т. 29(71). – № 3. – С. 477–500.
3. Леонтьев А. Ф. *Об области регулярности предельной функции одной последовательности аналитических функций* // Матем. сб. – 1956. – Т. 39(81). – № 4. – С. 405–422.
4. Леонтьев А. Ф. *Обобщения рядов экспонент* // М.: Наука. – 1981.
5. Моржаков А. В. *Об одном классе операторов обобщенного дифференцирования* // Современные проблемы теории функций и их приложения,

тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы., Саратов, Январь 2006г. - Саратов: Научн. Книга. -2006. -С. 122-123.

6. Напалков В. В. *Об области регулярности предельной функции одной последовательности аналитических функций* // Матем. заметки. - 1972. -Т. 12. -№ 6. -С. 681-692.

7. Betancor J. J. Sifi M. Trimeche K. *Hipercyclil and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on C* // Acta Math. Hangar. -2005. -Т. 106 (1-2). -С. 101-116.

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ДАРБУ

А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, УГАТУ
Zhiber@mail.ru, ReginaUFA@yandex.ru*

Введение

Для линейного гиперболического уравнения вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y) \right) v = 0 \quad (1)$$

функции

$$h_0 = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k_0 = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c \quad (2)$$

являются инвариантами при преобразовании вида $v \rightarrow \alpha(x, y)v$ (см. [1]–[4]).

Уравнение (1) может быть переписано в виде каждой из систем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) v &= v_1, & \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) v_1 &= h_0 v; \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \right) v &= v_{-1}, & \left(\frac{\partial}{\partial y} + a \right) v_{-1} &= k_0 v. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $k_0 \neq 0$, то функция v_{-1} удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{-1} \frac{\partial}{\partial x} + b_{-1} \frac{\partial}{\partial y} + c_{-1} \right) v_{-1} = 0, \quad (4)$$

Уравнение (4) называется x -преобразованием Лапласа уравнения (1). Если инвариант $k_{-1} \neq 0$, можно найти x -преобразование Лапласа уравнения (4) и т.д. В результате получится цепочка уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \right) v_{-i} = 0, \quad i \in N. \quad (5)$$

Y -преобразование Лапласа определяется аналогично. Последовательность инвариантов Лапласа однозначно определяется рекуррентными формулами

$$h_i = 2h_{i-1} - h_{i-2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln h_{i-1}, \quad k_i = h_{i-1}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

и начальными данными (2).

В первой части данной работы показано, что преобразование Лапласа понижает размерность характеристической алгебры уравнения (1) на единицу и последовательность инвариантов Лапласа обрывается только в том случае, когда характеристическая алгебра уравнения (1) конечномерна.

Во втором параграфе рассматривается нелинейное гиперболическое уравнение вида

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (6)$$

Определение 1. Уравнение (6) называется интегрируемым по Дарбу, если существуют функции ω , $\bar{\omega}$, зависящие от конечного числа переменных

$$\begin{aligned} x, y, u, u_1 = u_x, u_2 = u_{xx}, u_3 = u_{xxx}, \dots, \\ \bar{u}_1 = u_y, \bar{u}_2 = u_{yy}, \bar{u}_3 = u_{yyy}, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

такие, что на решениях уравнения (6) функция ω не зависит от переменной y , а функция $\bar{\omega}$ — от x .

Определение преобразований и инвариантов Лапласа для линейного уравнения (1) непосредственно обобщаются на случай линеаризованного уравнения

$$(D\bar{D} - f_{u_x}D - f_{u_y}\bar{D} - f_u)v = 0. \quad (8)$$

где D и $\bar{D}$ являются дифференцированиями в пространстве $\mathfrak{F}$ локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных (7).

Согласно формулам (2) главные инварианты (8) имеют вид

$$H_0 = -D \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} + f_u,$$

$$K_0 = -\bar{D} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_1} \right) + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} + f_u.$$

Остальные инварианты Лапласа рекуррентно определяются формулами

$$D\overline{D}(\ln H_i) = -H_{i+1} - H_{i-1} + 2H_i, \quad H_{-1} = K_0, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

В работе [5] показано, что уравнение (6) интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда ряд инвариантов Лапласа H_n для (8) линеаризованного уравнения (6) обрывается с двух сторон. Приведено более простое доказательство этого факта, основанное на понятии характеристической алгебры Ли.

В третьем параграфе построены преобразования Беклунда, связывающие решения уравнения (6) и нелинейного уравнения

$$q_{xy} = F(x, y, q, q_x, q_y)$$

в случае, если линеаризованное уравнение

$$(D\overline{D} - F_{q_1}D - F_{\overline{q}_1}\overline{D} - F_q)p = 0 \quad (9)$$

является x -преобразованием Лапласа k -ого порядка уравнения (8).

§1. Линейные гиперболические уравнения

Рассмотрим линейное уравнение (1) и его x -преобразование Лапласа (4), которое удобно переписать, полагая $v_{-1} = p$ так

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{-1}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_{-1}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_{-1}(x, y) \right) p = 0. \quad (10)$$

Введем понятие характеристической алгебры Ли уравнения (1). Оператор полного дифференцирования по y $\overline{D}$ на множестве функций, зависящих от переменных $x, y, v, v_1, v_2, \dots$ в силу уравнения (1) задается формулой

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots = \frac{\partial}{\partial y} + \overline{v}_1 \frac{\partial}{\partial v} - \\ &- (av_1 + b\overline{v}_1 + cv) \frac{\partial}{\partial v_1} - D(av_1 + b\overline{v}_1 + cv) \frac{\partial}{\partial v_2} - \dots \end{aligned}$$

Так как коэффициенты $\overline{D}$ линейно зависят от переменной $\overline{v}_1$, то

$$\overline{D} = X_1 + \overline{v}_1 X_2, \quad (11)$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} - (av_1 + cv) \frac{\partial}{\partial v_1} - (D(av_1 + cv) - b(av_1 + cv)) \frac{\partial}{\partial v_2} - \dots,$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial v} - b \frac{\partial}{\partial v_1} + (b^2 - b_x) \frac{\partial}{\partial v_2} + \dots$$

Характеристическое уравнение

$$\overline{D}W(x, y, v, v_1, \dots, v_m) = 0 \quad (12)$$

согласно (11) эквивалентно системе

$$X_1W = 0, \quad X_2W = 0. \quad (13)$$

С уравнениями (13) естественным образом связана так называемая характеристическая алгебра Ли A уравнения (1), порожденная векторными полями X_1 и X_2 .

Аналогично определяется алгебра Ли A_{-1} уравнения (10), порожденная полями

$$\frac{\partial}{\partial y} - (a_{-1}p_1 + c_{-1}p) \frac{\partial}{\partial p_1} - (D(a_{-1}p_1 + c_{-1}p) - b(a_{-1}p_1 + c_{-1}p)) \frac{\partial}{\partial p_2} - \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial p} - b_{-1} \frac{\partial}{\partial p_1} + (b_{-1}^2 - b_{-1x}) \frac{\partial}{\partial p_2} + \dots$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма. Пусть характеристическая алгебра Ли A уравнения (1) конечномерна, т.е. $\dim A = n$. Тогда размерность характеристической алгебры Ли A_{-1} уравнения (10) $\dim A_{-1} = n - 1$.

Доказательство. Независимые переменные $x, y, v, v_1, v_2, \dots$ согласно формулам (3) ($p = v_{-1}$) и дифференциальным следствиям

$$v = \frac{1}{k}(\bar{p}_1 + ap), \quad v_1 = p(1 - \frac{ab}{k}) - \frac{b}{k}\bar{p}_1, \dots$$

выражаются через независимые переменные $x, y, \bar{p}_1, p, p_1, p_2, \dots$. В новых переменных оператор $\bar{D}$ принимает вид:

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} + \bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial p} - (a_{-1}p_1 + b_{-1}\bar{p}_1 + c_{-1}p) \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots\end{aligned}$$

Для удобства введем операторы

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{\partial}{\partial y} - (a_{-1}p_1 + c_{-1}p) \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots, \\ Z_2 &= \frac{\partial}{\partial p} - b_{-1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \dots, \quad Z = \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1},\end{aligned}$$

тогда

$$X_1 + \bar{v}_1 X_2 = Z_1 + \bar{p}_2 Z + \bar{p}_1 Z_2. \quad (14)$$

Продифференцировав v в (3) по y имеем

$$\bar{v}_1 = -\frac{k_y}{k^2}(\bar{p}_1 + ap) + \frac{1}{k}(\bar{p}_2 + a_y p + a\bar{p}_1).$$

Последнее подставим в (14)

$$\begin{aligned}X_1 + \left(\left(-\frac{k_y}{k^2}a + \frac{a_y}{k} \right) p + \left(-\frac{k_y}{k^2} + \frac{a}{k} \right) \bar{p}_1 + \frac{1}{k} \bar{p}_2 \right) X_2 = \\ = Z_1 + \bar{p}_2 Z + \bar{p}_1 Z_2.\end{aligned}$$

Учитывая, что операторы не зависят от переменной $\bar{p}_2$

$$\begin{aligned}X_1 &= Z_1 + \bar{p}_1 Z_2 + \left(\left(\frac{k_y}{k}a - a_y \right) p + \left(\frac{k_y}{k} - a \right) \bar{p}_1 \right) Z, \\ X_2 &= kZ.\end{aligned} \quad (15)$$

Введем оператор длины 3:

$$X_3 = [X_2, X_1] = (b_y - c + ab) \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots = k \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots$$

и операторы длины 4:

$$X_4 = [X_1, X_3] = (ak + k_y) \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Таким образом на каждом шаге добавляется только один оператор.

Согласно замене (15), операторы X_3, X_4 имеют вид:

$$X_3 = k(Z_2 - aZ), \quad X_4 = (k_y + ak)(Z_2 - aZ) + kZ_3. \quad (16)$$

Допустим, что размерность алгебры A равна 3, т.е. $X_4 = (a + \frac{k_y}{k})X_3$. Тогда из (16) видно, что $Z_3 = 0$ и, следовательно, размерность характеристической алгебры A_{-1} , порожденной операторами Z_1 и Z_2 , равна двум.

Теперь пусть $\dim A = n$, т.е. операторы $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ -линейно независимы. Так как оператор X_i представляет собой линейную комбинацию операторов $Z, Z_1, Z_2, \dots, Z_{i-1}$, то согласно лемме 1 операторы $Z, Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ -линейно независимы. Оператор Z не является образующим характеристической алгебры A_{-1} , поэтому $\dim A_{-1} = n - 1$.

Значит размерность характеристической алгебры A_{-1} равна $n - 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Последовательность $h_{-n}, n = 1, 2, \dots$ конечна если и только если размерность характеристической алгебры $\dim A < \infty$.*

Доказательство теоремы 1 основано на утверждении леммы.

Таким образом, если характеристическая алгебра x -преобразования Лапласа конечномерна, то уравнение (1) интегрируемо в квадратурах.

Поясним, что пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ уравнения (1), выше мы привели лишь по одному из двух "симметричных" вариантов леммы и теоремы 1.

§2. Критерий интегрируемости нелинейных гиперболических уравнений по Дарбу

В этом параграфе рассмотрим уравнение (6).

На множестве локально-аналитических функций Ψ , зависящих от конечного числа переменных $x, y, \bar{u}_1, \bar{v}_1, u, v, u_1, v_1, \dots$ $\bar{D}$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{D} = & \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{v}_1} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + \bar{v}_1 \frac{\partial}{\partial v} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + \\ & + (f_u v + f_{u_1} v_1 + f_{\bar{u}_1} \bar{v}_1) \frac{\partial}{\partial v_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \\ & + D(f_u v + f_{u_1} v_1 + f_{\bar{u}_1} \bar{v}_1) \frac{\partial}{\partial v_2} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, x -характеристическая алгебра A системы уравнений (6), (8) порождается векторными полями $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \overline{D}_3$

$$\begin{aligned}\overline{D}_1 &= \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}, \quad \overline{D}_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{v}_1}, \\ \overline{D}_3 &= \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u} \overline{u}_1 + \frac{\partial}{\partial v} \overline{v}_1 + f \frac{\partial}{\partial u_1} + \\ &+ (f_u v + f_{u_1} v_1 + f_{\overline{u}_1} \overline{v}_1) \frac{\partial}{\partial v_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \\ &+ D(f_u v + f_{u_1} v_1 + f_{\overline{u}_1} \overline{v}_1) \frac{\partial}{\partial v_2} + \dots\end{aligned}$$

Если функция u задана, то x -характеристическая алгебра B линейного уравнения (8) порождается полями

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{\partial}{\partial \overline{v}_1}, \quad Z_2 = \frac{d}{dy} + \overline{v}_1 \frac{\partial}{\partial v} + (f_u v + \\ &+ f_{u_1} v_1 + f_{\overline{u}_1} \overline{v}_1) \frac{\partial}{\partial v_1} + \dots\end{aligned}$$

где

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + \overline{u}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots$$

Теорема 2. *Нелинейное уравнение (6) интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда последовательность инвариантов Лапласа $h_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ линеаризованного уравнения (8) обрывается с двух сторон.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что (6) интегрируемо по Дарбу, т.е. существуют интегралы

$$\omega(x, y, u, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

и

$$\overline{\omega}(x, y, u, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_k). \quad (17)$$

Тогда можно показать, что

$$\begin{aligned}w &= \omega_u v + \omega_{u_1} v_1 + \dots + \omega_{u_n} v_n, \\ \overline{w} &= \overline{\omega}_u v + \overline{\omega}_{\overline{u}_1} \overline{v}_1 + \dots + \overline{\omega}_{\overline{u}_k} \overline{v}_k\end{aligned} \quad (18)$$

интегралы уравнения (8).

Таким образом система уравнений (6), (8) интегрируема по Дарбу. Тогда, как следует из статьи [6], ее характеристические алгебры Ли конечномерны.

Если считать, что u задано, то линейное уравнение (8) интегрируемо по Дарбу, то есть алгебры B и $\overline{B}$ конечномерны. Тогда, согласно теореме 1, цепочка инвариантов Лапласа уравнения (8) обрывается с двух сторон.

Достаточность. Пусть цепочка инвариантов Лапласа линейного уравнения (8) обрывается с двух сторон. Следовательно характеристические алгебры B и $\overline{B}$ конечномерны для любого решения нелинейного уравнения (6). Тогда нетрудно показать, что характеристическая алгебра Ли системы уравнений (6), (8) конечномерна. Следовательно последняя имеет полный набор x - и y -интегралов типа (17), (18) (см. [7]). Теорема доказана.

§3. Преобразования Лапласа и Беклунда.

Рассмотрим задачу об описании нелинейных уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad q_{xy} = F(q, q_x, q_y), \quad (19)$$

линеаризации которых связаны x -преобразованием Лапласа.

Для линеаризованного уравнения (9) согласно (3) выполняются соотношения

$$F_{q_1} = f_{u_1}, \quad F_{\overline{q}_1} = f_{\overline{u}_1} + D \ln k, \quad k = F_q - DF_{q_1} + F_{q_1} F_{\overline{q}_1}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (D - f_{\overline{u}_1})v &= p, \quad (\overline{D} - f_{u_1})p = kv, \\ k &= -\overline{D}(f_{\overline{u}_1}) + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} + f_u, \end{aligned} \quad (21)$$

где k -главный инвариант Лапласа уравнения (8).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть линеаризованные уравнения (8), (9) связаны x -преобразованием Лапласа. Тогда уравнения (19) преобразуются к одному из следующих видов

$$u_{xy} = f(u), \quad q_{xy} = qf'(f^{-1}(q_y)); \quad (22)$$

$$u_{xy} = f(u, u_x), \quad q_{xy} = (F_q - DF_{q_x} + F_{q_x} F_{q_y})q + F_{q_x} q_y; \quad (23)$$

$$u_{xy} = f(u, u_y), \quad q_{xy} = f'_2(f_2^{-1}(q_y))(q + f'_1(f_2^{-1}(q_y))); \quad (24)$$

$$u_{xy} = f(u_x, u_y), \quad q_{xy} = f'_1(f_1^{-1}(q_y))(qq_x + f_1^{-1}(q_y)); \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
u_{xy} &= f(u, u_x, u_y), \\
q_{xy} &= f_{1u}(u, q + \varphi)(q + \varphi) + f_{1u_x}(u, q + \varphi) * \\
&\quad * (q_x + \varphi'(q + \varphi)) + f_{2u}^2(u)(q + \varphi).
\end{aligned} \tag{26}$$

Преобразования Беклунда, связывающие уравнения (22)–(26) задаются следующими формулами

$$\begin{aligned}
q &= u_x, \quad q_y = f(u); \\
q &= u_x, \quad q_y = f(u, u_x); \\
q &= u_x - f_1(u), \quad q_y = f_2(u) \quad (f = f_1(u)u_y + f_2(u)); \\
q &= u_x - u, \quad q_y = f_1(u_x) \quad (f = f_1(u_x) + u_y); \\
q &= u_x - \varphi(u), \quad q_y = f_1(u, u_x) + f_2^2(u) \\
&\quad (f = f_1(u, u_x) + \varphi'(u)u_y + f_2^2(u))
\end{aligned}$$

соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00440-а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Goursat E. *Lecons sur l'integration des equations aux dérivées partielles du second order á deux variables indépendantes*. Paris: Herman, 1896, 1898. – Tome I, II.
2. Roux J. Le. *Extensions de la methode de Laplace aux equations lineaires aux derivees partielles d'ordre superieur au second* // Bull.Soc.Math.France. – 1899. – Т. 27. – С. 237–262.
3. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных*. М.: ИЛ, 1957. – 443 с.
4. Жибер А. В., Соколов Ф. *Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу*. Уфа: БГУ, 1996. – 56 с.
5. Жибер А. В., Соколов В. В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения ливилевского типа* // УМН. – 2001. – Т. 56. – № 1(337). – С. 63–106.
6. Жибер А. В., Костригина О. С. *Интегрируемые двумерные динамические системы и характеристические алгебры Ли* // Труды Института Механики УНЦ РАН. – 2007. – № 5. – С. 195–201.

КОРАЗМЕРНОСТЬ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ОПЕРАТОРНЫХ АНАЛОГОВ

Л. С. Ибрагимова, С. А. Муртазина, М. Г. Юмагулов

*Сибайский институт Башкирского государственного университета,
lilibr@mail.ru, yum_mg@mail.ru, sariamurtaz@mail.ru*

1. Введение

Теория бифуркаций занимается изучением семейств векторных полей, зависящих от одного или нескольких параметров, уделяя основное внимание исследованию вопроса о том, как количественное изменение параметров может привести к качественным изменениям характеристик векторных полей. Особое место в таком исследовании занимает понятие коразмерности бифуркации, означающей (в широком смысле этого слова) наименьшую размерность пространства параметров, при котором данная бифуркация сохраняется в устойчивой форме. Это понятие восходит к А. Пуанкаре и А. А. Андронову и систематически развито в работах В. И. Арнольда и его научной школы [1, 2].

Понятие коразмерности бифуркации обычно определяется применительно к бифуркациям динамических систем. Задачи о таких бифуркациях часто различными способами могут сведены к равносильным задачам в операторной постановке; такой подход, эффективный при исследовании многих бифуркационных проблем, приводит, в частности, к вопросам о соответствии коразмерностей бифуркации динамических систем и их операторных аналогов.

Настоящая статья посвящена обсуждению указанных вопросов. При этом изложение для простоты ограничивается рассмотрением операторов в конечномерных пространствах. Такое ограничение оправдано тем, что многие задачи о бифуркации динамических систем могут быть сведены к равносильным задачам о бифуркациях операторных уравнений в конечномерных пространствах.

2. Вспомогательные сведения.

В этом пункте приводятся элементарные сведения о дифференцируемых (гладких) многообразиях в пространстве R^N , играющих важную роль в анализе, топологии и приложениях. Более детально с соответствующими понятиями можно познакомиться, например, в [1].

Пусть $F : R^N \rightarrow R^N$ – линейное или нелинейное отображение (оператор) с областью определения Ω и областью значений Δ ; в этом случае будем писать $F : \Omega \rightarrow \Delta$. Ниже будут рассматриваться только гладкие (непрерывно дифференцируемые) отображения, т.е. имеющие непрерывно зависящую от $x \in \Omega$ матрицу Якоби $F'(x)$.

Отображение $F : \Omega \rightarrow \Delta$ называют гомеоморфным или гомеоморфизмом множеств Ω и Δ , если оно непрерывно, взаимно однозначно, при этом обратное отображение $F^{-1} : \Delta \rightarrow \Omega$ также непрерывно.

Гомеоморфное отображение $F : \Omega \rightarrow \Delta$ называют диффеоморфным или диффеоморфизмом множеств Ω и Δ , если оба отображения $F : \Omega \rightarrow \Delta$ и $F^{-1} : \Delta \rightarrow \Omega$ дифференцируемы. В этом случае множества Ω и Δ называются диффеоморфными.

Множество $M \subset R^N$ называют гладким многообразием размерности m , если для каждой точки $x_0 \in M$ существует шар $T = T(x_0, \varepsilon) \subset R^N$ с центром в точке x_0 некоторого радиуса $\varepsilon > 0$ такой, что множество $M \cap T$ диффеоморфно некоторому открытому множеству $G \subset R^m$.

Множество $M \subset R^N$ называют нульмерным многообразием, если для каждой точки $x_0 \in M$ существует шар $T = T(x_0, \varepsilon) \subset R^N$, что множество $M \cap T$ состоит только из точки x_0 .

Коразмерностью гладкого многообразия M размерности m называют число $k = N - m$.

Гладкие многообразия часто описываются равенствами вида

$$M = \{x : f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0\}, \quad (1)$$

где $f_j : R^N \rightarrow R^1$ – гладкие функционалы, определенные в области Ω , при этом для любого $x_0 \in \Omega$ векторы $f'_1(x_0), \dots, f'_k(x_0)$ линейно независимы. В ситуации общего положения коразмерность многообразия (1) равна k , а размерность, соответственно, $m = N - k$.

Многообразия могут задаваться и в параметрической форме. Например, многообразие размерности 1 и коразмерности $N - 1$ (т.е. кривая в пространстве R^N) может задаваться равенством

$$M = \{x : x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_N = \varphi_N(t)\}, \quad (2)$$

где $\varphi_j(t)$ – гладкие функции скалярного параметра t такие, что для любого допустимого $t = t_0$ вектор $(\varphi'_1(t_0), \dots, \varphi'_N(t_0))$ является ненулевым. Многообразие коразмерности $N - 2$ может задаваться равенством вида (2), в котором t – двумерный параметр.

Ниже для простоты будут рассматриваться многообразия, описываемые равенствами вида (1) или (2).

Пусть M – гладкое многообразие (1) коразмерности k . Касательным подпространством к многообразию M в точке $x_0 \in M$ называют множество

$$\partial M(x_0) = \{x : (x, f'_1(x_0)) = 0, \dots, (x, f'_k(x_0)) = 0\},$$

где символ (x, y) означает скалярное произведение в пространстве R^N .

Говорят, что пространство R^N представимо в виде суммы $E_1 + E_2$ двух подпространств E_1 и E_2 , если каждый элемент $x \in R^N$ представим в виде суммы $x = u + v$, где $u \in E_1$ и $v \in E_2$ (не обязательно единственным способом).

Говорят, что многообразия M_1 и M_2 трансверсально пересекаются в точке x_0 , если $x_0 \in M_1 \cap M_2$ и выполнено равенство $\partial M_1(x_0) + \partial M_2(x_0) = R^N$.

3. Бифуркационные многообразия

Обозначим через $L = L(R^N)$ множество всех линейных операторов, действующих в пространстве R^N . Множество L образует линейное нормированное пространство. Ниже для простоты изложения будем отождествлять понятие линейного оператора $A \in L$ и матрицы этого оператора в стандартном базисе пространства R^N , при этом (там, где это не будет вызывать путаницы) будет использоваться одно и то же обозначение A как для оператора, так и для его матрицы. Таким образом, L будем считать линейным нормированным пространством всех квадратных вещественных матриц порядка N ; его размерность равна N^2 . Например, при $N = 2$ каждый элемент $A \in L$ можно отождествлять с вектором $A = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$, где числа a_{ij} – это элементы матрицы оператора A .

Положим

$$L_1 = \{A \in L : \text{оператор } A \text{ имеет собственное значение } 1\}.$$

Это множество, очевидно, можно представить равенством

$$L_1 = \{A \in L : \det(A - I) = 0\},$$

где I – единичная матрица. Очевидно, L_1 является многообразием коразмерности 1.

Многообразие L_1 будем называть бифуркационным многообразием в пространстве L , а его элементы – бифуркационными точками.

Пусть оператор $A \in L$ имеет собственное значение 1, т.е. $A \in L_1$. Это собственное значение может иметь различную кратность: простым, полупростым, иметь присоединенные векторы. Ниже для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда кратность собственного значения 1 оператора A не превосходит 2. В этом случае матрица оператора A в жордановой нормальной форме представима в одном из видов:

$$\text{S1)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \cdots \\ \vdots & B \end{bmatrix}, \quad \text{S2)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & B \end{bmatrix},$$

$$\text{S3)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & B \end{bmatrix},$$

где незаполненные места занимают нули, а матрица B не имеет собственного значения 1. Случай S1) означает, что матрица A имеет простое собственное значение 1, случай S2) – полупростое собственное значение 1 кратности 2, а случай S3) – неполу простое собственное значение 1 кратности 2, т.е. этому собственному значению соответствуют один собственный и один присоединенный вектор.

Обозначим через $L_{1,0}$, $L_{2,0}$ и $L_{2,1}$ – многообразия всех операторов $A \in L$, имеющих соответственно:

- а) простое собственное значение 1,
- б) полупростое собственное значение 1 кратности 2,
- в) неполу простое собственное значение 1 кратности 2.

В обозначении $L_{\alpha,\beta}$ число α обозначает число линейно независимых собственных векторов, а β – число линейно независимых присоединенных векторов оператора A .

Каждое из этих множеств образует многообразия в пространстве L различной коразмерности: многообразие $L_{1,0}$ имеет коразмерность 1, $L_{2,0}$ – коразмерность 4, а $L_{2,1}$ – коразмерность 2.

В частности, при $N = 2$ указанные многообразия могут быть описаны равенствами: $L_{2,0} = \{I\}$,

$$L_{1,0} = \{A : \det(A - I) = 0, \quad a_{11} + a_{22} \neq 2\},$$

$$L_{2,1} = \{A : \det(A - I) = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 2, A \neq I\}.$$

где I – единичная матрица и

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

4. Коразмерность бифуркации

Рассмотрим теперь k -параметрическое семейство линейных операторов $B(\mu)$, действующих в пространстве R^N и гладко (по норме операторов) зависящих от векторного параметра $\mu \in R^k$ или, что равносильно, k -параметрическое семейство квадратных вещественных матриц $B(\mu)$ порядка N . При каждом μ оператор $B(\mu)$ является элементом пространства L и при изменении параметра μ описывает в этом пространстве гладкое многообразие той или иной размерности (часто размерности k). Ниже семейство операторов $B(\mu)$ будем отождествлять с соответствующим гладким многообразием в пространстве L .

Значение $\mu = \mu_0$ называют *бифуркационным* или *точкой бифуркации* для оператора $B(\mu)$, если $B(\mu_0) \in L_1$, т.е. если оператор $B(\mu_0)$ имеет собственное значение 1.

Пусть $B(\mu_0) \in L_1$. Как и выше, ограничимся рассмотрением случая, когда кратность собственного значения 1 оператора $B(\mu_0)$ не превосходит 2. Тогда возможны три ситуации:

$$1) B(\mu_0) \in L_{1,0}; \quad 2) B(\mu_0) \in L_{2,0}; \quad 3) B(\mu_0) \in L_{2,1}.$$

В зависимости от этих ситуаций будем говорить о том, что значение $\mu = \mu_0$ является точкой (α, β) -*бифуркации* оператора $B(\mu)$ или об (α, β) -*бифуркации* оператора $B(\mu)$ при $\mu = \mu_0$.

Пусть значение $\mu = \mu_0$ является точкой (α, β) -*бифуркации* оператора $B(\mu)$. Будем говорить, что (α, β) -*бифуркации* оператора $B(\mu)$ имеет *устойчивую форму*, если многообразия $B(\mu)$ и $L_{\alpha,\beta}$ трансверсально пересекаются в точке $B_0 = B(\mu_0)$. В противном случае будем говорить о *неустойчивой форме* (α, β) -бифуркации оператора $B = B(\mu)$.

Пусть дан некоторый класс Ψ семейств линейных операторов $B(\mu)$, гладко зависящих от параметра μ (это может быть класс семейств гладких операторов, класс семейств симметричных гладких операторов и т.п.). Пусть $B_0 \in L_1$.

Будем говорить, что бифуркация класса Ψ в точке $B_0 \in L_1$ имеет *коразмерность* 1, если существует однопараметрическое семейство операторов $B(\mu) \in \Psi$ такое, что $B(\mu_0) = B_0$ и соответствующая бифуркация оператора $B(\mu)$ в точке μ_0 имеет устойчивую форму.

Будем говорить, что бифуркация класса Ψ в точке $B_0 \in L_1$ имеет *коразмерность* k , если существует k -параметрическое семейство операторов $B(\mu) \in \Psi$ такое, что $B(\mu_0) = B_0$ и соответствующая бифуркация оператора $B(\mu)$ в точке μ_0 имеет устойчивую форму, при этом для любого натурального $l < k$ и любого l -параметрического семейства операторов $B(\mu) \in \Psi$ такого, что $B(\mu_0) = B_0$, бифуркация имеет неустойчивую форму.

Будем говорить, что бифуркация класса Ψ в точке $B_0 \in L_1$ имеет *коразмерность нуль*, если не существует семейства операторов $B(\mu) \in \Psi$ такого, чтобы $B(\mu_0) = B_0$ и соответствующая бифуркация оператора $B(\mu)$ в точке μ_0 имела бы устойчивую форму.

Приведенные определения естественно зависят от класса Ψ семейств операторов $B(\mu)$. Если на выбор $B(\mu)$ не накладывать никаких дополнительных требований, то верна

Теорема 1. Пусть Ψ – класс семейств гладких операторов. Тогда бифуркация класса Ψ в точке $B_0 \in L_1$ имеет *коразмерность* 1, 4 или 2 соответственно в зависимости от того, элементами какого из многообразий $L_{1,0}$, $L_{2,0}$ или $L_{2,1}$ является точка B_0 .

Рассмотрим теперь две важные с практической точки зрения ситуации, когда на выбор семейства операторов $B(\mu)$ накладываются дополнительные требования.

Теорема 2. Пусть Ψ – класс семейств гладких симметрических операторов. Тогда если $B_0 \in L_{1,0}$, то бифуркация класса Ψ имеет *коразмерность* 1, если $B_0 \in L_{2,0}$, то 3, если $B_0 \in L_{2,1}$, то нулю.

Теорема 3. Пусть Ψ – класс семейств операторов вида $B(\mu) = e^{A(\mu)}$, где $A(\mu)$ – произвольное гладкое семейство операторов. Тогда если $B_0 \in L_{1,0}$, то бифуркация класса Ψ имеет *коразмерность* 1, если $B_0 \in L_{2,0}$, то 2, если $B_0 \in L_{2,1}$, то нулю.

5. Приложение: задача о бифуркации Андронова-Хопфа

Рассмотрим в качестве приложения задачу о бифуркации Андронова-Хопфа для системы

$$\frac{dx}{dt} = A(\lambda)x + \varphi(x, \lambda), \quad x \in R^N, \quad N \geq 2, \quad (3)$$

зависящей от вещественного параметра λ ; здесь $A(\lambda)$ – квадратная матрица, гладко зависящая от λ , а $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет соотношению: $\|\varphi(x, \lambda)\| = o(\|x\|)$ при $\|x\| \rightarrow 0$.

Число λ_0 называют точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (3), если найдется последовательность λ_n такая, что при каждом $\lambda = \lambda_n$ система (3) имеет ненулевое периодическое решение $x = x_n(t)$ некоторого периода T_n , при этом $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ и $\max_t \|x_n(t)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Функция $x(t)$ тогда и только тогда будет T -периодическим решением системы (3), когда вектор $x = x(0)$ будет неподвижной точкой оператора

$$F(x, T, \lambda) = e^{TA(\lambda)}x + \int_0^T e^{(T-s)A(\lambda)}\varphi[x(s), \lambda] ds,$$

действующего в пространстве R^N ; здесь $x(t)$ – удовлетворяющее условию $x(0) = x$ решение системы (3). Поэтому задача о бифуркации периодических решений системы (3) равносильна задаче о бифуркации ненулевых решений для операторного уравнения

$$x = B(T, \lambda)x + b(x, T, \lambda), \quad x \in R^N,$$

зависящего от двух параметров T и λ , где $B(T, \lambda) = F'_x(0, T, \lambda)$, а $b(x, T, \lambda)$ содержит слагаемые второй и более высоких степеней по x .

Необходимым условием бифуркации Андронова-Хопфа системы (3) является требование, чтобы матрица $A(\lambda_0)$ имела собственные значения $\pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$. Пусть эти собственные значения являются простыми и матрица $A(\lambda_0)$ не имеет других чисто мнимых собственных значений.

Оператор $F'_x(0, T, \lambda) = e^{TA(\lambda)}$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2 при $T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и $\lambda = \lambda_0$. Поэтому для анализа бифуркации можно использовать построения, приведенные выше. В частности, из теоремы 3 следует, что в операторной постановке коразмерность бифуркации Андронова-Хопфа равна двум. Отметим, что в исходной (динамической) постановке коразмерность бифуркации Андронова-Хопфа равна единице.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 06-01-72552-НЦНИЛ(а) и 08-01-97020).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Москва-Ижевск: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 400 с.
2. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости*. – М.: МЦНМО, 2005. – 416 с.

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ АСИМПТОТИКОЙ

К. П. Исаев, А. А. Путинцева, Р. С. Юлмухаметов

*Башкирский государственный университет,
orbit81@mail.ru, PutinBSU@yandex.ru*

В данной работе строятся функции, аналитические в вертикальной полосе $J+i\mathbb{R}$, логарифм модуля которых асимптотически близок к $u(\operatorname{Re} z)$, где u — наперед заданная выпуклая функция на интервале J — так называемая, функция "типа синуса", удовлетворяющая дополнительным условиям.

Определение. Пусть u непрерывная субгармоническая функция в полосе $J+i\mathbb{R}$. Функцией типа синуса для функции u будем называть голоморфную в полосе $J+i\mathbb{R}$ функцию L , удовлетворяющую условиям

1. Все нули z_n , $n \in \mathbb{N}$, функции L простые и при некотором $\epsilon > 0$ круги $B(z_n, \epsilon\tau(u, z_n, 1))$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.
2. При любом $\epsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \epsilon\tau(u, z_n, 1))$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется соотношение

$$|\ln |L(z)| - u(z)| \leq A(\epsilon).$$

Здесь $\tau(u, z, p)$ — радиус наибольшего круга с центром в точке z , в котором функция u отклоняется от пространства гармонических функций не более чем на p .

Термин "функции типа синуса" впервые появился в работе [1], применительно к нашему определению в этой работе речь идет о функции типа синуса для опорной функции

$$h(z) = \max_{w \in D} \operatorname{Re} zw$$

некоторого выпуклого многоугольника D . В работе [2] понятие функции типа синуса обобщено для опорных функций выпуклых областей с гладкими границами.

В этой работе будут построены функции, аналитические в верити-
кальной полосе $I + i\mathbb{R}$, логарифм модуля которых асимптотически бли-
зок к $u(\operatorname{Re} z)$, где u — любая наперед заданная выпуклая функция на
интервале I . Базовой для наших конструкций будет служить функция
 $F(z) = e^z - 1$, поэтому сначала опишем ее свойства. Положим

$$\operatorname{Re}^+ z = \max(0, \operatorname{Re} z).$$

Теорема 1. 1. Нулями функции F являются точки $z_n = 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$,
причем все нули простые.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \varepsilon)$, $n \in \mathbb{Z}$, выполня-
ется соотношение

$$|\ln |L(z)| - \operatorname{Re}^+ z| \leq A(\varepsilon) e^{-|\operatorname{Re} z|}.$$

Пусть $L(x)$ — линейная функция. Положим

$$L^+(x) = \max(0, L(x)).$$

Следующая теорема является непосредственным обобщением теоремы 1.

Теорема 1а. Пусть $L(x) = d(x - b)$ — линейная функция. Тогда

1. Нулями функции $F(L(z))$ являются точки $z_n = b + \frac{2\pi i n}{d}$, $n \in \mathbb{Z}$,
причем все нули простые.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \frac{\varepsilon}{d})$, $n \in \mathbb{Z}$, выполня-
ется соотношение

$$|\ln |F(L(z))| - L^+(z)| \leq A(\varepsilon) e^{-|L(\operatorname{Re} z)|}.$$

Лемма 1. Пусть u — кусочно - линейная выпуклая функция на ин-
тервале $I_{\mathbb{R}}$, причем

$$u(x) = l_k(x), \quad x \in [b_k; b_{k+1}], \quad k \in \mathbb{Z},$$

где l_k — линейные функции и последовательность b_k — возрастающая.
Тогда существуют линейные функции L_n , $n \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$u(x) = L_0(x) + \sum_{n \neq 0} L_n^+(x).$$

Лемма 2. Пусть u — выпуклая функция на интервале $I_{\mathbb{R}}$. Тогда суще-
ствует кусочно - линейная выпуклая функция v , такая, что

1. Если $b_{\pm n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\dots < b_{-2} < b_{-1} < b_1 < \dots$, — точки излома функции v и $b_{\pm n}^* = (b_{\pm(n+1)} + b_{\pm n})/2$, то

$$|b_{\pm(n+1)} - b_{\pm n}| = 2\rho(u, b_{\pm n}^*, 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. Для всех $x \in I$ выполняется оценка

$$u(x) \leq v(x) \leq u(x) + 2.$$

3. Если $I_n = [b_n; b_{n+1}]$, $I_{-n} = [b_{-(n+1)}; b_{-n}]$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$v(x) = l_{\pm n}(x), \quad x \in I_{\pm n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\rho(u, b_n^*, 1)} \leq \frac{l_n(b_{(n+1)}) - l_{n-1}(b_{n+1})}{b_{n+1} - b_n} \leq \frac{4}{\rho(u, b_n, 1)},$$

$$\frac{1}{\rho(u, b_{-n}^*, 1)} \leq \frac{l_{-n}(b_{-(n+1)}) - l_{-(n-1)}(b_{-(n+1)})}{b_{-n} - b_{-(n+1)}} \leq \frac{4}{\rho(u, b_{-n}, 1)}.$$

Здесь $\rho(u, y, p)$ — наибольшее число r , такое что на интервале $[y-r, y+r]$ функция u отклоняется от линейной функции не более чем на p .

Теорема 2. Пусть u — выпуклая функция на интервале $I_{\mathbb{R}}$ и последовательность b_n определена по формуле (b_0 — произвольно выбранная точка из I)

$$b_1 = b_0 + \rho(u, b_0, 1), \quad b_{-1} = b_0 - \rho(u, b_0, 1),$$

$$b_{n+1} = b_n + 2\rho\left(u, \frac{b_n + b_{n+1}}{2}, 1\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_{-(n+1)} = b_{-n} + 2\rho\left(u, \frac{b_{-n} + b_{-(n+1)}}{2}, 1\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что найдется такая положительная функция $\alpha(x)$, $x \in I$, и положительная константа c , что выполнены следующие условия

1. Для любого $x \in I$ для всех $y_1, y_2 \in [x - \alpha(x); x + \alpha(x)]$ имеет место соотношение

$$\frac{\rho(y_1)}{\rho(y_2)} \geq c.$$

2. Положим $b_n^* = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$, $b_{-n}^* = \frac{b_{-n} + b_{-(n+1)}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Ряд

$$\sum_{n \neq 0} e^{-\frac{\alpha(b_n)}{\rho(b_n^*)}} = \Sigma < \infty$$

сходится.

Тогда существует целая функция f , которая имеет простые нули $z_{nk} = b_n + \frac{2\pi i}{d_n} k$, $n, k \in \mathbb{Z}$, и для любого $\epsilon > 0$ вне кругов $B(z_{nk}, \epsilon \rho(u, b_n, 1))$ удовлетворяет оценке

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq A(\epsilon) \left(\Sigma + \frac{4}{1 - e^{2c}} \right).$$

Кроме того, при $\epsilon < \min(\frac{\pi}{4}, c)$ круги $B(z_{nk}, \epsilon \rho(u, b_n, 1))$, $n, k \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекаются.

Доказательство. Изложим конструкцию функции f .

На основе леммы 2 для функции u построим выпуклую кусочно линейную функцию v с изломами в точках b_n , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

$$u(x) \leq v(x) \leq u(x) + 2, \quad x \in I.$$

Пусть $I_n = [b_n; b_{n+1}]$, $I_{-n} = [b_{-(n+1)}; b_{-n}]$, $n \in \mathbb{N}$, $I_0 = [b_{-1}; b_1]$ и

$$v(x) = l_n(x), \quad x \in I_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$\begin{aligned} L_0(x) &= l_0(x), \quad L_n(x) = l_n(x) - l_{n-1}(x), \\ L_{-n}(x) &= l_{-n}(x) - l_{-(n-1)}(x), \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

и

$$f(z) = e^{L_0(z)} \prod_{n \neq 0} F(L_n(z)).$$

Пусть для фиксированного $n \neq 0$ точки z_{nk} ($k \in \mathbb{Z}$) — нули функции $F(L_n(z))$. Тогда для $z \neq z_{nk}$, $n \neq 0, k \in \mathbb{Z}$, по лемме 2 имеем

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq |\ln |f(z)| - v(z)| + 2.$$

Отсюда по лемме 1 получим

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq |\ln |f(z)| - \sum_{n \neq 0} L_n^+(z) - L_0(z)| + 2.$$

Подставим определение функции f :

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq \left| \sum_{n \neq 0} (\ln |F(L_n(z))| - L_n^+(z)) \right| + 2.$$

По построению $L_n(b_n) = 0$, поэтому

$$L_n(x) = d_n(x - b_n).$$

Теперь по теореме 1а для любого $\epsilon > 0$ вне кругов $B(z_{nk}, \frac{\epsilon}{d_n})$ имеем

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq A(\epsilon) \sum_{n \neq 0} e^{-|L_n(\operatorname{Re} z)|} + 2.$$

Оценим сумму по натуральным индексам n . По построению $L_n(b_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому

$$L_n(x) = \frac{L_n(b_{n+1})}{b_{n+1} - b_n}(x - b_n) = \frac{l_n(b_{n+1}) - l_{n-1}(b_{n+1})}{b_{n+1} - b_n}(x - b_n).$$

По п.3 леммы 2 отсюда получаем

$$|L_n(x)| \geq \frac{1}{\rho(u, b_n^*, 1)} |x - b_n|.$$

Зафиксируем $x \in I$ и множество всех индексов $n \in \mathbb{N}$ разобьем на две части, полагая

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{n \in \mathbb{N}, |x - b_n| \geq \alpha(b_n)\}, \\ Z_2 &= \{n \in \mathbb{N}, |x - b_n| < \alpha(b_n)\}. \end{aligned}$$

По условиям теоремы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in Z_1} e^{-|L_n(z)|} &\leq \sum_{n \in Z_1} \exp\left(-\frac{|x - b_n|}{\rho(u, b_n^*, 1)}\right) \leq \\ &\leq \sum_{n \in Z_1} \exp\left(-\frac{\alpha(b_n)}{\rho(u, b_n^*, 1)}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha(b_n)}{\rho(u, b_n^*, 1)}\right) = \Sigma_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим множество индексов Z_2 . Положим

$$N_1 = \min\{p : p \in Z_2\}, \quad N_2 = \max\{p : p \in Z_2\},$$

$$s = \min\{p : p \in Z_2, b_p \geq x\}.$$

Очевидно,

$$\sum_{n \in Z_2} e^{-|L_n(z)|} \leq \sum_{n=N_1}^{N_2} \exp\left(-\frac{|x - b_n|}{\rho(u, b_n^*, 1)}\right) \quad (1)$$

Возьмем $n \in [s; N_2]$, тогда

$$|x - b_n| = (b_s - x) + \sum_{p=s}^{n-1} (b_{p+1} - b_p) \geq 2 \sum_{p=s}^{n-1} \rho(u, b_p^*, 1)$$

и поскольку $b_p^*, b_n^* \in [b_{N_2} - \alpha(b_{N_2}); b_{N_2} + \alpha(b_{N_2})]$, то в условиях теоремы

$$\rho(u, b_p^*, 1) \geq c\rho(u, b_n^*, 1)$$

поэтому

$$|x - b_n| \geq 2c \sum_{p=s}^{n-1} \rho(u, b_n^*, 1) = 2c(n-s)\rho(u, b_n^*, 1) \geq 2c|n-s|\rho(u, b_n^*, 1).$$

Если же $n \in [N_1; s-1]$, то

$$\begin{aligned} |x - b_n| &= (x - b_{s-1}) + \sum_{p=n+1}^{s-1} (b_p - b_{p-1}) \geq \\ &\geq 2 \sum_{p=n+1}^{s-1} \rho(u, b_p^*, 1) \geq 2c \sum_{p=n+1}^{s-1} \rho(u, b_n^*, 1) = \\ &= 2c(s-n-1)\rho(u, b_n^*, 1) \geq 2c(|n-s|-2)\rho(u, b_n^*, 1). \end{aligned}$$

Подставим оценки величины $|x - b_n|$ в соотношение (1), полагая $N = \max(s - N_1, n_2 - s)$, получим

$$\sum_{n \in Z_2} e^{-|L_n(Re \ z)|} \leq 2 \sum_{k=0}^N e^{-2ck} \leq \frac{2}{1 - e^{2c}}.$$

Вместе с оценкой суммы по множеству индексов Z_1 получим

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-|L_n(Re \ z)|} \leq \Sigma_1 + \frac{2}{1 - e^{2c}}. \quad (2)$$

Если $L_n(x) = d_n(x - b_n)$, по п.3 леммы 2 имеем

$$d_n = \frac{L_n(b_{n+1})}{b_{n+1} - b_n} = \frac{l_n(b_{n+1}) - l_{n-1}(b_{n+1})}{b_{n+1} - b_n} \geq \frac{1}{\rho(u, b_n^*, 1)}.$$

Поскольку $b_n^*, b_n \in [b_n^* - \rho(u, b_n^*, 1); b_n^* + \rho(u, b_n^*, 1)]$, то по условию теоремы

$$\rho(u, b_n^*, 1) \leq \frac{1}{c} \rho(u, b_n, 1),$$

поэтому

$$d_n \geq c \frac{1}{\rho(u, b_n, 1)}$$

Значит, имеют место включения $B(z_{nk}, \frac{\epsilon}{d_n}) \subset B(z_{nk}, \frac{\epsilon}{c} \rho(u, b_n, 1))$, и оценка выполняется вне множества кругов $B(z_{nk}, \frac{\epsilon}{c} \rho(u, b_n^*, 1))$.

Оценки для отрицательных индексов получаются повторением приведенных выкладок.

Наконец, докажем разделенность нулей. При фиксированном n нули $z_{nk} = b_n + \frac{2\pi}{d_n}i$ расположены на вертикальной прямой $z : \operatorname{Re} z = b_n$ равномерно в расстоянии $\frac{2\pi}{d_n}$ между соседними. Значит круги $B(z_{nk}, \frac{\pi}{d_n})$, $k \in \mathbb{Z}$, попарно не пересекаются. По п.3 леммы 2 попарно не пересекаются и круги $B(z_{nk}, \frac{\pi}{4} \rho(u, b_n, 1))$, $k \in \mathbb{Z}$.

Поскольку $b_n = b_n^* - \rho(u, b_n^*, 1)$, то в условиях теоремы

$$b_{n+1} - b_n = 2\rho(u, b_n^*, 1) \geq 2c\rho(u, b_n, 1),$$

аналогично,

$$b_n - b_{n-1} = 2\rho(u, b_{n-1}^*, 1) \geq 2c\rho(u, b_n, 1),$$

поэтому круги $B(z_{nk}, c\rho(u, b_n, 1))$, $k \in \mathbb{Z}$, не пересекают прямых $\operatorname{Re} z = b_n^*$ и $\operatorname{Re} z = b_{n-1}^*$. Таким образом, если $\epsilon < \min(\frac{\pi}{4}, c)$, то $B(z_{nk}, \epsilon\rho(u, b_n, 1))$, $n, k \in \mathbb{Z}$ попарно не пересекаются.

Теорема 2 доказана.

Сформулируем вариант теоремы 2, более удобный для применений.

Теорема 2а. Пусть u — дважды непрерывно дифференцируемая выпуклая функция на интервале $I_{\mathbb{R}}$, неограниченная вблизи граничных точек интервала.

Предположим, что найдется такая положительная функция $\beta(x)$, $x \in I$, и положительная константа c , что выполнены следующие условия

1. Функция $\beta(x)$ непрерывна, положительна, имеет единственную точку минимума в интервале I , причем $\beta(x) \geq 1$, и интеграл

$$\int_I e^{-\frac{c^3}{16}\beta(x)} \sqrt{u''(x)} dx$$

сходится.

2. Для любого $x \in I$ для всех

$$y_1, y_2 \in \left[x - \frac{\beta(x)}{\sqrt{u''(x)}}; x + \beta(x)\sqrt{u''(x)} \right]$$

имеет место соотношение

$$\sqrt{\frac{u''(y_1)}{u''(y_2)}} \geq c.$$

Тогда существует целая функция f , которая имеет простые нули, расположенные на некоторой системе вертикальных прямых $\operatorname{Re} z = b_n$, $n \in \mathbb{Z}$, причем на каждой из прямых нули распределены равномерно и для любого $\epsilon > 0$ вне кругов $B\left(z_n, \frac{\epsilon}{\sqrt{u''(\operatorname{Re} z_n)}}\right)$ удовлетворяет оценке

$$|\ln |f(z)| - u(z)| \leq A(\epsilon) \left(\Sigma + \frac{4}{1 - e^{2c}} \right).$$

Кроме того, при $\epsilon < \min(\frac{\pi}{4}, \frac{c^4}{256})$ круги $B\left(z_n, \frac{\epsilon}{\sqrt{u''(\operatorname{Re} z_n)}}\right)$ попарно не пересекаются.

Очевидно, что условия теоремы 2а к функции $\beta(x)$ имеют асимптотический характер. Соответственно, и условия на функцию u можно требовать лишь вблизи границ интервала I .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-01-00516-а и 08-01-97020-р_поволжье_а)

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с ней разложения в ряды экспонент Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т.39. №3. С. 657-702.
2. Любарский Ю.И. Ряды экспонент в пространствах Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т.52. №3. С. 559-580.

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Н. А. Казаева, В. И. Луценко, А. З. Минисламов

*Башкирский государственный университет,
abilovbox@mail.ru, lutsenko_v_i@mail.ru*

Пусть $w(t)$ положительная функция определенная на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $L^2(w)$ пространство локально интегрируемых функций $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна следующая норма

$$\|f\|_{L^2(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 / w(t) dt \right)^{1/2},$$

где $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ и $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_n$.

Пусть S линейный непрерывный функционал над гильбертовым пространством $L^2(w)$. Определим преобразование Фурье-Лапласа функционала S следующим образом

$$\hat{S}(z) = S(\exp(\langle t, z \rangle)), \text{ где } \langle z, t \rangle = z_1 t_1 + z_2 t_2 + \dots + z_n t_n.$$

Преобразование Фурье-Лапласа сопоставляет каждому линейному функционалу S целую функцию $\hat{S}(z)$ в $\mathbb{C}^n$ и, тем самым, определяет сопряженное пространство $L_2^*(w)$. В данной статье рассматривается задача описание этого подпространства целых функций.

Одно из решений этой задачи сводится к определению нормы в пространстве целых функций с помощью формулы

$$\|F\|_{\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2},$$

где $\mu(z)$ — неотрицательная мера Бореля, такая, что для любого функционала S выполняется следующее соотношение

$$c\|S\|_{L_2^*(w)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{S}(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} \leq C\|S\|_{L_2^*(w)}$$

Если такая мера существует, то преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $L_2^*(D, w)$ и пространства целых функций с нормой $\|\cdot\|_\mu$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема А. [1] *Для существования неотрицательной меры μ на $\mathbb{C}^n$, с условием (1), необходимо и достаточно, чтобы нашлась неотрицательная мера η на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию*

$$c w(t) \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\langle x, t \rangle} d\eta(x) \leq C w(t), \quad t \in D,$$

причем, константы c и C такие же, как в выше приведенном неравенстве, а $d\mu(x + iy) = d\eta(x) dy$.

В частном случае классическая теорема Пели-Винера получается при $D = [0, 1]$, $w(t) = 1$.

При жестких условиях на функцию $w(t)$, а именно, когда $w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} d\sigma$, где $d\sigma$ — неотрицательная мера Бореля получены аналогичные описания пространства функционалов S. Soitoh [2].

При $n = 1$ для произвольных логарифмически выпуклых функций в работе [4] получено описание пространства функционалов с аналогом равенства Парсеваля (1), где c и C абсолютные константы. В работе ([1]) доказано, что для получения (1) с абсолютными оценками требование логарифмической выпуклости необходимо.

Данный результат использовался в работах [1-5] для аналогичных описаний пространств функционалов над пространствами последовательностей, Смирнова, Бергмана.

Сформулируем этот результат:

Теорема В. [4-5] *Пусть $\ln w(t) = h(t)$ — выпуклая функция на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$ и определим сопряженную по Юнгу функцию*

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in D} (\langle x, t \rangle - h(t)).$$

Также, обозначим $I^* = \{x \in R : \tilde{h}(x) < \infty\}$. Тогда весовое пространство $L_2^*(w)$ и пространство целых функций H^2 с нормой

$$\|F\|_{H^2} = \left(\int_{I^*} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2},$$

где $d\mu(z) = \exp(-2\tilde{h}(x)) \rho(x) d\tilde{h}'(x)$ и $\rho(x)$ находится из тождества $\tilde{h}(x + \rho(x)) + \tilde{h}(x - \rho(x)) - 2\tilde{h}(x) = 1$, изоморфны относительно преобразования Фурье-Лапласа. Заметим, что меру μ можно записать как

$$d\mu(z) = \left(\int_I e^{2xt - 2h(t)} dt \right)^{-1} d\tilde{h}'(x) [6].$$

Нам понадобится следующее утверждение из работы [4].

Лемма А В условиях теоремы А справедливы оценки

$$c \leq \int_{I^*} \exp(xt - h(t) - \tilde{h}(x)) \rho(x) d\tilde{h}'(x) \leq C,$$

причем c и C абсолютные константы.

Сформулируем основное утверждение статьи при условии $n > 1$.

Теорема 1. Пусть $\ln w(t) = 2kt^\alpha$ ($\alpha > 1$) и $h(t) = k|t|^{\alpha-}$ — выпуклая, радиальная функция в $\mathbb{R}^n$. Также определим сопряженную по Юнгу функцию

$$\tilde{h}(|x|) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (\langle x, t \rangle - h(t)) = (\alpha - 1)k \left(\frac{|x|}{k\alpha} \right)^\beta,$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 1$ Обозначим

$$s(y) = \begin{cases} y^{(n-1)/2}, & y > 1, \\ 1, & y \leq 1. \end{cases}$$

Тогда пространство $L_2^*(w)$ изоморфно относительно преобразования Фурье - Лапласа пространству целых функций $H^2(\mathbb{C}^n)$ с нормой

$$\|F\|_{H^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^2 d\sigma(\tilde{h}(x)) dy \right)^{1/2},$$

где $dy = dy_1 dy_2 \dots dy_n$,
 $d\sigma(\tilde{h}(x)) = \exp(-2\tilde{h}(x)) \rho(|x|) \left(s\left(\frac{|x|}{h'(|x|)}\right)\right) dA(\tilde{h}(x))$, u
 $dA(\tilde{h}(x)) = d\tilde{h}'_{x_1}(x) \wedge d\tilde{h}'_{x_2}(x) \wedge \dots \wedge d\tilde{h}'_{x_n}(x)$ – обобщенный оператор
Монжа-Ампера, причем выполняется аналог равенства Парсеваля

$$c\|S\|_{L_2^*}^2 \leq \|\hat{S}(z)\|_{H^2}^2 \leq 3C \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} \|S\|_{L_2^*}^2 \quad (4)$$

Для доказательства основной теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Если $h(t) = h(|t|)$ радиальная функция, то и $\tilde{h}(x) = \tilde{h}(|x|)$ является радиальной. (см. доказательство в [7])

Лемма 2. Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $d\sigma_B\left(\frac{x}{|x|}\right)$ – мера Лебега на сфере. Обозначим функцию

$$s(y) = \begin{cases} y^{(n-1)/2}, & y > 1, \\ 1, & y \leq 1, \end{cases}$$

тогда верны неравенства

$$m_n \frac{e^{|x||t|}}{s(|x||t|)} \leq \int_B e^{\langle x, t \rangle} d\sigma_B\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq M_n \frac{e^{|x||t|}}{s(|x||t|)},$$

где m_n, M_n константы.

Доказательство приведено в работе [7].

Лемма 3. Пусть $h(t) = k|t|^\alpha$ ($\alpha > 1$) выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Также число a определим из условия $ah'(a) = 1$. Тогда справедливо соотношение

$$c \leq \int_0^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)} \rho(x) \frac{s(x\tilde{h}'(x))}{s(xt)} d\tilde{h}'(x) \leq CL, \quad (5)$$

где $L = 3C \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}}$

Доказательство. Определим число a из условия $ah'(a) = 1$. Так как по определению

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in D} (\langle x, t \rangle - h(t)),$$

тогда, если обозначим t_x точку максимума вогнутой функции $xt - h(t)$ т.е. $x = h'(t_x)$, то верно тождество

$$\tilde{h}(x) = xt_x - h(t_x).$$

Продифференцируем это тождество по x

$$\tilde{h}'(x) = h''(t_x)t'_x t_x + h'(t_x)t'_x - h'(t_x)t'_x.$$

Учитывая, что $h''(t_x)t'_x = 1$ получаем равенство $\tilde{h}'(x) = t_x \in I$. Из равенств $x = h'(t_x)$ и $\tilde{h}'(x) = t_x$ получаем $x = h'(\tilde{h}'(x))$, т.е. функции $h'(t)$ и $\tilde{h}'(x)$ обратные. По условию $ah'(a) = 1 \Rightarrow \tilde{h}'(h'(a)) = \tilde{h}'(1/a) \Rightarrow a = \tilde{h}'(1/a)$. Оценим интеграл $\int_0^{+\infty} u(x)d\tilde{h}'(x)$, где

$$u(x) = e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x) \frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}$$

в соотношении (2) сверху. Пусть $1/t \leq 1/a$. Разобьем интеграл леммы на сумму трех интегралов

$$\int_0^{+\infty} u(x)d\tilde{h}'(x) = \int_0^{1/t} u(x)d\tilde{h}'(x) + \int_{1/t}^{1/a} u(x)d\tilde{h}'(x) + \int_{1/a}^{+\infty} u(x)d\tilde{h}'(x).$$

В первом интеграле при $x \in [0; 1/t] \Rightarrow s(xt) = s(x\tilde{h}'(x)) = 1$, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{1/t} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x) \frac{s\left(x\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)}d\tilde{h}'(x) &\leq \\ \int_0^{1/t} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x) d\tilde{h}'(x) &\leq \\ \leq \int_0^{+\infty} e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)}\rho(x) d\tilde{h}'(x) &= Int \end{aligned}$$

Во втором интеграле $s(xt) = (xt)^{(n-1)/2}$ и $s\left(x\tilde{h}'(x)\right) = 1$. При $x \geq 1/t$ справедлива оценка $1/s(xt) \leq 1$, и второй интеграл можно оценить

$$\int_{1/t}^{1/a} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)}\rho(x) \frac{1}{s(xt)}d\tilde{h}'(x) \leq$$

$$\begin{aligned} & \int_{1/t}^{1/a} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)} \rho(x) d\tilde{h}'(x) \leq \\ & \leq \int_0^{+\infty} e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)} \rho(x) d\tilde{h}'(x) = Int \end{aligned}$$

При $x \geq 1/a$ верно

$$s\left(\tilde{h}'(x)\right)/s(xt) = \left(\tilde{h}'(x)/(xt)\right)^{(n-1)/2} = \left(\tilde{h}'(x)/t\right)^{(n-1)/2}.$$

Так как, $\tilde{h}'(x) = p\beta x^{\beta-1}$, где $p = (\alpha - 1)/(k\alpha)^\beta$, то наибольшее значение функция

$$f(x) = e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)} \left(\tilde{h}'(x)/t\right)^{(n-1)/2}.$$

достигается в точке x_0 являющейся решением уравнения

$$tx_0 - p\beta x_0^\beta + (n-1)(\beta-1)/2 = 0.$$

Поэтому $\beta x_0^{\beta-1}/t \leq (n-1)(\beta-1)/(2p)$ и учитывая, что $xt-h(t)-\tilde{h}(x) \leq 0$ получим оценку

$$f(x) \leq \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2}\right)^{(n-1)/2}$$

И тогда третий интеграл оценивается следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_{1/a}^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)} \rho(x) \frac{s\left(\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)} d\tilde{h}'(x) \leq \\ & \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2}\right)^{(n-1)/2} \int_{1/a}^{+\infty} e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)} \rho(x) d\tilde{h}'(x) \leq \\ & \leq \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2}\right)^{(n-1)/2} Int, \end{aligned}$$

где $int = \int_0^{+\infty} e^{xt-h(t)-\tilde{h}(x)} \rho(x) d\tilde{h}'(x)$. Учитывая, согласно лемме А, что $Int \leq C$, получаем оценку

$$\int_0^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)} \rho(x) \frac{s\left(\tilde{h}'(x)\right)}{s(xt)} d\tilde{h}'(x) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq Int + Int + \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2} \right)^{(n-1)/2} Int \leq \\ &\leq 3C \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2} \right)^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

При $1/t > 1/a$ аналогично разобьем интеграл на сумму трех интегралов и таким же образом их оценив получим такую же оценку.

Следовательно, суммируя рассуждения в всех случаях, получим окончательную оценку сверху

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)} \rho(x) \frac{s(x\tilde{h}'(x))}{s(xt)} d\tilde{h}'(x) \leq \\ &\leq 3C \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2} \right)^{\frac{(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

Использование леммы А с аналогичными рассуждениями дают оценку снизу в неравенстве (2)

Доказательство основной теоремы: По теореме А достаточно найти меру $d\eta$ с условием

$$c \leq \int_{R^n} e^{2\langle x, t \rangle - 2h(t)} d\eta(x) \leq C, \quad t \in D.$$

Докажем, что нам подойдет мера $d\eta = d\sigma(\tilde{h}(x))$.

По условию теоремы 1 и согласно лемме 1 функция $\tilde{h}(x)$ – радиальная, следовательно, в интеграле можно ввести полярную систему координат и упростить запись

$$\begin{aligned} &\int_B \int_0^{+\infty} e^{2\langle x, t \rangle - 2h(|t|) - 2\tilde{h}(|x|)} \rho(|x|) \times \\ &\times s\left(\frac{|x|}{\tilde{h}'(|x|)}\right) \left(\tilde{h}'(|x|)\right)^{\frac{n-1}{2}} d\tilde{h}'(|x|) d\sigma_B\left(\frac{x}{|x|}\right). \end{aligned}$$

Поменяем пределы интегрирования и используем определение функции s , чтобы заменить интеграл эквивалентным выражением

$$\int_0^{+\infty} e^{-2h(|t|) - 2\tilde{h}(|x|)} \rho(|x|) s(|x|\tilde{h}'(|x|)) d\tilde{h}'(|x|) \times$$

$$\times \int_B e^{2\langle x, t \rangle} d\sigma_B \left(\frac{x}{|x|} \right).$$

По лемме 2 внутренний интеграл эквивалентен функции

$$e^{2|x||t|/s(|x||t|)},$$

и поэтому если мы примем для простоты обозначения: $|x| = x$ и $|t| = t$, то тогда достаточно будет оценить снизу и сверху следующий интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{2xt-2h(t)-2\tilde{h}(x)} \rho(x) \frac{s(\tilde{h}'(x))}{s(xt)} d\tilde{h}'(x).$$

Требуемые оценки получаются применением леммы 3. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 00-00-00000 и 00-00-00000-Бел) и программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-00000.0000.0).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Youlmukhametov R. S. and Lutsenko V. I. *Weighted Laplas transform.* // Pitman Research Notes in Mathematics, Logman Scientific & Technical, – 1991, –С. 232–240.
2. S. Saitoh *Generalization of Paley–Wiener’s theorem for entire function of exponential type.* // Proc. Amer. Math. Soc. –99 (1987), С. 465–467.
3. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. *Обобщение теоремы Пэли – Винера на функционалы в пространствах Смирнова.* // Труды Математического института им. В. А. Стеклова, Москва, «Наука», –1991 – Т. 200. – С. 245–254.
4. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. *Обобщение теоремы Пэли – Винера на весовые пространства.* // Математические заметки –1990. –Т.48., – вып. 5, –С. 80–87.
5. Луценко В. И. *Теорема Пэли – Винера на неограниченном интервале.* // Исследования по теории приближений. Уфа, –1989, –С. 79–85.
6. Юлмухаметов Р. С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа.* // Исследования по теории приближений. Уфа, –1989, –С. 132–139.
7. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. *Описание функционалов для весовых пространств с радиальным весом.* // Вестник УГАТУ, серия – 2007. –Т.9., –№. 3(21), –С. 104–109.

АВТОРЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ПРЕЦЕССИЕЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ В ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЁНКЕ

Л. А. Калякин¹, А. Т. Харисов, М. А. Шамсутдинов

Башкирский государственный университет

¹*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН*

ShamsutdinovMA@bsu.bashedu.ru, Klenru@mail.ru, Khantaf@mail.ru

Возрастающий интерес как теории, так и практических применений представляет исследование проблемы управления возбуждением большеамплитудных колебаний в нелинейных системах различной природы [1-5], в том числе в магнитоупорядоченных кристаллах [6-9]. В работе [6] имеются указания на повышение эффективности перемагничивания при варьировании частоты во время действия радиочастотного (РЧ) импульса. Согласно [10, 11], амплитуда РЧ поля, при которой наступает перемагничивание $H_1 \geq 0.1 H_a$, где H_a – поле эффективной магнитной анизотропии. В случае полей малых амплитуд $H_1 \ll 0.1 H_a$ при фиксированной частоте не удастся достичь больших углов отклонения прецессирующей намагниченности M . Причина кроется в нарушении резонансного условия при увеличении амплитуды прецессии. Одним из возможных механизмов отклонения намагниченности на большие углы РЧ полями малой амплитуды может быть изменение характеристик полей со временем.

Данная работа посвящена изучению возбуждения и управления высокоамплитудной прецессией намагниченности циркулярно поляризованным РЧ полем малой амплитуды в тонких ферромагнитных пленках в авторезонансном режиме.

Под авторезонансом понимается явление автоматической подстройки собственной частоты динамической системы под частоту внешнего воздействия (накачки) [12-14]. Возникающий таким образом резонанс, удерживаемый в течение долгого времени, может приводить к значительному

изменению энергии системы даже при малой вынуждающей силе. Эффекты, связанные с авторезонансом, обнаруживаются в колебательных системах различной природы [4]. К настоящему времени разработаны математические основы авторезонансного возбуждения в колебательных системах при отсутствии затухания [15]. Явление авторезонанса в магнетиках как в экспериментальном, так и теоретическом [9] отношении остается малоизученным.

Динамику вектора намагниченности исследуем исходя из уравнения Ландау–Лифшица

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}] - \frac{\lambda_1}{M_0^2}[\mathbf{M}[\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}]]. \quad (1)$$

Здесь γ – гиромагнитное отношение, $M_0 = |\mathbf{M}|$, λ_1 – параметр диссипации,

$$\mathbf{H}_{eff} = \left(2 \left(\frac{K_u}{M_0} - 2\pi M_0 \right) m_z + H_0 \right) \mathbf{n}_z + H_1 (\mathbf{n}_x \cos \Phi + \mathbf{n}_y \sin \Phi), \quad (2)$$

где K_u – константа одноосной магнитной анизотропии, $m_z = M_z/M_0$, H_0 – резонансное поле; H_1 – амплитуда, $\Phi(t)$ и $\omega = d\Phi/dt$ – фаза и частота циркулярно поляризованного поля. При $2(K_u - 2\pi M_0^2) > 0$ вектор намагниченности в отсутствии поля ориентируется нормально плоскости пленки.

Когда изменение частоты поля накачки ω или резонансного поля H_0 происходит бесконечно медленно, может иметь место стационарное прецессионное движение $\mathbf{M}$ на частоте нелинейного ферромагнитного резонанса (ФМР) [16]

$$\omega_r(m_z) = \frac{\gamma}{M_0} (2(K_u - 2\pi M_0^2)m_z + M_0 H_0). \quad (3)$$

Ниже рассматривается нестационарное однородное прецессионное движение намагниченности в условиях медленного изменения параметров внешнего поля с конечной скоростью при малых амплитудах РЧ поля. В рассматриваемой задаче подходящими переменными являются: m_z – продольная компонента намагниченности и $\psi = \varphi - \Phi$ – разность фаз между прецессирующей намагниченностью и циркулярно поляризованным полем; φ – азимутальный угол вектора $\mathbf{M}$. Уравнения (1) принимают вид:

$$\frac{dm_z}{dt} = \sqrt{1 - m_z^2} (h_1 \sin \psi + \lambda [\sqrt{1 - m_z^2} (a + m_z + \Omega) - h_1 m_z \cos \psi]),$$

$$\sqrt{1 - m_z^2} \left(\frac{d\psi}{dt} - (a + m_z) \right) = -h_1(m_z \cos \psi + \lambda \sin \psi). \quad (4)$$

Здесь произведена замена $t\omega_0 \rightarrow t$, $\omega_0 = 2\gamma(K_u - 2\pi M_0^2)/M_0$, $a = h_0 - \Omega$, $\Omega = \omega/\omega_0$, $\lambda = \lambda_1/(\gamma M_0)$, $h_0 = \gamma H_0(t)/\omega_0$, $h_1 = \gamma H_1(t)/\omega_0$.

Систему уравнений (4) анализируем в условиях малости амплитуды поперечного поля и диссипации ($0 < h$, $\lambda \ll 1$) и малого изменения H_0 , ω за период свободной прецессии намагниченности с частотой линейного ФМР. При всех этих условиях математическая модель в форме (4) представляет собой возмущение нелинейного осциллятора с частотой $a + m_z$. Обычно такого типа задачи исследуются методами усреднения, либо адиабатических приближений [17, 18]. В частности, в [19] таким способом была проанализирована эволюция системы (4) для значений m_z , далеких от единицы и при немалых h_1 .

Целью дальнейших исследований являются решения с компонентой $m_z(t)$, которая в начальный момент близка к единице и со временем эволюционирует к значениям, отличным от единицы, например, $m_z(t) \approx 0$. В начальный момент имеет место резонансное соотношение $\Omega(0) = h_0(0) + 1 > 1$. Эволюция компоненты $m_z(t) = m_z^0(t) + o(1)$ в главном члене асимптотики по малым параметрам определяется из резонансного условия совпадения собственной и вынуждающей частот. Это условие сводится к соотношению

$$m_z^0(t) = -a(t). \quad (5)$$

Такое приближение имеет смысл, если параметры поля меняются так, что модуль величины $a(t) = h_0 - \Omega$ в начальный момент близок единице и медленно убывает во времени. Анализ первого уравнения из (4) показывает, что приближение (5) непригодно на начальном и конечном этапах. На этих этапах существуют узкие переходные (пограничные) слои, где происходит быстрая перестройка решения – захват в резонанс, либо выход из него.

Анализ в начальном пограничном слое удобно проводить, используя модуль поперечной компоненты намагниченности $m_\perp = \sqrt{1 - m_z^2}$. В приближении

$$m_\perp = h_1^{1/3} \rho(\tau) \ll 1, \quad a = -(1 - g\tau/h_1^{2/3})$$

уравнения (4) приобретают вид:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\sin \psi - \frac{\lambda}{h_1^{2/3}} \Omega \rho,$$

$$\rho \left(\frac{d\psi}{d\tau} + \frac{g}{h_1^{4/3}}\tau + \rho^2/2 \right) = -\cos\psi, \quad (6)$$

где $0 < g \ll 1$, $\tau = h_1^{2/3}t$ – медленное время.

Условия резонансного захвата, исходя из (6), при отсутствии затухания хорошо исследованы [15]. В этом случае для двухпараметрического семейства решений с растущей амплитудой асимптотика совпадает в главных членах и имеет вид

$$\rho(\tau) = \sqrt{2g\tau/h_1^{4/3}} + \mathcal{O}(\tau^{-3/8}), \quad \cos\psi < 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

При ненулевой диссипации не существует решений с неограниченно растущей амплитудой. Однако, если коэффициент диссипации мал: $\lambda\Omega h_1^{-2/3} \ll 1$, то существует двухпараметрическое семейство решений, амплитуды которых довольно долго растут, а затем на далеких временах происходит срыв на ограниченную асимптотику. Промежуточная асимптотика при больших τ описывается той же формулой, что и в бездиссипативном случае. Момент срыва определяется приближенно из соотношения

$$g\tau/h_1^{2/3} = (\lambda\Omega/h_1)^{-2}/2, \quad (7)$$

когда амплитуда достигает значения, при котором диссипативное слагаемое оказывается порядка единицы, а производная $d\rho/d\tau$ меняет знак.

Эти решения соответствуют захвату в резонанс, когда поперечная компонента нарастает до величины порядка единицы [15]. В общем случае захват в резонанс зависит от начальных данных, а также от скорости изменения $h_0(\tau)$, либо $\Omega(\tau)$. Эти зависимости можно определить численно. Однако, как показывают численные эксперименты, при скорости изменения $h_0(\tau)$, $\Omega(\tau)$ много меньшей параметра затухания ($g \ll \lambda$) область захвата в резонанс слабо зависит от начальных данных, что можно объяснить релаксацией системы в состояние, близкое к резонансному еще в пределах начального погранслоя.

Формула (7) пригодна, если к моменту срыва m_z не мала. Если $m_z \approx 0$, то момент срыва $t \approx g^{-1}$ определяет условие $a(t) = 0$. При этом для фазы в момент срыва из (4) получается соотношение

$$h_1 |\sin\psi| \approx \lambda\Omega. \quad (8)$$

В случае $\lambda\Omega \ll h_1$ отсюда вытекает $|\psi| \ll 1$, что согласуется с численными результатами.

Правильность полученных выше аналитических результатов подтверждается численными экспериментами. Переходим к изложению результатов таких экспериментов.

Рассмотрим движение намагниченности в полях, медленно меняющихся со временем по закону:

$$h_0(t) = h_0(0) \pm f(gt), \quad (9)$$

где $0 < g \ll 1$, а f – некоторая функция, явный вид которой приведен ниже в (12)–(14).

На рис. 1–3 приведена зависимость продольной компоненты намагниченности m_z и косинуса разности фаз ψ от времени t . Расчеты показывают, что для заданного набора параметров и зависимости $f(gt)$ от времени существует режим прецессии, при котором намагниченность отклоняется на достаточно большие углы, достигающие значения 90° и даже его превосходящие. На рис. 1 и 2 видно, что с течением времени система переходит к режиму уменьшения величины продольной компоненты намагниченности по закону, близкому к (5):

$$m_z \approx \Omega - h_0 = 1 - f(gt). \quad (10)$$

Откуда следует, что

$$\omega = \omega_0 m_z + \gamma H_0(t) = \omega_r(m_z). \quad (11)$$

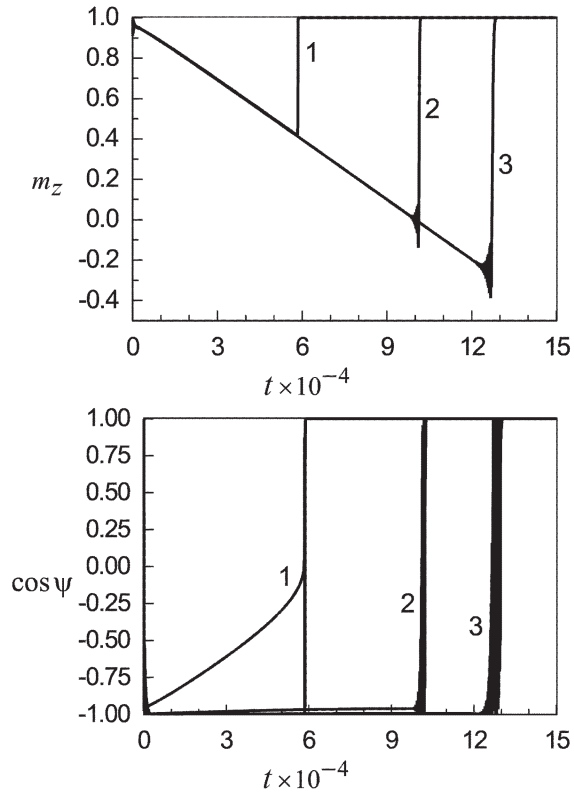


Рис. 1. Зависимость m_z и $\cos \psi$ от времени при $g = 10^{-5}$, $h_1 = 0.01$, $h_0(0) = 0.1$, $\Omega(0) = 1.1$, λ : 1 – 0.01, 2 – 0.0025, 3 – 0.001

На рис. 1 видно, что при линейном законе изменения поля, т.е.

$$f = gt, \quad (12)$$

с течением времени происходит расфазировка, наступает движение с быстро меняющейся фазой и скачок в состояние с $m_z \approx 1$. Этот скачок при $\lambda = h_1$ происходит в момент времени, приблизительно определяемый (7). В случае $h_1 \gg \lambda(1 + h_0(0))$ при выполнении условия (8) скачок происходит в момент времени $t \approx g^{-1}$.

Итак, аналитический и численный анализ показывает, что при медленном росте величины резонансного поля происходит подстраивание частоты нелинейного прецессионного движения намагниченности под частоту переменного поля (см. (11)). Разность фаз меняется медленно, т.е. практически остается неизменной (см. рис. 1), а $\cos \psi$ отрицательной. Такое явление принято называть *авторезонансом* [4, 12-15].

Исследуем возможность перевода намагниченности в состояние стационарной высокоамплитудной однородной прецессии. Для этого рассмотрим изменение резонансного поля по закону гиперболического тангенса, т.е.

$$f = h_2 \tanh(gt). \quad (13)$$

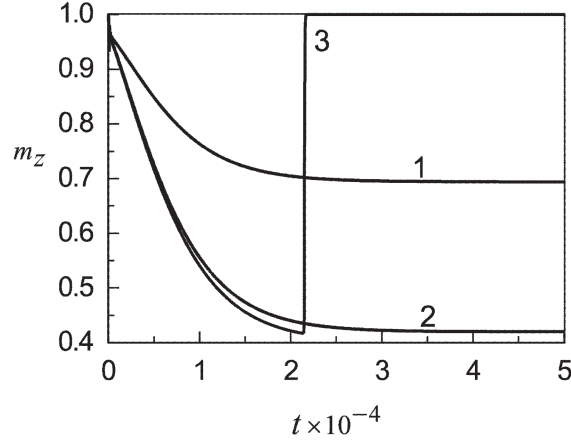


Рис. 2. Зависимость m_z от времени при $g = 10^{-4}$;
 $\lambda = 0.01$, $h_1 = 0.01$, $h_0(0) = 0.1$, $\Omega(0) = 1.1$, h_2 : 1 – 0.3, 2 – 0.58,
 3 – 0.6

Численные расчеты показывают, что при положительном h_2 , меньшем некоторого критического (см. рис. 2), с течением времени происходит управляемый переход к режиму стационарного нелинейного ФМР с частотой, равной:

$$\omega_r(m_z) = \omega_0(m_z + h_2) + \gamma H_0(0).$$

При h_2 , большем некоторого критического, с течением времени происходит скачок в состояние с $m_z \approx 1$ (крив. 3 на рис. 2). Таким образом, изменяя величину h_2 , можно вывести намагниченность на траектории с различными достаточно большими растворами конуса прецессии; время выхода на этот режим определяется параметром g .

Переходим к рассмотрению движения в подмагничивающих полях, меняющихся по закону синуса, т.е.

$$f(gt) = h_2 \sin(gt). \quad (14)$$

На временах $\pi n/g < t \leq \pi(2n+1)/g$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) частота накачки оказывается меньшей или равной частоте линейного ФМР $\omega_r = \omega_0(1 + h_0(0) + h_2 \sin(gt))$. На этих временах при h_2 , меньшем некоторого критического значения (см. рис. 3), имеет место как захват фазы $\psi = \psi_0 \approx \text{const}$, так и захват частоты $\omega = \omega_0(m_z + h_0(t))$. Продольная компонента намагниченности, как видно на рис. 3, меняется по закону $m_z \approx 1 - f(gt)$. Захват фазы и частоты длится в течение времени $\Delta t = \pi/g$. В течение первой половины этого интервала продольная компонента намагниченности m_z убывает, а в течение второй половины – растет.

На временах $\pi(2n+1)/g < t \leq 2\pi(n+1)/g$ частота накачки оказывается больше резонансной частоты линейного ФМР $\omega_r = \omega_0(1 + h_0(0) - h_2 |\sin(gt)|)$. В этом случае захват частоты отсутствует. Система переходит в устойчивый стационарный нерезонансный режим прецессии намагниченности с $m_z \approx 1$. В этом состоянии намагниченность находится в течение времени $\Delta t = \pi/g$. В течение этого интервала времени система находится как бы в режиме ожидания. После прохождения этого времени снова наступает режим захвата фазы и частоты. При h_2 , большем некоторого критического, захват фазы и частоты имеет место только на временах $\pi n/g < t < \pi(2n+1)/(2g)$, при которых происходит авторезонансное уменьшение m_z (см. крив. 3 рис. 3). В момент времени $t \approx \pi(2n+1)/(2g)$ происходит «расфазировка» и переход намагниченности в состояние $m_z \approx 1$. Через время, равное $\Delta t \approx 3\pi/(2g)$, снова включается авторезонансный режим уменьшения m_z .

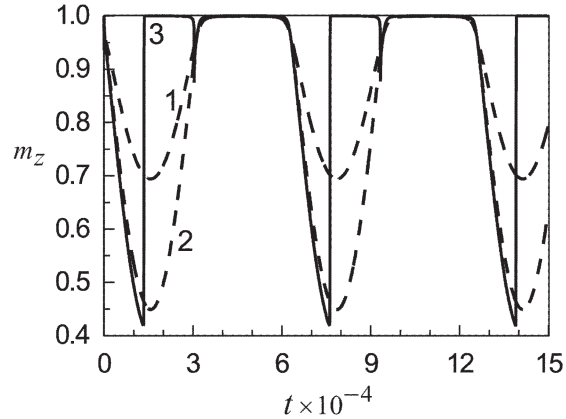


Рис. 3. Зависимость m_z от времени при $g = 10^{-4}$; $\lambda = 0.01$, $h_1 = 0.01$, $h_0(0) = 0.1$, $\Omega(0) = 1.1$,
 h_2 : 1 – 0.3, 2 – 0.55, 3 – 0.6

Таким образом, выбирая параметр g , можно управлять моментом

включения и выключения авторезонансного режима движения намагниченности, а меняя h_2 , можно управлять величиной m_z , т.е. глубиной модуляции выходного сигнала и характером авторезонансного изменения продольной компоненты намагниченности.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 06-01-92052, 06-01-00124) и Академией наук Республики Башкортостан.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Моносов Я. А. *Нелинейный ферромагнитный резонанс*. М.: Наука, 1971.
2. Семенцов Д. И., Шутый А. М. // УФН. – 2007. – Т. 177. – С. 831.
3. Чириков Б. В. // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 125. – С. 1015.
4. Fajans J. and Friedland L. // Am. J. Phys. – 2001. – V. 69. – P. 1096.
5. Фрадков А. Л. // УФН. – 2005. – Т. 175. – С. 113.
6. Thirion C., Wernsdorfer W. and Mailly D. // Nature materials. – 2003. – V. 2. – P. 524.
7. Гарифуллин Р. Н., Калякин Л. А., Шамсутдинов М. А. // ЖВМ и МФ. – 2007. – Т. 47. – С. 1208.
8. Калякин Л. А., Шамсутдинов М. А., Гарифуллин Р. Н., Салимов Р. К. // ФММ. – 2007. – Т. 104. – С. 115.
9. Шамсутдинов М. А., Ломакина И. Ю., Назаров В. Н. и др. *Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны*. Уфа: Гилем, 2007.
10. Котов Л. Н., Носов Л. С. // ЖТФ. – 2005. – Т. 75. – № 10. – С. 55.
11. Denisov S. I., Lyuty T. V., Hänggi P. and Trohidou K. N. // Phys. Rev. B. – 2006. – V. 74. – 104406.
12. Векслер В. И. // Доклады АН СССР. – 1944. – Т. 43. – С. 346; Т. 44. – С. 393.
13. McMillan E. M. // Phys. Rev. – 1945. – V. 68. – P. 143.
14. Meerson B. and Friedland L. // Phys. Rev. A. – 1990. – V. 41. – P. 5233.
15. Калякин Л. А. // ТМФ. – 2003. – Т. 137. – С. 142.
16. Малоземов А., Слонзуски Дж. *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*. М.: Мир, 1982.
17. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука, 1974.
18. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики*. М.: ВИНТИ, 1985.

19. Калякин Л. А., Шамсутдинов М. А. // Труды Института математики и механики. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – Т. 13. – № 2. – С. 104.

ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В. Э. Ким.

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
kim@matem.anrb.ru*

Пусть $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k z^k$ является целой функцией порядка ρ и типа σ , где $0 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, и удовлетворяет условиям:

$$t_k \neq 0 \ (k \geq 0), \quad (1)$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/\rho} \sqrt[k]{|t_k|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}. \quad (2)$$

Оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева $D_G [1]$, построенный по функции G , действует на целую функцию $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ следующим образом:

$$D_G^n[f](z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{t_{k-n}}{t_k} z^{k-n}.$$

Оператор D_G действует линейно и непрерывно из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$ (здесь и далее $H(\mathbb{C})$ обозначает пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах). Введем на $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенного сдвига

$$\tilde{T}_z[f](w) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n D_G^n[f](z) w^n, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Обозначим через $H'(\mathbb{C})$ пространство сопряженное к $H(\mathbb{C})$. Пусть $S \in H'(\mathbb{C})$. Определим на $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенной свертки

$$\tilde{M}_S[f](z) = \langle S, \tilde{T}_z[f] \rangle. \quad (4)$$

Пусть X – топологическое векторное пространство. Линейный непрерывный оператор $\Phi : X \rightarrow X$ называется *гиперциклическим*, если существует такой элемент $x \in X$, что его орбита $\{\Phi^n x, n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотна в X . Термин "гиперциклический" в данном значении был впервые предложен в работе [2]. Введение этого термина было мотивировано следующим хорошо известным в теории операторов определением: оператор Φ называется *циклическим*, если $\exists x \in X$ такой, что множество $\text{span}\{\Phi^n x, n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотно в X . Таким образом, из гиперциклическости оператора вытекает его циклическость.

Приведем теперь определение хаотического оператора, следуя [3]: Оператор $\Phi : X \rightarrow X$ на метрическом пространстве (X, d) называется хаотическим, если выполняются следующие условия:

(А) Φ обладает существенной зависимостью от начальных условий. Это означает, что существует $\delta > 0$, такое что для любого $x \in X$ и любой окрестности $U(x)$ найдутся $y \in U$ и $n \in \mathbb{N}$, такие что $d(\Phi^n x, \Phi^n y) > \delta$.

(В) Φ является топологически транзитивным. Это означает, что для любой пары U, V открытых подмножеств в X , найдется целое $n \geq 0$, такое что $\Phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(С) Множество периодических точек оператора Φ является плотным подмножеством в X . Элемент $x \in X$ называется периодической точкой оператора Φ , если найдется число $n \in \mathbb{N}$, такое что $\Phi^n x = x$.

Условимся называть оператор $\Phi : X \rightarrow X$ *нетривиальным*, если Φ не является кратным тождественному оператору (т.е. не является оператором вида $\Phi x = \lambda x, \forall x \in X$, где $\lambda \in \mathbb{C}$).

Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 1. *Любой нетривиальный оператор (4) является гиперциклическим и хаотическим на $H(\mathbb{C})$.*

Первый пример гиперциклического оператора был фактически найден в работе Биркхоффа [4] в 1929 году. В этой работе было доказано, что существует целая функция f , такая что множество ее сдвигов $\{f(z + n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотно в $H(\mathbb{C})$. Следующий пример был получен в 1952 году в работе МакЛейна [5], в которой было доказано, что существует функция $f \in H(\mathbb{C})$, такая что множество ее производных $\{f^{(n)}(z), n = 0, 1, 2, \dots\}$ плотно в $H(\mathbb{C})$. Таким образом, оператор сдвига $T_1[f](z) = f(z + 1)$ и оператор df/dz являются гиперциклическими операторами на пространстве $H(\mathbb{C})$.

Значительное обобщение результатов Биркхоффа и МакЛейна было получено в 1991 году в работе Годфри и Шапиро [6]. Рассмотрим на $H(\mathbb{C})$

оператор сдвига

$$T_z[f](w) = f(w + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} f^{(n)}(z), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Любой функционал $S \in H'(\mathbb{C})$ определяет линейный и непрерывный оператор свертки:

$$M_S[f](z) = \langle S, T_z[f] \rangle, \quad f \in H(\mathbb{C}). \quad (5)$$

Отметим, что оператор T_1 и оператор дифференцирования являются частными случаями оператора (5). В работе [6] было, в частности, доказано, что любой нетривиальный оператор (5) является гиперциклическим на $H(\mathbb{C})$.

В работе [7] аналогичный результат был получен для операторов обобщенной свертки на $H(\mathbb{C})$, порождаемых операторами Данкла. Операторы Данкла — это дифференциально-разностные операторы, связанные с конечными группами отражений в некотором евклидовом пространстве. Эти операторы играют важную роль в различных задачах математики и физики (см., например, обзор [8]. В работе [7] рассматривался одномерный оператор Данкла на пространстве $H(\mathbb{C})$:

$$\Lambda_\alpha f(z) = f'(z) + (\alpha + 1/2) \left(\frac{f(z) - f(-z)}{z} \right), \quad \alpha \geq -1/2. \quad (6)$$

Единственным целым решением уравнения $\Lambda_\alpha f = f$ с условием $f(0) = 1$ является функция

$$E_\alpha(z) = j_\alpha(iz) + \frac{z}{2(\alpha + 1)} j_{\alpha+1}(iz),$$

где j_α — нормированная функция Бесселя порядка α ,

$$j_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1) z^{2k}}{4^k \Gamma(k + 1) \Gamma(k + \alpha + 1)}.$$

Отметим, что $\Lambda_\alpha^k E_\alpha(\lambda z) = \lambda^k E_\alpha(\lambda z)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Оператор Λ_α порождает на $H(\mathbb{C})$ оператор обобщенного сдвига

$$T_{z,\alpha}[f](w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,\alpha} \Lambda_\alpha^n f(z) w^n,$$

где $b_{n,\alpha}$ — коэффициенты ряда Тейлора $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n,\alpha} z^n$, и оператор обобщенной свертки

$$M_{S,\alpha}[f](z) = \langle S, T_{z,\alpha}[f] \rangle, \quad S \in H'(\mathbb{C}). \quad (7)$$

Отметим, что $E_{-1/2}(z) \equiv \exp(z)$, $M_{S,-1/2} = M_S$. В [7] было показано, что любой нетривиальный оператор (7) является гиперциклическим и хаотическим на $H(\mathbb{C})$.

Очевидно, что в случае $G(z) \equiv \exp(z)$ оператор Гельфонда-Леонтьева D_G совпадает с обычным дифференцированием. В случае $G(z) \equiv E_\alpha(z)$ оператор D_G совпадает с оператором Данкла (6). Действительно, $\Lambda_\alpha[z^n] = p_n z^{n-1}$, где $p_n = n + (\alpha + 1/2)(1 - (-1)^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Так как $\Lambda_\alpha E_\alpha = E_\alpha$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,\alpha} p_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1,\alpha} z^{n-1}$. Отсюда вытекает, что $p_n = b_{n-1,\alpha}/b_{n,\alpha}$. Следовательно, $\Lambda_\alpha = D_{E_\alpha}$. Это означает, что операторы (5) и (7) являются частными случаями оператора (4). Таким образом, теорема 1 устанавливает новый широкий класс гиперциклических и хаотических операторов на $H(\mathbb{C})$, включающий в себя ранее известные классы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00779-а) и программы Президента "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ-3081.2008.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. — 1951. — Т. 29. — № 3. — С. 477–500.
2. Beauzamy B. *Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques* // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. — 1986. — Т. 303. — С. 923–925.
3. Devaney R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, 1989.
4. Birkhoff G. D. *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières* // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1929. — Т. 189. — С. 473–475.
5. MacLane G. *Sequences of derivatives and normal families* // J. Anal. Math. — 1952. — Т. 2. — С. 72–87.
6. Godefroy G., Shapiro J. H. *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal. — 1991. — Т. 98. — № 2. — С. 229–269.
7. Betancor J. J., Sifi M., Trimeche K. *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on $\mathbb{C}$* // Acta Math. Hungar. — 2005. — Т. 106. — С. 101–116.

8. Rösler M. *Dunkl operators: theory and applications* // Lect. Notes Math. – 2003. – T. 1817. – C. 93–135.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП Л.ЭЙЛЕРА ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

О. А. Кривошеева

*Башкирский государственный университет,
kriolesya2006@yandex.ru*

Пусть D — выпуклая область в комплексной плоскости. Через $H(D)$ обозначим пространство функций, аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D . В работе рассматриваются ряды экспоненциальных мономов, т.е. ряды вида

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z). \quad (1)$$

Найдено необходимое условие замкнутости множества сумм этих рядов в топологии пространства $H(D)$.

Прежде, чем перейти к результатам работы, введем еще некоторые обозначения и определения. Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. В дальнейшем считаем, что для каждой такой области выбрана и зафиксирована последовательность выпуклых компактов $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ — из D , исчерпывающая D , то есть такая, что $K_m \subset \text{int} K_{m+1}$, $m \geq 1$, и $\bigcup_m K_m = D$; ($\text{int} M$ обозначает внутренность множества M). Так как $K_m \subset \text{int} K_{m+1}$, то для каждого $m \geq 1$ найдется $\alpha_m > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$H_{K_m}(z) + \alpha_m |z| \leq H_{K_{m+1}}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

Здесь $H_M(z) = \sup_{y \in M} \text{Re} zy$ — опорная функция M (точнее комплексно сопряженного к M множества).

Положим $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, где λ_k — комплексные числа и m_k — натуральные числа, и $m(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{|\lambda_k|}$. Рассмотрим семейство функций $\Phi(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}$,

$k = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots, m_k - 1\}$. Пусть W — нетривиальное замкнутое инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$. Предположим, что $\Phi(\Lambda)$ совпадает с множеством всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W и при этом полно в W . В этом случае говорят, что W допускает спектральный синтез. Проблема представления функций из W посредством рядов вида (1) носит название проблемы фундаментального принципа Л.Эйлера. Ее решение тесно связано с решением интерполяционной задачи в пространствах целых функций и имеет очень богатую историю. Обзор некоторых основных результатов по указанным проблемам можно найти в работе [1]. В этой же работе при условии $m(\Lambda) = 0$ найдено полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях комплексной области. Целью данной работы является доказательство того, что в случае ограниченной области, условие $m(\Lambda) = 0$ необходимо для фундаментального принципа. Таким образом, результат этой работы вместе с результатом работы [1] дает полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных ограниченных выпуклых областях уже без всяких дополнительных ограничений.

Сделаем еще некоторые наблюдения, полезные в дальнейшем. В ситуации, описанной выше, совокупность функций $\Phi(\Lambda)$ принадлежит подпространству $W \subset H(D)$, полна в нем и не полна в $H(D)$. Проблема фундаментального принципа состоит в том, чтобы выяснить условия, когда W совпадает с пространством функций $W(D, \Lambda)$, которые являются суммами рядов (1), сходящихся в топологии $H(D)$, или, что эквивалентно, когда $W(D, \Lambda)$ замкнуто в $H(D)$.

Пусть $t > 0$ и D_t — область, полученная из D при помощи преобразования гомотетии с центром в нуле и коэффициентом t , т.е. $D_t = \{z = tz' : z' \in D\}$. Положим $\Lambda_t = \{t^{-1}\lambda_k, m_k\}$. Очевидно, что при любом $t > 0$ из равенства $m(\Lambda) = 0$ следует, что $m(\Lambda_t) = 0$. Покажем, что подпространства $W(D, \Lambda)$ и $W(D_t, \Lambda_t)$ замкнуты или незамкнуты одновременно. Пусть $W(D, \Lambda)$ — замкнуто в $H(D)$, и $\{h_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W(D_t, \Lambda_t)$ сходится к функции h_0 в топологии $H(D_t)$. Положим $g_l(z) = h_l(tz)$, $z \in D$, $l = 0, 1, \dots$. Тогда $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ лежит в $H(D)$ и сходится в топологии этого

пространства к g_0 . По определению $W(D_t, \Lambda_t)$ имеем

$$h_l(w) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n}^l w^n \exp(t^{-1} \lambda_k w), l = 1, 2, \dots,$$

причем ряды сходятся в $H(D_t)$. Следовательно,

$$g_l(z) = h_l(tz) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} \widetilde{d_{k,n}^l} z^n \exp(\lambda_k z), l = 1, 2, \dots,$$

где $\widetilde{d_{k,n}^l} = t^n d_{k,n}^l$, и ряды сходятся в $H(D)$. Это означает, что $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ лежит в подпространстве $W(D, \Lambda)$. Поскольку оно замкнуто, то и g_0 принадлежит $W(D, \Lambda)$, т.е. g_0 раскладывается в ряд (1), сходящийся в $H(D)$. Но тогда, как и выше, функция h_0 также раскладывается в ряд (1), сходящийся уже в $W(D_t, \Lambda_t)$, т.е. $h_0 \in W(D_t, \Lambda_t)$. Таким образом, $W(D_t, \Lambda_t)$ — замкнутое подпространство в $H(D_t)$. Аналогично показывается, что замкнутость $W(D_t, \Lambda_t)$ влечет за собой замкнутость $W(D, \Lambda)$.

Приведем, наконец, необходимое условие замкнутости $W(D, \Lambda)$.

Теорема. Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ такова, что система $\Phi(\Lambda)$ неполна в $H(D)$. Предположим, что $W(D, \Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Тогда $m(\Lambda) = 0$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда найдутся $\tau > 0$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k_j}, m_{k_j}\}$ такие, что $\{m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ , когда $j \rightarrow \infty$. Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ также сходится к некоторой точке ξ окружности $S = S(0, 1)$. Рассмотрим три возможные ситуации: начало координат лежит во внешности области D , в самой области D , и на ее границе.

1) Пусть $0 \notin \overline{D}$. Поскольку D — ограничена, то согласно сказанному выше (делая, если необходимо, преобразование гомотетии с центром в нуле), можно считать, что для некоторой точки a окружности S (очевидно, неединственной) круг $B(a, 1)$ компактно содержит область D .

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \quad (3)$$

где $m(j) = m_{k_j} - 1$, $c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$ и K — выпуклый компакт в D . Покажем, что при подходящем выборе K этот ряд сходится в топологии

$H(D)$. Прежде всего заметим, что в силу компактности вложения D в круг $B(a, r)$ найдется радиус $r \in (0, 1)$ такой, что круг $B(a, r)$ все еще содержит D . Поэтому для каждого $z \in D$ верна оценка

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq c_j r^{m(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) \leq \\ &\leq r^{m(j)} \exp(H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались определением опорной функции D . Поскольку $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ , когда $j \rightarrow \infty$, то начиная с некоторого j_0 имеем: $m(j) \geq \frac{\tau|\lambda_{k_j}|}{2}$. Следовательно из предыдущего получаем:

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq \\ &\leq \exp(m(j) \ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leq \\ &\leq \exp(-\alpha|\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})), j \geq j_0, \end{aligned}$$

где $\alpha = -2^{-1}\tau \ln r > 0$. Выберем теперь компакт K из области D настолько большой, что выполнена оценка

$$H_D(\lambda) \leq H_K(\lambda) + 2^{-1}\alpha|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда для всех $z \in D$ имеем:

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} |c_j(z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \exp(-2^{-1}\alpha|\lambda_{k_j}|) < \infty.$$

Сходимость последнего ряда следует из того, что точки λ_k являются нулями целой функции экспоненциального типа (преобразование Лапласа функционала, обращающегося в нуль на подпространстве W) с кратностью не меньшей чем m_k (см., напр., [2]). Это означает, что ряд (3) сходится равномерно во всей области D . Поэтому функция

$$\phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z - a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z) \quad (4)$$

аналитична в D . По условию подпространство $W(D, \Lambda)$ замкнуто в $H(D)$. Следовательно, $\phi(z)$ как предел элементов $W(D, \Lambda)$ (частичных сумм ряда (3)) принадлежит $W(D, \Lambda)$. Поэтому, согласно определению подпространства $W(D, \Lambda)$, имеет место представление

$$\phi(z) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z_n \exp(\lambda_k z), z \in D, \quad (5)$$

при этом ряд сходится в топологии $H(D)$. Пусть $\{\mu_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$ — биортонормальная к $\Phi(\Lambda)$ последовательность функционалов из $H^*(D)$. Тогда в силу их линейности и непрерывности получаем:

$$\mu_{k_j,0}(\phi(z)) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} \mu_{k_j,0}(d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z)) = d_{k_j,0},$$

для всех $j = 1, 2, \dots$. С другой стороны, из представления (4) имеем:

$$\mu_{k_j,0}(\phi(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{k_j,0}(c_j(z-a)^{m(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)) = c_j a^{m(j)}.$$

Поэтому $|d_{k_j,0}| = |c_j a^{m(j)}| = c_j$, $j = 1, 2, \dots$, т.к. $a \in S$. Поскольку K — компакт в D , то существует $z_0 \in D$ такая, что $Re(z_0 \xi) > H_K(\xi)$. Тогда из сходимости $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ к точке ξ , непрерывности и однородности опорной функции компакта для всех достаточно больших размеров j следует соотношение $Re(z_0 \lambda_{k_j}) > H_K(\lambda_{k_j})$. Отсюда для этих же номеров j с учетом определения коэффициентов c_j получаем:

$$|d_{k_j,0} \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = |c_j \exp(\lambda_{k_j} z_0)| = \exp(Re(\lambda_{k_j} z_0) - H_K(\lambda_{k_j})) > 1.$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (5) в точке z_0 . Таким образом, исходное предположение о том, что $m(\Lambda) \neq 0$ неверно. Следовательно, в рассматриваемом случае теорема доказана.

2) Пусть теперь $0 \in D$. Положим $\Gamma = \{z : Re(z\xi) = H_D(\xi)\} \cap \partial D$. В силу ограниченности D множество Γ не пусто и является точкой или отрезком. Как и выше, можно считать, что для некоторой точки a окружности S круг $B(a, 1)$ содержит множество Γ и, кроме того, область D лежит в круге $B(0, 1)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j (z-a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \quad (6)$$

где $c_j = \exp(-H_K(\lambda_{k_j}))$ и K — выпуклый компакт в D . Покажем, что при подходящем выборе K и чисел $n(j)$, $j = 1, 2, \dots$, этот ряд сходится в топологии $H(D)$. Прежде всего, заметим, что Γ — компакт, а потому лежит в круге $B(a, 1)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество

$$\Gamma(\varepsilon) = \{z : Re(z\xi) \geq H_D(\xi) - \varepsilon\} \cap D$$

компактно принадлежит $B(a, 1)$, т.е. $\Gamma(\varepsilon) \subset B(a, r)$ для некоторого $r \in (e^{-1}, 1)$. Поскольку $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к τ , то для каждого j , начиная с некоторого номера j_0 , можно выбрать натуральное число $n(j) \leq m(j)$, которое удовлетворяет неравенствам

$$\beta|\lambda_{k_j}| \leq n(j) \leq \frac{\varepsilon|\lambda_{k_j}|}{2}, \quad (7)$$

где $\beta = \min\{\varepsilon/4, \tau/2\}$. Выберем теперь компакт K из D настолько большой, что выполнена оценка (это можно сделать, т.к. $\ln r < 0$)

$$H_D(\lambda) \leq H_K(\lambda) - 2^{-1}\beta|\lambda| \ln r, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

Учитывая вложение $\Gamma(\varepsilon) \subset B(a, r)$, определение коэффициентов c_j и опорной функции области D , из (7) и (8) получаем

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq \exp(n(j) \ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leq \\ &\leq \exp(\beta|\lambda_{k_j}| \ln r + H_D(\lambda_{k_j}) - H_K(\lambda_{k_j})) \leq \\ &\leq \exp(2^{-1}\beta|\lambda_{k_j}| \ln r), j \geq j_0, z \in \Gamma(\varepsilon). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку $\{\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|\}$ сходится к точке ξ при $j \rightarrow \infty$, то увеличивая при необходимости номер j_0 , можно считать, что для $j \geq j_0$ верна оценка $|Re(z(\xi - \lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|))| \leq 8^{-1}\varepsilon$, когда $|z| \leq 1$ (в частности для всех $z \in D \subset B(0, 1)$). Следовательно,

$$Re(z\lambda_{k_j}) \leq |\lambda_{k_j}|Re(z\xi) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|, z \in D. \quad (10)$$

Кроме того, используя непрерывность опорной функции ограниченной области, можно также считать, что

$$|\lambda_{k_j}|H_D(\xi) \leq H_D(\lambda_{k_j}) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|, j \geq j_0. \quad (11)$$

Пусть теперь $z \in D \setminus \Gamma(\varepsilon)$. Тогда, учитывая определение множества $\Gamma(\varepsilon)$, коэффициентов c_j и числа β , а также вложение $D \subset B(0, 1)$ (в силу которого $|z - a| \leq 2, z \in D$) и неравенство $\ln r > -1$, согласно (7), (8), (10) и (11) для всех $j \geq j_0$ имеем:

$$\begin{aligned} |c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| &\leq \\ &\leq \exp(n(j) \ln 2 + |\lambda_{k_j}|Re(z\xi) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \leq \\ &\leq \exp(n(j) + |\lambda_{k_j}|(H_D(\xi) - \varepsilon) + 16^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \exp(n(j) - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + H_D(\lambda_{k_j}) + 8^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - H_K(\lambda_{k_j})) \leq \\
&\leq \exp(n(j) - \varepsilon|\lambda_{k_j}| + 8^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}| - 2^{-1}\beta|\lambda_{k_j}|\ln r) \leq \\
&\leq \exp((2^{-1} + 4^{-1})\varepsilon|\lambda_{k_j}| - \varepsilon|\lambda_{k_j}|) = \exp(-4^{-1}\varepsilon|\lambda_{k_j}|).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (9) для всех $z \in D$ и $j \geq j_0$ получаем неравенство:

$$|c_j(z - a)^{n(j)} \exp(\lambda_{k_j} z)| \leq \exp(-\gamma|\lambda_{k_j}|),$$

где $\gamma = \min\{-2^{-1}\beta \ln r, 4^{-1}\varepsilon\}$. Таким образом, как и в случае 1) ряд (6) сходится равномерно в D (а, значит и в топологии пространства $H(D)$) к некоторой функции $\phi(z)$, аналитической в D . Все дальнейшие рассуждения дословно повторяют соответствующие рассуждения в случае 1). Следовательно, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в случае 2).

3) Пусть, наконец, $0 \in \partial D$, и l —опорная прямая к области D , проходящая через начало координат (если таких прямых несколько, то в качестве l выберем любую из них). Через a обозначим одну из точек пересечения l и окружности S . Тогда $(-a)$ является другой точкой пересечения l и S . Прямая l делит плоскость на две полуплоскости. Область D целиком лежит в одной из этих полуплоскостей. Точку окружности S , которая принадлежит той же полуплоскости, что и D , и лежит на прямой l' , перпендикулярной l и проходящей через начало координат, обозначим через b . Прямая l делит круг $B(0, 1/2)$ на два полукруга. Делая преобразование гомотетии с центром в нуле, можно считать, что область D лежит в одном из этих полукругов, который обозначим B' (в том, который лежит по ту же сторону от прямой l что и точка b). Поскольку $\{m(j)/|\lambda_{k_j}|\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к числу, отличному от нуля, то переходя к подпоследовательности, можно также считать, что выполнены неравенства $2\tau|\lambda_{k_j}| \geq m(j) \geq 2\nu(j) \geq 4\nu|\lambda_{k_j}|$, где $\nu > 0$ и $\nu(j)$ — натуральное число, $j = 1, 2, \dots$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|)(z(z^2 - a^2)(z - b))^{\nu(j)} \exp(\lambda_{k_j} z), \quad (12)$$

где $c_j = \exp(-\sup_{z \in D}(\nu(j) \ln(|z|) + Re(z\lambda_{k_j})))$. Покажем, что при подходящем выборе $\delta > 0$ ряд (12) сходится в топологии $H(D)$. Для этого, прежде всего, оценим модуль многочлена $p(z) = (z^2 - a^2)(z - b)$ на границе полукруга B' . Пусть $z \in [-a, a]$ и $x = |z|$. Тогда $|p(z)| = (1 - x^2)\sqrt{1 + x^2}$. Непосредственно проверяем, что эта функция строго убывает на отрезке $[0, 1]$ и равна единице при $x = 0$. Следовательно,

$$|p(z)| < 1, z \in [-a, a] \setminus \{0\}, |p(0)| = 1 \quad (13)$$

Пусть теперь z принадлежит той части границы B' , которая является полуокружностью. Через x обозначим расстояние от точки z до прямой l' , а через y — расстояние от точки z до прямой l (другими словами, (x, y) это координаты точки z в системе координат, образованной прямыми l и l' , причем a и b в этой системе координат имеют соответственно координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда прямым подсчетом получаем

$$|p(z)| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \sqrt{(1-y)^2 + x^2}.$$

Раскрывая под радикалами скобки и замечая, что $x^2 + y^2 = 1/4$, имеем:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \sqrt{5/4 - 2x} \sqrt{5/4 + 2x} \sqrt{5/4 - 2y} = \\ &= \sqrt{25/16 - 4x^2} \sqrt{5/4 - 2y} = \sqrt{9/16 + 4y^2} \sqrt{5/4 - 2y}. \end{aligned}$$

Легко показать, что последняя функция строго убывает при $y \in [0, 1/2]$, причем на концах этого отрезка принимает значения строго меньше единицы. Таким образом, на всей полуокружности верна оценка: $|p(z)| < 1$. Следовательно, с учетом (13) получаем $|p(z)| < 1, z \in \partial B' \setminus \{0\}, |p(0)| = 1$. Отсюда и из принципа максимума модуля для аналитических функций следует оценка:

$$|p(z)| < 1, z \in \overline{B'} \setminus \{0\}. \quad (14)$$

Фиксируем какую-нибудь точку z_0 области D . Тогда верны неравенства

$$\begin{aligned} c_j |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) &\leq \\ &\leq \exp(-\nu(j) \ln(|z_0|) - \operatorname{Re}(z_0 \lambda_{k_j})) |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) = \\ &= \exp(\nu(j) (\ln |z| - \ln |z_0|) + \operatorname{Re}(z \lambda_{k_j}) - \operatorname{Re}(z_0 \lambda_{k_j})), j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что $\nu|\lambda_{k_j}| \leq \nu(j) \leq \tau|\lambda_{k_j}|, j = 1, 2, \dots$, получаем отсюда для всех z из круга $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} c_j |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) &\leq \\ &\leq \exp(\nu|\lambda_{k_j}| \ln r + \tau|\lambda_{k_j}| |\ln |z_0|| + (1 + |z_0|)|\lambda_{k_j}|), j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Выберем $r_0 \in (0, 1)$ настолько маленькое, что выполнено неравенство

$$\mu \ln r_0 + \tau |\ln |z_0|| + (1 + |z_0|) < -1.$$

Тогда из предыдущего получаем:

$$c_j |z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) \leq \exp(-|\lambda_{k_j}|), |z| < r_0, j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Поскольку D лежит в B' , а $\overline{D} \setminus B(0, r_0)$ — компакт, то согласно (14)

$$\max_{z \in \overline{D} \setminus B(0, r_0)} |p(z)| < 1.$$

Следовательно, с учетом того, что $\nu|\lambda_{k_j}| \leq \nu(j)$, $j = 1, 2, \dots$, найдется $\varepsilon \in (0, 1)$, для которого имеет место оценка

$$|p(z)|^{\nu(j)} \leq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|), z \in \overline{D} \setminus B(0, r_0), j = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Выберем теперь в качестве δ какое-нибудь число из интервала $(0, \varepsilon/2)$. Тогда из (14) и (15) для каждого $j = 1, 2, \dots$ и любого $z \in D \cap B(0, r_0)$ следует неравенство

$$c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|) |z|^{\nu(j)} |p(z)|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_j} z)) \leq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_j}|/2).$$

Кроме того, в силу (16) и определения чисел c_j это же неравенство будет выполнено для всех $j = 1, 2, \dots$ и любого $z \in D \setminus B(0, r_0)$. Таким образом, как и выше, ряд (12) сходится равномерно во всей области D . Следовательно, его сумма $\phi(z)$ аналитична в D . С другой стороны, как и в случае 1) имеет место представление

$$\phi(z) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), z \in D, \quad (17)$$

причем выполнены равенства

$$|d_{k_j, \nu(j)}| = |\exp(\delta|\lambda_{k_j}|) c_j (a^2 b)^{\nu(j)}| = c_j \exp(\delta|\lambda_{k_j}|), j = 1, 2, \dots$$

Поскольку D ограничена, то для каждого $j = 1, 2, \dots$ найдется точка $z_j \in \partial D$ такая, что

$$|z_j|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(z_j \lambda_{k_j})) = \sup_{z \in D} (|z|^{\nu(j)} \exp(\operatorname{Re}(z \lambda_{k_j}))) = c_j^{-1}.$$

Выберем подпоследовательность натуральных чисел $j(1), j(2), \dots$ так, что $\{z_{j(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к некоторому $z^* \in \partial D$. В силу неравенства (15) точки z_j , $j = 1, 2, \dots$, а вместе с ними и z^* не лежат в круге $B(0, r_0)$. Фиксируем $\delta' \in (0, \delta/4)$, удовлетворяющее условию $\tau \ln(1 + \frac{4\delta'}{r_0}) \leq \frac{\delta}{2}$. Пусть $z' \in D \cap B(z^*, \delta')$. Можно считать, что $|z'| \geq r_0/2$. Поскольку $\{z_{j(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ сходится к z^* , то для всех номеров l , начиная с некоторого l_0 выполнено

неравенство $|z' - z_{j(l)}| \leq 2\delta'$. Тогда с учетом неравенства $\nu(j) \leq \tau|\lambda_{k_j}|$, выбора точек z_j и числа δ' имеем:

$$\begin{aligned} c_{j(l)}^{-1} &= |(z_{j(l)} - z') + z'|^{\nu(j(l))} \exp(\operatorname{Re}((z_{j(l)} - z') + z', \lambda_{k_j})) \leq \\ &\exp(\nu(j(l))(\ln|z'| + \ln(1 + \frac{|z_{j(l)} - z'|}{|z'|}))) + \operatorname{Re}(z', \lambda_{k_{j(l)}}) + |z_j - z'| |\lambda_{k_{j(l)}}| \leq \\ &\leq \exp(\nu(j(l)) \ln|z'| + 2^{-1}\delta|\lambda_{k_{j(l)}}| + \operatorname{Re}(z', \lambda_{k_{j(l)}}) + 2^{-1}\delta|\lambda_{k_{j(l)}}|) = \\ &= |z'|^{\nu(j(l))} \exp(\operatorname{Re}(z', \lambda_{k_j}) + \delta|\lambda_{k_j}|), l \geq l_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &|d_{k_{j(l)}, \nu(j(l))}(z')^{\nu(j(l))} \exp(z' \lambda_{k_{j(l)}})| = \\ &= c_{j(l)} |z'|^{\nu(j(l))} \exp(\operatorname{Re}(z', \lambda_{k_j}) + \delta|\lambda_{k_j}|) \geq 1, l \geq l_0. \end{aligned}$$

Это противоречит необходимому условию сходимости ряда (17) в точке $z' \in D$. Таким образом, равенство $m(\Lambda) = 0$ имеет место и в этом случае. Теорема полностью доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кривошеев А. С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. №2. С. 71–136.
2. Леонтьев А. Ф. *Ряды экспонент* М.: Наука, 1976.

О СВЯЗИ КОРНЕЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЕЕ РОСТОМ

С. Г. Мерзляков.

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
msg2000@mail.ru*

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований 08-01-00 779 и Гранта Президента РФ НШ 3081.2008.1.

В теории целых функций большую роль играют теоремы, связывающие рост таких функций с распределением их корней. Этим вопросам посвящена известная монография Б. Я. Левина (см. [1]).

В данной статье исправляются некоторые неточности указанной книги при изложении теорем о росте целых функций.

Мы будем говорить, что последовательность $\mathcal{N} = \{r_m e^{i\psi_m}\}$ точек комплексной плоскости имеет угловую плотность с показателем $\rho(r)$, если для всех значений η и θ ($0 < \eta < \theta < 2\pi$), за исключением, быть может, счетного множества, существуют пределы

$$\delta(\eta, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \eta, \theta)}{r^{\rho(r)}}, \quad (1)$$

где $n(r, \eta, \theta)$ — число точек множества $\mathcal{N}$, удовлетворяющих условиям $|r_m| \leq r$, $\eta < \psi_m < \theta$, и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^{\rho(r)}} = d, \quad (2)$$

где $n(r)$ — число точек множества $\mathcal{N}$ в круге $|r| \leq r$.

Определим теперь функцию Δ на отрезке $[0, 2\pi]$ следующим образом:

$$\Delta(0) = 0, \quad \Delta(2\pi) = d, \quad \Delta(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\eta_n, \theta_n),$$

где $0 < \psi < 2\pi$, $\theta_n \uparrow \psi$, $\eta_n \downarrow 0$, последовательности θ_n , η_n лежат вне исключительного множества. Несложно показать, что указанный предел

существует и не зависит от последовательностей. Ясно, что функция Δ будет неубывающей.

В литературе по целым функциям угловую плотность вводят без условия (2) (см. [1], с. 118–119). В этом случае в подсчете угловой плотности не будут участвовать точки на положительной полуоси.

Приведем пример, показывающий неудовлетворительность таких определений, даже если допустить в них нестрогие неравенства, как это сделано, например, в работе [2] (см. с. 67).

Пусть

$$\mathcal{N} = \{e^i, 2^2 e^{-\frac{i}{2}}, 3^2 e^{-\frac{i}{3}}, \dots, n^2 e^{(-1)^{[\log_2 n]} \frac{i}{n}}, \dots\},$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

При порядке $\rho = 1/2$ предел (1) для $\eta = 0$, $0 < \theta < 2\pi$, как легко видеть, не существует, аналогично для $0 < \eta < 2\pi$, $\theta = 2\pi$. В таком случае числа 0 и 2π должны лежать в исключительном множестве, и точки вблизи положительной оси не будут давать вклад в угловую плотность, чего быть не должно.

Отметим теперь неточности при доказательстве теорем 1 и 2 в монографии [1].

Последняя формула на с. 129 для нецелого порядка, вообще говоря, не верна.

Действительно, предположим, что число ρ иррационально, и посмотрим, где имеет место равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Pi(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\theta - \psi - \pi), \quad (3)$$

если оно верно для $\psi < \theta < \psi + 2\pi$.

Обозначим левую часть этой формулы через $h(\theta)$. Ясно, что функция h будет 2π -периодической.

Пусть для числа $\theta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство (3).

Представим это число в виде $\theta = \eta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\eta \in [\psi, \psi + 2\pi]$. Заметим, что $\eta \neq \psi, \psi + 2\pi$, ибо при этих значениях предела в левой части (3) не существует.

Из равенства (3) и периодичности функции h получим:

$$\frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\eta - \psi - \pi) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\theta - \psi - \pi),$$

или

$$\cos \rho(\theta + 2\pi k - \psi - \pi) = \cos \rho(\theta - \psi - \pi).$$

В силу иррациональности ρ либо $k = 0$, либо $\eta = -\pi k - \psi + \pi + \pi l / \rho$, где $l \in \mathbb{Z}$.

Итак, равенство (3) вне интервала $(\psi, \psi + 2\pi)$ может выполняться лишь на счетном множестве точек, и утверждать, что указанная формула на с. 129 верна при $|\theta - \psi_j| > 0$, неправомерно.

Покажем, как можно исправить это равенство.

При условии $\psi < \theta \leq 2\pi$ воспользуемся формулой (3), а в случае $0 \leq \theta < \psi$ имеем

$$h(\theta) = h(\theta + 2\pi) = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\theta - \psi + \pi).$$

Окончательно получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Pi(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} \cos \rho(|\theta - \psi| - \pi)$$

локально равномерно на множестве $[0, 2\pi] \setminus \{\psi\}$.

В таком случае последнюю формулу на с. 129 можно записать в виде

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Pi(re^{i\theta})|}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \sum_{j=0}^m \Delta_j \cos \rho(|\theta - \psi_j| - \pi)$$

локально равномерно на множестве $[0, 2\pi] \setminus \{\psi_0, \dots, \psi_m\}$.

Рассуждая далее как в монографии [1], получим в ее обозначениях

$$H(\theta) = \frac{\pi}{\sin \pi \rho} \int_0^{2\pi} \cos \rho(|\theta - \psi| - \pi) d\Delta(\psi).$$

Формула (2.04) получится из последней, если доопределить функцию Δ на полуинтервале $[-2\pi, 0)$ следующим образом:

$$\Delta(\theta) = \Delta(\theta + 2\pi) - \Delta(2\pi).$$

При доказательстве теоремы 2 для целого порядка присутствует аналогичная ошибка.

Действительно, положим $\rho = 1$ и возьмем для примера в формуле (2.29) на с. 142

$$f(z) = \sin z.$$

В таком случае, очевидно,

$$f_r(z) = \frac{\sin z}{z},$$

поэтому

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |f_r(re^{i\theta})|}{r} = |\sin \theta|,$$

где $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, а по формуле на с. 143 получим в правой части $\sin \theta$.

Применяя лемму 9 и рассуждая как и выше в данной статье, надо заменить указанную правую часть на

$$\sum_{j=0}^m \Delta_j [-(\theta - \psi_j) \sin \rho(\theta - \psi_j) + \pi \sin \rho(|\theta - \psi_j|) - \frac{1}{\rho} \cos \rho(\theta - \psi_j)].$$

В результате получим

$$H(\theta) = \int_0^{2\pi} \left[-(\theta - \psi) \sin \rho(\theta - \psi) + \pi \sin \rho|\theta - \psi| - \frac{1}{\rho} \cos \rho(\theta - \psi) \right] d\Delta(\psi) + \tau_f \cos \rho(\theta - \theta_f).$$

Используя равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\psi} d\Delta(\psi) = 0 \quad (4)$$

(см. [1], с. 149), можно переписать предыдущее выражение в виде

$$H(\theta) = \int_0^{2\pi} [\psi \sin \rho(\theta - \psi) + \pi \sin \rho|\theta - \psi|] d\Delta(\psi) + \tau_f \cos \rho(\theta - \theta_f). \quad (5)$$

Это равенство, как и выше доопределяя функцию Δ , можно записать в виде выражения (2.06) монографии [1], только перед интегралом надо поставить знак минус.

Еще раз применяя равенство (4), представление (5) можно записать также в виде

$$H(\theta) = 2\pi \int_0^\theta \sin \rho(\theta - \psi) d\Delta(\psi) + A \sin \rho\theta + B \cos \rho\theta,$$

где

$$A = \tau_f \sin \rho \theta_f - \int_0^{2\pi} \psi \cos \rho \psi d\Delta(\psi),$$
$$B = \tau_f \cos \rho \theta_f + \int_0^{2\pi} \psi \sin \rho \psi d\Delta(\psi).$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
2. Леонтьев А. Ф. *Целые функции. Ряды экспонент*. М.: Наука, 1983. – 176 с.

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ДАННЫМИ НА
ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ
ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ СЕРИЙ
 A_n и B_n**

Ю. Г. Михайлова

*Уфимский государственный авиационный технический университет,
mihaylovaj@mail.ru*

Введение

Инварианты и преобразования Лапласа для скалярных линейных уравнений

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (1)$$

составляют основу каскадного метода Лапласа построения общего решения.

Для систем линейных уравнений эти понятия начали изучаться лишь в последнее время (см. [1]–[3]).

Рассмотрим системы линейных уравнений (1). В дальнейшем будем считать u n -мерным вектором, а коэффициенты a, b и c – квадратными матрицами. Введем понятие обобщенных инвариантов, предложенное в [1], [3].

Определение 1. *Обобщенными x -инвариантами Лапласа системы (1) называются матрицы X_i , заданные рекуррентными формулами*

$$X_1 = H_1 = \frac{\partial}{\partial x}a + ba - c, \quad X_{i+1} = H_{i+1}X_i,$$

$$H_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x}(a_i) - \frac{\partial}{\partial y}b + [b, a_i] + H_i, \quad \frac{\partial}{\partial y}(X_i) + a_iX_i - X_ia = 0.$$

Аналогично определяются y -инварианты Лапласа.

В работе [4] предложена схема построения общего решения линейной системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа. В данной работе рассматриваются линеаризованные цепочки Тоды серий A_n , B_n и для этих систем построены решения краевых задач с данными на характеристиках.

1. Задача Гурса для линеаризованной цепочки Тоды серии A_n

Рассматривается система уравнений следующего вида

$$v_{xy} = A_n U v, \quad (2)$$

где $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)^T$ — столбец неизвестных,
 $U = \text{diag}(e^{u^1}, e^{u^2}, \dots, e^{u^n})$, матрица Картана $A_n = \|a_{ij}\|$ устроена так:

$$a_{ii} = 2, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{i, i+1} = -1, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$a_{i, i-1} = -1, \quad i = 2, \dots, n,$$

остальные элементы равны нулю, а

$u = (u^1, u^2, \dots, u^n)^T$ — решение цепочки Тоды

$$u_{xy} = A_n U C,$$

где $C = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Используя схему построения общего решения [4] для линейных систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа и формулы для обобщенных инвариантов цепочки Тоды серии A_n [3], удалось построить решение системы (2) вида:

$$v_1 = P_1 \psi_1^{-1} D(\psi_1 R_1), \quad (3)$$

где D — оператор полного дифференцирования по x , а вектор R_1 вычисляется с помощью рекуррентных формул

$$R_k = \begin{pmatrix} \psi_{k+1}^{-1} D(\psi_{k+1} R_{k+1}) \\ W_k(x) - \int_{y_0}^y (Y_{k+1}^{(1)} R_{k+1}) dy \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$k = 1, \dots, n-1$, $R_n = W_n(x)$, через $Y_k^{(1)}$ обозначена первая строка матрицы Y_k .

Матрицы ψ_k и Y_k находятся из формул:

$$\psi_k = F_{n-k+1}^{-1} S_k^* d_k F_{n-k+1},$$

$$Y_k = (F'_{k-1})^{-1} (b_k d_k^{-1} Z_k + T_k) d_k F_{n-k+1},$$

где

$$S_k^* = \text{diag} \left\{ \exp\left(\sum_{i=1}^k u^i\right), \exp\left(\sum_{i=2}^{k+1} u^i\right), \dots, \exp\left(\sum_{i=n-k+1}^n u^i\right) \right\},$$

ненулевые элементы матрицы Z_k определяются так:

$$z_{ii} = e^{u^{k+i-1}} + e^{u^i}, \quad z_{ii-1} = -e^{u^{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n-k+1,$$

$$z_{11} = e^{u^k} + e^{u^1}, \quad z_{ii+1} = -e^{u^{k+i}}, \quad i = 1, \dots, n-k,$$

d_k –квадратная матрица порядка $(n-k+1)$, а b_k –прямоугольная матрица порядка $(k-1) \times (n-k+1)$ такие, что

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = (J_n^T)^{1-k} A_n J_n^{1-k},$$

здесь J_n –верхнетреугольная матрица, все элементы которой на главной диагонали и выше ее равны единице. Матрица T_k содержит лишь один ненулевой элемент $t_{k-1,1}^k = e^{u^k}$.

F_{n-k+1} и F'_{k-1} –квадратные матрицы порядка $(n-k+1)$ и $(k-1)$ соответственно, находятся из выражений

$$P_k = A J_n^{1-k} \begin{pmatrix} 0 \\ F_{n-k+1} \end{pmatrix}, \quad Q_k = (J_n^T)^{k-1} \begin{pmatrix} F'_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $P_k = (e_1, e_2, \dots, e_{n-k+1})$ –матрица, столбцами которой являются векторы базиса $Im X_k$. Аналогично определяется матрица $Q_k = (e_{n-k+2}, \dots, e_n)$, столбцами которой являются векторы базиса $\ker X_k$.

Пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ системы уравнений (2) можно получить решение вида

$$v_2 = P_1 \bar{\psi}_1^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_1 \bar{R}_1), \quad (5)$$

где $\bar{D}$ –оператор полного дифференцирования по y , а $\bar{R}_1$ находится из формул

$$\bar{R}_k = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{k+1}^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_{k+1} \bar{R}_{k+1}) \\ \bar{W}_k(y) - \int_{x_0}^x (\bar{Y}_{k+1}^{(1)} \bar{R}_{k+1}) dx \end{pmatrix},$$

$k = 1, \dots, n-1$, $\bar{R}_n = \bar{W}_n(y)$. В формулах (3), (5) $W_k(x)$, $\bar{W}_k(y)$, $k = 1, \dots, n$ —произвольные функции.

Теперь рассмотрим задачу Гурса для системы уравнений (2)

$$v(x, y_0) = \Psi(x), \quad v(x_0, y) = \Phi(y). \quad (6)$$

Решение задачи (2), (6) будем искать в виде суммы специальных решений (3), (5):

$$v = v_1 + v_2. \quad (7)$$

Полагая в формуле (7) $y = y_0$ получим

$$P_1 \psi_1^{-1} D(\psi_1 R_1(x, y_0)) = \Psi(x) - v_2(x, y_0). \quad (8)$$

Отметим, что $v_2(x, y_0)$, согласно (4), имеет следующую структуру

$$v_2(x, y_0) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \alpha_i^k(x) \bar{W}_k^{(i)}(y_0),$$

здесь $\alpha_i^k(x)$ —известные вектор-функции.

Тогда решение системы (8) представляется в виде

$$\begin{aligned} R_1(x, y_0) = \psi_1^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1 P_1^{-1} \Psi(\varsigma) d\varsigma + \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \tilde{\alpha}_i^k(x) \bar{W}_k^{(i)}(y_0) + \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i^k(x) W_k^{(i)}(x_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Правую часть соотношения (9) обозначим через

$$\Gamma_1(x) = (\Gamma_1^1, \Gamma_1^2, \dots, \Gamma_1^n)^T.$$

Теперь, приравнивая выражение для R_1 из формулы (4) при $y = y_0$ и правую часть соотношения (9), будем иметь

$$W_1(x) = \Gamma_1^n, \quad \psi_2^{-1} D(\psi_2 R_2) = (\Gamma_1^1, \Gamma_1^2, \dots, \Gamma_1^{n-1})^T. \quad (10)$$

Интегрируя обе части уравнения (10), найдем $R_2(x, y_0)$:

$$R_2(x, y_0) = \psi_2^{-1} \int_{x_0}^x \psi_2 (\Gamma_1^1, \dots, \Gamma_1^{n-1})^T dx +$$

$$+\psi_2^{-1}(x)\psi_2(x_0)R_2(x_0, y_0), \quad (11)$$

здесь $R_2(x_0, y_0) = \sum_{k=2}^n \sum_{i=0}^{k-2} \delta_i^k(x) W_k^{(i)}(x_0)$. Далее правую часть выражения (11) обозначим через $\Gamma_2(x) = (\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^{n-1})^T$ и используя формулу (4) для $R_2(x, y_0)$, найдем

$$W_2(x) = \Gamma_2^{n-1}, \quad \psi_3^{-1}D(\psi_3 R_3) = (\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^{n-2})^T. \quad (12)$$

После интегрирования второго уравнения (12) получим

$$R_3(x, y_0) = \psi_3^{-1} \int_{x_0}^x \psi_3(\Gamma_2^1, \dots, \Gamma_2^{n-2})^T dx + \\ + \psi_3^{-1}(x)\psi_3(x_0)R_3(x_0, y_0).$$

Повторяя данную процедуру k раз, получим следующую формулу для $R_k(x, y_0)$

$$R_k(x, y_0) = \psi_k^{-1} \int_{x_0}^x \psi_k(\Gamma_{k-1}^1, \Gamma_{k-1}^2, \dots, \Gamma_{k-1}^{n-k+1})^T dx + \\ + \psi_k^{-1}(x)\psi_k(x_0)R_k(x_0, y_0), \quad (13)$$

где $R_k(x_0, y_0) = \sum_{m=k}^n \sum_{i=0}^{m-k} \epsilon_i^m(x) W_m^{(i)}(x_0)$.

Далее обозначим правую часть (13) через

$$\Gamma_k(x) = (\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{n-k+1})^T$$

и используя выражение для $R_k(x, y_0)$ из формулы (4), находим

$$W_k(x) = \Gamma_k^{n-k+1}, \quad \psi_{k+1}^{-1}D(\psi_{k+1} R_{k+1}) = (\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{n-k})^T.$$

Решение второго уравнения предыдущего выражения запишется в виде

$$R_{k+1}(x, y_0) = \psi_{k+1}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_{k+1}(\Gamma_k^1, \Gamma_k^2, \dots, \Gamma_k^{n-k})^T dx + \\ + \psi_{k+1}^{-1}(x)\psi_{k+1}(x_0)R_{k+1}(x_0, y_0),$$

где правую часть, как и раньше, обозначим через

$$\Gamma_{k+1}(x) = (\Gamma_{k+1}^1, \Gamma_{k+1}^2, \dots, \Gamma_{k+1}^{n-k})^T$$

и из формулы (4) для $R_{k+1}(x, y_0)$ находим

$$W_{k+1}(x) = \Gamma_{k+1}^{n-k}, \quad \psi_{k+2}^{-1} D(\psi_{k+2} R_{k+2}) = (\Gamma_{k+1}^1, \dots, \Gamma_{k+1}^{n-k-1})^T.$$

Продолжая данную процедуру, при $k = n - 1$, мы получим

$$W_{n-1}(x) = \Gamma_{n-1}^2, \quad \psi_n^{-1} D(\psi_n W_n) = \Gamma_{n-1}^1,$$

откуда следует, что

$$W_n(x) = \psi_n^{-1} \int_{x_0}^x \psi_n \Gamma_{n-1}^1 dx + \psi_n^{-1}(x) \psi_n(x_0) W_n(x_0).$$

Аналогично, как и выше, используя второе граничное условие (6), определяются $\bar{W}_k(y)$, $k = 1, \dots, n$.

Теперь воспользуемся условием согласования граничных условий (6). Для этого положим в общем решение (7) $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\Phi(y_0) = \Psi(x_0) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k c_i^k W_k^{(i)}(x_0) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^k \bar{c}_i^k \bar{W}_k^{(i)}(y_0), \quad (14)$$

здесь $\bar{C}_1^1 = e_n$, $\bar{C}_2^2 = e_{n-1}, \dots, \bar{C}_k^k = e_{n-k+1}, \dots, \bar{C}_n^n = e_1$.

Из равенства (14) можно определить постоянные $\bar{W}_k^{(k)}(y_0)$, $k = 1, \dots, n$ поскольку векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$, линейно независимы. Таким образом

$$\bar{W}_k^{(k)}(y_0) = c_{n-k+1} + \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^m c_{i,k}^m W_m^{(i)}(x_0) + \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} \bar{c}_{i,k}^m \bar{W}_m^{(i)}(y_0), \quad (15)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$, а c_k определяются из уравнения

$$\Psi(x_0) = P_1(c_1, c_2, \dots, c_n)^T.$$

Теперь подставим в общее решение (7) найденные функции $W_k(x)$, $\bar{W}_k(y)$, $k = 1, \dots, n$ и заменим величины $\bar{W}_k^{(k)}(y_0)$ по формулам (15). Поскольку решение задачи Гурса (2), (6) единственно, то коэффициенты при постоянных $W_k^{(i)}(x_0)$, $i = 0, \dots, k$, $k = 1, \dots, n$, и $\bar{W}_m^{(j)}(y_0)$, $j = 0, \dots, m-1$, $m =$

$1, \dots, n$, равны нулю и тогда получаем следующие формулы для функций $W_k(x), \bar{W}_k(y)$:

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \Gamma_k^{n-k+1}, \\ (\Gamma_k^1, \dots, \Gamma_k^{n-k+1})^T &= \psi_k^{-1} \int_{x_0}^x \psi_k(\Gamma_{k-1}^1, \dots, \Gamma_{k-1}^{n-k+1})^T dx, \\ k &= 1, 2, \dots, n, \quad \Gamma_0 = P_1^{-1}(\Psi(x) - \Psi(x_0)) \end{aligned} \quad (16)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \bar{W}_k(y) &= \bar{\Gamma}_k^{n-k+1}, \\ (\bar{\Gamma}_k^1, \dots, \bar{\Gamma}_k^{n-k+1})^T &= \bar{\psi}_k^{-1} \int_{y_0}^y \bar{\psi}_k(\bar{\Gamma}_{k-1}^1, \dots, \bar{\Gamma}_{k-1}^{n-k+1})^T dy, \\ k &= 1, 2, \dots, n, \quad \bar{\Gamma}_0 = P_1^{-1}\Phi(y). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом решение задачи Гурса (2), (6) вычисляется по формулам (3), (16) и (5), (17).

2. Задача Гурса для линеаризованной цепочки Тоды серии B_n

Рассматривается система уравнений

$$v_{xy} = B_n U v, \quad (18)$$

с матрицей Картана $B_n = ||b_{ij}||$, ненулевые элементы которой определяются так:

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 2, \quad i = 1, \dots, n, \quad b_{ii+1} = -1, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ b_{21} &= -2, \quad b_{ii-1} = -1, \quad i = 3, \dots, n, \end{aligned}$$

а $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)^T$ – решение цепочки Тоды

$$u_{xy} = B_n U C.$$

Решение системы уравнений (18) можно представить в виде

$$v_1 = P_1 \psi_1^{-1} D(\psi_1 R_1), \quad (19)$$

где вектор R_1 вычисляется с помощью рекуррентных формул

$$R_{2k-1} = \begin{pmatrix} \psi_{2k}^{-1} D \psi_{2k} \psi_{2k+1}^{-1} D(\psi_{2k+1} R_{2k+1}) \\ W_k(x) - \int_{y_0}^y Y_{2k}^{(1)} \psi_{2k+1}^{-1} D(\psi_{2k+1} R_{2k+1}) dy \end{pmatrix},$$

$k = 1, \dots, n-1$, $R_{2n-1} = W_n(x)$, через $Y_{2k}^{(1)}$ обозначена первая строка матрицы Y_{2k} .

Матрицы ψ_k и Y_{2k} находятся из формул:

$$\psi_k = F_m^{-1} S_k^* d_k F_m, \quad m = n - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \quad k = 2, \dots, 2n-1,$$

$$\psi_1 = P_1^{-1} B_n U P_1,$$

$$Y_{2k} = (F'_k)^{-1} (b_{2k} d_{2k}^{-1} Z_{2k} + T_{2k}) d_{2k} F_{n-k},$$

здесь $S_k^* = \text{diag} \left\{ e^{\theta_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}^k}, e^{\theta_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2}^k}, \dots, e^{\theta_n^k} \right\}$, где элементы θ_j^k вычисляются по формулам:

$$\theta_j^k = 2 \sum_{i=1}^{k-j} u^i + \sum_{i=k-j+1}^j u^i + \ln 4,$$

$$\text{и} \quad \begin{aligned} j &= \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \dots, k-1, \quad k = 3, 4, \dots, n, \\ j &= \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2, \dots, n, \quad k = n+1, n+2, \dots, 2n-1, \end{aligned}$$

$$\theta_k^k = \sum_{i=1}^k u^i + \ln 2, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

$$\theta_j^k = \sum_{i=j-k+1}^j u^i, \quad j = k+1, k+2, \dots, n, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

d_k -квадратная матрица порядка $n - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ такая, что

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = A_k^T (J_n^{-1})^T B \tilde{J}_n^{-1} A_k,$$

где $A_k = A_{k-1} J_n^{-1} L_k^{-1}$, $k = 3, 4, \dots, 2n-1$, $A_2 = E_n$.

Матрица $\tilde{J}_n$ отличается от J_n лишь элементом, стоящим на пересечении первой строки и первого столбца, который равен 2; $L_{2k} = E_n$, $L_{2k+1} = M_{k+1}^{-1}$, а

$$M_k = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Матрицы F_m и F'_{n-m} находятся из выражений

$$P_k = B \tilde{J}_n^{-1} A_k \begin{pmatrix} 0 \\ F_m \end{pmatrix}, \quad Q_k = J_n^T (A_k^{-1})^T \begin{pmatrix} F'_{n-m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

P_k и Q_k определены в предыдущем разделе, матрица T_{2k} имеет единственный ненулевой элемент $t_{k1} = e^{u^{k+1}}$. А ненулевые элементы матрицы $Z_{2k} = ||z_{ij}||$ определяются так: при $2k < n + 2$

$$\begin{aligned} z_{ii} &= e^{u^{k-i}} + e^{u^{k+i}}, \quad i = 1, \dots, k-2, \quad z_{k-1, k-1} = e^{u^{2k-1}} + 2e^{u^1}, \\ z_{kk} &= e^{u^{2k}} + 2e^{u^1}, \quad z_{ii} = e^{u^{i-k+1}} + e^{u^{k+i}}, \quad i = k+1, \dots, n-k, \\ z_{ii-1} &= -e^{u^{k-i+1}}, \quad i = 2, \dots, k-1, \quad z_{kk-1} = -2e^{u^1}, \\ z_{k+1, k} &= -2e^{u^1}, \quad z_{ii-1} = -e^{u^{i-k}}, \quad i = k+2, \dots, n-k, \\ z_{ii+1} &= -e^{u^{k+i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-k-1, \end{aligned}$$

а при $2k > n + 2$

$$\begin{aligned} z_{ii} &= e^{u^{k-i}} + e^{u^{k+i}}, \quad z_{ii-1} = -e^{u^{k-i+1}}, \quad i = 2, \dots, n-k, \\ z_{11} &= e^{u^{k-1}} + e^{u^{k+1}}, \quad z_{ii+1} = -e^{u^{k+i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-k-1. \end{aligned}$$

Пользуясь симметрией $x \leftrightarrow y$ системы уравнений (18) можно получить решение вида

$$v_2 = P_1 \bar{\psi}_1^{-1} \bar{D}(\bar{\psi}_1 \bar{R}_1), \quad (20)$$

Аналогично, как и выше, мы получаем следующие формулы для функций $W_k(x)$ и $\bar{W}_k(y)$:

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \Gamma_{2k-1}^{n-k+1}, \quad \bar{W}_k(y) = \bar{\Gamma}_{2k-1}^{n-k+1}, \\ (\Gamma_{2k-1}^1, \dots, \Gamma_{2k-1}^{n-k+1})^T &= \psi_{2k-1}^{-1} \int_{x_0}^x \psi_{2k-1} \times \\ &\times \psi_{2k-2}^{-1} \int_{x_0}^t \psi_{2k-2} (\Gamma_{2k-3}^1, \dots, \Gamma_{2k-3}^{n-k+1})^T d\xi dt, \quad (21) \\ k &= 1, \dots, n, \quad \Gamma_1 = \psi_1^{-1} \int_{x_0}^x \psi_1 P_1^{-1} (\Psi(x) - \Psi(x_0)) d\xi. \end{aligned}$$

Тогда решение задачи Гурса (18), (6) определяется по формулам (19)–(21).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00440-а)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Жибер А. В., Соколов В. В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лувиллевского типа* // УМН – 2001. – Т. 56. – № 1. – С. 63–106.
2. Жибер А. В., Старцев С. Я. *Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений* // Мат. заметки – 2003. – Т. 74. – № 6. – С. 848–857.
3. Гурьева А. М., Жибер А. В. *Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды* // ТМФ – 2004. – Т. 138. – № 3. – С. 401–421.
4. Михайлова Ю. Г. *Построение решения линейной гиперболической системы уравнений* // Тр. 39 молодежной школы–конференции. – Екатеринбург. 2008. – С. 143–147.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ МСГ

Р. Д. Муртазина

*Уфимский государственный авиационный технический университет,
ReginaUFA@yandex.ru*

Введение

Впервые понятие характеристической алгебры Ли было введено Лезновым А. Н., Смирновым В. Г. и Шабатом А. Б. в работе "Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем"[1] для гиперболических систем уравнений вида

$$D\bar{D}u^i = F^i(u^1, \dots, u^r), \quad i = 1, \dots, r.$$

В работе [2] для уравнений синус-Гордон и Цицейки с использованием образующих характеристической алгебры построены дифференциальные операторы, переводящие высшие симметрии в симметрии меньшего порядка. Обратные к последним являются операторами рекуррентности для вычисления алгебры симметрий.

Характеристическая алгебра уравнения мСГ (см. [3], [4])

$$u_{xy} = s(u)\sqrt{1-u_x^2}\sqrt{1-u_y^2}, \quad s'' - 2s^3 + \lambda s = 0 \quad (1)$$

порождена образующими

$$X = \frac{\partial}{\partial u} - s^2 b^2 \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots, \\ Y = sb \frac{\partial}{\partial u_1} + (s' u_1 b - s \frac{u_1 u_2}{b}) \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

Здесь $u_1 = u_x, \bar{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \bar{u}_2 = u_{yy}, \dots$

В настоящей работе в терминах образующих характеристической алгебры Ли получен оператор

$$Y^2 + s^2$$

и обратный к нему (оператор рекурренции), который определяет алгебру симметрий уравнения (1). Последний имеет вид (см. [5])

$$D^2 + 2\frac{u_1 u_2}{b^2} D - u_1 D^{-1} \left(\frac{u_3}{b^2} D + \frac{u_1 u_2^2}{b^4} D + 3s^2 u_1 D + \right. \\ \left. + 3ss' u_1^2 - ss' + \lambda u_2 \right) + s^2 + \lambda u_1^2.$$

В случае, если $s'^2 - ss'' + s^4 = 0$, то уравнение (1) точечной заменой приводится к виду

$$u_{xy} = \frac{1}{\cos u} \sqrt{1 - u_1^2} \sqrt{1 - \bar{u}_1^2} \quad (2)$$

Это уравнение является интегрируемым по Дарбу (см. [6]). Для уравнения (2) построен оператор, который симметрию переводит в интеграл и обратный оператор, переводящий интеграл в симметрию.

Высшие симметрии

В этом параграфе для удобства уравнение (1) представим в следующем виде

$$u_{xy} = s(u)b(u_1)\bar{b}(\bar{u}_1), \quad \text{где} \quad b' = -\frac{u_1}{b}, \quad \bar{b}' = -\frac{\bar{u}_1}{\bar{b}}. \quad (3)$$

На множестве локально-аналитических функций $\mathfrak{F} = (\varphi : \varphi(u, u_1, u_2, \dots))$, зависящих от конечного числа переменных, оператор полного дифференцирования по y $\bar{D}$ определяется следующим образом

$$\bar{D} = \bar{u}_1 X + \bar{b} Y.$$

Так как

$$[D, \bar{D}] = [D, \bar{u}_1 X + \bar{b} Y] = sb\bar{b}X + \bar{u}_1[D, X] - sb\bar{u}_1Y + \bar{b}[D, Y]$$

и операторы D и $\bar{D}$ коммутируют, то

$$XD = DX - sbY, \quad YD = DY + sbX. \quad (4)$$

По определению симметрии уравнения (1) удовлетворяют соотношению

$$D\bar{D}F = (f_{u_1}D + f_{\bar{u}_1}\bar{D} + f_u)F,$$

которое перепишем так

$$(sb\bar{b}X + \bar{u}_1DX - sb\bar{u}_1Y + \bar{b}DY - s'\bar{b}\bar{b} + \\ + s\frac{u_1}{b}\bar{b}D + sb\frac{\bar{u}_1}{\bar{b}}(\bar{u}_1X + \bar{b}Y))F = 0.$$

Последнее эквивалентно двум соотношениям вида

$$XF = 0, \quad DYF = s'bF - s\frac{u_1}{b}DF \quad (5)$$

или

$$XF = 0, \quad D(Y + s\frac{u_1}{b})F = (s'b + D(s\frac{u_1}{b}))F. \quad (6)$$

Подействовав на второе уравнение (5) операторами X и Y и используя (4) получим, что

$$D(XY + s'\frac{u_1}{b})F = sbY^2F + (s''\frac{1}{b} + s'\frac{u_2}{b^3})F + s^2u_1YF \quad (7)$$

и

$$D(Y^2 + s^2\frac{1}{b^2} + s\frac{u_1}{b}Y)F = -sbXYF + (-ss'u_1 + \\ + 2ss'\frac{u_1}{b^2} + 2s^2\frac{u_1u_2}{b^4})F + (s'\frac{1}{b} + s\frac{u_2}{b^2})YF \quad (8)$$

соответственно.

Теперь рассмотрим комбинацию

$$Y^2 + s^2\frac{1}{b^2} + s\frac{u_1}{b}Y + c(XY + s'\frac{u_1}{b}) + \alpha(Y + s\frac{u_1}{b}))F,$$

где $c - const$, $\alpha = \alpha(u, u_1)$. Согласно соотношениям (6)–(8) имеем

$$D(Y^2 + s^2\frac{1}{b^2} + s\frac{u_1}{b}Y + c(XY + s'\frac{u_1}{b}) + \alpha(Y + s\frac{u_1}{b}))F = \\ = -sbXYF + (-ss'u_1 + 2ss'\frac{u_1}{b^2} + 2s^2\frac{u_1u_2}{b^4})F + (s'\frac{1}{b} + \\ + s\frac{u_2}{b^2})YF + csbY^2F + c(s''\frac{1}{b} + s'\frac{u_2}{b^3})F + cs^2u_1YF +$$

$$+ D(\alpha)(Y + s\frac{u_1}{b})F + \alpha(s'\frac{1}{b} + s\frac{u_2}{b^3})F = -sbX(Y +$$

$$\begin{aligned}
& +s\frac{u_1}{b})F + (s'\frac{1}{b} + s\frac{u_2}{b^3})(Y + s\frac{u_1}{b})F + (s'\frac{1}{b} + s\frac{u_2}{b^3})(\alpha + \\
& +s\frac{u_1}{b})F + csb(Y + s\frac{u_1}{b})YF + c(s''\frac{1}{b} + s'\frac{u_2}{b^3})F + \\
& +D(\alpha)(Y + s\frac{u_1}{b})F.
\end{aligned} \tag{9}$$

Если $c = 0$, $\alpha = -s\frac{u_1}{b}$, то (9) приводится к виду

$$D(Y^2 + s^2)F = (s'b - sbX)(Y + s\frac{u_1}{b})F. \tag{10}$$

На уравнения (7), (10) подействуем операторами X и Y , тогда

$$DX(Y^2 + s^2)F = sbY^3F + b(s^3 + s'')YF - sbX^2YF, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
DY(Y^2 + s^2)F &= -sb(YXY + ss')F + \\
&+ b(s' - sX)(Y^2 + s^2)F - s\frac{u_1}{b}D(Y^2 + s^2)F,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$D(YXY + ss')F = DX(Y^2 + s^2)F. \tag{13}$$

Из последнего соотношения видно, что

$$(YXY + ss')F = X(Y^2 + s^2)F + cF \quad (c - const).$$

Применим к уравнению (11), предварительно поделив его на sb , дифференцирование D

$$D\left(\frac{1}{sb}DX(Y^2 + s^2)F\right) = -4sbX(Y^2 + s^2)F - 2csb.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть функция $F = F(u, u_1, \dots, u_n)$ - симметрия уравнения (3). Тогда оператор $X(Y^2 + s^2)$ симметрию F переводит в нуль.

Доказательство. Обозначим $X(Y^2 + s^2)F = A$, тогда

$$D\left(\frac{1}{sb}DA\right) = -4sbA - 2csb. \tag{14}$$

Если $A = A(u, u_1)$, то соотношение (14) примет вид

$$D\left(\frac{1}{sb}\right)(A_u u_1 + A_{u_1} u_2) + \frac{1}{sb}(A_{uu} u_1^2 + 2A_{uu_1} u_1 u_2 +$$

$$+A_u u_2 + A_{u_1 u_1} u_2^2 + A_{u_1} u_3) = -4sbA - 2csb.$$

Коэффициент при переменной u_3 обращается в нуль только при условии, что $A_{u_1} = 0$.

Значит $A = A(u)$ и (14) перепишем так:

$$D\left(\frac{1}{sb}\right) A_u u_1 + \frac{1}{sb}(A_{uu} u_1^2 + A_u u_2) = -4sbA - 2csb$$

или

$$\left(-\frac{s'}{s^2} \frac{u_1}{b} + \frac{1}{s} \frac{u_1}{b^3} u_2\right) A' u_1 + \frac{1}{sb}(A'' u_1^2 + A' u_2) = -4sbA - 2csb.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{s} \frac{u_1}{b^3} A' u_1 + \frac{1}{sb} A' = \frac{1}{b^2} A' = 0.$$

Тогда $A = \text{const}$, $c = -2A$ и уточняя структуру выражения $X(Y^2 + s^2)F$ получаем, что $A = 0$. Лемма доказана.

Таким образом

$$X(Y^2 + s^2)F = 0,$$

и функция $(Y^2 + s^2)F$ удовлетворяет соотношению (5)

$$DY(Y^2 + s^2)F = (bs' - s\frac{u_1}{b}D)(Y^2 + s^2)F.$$

Следовательно $(Y^2 + s^2)F$ является симметрией

Таким образом получили дифференциальный оператор, понижающий порядок симметрии

$$(Y^2 + s^2)F^{(n+1)} = \mu F^{(n-1)}, \quad \mu = \text{const},$$

где $\mu = s'^2 - ss'' + s^4$ в силу условия для функции s уравнения мСГ.

Оператор рекуррентии

При условии, что $\mu \neq 0$, в данном параграфе построим оператор для вычисления алгебры симметрий уравнения (1).

Теорема. Алгебра симметрий $F^{(n)}(u, u_1, u_2, \dots, u_n)$ уравнения (1) вычисляется по рекуррентной формуле

$$F^{(n+2)} = (D^2 + 2\frac{u_1 u_2}{b^2} D - u_1 D^{-1}(\frac{u_3}{b^2} D + \frac{u_1 u_2^2}{b^4} D +$$

$$+3s^2u_1D + 3s^2u_1D + 3ss'u_1^2 - ss' + \lambda u_2) + s^2 + \\ + \lambda u_1^2)F^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad F^{(1)} = u_1.$$

Доказательство. Имеем следующие соотношения

$$D(Y^2 + s^2)F = b(s' - sX)YF,$$

$$D^2(Y^2 + s^2)F = -\mu \frac{u_1b}{s}YF + \mu b^2F - s^2b^2(Y^2 + \\ + s^2)F + D(\ln bs)D(Y^2 + s^2)F. \quad (15)$$

Теперь найдем оператор рекурсии L такой, что

$$F = L(Y^2 + s^2)F.$$

Для этого вычислим $D^3(Y^2 + s^2)F$ и перепишем так

$$(D^3 + s^2b^2D - D^2(\ln bs)D + D(\ln \frac{u_1b}{s})D(\ln bs)D - \\ - D(\ln bs)D^2 - D(\ln \frac{u_1b}{s})D^2 + D(s^2b^2) - \\ - D(\ln \frac{u_1b}{s})s^2b^2)(Y^2 + s^2)F = \mu u_1D(\frac{1}{u_1}F).$$

Поделим левую и правую части последнего равенства на u_1 и преобразуем к виду

$$D(\frac{1}{u_1}D^2) + D(\frac{2u_2}{b^2}D) + D(\frac{s^2}{u_1} + \lambda u_1) - (\frac{u_3}{b^2} + \frac{u_1u_2^2}{b^4} + \\ + 3s^2u_1)D + ss'(1 - 3u_1^2) - \lambda u_1)(Y^2 + s^2)F = \mu D(\frac{1}{u_1}F). \quad (16)$$

Поддействовав оператором D^{-1} и умножив на $\frac{u_1}{\mu}$ соотношение (16) перепишем так

$$\frac{1}{\mu}(D^2 + \frac{2u_1u_2}{b^2}D + s^2 + \lambda u_1^2 - u_1D^{-1}(\frac{u_3}{b^2}D + \frac{u_1u_2^2}{b^4}D + \\ + 3s^2u_1D - ss' + 3u_1^2ss' + \lambda u_2))(Y^2 + s^2)F = F.$$

Следовательно оператор рекуррентности уравнения (1) имеет вид

$$D^2 + 2\frac{u_1u_2}{b^2}D - u_1D^{-1}(\frac{u_3}{b^2}D + \frac{u_1u_2^2}{b^4}D + 3s^2u_1D +$$

$$+3ss'u_1^2 - ss' + \lambda u_2) + s^2 + \lambda u_1^2.$$

Теорема доказана.

Отметим, что оператор рекурсии был получен в работе [5] с использованием преобразования Беклунда, который переводит мСГ в синус-Гордон.

Уравнение $u_{xy} = \frac{1}{\cos u} \sqrt{1 - u_1^2} \sqrt{1 - \overline{u}_1^2}.$

Будем считать, что $\mu = 0$, т.е. $s'^2 - ss'' + s^4 = 0$. Тогда функция s уравнения (1) определяется так

$$s = \frac{\sqrt{\lambda}}{\cos(\sqrt{\lambda}u - c)}, \quad \lambda, c - const.$$

Согласно (15) имеем

$$(Y^2 + s^2)F = 0, \quad (X - \frac{s'}{s})YF = 0,$$

то любой оператор

$$X^{i_1}Y^{j_1}X^{i_2}Y^{j_2} \dots X^{i_k}Y^{j_k}$$

на алгебре Ли-Беклунда высших симметрий представляется в виде полинома

$$\alpha_{i_1j_1 \dots i_kj_k}Y + \beta_{i_1j_1 \dots i_kj_k}.$$

Так как оператор $D(Y + s\frac{u_1}{b})$ не изменяет порядок симметрии F (см. (6)), то выражение $(Y + s\frac{u_1}{b})F$ понижает порядок на единицу.

Теперь покажем, что не существует оператора, являющегося полиномом от переменных X и Y , переводящего симметрии в симметрии меньшего порядка уравнения (2). Допустим, что комбинация $\alpha Y + \beta$ - есть оператор, переводящий симметрии в симметрии меньшего порядка. Тогда

$$\alpha Y + \beta = \alpha(Y + s\frac{u_1}{b}) \tag{17}$$

и, первое соотношение (6) принимает вид

$$X \left(\alpha(Y + s\frac{u_1}{b})F \right) = 0$$

или

$$\left(X(\alpha) + \alpha \frac{s'}{s} \right) (Y + s\frac{u_1}{b})F = 0.$$

Следовательно

$$X(\alpha) + \alpha \frac{s'}{s} = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{b}{s}.$$

Для оператора (17) также справедливо второе соотношение (6)

$$\begin{aligned} D \left((Y + s \frac{u_1}{b}) \frac{b}{s} (Y + s \frac{u_1}{b}) \right) F = \\ = \left(s'b + D(s \frac{u_1}{b}) \right) \frac{b}{s} \left(Y + s \frac{u_1}{b} \right) F \end{aligned}$$

Пусть порядок функции $(Y + s \frac{u_1}{b})F$ равен n . Тогда порядок функции $(Y + s \frac{u_1}{b}) \frac{b}{s} (Y + s \frac{u_1}{b})F$ равен $n - 1$. С другой стороны

$$(Y + s \frac{u_1}{b}) \frac{b}{s} (Y + s \frac{u_1}{b})F = s \frac{u_1^2}{b} F + u_1 Y F.$$

Противоречие.

Оказывается существует оператор, который симметрии уравнения (2) переводит в y -интеграл.

Операторы X и Y функцию

$$\left(\frac{b}{s} Y + u_1 \right) F$$

обращают в нуль. Поэтому

$$\overline{D} \left(\frac{b}{s} Y + u_1 \right) F = 0.$$

Значит

$$W = \left(\frac{b}{s} Y + u_1 \right) F \tag{18}$$

— интеграл уравнения (2).

Теперь приведем оператор, который переводит интеграл в симметрии уравнения (2).

Дифференцирование D интеграла W определяется дифференцированием D правой части соотношения (18)

$$DW = \frac{s}{b} D \left(\frac{b}{s} \right) W + \left(\frac{u_2}{b^2} + \frac{s'}{s} \right) F.$$

Отсюда следует, что

$$F = \left(\frac{s'}{s} + \frac{u_2}{b^2} \right)^{-1} \left(D - D \left(\frac{b}{s} \right) \frac{s}{b} \right) W.$$

Следовательно, справедливо утверждение.

Лемма 2. *Оператор*

$$\frac{b}{s}Y + u_1$$

симметрии F переводит в интеграл W уравнения (2). А оператор

$$\left(\frac{s'}{s} + \frac{u_2}{b^2} \right)^{-1} \left(D - D \left(\frac{b}{s} \right) \frac{s}{b} \right)$$

интеграл - в симметрии.

Автор приносит глубокую благодарность А.В. Жиберу за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00440-а).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. – 1982. – Т. 51. – № 1. – С. 10–22.
2. Жибер А. В. *Симметрии и интегралы нелинейных дифференциальных уравнений* // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – Уфа.: Институт механики Уфимского научного центра РАН, 1993. – 236 с.
3. Борисов А. Б., Зыков С. А. *Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений* // ТМФ. – 1998. – Т. 115. – № 2. – С. 199–214.
4. Муртазина Р. Д. *Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли* // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2007. – Т. 13. – № 4. – С. 102–117.
5. Кузнецова М. Н. *Симметрии уравнения эллиптического синуса* // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике: Том 1 – Математика. – Уфа: БашГУ, 2007. – С. 170–179.
6. Жибер А. В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58. – № 4. – С. 33–54.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ГОЛОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ В $\mathbb{C}^n$

И. Х. Мусин, П. В. Федотова

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
musin@matem.anrb.ru, polina81@rambler.ru*

1. Пространства основных функций. Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале [1, с. 73], b – выпуклая непрерывная положительно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$ – замыкании C . Пара (b, C) задаёт замкнутое выпуклое неограниченное множество $U(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : - < \xi, y > \leq b(y), \forall y \in C\}$, не содержащее целую прямую. Внутренность $U(b, C)$ не пуста и совпадает с $V(b, C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : - < \xi, y > < b(y), \forall y \in \overline{C}\}$, а замыкание $V(b, C)$ есть множество $U(b, C)$. Для краткости обозначаем $U(b, C)$ через U , а $V(b, C)$ – через V .

Пусть $M = (M_k)_{k=0}^\infty$ – неубывающая последовательность вещественных чисел M_k с $M_0 = 1$ такая, что:

$$i_1). M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

$$i_2). \exists H_1 > 1 \exists H_2 > 1 \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}_+ \quad M_{k+m} \leq H_1 H_2^{k+m} M_k M_m;$$

$$i_3). \forall \varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad M_k \leq a_\varepsilon \varepsilon^k k!;$$

$$i_4). \exists \gamma \in (0, 1) \exists b_1 > 0 \exists b_2 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad M_k \geq b_1 b_2^k k!^\gamma;$$

$i_5).$ существует логарифмически выпуклая неубывающая последовательность $K = (K_m)_{m=0}^\infty$ с $K_0 = 1$ такая, что при некоторых $t_1, t_2 > 1$

$$t_1^{-1} t_2^{-m} K_m \leq \frac{m!}{M_m} \leq t_1 t_2^m K_m, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Будем придерживаться следующих обозначений. Для открытого множества Ω в $\mathbb{C}^n$ $H(\Omega)$ – совокупность функций, голоморфных в Ω . Для л.в.п. X X^* – сильное сопряжённое пространство. Для $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ $< u, v > = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\| =$

евклидова норма в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$. Расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества U обозначим $d_U(x)$, расстояние от точки $x \in C$ до границы C обозначим $\Delta_C(x)$. $T_C = \mathbb{R}^n + iC$. С последовательностью $L = (L_k)_{k=0}^\infty$ чисел $L_k > 0$ таких, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln L_k}{k} = +\infty$, ассоциируем функцию ω_L : $\omega_L(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{L_k}$ для $r > 0$, $\omega_L(0) = 0$.

Для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ определим пространство $G_{m,\varepsilon}(U)$, состоящее из $C^\infty(U)$ -функций f , для которых конечны нормы

$$p_{m,\varepsilon}(f) = \sup_{x \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^m}{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad m \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0.$$

Положим $G_M(U) = \bigcap_{m=1}^\infty \bigcap_{\varepsilon>0} G_{m,\varepsilon}(U)$. С обычными операциями сложения

и умножения на комплексные числа $G_M(U)$ становится линейным пространством. Зададим топологию в $G_M(U)$ с помощью семейства норм $p_{m,\varepsilon}$. Таким образом, функции из $G_M(U)$ образуют подкласс в классе Шварца $C^\infty(U)$ -функций, быстро убывающих на U .

Пусть $E(U)$ – пространство функций $f \in H(\mathbb{C}^n)$ таких, что для любых $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}$ существует число $C_{m,\varepsilon} > 0$ такое, что

$$|f(z)| \leq C_{m,\varepsilon} \frac{e^{w_K(\varepsilon d_U(x)) + w_K(\varepsilon \|y\|)}}{(1 + \|z\|)^m}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

с топологией, определяемой системой норм

$$q_{m,\varepsilon}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1 + \|z\|)^m}{e^{w_K(\varepsilon d_U(x)) + w_K(\varepsilon \|y\|)}}, \quad \varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}.$$

Здесь, как обычно, $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

В данной работе получено эквивалентное описание пространства $G_M(U)$. Также мы анонсируем результаты об описании пространств $G_M^*(U)$ и $E^*(U)$ в терминах преобразований Фурье-Лапласа и Лапласа функционалов, соответственно.

Для формулировки результатов введём ряд пространств.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть $\omega_m(r) = \omega_M(rH_2^m)$ ($r \geq 0$) и

$$H_m(T_C) = \{F \in H(T_C) : \|F\|_m = \sup_{z \in T_C} \frac{|F(z)|e^{-\omega_m(\|z\|)}}{(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)})^m} < \infty\},$$

где $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$. Пусть $H_M(T_C) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m(T_C)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $H_M(T_C)$ – линейное пространство. $H_M(T_C)$ наделим топологией индуктивного предела пространств $H_m(T_C)$.

Преобразование Фурье-Лапласа функционала $\Phi \in G_M^*(U)$ определим по формуле $\hat{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i\langle \xi, z \rangle})$, $z \in T_C$.

Преобразование Лапласа функционала $\Phi \in E^*(U)$ определим по формуле $\tilde{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i\langle \lambda, z \rangle})$, $z \in T_C$.

Теорема 1. Пространства $G_M(U)$ и $E(U)$ топологически изоморфны.

Теорема 2. Преобразование Фурье-Лапласа задаёт топологический изоморфизм пространств $G_M^*(U)$ и $H_M(T_C)$.

Теорема 3. Преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $E^*(U)$ и $H_M(T_C)$.

Отметим, что пространства типа $E(U)$ представляют интерес для комплексного анализа и математической физики (см., напр., [2]).

2. Эквивалентное описание пространства $G_M(U)$.

В ходе доказательства теоремы 1 используются следующие элементарные леммы.

Лемма 1. Для любого $N \in \mathbb{N}$

$$w_K(r) + N \ln r \leq w_K(er) + \ln K_N, \quad r > 0.$$

Лемма 2. Для любого $r \geq 0$ $2w_K(r) \leq w_K(er)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть f – произвольная функция из $G_M(U)$. Тогда при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$|(D^\alpha f)(x)| \leq p_{m,\varepsilon}(f) \frac{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}{(1 + \|x\|)^m}, \quad x \in V. \quad (1)$$

Из (1) следует, что каковы бы ни были точки $x, x_0 \in V$, справедливо представление

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

причём ряд, стоящий справа, сходится равномерно на компактных подмножествах V к f . Действительно, положим $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, $x \in U$. По формуле Тейлора при любом $N \in \mathbb{N}$

$$u(x) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{(D^\alpha u)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = N} \frac{(D^\alpha u)(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

где ξ – некоторая точка интервала с концами x_0 и x . При любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\alpha| = N} \frac{(D^\alpha u)(\xi)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| &\leq \sum_{|\alpha| = N} \frac{|(D^\alpha u)(\xi)|}{\alpha!} \|x - x_0\|^{|\alpha|} \leq \\ &\leq p_{m,\varepsilon}(f) \sum_{|\alpha| = N} \frac{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \|x - x_0\|^{|\alpha|}}{\alpha!} = \\ &= p_{m,\varepsilon}(f) \varepsilon^N M_N \|x - x_0\|^N \sum_{|\alpha| = N} \frac{1}{\alpha!} = \\ &= p_{m,\varepsilon}(f) \varepsilon^N M_N \|x - x_0\|^N \frac{n^N}{N!} \leq a_1 p_{m,\varepsilon}(f) (\varepsilon n \|x - x_0\|)^N. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для $x \in V$ таких, что $\|x - x_0\| < \frac{1}{n\varepsilon}$ справедливо представление $u(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha u)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это представление верно всюду в V . Ясно также, что ряд Тейлора функции u в точке x_0 сходится равномерно к u на компактных подмножествах V . Проведя такие же рассуждения для v , получим в итоге искомое представление для f . Пусть $x_0 \in V$. В силу оценки (1) и условия i_3) на M функция

$$F_{x_0}(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (z - x_0)^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

является целой. Причём, для $x \in V$ $F_{x_0}(x) = f(x)$. Отсюда следует, что для любых $x_1, x_2 \in V$ $F_{x_1}(z) = F_{x_2}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$. Тем самым определена функция $F \in H(\mathbb{C}^n)$ такая, что для каждого $\xi \in V$ всюду в $\mathbb{C}^n$ $F(z) = F_\xi(z)$ и $F(x) = f(x)$, $x \in V$. Таким образом, возникло отображение T , которое каждой функции из $G_M(U)$ ставит в соответствие её

голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$. Очевидно, отображение T взаимнооднозначно и линейно.

Пусть $f \in G_M(U)$. Оценим рост функции $F = T(f)$.

Пусть $z = x + iy$, $x \in V, y \in \mathbb{R}^n$. Так как

$$F(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} (iy)^\alpha,$$

то при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq p_{m,\varepsilon}(f) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \|y\|^\alpha}{(1 + \|x\|)^m \alpha!} = \\ &= \frac{p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N M_N \|y\|^N \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} = \\ &= \frac{p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N M_N \|y\|^N \frac{n^N}{N!} \leq \\ &\leq \frac{2t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \frac{(2\varepsilon n t_2 \|y\|)^N}{K_N} = \\ &= \frac{2t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} e^{w_K(2\varepsilon n t_2 \|y\|)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь оценим сверху $|F(z)|$ в точках $z = x + iy$, для которых $x \notin V, y \in \mathbb{R}^n$. Пусть ξ – произвольная точка множества V . Тогда из представления $F(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(\xi)}{\alpha!} (z - \xi)^\alpha$ имеем при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq p_{m,\varepsilon}(f) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}{(1 + \|\xi\|)^m \alpha!} \|z - \xi\|^{|\alpha|} = \\ &= \frac{p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|\xi\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^N M_N \|z - \xi\|^N n^N}{N!} \leq \\ &\leq \frac{t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|\xi\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon n t_2 \|z - \xi\|)^N}{K_N} \leq \frac{2t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|\xi\|)^m} e^{w_K(2\varepsilon n t_2 \|z - \xi\|)}. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$

$$|F(z)| \leq 2t_1 p_{m,\varepsilon}(f) \inf_{\xi \in V} \frac{e^{w_K(2\varepsilon n t_2 \|z - \xi\|)}}{(1 + \|\xi\|)^m}. \quad (3)$$

Для $m \in \mathbb{N}$ и $s > 0$ пусть

$$g_{m,s}(z) = \inf_{\xi \in V} (w_K(s\|z - \xi\|) - m \ln(1 + \|\xi\|)).$$

Так как для любого $s > 0$

$$\begin{aligned} & w_K(s\|z - \xi\|) - m \ln(1 + \|\xi\|) \leq \\ & \leq w_K(2s\|x - \xi\|) - m \ln(1 + \|\xi\|) + w_K(2s\|y\|) \leq \\ & \leq w_K(2s\|x - \xi\|) + m \ln(1 + \|x - \xi\|) + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|), \\ & \text{то } g_{m,s}(z) \leq w_K(2sd_U(x)) + m \ln(1 + d_U(x)) + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|). \\ & \text{Отсюда, в случае } d_U(x) < 1 \text{ имеем} \end{aligned}$$

$$g_{m,s}(z) \leq w_K(2sd_U(x)) + m \ln 2 + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|).$$

Если $d_U(x) \geq 1$, то (пользуясь по ходу леммой 1) имеем

$$\begin{aligned} & g_{m,s}(z) \leq w_K(2sd_U(x)) + m \ln(2sd_U(x)) - m \ln s + w_K(2s\|y\|) - \\ & - m \ln(1 + \|x\|) \leq \\ & \leq w_K(2esd_U(x)) + \ln(eK_m) - m \ln s + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|). \end{aligned}$$

Полагая $d_{m,s} = \max(m \ln 2, \ln(eK_m) - m \ln s)$, имеем

$$g_{m,s}(z) \leq w_K(2esd_U(x)) + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|) + d_{m,s}. \quad (4)$$

Возвращаясь к (3) и пользуясь (4) с $s = 2\varepsilon n t_2$, выводим, что каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ в точках $z = x + iy$ с $x \notin V$, $y \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$|F(z)| \leq A_{m,\varepsilon} p_{m,\varepsilon}(f) e^{w_K(4\varepsilon n t_2 d_U(x)) + w_K(4\varepsilon n t_2 \|y\|) - m \ln(1 + \|x\|)},$$

где $A_{m,\varepsilon} = 2t_1 e^{d_{m,s}}$. А принимая во внимание неравенство (2), заключаем, что последняя оценка справедлива всюду в $\mathbb{C}^n$.

Далее, проводя элементарные оценки и пользуясь по ходу леммой 1, получим, что при некотором $B_{m,\varepsilon} > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$ справедливо неравенство

$$|F(z)| \leq B_{m,\varepsilon} p_{m,\varepsilon}(f) e^{w_K(4\varepsilon \text{ent}_2 d_U(x)) + w_K(4\varepsilon \text{ent}_2 \|y\|) - m \ln(1+\|z\|)}.$$

Отсюда следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ $q_{m,4\varepsilon \text{ent}_2}(T(f)) \leq B_{m,\varepsilon} p_{m,\varepsilon}(f)$. Таким образом, T – непрерывное отображение из $G_M(U)$ в $E(U)$.

Если теперь установим, что и T^{-1} непрерывно, то теорема будет доказана. Пусть F – произвольная функция из $E(U)$. Покажем, что сужение F на U – функция f – принадлежит пространству $G_M(U)$. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $R > 0$ произвольны. Пусть $x \in V$. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\begin{aligned} (1 + \|x\|)^m (D^\alpha f)(x) &= \\ &= \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int \cdots \int_{L_R(x)} \frac{(1 + \|x\|)^m F(\zeta)}{(\zeta_1 - x_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - x_n)^{\alpha_n+1}} d\zeta, \end{aligned}$$

где $L_R(x) = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - x_j| = R, j = 1, \dots, n\}$, $d\zeta = d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$. Отсюда

$$\begin{aligned} (1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| &\leq \frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}} \max_{\zeta \in L_R} (1 + \|\zeta - x\|)^m (1 + \|\zeta\|)^m |F(\zeta)| \leq \\ &\leq \frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}} (1 + \sqrt{n}R)^m q_{m,\varepsilon}(F) \max_{\zeta = \xi + i\eta \in L_R} e^{w_K(\varepsilon d_U(\xi)) + w_K(\varepsilon \|\eta\|)} \leq \\ &\leq \frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}} q_{m,\varepsilon}(F) e^{2w_K(\varepsilon \sqrt{n}R) + m \ln(1 + \sqrt{n}R)}. \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 2, имеем

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \leq \frac{|\alpha|!}{R^{|\alpha|}} q_{m,\varepsilon}(F) e^{w_K(e\varepsilon \sqrt{n}R) + m \ln(1 + \sqrt{n}R)}.$$

Теперь, привлекая лемму 1, получим

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \leq \frac{|\alpha|!}{R^{|\alpha|}} K_m q_{m,\varepsilon}(F) e^{w_K(e^2 \varepsilon \sqrt{n}R) + m \ln \frac{2}{e\varepsilon}}.$$

Переходя к точной нижней грани по $R > 0$, получаем, что для любого $x \in V$

$$(1 + \|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \leq \frac{|\alpha|!}{K_{|\alpha|}} K_m (e^2 \varepsilon \sqrt{n})^{|\alpha|} \left(\frac{2}{e\varepsilon} \right)^m q_{m,\varepsilon}(F) \leq$$

$$\leq t_1(e^2 r_2 \varepsilon \sqrt{n})^{|\alpha|} M_{|\alpha|} K_m \left(\frac{2}{e\varepsilon} \right)^m q_{m,\varepsilon}(F).$$

Отсюда следует, что

$$p_{m,e^2 t_2 \varepsilon \sqrt{n}}(f) \leq t_1 K_m \left(\frac{2}{e\varepsilon} \right)^m q_{m,\varepsilon}(F).$$

Это неравенство означает, что отображение T^{-1} непрерывно.

Таким образом, доказано, что пространства $G_M(U)$ и $E(U)$ топологически изоморфны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00779, 08-01-97023), программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант Президента Российской Федерации НШ 3081.2008.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
2. Соловьёв М. А. *О двух классах обобщённых функций, используемых в нелокальной квантовой теории поля*, ТМФ, **143**:2 (2005), 195-210.

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НА $\mathbb{R}$

В. В. Напалков, А. А. Румянцева, Р. С. Юлмухаметов

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский
государственный университет
allarum@mail.ru, Yulmukhametov@mail.ru*

В работе рассматривается задача о полноте системы $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$, в весовом гильбертовом пространстве функций f , для которых конечен интеграл Лебега

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-2a|t|^\alpha} dt < \infty \quad (1)$$

со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \overline{v(t)} e^{-2a|t|^\alpha} dt,$$

где $a > 0$ — произвольное положительное число, а $\alpha \in (1; 2]$.

Результаты наших исследований для случая $\alpha = 2$ и исходная постановка задачи опубликованы в работе [4].

Пусть I — интервал вещественной оси и $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале. Через $L_h^2(I)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций f на интервале I , для которых конечен интеграл

$$\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt.$$

Это пространство гильбертово со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_I u(t) \overline{v(t)} e^{-2h(t)} dt.$$

С помощью преобразования Фурье - Лапласа задачу о полноте систем экспонент в пространстве $L_h^2(I)$ можно свести к задаче о множествах (не-)единственности в классе целых функций F , представимых в виде

$$F(\lambda) = \int_I e^{\lambda t - 2h(t)} f(t) dt, \quad (2)$$

где $f \in L_2(\mathbb{I}, \varphi)$. При этом мы воспользуемся следующим обобщением теоремы Пэли - Винера из работы [1].

Теорема А. Пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале I ,

$$L_h^2(I) = \left\{ g \in L_{loc}(I) : \|g\|^2 := \int_I |g(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty \right\},$$

$$\tilde{h}(x) = \sup_{t \in I} (xt - h(t))$$

— сопряженная по Юнгу к функции $h(t)$.

Для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим число $\rho_{\tilde{h}}(x)$ из условия

$$\rho_{\tilde{h}}(x) = \sup \left\{ p > 0 : \int_{x-p}^{x+p} |\tilde{h}'_+(x) - \tilde{h}'_+(t)| dt \leq 1 \right\}.$$

(Здесь $\tilde{h}'_+(x)$ — правая производная функции $\tilde{h}(x)$ в точке x).

Тогда,

1) если целая функция F представима в виде

$$F(\lambda) = \int_I \bar{g}(t) e^{\lambda t - 2h(t)} dt, \quad (3)$$

с функцией $g \in L_h^2(I)$, то

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &\leq C_F e^{\tilde{h}(x)}, \quad \lambda = x + iy \in \mathbb{C}, \\ \|F\|^2 &:= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 e^{-2\tilde{h}(x)} \rho_{\tilde{h}}(x) d\tilde{h}'(x) dy \leq (\pi e) \|g\|^2; \end{aligned}$$

2) если целая функция F удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &\leq C_F e^{\tilde{h}(x)}, \quad \lambda = x + iy \in \mathbb{C}, \\ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 e^{-2\tilde{h}(x)} \rho_{\tilde{h}}(x) d\tilde{h}'(x) dy &< \infty, \end{aligned}$$

то имеет место представление (3), причем выполняются и верхняя и нижняя оценки

$$(\pi e)^{-1} \|g\|^2 \leq \|F\|^2 \leq (\pi e) \|g\|^2.$$

В работе [2] доказана следующая теорема:

Теорема В. Если h — выпуклая функция, $\tilde{h}$ — сопряженная по Юнгу к функции h и $\rho_{\tilde{h}}$ определена как в теореме А, то верны соотношения

$$\frac{1}{4} \frac{e^{2\tilde{h}(x)}}{\rho_{\tilde{h}}(x)} \leq \int_I e^{2xt-2h(t)} dt \leq 4 \frac{e^{2\tilde{h}(x)}}{\rho_{\tilde{h}}(x)}.$$

Для каждой выпуклой на интервале I функции h определим функцию

$$K(x) = \int_I e^{2xt-2h(t)} dt.$$

Возьмем выпуклую на вещественной оси функцию h , удовлетворяющую условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{|t|} = +\infty.$$

Сопряженная по Юнгу функция $\tilde{h}$ тоже будет выпуклой функцией на всей числовой оси. Применяя теоремы А и В для сужений функции $h(t)$ на интервалы $(-N; N)$ и переходя затем к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем следующее утверждение.

Теорема С. Целые функции F , удовлетворяющие условиям

$$|F(x + iy)| \leq C_F \sqrt{K(x)}, \quad x + iy \in \mathbb{C},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x + iy)|^2}{K(x)} d\tilde{h}'(x) dy < \infty,$$

и только такие функции допускают представление вида

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t - 2h(t)} \overline{g}(t) dt$$

с функцией g , удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty.$$

Далее будем рассматривать весовые функции вида $h(t) = a|t|^\alpha$, $a > 0$, $\alpha \in (1; 2]$, и $L_h^2(\mathbb{R})$ — гильбертово пространство локально-интегрируемых функций f на вещественной оси с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-2a|t|^\alpha} dt.$$

Сначала сведем задачу о полноте системы экспонент $(e^{\lambda_k x})$, $k = 1, 2, \dots$, в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ к вопросу о существовании ненулевых целых функций, обращающихся в нуль в точках λ_k , $k = 1, 2, \dots$, с некоторыми ограничениями на рост. Т.к. $h(t) = a|t|^\alpha$, то $h(x) = b|x|^\beta$, $x \in \mathbb{R}$, где

$$b = \frac{\alpha - 1}{\alpha} (a\alpha)^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \quad \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (6)$$

Тогда, используя теорему В, в этом конкретном случае, теорему С можно сформулировать более определенно:

Теорема С'. *Целые функции F , удовлетворяющие условиям*

$$|F(x + iy)| \leq C_F e^{b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad x + iy \in \mathbb{C},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta}{2}-1} dx dy < \infty \quad (7)$$

и только такие функции допускают представление

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t - 2a|t|^\alpha} \bar{g}(t) dt \quad (8)$$

с функцией g , удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 e^{-2a|t|^\alpha} dt < \infty. \quad (9)$$

Теорема Банаха о полноте применительно к гильбертовому пространству $L_h^2(\mathbb{R})$ с весом $h(t) = a|t|^\alpha$, $a > 0$, $\alpha \in (1; 2]$ запишется в следующем виде.

Теорема 1. *Система $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ с весом $h(t) = a|t|^\alpha$, $a > 0$, $\alpha \in (1; 2]$ тогда и только тогда, когда не существует ненулевой целой функции $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, и удовлетворяет условиям (7).*

Получим отдельно необходимое и достаточное условия для полноты системы экспонент в терминах равномерных оценок на целые функции.

Теорема 2. 1. Если система экспонент $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ с весом $h(t) = a|t|^\alpha$, $a > 0$, $\alpha \in (1; 2]$, то существует ненулевая целая функция $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и удовлетворяет условию

$$|F(x + iy)| \leq C_F e^{b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad x + iy \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Параметры b , β определяются по формулам (6).

2. Если существует ненулевая целая функция $F(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и еще в $n = [\beta]$ точках $z_1, \dots, z_n$, (здесь $[\beta]$ — целая часть β) и удовлетворяет оценке (10), то система экспонент $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ ($h(t) = a|t|^\alpha$).

Доказательство. Первое утверждение — непосредственное следствие теоремы С'.

Докажем второе утверждение. Если F — целая функция, о существовании которой говорится во втором утверждении,

$$P(\lambda) = (\lambda - z_1) \dots (\lambda - z_n),$$

то

$$F_1(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{P(\lambda)}$$

— также целая функция. Оценим модуль этой функции для больших по модулю значений λ . Если $M = \max_{k=1, \dots, n} |z_k|$ и $|\lambda| \geq 2M + 1$, то $|\lambda| - |z_k| \geq \frac{1}{2}(|\lambda| + 1)$, поэтому

$$|P(\lambda)| \geq \frac{1}{2^n} (|\lambda| + 1)^n. \quad (11)$$

Поскольку $n = [\beta] > \frac{\beta-2}{4}$, то функция F_1 удовлетворяет первой оценке в соотношении (7). Пользуясь неравенствами ($\lambda = x + iy$)

$$|\lambda| + 1 \geq \frac{(|x| + 1) + (|y| + 1)}{2} \geq \sqrt{(|x| + 1)(|y| + 1)},$$

и из (10), (11) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x + iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta}{2}-1} dx dy \leq C_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\beta-2}}{(|x| + 1)^n (|y| + 1)^n} dx dy.$$

Мы считаем, что $\alpha \leq 2$, значит, $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1} \geq 2$, поэтому $n = [\beta] \geq 2$, $n - \beta + 2 = 2 - \{\beta\} > 1$ (здесь $\{\beta\} = \beta - [\beta]$ — дробная часть β). Следовательно, интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(|y|+1)^n} dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{\beta-2}}{(|x|+1)^n} dx$$

сходятся и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x+iy)|^2 e^{-2b|x|^\beta} |x|^{\frac{\beta}{2}-1} dx dy < \infty.$$

Тем самым, целая функция F_1 обращается в нуль в точках последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и удовлетворяет условиям (7). По теореме С' система экспонент $\{e^{\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ ($h(t) = a|t|^\alpha$).

Теорема 2 доказана.

Условия на целую функцию, требуемые в теореме 2, не радиальные, что уменьшает эффективность применения классических теорем теории целых функций о связи роста целых функций с распределением нулей. В этих теоремах в качестве функций сравнения используются радиальные веса и, в частности, понятия порядка и типа. Переход к радиальным условиям мы обеспечим с помощью результатов работы [5], а именно, следующей теоремы:

Теорема D. Пусть u субгармонична на всей плоскости и имеет конечный порядок роста ρ . Тогда существует целая функция f такая, что для любого $\gamma \geq \rho$

$$|u(z) - \ln |f(z)|| \leq C_\gamma \ln |z|, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad z \notin E_\gamma,$$

причем исключительное множество E_γ может быть покрыто кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j| > R} r_j = o(R^{\rho-\gamma}), \quad R \rightarrow \infty.$$

Заметим, что если $\alpha \in (1; 2]$, $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, $\lambda = x + iy$, то функция

$$u(\lambda) = \frac{b}{\alpha} |\lambda|^\beta - b|x|^\beta$$

субгармонична на всей плоскости.

Применим теорему D к функции u : существует функция f , которая вне некоторого множества $E = E_{2\beta}$ удовлетворяет оценке

$$|u(z) - \ln |f(z)|| \leq C_{2\beta} \ln |z|, \quad |z| \longrightarrow \infty, \quad (13)$$

а множество E покрывается кругами $\{z : |z - z_j| < r_j\}$ так, что

$$\sum_{|z_j| > R} r_j = o(R^{-\beta}), \quad R \longrightarrow \infty. \quad (14)$$

Из оценки (13) видно, что функция f имеет бесконечно много нулей, если $\alpha \neq 2$. Пусть $n = [C] + 1$, $z_1, \dots, z_n$ — нули функции f и

$$P(\lambda) = (\lambda - z_1) \dots (\lambda - z_n).$$

Если $M = \max_{k=1, \dots, n} |z_k|$, то при $|\lambda| \geq 2M + 1$ имеем

$$2^{-n}(|\lambda| + 1)^n \leq |P(\lambda)| \leq M^n(|\lambda| + 1)^n. \quad (15)$$

Для целой функции

$$L(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{P(\lambda)},$$

тем самым, выполняются оценки

$$\begin{aligned} \ln |L(\lambda)| &\geq u(\lambda) - C \ln(|\lambda| + 1), \quad \lambda \notin E, \\ \ln |L(\lambda)| &\leq u(\lambda) + \text{const.}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выберем и зафиксируем одну из целых функций, удовлетворяющую оценкам (16). Множество нулей этой функции обозначим через Λ_0 .

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, k = 1, 2, \dots\}$ — некоторое множество точек плоскости. Систему экспонент $\{e^{\lambda_k \lambda}\}_{k=1}^{\infty}$ будем обозначать через $\text{exр } \Lambda$.

Теорема 3. 1. Если система экспонент $\text{exр } \Lambda$ не полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ с весом $h(t) = a|t|^\alpha$, где $\alpha \in (1; 2]$, $a > 0$, то существует ненулевая целая функция $G(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках $\lambda \in \Lambda \cup \Lambda_0$ и удовлетворяет условию

$$|G(z)| \leq C e^{\frac{b}{\alpha}|z|^\beta} |z|^{\frac{\beta-2}{4}}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (17)$$

Параметры b, β определяются по формулам (6).

2. Если существует ненулевая целая функция $G(\lambda)$, которая обращается в нуль в точках $\lambda \in \Lambda_0 \cup \Lambda$, и еще в двух "дополнительных"

наборах точек $z_1, \dots, z_n$, $n = [\beta]$, $\zeta_1, \dots, \zeta_N$, $N = [\beta] + [C]$ (здесь $[\beta]$ — целая часть β и C — константа в оценке (16)) и также удовлетворяет оценке (17), то система экспонент $\exp \Lambda$ не полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ ($h(t) = a|t|^\alpha$).

Применим классические теоремы о связи типа и порядка целой функции с числовыми характеристиками распределения ее нулей. Через Λ будем обозначать заданную последовательность комплексных чисел, пронумерованную в порядке возрастания модулей, через Λ_0 — множество нулей фиксированной целой функции, удовлетворяющей условиям (16). Через $\tilde{\Lambda}$ обозначим объединение последовательностей Λ и Λ_0 , которая заново перенумерована по возрастанию модулей. Пусть

$$n_\Lambda(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1$$

— считающая функция последовательности Λ и

$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\beta}$$

— верхняя плотность последовательности Λ при порядке β . Несколько утверждений, необходимых для дальнейшей работы со считающей функцией и верхней плотностью, сведем в одну лемму.

Лемма. 1) Если Λ — некоторая последовательность комплексных чисел, $n_\Lambda(t)$ — считающая функция этой последовательности и Δ_Λ — ее верхняя плотность при порядке $\beta > 1$, то

$$\Delta_\Lambda = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\beta}.$$

2) Если целая функция L удовлетворяет условиям (16) с некоторой субгармонической функцией u , множество E покрывается системой кругов с суммируемой последовательностью радиусов, μ — ассоциированная мера субгармонической функции u и $n(t)$ — считающая функция множества нулей функции L , то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{n(t)}{t^\beta} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(t)}{t^\beta},$$

где $\beta > 1$ и $\mu(t)$ — μ — мера круга $\{z : |z| \leq t\}$.

3) Если

$$u(\lambda) = \frac{b}{\alpha} |\lambda|^\beta - b|x|^\beta,$$

то

$$\frac{\mu(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \varphi|^{\beta-2}) d\varphi$$

и

$$\frac{n(t)}{t^\beta} = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \varphi|^{\beta-2}) d\varphi + O\left(\frac{1}{t} + \frac{\ln t}{t^{\beta-1}}\right).$$

Теорема 4. Если верхняя плотность последовательности Λ удовлетворяет условию

$$\Delta_\Lambda > \frac{b}{\alpha-1} \left(e - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \varphi|^{\beta-2}) d\varphi \right),$$

то система экспонент $\exp \Lambda$ полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ с весом $h(t) = a|t|^\alpha$, где $\alpha \in (1; 2]$, $a > 0$.

Теорема 5. Если

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\beta} > \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos \varphi|^{\beta-2} d\varphi,$$

то система $\exp \Lambda$ полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$ с весом $h(t) = a|t|^\alpha$, где $\alpha \in (1; 2]$, $a > 0$.

Доказательство теоремы 5. Проведем доказательство от противного: предположим, что система $\exp \Lambda$ не полна в пространстве $L_h^2(\mathbb{R})$. По п. 1 теоремы 3 в этом случае найдется целая функция G обращающаяся в нуль в точках множества $\Lambda \cup \Lambda_0$ и удовлетворяющая оценке (17), то есть

$$\ln |G(re^{i\varphi})| \leq \frac{b}{\alpha} r^\beta + \frac{\beta-2}{4} \ln r + c, \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C}.$$

Будем считать, что $G(0) \neq 0$. Интегрируя последнее соотношение по φ и применяя формулу Иенсена получим

$$\int_0^r \frac{n_\Lambda(t) + n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt \leq \frac{b}{\alpha} r^\beta + \frac{\beta-2}{4} \ln r + c, \quad r > 0. \quad (19)$$

По п.3 леммы 2 можем вычислить интеграл

$$\int_0^r \frac{n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt = \frac{b}{2\pi(\alpha-1)\beta} r^\beta \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \varphi|^{\beta-2}) d\varphi + O(r^{\beta-1} + r \ln r).$$

Поделив это выражение на r^β и перейдя к пределу при $r \rightarrow \infty$ получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^\beta} \int_0^r \frac{n_{\Lambda_0}(t)}{t} dt = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \varphi|^{\beta-2}) d\varphi.$$

Отсюда и из (19) имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^\beta} \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt &\leq \frac{b}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - |\cos \varphi|^{\beta-2}) d\varphi \right) = \\ &= \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos \varphi|^{\beta-2} d\varphi. \end{aligned}$$

Это неравенство противоречит предположению теоремы.

Теорема 5 доказана.

Замечание. Оценка, приведенная в теореме 5 неулучшаемая в том смысле, что существует система точек Λ для которой

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^\beta} = \frac{b}{2\pi\alpha} \int_0^{2\pi} |\cos \varphi|^{\beta-2} d\varphi,$$

и при этом система $\exp \Lambda$ уже не полна в пространстве $L_2(\mathbb{R}, a|x|^\alpha)$.

Достаточные условия полноты, доказанные в теоремах 4 и 5 не являются необходимыми. Некоторые необходимые условия полноты или, что то же самое, достаточные условия неполноты, можно доказать на основе теоремы Линделефа. Приведем еще две характеристики последовательности нулей ([3], стр. 35). Для последовательности комплексных чисел λ_k , $|\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}|$, $k = 1, 2, \dots$, положим

$$\delta(r) = \frac{1}{2} \sum_{|\lambda_k| \leq r} \frac{1}{\lambda_k^2}, \quad \delta = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |\delta(r)|, \quad \gamma = \max(\Delta, \delta).$$

Теорема 6. Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел. Тогда

1. Если

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|\lambda_k|^2} < \infty, \tag{20}$$

то система экспонент $\exp \Lambda$ не полна в пространствах $L_h^2(\mathbb{R})$ для веса $h(x) = bx^2$ при любом b .

2. Если ряд в (20) расходится и при этом верхняя плотность последовательности при порядке 2 равна нулю, то система экспонент $\exp \Lambda$ не полна в пространствах $L_h^2(\mathbb{R})$ с $h(x) = bx^2$ для любого b .

Доказательство теоремы 6.

1. По теореме Линделефа ([3], стр. 35, Теорема 3.9) в этом случае каноническое произведение

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k}}$$

имеет минимальный тип при порядке 2, поэтому для произвольного многочлена $P(\lambda)$ функция $G(\lambda) = F(\lambda)P(\lambda)$ тоже будет минимального типа и, тем самым, будет удовлетворять условиям п.2 теоремы 3.

2. В условиях п.2 теоремы 6 следует рассмотреть каноническое произведение

$$F(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{i\lambda_k}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_k} + \frac{\lambda}{i\lambda_k}}$$

Множество нулей $\tilde{\Lambda}$ функции F состоит из Λ и $i\Lambda = (i\lambda_k)$, поэтому

$$\delta_{\tilde{\Lambda}}(r) = 0, \quad r > 0.$$

Следовательно, для функции F величина δ равна 0. По п.1 леммы 2 $\Delta_{\tilde{\Lambda}} = 2\Delta_{\Lambda} = 0$, и, тем самым, равна нулю и γ . Снова по теореме Линделефа функция F будет минимального типа. Остается снова воспользоваться п.2 теоремы 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №06-01-00516-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства* // Математ. заметки – Т.48 – вып. 5. – 1990 – С.80-85.
2. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // В сб. "Исследования по теории приближений— Институт математики с ВЦ БНЦ УрО АН СССР – Уфа.1989 – 151 с.
3. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент* // М.: Наука – 1983 – 175 с.
4. Юлмухаметов Р.С., Напалков В.В. *Полнота систем экспонент в пространстве с весом* // ДАН. Т.415 – №4 – 2007 – с. 1-3.

5. Седлецкий А.М. *Классы аналитических функций преобразований Фурье и экспоненциальные преобразования* // М.: Физматлит – 2005 – 504 с.

6. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности* // Уфа – РИЦ БашГУ – 2006 – 171 с.

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ВЕСОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Напалков(мл.)

*Институт механики УНЦ РАН,
vnap@mail.ru*

В работе получено описание сопряженного пространства для класса гильбертовых пространств целых функций.

Пусть H – пространство, состоящее из целых функций g , удовлетворяющих условию:

$$\|g\|_H^2 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 d\mu(z) < \infty,$$

где μ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}$.

Пространство H является гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$(f, g)_H = \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} d\mu(z).$$

Предположим, что для любого $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ функционал

$$\delta_{\lambda_0} f \rightarrow f(\lambda_0), \quad f \in H$$

является линейным и непрерывным функционалом над H . Тогда пространство H обладает воспроизводящим ядром $K_H(z, \xi)$:

$$f(\xi) = (f(\cdot), K_H(\cdot, \xi))_H, \quad \xi \in \mathbb{C},$$

(см., например, [1]). Пусть система функций $\{e^{z\lambda}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в пространстве H . Преобразованием Фурье – Лапласа функционала порождаемого функцией $g \in H$ назовем функцию

$$\widehat{g}(\lambda) = (e^{z\lambda}, g(z))_H = \int_{\mathbb{C}} \overline{g(z)} \cdot e^{z\lambda} d\mu(z).$$

Совокупность функций $\widehat{g}(\lambda)$, $g \in H$ образует гильбертово пространство $\widehat{H}$ со скалярным произведением

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\widehat{H}} \stackrel{\text{def}}{=} (g, f)_H$$

и нормой $\|\widehat{g}\|_{\widehat{H}} = \|g\|_H$. В различных задачах комплексного анализа возникает необходимость описания пространства $\widehat{H}$. Необходимо выделить пространство $\widehat{H}$ интегральными условиями на рост функций $\widehat{g}$. Другими словами, необходимо ввести в классе функций из $\widehat{H}$ норму вида

$$\|\widehat{g}\|_{\nu}^2 = \int_{\mathbb{C}} |\widehat{g}(\lambda)|^2 d\nu(\lambda) \quad (1)$$

(ν – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{C}$) так, чтобы выполнялось условие

$$C_1 \|\widehat{g}\|_{\widehat{H}} \leq \|\widehat{g}\|_{\nu} \leq C_2 \|\widehat{g}\|_{\widehat{H}}, \quad \forall \widehat{g} \in \widehat{H}, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Нормы $\|\cdot\|_{\widehat{H}}$, $\|\cdot\|_{\nu}$ называются эквивалентными нормами в пространстве $\widehat{H}$.

Возникает вопрос: Когда в пространстве $\widehat{H}$ можно ввести эквивалентную норму вида (1)?

В работе [4] изучался аналогичный вопрос для пространства аналитических функций $B_2(D, \mu)$, состоящего из аналитических в единичном круге функций, суммируемых с квадратом модуля по неотрицательной борелевской мере вида: $d\mu(re^{i\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} d\mu'(r)d\varphi$, где $d\mu'(r)$ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$, $\text{supp } \mu' = [0, 1]$. Приведены необходимые и достаточные условия, когда в пространстве $\widehat{B}_2(D, \mu)$ можно ввести эквивалентную интегральную норму, и построен пример такой меры μ^* , что в пространстве $\widehat{B}_2(D, \mu^*)$ не существует эквивалентной нормы вида (1). В работе [5] получено описание пространства $\widehat{H}$ в случае когда $d\mu(z) = e^{-\varphi(|z|)} dv(z)$, где $\varphi(t)$ – выпуклая функция, такая, что $\varphi(t)/t \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, а $dv(z)$ – плоская мера Лебега.

В данной работе мы докажем теорему:

Теорема 1. *Для того, чтобы пространство $\widehat{H}$ имело эквивалентную норму вида*

$$\|\widehat{g}\|_{\nu}^2 = \int_{\mathbb{C}} |\widehat{g}(\lambda)|^2 d\nu(\lambda),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал автоморфизм пространства H , который переводит семейство функций $\{K_H(z, \xi)\}_{\xi \in \mathbb{C}}$ в семейство $\{e^{z\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$.

Доказательство.

Достаточность. Любая функция g из пространства H представляется в виде

$$g(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (g(\tau), K_H(\tau, \xi))_H \cdot K_H(\lambda, \xi) d\mu(\xi).$$

(см. [8]) Согласно [6] это означает, что система $\{K_H(z, \xi)\}_{\xi \in \mathbb{C}}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве H .

Пусть $\mathcal{A}$ – автоморфизм пространства H , переводящий семейство функций $\{K_H(z, \xi)\}_{\xi \in \mathbb{C}}$ в семейство $\{e^{z\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Пусть $\mathcal{A}^*$ – оператор сопряженный к оператору $\mathcal{A}$. Нетрудно показать, что

$$\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}g(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (g(\tau), \mathcal{A}_\tau K_H(\tau, \xi))_H \cdot \mathcal{A}_\lambda K_H(\lambda, \xi) d\mu(\xi).$$

Здесь $\mathcal{A}_\lambda$ означает, что оператор $\mathcal{A}$ действует на функцию от переменной λ .

Поэтому

$$\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}g(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (g(\tau), e^{\tau\delta(\xi)})_H \cdot e^{\lambda\delta(\xi)} d\mu(\xi),$$

где δ – гомеоморфизм комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определенный следующим образом (см. [8]): отображения

$$\begin{aligned} \Xi : \mathbb{C} &\rightarrow H, & \Xi : \xi &\rightarrow K_H(z, \xi), \\ \mathcal{A} : B_2(D, \mu) &\rightarrow B_2(D, \mu), & \Lambda : \mathbb{C} &\rightarrow H, & \Lambda : \lambda &\rightarrow e^{z\lambda} \end{aligned}$$

взаимнооднозначны и непрерывны ([8]);

Тогда $\delta \stackrel{def}{=} \Lambda^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \Xi$. Здесь Λ^{-1} отображение обратное к Λ .

Поэтому

$$\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}g(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (g(\tau), e^{\tau\eta})_H \cdot e^{\lambda\eta} d\mu(\delta^{-1}(\eta)).$$

Последнее представление является необходимым и достаточным условием того, что в пространстве $\widehat{H}$ можно ввести эквивалентную норму вида

$$\|\widehat{g}\|_\rho^2 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{C}} |\widehat{g}(\lambda)|^2 d\mu(\delta^{-1}(\lambda)),$$

(см. [8]).

Необходимость.

Рассмотрим пространство $\overline{H} = \{\overline{f}, f \in H\}$.

Оператор преобразования Фурье – Лапласа

$$F : \overline{f(z)} \rightarrow \widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} e^{z\lambda} d\mu(z)$$

устанавливает изоморфизм между пространствами $\overline{H}$ и $\widehat{H}$. Легко видеть, что

$$F : K_H(\eta, z) \rightarrow e^{\eta\lambda}, \quad \forall \eta \in \mathbb{C}.$$

Пусть P – изометрия между пространствами H и $\overline{H}$ (см., например, [3], стр. 194)

$$P_z : K_H(z, \eta) \rightarrow K_H(\eta, z), \quad \forall \eta \in \mathbb{C},$$

(P_z означает, что оператор P действует по переменной z).

Обозначим $\mathcal{Q} = F \circ P$. Оператор $\mathcal{Q}$ линейный непрерывный оператор действующий из пространства $B_2(D, \mu)$ в пространство $\widehat{B}_2(D, \mu)$.

Рассмотрим отображения

$$\Theta : \mathbb{C} \rightarrow H, \quad \Theta : \eta \rightarrow K_H(z, \eta), \quad \Lambda : \mathbb{C} \rightarrow H, \quad \Lambda : \lambda \rightarrow e^{z\lambda},$$

$$\widehat{\Theta} : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{H}, \quad \widehat{\Theta} : \eta \rightarrow K_{\widehat{H}}(z, \eta), \quad \widehat{\Lambda} : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{H}, \quad \widehat{\Lambda} : \lambda \rightarrow e^{z\lambda}$$

Тогда отображения

$$\begin{aligned} \rho &= \widehat{\Lambda}^{-1} \circ F \circ P \circ \Theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ \sigma &= \widehat{\Theta}^{-1} \circ F \circ P \circ \Lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}. \end{aligned}$$

являются гомеоморфизмами комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (см. [8]).

Лемма 1. *Если в пространстве $\widehat{H}$ можно ввести эквивалентную норму вида (1), то существует самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ – автоморфизм пространства H такой, что для любого элемента $f \in H$ справедливо представление*

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}f(\tau), e^{\tau\delta(\xi)})_H K_H(z, \xi) d\mu(\xi),$$

$$\text{где } \delta(\xi) = \sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)})$$

Доказательство. Если f принадлежит пространству H , то (см. [8]) имеет место представление:

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} (f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H \cdot K_H(z, \xi) d\mu(\xi).$$

Нетрудно показать, что

$$(f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H = (\mathcal{Q}f(\eta), e^{\eta\rho(\xi)})_{\hat{H}}. \quad (2)$$

(см., [8]). Поэтому

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{Q}f(\eta), e^{\eta\rho(\xi)})_{\hat{H}} \cdot K_H(z, \xi) d\mu(z).$$

Введем в классе функций из H скалярное произведение:

$$(f(\tau), e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)})})_1 \stackrel{def}{=} (\mathcal{Q}f(\eta), e^{\eta\rho(\xi)})_{\hat{H}}. \quad (3)$$

Обозначим $\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)}) = \delta(\xi)$. Если $f, g \in H$, то

$$(f, g)_1 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{C}} (f(\tau), e^{\tau\delta(\xi)})_1 \cdot \overline{(g(\tau), e^{\tau\delta(\xi)})_1} d\mu(\xi). \quad (4)$$

Это определение скалярного произведения корректно, так как выполняются все аксиомы, и система функций $\{e^{\tau\delta(\xi)}\}_{\xi \in \mathbb{C}}$ полна в H . (см. [7]). Действительно, пусть ξ_1, ξ_2 произвольные числа из $\mathbb{C}$, тогда

$$\begin{aligned} (e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi_1)})}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi_2)})})_1 &= (K_{\hat{H}}(\eta, \overline{\rho(\xi_1)}), e^{\eta\rho(\xi_2)})_{\hat{H}} = e^{\rho(\xi_1) \cdot \overline{\rho(\xi_2)}} = \\ &= \overline{e^{\rho(\xi_2) \cdot \overline{\rho(\xi_1)}}} = \overline{(K_{\hat{H}}(\eta, \overline{\rho(\xi_2)}), e^{\eta\rho(\xi_1)})_{\hat{H}}} = \overline{(e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi_2)})}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi_1)})})_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Также в силу (2), (3) справедливо равенство

$$(e^{\eta\xi_1}, e^{\eta\xi_2})_1 = \int_{\mathbb{C}} (e^{\eta\xi_1}, e^{\eta\sigma^{-1}(\overline{\rho(\tau)})})_1 \cdot \overline{(e^{\eta\xi_2}, e^{\eta\sigma^{-1}(\overline{\rho(\tau)})})_1} d\mu(\tau), \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

По условию в пространстве $\hat{H}$ можно ввести эквивалентную норму $\|\cdot\|_{\nu}$. Поэтому (см. [8]) справедливо представление:

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{B}f(\tau), e^{\tau\eta})_H \cdot e^{\lambda\eta} d\nu(\eta), \quad \forall f \in H,$$

$\mathcal{B}$ – некоторый самосопряженный оператор, действующий в пространстве H .

В силу ([2], стр. 128, 208) и соотношения (6) имеем

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}f(\eta), e^{\eta\rho(\xi)})_{\hat{H}} &= (f(\lambda), e^{\lambda\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)})})_1 = \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{B}f(\tau), e^{\tau\eta})_H \cdot (e^{\tau\eta}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)})})_1 d\nu(\eta) = \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{B}f(\tau), e^{\tau\eta})_H \cdot \int_{\mathbb{C}} (e^{\tau\eta}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\omega)})})_1 \cdot \overline{(e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)})}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\omega)})})_1} d\mu(\omega) d\nu(\eta) = \\
&= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{B}f(\tau), e^{\tau\eta})_H \cdot (e^{\tau\eta}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\omega)})})_1 d\nu(\eta) \cdot \overline{(e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)})}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\omega)})})_1} d\mu(\omega) = \\
&= \int_{\mathbb{C}} (f(\tau), e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\omega)})})_1 \cdot \overline{(e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\xi)})}, e^{\tau\sigma^{-1}(\overline{\rho(\omega)})})_1} d\mu(\omega). \tag{7}
\end{aligned}$$

Поэтому условия (3) и (4) не противоречат друг другу.

Далее

$$(f, g)_1 = \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{Q}f(\eta), e^{\eta\rho(\xi)})_{\hat{H}} \cdot \overline{(\mathcal{Q}g(\eta), e^{\eta\rho(\xi)})_{\hat{H}}} d\mu(\xi) = (\mathcal{A}f, g)_H, \tag{8}$$

где $\mathcal{A}$ – некоторый самосопряженный оператор, действующий в пространстве H (см. [7], [8]).

Поэтому

$$f(z) = \int_{\mathbb{C}} (\mathcal{A}f(\tau), e^{\tau\delta(\xi)})_H \cdot K_H(z, \xi) d\mu(\xi).$$

Лемма доказана.

Заметим, что из (2), (3), (8) вытекает, что

$$(f(\tau), \mathcal{A}e^{\tau\delta(\xi)})_H = (f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H, \quad \forall f \in H.$$

Поэтому

$$\mathcal{A}_\tau e^{\tau\delta(\xi)} = K_H(\tau, \xi),$$

т.е. образом функции $e^{\tau\delta(\xi)}$ при действии оператора $\mathcal{A}$ является функция $K_H(\tau, \xi)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ – это автоморфизм пространства H , переводящий семейство функций $\{K_H(\tau, \xi)\}_{\xi \in \mathbb{C}}$ в семейство функций $\{e^{\tau\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. В пространстве $\hat{H}$ можно ввести эквивалентную норму вида

$$\|\hat{g}\|_{\delta}^2 \stackrel{def}{=} \int_{\mathbb{C}} |\hat{g}(\lambda)|^2 d\mu(\delta^{-1}(\lambda)).$$

Теорема доказана.

Пример.

Пусть H пространство Фока состоящее из целых функций для которых

$$\|g\|_H^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-|z|^2} dv(z) < \infty,$$

где v — плоская мера Лебега.

Известно, что в этом случае $K_H(z, \xi) = e^{z\bar{\xi}}$. В этом случае тождественный оператор переводит семейство функций $\{K_H(\tau, \xi)\}_{\xi \in \mathbb{C}}$ в семейство функций $\{e^{\tau\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$. В данном случае $\rho(\xi) = \bar{\xi}$, $\sigma(\xi) = \bar{\xi}$, $\delta(\xi) = \bar{\xi}$. По теореме 1 в пространстве $\hat{H}$ можно ввести эквивалентную норму вида

$$\|\hat{g}\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |\hat{g}(\lambda)|^2 e^{-|\delta(\lambda)|^2} dv(\delta(\lambda)) = \int_{\mathbb{C}} |\hat{g}(\lambda)|^2 e^{-|\lambda|^2} dv(\lambda).$$

Таким образом, в данном случае пространства H и $\hat{H}$ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. — 1950. — V. 68. — № 3. — P. 337–404.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Общая теория* // М.: ИЛ — 1962. — 896 С.
3. Канторович Л., В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ* // Москва — Наука — 1984. — 752 С.
4. Напалков В. В. (мл.), Юлмухаметов Р. С. // Матем. сборник. — 1992. — Т. 183. — № 11. — С. 139–144.
5. Напалков В. В. (мл.), Попенов С. В. // Доклады РАН. — 1997. — Т. 354. — № 5. — С. 595–597.
6. Лукашенко Т. П. *О свойствах систем разложения, подобных ортогональным* // Известия РАН, Сер. матем., — 1998. — Т. 62. — № 5. — С. 178–206.
7. Напалков В. В. (мл.) *Различные представления пространства аналитических функций и задача об описании сопряженного пространства* // Доклады РАН. — 2002. — №. 387. — С. 164–167.
8. Напалков В. В. (мл.) *Интегральные преобразования весовых пространств Бергмана* // Доклады РАН. — 2004. — №. 397. — С. 1–3.

О ФУНКЦИЯХ ВОЛНОВЫХ КАТАСТРОФ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРИРУЕМЫМ УРАВНЕНИЯМ

Б. И. Сулейманов

*Институт математики с ВЦ Уф НЦ РАН,
bisul@mail.ru*

Ниже проводится сравнительный анализ двух подходов к использованию симметрий нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных (УЧП), применяемым при исследовании их специальных решений, асимптотики которых при больших значениях аргументов задаются с помощью решений канонических уравнений теории катастроф. Этот анализ на примерах исследования конкретных аналогов специальных функций волновых катастроф (СФВК) [1] (рассматриваются примеры, возникающие из широкого ряда задач математической физики) позволяет уточнить ряд общих положений, касающихся таких "нелинейных" СФВК [2]–[7].

Начнем с основного примера. На конференции САМГОП (Уфа, 1998 г.) А.М.Ильин указал на решение

$$\Gamma(\tau, \xi) = -2 \left[\ln \int_0^\infty \exp(\lambda \xi + \tau \lambda^2 - \lambda^3/3) d\lambda \right]'_\xi, \quad (1)$$

уравнения Бюргерса (на протяжении всей статьи цифра в нижнем индексе всегда будет означать порядок производной по ξ)

$$\Gamma_\tau = \Gamma_2 - \Gamma \Gamma_1, \quad (2)$$

посредством которого для случая модельного уравнения

$$u_t + \varphi(u)u_x = \varepsilon u_{xx} \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (3)$$

описывается процесс, соответствующий переходу слабого разрыва решения предельного к (3) уравнения $u_t + \varphi(u)u_x = 0$ в его сильный разрыв [8]. В этой статье функция (1) рассматривается как представитель аналогов СФВК— решений нелинейных интегрируемых УЧП. Исходя из свойств функции (1), в ней уточняются симметричные свойства таких СФВК.

Далее рассматриваются также СФВК, удовлетворяющих уравнению Кортевега де Вриза (КдВ)

$$v_\tau = -v_3 - vv_1 \quad (4)$$

и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$-iq_\tau = q_2 + 2\delta|q|^2q. \quad (5)$$

Замечание. Существуют различные определения симметрии. В данной статье под симметрией системы УЧП

$$U_\tau = F(U, U_1, \dots, U_k), \quad (U, F \in R^m) \quad (6)$$

понимается система эволюционных уравнений

$$U_\omega = G(\tau, \xi, U, U_1, \dots, U_n), \quad (G \in R^m), \quad (7)$$

правая часть которой удовлетворяет условию коммутирования $\frac{dF}{d\omega} = \frac{dG}{d\tau}$. Общая теория гарантирует, что с (6) совместны, в частности, стационарные части $G = 0$ симметрий (7).

1. СФВК (1) и высшая симметрия уравнения Бюргерса

СФВК (1) соответствует катастрофе складки: главный член $f(\tau, \xi)$ ее асимптотики при $\xi \rightarrow \infty$ есть корень уравнения

$$\xi - \tau f - f^2/4 = 0. \quad (8)$$

Катастрофа складки зависит лишь от одного управляющего параметра, которым в данном случае является переменная $\xi + \tau^2$. Поэтому в приложениях среди СФВК складки, удовлетворяющих интегрируемым УЧП, в основном встречаются их автомодельные решения (с управляющим параметром катастрофы в качестве автомодельной переменной).

Уравнение (2) также обладает автомодельным решением

$$\Gamma(\tau, \xi) = -2\tau + w(\xi + \tau^2), \quad (9)$$

главный член асимптотики которого при $\xi \rightarrow \infty$ есть корень уравнения (8). Действительно, подстановка (9) в уравнение (2) дает обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$(\Gamma_\xi/2 - \Gamma^2/4 + \xi - \tau\Gamma)'_\xi = 0. \quad (10)$$

Это есть стационарная часть *классической* симметрии (2)

$$\Gamma_\nu = (\Gamma_2 - \Gamma\Gamma_1)/2 + 1 - \tau\Gamma_1, \quad (11)$$

образуемая комбинацией стационарных частей его симметрии Галилея $\Gamma_\varsigma = 1 - \tau\Gamma_1$ и его правой части. ОДУ же (10) решение с корнем (8) в качестве главного члена его асимптотики при $\xi \rightarrow \infty$, очевидно, имеет. Но решение (1) *неавтономально*.

Утверждение 1. *СФВК (1) удовлетворяет стационарной части высшей симметрии уравнения (2):*

$$\Gamma_\mu = (\Gamma_2 - 3\Gamma\Gamma_1/2 + \Gamma^3/4)'_\xi - 2\tau(\Gamma_2 - \Gamma\Gamma_1) - \xi\Gamma_1 - \Gamma. \quad (12)$$

Действительно, из (1) следует справедливость ОДУ

$$(\Gamma_2 - 3\Gamma\Gamma_1/2 + \Gamma^3/4) - 2\tau(\Gamma_1 - \Gamma^2/2) - \xi\Gamma = -2. \quad (13)$$

Один раз продифференцированная по ξ форма ОДУ (13) как раз и представляет собой стационарную часть симметрии (12), которая есть сумма стационарных частей классической симметрии растяжения $2\tau\Gamma_\tau + \xi\Gamma_1 + \Gamma = 0$ уравнения (2) и стационарной части его не зависящей от ξ и τ высшей ("обобщенной") симметрии [9]. $(\Gamma_2 - 3\Gamma\Gamma_1/2 + \Gamma^3/4)'_\xi = 0$.

Стоит отметить тот факт, что среди решений ОДУ (13) есть и совместные решения уравнения (2) и ОДУ (10). Однако функция (1) к их числу не принадлежит.

2. Первый вариант выбора симметрий

Справедливость ОДУ (13) соответствует правилам выбора стационарных частей симметрий интегрируемых УЧП, которым, согласно общему предположению из статьи [3], должны удовлетворять СФВК – решения данных УЧП. Эти правила в модификации, позволяющей применять их к решениям уравнения Бюргерса, выглядят так. Следует:

–1). Взять интеграл $((x_1, \dots, x_n)$ -управляющие параметры катастрофы)

$$\int_S \lambda^r \exp(\Phi(\lambda, x_1, \dots, x_n)) d\lambda, \quad (14)$$

удовлетворяющий *линейной части* того интегрируемого УЧП, решением которого является "нелинейная" СФВК. Контур S здесь надо считать таким, что дальнейшие интегрирования по частям не дадут внеинтегральных членов. Функцию же $\Phi(\lambda, x_1, \dots, x_n)$ нужно выбрать так, чтобы уравнение

$\Phi_\lambda(\lambda, x_1, \dots, x_n) = 0$ описывало катастрофу того же типа, к которой относится данная СФВК;

–2). Выписать линейное ОДУ (относительно одной из независимых переменных использовавшегося в пункте 1) линейного УЧП), которому удовлетворяет интеграл (14). Возникающему линейному ОДУ сопоставить стационарную часть такой симметрии исходного интегрируемого УЧП, для которой это линейное ОДУ было бы ее линейной частью;

–3). Остающийся после такого сопоставления произвол устранить, исходя из асимптотики данной "нелинейной" СФВК при $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty$.

Применяя эти правила к решению уравнения (2), соответствующего уравнению складки (8), мы делаем следующее:

– берем интеграл

$$I = \int_S \lambda^r \exp(\xi\lambda + \tau\lambda^2 + c\lambda^3) d\lambda, \quad (15)$$

который удовлетворяет линейной части УЧП (2) $I_\tau = I_2$;

– из (15) выводим ОДУ $3cI_3 = 2\tau I_2 + \xi I_1 + (1+r)I$. Исходя из известных симметрий уравнения (2) [9, с.380], постоянную r полагаем теперь равной нулю, а данному линейному ОДУ третьего порядка сопоставляем ОДУ

$$-3c(4\Gamma_2 - 6\Gamma\Gamma_1 + \Gamma^3)'_\xi/4 + 2\tau(\Gamma_2 - \Gamma\Gamma_1) + \xi\Gamma_1 + \Gamma = 0, \quad (16)$$

образуемое линейной комбинацией стационарной части классической симметрии растяжения уравнения Бюргерса (2) и стационарной части его не зависящей от ξ и τ высшей симметрии (их вид был указан в конце предыдущего раздела);

– для того, чтобы ОДУ (16) обладало асимптотическим решением с главным членом $f(\tau, \xi)$, определяемым из уравнения (8), полагаем $c = -1/3$, как раз и получая в итоге стационарную часть симметрии (12).

Эти правила берут начало от СФВК — решений диспергирующих интегрируемых УЧП, при больших значениях аргументов которых дисперсия доминирует над нелинейностью.

Пример. Решение (5) из [10], обобщающее интеграл Пирси

$$\int_R \exp(-2i(\xi\lambda + 2\tau\lambda^2 + \beta\lambda^4)) d\lambda, \quad (17)$$

удовлетворяет [3] стационарной части симметрии НУШ

$$\beta(q_3 + 6\delta|q|^2q_1) + 2(i\xi q - 2\tau q_1) = 0. \quad (18)$$

Для него линейные части уравнений (5) и (18) (им удовлетворяет интеграл (17)) при $\xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty$ доминируют над нелинейными: последние в основном влияют лишь на сдвиги фаз осциллирующих асимптотик $q(\tau, \xi)$.

Очень интересный пример такой СФВК с доминирующей дисперсией доставляет, по-видимому, и решение НУШ (5) из работы [11], которое при $\delta = 0$ переходит в интеграл

$$\int_{-\infty}^0 \exp(i(\xi\lambda - \tau\lambda^2 + \beta\lambda^3))d\lambda. \quad (19)$$

Предварительная прикидка показывает, что этот дисперсионный аналог СФВК (1) есть также решение ОДУ

$$3\beta(q_3 + 6\delta|q|^2q_1) - 2i\tau(q_2 + 2\delta|q|^2q) - \xi q_1 - q - 4i\pi\delta|d|^2q = 0. \quad (20)$$

Это ОДУ есть комбинация стационарных частей высшей "автономной" симметрии НУШ [3] $q_\omega = 3\beta(q_3 + 6\delta|q|^2q_1)$, его простейшей нетривиальной симметрии $q_\kappa = iq$ и его симметрии растяжения $q_\chi = 2\tau q_\tau + \xi q_1 + q$ (то, что два последних уравнения есть симметрии НУШ, легко проверить, воспользовавшись приведенным в конце введения определением). При $\delta = 0$ ОДУ (20) переходит в линейное ОДУ на интеграл (19), а асимптотика этой СФВК в "однофазовой" области, приведенная в [11], является и асимптотикой одного из решений ОДУ (20). Два этих факта свидетельствуют о большой правдоподобности предположения об удовлетворении данной функцией ОДУ (20). Примечательно, что частные решения ОДУ (20), определяемые из стационарной части

$$3\beta(q_{\xi\xi} + 2\delta|q|^2q) - 2i\tau q_1 - \xi q = 0$$

классической симметрии НУШ (5), здесь вновь не пригодны.

Применимость данных правил к специальным решениям интегрируемых УЧП, для больших аргументов которых нелинейность, наоборот, доминирует над дисперсией (либо — как для СФВК (1) — над диссипацией) была установлена позже.

3. Альтернативный вариант

Это обстоятельство было обнаружено на примере известного решения Гуревича–Питаевского уравнения КдВ (4), асимптотика которого при $\xi \rightarrow \pm\infty$ задается корнем уравнения сборки

$$\xi - \tau v + v^3 = 0. \quad (21)$$

Следование изложенным выше правилам, исходя из решения

$$J = \int_S \lambda \exp(-2i(\xi\lambda - 4\tau\lambda^3 - 3456\lambda^7/35))d\lambda$$

линейной части УЧП (4) $J_\tau + J_3 = 0$ и соответствующего ему ОДУ $J_7 + 5(\xi J_1 - 3\tau v_3 + 2J)/54 = 0$, позволило [4] вывести ОДУ седьмого порядка на эту "нелинейную" СФВК сборки. Это ОДУ есть стационарная часть симметрии уравнения КдВ

$$v_\rho = K_7(v) + 5(\xi v_1 - 3\tau(v_3 + vv_1) + 2v)/54, \quad (22)$$

образуемая комбинацией стационарных частей его симметрии растяжения [9,с.404] $v_\varrho = 3\tau v_\tau + \xi v_1 + 2v$ и симметрии [9,с.402]

$$v_\varsigma = K_7(v) = v_7 + 7(vv_5 + 3v_1v_4 + 5vv_2)/3 + \\ + 35(v_3v^2 + v_1^3 + 4v_2v_1v)/18 + 35v_1v^3/54.$$

Оказалось [4], что данная СФВК удовлетворяет также ОДУ

$$v_4 + 5vv_2/3 + 5v_1^2/6 + 5(v^3 - \tau v + \xi)/18 = 0, \quad (23)$$

задающему частные решения стационарной части симметрии (22). В связи с этим результатом В.Р.Кудашев заметил, что:

– ОДУ (23) возникает при интегрировании стационарной части симметрии уравнения КдВ пятого порядка

$$v_\varrho = (v_4 + 5vv_2/3 + 5v_1^2/6 + 5v^3/18)'_\xi + 5(1 - \tau v_\xi)/18$$

(определяемой его симметрией Галилея $v_\sigma = 1 - \tau v_1$ [9,с.404] и первой из высших "автономных" симметрий [9,с.402]);

– корень кубического уравнения (21), совпадающего с "бездисперсионным" пределом ОДУ (23), одновременно удовлетворяет "бездисперсионному" пределу уравнения КдВ (4)

$$v_\tau + vv_\xi = 0. \quad (24)$$

Обобщая это наблюдение, В.Р.Кудашев предложил в [5] свой вариант правил выбора симметрий интегрируемых УЧП. В применении к решениям уравнений Бюргерса (2) и КдВ (4) с доминирующей при $\xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty$ нелинейностью суть этого варианта сводится к следующему. Главные члены асимптотик таких решений находятся из уравнений соответствующих катастроф, которые предполагаются сведенными к виду

$$\xi - \tau w = G(w). \quad (25)$$

Решения (25) удовлетворяют уравнению Хопфа (24), являющегося "бездиссипативным" ("бездисперсионным") пределом уравнения Бюргерса (КдВ). Логично и стационарные части симметрий УЧП (2) (УЧП (4)), которым одновременно удовлетворяют такие СФВК, искать, полагая, что их "бездиссипативные" ("бездисперсионные") пределы имеют вид $1 - \tau w_1 + G'(w)w_1 = 0$. То есть, считать, что эти СФВК удовлетворяют суммам

$$1 - \tau w_1 + K(w, w_1, w_2, \dots, w_n) = 0 \quad (26)$$

стационарных частей симметрии Галилея УЧП (2) (УЧП 4) и их "автономных" симметрий $w_\vartheta = K(w, w_1, w_2, \dots, w_n)$, определяемых условиями $K(w, w_1, 0, \dots, 0) = G'(w)w_1$. (По крайней мере для всех многочленов $G(w)$ такие симметрии есть [9].)

Этот подход для ситуаций, когда в асимптотиках СФВК нелинейность доминирует над дисперсией (диссипацией), представляется более естественным, чем изложенный выше в пунктах 1)-3). В пользу такой точки зрения говорят, например, результаты статьи [6]: использование в ней подхода В.Р.Кудашева позволило описать СФВК сборки, являющуюся – также как и СФВК из [10] – совместным решением НУШ (5) и ОДУ (18), но для которой при $\xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty$ доминирует нелинейность.

Однако среди решений уравнения Бюргерса (2) с асимптотиками, определяемыми из (8), сформулированные в [5] правила выделяют лишь автомодельные решения этого уравнения. К СФВК (1) они, очевидно, неприменимы.

Тем не менее, лежащая в основе подхода В.Р.Кудашева идея является, несомненно, здоровой. Надо лишь отказаться от требования непременно вхождения в правую часть отбираемой симметрии правой части симметрии Галилея. Нужные же симметрии просто искать так, чтобы отбрасывание в их стационарных частях слагаемых с высшими производными давало уравнения, которым приближенно удовлетворяют главные члены асимптотик соответствующих СФВК.

В этой смягченной формулировке "бездиссипативный" вариант отбора симметрий решениям уравнения (2) с асимптотиками, определяемым из (8), наряду с классической симметрией (11) сопоставляет и симметрию (12): корень уравнения (8) есть главный член асимптотики при $\xi^2 + \tau^2 \rightarrow \infty$ решений "бездиссипативного" предела $\Gamma^3/4 + \tau(\Gamma^2) - \xi\Gamma = -2$ ОДУ (13), а "бездиссипативному" пределу $3\Gamma^2\Gamma_1/4 + 2\tau\Gamma\Gamma_1 - \xi\Gamma_1 - \Gamma = 0$, стационарной части симметрии (12) он удовлетворяет точно.

Аналогичным образом решениям уравнения КдВ, чьи главные члены асимптотик задаются корнями уравнения сборки (21), смягченный вариант В.Р.Кудашева сопоставляет не только ОДУ (23), но и стационарную часть симметрии (22). Ясно, что и для других СФВК, являющихся решениями уравнений (2) и (4) им наряду с стационарными частями симметрий (26) можно сопоставлять и ОДУ $L(1 - \tau w_1 + K(w, w_1, w_2, \dots, w_n)) = 0$. Здесь L есть *операторы рекурсии* [9]

$$L_B = 2D_\xi - \Gamma - \Gamma_1 D_\xi^{-1}, \quad L_{KdV} = 3D_\xi^2 + 2v + v_1 D_\xi^{-1},$$

которые обладают тем свойством, что правые части одних симметрий уравнений Бюргерса (КдВ) переводят в правые части их других симметрий.

4. Заключение

Вообще, из проведенных выше рассуждений становится ясно, что множеству специальных функций той или иной катастрофы, удовлетворяющих интегрируемому УЧП, соответствует не только стационарная часть $K(x_1, \dots, x_n, W) = 0$ его какой-то конкретной симметрии. Данному множеству надо сопоставлять совместные решения данного УЧП и ОДУ

$L^m K(x_1, x_2, \dots, x_n, W) = 0$, определяемых всеми степенями оператора рекурсии L для этого УЧП. (Для известных интегрируемых УЧП операторы рекурсии выписаны. В частности, для НУШ (5) вид L указан в [11].) Только что сказанное касается обоих вариантов выбора симметрий. В самом деле, понятно, что наряду с каким-то конкретным линейным ОДУ его решения удовлетворяет продифференцированным и интегральным следствиям данного ОДУ. И если говорить о множестве специальных решений интегрируемого УЧП, отвечающих данной катастрофе, то в пункте 2) описанных в разделе 2 правил надо иметь ввиду и все стационарные части симметрий, являющиеся "нелинейными" обобщениями этих следствий.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00134-а, 09-01-092346э) и программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-2215.2008.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Федорюк М. В. *Асимптотика, интегралы и ряды* М.: Наука, 1987. – 544 с.
2. Китаев А. В. *Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве* // Записки ЛОМИ. – 1991. – Т. 187. – С. 53–75.
3. Сулейманов Б. И., Хабибуллин И. Т. *Симметрии уравнения Кадомце-ва-Петвиашвили, изомонодромные деформации и "нелинейные" обобщения специальных функций волновых катастроф* // ТМФ. – 1993. – Т. 97. – № 2. – С. 213–226.
4. Сулейманов Б. И. *Возникновение бездиссипативных ударных волн и "непертурбативная" квантовая теория гравитации* // ЖЭТФ. – 1994. – Т. 105. – Вып. 5 – С. 1089–1097.
5. Кудашев В. Р. *KdV shock-like waves as invariant solutions of KdV equation symmetries* // Интегрируемость в динамических системах. – Уфа: Ин-т математики с ВЦ, 1994. – С. 70–79.
6. Сулейманов Б. И., Кудашев В. Р. *Особенности некоторых типичных процессов самопроизвольного падения интенсивности в неустойчивых средах* // Письма в ЖЭТФ. – 1995. – Т. 62. – Вып. 4. – С. 353–363.
7. Сулейманов Б. И., Кудашев В. Р. *Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн* // ПММ. – 2001. – Т. 65. – Вып. 3. – С. 456–466.
8. Zaharov S. V., Il'in A. M. *On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities* // Func. differential eq. – 2001. – V. 8. – № 3,4. – P. 257–271.
9. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* М.: Мир, 1989. – 700 с.
10. Haberman R., Sun Ren-ji *Nonlinear cusped caustics for dispersive waves* // Stud.appl.Math. – 1985. – V. 72. – P. 1-37.
11. Haberman R., Sun Ren-ji *Focusing at a penumbral caustic* // Proceedings of the Fifth International conference on Boundary and Interior Layers – Shanghai: 1988. – P. 339–344.
12. Жибер А., В. *Полное описание алгебры Ли-Беклунда для уравнения генерации второй гармоники* // Динамика сплошной среды. – 1980. – Т. 44. – С. 3-14.

НЕСКОЛЬКО СВОЙСТВ ПРАВИЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Таров

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
v.a.tarov@mail.ru*

В работе рассматриваются свойства правильно дифференцируемых функций, которые составляют подкласс правильно меняющихся функций.

Через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$ будем соответственно обозначать множества натуральных и целых неотрицательных чисел.

Полагаем, что при $k \in (0, 1)$ $k^{-\infty} = +\infty$, $k^{+\infty} = 0$; при $k \in (1, +\infty)$ $k^{-\infty} = 0$, $k^{+\infty} = +\infty$; $1^{-\infty} = 1^{+\infty} = 1$.

Определение 1 (ср. [1]). Измеримая положительная в окрестности $+\infty$ функция h называется правильно меняющейся порядка ρ , $h \in R_\rho$, где $\rho \in [-\infty, +\infty]$, если для любого $k > 0$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(kr)}{h(r)} = k^\rho. \quad (1)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Будем считать, что $\rho - n = +\infty$, если $\rho = +\infty$, и $\rho - n = -\infty$, если $\rho = -\infty$.

Определение 2. Положительная бесконечно дифференцируемая в окрестности $+\infty$ функция h называется правильно дифференцируемой функцией порядка ρ , $h \in DR_\rho$, где $\rho \in [-\infty, +\infty]$, если $h \in R_\rho$ и $|h^{(n)}| \in R_{\rho-n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Множество всех правильно дифференцируемых функций обозначим через DR .

Для доказательства теоремы 1 потребуются следующие четыре утверждения.

Утверждение 1. Если $h \in DR_{+\infty}$, то $h^{(n)} \in DR_{+\infty} \forall n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из определений 1 и 2 вытекает, что функция $|h'|$ непрерывна и положительна на некотором луче $(a, +\infty)$. Следовательно, на этом луче h' имеет постоянный знак. Предположим, что $h' < 0$ на $(a, +\infty)$. Пусть $k > 1$. Тогда $(h(kr)/h(r)) < 1 \forall r \in (a, +\infty)$, что противоречит (1) при $\rho = +\infty$. Значит, $h' > 0$ на $(a, +\infty)$ и $h' \in R_{+\infty}$. Применяя метод математической индукции, сразу же получим $h^{(n)} \in R_{+\infty} \forall n \in \mathbb{N}$, откуда и следует рассматриваемое утверждение. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Если $h \in DR_{-\infty}$, то $(-1)^n h^{(n)} \in DR_{-\infty} \forall n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Функция h' имеет (см. доказательство утверждения 1) постоянный знак на некотором луче $(a, +\infty)$. Предположим, что $h' > 0$ на $(a, +\infty)$. Если $k > 1$, то $(h(kr)/h(r)) > 1 \forall r \in (a, +\infty)$, что противоречит (1) при $\rho = -\infty$. Таким образом, $h' < 0$ на $(a, +\infty)$ и $(-h') \in R_{-\infty}$. Аналогично доказывается, что если $m \in \mathbb{N}$ и $(-1)^m h^{(m)} \in R_{-\infty}$, то $(-1)^{m+1} h^{(m+1)} \in R_{-\infty}$. Вследствие принципа математической индукции $(-1)^n h^{(n)} \in R_{-\infty} \forall n \in \mathbb{N}$, откуда и вытекает рассматриваемое утверждение. Утверждение доказано.

Из определения 1 следует

Утверждение 3. Измеримая положительная в окрестности $+\infty$ функция h принадлежит R_ρ тогда и только тогда, когда (1) выполняется для любого $k > 1$.

Утверждение 4. Если для положительной непрерывно дифференцируемой в окрестности $+\infty$ функции h выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{rh'(r)}{h(r)} = \rho, \quad (2)$$

где $\rho \in [-\infty, +\infty]$, то $h \in R_\rho$.

Доказательство. В случае $\rho \in \mathbb{R}$ утверждение является следствием леммы 2.1 [1].

Пусть $\rho = +\infty$. Если $k \in (1, +\infty)$, то для достаточно больших значений r выполняется

$$\ln \frac{h(kr)}{h(r)} = \int_r^{kr} \frac{th'(t)}{h(t)} \frac{1}{t} dt \geq \ln k \min_{t \in [r, kr]} \frac{th'(t)}{h(t)},$$

откуда ввиду (2) при $\rho = +\infty$ вытекает $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(kr)/h(r) = +\infty$. В силу утверждения 3 $h \in R_{+\infty}$.

Если $\rho = -\infty$ и $k \in (1, +\infty)$, то в некоторой окрестности $+\infty$ имеет место

$$\ln \frac{h(kr)}{h(r)} \leq \ln k \max_{t \in [r, kr]} \frac{th'(t)}{h(t)}.$$

Из последнего неравенства, учитывая (2) при $\rho = -\infty$, получаем $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(kr)/h(r) = 0$. По утверждению 3 $h \in R_{-\infty}$. Утверждение доказано.

Теорема 1. Пусть функция h положительна и бесконечно дифференцируема на луче $(a_0, +\infty)$, причём для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое $a_n \geq a_0$, что $h^{(n)}(r) \neq 0$ при $r > a_n$. Тогда $h \in DR_\rho$, где $\rho \in [-\infty, +\infty]$, в том и только в том случае, когда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{rh^{(n+1)}(r)}{h^{(n)}(r)} = \rho - n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $h \in DR_\rho$. Если $\rho \in \mathbb{R}$, то из определения 2 и равенства (1) следует, что $\forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall k > 0$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(kr)^{n-\rho} h^{(n)}(kr)}{r^{n-\rho} h^{(n)}(r)} = 1. \quad (4)$$

Значит, $r^{-\rho} h(r) \in R_0$ и $|r^{n-\rho} h^{(n)}(r)| \in R_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

В силу теоремы о равномерной сходимости [1, теорема 1.1] для любого фиксированного отрезка $[b, c]$, $0 < b < c < +\infty$, соотношение (4) выполняется равномерно относительно $k \in [b, c]$. Учитывая это, для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ при условии, что $n \neq \rho$, $k > 1$ и $r > a_n$, находим

$$\begin{aligned} \frac{h^{(n)}(kr)}{h^{(n)}(r)} &= 1 + \frac{1}{h^{(n)}(r)} \int_r^{kr} \frac{h^{(n+1)}(t) t^{n+1-\rho}}{t^{n+1-\rho}} dt \\ &= 1 + \frac{r^{n+1-\rho} h^{(n+1)}(r)}{(\rho - n) h^{(n)}(r)} \left(\frac{k^{\rho-n}}{r^{n-\rho}} - \frac{1}{r^{n-\rho}} \right) (1 + o(1)) \\ &= 1 + \frac{r h^{(n+1)}(r)}{(\rho - n) h^{(n)}(r)} (k^{\rho-n} - 1) (1 + o(1)) \quad \text{при } r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично, если $\rho \in \mathbb{Z}_+$, то при $n = \rho$, $k > 1$ и $r > a_n$ получаем

$$\frac{h^{(n)}(kr)}{h^{(n)}(r)} = 1 + \frac{1}{h^{(n)}(r)} \int_r^{kr} \frac{h^{(n+1)}(t) t}{t} dt$$

$$= 1 + \frac{rh^{(n+1)}(r)}{h^{(n)}(r)} \ln k(1 + o(1)) \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Из (5) и (6) ввиду определения 2 и соотношения (1) вытекает (3).

Рассмотрим случай $\rho = +\infty$. Пусть $k \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_{nk} > \max(a_n, a_{n+2}/k)$. Из утверждения 1 и условия теоремы следует, что $h^{(n+1)}$ возрастает на $(ka_{nk}, +\infty)$ и

$$h^{(n)}(r) > 0 \quad \forall r > a_{nk}. \quad (7)$$

Находим

$$\begin{aligned} h^{(n)}(r) - h^{(n)}(kr) &= \int_{kr}^r h^{(n+1)}(t) dt < (1 - k)rh^{(n+1)}(r) \quad \forall r > a_{nk}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) в силу (7) и $h^{(n)} \in R_{+\infty}$ (что вытекает из утверждения 1) получаем $\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} rh^{(n+1)}(r)/h^{(n)}(r) \geq 1/(1 - k)$, откуда ввиду $\lim_{k \rightarrow 1-0} 1/(1 - k) = +\infty$ следует $\lim_{r \rightarrow +\infty} rh^{(n+1)}(r)/h^{(n)}(r) = +\infty$.

Рассмотрим теперь случай $\rho = -\infty$. Пусть $k \in (1, +\infty)$, $a_{nk} > \max(a_n, a_{n+2})$. Если $n = 2m$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, то из утверждения 2 и условия теоремы следует, что $h^{(n+1)}$ возрастает на $(a_{nk}, +\infty)$ и выполняется (7). Имеем

$$h^{(n)}(kr) - h^{(n)}(r) = \int_r^{kr} h^{(n+1)}(t) dt > (k - 1)rh^{(n+1)}(r) \quad \forall r > a_{nk},$$

откуда в силу (7) и $h^{(n)} \in R_{-\infty}$ (вследствие утверждения 2) вытекает

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{rh^{(n+1)}(r)}{h^{(n)}(r)} \leq -\frac{1}{k - 1}. \quad (9)$$

Если $n = 2m + 1$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, то из утверждения 2 и условия теоремы следует, что $h^{(n+1)}$ убывает на $(a_{nk}, +\infty)$ и выполняется

$$h^{(n)}(r) < 0 \quad \forall r > a_{nk}. \quad (10)$$

Находим

$$h^{(n)}(kr) - h^{(n)}(r) = \int_r^{kr} h^{(n+1)}(t) dt < (k - 1)rh^{(n+1)}(r) \quad \forall r > a_{nk},$$

откуда ввиду (10) и $(-h^{(n)}) \in R_{-\infty}$ (вследствие утверждения 2) вытекает (9).

Из (9) в силу $\lim_{k \rightarrow 1+0} -1/(k-1) = -\infty$ получаем $\lim_{r \rightarrow +\infty} rh^{(n+1)}(r)/h^{(n)}(r) = -\infty$. Необходимость доказана.

Достаточность выполняется вследствие утверждения 4. Теорема доказана.

В следующем утверждении сформулируем ещё три свойства правильно дифференцируемых функций.

Утверждение 5. Пусть $h \in DR_\rho$, где $\rho \in [-\infty, +\infty]$. Тогда

- 1) $|h^{(n)}| \in DR_{\rho-n} \forall n \in \mathbb{N}$;
- 2) если $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\rho - n > 0$, то в некоторой окрестности $+\infty$ $h^{(n+1)} > 0$;
- 3) если $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\rho - n < 0$, то в некоторой окрестности $+\infty$ $\text{sgn}(h^{(n+1)}) = -\text{sgn}(h^{(n)})$.

Доказательство. П. 1 вытекает непосредственно из определения 2.

Пп. 2 и 3 следуют из теоремы 1. Утверждение доказано.

Приведём известное (см. [2]) обобщение правила Лопиталья.

Утверждение 6. Пусть f и g — вещественнозначные дифференцируемые на луче $(a, +\infty)$ функции, которые удовлетворяют одному из следующих двух наборов условий:

- 1) $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = +\infty$, $g'(r) \neq 0$ при $r > a$;
- 2) $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} g(r) = 0$, $g(r) \neq 0$ и $g'(r) \neq 0$ при $r > a$.

Тогда выполняется следующая цепочка неравенств

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f'(r)}{g'(r)} \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{g(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{g(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{f'(r)}{g'(r)}.$$

Следствием утверждения 6 является

Утверждение 7. Пусть вещественнозначная функция h бесконечно дифференцируема на луче $(a, +\infty)$, для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ найдётся такое $a_n \geq a$, что $h^{(n)}(r) \neq 0$ при $r > a_n$, и существует предел $\lim_{r \rightarrow +\infty} h^{(n)}(r) = d_n$, $d_n \in [-\infty, +\infty]$, причём если $d_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $|h^{(n)}(r) - d_n| \in R_0$. Тогда для любого $k > 0$ имеет место бесконечная цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \dots &\leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(h(kr))^{(n)}}{(h(r))^{(n)}} \leq \dots \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(h(kr))'}{(h(r))'} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(kr)}{h(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(kr)}{h(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{(h(kr))'}{(h(r))'} \leq \dots \end{aligned}$$

$$\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{(h(kr))^{(n)}}{(h(r))^{(n)}} \leq \dots \quad (11)$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть h — вещественнозначная бесконечно дифференцируемая на луче $(a, +\infty)$ функция, причём для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ найдётся такое $a_n \geq a$, что $h^{(n)}(r) \neq 0$ при $r > a_n$. Тогда для любого $k > 0$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(kr)}{h(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(h(kr))^{(n)}}{(h(r))^{(n)}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

в том и только в том случае, когда $|h(r)| \in DR$.

Доказательство. Будем считать, что $h(r) > 0$ при $r > a_0$. К этому случаю сводится и случай $h(r) < 0$ при $r > a_0$, если рассмотреть функцию $(-h(r))$.

Необходимость. По условию теоремы $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(kr)/h(r) = \varphi(k)$, где $\varphi(k)$ — функция, определённая на $(0, +\infty)$. Пусть $0 < \varphi(k) < +\infty \quad \forall k > 0$. Так как h измерима и положительна на $(a_0, +\infty)$, то вследствие теоремы 1.3 [1] $\varphi(k)$ имеет вид k^ρ , где $\rho \in \mathbb{R}$, т. е. $h \in R_\rho$. Теперь из (12) следует $|h^{(n)}| \in R_{\rho-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. По определению 2 $h \in DR_\rho$.

Пусть для некоторого числа $k_1 > 1$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(k_1 r)}{h(r)} = +\infty. \quad (13)$$

Так как по условию теоремы $h'(r) \neq 0$ на $(a_1, +\infty)$, то (см. доказательство утверждения 1) h возрастает на $(a_1, +\infty)$. Поэтому ввиду (13) имеем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(kr)}{h(r)} = +\infty \quad \forall k \geq k_1. \quad (14)$$

Возьмём $k_2 \in (1, k_1)$. Предположим, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(k_2 r)}{h(r)} = c < +\infty. \quad (15)$$

Пусть $m = [\ln k_1 / \ln k_2] + 1$. Используя (15), находим

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(k_2^m r)}{h(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{h(k_2^{j+1} r)}{h(k_2^j r)} = c^m < +\infty,$$

что противоречит (14), так как $k_2^m > k_1$.

Таким образом, $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(kr)/h(r) = +\infty \forall k > 1$. В силу утверждения 3 $h \in R_{+\infty}$. Тогда из (12) следует $|h^{(n)}(r)| \in R_{+\infty} \forall n \in \mathbb{N}$. По определению 2 $h \in DR_{+\infty}$.

Если $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(k_3 r)/h(r) = 0$ для некоторого числа $k_3 \in (1, +\infty)$, то проведя доказательство аналогично доказательству для случая (13), получим $h \in DR_{-\infty}$. Необходимость доказана.

Достаточность следует непосредственно из определения 2 и условия теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает очевидное

Утверждение 8. *Если функция h удовлетворяет условию утверждения 7, то бесконечная цепочка нестрогих неравенств (11) является цепочкой равенств тогда и только тогда, когда $|h| \in DR$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта №08-01-00779-а) и гранта Президента РФ №НШ-3081.2008.1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции*. М.: Наука, 1985. – 144 с.
2. Lee C. M. *Generalization of L'Hôpital's rule* // Proc. Am. Math. Soc. – 1977. – V. 66. – № 2. – P. 315–320.

ДВИЖЕНИЕ ГАЗА БЕЗ РАСХОЖДЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

С. В. Хабиров

*Институт механики УНЦ РАН,
habirov@anrb.ru*

Решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей рассмотрены в [1, 2] в случае политропного газа. Найдены некоторые интегралы возникающей лагранжевой системы. Полного набора интегралов не найдено. Для уравнений несжимаемой жидкости решение с линейным полем скоростей удовлетворяют переопределенной системе [3]. Найдены некоторые необходимые условия интегрируемости. Достаточных условий не установлено. Решение задач проводилось в лагранжевых переменных. Мы рассматриваем систему уравнений, описывающую движения сжимаемой жидкости без расхождений. В этом случае в любом выделенном объеме сколько жидкости втекает столько же и вытекает. Решение с линейным полем скоростей определяются переопределенной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Поскольку в лагранжевых переменных полной классификации решений нет, то мы проводим классификацию подмоделей в эйлеровых переменных. Это может помочь в решении проблемы совместности.

1°. Движение газа без расхождения описывается уравнениями

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \rho_t + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad p_t + \vec{u} \cdot \nabla p = 0,$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho^{-1} \nabla p = 0$$

и возможно для любого уравнения состояния, из которого определяется энтропия. Для решений с линейным полем скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t),$$

где $A = (a_{ij}(t))$ — матрица, получим следующие равенства

$$\operatorname{tr} A = 0, \quad B = A' + A^2, \quad \vec{a} = \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}\nabla p &= -\rho(B\vec{x} + \vec{a}), \quad p_t = \rho(A\vec{x} + \vec{u}_0) \cdot (B\vec{x} + \vec{a}), \\ \rho_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0) \cdot \nabla \rho &= 0.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Обозначим x — столбик из координат вектора $\vec{x}$, тогда x^T — строка. Совместность для функции p дает матричные равенства

$$\nabla \rho (Bx + a)^T + \rho B^T = (Bx + a) \nabla \rho^T + \rho B, \quad (1.3)$$

$$B' + A^T B + BA = 0, \quad a' + A^T a + Bu_0 = 0. \quad (1.4)$$

Представим матрицу B в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц: $B = S + \Omega$, $S^T = S$, $\Omega^T = -\Omega$, $Bx = Sx + \omega \times x$,

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Равенство (1.3) равносильно векторному уравнению

$$\begin{aligned}\nabla \rho \times (S\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{a}) &= -2\rho \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} \cdot \nabla \rho = 0, \\ \nabla \rho \times (S\vec{x} + \vec{a}) + \vec{\omega}(\vec{x} \cdot \nabla \rho + 2\rho) &= 0.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Если $\omega = 0$, то общее решение таково $\rho = \rho(t, J)$, $J = 2^{-1}x^T Sx + x^T a$. Из (1.2) следует

$$\rho = P'(I), \quad I = J - \int \vec{a} \cdot \vec{u}_0 dt, \quad p = P_0 - P(I),$$

где $P(I)$ — произвольная функция, P_0 — постоянная.

Получим подмодель 1 из равенств (1.1), (1.4).

2°. Пусть $\omega \neq 0$, например $\omega^1 \neq 0$. Векторно умножим (1.5) на ω , получим

$$\nabla \rho \vec{\omega} \cdot (S\vec{x} + \vec{a}) = 0 \Rightarrow S\vec{\omega} = 0, \quad \vec{\omega} \cdot \vec{a} = 0. \quad (2.1)$$

Равенства (2.1) есть условия совместности переопределенной системы (1.5) для $\rho \neq 0$.

Уравнение $\vec{\omega} \cdot \nabla \rho = 0$ имеет общее решение

$$\rho = \rho(t, \alpha, \beta), \quad \alpha = x^2 - \frac{\omega^2}{\omega^1} x^1, \quad \beta = x^3 - \frac{\omega^3}{\omega^1} x^1.$$

Система (1.5) равносильна уравнению

$$\rho_\alpha \left(a^3 + (s_{23} + \omega^1) \alpha + s_{33} \beta \right) -$$

$$-\rho_\beta \left(a^2 + s_{22}\alpha + (s_{23} - \omega^1)\beta \right) = -2\omega^1\rho.$$

Существуют такие функции $m(t, \alpha, \beta)$, $J(t, \alpha, \beta)$, что $\rho = mR(t, J)$ — есть общее решение с произвольной функцией R . Функции m , J определены с точностью до множителя, зависящего от t , и являются частными решениями однородного и неоднородного уравнений соответственно.

При условии

$$s_{23}^2 \neq (\omega^1)^2 + s_{22}s_{33}, \quad (2.2)$$

делаем замену переменных

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_0, \quad \beta = \beta_1 + \beta_0, \quad I = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad (2.3)$$

где $\alpha_0 = \frac{a^2 s_{33} - a^3(s_{23} - \omega^1)}{s_{23}^2 - (\omega^1)^2 - s_{22}s_{33}}$, $\beta_0 = \frac{a^3 s_{22} - a^2(s_{23} + \omega^1)}{s_{23}^2 - (\omega^1)^2 - s_{22}s_{33}}$. Решение задачи задается формулами

$$J = \alpha_1 K, \quad K = |P_2|^{1/2} e^{\omega^1 \int P_2^{-1} dI}, \quad m = e^{JL},$$

$$P_2(t, I) = s_{33}I^2 + 2s_{23}I + s_{22}, \quad L = 2\omega^1 \int K^{-1} P_2^{-1} dI. \quad (2.4)$$

Справедливы тождества

$$LK = c_1(t)I - c(t), \quad (2.5)$$

где $c_1 = \frac{-2\omega^1 s_{33}}{s_{23}^2 - (\omega^1)^2 - s_{22}s_{33}}$, $c = \frac{2\omega^1(s_{23} - \omega^1)}{s_{23}^2 - (\omega^1)^2 - s_{22}s_{33}}$, $K_I = KP_2^{-1}(s_{33}I + \omega^1 + s_{23})$, $K - IK_I = KP_2^{-1}(s_{22} + (s_{23} - \omega^1)I)$.

Уравнение (1.2) в переменных t , α , β , x^1 принимает вид

$$0 = \frac{R_t}{R} + \frac{R_J}{R} \left[J_t - x^1 J_{\alpha^i} \left(\frac{\omega^i}{\omega^1} \right)' \right] + \frac{m_t}{m} - x^1 \frac{m_{\alpha^i}}{m} \left(\frac{\omega^i}{\omega^1} \right)' -$$

$$\left(\frac{R_J}{R} J_{\alpha^i} + \frac{m_{\alpha^i}}{m} \right) \left\| \frac{\omega^i}{\omega^1}, i - 3, 2 - i \right\| \left(A \left\| \begin{matrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\| + \frac{x^1}{\omega^1} A\omega + u_0 \right)$$

где $\alpha^2 = \alpha$, $\alpha^3 = \beta$, суммирование по $i = 2, 3$.

Переменная x^1 — свободная и входит линейно. Приравнявая нулю коэффициент при x^1 , получим

$$\frac{KR_J}{P_2 R} \left[(s_{22} + (s_{23} - \omega^1)I) \Lambda_2 + (\omega^1 + s_{23} + s_{33}I) \Lambda_3 \right] =$$

$$= c\Lambda_2 - c_1\Lambda_3, \quad \Lambda_2 = \left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)' - \frac{1}{(\omega^1)^2} \|\omega^2, \omega^1, 0\| A\omega,$$

$$\Lambda_3 = \left(\frac{\omega^3}{\omega^1}\right)' - \frac{1}{(\omega^1)^2} \|\omega^3, 0, \omega^1\| A\omega.$$

Здесь I, J — независимые переменные, t — параметр. Если $\Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 \neq 0$, то $R_J R^{-1} = \lambda(t)$ и расщепление по I дает $s_{23}^2 = (\omega^1)^2 + s_{22}s_{33}$, что противоречит условию (2.2). Значит, $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0 \Rightarrow$

$$\omega' - A\omega = \gamma(t)\omega. \quad (2.7)$$

Равенство (2.6) принимает вид

$$\frac{R_t}{R} + \frac{R_J}{R} (k(t, I)J + n(t, I)) = l(t, I)J + j(t), \quad (2.8)$$

где t, I, J — независимые переменные,

$$k = P_2^{-1}((s_{22} + I(s_{23} - \omega^1))\bar{e}_{22} + (s_{23} + \omega^1 + Is_{33})\bar{e}_{32}) +$$

$$+ \omega^{1'} \int P_2^{-1} dI + 2^{-1} P_2^{-1} P_{2t} - \omega^1 \int P_2^{-1} P_{2t} dI,$$

$$n = K \left[-\alpha'_0 + (\bar{e}_{03} + \alpha'_0 I - \beta'_0) P_2^{-1} (\omega^1 + s_{33} + Is_{33}) + \right.$$

$$\left. + P_2^{-1} (s_{22} + I(s_{23} - \omega^1)) \bar{e}_{02} \right],$$

$$l = K^{-1} (c' - Ic_1' + c\bar{e}_{22} - c_1\bar{e}_{32}),$$

$$j = c(\bar{e}_{02} - \alpha'_0) - c_1(\bar{e}_{03} - \beta'_0),$$

$$\bar{e}_{i2} = e_{i2} + Ie_{i3}, \quad \bar{e}_{0i} = e_{0i} + \alpha_0 e_{i2} + \beta_0 e_{i3}$$

$$e_{ij} = a_{ij} - \frac{\omega^i}{\omega^1} a_{1j}, \quad e_{0i} = u_0^i - \frac{\omega^i}{\omega^1} u_0^1, \quad i, j = 2, 3.$$

Лемма. Уравнение (2.8) имеет решение лишь в следующих случаях

1. $k(t), n(t), l(t) \Rightarrow R$ определяется с произволом в одну функцию,
2. $l(t), R(t) \Rightarrow R = e^{\int j(t) dt}, l = 0,$
3. $n(t), k = \varphi l + \varphi^{-1} \varphi', \ln R = \varphi^{-1} J + \int (j - \varphi^{-1} n) dt$
4. $n = C \varphi^2 l; k = \varphi l + \varphi^{-1} \varphi',$
 $\ln R = \varphi^{-1} J - C \ln |\varphi^{-1} J + C| + \int j dt,$

$$5. k(t) = \frac{1}{2}\xi^{-1}\xi', \quad n = \xi(t)l, \quad \ln R = \frac{1}{2}\xi^{-1}J^2 + \int j \, dt,$$

где C — постоянная, $\varphi(t)$, $\xi(t)$ — произвольные функции не равные нулю.

Доказательство проводится дифференцированием (2.8) по I и перебором случаев, отмеченных в формулировке леммы.

В каждом из случаев леммы необходимо рассмотреть уравнения на коэффициенты уравнения (2.8), в которых переменная I свободная.

Равенство $l = l(t)$ принимает вид

$$l(t)K = c' + ce_{22} - c_1e_{32} - I(c'_1 + c_1e_{33} - ce_{23}).$$

Так как $K(I)$ и I линейно не связаны, то $l = 0$,

$$c' + ce_{22} - c_1e_{32} = 0, \quad c'_1 + c_1e_{33} - ce_{23} = 0. \quad (2.9)$$

Значит, в случае 2 (2.9) — уравнения подмодели.

Равенство $n = n(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} n(t)P_2K^{-1} = & -\alpha'_0P_2 + (\alpha'_0I - \beta'_0 + \bar{e}_{03})(\omega' + s_{23} + Is_{33}) + \\ & + (s_{22} + I(s_{23} - \omega^1))\bar{e}_{02}. \end{aligned}$$

Так как $K^{-1}P_2$ не есть многочлен от I , то

$$n = 0; \quad \alpha'_0 = \bar{e}_{02}, \quad \beta'_0 = \bar{e}_{03} \quad \Rightarrow \quad j = 0. \quad (2.10)$$

Равенство $K = K(t)$ дифференцируем по I , умножим на P_2^2 , получим квадратное уравнение по свободной переменной I . Приравнивание нулю коэффициентов дает

$$\begin{aligned} s_{33}'(s_{23} - \omega^1) &= s_{33}(s_{23}' - \omega^{1'} + T) \\ T &= e_{22}(s_{23} - \omega^1) + e_{23}s_{22} + e_{32}s_{33} + e_{33}(s_{23} + \omega^1), \\ & 2(s_{23}\omega^{1'} - s_{23}'\omega^1) + s_{22}s_{33}' - s_{22}'s_{33} + \\ & + 2s_{22}(e_{23}(s_{23} - \omega^1) + e_{33}s_{33}) + s_{23}T, \\ s_{22}\left[s_{23}' + \omega^{1'} - e_{22}(s_{23} + \omega^1) + e_{23}s_{23} + e_{32}s_{33} + \right. \\ & \left. + e_{33}(s_{23} + \omega^1)\right] = (s_{22}' + 2s_{23}e_{32})(s_{23} + \omega^1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае 1 леммы подмодель 2 состоит из уравнений (1.1), (1.4), (2.1), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11). При этом для плотности имеем формулу

$$\rho = R\left(J - \int k(t) \, dt\right) \exp(JK^{-1}(c_1I - c)),$$

где I, J, K вычисляются по формулам (2.3), (2.4), $R(J_1)$ — произвольная функция.

В случае 2 леммы подмодель 3 состоит из уравнений (1.1), (1.4), (2.1), (2.7), (2.9). Плотность такова

$$\rho = \exp \left(JK^{-1}(c_1 I - c) + \int j(t) dt \right),$$

где $j(t)$ — коэффициент уравнения (2.8).

Условие $K = \varphi l + \varphi^{-1} \varphi'$ после дифференцирования по I содержит линейно K с коэффициентами рациональными функциями от I . Так как K не есть рациональная функция от I , то приравняем нулю коэффициенты при K , далее расщепляем по I , получим равенства (2.9), (2.11). В случае 3 леммы из условия $n = n(t)$ следует $n = 0, j = 0$ и равенства (2.10) при этом $\ln R = \varphi^{-1} J$. Итак, получаем подмодель 4 из уравнений (1.1), (1.4), (2.1), (2.7), (2.9), (2.10), (2.11) с плотностью $\rho = \exp \left(J(\varphi^{-1} + c_1 I - c) \right)$.

В случае 4 леммы из условия $n = C\varphi^2 l$ следует $n = l = 0 = j$, после расщепления по I получаем подмодель 5 из уравнений (1.1), (1.4), (2.1), (2.7), (2.9), (2.10) с плотностью

$$\rho = \left(J\varphi^{-1} + C \right)^{-C} \exp \left(J(\varphi^{-1} + K^{-1}(c_1 I - c)) \right).$$

В случае 5 леммы получаем подмодель 6 как в случае 1 с плотностью

$$\rho = \exp \left(2^{-1} J^2 \xi^{-1} + JK^{-1}(c_1 I - c) \right).$$

3°. $\lambda = \frac{s_{23} + \omega^1}{s_{22}} = \frac{s_{33}}{s_{23} - \omega^1}$. Общее решение системы (1.5) для плотности таково: $\rho = mR(t, J)$,

$$J = 2\omega^1(\alpha + \lambda\beta) + (a^3 - \lambda a^2) \ln |m|, \quad (3.1)$$

$$m^{-1} = 2\omega^1(\lambda s_{22}\alpha + s_{33}\beta) + \lambda s_{22}a^3 - s_{33}a^2.$$

Величины α, β выразим через m, J и подставим в (2.6). В уравнении (2.6) переменные m, x^1 свободные: функция R зависит от t и J . Приравняв нулю коэффициенты при x^1 , получим

$$\begin{aligned} R_J \left[(s_{23} - \omega^1) \Lambda_2 + s_{33} \Lambda_3 \right] &= 0, \\ (R_J(\lambda a^2 - a^3) - R) \left[(s_{23} + \omega^1) \Lambda_2 + s_{33} \Lambda_3 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Случай $R_J = 0$. Из (3.4) и (2.6) следует

$$(s_{23} + \omega^1)\Lambda_2 + s_{33}\Lambda_3 = 0, \quad (3.5)$$

$$\omega^1 \lambda s_{22} R^{-1} R' = (\omega^1 \lambda s_{22})' + \omega^1 e_{22} \lambda s_{22} + \omega^1 e_{32} s_{33}, \quad (3.6)$$

$$\omega^1 s_{33} R^{-1} R' = (\omega^1 s_{33})' + \omega^1 e_{23} \lambda s_{22} + \omega^1 e_{33} s_{33}, \quad (3.7)$$

$$2\omega' (s_{22} \lambda a^3 - s_{33} a^2) R^{-1} R' = (s_{22} \lambda a^3 - s_{33} a^2)' + \\ + 2\lambda s_{22} (\omega^1 u_0^2 - \omega^2 u_1^2) + 2s_{33} (\omega^1 u_0^3 - \omega^3 u_1^0). \quad (3.8)$$

Уравнения (1.1), (1.4), (2.1), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) — задают подмодель 7.

Случай $R = R_0(t) \exp(J(\lambda a^2 - a^3)^{-1})$. Из (3.4) следует (3.5). Приравняв нулю коэффициенты при α , β в уравнении (2.6), получим уравнения подмодели

$$(\omega^1)' - 2\omega^1 (\ln(\lambda a^2 - a^3))' + || - \omega^2 - \lambda \omega^3, \omega^1, \lambda \omega^1 || \cdot a_2 = 0, \\ (\lambda \omega^1)' - \omega^1 \lambda (\ln(\lambda a^2 - a^3))' + || - \omega^2 - \lambda \omega^3, \omega^1, \lambda \omega^1 || \cdot a_3 = 0, \\ (\lambda a^2 - a^3)' R_0^{-1} R_0' + 2 || - \omega^2 - \lambda \omega^3, \omega^1, \lambda \omega^1 || \cdot u_0 = 0. \quad (3.10)$$

Здесь использовано представление $A = ||a_1, a_2, a_3||$. Подмодель 8 задается (1.1), (1.4), (2.1), (3.5), (3.10).

Случай R — общего положения $\Rightarrow \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0 \Rightarrow (2.7)$. Приравняв нулю коэффициенты при $m^{-1} \ln |m|$, m^{-2} , $\ln |m|$, m^{-1} в уравнении (2.6), в котором α , β выражены в силу (3.3) линейно по m^{-1} , $\ln |m|$, получим

$$\lambda' = || - (\omega^2 + \lambda \omega^3)(\omega^1)^{-1}, 1, \lambda || \cdot (\lambda a_2 - a_3), \\ (\ln(a^3 - \lambda a^2))' = (\ln \omega^1)' + 2^{-1} || - (\omega^2 + \lambda \omega^3)(\omega^1)^{-1}, 1, \lambda || \cdot a_2, \\ s_{22}(a^3 - \lambda a^2)D = 0, \quad (3.11)$$

$$2(\omega^1)^2 \lambda (s_{23}(a^3 - \lambda a^2) + \omega^1(a^3 + \lambda a^2))' = \\ = \lambda u_0 \cdot || - \lambda s_{22} \omega^2 - s_{33} \omega^3, \lambda s_{22} \omega^1, s_{33} \omega^1 || + \\ + (s_{23}(a^3 - \lambda a^2) + \omega^1(a^3 + \lambda a^2)) 2(\omega^1)^2 D = 0,$$

где $D = 2\lambda(\ln \omega^1)' + || - \omega^2(\omega^1)^{-1}, 1, 0 || \cdot (\lambda a_2 - a_3)$;

$$R_t + 2R_J u_0 \cdot || - \omega^2 - \lambda \omega^3, \omega^1, \lambda \omega^1 || = 0. \quad (3.12)$$

Уравнения (1.1), (1.4), (2.1), (2.7), (3.11), (3.12) задают подмодель 9. Итак, получили 9 переопределенных подмоделей для движения газа без расхождения с линейным полем скоростей.

Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00047-а) и грантом НШ-2826.2008.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Новое решение уравнений гидродинамики* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – № 1. – С. 47–49.
2. Dyson F. J. *Dynamics of a spinning sag cloud* // J. math. and mech. – 1968. – V. 18. – № 1. – P. 91–101.
3. Овсянников Л. В. *Об одном случае неустановившегося движения жидкости со свободной границей* // Дин. сплош. среды. – 1972. – Вып. 12. – С. 124–130.

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ЛАКУНАМИ ФЕЙЕРА

Н.Н. Юсупова

*Башкирский государственный университет,
YusupovaN@rambler.ru*

Пусть $0 < p_n \uparrow \infty$, $p_n \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n} \quad (a_n \neq 0) \quad (1)$$

— целая функция. Макинтайр доказал, что при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \infty \quad (2)$$

любая целая функция f , заданная рядом (1), не ограничена на положительном луче $\mathbb{R}_+$ [1]. В той же работе показано, что для любой последовательности $\{p_n\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty,$$

существует целая функция f вида (1), ограниченная на $\mathbb{R}_+$. Тем самым, было доказано, что условие (2) является необходимым и достаточным для того, чтобы любая целая функция f , представленная рядом (1), не была ограничена на положительном луче.

Дальнейшее развитие данная задача получила в работе М.А. Евграфова [2], где доказана аналогичная теорема для рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \quad (s = \sigma + it), \quad (3)$$

абсолютно сходящихся во всей плоскости. Предполагается, что последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность:

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty.$$

М.А. Евграфовым доказана следующая

Теорема 1 [2]. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \quad (4)$$

и сумма F ряда (3) ограничена на $\mathbb{R}$, то $F(z) \equiv 0$.

Ряд (3), показатели которого удовлетворяют условию (4), называется рядом Дирихле с лагунами Фейера.

Пусть $h(r)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_1^{\infty} \frac{h(t)}{t^2} dt = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r h'(r)}{h(r)} = 1, \quad (5)$$

где $n(r)$ — число точек $\lambda_n \leq r$, то есть $n(r) = \sum_{\lambda_n \leq r} 1$.

В [2] доказана

Теорема 2. *Если последовательность $\{\lambda_n\}$ помимо условия*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{h(r)} = c \quad (c \neq 0, \infty) \quad (6)$$

удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty, \quad L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right), \quad (7)$$

то существует ряд Дирихле (3), сумма F которого ограничена на $\mathbb{R}$, но $F \neq 0$.

Таким образом, мы видим, что условие (4) является достаточным, но теорема 2 еще не гарантирует, чтоб оно было необходимым для неограниченности любой функции F вида (3) на вещественной оси. Условия (5)–(7) являются весьма сильными требованиями, значительно сужающими область применения теоремы 2. Отметим, что условия (5), (6) означают,

что функция $n(r)$ при $r \rightarrow \infty$ эквивалентна правильно растущей (меняющейся) функции $V(r) = ch(r)$. Напомним, что положительная функция $V = V(r)$, заданная на $[a, \infty)$ ($a > 0$), называется правильно меняющейся в бесконечности, если она измерима, и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{V(\lambda x)}{V(x)} = \lambda^\rho$$

для некоторого $\rho \in \mathbb{R}$. При этом ρ называется порядком функции V [3].

Проверяется, что в нашем случае $\rho = 1$, $V(r) = ch(r) = cr^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок, то есть непрерывно дифференцируемая на $[a, \infty)$ функция, такая, что [4]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0.$$

Что касается условия (7), оно существенно ограничительнее по сравнению с более естественным условием $\delta < \infty$, где

$$\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right|$$

— индекс конденсации последовательности $\{\lambda_n\}$ [5].

В дальнейшем предполагается, что $D < \infty$, $\delta < \infty$. Цель статьи — показать, что тогда утверждение теоремы 2 верно при выполнении единственного условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

В рассмотренных выше работах поведение рядов (1) или (3) изучалось на положительном луче $\mathbb{R}_+$. Аналогичная теорема единственности для рядов Дирихле в случае, когда вместо луча рассматривается некоторая бесконечная дифференцируемая кривая $\{s \in \mathbb{C} : s = \varphi(x) = x + i\psi(x), 0 \leq x < \infty\}$, была доказана А.М. Гайсиным в работе [6]. Для полноты изложения приведем этот результат.

Пусть

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \lambda^{2k}, \quad \sup_k \frac{k}{\lambda_k} < \infty,$$

а $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условиям:

- 1) $M_{k+1} \leq d^{k+1} M_k$ для некоторого $d > 0$ ($k \geq 1$);
- 2) $L_n \leq l L_m$ для некоторого $l > 0$, для всех $n \leq m$ ($n, m = 1, 2, \dots$),
если $L_n = [M_n/n!]^{1/n}$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} |M_{2k} C_{2k}|^{\frac{1}{2k}} = 0$.

По определению [7]

$$E(M_k, [a, b]) = \bigcup_{\alpha > 0} E'(\alpha^k M_k, [a, b]),$$

где

$$E'(M'_k, [a, b]) = \{ \varphi : \varphi \in C^\infty[a, b], \|\varphi^{(k)}\| < \beta M'_k (k \geq 1) \};$$

$\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — некоторые постоянные, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\|\varphi^{(k)}\| = \sup_{a < x < b} |\varphi^{(k)}(x)|$.

А.М. Гайсиным доказана

Теорема 3 [6]. Пусть на некоторой кривой $\Gamma = \{s \in \mathbb{C} : s = \varphi(x) = x + i\psi(x), \varphi \in E(M_k, [0, +\infty))\}$ функция $F(s)$, представленная рядом (3), удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{\substack{s \in \Gamma \\ s \rightarrow \infty}} \frac{\ln^+ |F(s)|}{\sigma} < \lambda_1.$$

Если выполняется условие (4), то $F(s) \equiv 0$.

Отметим еще один результат.

Через $I_\alpha(\varphi)$ обозначим отрезок, полученный поворотом на угол φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и сдвигом на вектор α отрезка $I = [0, 1]$. А.Е. Фрынтовым доказано [8], что если выполняется условие (4), то любая функция F вида (3), не равная тождественно нулю, не может быть ограничена на всякой системе отрезков $I_{\alpha_n}(\varphi_n)$ такой, что $\operatorname{Re} \alpha_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Приведенные здесь результаты М.А. Евграфова, А.Е. Фрынтова, А.М. Гайсина представляют интерес в связи с известной гипотезой Макинтайра [1]. Поэтому выяснение существенности условия (4) для рядов Дирихле является актуальной задачей.

В настоящей статье доказана следующая

Теорема 4. Для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, имеющей конечную верхнюю плотность D и конечный индекс конденсации δ и такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty,$$

существует ряд Дирихле (3), сумма которого ограничена на вещественной оси.

Отсюда с учетом теоремы 3 получаем

Следствие. Для того, чтобы сумма любого ряда Дирихле (3) не была ограничена на любой кривой класса $E(M_k, [0, \infty))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty.$$

Доказательство. Пусть условие (4) не выполнено, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty. \quad (8)$$

В условиях теоремы 4 $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, имеющая конечную верхнюю плотность и конечный индекс δ конденсации, то есть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty, \quad \delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_n)} \right| < \infty,$$

где $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2})$.

Введем в рассмотрение ряд

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \lambda_n)^2} \frac{\psi^2(\lambda_n)}{L'(\lambda_n)} e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \quad (9)$$

где $\psi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}) e^{-\frac{\lambda}{\lambda_n}}$, $L(z)$ — функция, введенная выше.

Проверяется, что при некотором достаточно малом $q > 0$ справедлива оценка:

$$\ln \psi^2(x) \leq -2qx \sum_{\lambda_n \leq x} \frac{1}{\lambda_n} \quad (0 < q < \infty). \quad (10)$$

Следовательно, ввиду (8), (10) ряд (9) абсолютно сходится во всей плоскости, а его сумма F — целая функция.

Убедимся, что $|F(\sigma)| \leq M < \infty$ для $0 \leq \sigma < \infty$. Для этого сначала при $Re z \geq 0$ оценим функцию

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| = \left| \frac{\psi^2(z)}{L(z)} \right|, \quad G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} e^{\frac{2z}{\lambda_n}}.$$

Пусть

$$\Pi_1(z) = \prod_{\lambda_n \leq r} \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} e^{\frac{2z}{\lambda_n}}, \quad \Pi_2(z) = \prod_{\lambda_n > r} \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} e^{\frac{2z}{\lambda_n}}, \quad |z| = r.$$

Из того, что последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность, следует, что

$$\sum_{\lambda_n > r} \frac{1}{\lambda_n^2} = O(r^{-1}),$$

$r \rightarrow \infty$. Но тогда [5]

$$|\ln |\Pi_2(z)|| \leq A_1 x, \quad z = x + iy = re^{i\varphi}, \quad 0 < A_1 < \infty. \quad (11)$$

Далее, при $r \geq \lambda_n$, $x \geq 0$ имеем

$$\left| \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} \right|^2 = 1 - \frac{4\lambda_n x}{(\lambda_n + x)^2 + y^2} \geq 1 - \frac{4x}{r}.$$

Значит, при $r \geq 5x \geq 0$

$$|\Pi_1(z)| \geq \left(1 - \frac{4x}{r}\right)^{\alpha r} \exp\left(2x \sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n}\right) \geq \beta^x \exp\left(2x \sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n}\right), \quad (12)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Таким образом, из (11), (12) при $r \geq 5x \geq 0$ имеем

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leq \exp[B_1 x - 2x \sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n}], \quad 0 < B_1 < \infty. \quad (13)$$

Пусть $r < 5x$. Тогда [5]

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leq \left| \frac{1}{L(z)} \right| \exp[B_2 x - 2x \sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n}], \quad 0 < B_2 < \infty. \quad (14)$$

Поскольку для некоторой последовательности $\{r_k\}$ $0 < r_k \uparrow \infty$, $r_{k+1} \leq q r_k$ ($q > 1$) [8]

$$\left| \frac{1}{L(z)} \right| \leq e^{d_1 r_k}, \quad |z| = r_k, \quad 0 < d_1 < \infty,$$

то из (13) при $r = r_k$ получаем, что

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leq \exp[Px - 2x \sum_{\lambda_n \leq r_k} \frac{1}{\lambda_n}], \quad 0 < P < \infty. \quad (14)$$

Таким образом, из (12), (14) вытекает оценка

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leq \exp[Tx - 2x \sum_{\lambda_n \leq r_k} \frac{1}{\lambda_n}], \quad 0 < T < \infty, \quad (15)$$

где $z = r_k e^{i\varphi}$, $x = r_k \cos \varphi$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ ($k \geq 1$).

Пусть $\sigma > 0$. Тогда имеем

$$F(\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-r_k i}^{r_k i} \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{G(z)} e^{\sigma z} dz + \right. \\ \left. \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{G(z)} e^{\sigma z} dz \right],$$

где $C_k = \{z : |z| = r_k, \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Из условия (8) и оценки (15) следует, что при каждом фиксированном $\sigma > 0$

$$\left| \frac{e^{\sigma z}}{G(z)} \right| \leq 1, \quad z \in C_k, \quad k \geq k_1(\sigma).$$

Значит, интеграл по контуру C_k стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, и

$$F(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{e^{\sigma z}}{(1+z)^2 G(z)} dz, \quad \sigma > 0.$$

Отсюда следует, что $|F(\sigma)| = O(1)$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовом содействии гранта президента РФ по поддержке ведущих научных школ, НШ-3081-2008.1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Macintyre A. J. *Asymptotic paths of integral functions with gap power series* // Proc. London Math. Soc. – 1952. – V. 2. – № 3. – P. 286–296.
2. Евграфов М. А. *Об одной теореме единственности для рядов Дирихле* // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. XVII. – вып. 3. – С. 169–175.

3. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции*. М.: Наука, 1985.
4. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Мандельброд С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения*. М.: ИЛ, 1955.
6. Гайсин А. М. *Теорема единственности для рядов Дирихле* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 50. – вып. 2. – С. 54–60.
7. Baillette A., Siddiqi J. A. *Approximation polynomiale sur un arc dans plan complexe* // Comptus rendus Acad. Sci. – 1973. – ser. A. Т. 277 – N. 10. – Р. 731.
8. Фрынтов А. Е. *Операторы, сохраняющие субгармоничность, и некоторые задачи классического комплексного анализа* // Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. – ФТИНТ НАН Украины, Харьков, 1995.

ON THE CLASSIFICATION OF DARBOUX INTEGRABLE CHAINS

I. T. Habibullin

*Ufa Institute of Mathematics, Russian Academy of Science
habibullinismagil@gmail.com*

We study integrable semi-discrete chains of the following form

$$t_{n+1,x} = f(t_n, t_{n+1}, t_{n,x}), \quad (1)$$

where the unknown $t_n = t_n(x)$ is a function of two independent variables: discrete and continuous. Chain (1) can also be interpreted as an infinite system of ordinary differential equations for the sequence of the variables $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Here $f = f(t, y, z)$ is assumed to be locally analytic function of three variables satisfying at least locally the condition

$$\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0. \quad (2)$$

For the sake of convenience we introduce subindex denoting shifts $t_k = t_{n+k}(x)$ (keep $t_0 = t$) and derivatives $t_x = \frac{\partial}{\partial x}t(n, x)$, $t_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}t(n, x)$, and so on. We denote through D and D_x the shift operator and, correspondingly, the operator of total derivative with respect to x . For instance, $Dh(n, x) = h(n+1, x)$ and $D_x h(n, x) = \frac{\partial}{\partial x}h(n, x)$. Set of all the variables $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$; $\{D_x^m t\}_{m=1}^{\infty}$ constitutes the set of dynamical variables. Consider the dynamical variables as independent ones.

Since in the literature the term "integrable" has various meanings let us specify the meaning used in the article. Introduce first notions of n - and x -integrals.

Functions I and F , both depending on x and a finite number of dynamical variables, are called respectively n - and x -integrals of (1), if $DI = I$ and $D_x F = 0$.

Definition 1. Chain (1) is called integrable (Darboux integrable) if it admits a nontrivial n -integral and a nontrivial x -integral.

Example 1. As an example consider the discrete version of Liouville equation

$$t_{n+1,x} = t_{nx} + e^{t_{n+1}} + e^{t_n}.$$

It admits both x - and n -integrals

$$I = 2t_{n,xx} - t_{nx}^2 - e^{2t_n}$$

and

$$F = e^{t_{n+1}-t_n} + e^{2t_{n+1}-t_{n+2}-t_n} + e^{t_{n+1}-t_{n+2}}.$$

Darboux integrability implies the so-called C-integrability. Knowing both integrals F and I a Cole-Hopf type differential substitution $w = F + I$ reduces the equation (1) to the discrete version of D'Alembert wave equation $w_{1x} - w_x = 0$. Indeed, $(D - 1)D_x(w) = (D - 1)D_xF + D_x(D - 1)I = 0$.

It is remarkable that an integrable chain is reduced to a pair consisting of an ordinary differential equation and an ordinary difference equation. To illustrate it note first that any n -integral might depend only on x and x -derivatives of the variable t : $I = I(x, t, t_x, t_{xx}, \dots)$ and similarly any x -integral depends only on x and the shifts: $F = F(x, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots)$. Therefore each solution of the integrable chain (1) satisfies two equations:

$$I(x, t, t_x, t_{xx}, \dots) = p(x), \quad F(x, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots) = q(n)$$

with properly chosen functions $p(x)$ and $q(n)$.

Nowadays the discrete phenomena are studied intensively due to their various applications in physics.

Chain (1) is very close to a well studied object – the partial differential equation of the hyperbolic type

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \quad (3)$$

The definition of integrability for equation (3) was introduced by G. Darboux. The famous Liouville equation $u_{xy} = e^u$ provides an illustrative example of the Darboux integrable equation. An effective criterion of integrability of (3) was discovered by Darboux himself: equation (3) is integrable if and only if the Laplace sequence of the linearized equation terminates at both ends. This

criterion of integrability was used by Zhiber and Sokolov to get the complete list of all Darboux integrable equations of form (3). An alternative approach to the classification problem based on the notion of the characteristic Lie algebra of hyperbolic type systems was suggested years ago by A. Shabat. An important classification result was obtained by using this method in 1981 (Shabat, Yamilov) for the exponential system

$$u_{xy}^i = \exp(a_{i1}u^1 + a_{i2}u^2 + \dots + a_{in}u^n), \quad i = 1, \dots, n$$

It was proved that the system is Darboux integrable if and only if the matrix $A = (a_{ij})$ is the Cartan matrix of a semi-simple Lie algebra.

The method of characteristic Lie algebras is closely connected with the symmetry approach which is proved to be a very effective tool to classify integrable nonlinear equations of evolutionary type. However, the symmetry approach meets very serious difficulties when applied to hyperbolic type models.

The problem of adopting the characteristic Lie algebras to the classification of the hyperbolic systems, integrated by means of the inverse scattering transforms method is discussed in [1].

Several years ago we started to study the following questions

1) What is the characteristic Lie algebra for discrete and semi-discrete chains?

2) How to apply the method of characteristic algebras to classify Darboux integrable discrete models?

3) How to apply the method of characteristic algebras to classify S-integrable discrete models?

These questions are studied in our articles [2-5].

Define characteristic Lie algebras in the semi-discrete case.

Introduce vector fields

$$Y_j = D^{-j} \frac{\partial}{\partial t_1} D^j, \quad j \geq 1,$$

and

$$X_j = \frac{\partial}{\partial t_{-j}}, \quad j \geq 1.$$

The following theorem defines the characteristic Lie algebra L_n of the chain

$$t_{n+1,x} = f(t_n, t_{n+1}, t_{n,x}).$$

Theorem 1. *The chain admits a nontrivial n -integral if and only if the following two conditions hold:*

- 1) Linear space spanned by the operators $\{Y_j\}_1^\infty$ is of finite dimension, denote this dimension by N ;
 2) Lie algebra L_n generated by the operators

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_N, X_1, X_2, \dots, X_N$$

is of finite dimension. We call L_n the characteristic Lie algebra of the chain in the direction of n .

To introduce the characteristic Lie algebra L_x in the direction of x , consider vector fields

$$K_0 = \frac{\partial}{\partial x} + t_x \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial t_1} + g \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + f_1 \frac{\partial}{\partial t_2} + g_{-1} \frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots$$

$$X = \frac{\partial}{\partial t_x}.$$

Note that an x -integral F solves the equation $K_0 F = 0$. One can get this equation by applying the chain rule to the equation $D_x F = 0$, here the function g is defined by the chain rewritten as $t_x(n-1) = g(t(n), t(n-1), t_x(n))$. Since F does not depend on the variable t_x one gets $X F = 0$.

Therefore, any vector field from the Lie algebra generated by K_0 and X annihilates F . This algebra is called the characteristic Lie algebra L_x of the chain in x -direction.

The following result is essential, its proof is based on the famous Jacobi theorem.

Theorem 2. *The chain*

$$t_{n+1,x} = f(t_n, t_{n+1}, t_{n,x}).$$

admits a nontrivial x -integral if and only if its Lie algebra L_x is of finite dimension.

Compare two algebras. Algebra L_n is much more complicated, it is generated by $2N$ operators, the number N a priori is not known. Algebra L_x is generated by two operators only.

Let us discuss possible applications of characteristic Lie algebras to classification of integrable chains.

Consider a particular kind of the chain

$$t_{n+1,x} = f(t_n, t_{n+1}, t_{n,x}),$$

having the form

$$t_{1x} = t_x + d(t, t_1). \quad (4)$$

The following theorem contains the complete list of chains (4) admitting nontrivial x -integrals.

Theorem 3. *Chain (4) admits a nontrivial x -integral if and only if $d(t, t_1)$ is one of the kind:*

$$(1) \quad d(t, t_1) = A(t - t_1),$$

$$(2) \quad d(t, t_1) = c_0(t - t_1)t + c_2(t - t_1)^2 + c_3(t - t_1),$$

$$(3) \quad d(t, t_1) = A(t - t_1)e^{\alpha t},$$

$$(4) \quad d(t, t_1) = c_4(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + c_5(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t}),$$

where $A = A(t - t_1)$ is a function of $\tau = t - t_1$ and c_0, c_2, c_3, c_4, c_5 are some constants with $c_0 \neq 0$, $c_4 \neq 0$, $c_5 \neq 0$, and α is a nonzero constant. Moreover, x -integrals in each of the cases are

$$\begin{aligned} i) \quad F &= x + \int^\tau \frac{du}{A(u)}, \quad \text{if } A(u) \neq 0, \\ F &= t_1 - t, \quad \text{if } A(u) \equiv 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad F &= \frac{1}{(-c_2 - c_0)} \ln |(-c_2 - c_0) \frac{\tau_1}{\tau_2} + c_2| + \\ &\frac{1}{c_2} \ln |c_2 \frac{\tau_1}{\tau} - c_2 - c_0| \text{ for } c_2(c_2 + c_0) \neq 0, \\ F &= \ln \tau_1 - \ln \tau_2 + \frac{\tau_1}{\tau} \text{ for } c_2 = 0, \end{aligned}$$

$$F = \frac{\tau_1}{\tau_2} - \ln \tau + \ln \tau_1 \text{ for } c_2 = -c_0,$$

$$iii) \quad F = \int^\tau \frac{e^{-\alpha u} du}{A(u)} - \int^{\tau_1} \frac{du}{A(u)},$$

$$iv) \quad F = \frac{(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_2})(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t_3})}{(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_3})(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t_2})}.$$

The n -integrals of chain (4) can be studied in a similar way by using Theorem 1, but this part of the classification problem is not completed yet.

Let us concentrate on the proof of the classification theorem.

One can prove that the linear operator

$$Z \rightarrow DZD^{-1}$$

defines an automorphism of the characteristic Lie algebra L_x . This automorphism (shift automorphism) plays the crucial role in all of our further considerations. For instance, direct calculations show that

$$D\tilde{X}D^{-1} = \tilde{X}, \quad D\tilde{Y}D^{-1} = -d\tilde{X} + \tilde{Y}.$$

Lemma 1. *Suppose that a vector field of the form $Z = \sum a(j) \frac{\partial}{\partial t_j}$ with the coefficients*

$$a(j) = a(j, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots)$$

depending on a finite number of the dynamical variables solves an equation of the form $DZD^{-1} = \lambda Z$. If for some $j = j_0$ we have $a(j_0) \equiv 0$ then $Z = 0$.

Proof. By applying the shift automorphism to the vector field Z one gets

$$DZD^{-1} = \sum D(a(j)) \frac{\partial}{\partial t_{j+1}}.$$

Now, to complete the proof, we compare the coefficients of $\frac{\partial}{\partial t_j}$ in the equation $\sum D(a(j)) \frac{\partial}{\partial t_{j+1}} = \lambda \sum a(j) \frac{\partial}{\partial t_j}$. $\square$

Construct an infinite sequence of multiple commutators of the vector fields $\tilde{X}$ and $\tilde{Y}$

$$\tilde{Y}_1 = [\tilde{X}, \tilde{Y}], \quad \tilde{Y}_k = [\tilde{X}, \tilde{Y}_{k-1}] \quad \text{for } k \geq 2.$$

Lemma1. *We have,*

$$D\tilde{Y}_kD^{-1} = -\tilde{X}^k(d)\tilde{X} + \tilde{Y}_k, \quad k \geq 1.$$

Assume the chain admits a nontrivial x -integral and $\tilde{Y}_1 \neq 0$. Consider the sequence of the vector fields $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3, \dots\}$. Since L_x is of finite dimension, then there exists a natural number N such that

$$\tilde{Y}_{N+1} = \gamma_1 \tilde{Y}_1 + \gamma_2 \tilde{Y}_2 + \dots + \gamma_N \tilde{Y}_N, \quad N \geq 1,$$

and $\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_N$ are linearly independent. Therefore,

$$\begin{aligned} D\tilde{Y}_{N+1}D^{-1} &= D(\gamma_1)D\tilde{Y}_1D^{-1} + D(\gamma_2)D\tilde{Y}_2D^{-1} + \dots \\ &\quad + D(\gamma_N)D\tilde{Y}_ND^{-1}, \quad N \geq 1. \end{aligned}$$

Due to Lemma 1 the last equation can be rewritten as

$$\begin{aligned} -\tilde{X}^{N+1}(d)\tilde{X} + \gamma_1\tilde{Y}_1 + \gamma_2\tilde{Y}_2 + \dots + \gamma_N\tilde{Y}_N &= \\ = D(\gamma_1)(-\tilde{X}(d)\tilde{X} + \tilde{Y}_1) + D(\gamma_2)(-\tilde{X}^2(d)\tilde{X} + \tilde{Y}_2) + \dots \\ &\quad + D(\gamma_N)(-\tilde{X}^N(d)\tilde{X} + \tilde{Y}_N). \end{aligned}$$

Comparing coefficients before linearly independent vector fields $\tilde{X}, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_N$, we obtain the following system of equations

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{N+1}(d) &= D(\gamma_1)\tilde{X}(d) + D(\gamma_2)\tilde{X}^2(d) + \dots + \\ &\quad + D(\gamma_N)\tilde{X}^N(d), \\ \gamma_1 &= D(\gamma_1), \quad \gamma_2 = D(\gamma_2), \quad \dots, \quad \gamma_N = D(\gamma_N). \end{aligned}$$

Since the coefficients of the vector fields $\tilde{Y}_j$ depend only on the variables $t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots$ the factors γ_j might depend only on these variables (see Proposition above). Hence the system of equations implies that all coefficients γ_k , $1 \leq k \leq N$, are constants, and $d = d(t, t_1)$ is a function that satisfies the following differential equation

$$\tilde{X}^{N+1}(d) = \gamma_1\tilde{X}(d) + \gamma_2\tilde{X}^2(d) + \dots + \gamma_N\tilde{X}^N(d),$$

where $\tilde{X}(d) = d_t + d_{t_1}$. Using the substitution $s = t$ and $\tau = t - t_1$, the last equation can be rewritten as

$$\frac{\partial^{N+1}d}{\partial s^{N+1}} = \gamma_1 \frac{\partial d}{\partial s} + \gamma_2 \frac{\partial^2 d}{\partial s^2} + \dots + \gamma_N \frac{\partial^N d}{\partial s^N},$$

that implies that

$$d(t, t_1) = \sum_k \left(\sum_{j=0}^{m_k-1} \lambda_{k,j}(t - t_1)t^j \right) e^{\alpha_k t},$$

for some functions $\lambda_{k,j}(t - t_1)$, where α_k are roots of multiplicity m_k for characteristic equation.

Let $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ be the distinct roots of the characteristic equation. Then the differential equation for d can be rewritten as

$$\tilde{X}^{m_0}(\tilde{X} - \alpha_1)^{m_1}(\tilde{X} - \alpha_2)^{m_2} \dots (\tilde{X} - \alpha_s)^{m_s} d = 0.$$

and $m_0 + m_1 + \dots + m_s = N + 1, m_0 \geq 1$.

Define a map $h \rightarrow Y_h$ which assigns to any function $h = h(t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots)$ the vector field

$$Y_h = h \frac{\partial}{\partial t_1} - h_{-1} \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + (h + h_1) \frac{\partial}{\partial t_2} - \\ -(h_{-1} + h_{-2}) \frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots$$

For any polynomial with constant coefficients $P(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_m \lambda^m$ we have a formula

$$P(ad_{\tilde{X}}) \tilde{Y} = Y_{P(\tilde{X})h}, \quad \text{where} \quad ad_X Y = [X, Y],$$

which establishes an isomorphism between the linear space V of all solutions of the equation for $d(t, t_1)$ and the linear space $\tilde{V} = \text{span}\{\tilde{Y}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_N\}$ of the corresponding vector fields.

Represent the unknown function as a sum $d(t, t_1) = P(t, t_1) + Q(t, t_1)$ of the polynomial part $P(t, t_1) = \sum_{j=0}^{m_0-1} \lambda_{0,j} (t - t_1) t^j$ and the "exponential" part $Q(t, t_1) = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=0}^{m_k-1} \lambda_{k,j} (t - t_1) t^j \right) e^{\alpha_k t}$.

Lemma 2. *Assume the chain admits a nontrivial x -integral. Then one of the functions $P(t, t_1)$ and $Q(t, t_1)$ vanishes.*

It is interesting that S-integrable models have the characteristic Lie algebra of finite growth. The chain studied in this section can easily be reduced to the semi-discrete sine-Gordon model $t_{1x} = t_x + \sin t + \sin t_1$ which belongs to the S-integrable class. It is remarkable that its algebra L_x is of finite growth. Or, more exactly, the dimension of the linear space of multiple commutators grows linearly with the multiplicity.

One can prove that the linear space V_n of all commutators of multiplicity $\leq n$ has a basis

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2k}; Q_2, Q_4, \dots, Q_{2k}\}$$

for $n = 2k$ and a basis

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2k+1}; Q_2, Q_4, \dots, Q_{2k}\}$$

for $n = 2k + 1$, where the operators P_j and Q_j are defined consecutively

$$\begin{aligned} P_1 &= [S_0, S_1] + \alpha S_0 + \alpha S_1, & Q_1 &= P_1, \\ P_2 &= [S_1, P_1], & Q_2 &= [S_0, Q_1], \\ P_3 &= [S_0, P_2] + \alpha P_2, & Q_3 &= [S_1, Q_2] - \\ & & & -\alpha Q_2, \\ P_{2n} &= [S_1, P_{2n-1}], & Q_{2n} &= [S_0, Q_{2n-1}], \\ P_{2n+1} &= [S_0, P_{2n}] + \alpha P_{2n}, & Q_{2n+1} &= [S_1, Q_{2n}] - \\ & & & -\alpha Q_{2n}, \end{aligned}$$

for $n \geq 1$. Here S_0 and S_1 are

$$S_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A(\tau_j) e^{\alpha \rho_j} \frac{\partial}{\partial \tau_j}, \quad S_1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B(\tau_j) e^{-\alpha \rho_j} \frac{\partial}{\partial \tau_j}$$

with $A(\tau) = (e^{-\alpha \tau} + 1)$, $B(\tau) = (e^{\alpha \tau} + 1)$ and

$$\rho_j = \begin{cases} -\tau - \tau_1 - \dots - \tau_{j-1}, & \text{if } j \geq 1; \\ 0, & \text{if } j = 0; \\ \tau_{-1} + \tau_{-2} + \dots + \tau_j, & \text{if } j \leq -1. \end{cases}$$

This work was partially supported by RFBR (grants 07-01-00081-a and 08-01-00440-a).

LITERATURE

1. Zhiber A. V., Murtazina R. D. *On the characteristic Lie algebras for the equations $u_{xy} = f(u, u_x)$* . (In Russian), Fundam. Prikl. Mat. –2006. –V. 12. –no. 7, –P. 65–78.
2. Habibullin I. T. *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. –2005. –no. 1. –023, –P. 1-9.
//arxiv : nlin.SI/0506027.
3. Habibullin I. T., Pekcan A. *Characteristic Lie Algebra and Classification of Semi-Discrete Models*. Theoret. and Math. Phys. –2007. – V 151. –no. 3. – P. 781-790. //arXiv : nlin/0610074.
4. Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Pekcan A. *On Some Algebraic Properties of Semi-Discrete Hyperbolic Type Equations*. Turkish Journal of Mathematics. –2008. –V. 32. –P. 1-17.
//arXiv : nlin/0703065.

5. Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Pekcan A. *On the Classification of Darboux Integrable Chains*. Jour. Math. Phys. –2008. –V. 49. –no. 102702. – P. 1-39.
//arXiv : nlin/0806.3144.