



Институт математики
и механики
им. Н.Н. Красовского

«Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019)

Материалы Международной конференции, посвященной
95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.

“Stability, Control, Differential Games” (SCDG2019)

Proceedings of the International Conference
devoted to the 95th anniversary
of Academician N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

**«Устойчивость, управление,
дифференциальные игры» (SCDG2019)**

Материалы Международной конференции,
посвященной 95-летию со дня рождения академика
Н.Н. Красовского

Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.

**“Stability, Control, Differential Games”
(SCDG2019)**

Proceedings of the International Conference
devoted to the 95th anniversary of Academician
N.N. Krasovskii

Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019

Екатеринбург · 2019

УДК 517.977

ББК 22.161.8

«Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019): Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.). — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2019. — 466 с.

Редакторы: В.И. Максимов, А.М. Тарасьев, Т.Ф. Филиппова

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-20057) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

UDC 517.977

LBC 22.161.8

“Stability, Control, Differential Games” (SCDG2019): Proceedings of the International Conference devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019.

Editors: T.F. Filippova, V.I. Maksimov, A.M. Tarasyev

Published by: Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (IMM UB RAS), Yekaterinburg, Russia

The conference is supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) under project 19-01-20057 and by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

**Международная конференция
«Устойчивость, управление,
дифференциальные игры» (SCDG2019),
посвященная 95-летию со дня рождения
академика Н.Н. Красовского
Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.**

Организатор конференции — Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН), Екатеринбург.

Научные направления:

Устойчивость и стабилизация

Оптимальное управление и дифференциальные игры

Оценивание состояний

Дифференциальные уравнения

Обратные задачи динамики

Современные приложения теории управления и численные методы

Программный комитет

Сопредседатели программного комитета:

А.Б. Куржанский (Россия)

Ю.С. Осипов (Россия)

Заместители председателей программного комитета:

В.Н. Ушаков (Россия)

А.Г. Ченцов (Россия)

Члены программного комитета:

Т. Башар (США)

В.И. Бердышев (Россия)

В. Вельёв (Австрия)

М. Квинкампуа (Франция)

Ф.М. Кириллова (Белоруссия)

П. Кокотович (США)

М.С. Никольский (Россия)

Л.А. Петросян (Россия)

Н.Н. Субботина (Россия)

В.Е. Третьяков (Россия)

М. Фальконе (Италия)
Ф.Л. Черноусько (Россия)
А.П. Чикрий (Украина)

Организационный комитет

Председатель организационного комитета:

Н.Ю. Лукоянов

Заместители председателя организационного комитета:

В.И. Максимов
А.М. Тарасьев
Т.Ф. Филиппова

Секретари организационного комитета:

Б.В. Дигас
А.А. Усова

Члены организационного комитета:

М.И. Гомоюнов
М.И. Гусев
И.Н. Кандоба
О.Г. Матвийчук
В.Г. Пименов
А.Р. Плаксин
А.Н. Сесекин
П.Г. Сурков
А.А. Успенский

E-mail: SCDG@uran.ru

Сайт конференции: <http://scdg.uran.ru>

Содержание

Николай Николаевич Красовский (<i>К девяностопятилетию со дня рождения</i>)	13
Абдрахманова А.А., Федоров В.Е. О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений распределенного порядка . .	18
Агеев А.Л., Антонова Т.В. О локализации линий разрыва зашумленной функции	21
Азамов А.А., Рузимурадова Д.Х. О динамических системах с неограниченными предельными множествами	25
Альсевич В.В. Оптимизация непрерывных систем в классе дискретных управляющих воздействий	28
Ананьевский И.М. Стабилизация за конечное время некоторых систем с упругими звеньями	32
Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Вырожденная линейно-квадратичная задача для квазилинейной системы	34
Ахмедов О.С., Тилавов А.М., Дустназаров С.Б. Существование замкнутой траектории в четырехмерной модифицированной модели брюсселятора	37
Багно А.Л., Тарасьев А.М. Попятные процедуры для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом	40
Банщикова И.Н., Попова С.Н. Об условиях пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем	44
Барабанов Е.А., Быков В.В. Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, убывающих к нулю на бесконечности	48
Барсегян В.Р. Об одной задаче оптимального управления колебаниями струны с неразделенными многоточечными условиями в промежуточные моменты времени	54
Бедин Д.А. Нижняя граница точности несмещённых оценок конца траектории для движения с переключениями	58
Бедин Д.А., Иванов А.Г. Применение генетического подхода для нахождения оптимальных параметров восстановления траектории воздушного судна	62

<i>Бенараб С., Жуковский Е.С., Мерчела В.</i> Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений	67
<i>Бештоков М.Х.</i> Первая краевая задача для многомерного псевдопараболического уравнения третьего порядка в области с произвольной границей	71
<i>Бештоков М.Х., Худалов М.З.</i> Разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка	75
<i>Бештокова З.В.</i> Экономичные аддитивные разностные схемы решения нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения теплопроводности	79
<i>Благодатских А.И.</i> Об одновременной многократной поимке группы убегающих	84
<i>Близорукова М.С., Максимов В.И.</i> Об одной задаче динамического обращения для нелинейной распределенной системы	88
<i>Вельмисов П.А., Анкилов А.В.</i> Исследование динамической устойчивости упругих элементов вибрационных устройств	91
<i>Гомоюнов М.И.</i> Об уравнении Гамильтона — Якоби для дифференциальных игр в системах с дробными производными Капуто	95
<i>Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С.</i> Вычислительная технология решения задач оптимального управления в системах с запаздыванием	99
<i>Гребенщиков Б.Г., Ложников А.Б.</i> Методы стабилизации одной системы с постоянным запаздыванием	102
<i>Григоренко Н.Л., Клименкова А.Д., Коробейников А., Хайлов Е.Н.</i> Программные и позиционные стратегии управления для модели конкуренции Лотки — Вольтерры	106
<i>Гусев М.И.</i> Об асимптотике множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями на малых промежутках времени	111
<i>Данилин А.Р., Коврижных О.О.</i> О задачах быстрогодействия для линейных управляемых систем с быстрыми и медленными переменными и гладкими ограничениями на управление	115
<i>Долгий Ю.Ф.</i> Оптимальная импульсная стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием	119

<i>Дунаевская К.В., Костоусов В.Б.</i> Новый метод оценки ошибок коррекции координат по полю микрорельефа	123
<i>Дыхта В.А.</i> Приближенный позиционный принцип минимума для субоптимальных процессов в негладких задачах оптимального управления	127
<i>Дышаев М.М., Федоров В.Е.</i> Вычисление оптимального интервала хеджирования для опционной стратегии «медвежий колл спрэд» («bear call spread») в рамках RAPM-модели	130
<i>Ершова А.А.</i> Алгоритм исследования математической модели теплопроводности в многослойной ограждающей конструкции	134
<i>Завалищин Д.С.</i> Управление движением объекта в среде переменной плотности	138
<i>Зайцев В.А., Ким И.Г.</i> О назначении спектра и стабилизации блочных систем статической обратной связью по выходу . .	142
<i>Изместьев И.В.</i> Об одной импульсной дифференциальной игре со смешанной платой	145
<i>Изобов Н.А., Ильин А.В.</i> Полное описание суслинскими множествами положительных характеристических показателей Ляпунова в эффekte Перрона смены их значений	149
<i>Ильина А.Н., Красинский А.Я.</i> Об одном методе решения задачи стабилизации стационарных движений систем с нелинейными геометрическими связями	153
<i>Исканаджиев И.М.</i> Связь между основными операторами в нелинейных дифференциальных играх преследования с фиксированным временем	157
<i>Казаков А.Л., Лемперт А.А.</i> Об упаковке шаров двух типов в трехмерном неевклидовом пространстве	160
<i>Каминин А.И., Лавринович Л.И.</i> Метод малого параметра в линейно-квадратичной задаче оптимального управления с линейными терминальными ограничениями	163
<i>Камнева Л.В.</i> Численное построение множеств разрешимости в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания	168
<i>Кандоба И.Н., Козьмин И.В., Костоусова Е.К.</i> Численное исследование функции максимальной перегрузки в задаче оптимального выведения ракеты-носителя	172

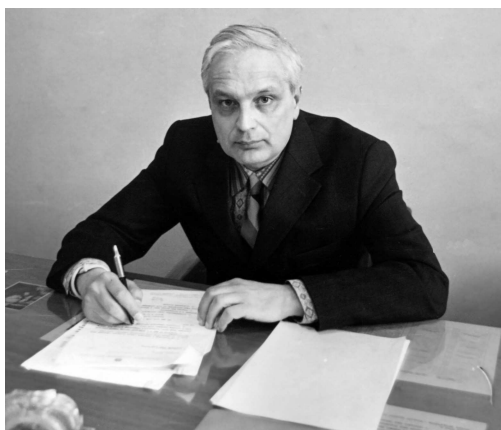
<i>Клейменов А.Ф.</i> Одна гибридная двухшаговая задача динамического управления с тремя участниками	176
<i>Комаров Ю.А., Куржанский А.Б.</i> О задачах минимаксного типа с векторным критерием	180
<i>Костоусова Е.К.</i> О внешнем и внутреннем полиэдральном оценивании множеств достижимости многошаговых систем с интегральными ограничениями и неопределенностью в матрицах	184
<i>Красинский А.Я.</i> Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях в некоторых критических случаях	189
<i>Красовский Н.А., Тарасьев А.М.</i> Анализ равновесных решений в трехмерной динамической аукционной игре	193
<i>Кувишинов Д.Р.</i> Геометрический подход к решению одного класса задач оптимального управления	197
<i>Кузнецов Н.В.</i> Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления	201
<i>Кумков С.И., Пятко С.Г., Овчинников М.М.</i> Бесконфликтное слияние потоков самолетов в аварийных ситуациях	205
<i>Лебедев П.Д., Успенский А.А.</i> Маркеры псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для одного класса уравнений Гамильтона — Якоби	209
<i>Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.</i> Итерационная процедура построения оптимальных упаковок в невыпуклые плоские фигуры	214
<i>Леваков А.А., Васьковский М.М., Задворный Я.Б.</i> Исследование устойчивости стохастических дифференциальных включений методом функций Ляпунова	219
<i>Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.</i> Инфинитезимальный критерий стабильности функционалов относительно дифференциальных включений нейтрального типа	223
<i>Лукьянова Л.Н.</i> Управление движением фазового вектора по заданной плоской кривой для модели конкуренции Лотки — Вольтерры	226
<i>Муниц Н.В., Кумков С.С.</i> Полилинейные аппроксимации в сеточных методах нахождения обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби	231

<i>Новоселова Н.Г.</i> Построение множества разрешимости в задаче химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по обобщенному логистическому закону	235
<i>Орлов Св.С., Самсонов О.Н.</i> Процесс выметания с разрывным движущимся множеством	239
<i>Парилина Е.М., Петросян Л.А.</i> Новый подход к определению характеристической функции в стохастических играх	243
<i>Пацко В.С., Федотов А.А.</i> Принцип максимума Понтрягина и свойство выпуклости сечений по угловой координате трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса . .	247
<i>Петренко П.С.</i> К вопросу об управляемости одной вырожденной гибридной системой	251
<i>Петров Н.Н., Мачтакова А.И., Нарманов А.Я.</i> К задаче группового преследования в дифференциальных играх с дробными производными	255
<i>Петросян Л.А.</i> Построение динамически устойчивых решений в дифференциальных играх на сетях	259
<i>Пименов В.Г., Ложников А.Б.</i> Метод Галеркина для дробного параболического уравнения с функциональным запаздыванием	263
<i>Плаксин А.Р.</i> Субградиенты функционала цены в задачах оптимального управления системами с запаздыванием	267
<i>Погодаев Н.И., Старичын М.В.</i> Принцип максимума для задачи оптимального импульсного управления уравнением неразрывности	272
<i>Родин А.С.</i> Анализ структуры субдифференциала минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана	275
<i>Розенберг В.Л.</i> Задача динамической реконструкции возмущения в системе специального вида при дефиците информации . .	279
<i>Саматов Б.Т., Сайиббаев У.Б.</i> Задача перехвата в нелинейных дифференциальных играх	283
<i>Серков Д.А.</i> О динамической задаче удержания с неразложимым множеством помех	287
<i>Соколов В.Ф.</i> Рекуррентное полиэдральное оценивание в задаче адаптивного оптимального робастного слежения	291

<i>Солодуша С.В.</i> Восстановление входных сигналов для одного класса динамических систем с помощью полиномиальных уравнений Вольтерра I рода	295
<i>Спирidonов А.А., Кумков С.С.</i> Разработка формализации задачи бесконфликтного слияния потоков воздушных судов . . .	299
<i>Сумин М.И.</i> Регуляризация условий оптимальности в нелинейном оптимальном управлении	304
<i>Танана В.П., Сидикова А.И.</i> Решение обратной граничной задачи теплопроводности для композиционных материалов	308
<i>Тимофеева Г.А.</i> Задача восстановления функции предпочтений пассажиров по распределению пассажиропотоков	312
<i>Толстоногов А.А.</i> BV решения выпуклого процесса выметания дифференциального включения с возмущениями	316
<i>Точилин П.А., Атанесян А.А.</i> Задача стабилизации системы с переключениями при помощи кусочно-аффинного управления	320
<i>Усова А.А., Тарасьев А.М.</i> Стабилизация гамильтоновых систем на основе решения уравнения Риккати	323
<i>Ухоботов В.И., Измestьев И.В.</i> Задача управления с помехой и неизвестным моментом изменения динамики	327
<i>Ушаков В.Н., Ершов А.А.</i> Построение множеств достижимости нелинейных управляемых систем со вторым порядком точности относительно шага по времени	331
<i>Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В.</i> Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы	335
<i>Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.</i> Задачи управления многозначными движениями систем с неопределенностью и нелинейностью	339
<i>Финогенко И.А.</i> Принцип инвариантности для разрывных систем	342
<i>Финогенко И.А., Сесекин А.Н.</i> Позиционные импульсные и разрывные управления для дифференциальных включений . .	346
<i>Хлопин Д.В.</i> О точности необходимых краевых условий для задач управления на бесконечном промежутке	351

<i>Ченцов А.Г.</i> Программные конструкции в абстрактной игровой задаче удержания	355
<i>Шагалова Л.Г.</i> Кусочно-линейное минимаксное решение уравнения Гамильтона — Якоби с неоднородным гамильтонианом .	359
<i>Шананин А.А.</i> Математическое моделирование инвестиций на несовершенном рынке капитала	363
<i>Шевченко Р.И.</i> Аппроксимирующие системы в задаче экспоненциальной устойчивости системы с запаздыванием	367
<i>Шорилов А.Ф., Калев В.И.</i> Алгоритм решения задачи минимаксного адаптивного управления расходом топлива ракеты-носителя	371
<i>Ananyev B.I.</i> One Problem of Statistically Uncertain Estimation . .	375
<i>Arutyunov A.V.</i> Second Order Necessary Optimality Conditions for Abnormal Problems and Their Applications	379
<i>Aseev S.M.</i> Optimal Control in the Presence of Risk Factors	386
<i>Averboukh Yu.</i> Stochastic Approximate Equilibria of Nonzero-Sum Differential Games	390
<i>Bamieh B.</i> Stability and Robustness Problems in the Theory of Transition to Turbulence	394
<i>Chikrii A.A., Rutkas A.G., Vlasenko L.A.</i> On a Differential Game in a System Described by a Functional Differential Equation . . .	394
<i>Davydov A.A., Skinder Yu.A.</i> On Structural Stability of Dynamic Inequalities	398
<i>Falcone M.</i> A Discrete Time Dynamic Programming Approach on a Tree Structure for Finite Horizon Optimal Control Problems .	402
<i>Gromov D., Bondarev A.</i> On the Regularity of Solutions in an Optimal Control Problem with Hybrid Dynamics	403
<i>Gromova E.V., Malakhova A.P.</i> On the Form of Payoff Functional in the Optimal Control Problem with Random Starting Time .	406
<i>Gruzdev A.P., Melnikov N.B.</i> Block Jacobi Preconditioning for Solving Dynamic General Equilibrium Models	409
<i>Khamisov O.O.</i> Distributed Frequency Control in Power Systems with Limited Information	413

<i>Krasovskii A.A., Platov A.S.</i> Discrete-Time Optimal Control in the Forestry Model	417
<i>Krupennikov E.A.</i> On Solving Dynamic Reconstruction Problems for Systems with Large Number of Controls	421
<i>Kuznetsov N.V., Mokaev T.N., Alexeeva T.A.</i> On Lower-Bound Estimates of the Lyapunov Dimension and Topological Entropy via Pyragas Control	425
<i>Ledyayev Yu.S.</i> Integral Decrease Principle and Robust Stabilization of Nonlinear Control Systems	429
<i>Lehmijoki U., Palokangas T.</i> Optimal Control of a Market Economy with Endogenous Fertility and Deadly Emissions	431
<i>Lokutsievskiy L.V.</i> Convex Trigonometry with Applications to Sub-Finsler Geometry	435
<i>Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V.</i> UAV Path Planning in Search and Rescue Operations	436
<i>Palokangas T.</i> Optimal Taxation with Endogenous Population Growth and the Risk of Environmental Disaster	440
<i>Plekhanova M.V., Baybulatova G.D.</i> A Class of Semilinear Degenerate Equations with Fractional Lower Order Derivatives	444
<i>Rettieva A.N.</i> Dynamic Multicriteria Games with Different Planning Horizons	449
<i>Rubinovich E.Ya.</i> Alternate Pursuit of Two Targets, One of Which Is a False	451
<i>Subbotina N.N.</i> Calculus of Variations in Solutions of Dynamic Reconstruction Problems	455
<i>Tanwani A., Yufereva O.O.</i> Suboptimal Nonlinear Filters with Poisson-Sampled Measurements	459
<i>Veliov V.M.</i> Model Predictive Control and Regularity of Mappings .	462
<i>Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V.</i> Analytical Solution of Newton's Aerodynamic Problem without the Assumption of Rotational Symmetry	464
Author Index	465



Николай Николаевич Красовский
(К девяностопятилетию со дня рождения)

Академик Николай Николаевич Красовский — выдающийся русский учёный, обогативший науку фундаментальными достижениями в ряде направлений математики и механики.

Н.Н. Красовский родился 7 сентября 1924 г. в Екатеринбурге в семье известного в городе врача. С 1932 по 1941 год он учился в школе № 1 г. Свердловска. С 1941 по 1943 год работал электромонтёром на заводе имени С. Орджоникидзе. Поступив в 1943 г. в Уральский политехнический институт (УПИ) им. С.М. Кирова, закончил его в январе 1949 г. со званием инженера по пластической и термической обработке металлов. На втором курсе института начал заниматься научной работой под руководством профессора-алгебраиста С.Н. Черникова, заведующего кафедрой высшей математики.

После окончания УПИ Николай Николаевич в течение десяти лет работал на кафедре высшей математики в должностях ассистента, доцента, профессора, заведующего кафедрой. В 1959–1970 гг. работал в Уральском государственном университете (УрГУ) им. А.М. Горького, заведую сначала кафедрой теоретической механики, а затем — организованными по его инициативе кафедрой вычислительной математики и (с 1965 г.) кафедрой прикладной

математики. В 1970–1977 гг. Н.Н. Красовский возглавлял Институт математики и механики (ИММ) АН СССР, организованный на базе Свердловского отделения Математического института им. В.А. Стеклова по инициативе академиков И.М. Виноградова и М.В. Келдыша. Позднее институт вошёл в состав Уральского научного центра (позднее — Уральского отделения РАН). До последних дней жизнь и научная деятельность Николая Николаевича были связаны с ИММ.

Приоритеты научных интересов Н.Н. Красовского лежали в сфере качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, теории стабилизации движения, математической теории управления, теории дифференциальных игр. Наряду с этим, он проявлял устойчивый интерес и к другим направлениям математики и механики, к новейшим достижениям в этих направлениях, поддерживал их развитие в Уральском регионе. Широта научных интересов Н.Н. Красовского проявилась ещё в молодые годы под влиянием его учителей — Е.А. Барбашина, Н.П. Еругина, И.Г. Малкина, Н.Г. Четаева. Он успешно продолжил научные традиции и научные исследования в области качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости, восходящие к А.М. Ляпунову.

Перечисляя кратко фундаментальные научные результаты, полученные Н.Н. Красовским в указанных направлениях, отметим, прежде всего, что им доказано существование функций Ляпунова, удовлетворяющих теоремам Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Далее, им предложен подход к решению задач оптимального программного управления, основанный на идеях и методах функционального анализа. Линейные задачи с функционалами, имеющими смысл нормы в подходящих функциональных пространствах, были сведены им к проблеме моментов, решение которой связано с одной из важнейших теорем функционального анализа — теоремой Хана — Банаха о распространении линейного функционала. Такой подход позволил получить недостающую информацию о краевых условиях для сопряжённой системы принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Н.Н. Красовский построил теорию устойчивости для систем с последствием. Им впервые было показано, что движение таких систем естественно описывать обыкновенными дифференциальными уравнениями в функциональном пространстве отрезков траек-

торий. Для линейных систем с последствием эволюция отрезков траекторий определяется линейным преобразованием, обладающим полугрупповым свойством, что позволило привлечь результаты теории полугрупп линейных преобразований. Были получены критерии асимптотической устойчивости в терминах спектра производящего оператора полугруппы преобразований. Применяв указанный подход, Н.Н. Красовский распространил второй метод Ляпунова на системы с последствием. При этом оказалось естественным использование в роли функций Ляпунова функционалов Ляпунова — Красовского, что позволило доказать теорему об асимптотической устойчивости, допускающую обращение. Впервые им была перенесена теория оптимальной стабилизации на системы с последствием. Для линейной задачи стабилизации с квадратичным функционалом качества им указан явный вид линейного функционала, доставляющего решение задачи.

Н.Н. Красовский развил основополагающую концепцию задач устойчивости стохастических систем, возмущённых марковскими процессами. Им введены основные определения стохастической устойчивости, которые стали общепринятыми. Было введено понятие стохастических функций Ляпунова. В терминах этих функций получен ряд условий, обеспечивающих стохастическую устойчивость.

Н.Н. Красовским была создана теория позиционных дифференциальных игр. Центральными моментами теории явились формализация стратегий и движений, а также обоснование альтернативных условий разрешимости игровых задач управления, доказательство общих теорем существования цены и седловой точки игры. Удобным инструментом для исследования игры стала предложенная им унифицированная форма описания динамики вспомогательной модельной системы. Им была решена задача унификации позиционных дифференциальных игр, построены оптимальные стратегии, устойчивые к возмущениям.

Н.Н. Красовский — автор около 300 научных работ, в том числе 6 монографий. Он возглавлял уральскую научную школу по теории устойчивости движения, был основателем и главой уральской научной школы по математической теории управления. Среди его учеников — инженеры и преподаватели, доктора и кандидаты наук, члены-корреспонденты и академики РАН.

Деятельность Н.Н. Красовского в должности директора ИММ

(1970–1977 гг.), его авторитет и энергия обеспечили качественно новый уровень развития Института. Он инициировал и поддерживал многие направления прикладных исследований по механике и новой технике. Большое внимание Николай Николаевич уделял оснащению Института первоклассной вычислительной техникой, развитию вычислительного дела в Уральском регионе.

Весомый вклад внёс Н.Н. Красовский в математическое образование в Уральском регионе и как крупный организатор, и как блестящий лектор. В УрГУ под новые специальности и специализации он создал две новые кафедры: вычислительной математики и прикладной математики. Им было разработано и прочитано большое число спецкурсов, оригинальных по содержанию и включавших новейшие научные достижения, в том числе полученные им самим.

Много времени и сил Николай Николаевич отдавал пропаганде достижений фундаментальной науки среди учёных-прикладников, инженеров, медиков. Для них он разработал и прочитал ряд курсов, опубликовал пособия и брошюры, излагающие в доступной форме идеи и новейшие методы в математике, механике и информатике. Символично, что американский Институт инженеров электротехники и электроники (IEEE), присуждая ему премию 2003 г., отметил его «новаторские идеи, которые были восприняты как теоретиками, так и инженерами-практиками».

Особенно остро Н.Н. Красовский воспринимал проблемы школьного математического образования в стране и Уральском регионе. Он был тесно связан со школой с самого начала своей творческой деятельности. Из года в год он постоянно встречался с учениками и учителями, выступал перед ними с лекциями, проводил занятия, участвовал в работе школьных олимпиад. Н.Н. Красовский неоднократно посещал уроки математики. В 1980-е годы он входил в состав Комиссии по школьному образованию при Отделении математики АН СССР. Проводил большую работу по оценке действующих в общеобразовательной школе программ и учебников по математике.

Серьезную тревогу у Н.Н. Красовского вызывали приводимые в последние десятилетия реформы школьного образования, в частности, школьного математического образования. Он считал, что большинство аргументов, выдвигаемых в пользу этих реформ, являются далеко не бесспорными, а производимые реформаторами действия могут иметь самые негативные последствия для российского школьного образования. Обнадёживало только, что не перевелись ещё учи-

теля по жизненному призванию и высокому пониманию своей миссии, глубокие знатоки своего предмета и блестящие популяризаторы.

Авторитет Н.Н. Красовского среди учёных был весьма высок. К его мнению прислушивались и с ним считались при решении актуальных проблем науки и образования. В 1964 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1968 г. — действительным членом АН СССР. Входил в состав Президиума РАН и бюро Отделения механики и процессов управления АН СССР, являлся членом Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике. Входил в редколлегии ведущих научных изданий.

Научные достижения и преподавательская деятельность Н.Н. Красовского были высоко оценены государством (Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, кавалер Орденов Советского Союза и России) и научной общественностью (Большая золотая медаль Российской Академии Наук им. М.В. Ломоносова, Золотая медаль им. А.М. Ляпунова, Демидовская премия в области физико-математических наук, премия «Триумф», доктор Honoris causa Венгерской академии наук, награда Международного общества инженеров электриков и электронщиков (IEEE), лауреат премии программы Фонда содействия Отечественной науки «Выдающиеся учёные»).

Работоспособность, сильный волевой характер, доброжелательность в общении были неотъемлемыми человеческими качествами Николая Николаевича. Он был настоящим гражданином, которого глубоко волновала судьба России.

Программный комитет конференции

О разрешимости одного класса дифференциальных уравнений распределенного порядка

А.А. Абдрахманова¹, В.Е. Федоров²

¹ Уфимский государственный авиационный технический университет,
Уфа, Россия, abdrahmanova-a@mail.ru

² Челябинский государственный университет,
Челябинск, Россия, kar@csu.ru

Аннотация: Исследована начальная задача для линейного неоднородного уравнения с распределенной производной Римана — Лиувилля и с ограниченным оператором в правой части. С использованием преобразования Лапласа показано существование единственного в классе экспоненциально ограниченных функций классического решения, найден вид решения.

Ключевые слова: производная Римана — Лиувилля, производная распределенного порядка, существование и единственность решения, преобразование Лапласа.

Введение

Уравнения распределенного порядка стали объектом изучения ученых в конце 20 века [1, 4], при этом их исследования часто связаны с прикладными задачами, численными методами. В настоящее время появляется все больше математических работ, посвященных исследованию вопросов существования и единственности, поведения решений уравнений с распределенными производными [2, 3, 5–7].

В данной работе рассмотрено неоднородное линейное уравнение в банаховом пространстве с распределенной производной Римана — Лиувилля и с ограниченным оператором. С использованием методов теории преобразования Лапласа исследована однозначная разрешимость начальной задачи для этого уравнения и найден операторный вид решения. Аналогичные уравнения с распределенной производной Герасимова — Капуто исследовались в работах [3, 5].

1. Основной результат

При $\beta > 0$ обозначим $g_\beta(t) := t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ для $t > 0$,

$$J_t^\beta h(t) := (g_\beta * h)(t) := \int_0^t g_\beta(t-s)h(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)ds.$$

Пусть $\alpha \in (0, 1]$, D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля, т. е. $D_t^\alpha h(t) := \frac{d}{dt} J_t^{1-\alpha} h(t)$, $D_t^{-\alpha} h(t) := J_t^\alpha h(t)$. Пусть $\mathfrak{L}[h]$ — преобразование Лапласа функции h . При доказательстве основного результата существенным образом использовалось равенство

$$\mathfrak{L}[D_t^\alpha h](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[h](\lambda) - D_t^{\alpha-1} h(0), \quad \alpha \in (0, 1].$$

Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$. При $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ рассмотрим задачу

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^{\alpha-1} x(0) d\alpha = x_0 \quad (1)$$

для дифференциального уравнения распределенного порядка.

$$\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

где D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля, $b \in (0, 1]$, $a < b$. Не исключается случай $a < 0$. Решением задачи (1), (2) будем называть функцию $x \in C(\mathbb{R}_+; \mathfrak{X})$, такую, что существует $\int_a^b \omega(\alpha) D_t^\alpha x(t) d\alpha \in C(\mathbb{R}_+; \mathfrak{X})$ и выполняются равенства (1) и (2).

Обозначим через $E(\mathfrak{X})$ множество таких функций $x : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathfrak{X}$, что при всех $t \geq 0$ $\|x(t)\|_{\mathfrak{X}} \leq K e^{at}$ для некоторых $K, a > 0$. Будем использовать также обозначения

$$W(\lambda) := \int_a^b \omega(\alpha) \lambda^\alpha d\alpha, \quad X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (W(\lambda)I - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$\gamma = \bigcup_{k=1}^3 \gamma_k, \quad \gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg \lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\gamma_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\},$$

$$\gamma_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg \lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}.$$

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $f \in (\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{X})$, $x_0 \in \mathfrak{X}$ и функция $\omega : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при некотором $\beta > 0$ $W(\lambda)$ — аналитическая функция на множестве $B_\beta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \beta, \arg \lambda \neq \pi\}$, при этом

$$\exists C > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \lambda \in B_\beta \quad |W(\lambda)| \geq C|\lambda|^\delta.$$

Тогда при $r_0 = \max\{\beta, (2\|A\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}/C)^{1/\delta}\}$ функция

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением задачи (1), (2) в пространстве $E(\mathfrak{X})$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 19-41-450001, и Министерством науки и высшего образования РФ, задание 1.6462.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. О континуальных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. Акад. наук СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Стрелецкая Е.М., Федоров В.Е., Дебуш А. Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 63–72.
4. Caputo M. Mean fractional order derivatives. Differential equations and filters // Annali dell'Universita di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche. 1995. Vol. XLI. P. 73–84.
5. Fedorov V.E., Streletskaia E.M. Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electron. J. Differential Equations. 2018. Vol. 2018, no. 176. P. 1–17.
6. Kochubei A.N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2008. Vol. 340. P. 252–280.
7. Umarov S., Gorenflo R. Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations // Z. Anal. Anwend. 2005. Vol. 24. P. 449–466.

On Solvability of a Class of Distributed Order Differential Equations

Aliya A. Abdrakhmanova¹, Vladimir E. Fedorov²

¹ Ufa State Aviation Technical University,
Ufa, Russia, abdrakhmanova-a@mail.ru

² Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia, kar@csu.ru

Abstract: An initial problem is investigated for a linear inhomogeneous equation with a distributed Riemann—Liouville derivative and with a bounded operator on the right-hand side. Using the Laplace transform, the existence of a unique classical solution in the class of exponentially bounded functions is shown, the form of the solution is found.

УДК 517.988.68

О локализации линий разрыва зашумленной функции

А.Л. Агеев¹, Т.В. Антонова²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, ageev@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, tvantonova@imm.uran.ru

Аннотация: Предполагается, что точная функция двух переменных гладкая за исключением линий разрыва, в каждой точке которых функция имеет разрыв первого рода. Для равномерной сетки в каждом узле известны средние значения на квадрате от возмущенной в $L_2(\mathbb{R}^2)$ функции. Требуется по приближенным данным локализовать (определить положение) линий разрыва. На основе процедур усреднения конструируются и исследуются глобальные дискретные регуляризирующие алгоритмы аппроксимации. Формулируются различные варианты условий на точную функцию (классы корректности) и проводится оценка точности локализации на этих классах.

Введение

Задачи локализации (определения положения) линий, вне которых измеряемая функция f двух переменных гладкая, а в каждой точке линии терпит разрыв первого рода (линии разрыва) часто возникают при обработке изображений (границы объектов). Обычно искусственным объектам отвечают кусочно-гладкие линии с небольшим

числом кусков. Границы естественных объектов могут быть нерегулярны. Далее в упрощенной формулировке представлены результаты для кусочно-линейных границ [1]. Затем на идейном уровне рассматривается случай нерегулярных границ.

1. Исследование методов локализации

Задача I (случай ломанных). Положим $\Gamma = \bigcup_1^l \Gamma_k$, где Γ_k — отрезки; $\gamma_{k,j}$ — наименьший угол между смежными отрезками Γ_k, Γ_j ; $|\Gamma|$ — длина ломанной. Пусть точная функция $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет разрывы первого рода по линии Γ ; $\Delta_k(x, y)$ — скачок функции f на отрезке Γ_k . Задана равномерная сетка $T = \{(x^n, y^m)\}$, τ — шаг сетки; f^δ — приближенная функция: $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$.

Вводятся средние значения:

$$f_{n,m}^\delta = (1/\tau^2) \int_{y^m - \tau/2}^{y^m + \tau/2} \int_{x^n - \tau/2}^{x^n + \tau/2} f^\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Постановка задачи. Дано: $\delta, f_{n,m}^\delta$ и шаг τ .

Требуется: аппроксимировать множество $\Gamma = \bigcup_1^l \Gamma_k$ подмножеством точек сетки T с оценкой точности на классе корректности $\mathfrak{M}$:

(0) для любого квадрата Π такого, что $\Pi \cap \Gamma = \emptyset$, сужение функции f на Π принадлежит соболевскому классу W_2^1 ;

(i) $|f(x, y)| \leq r$; для $(x, y) \notin \Gamma_k$ почти всюду выполнены неравенства $|f'_x(x, y)| \leq r, |f'_y(x, y)| \leq r$; (считаем $r = 1$);

(ii) заданы положительные константы $L, \Delta^{\min}$:

$$0 < l \leq L, \quad \min_{k, (x,y) \in \Gamma_k} |\Delta_k(x, y)| \geq \Delta^{\min};$$

(iii) заданы положительные числа $\gamma^{\min} \leq \pi$ и $S^{\min}$:

$$\min_{k,j: \Gamma_k, \Gamma_j \text{ — смежные}} \gamma_{k,j} \geq \gamma^{\min}, \quad \min_k |\Gamma_k| \geq S^{\min}.$$

Пример финитных дискретизованных усреднений по x и по y . Введем усредняющие ядра

$$\phi(t) = \cos^2(\pi t/2), \quad t \in [-1, 1]; \quad \psi(t) = 1/2, \quad t \in [-1, 1],$$

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\left(\frac{t}{\lambda_1}\right), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\left(\frac{t}{\lambda_2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Положим $\Lambda_{\lambda_1\lambda_2}^{ij} = \phi'_{\lambda_1}(i\tau)\psi_{\lambda_2}(j\tau)\tau^2$; $\lambda_1 = (2n_1 + 1)\tau/2$, $\lambda_2 = (2n_2 + 1)\tau/2$. Тогда дискретизованные усреднения по x и y имеют вид

$$G_x^{\delta, n_1 n_2}(x^n, y^m) = \sum_{j=-n_2}^{n_2} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \Lambda_{\lambda_1\lambda_2}^{ij} f_{n+i, m+j}^{\delta},$$

$$G_y^{\delta, n_1 n_2}(x^n, y^m) = \sum_{i=-n_2}^{n_2} \sum_{j=-n_1}^{n_1} \Lambda_{\lambda_1\lambda_2}^{ij} f_{n+i, m+j}^{\delta}.$$

Положим

$$H_{n_1 n_2}^{\delta}(x^n, y^m) = \max\{|G_x^{\delta, n_1 n_2}(x^n, y^m)|, |G_y^{\delta, n_1 n_2}(x^n, y^m)|\}.$$

Пусть U, V — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем меры близости U, V .

$$\mu(U; V) = \sup_{(x_1, y_1) \in U} \inf_{(x_2, y_2) \in V} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

$$\rho(U; V) = \max\{\mu(U; V), \mu(V; U)\}.$$

А л г о р и т м $PD(\delta, f_{n, m}^{\delta})$

Подготовка к циклу. Положим $N = 0$; $T^{\delta} = \emptyset$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) *сетки* T . Если в процессе перебора не рассмотренных точек сетки T не осталось, то конец цикла. Пусть (x^n, y^m) — текущая точка. Если $H^{\delta}(x^n, y^m) > \Delta^{\min}/2$ и $\rho((x^n, y^m); T^{\delta}) > 4\sqrt{2}\lambda_1$, то $N := N + 1$; $T^{\delta} := T^{\delta} \cup (x^n, y^m)$ и продолжаем цикл; иначе — продолжаем цикл.

Пусть $\Gamma_k = \{(x_k(t), y_k(t)): 0 \leq t \leq |\Gamma_k|\}$ — естественная параметризация звена Γ_k . Положим $\Gamma_k^{\varepsilon} = \{(x_k(t), y_k(t)): \varepsilon \leq t \leq |\Gamma_k| - \varepsilon\}$. В [1] явно выписаны все константы в алгоритме и теореме через константы, входящие в определение класса функций $\mathfrak{M}$: $\delta_0, D_1, D_2, D_3, D_4, \Theta$ и зависимости $n_1 = n_1(\delta), n_2 = n_2(\delta), \tau_0(\delta), h(\delta), \varepsilon(\delta)$.

Теорема 1. *В условиях задачи I для всех $0 < \delta \leq \delta_0, \tau \leq \tau_0(\delta)$ при связи параметров $n_1 = n_1(\delta), n_2 = n_2(\delta)$ и выполнении условия делимости $\min_{1 \leq k, j \leq l, k \neq j} \rho(\Gamma_k^{\varepsilon}; \Gamma_j^{\varepsilon}) \geq h(\delta)$ алгоритм $PD(\delta, f_{n, m}^{\delta})$ построит множество точек $T^{\delta} \neq \emptyset$ такое, что:*

- (1) $\mu(T^\delta; \Gamma) \leq D_1 \delta$;
 (2) $\mu(\Gamma; T^\delta) \leq D_2 \delta$;
 (3) для всех различных точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T^\delta$ справедливо неравенство

$$\rho((x_1, y_1); (x_2, y_2)) > 2D_1 \delta;$$

- (4) для количества точек множества T^δ справедливы оценки

$$D_3 \frac{|\Gamma|}{\delta} - \frac{3\Theta L}{2} \leq N \leq D_4 \frac{|\Gamma|}{\delta}.$$

Задача II (случай нерегулярных границ). Выше приведены результаты, когда линии разрыва являются ломанными. Подход [1] достаточно просто обобщается на кусочно-гладкие линии разрыва. Однако с практической точки зрения желательно, например, рассмотреть случай, когда линия разрыва не дифференцируема ни в одной точке, а это требует новых конструкций. Далее для задачи I на идейном уровне описывается одна из конструкций, позволяющая перенести результаты [1] на более широкий класс функций f .

Основная идея заключается во введении последовательности замкнутых ломанных Γ_s , которые аппроксимируют линию Γ с точностью q_s ($q_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$; $0 < \nu \leq q_{s+1}/q_s < 1$). Для каждого s вводится замкнутая окрестность Q_s ломанной Γ_s и вводится требование вложенности $Q_{s+1} \subset Q_s$. Тогда линия $\Gamma = \bigcap_s Q_s$.

Все условия на точную линию разрыва накладываются посредством условий на масштабы q_s и ломанные линии Γ_s (вводятся параметрические классы корректности $\overline{\mathfrak{M}}(p)$ и точная функция $f \in \overline{\mathfrak{M}}(p)$). Таким образом, все линии классифицируются в зависимости от существования аппроксимирующей последовательности ломаных с заданными свойствами. При улучшении этих свойств улучшается качество приближения линий разрыва методами усреднения. Для $f \in \overline{\mathfrak{M}}(p)$ при ограничении на параметр p получена теорема, аналогичная теореме 1. Приведены примеры как функций с кусочно-дифференцируемыми линиями разрыва, так и функций с нигде не дифференцируемыми линиями разрыва, для которых новая теорема применима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.Л., Антонова Т.В. К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 12–23.

Localization of Discontinuity Lines of a Function with a Noise

A.L. Ageev¹, T.V. Antonova²

¹ IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, ageev@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, tvantonova@imm.uran.ru

Abstract: Exact function of two variables is smooth outside of the discontinuity lines, and at each point on the line has a discontinuity of the first kind. There are uniform grid with the steps τ . It is assumed that, we know the averages on the square $\tau \times \tau$ of the perturbed in $L_2(\mathbb{R}^2)$ function at each node of the grid. It is required based on approximate data localize (finding the position of) the discontinuity lines. On the basis of averaging procedures, global regular algorithms for approximating are constructed and studied. Different conditions for exact function (class of correctness) are formulated and localization accuracy estimation on the class are obtained.

УДК 517.91

О динамических системах с неограниченными предельными множествами

A.A. Азамов¹, Д.Х. Рузимурадова²

¹ АН РУз Институт математики им. В.И. Романовского,
Ташкент, Узбекистан, abdulla.azamov@gmail.com

² НУУз, Ташкент, Узбекистан, d.ruzimurodova@mail.ru

Аннотация: Исследуются неограниченные ω -предельные множества автономных систем. Доказывается, что если ω -предельное множество Ω непрерывной динамической системы не связно, то каждая компонента связности является неограниченной, что уточняет известное свойство о неограниченности несвязных ω -предельных множеств Ω . Доказывается также, что в аналитических системах на плоскости число компонент связности не более чем счетно. Что касается не аналитического случая Ω , то Ω может состоять из континуума компонент связности. Построен пример аналитической системы, в которой Ω состоит из счетного числа компонент связности, а также пример полиномиальной системы, в которой Ω состоит из m компонент связности, где m — заданное целое положительное число.

Ключевые слова: динамическая система, предельное множество, неограниченность, связность, компонента связности.

Введение

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{z} = f(z), \quad (1)$$

$z \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Всюду в дальнейшем будем иметь дело с траекторией $z(t)$, проходящей через определенную начальную точку ξ , $z(0) = \xi$. Пусть Ω — ее ω -предельное множество. Предполагается $\Omega \neq \emptyset$.

Множество Ω всегда замкнуто и инвариантно. Если Ω ограничено, то оно связно [1]. Строение Ω в ограниченном случае исследовано в [2]. Следовательно, если Ω несвязно, то оно неограниченно. Неограниченность Ω возможна либо из-за неограниченности хотя бы одной компоненты связности, либо в случае, когда все компоненты ограниченные, но их количество бесконечно и объединение является неограниченным. Оказывается, что на самом деле второй случай исключается, а в первом случае имеет место более сильное утверждение.

1. Основной результат

Теорема 1. *Если ω -предельное множество системы (1) не связно, то каждая компонента связности является неограниченной.*

Легко построить пример системы на плоскости класса C^∞ , в которой множество компонент связности Ω имеет мощность континуума. В таких системах Ω состоит только из особых точек. В некотором смысле верно и обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть Ω — несвязное ω -предельное множество траектории $z(t)$ динамической системы на плоскости. Если каждая компонента связности множества Ω содержит хотя бы одну неособую точку, то множество компонент связности Ω не более чем счетно.*

Следствие 1. *В аналитических системах на плоскости множество компонент связности ω -предельного множества не более чем счетно.*

Естественно возникает вопрос: может ли ω -предельное множество аналитической системы состоять из бесконечного числа компонент? Ответ утвердителен.

Положим

$$F(x, y) = \psi(x, y) (1 - y^2 \cos x),$$

где $\psi(x, y) = (1 + x^2 + y^4)^{-1}$ и рассмотрим гамильтонову систему с возмущением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F_y(x, y) - \lambda F(x, y) F_x(x, y), \\ \dot{y} &= -F_x(x, y) - \lambda F(x, y) F_y(x, y), \quad \lambda > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 3. ω -предельное множество Ω траекторий системы (2), проходящих через точку (x_0, y_0) , $0 < F(x_0, y_0) < 1$, состоит из линии уровня $F(x_0, y_0) = 0$ и имеет бесконечное число компонент связности.

Теорема 4. Для каждого целого положительного m существует полиномиальная динамическая система степени n , такая, что предельное множество Ω состоит из m компонент связности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. 534 p.
2. Lopez V.J., Llibre J.S. A topological characterization of the ω -limit sets for analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane // Adv. Math. 2007. Vol. 216, no. 2. P. 677–710.

On Unbounded Limit Sets of Dynamical Systems

A.A. Azamov¹, D.H. Ruzimuradova²

¹ AS RUz Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskii,
Tashkent, Uzbekistan, abdulla.azamov@gmail.com

² NUUz, Tashkent, Uzbekistan, d.ruzimurodova@mail.ru

Abstract: Unlimited ω -limit sets of autonomous systems are investigated. It is proved that if the ω -limit set Ω is not connected, then each its component is unbounded, that clarifies the well-known property confirming that if the ω -limit set is not connected then it is an unbounded. It is established that the number of connectivity components of the ω -limit set of a planar analytic system can not be more than countable. As for the non-analytic case, Ω can consist of continuum connectivity components. Examples of an analytic system possessing ω -limit set with infinity number of components and a polynomial system with the Ω -limit set having m connectivity components is constructed, where m is a given positive integer.

Оптимизация непрерывных систем в классе дискретных управляющих воздействий

В.В. Альсевич

БГУ, Минск, Беларусь, alsevichvv@mail.ru

Аннотация: Для задачи оптимального управления с терминальными ограничениями в классе дискретных управляющих воздействий приведены условия оптимальности в виде дискретного принципа максимума.

Ключевые слова: дискретные управления, дискретный принцип максимума.

Введение

Как известно, основным результатом классической теории оптимального управления является принцип максимума Л.С. Понтрягина [7]. К настоящему времени имеется необозримое множество работ для различного вида задач оптимального управления, для которых доказывается принцип максимума. Однако, как правило, задачи рассматриваются в классах кусочно-непрерывных или измеримых управляющих воздействий.

В последние годы внимание многих исследователей обращено на оптимизацию непрерывных систем управления в классе дискретных управляющих воздействий [6]. Отличие состоит в том, что их переключение может происходить не в любой момент времени, как у кусочно-непрерывных, а только в заданные моменты. С практической точки зрения такие управляющие воздействия более реальны. Тем более, что при численной реализации на вычислительных устройствах непрерывная задача сводится к дискретной. При этом может искажаться истинный результат.

Для общей задачи оптимального управления типа Больца в классе дискретных управлений в [6] доказано условие оптимальности в виде принципа квазимаксимума. Этот результат подобен условиям оптимальности для дискретных систем управления [4]. Для задачи со специальной правой частью системы управления в [6] доказано условие оптимальности в виде дискретного принципа максимума. Впоследствии этот же результат был приведен в [3] для систем с

запаздыванием, в [2] — для задачи с функционалом, зависящим от промежуточных состояний системы управления.

В настоящее время автором данного сообщения получены условия оптимальности особых дискретных управлений для различных задач, когда дискретный принцип максимума становится неэффективным. В частности, в [1] приведено условие оптимальности особых дискретных управлений для систем с запаздыванием с использованием матричных импульсов [5].

В данном сообщении приводится условие оптимальности в виде дискретного принципа максимума для задачи оптимального управления непрерывной системой со специальной правой частью и терминальными ограничениями.

1. Постановка задачи

В классе дискретных управляющих воздействий рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\dot{x} = f_0(x) + B(x)u, \quad t \in T = [0, t^*], \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x(t^*) &\in X^* = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n: g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad g_i(x) = 0, \quad i = \overline{m+1, m+k}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T. \quad (4)$$

Здесь: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, U — выпуклый компакт.

Напомним [6], что управление $u(t) \in U$, $t \in T$, называется дискретным (с периодом квантования $h > 0$), если $u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h)$, $\tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, t^* - h\}$, где $h = t^*/N$, N — натуральное число.

Дискретное управление $u(t)$, $t \in T$, допустимо, если удовлетворяет ограничению (4). Допустимое управление называют программой [6], если соответствующая траектория $x(t)$, $t \in T$, системы (2) удовлетворяет ограничению (3).

В дальнейшем все вектора понимаются как вектор-столбцы. Для транспонирования используется знак $'$ (штрих).

2. Дискретный принцип максимума

Будем предполагать, что функции $\varphi(x)$, $f_0(x)$, $B(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m+k}$ непрерывно дифференцируемы. Пусть $u(t)$, $t \in T$ — некоторая программа в задаче (1)–(4), $x(t)$, $t \in T$ — соответствующая траектория. Как обычно, обозначим через $H(x, \psi, u) = \psi'(f_0(x) + B(x)u)$ гамильтониан задачи, где $\psi(t)$, $t \in T$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x(t), \psi, u(t))}{\partial x}, \quad t \in T. \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Если $u(t)$, $t \in T$ — оптимальная программа в задаче (1)–(4), $x(t)$, $t \in T$ — соответствующая оптимальная траектория, тогда существуют такие числа λ_i , $i = \overline{0, m+k}$, что вдоль указанных программы и траектории и соответствующего решения сопряженной системы (5) выполняются условия:

- 1) условие нетривиальности: $\sum_{i=0}^{m+k} \lambda_i^2 \neq 0$;
- 2) условия неотрицательности: $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{0, m}$;
- 3) условие трансверсальности:

$$\psi(t^*) = -\lambda_0 \frac{\partial \varphi(x(t^*))}{\partial x} - \sum_{i=1}^{m+k} \lambda_i \frac{\partial g_i(x(t^*))}{\partial x};$$

- 4) условия дополняющей нежесткости: $\lambda_i g_i(x(t^*)) = 0$, $i = \overline{1, m}$;
- 5) условие максимума:

$$\int_t^{t+h} H(x(s), \psi(s), u(s)) ds = \max_{v \in U} \int_t^{t+h} H(x(s), \psi(s), v) ds, \quad t \in T_h.$$

Заметим, что в силу вида правой части системы (2) последнее условие принимает вид:

$$\left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s)) ds \right) u(t) = \max_{v \in U} \left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s)) ds \right) v, \quad t \in T_h.$$

Пусть $f_0(x) = Ax$, $B(x) = B$, функции $\varphi(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, выпуклы, а функции $g_i(x)$, $i = \overline{m+1, m+k}$, линейны. Тогда сформулированные в теореме условия являются необходимыми и достаточными для оптимальности дискретного управления $u(t)$, $t \in T$, в задаче (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Альсевич В.В.* Условия оптимальности для систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий // XIX Междунар. научн. конф. по дифференц. уравн-ям (Еругинские чтения): матер. Междунар. научной конф. Могилев, 14–17 мая 2019 г. Ч. 1. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2019. С. 102–104.
2. *Альсевич В.В., Корзун С.Ю.* Условия оптимальности особых управлений в классе дискретных управляющих воздействий // «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 100-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: Материалы Междунар. научн. конф. Минск, 24–29 сент. 2018 г. Минск: Издат. центр БГУ, 2018. С. 58–59.
3. *Габасов Р., Альсевич В.В., Русакова Д.В.* Оптимизация непрерывных динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий // Междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл. Минск, 1–5 окт. 2013 г. Минск: БГУ, 2013. С. 103–105.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с. (Изд. 2-е. М.: Книжный дом «Либроком», 2012. 256 с.)
6. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В., Калинин А.И., Крахотко В.В., Павленок Н.С.* Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
7. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд., стереотипное. М.: Наука, 1983. 393 с.

Optimization of Continuous Systems in the Class of Discrete Controls

V.V. Alseovich

BSU, Minsk, Belarus, alseovichvv@mail.ru

Abstract: The optimality conditions are given in the form of a discrete maximum principle for the optimal control problem with terminal constraints in the class of discrete control actions.

Стабилизация за конечное время некоторых систем с упругими звеньями

И.М. Ананьевский

ИПМех РАН, Москва, Россия, anan@ipmnet.ru

Аннотация: Рассматривается класс механических систем, которые представляют собой твердое тело, несущее упругие звенья. Упругие звенья моделируются системой линейных осцилляторов, подвешенных к несущему телу в различных конфигурациях. Помимо управляющей силы тело испытывает действие малого неконтролируемого возмущения. Предполагается, что не все фазовые переменные, описывающие состояние осцилляторов, доступны для измерений. Предложен подход к построению законов управления в форме обратной связи, приводящих всю систему в заданное терминальное положение покоя за конечное время.

Ключевые слова: механическая система, система осцилляторов, синтез управления, возмущения, неполная информация, дефицит управлений, стабилизация за конечное время.

Введение

Исследуется задача о перемещении платформы с подвешенными к ней одним или несколькими линейными осцилляторами, диссипативными или без диссипации. Осцилляторы могут быть присоединены к несущему телу каждый по отдельности или в виде цепочки последовательно соединенных осцилляторов. Платформа движется по горизонтальной прямой под действием ограниченной управляющей силы и неконтролируемого возмущения. Предполагается, что координата и скорость платформы в каждый момент времени известны, а фазовые состояния некоторых осцилляторов не доступны для измерений.

Рассматриваемая система служит простой моделью, описывающей управляемые перемещения платформы, несущей упругие элементы или сосуд с жидкостью, причем фазовые состояния упругих элементов считаются неизвестными, а платформа испытывает неконтролируемое и непостоянное воздействие внешней среды. Цель управления состоит в приведении платформы в заданное терминальное положение и успокоении осцилляторов за конечное (нефиксированное) время.

1. Постановка задачи и основной результат

Приведем одну из рассматриваемых постановок задач. Динамика системы в случае, когда упругое звено моделируется цепочкой из n осцилляторов (рис. 1), описывается уравнениями

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_0 &= -k_1 x_0 + k_1 x_1 + u + v, \\ m_1 \ddot{x}_1 &= k_1 x_0 - (k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2, \\ &\dots \\ m_i \ddot{x}_i &= k_i x_{i-1} - (k_i + k_{i+1}) x_i + k_{i+1} x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ &\dots \\ m_n \ddot{x}_n &= -k_n x_{n-1} + k_n x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_0 — координата платформы на прямой, m_0 — ее масса, x_i — координата массы m_i i -го осциллятора, k_i — жесткость пружины осциллятора, $i = 1, \dots, n$.



Рис. 1. Платформа с цепочкой осцилляторов.

На управляющую силу u и возмущение v накладываются ограничения

$$|u| \leq U, \quad |v| \leq \rho U, \quad 0 < \rho < 1. \tag{2}$$

Предполагается, что координата и скорость платформы, а также координата первой массы в каждый момент времени известны, а остальные фазовые переменные осцилляторов не доступны для измерений, то есть, наблюдаются только величины $x_0, \dot{x}_0, x_1$.

С помощью критерия Калмана и используя трехдиагональность матрицы системы (1), установлено, что система удовлетворяет условиями наблюдаемости и управляемости [2, 3]. С применением стандартных методов теории наблюдений вектор фазовых переменных может быть восстановлен в каждый момент времени. Это позволяет для решения задачи воспользоваться подходом, развитым в [1, 4]. Указанный подход дает возможность построить закон управления в форме обратной связи, удовлетворяющий ограничению (2) и, при

некоторых предположениях относительно ρ , останавливающий систему (1) в заданном состоянии покоя.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10343).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // ДАН. 2010. Т. 434. № 3. С. 319–323.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1969. 358 p.
4. *Ovseevich A.* A Local Feedback Control Bringing a Linear System to Equilibrium // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 165, no. 2. P. 532–544.

Finite-Time Stabilization of Some Systems with Elastic Links

I.M. Ananievski

IPMech RAS, Moscow, Russia, anan@ipmnet.ru

Abstract: A class of mechanical systems that are a solid body carrying elastic links are considered. Elastic links are modeled by a system of linear oscillators suspended to the carrying body in various configurations. In addition to the controlling force, the body experiences action of a small uncontrollable disturbances. It is assumed that not all phase variables describing states of the oscillators are available for measurements. An approach to constructing control laws in a feedback form bringing the entire system to a given terminal equilibrium state in a finite time is proposed.

УДК 517.977.5

Вырожденная линейно-квадратичная задача для квазилинейной системы

И.Ю. Андреева¹, А.Н. Сесекин^{1,2}

¹ УрФУ, Екатеринбург, Россия, i.y.andreeva@urfu.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, sesekin@list.ru

Аннотация: Рассматривается задача минимизации вырожденного квадратичного функционала на траекториях квазилинейной управляемой системы. Эта задача в классе измеримых функций решения не имеет. Оптимальное управление содержит импульсные составляющие в начальный

и конечный моменты. Предложена схема построения асимптотически оптимального управления.

Ключевые слова: вырожденная линейно-квадратичная задача, оптимальное управление, импульсное управление, асимптотическое приближение.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J[u(\cdot)] = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) Q(t) x(t) dt \quad (1)$$

вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \mu f(x, t) + B(t)\dot{u}(t) \quad (2)$$

с граничными условиями

$$x(t) = x_0, \quad x_{t_f} = 0,$$

где $x(t)$ — n -мерная функция ограниченной вариации, $u(t)$ — r -мерная вектор-функция ограниченной вариации, μ — малый (по модулю) параметр, t_0 — заданный начальный момент времени, t_f — заданный конечный момент времени ($t_0 < t_f$), $x(t)$ — вектор-функция размерности n , $f(x, t)$ — нелинейная вектор-функция размерности n , $A(t)$ — непрерывная матрица-функция размерности $n \times n$, $Q(t)$ — симметричная, неотрицательно-определенная матрица-функция размерности $n \times n$, $B(t)$ — непрерывно дифференцируемая матрица-функция размерности $n \times r$.

Особенность данной задачи (1)–(2) состоит в том, что в классе измеримых управлений рассматриваемая задача решения не имеет. В случае $\mu = 0$ эта задача рассматривалась [1, 2]. Там показано, что решение задачи при $\mu = 0$ является обобщенной функцией и содержит импульсные составляющие, сосредоточенные в начальный и конечный моменты времени. Задача минимизации невырожденного квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы рассматривалась в [3].

Для рассматриваемой задачи построено асимптотически оптимальное управление. Это управление имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_N(t) = & \Delta_{t_0} u_N(t_0, x(t_0), \mu) \delta(t - t_0) + \\ & + u_N^{(r)}(t, x(t), \mu) + \Delta_{t_f} u_N(t_f, x(t_f - 0), \mu) \delta(t - t_f). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\Delta_{t_0} u_N(t_0, x(t_0), \mu) \delta(t - t_0)$ — импульсное воздействие, сосредоточенное в начальный момент, которое обеспечит скачек траектории в начальный момент. Слагаемое $u_N^{(r)}(t, x(t), \mu)$ является регулярной составляющей управления и осуществляет управление системой на интервале (t_0, t_f) . Последнее слагаемое $\Delta_{t_f} u_N(t_f, x(t_f - 0), \mu) \delta(t - t_f)$ является импульсной составляющей управления, которое действует в финальный момент t_f и обеспечивает разрыв траектории в момент t_f .

Обоснован алгоритм построения последовательности $\dot{u}_N(t)$. Отметим, что управление (3) является программным. Если же с помощью этого управления строить позиционный алгоритм управления, то мы получим импульсно-скользящий режим, аналогичный [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371).

ЛИТЕРАТУРА

1. Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Об особых решениях в задачах оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 4. С. 665–671.
2. Завалишин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е. Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1983. 112 с.
3. Калинин А.И., Лавринович Л.И. Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 3–12.

Singular Linear-Quadratic Problem for a Quasilinear System

I.Yu. Andreeva¹, A.N. Seseikin^{1,2}

¹ UrFU, Yekaterinburg, Russia, i.y.andreeva@urfu.ru

² IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, seseikin@list.ru

Abstract: We consider the problem of minimizing a singular quadratic functional on the trajectories of a quasilinear control system. This problem in the class of measurable functions has no solution. Optimal control contains impulse components at the initial and final moments. A scheme for constructing asymptotically optimal control is proposed.

Существование замкнутой траектории в четырёхмерной модифицированной модели брюсселятора

О.С. Ахмедов¹, А.М. Тилавов², С.Б. Дустназаров³

¹ АН РУз Институт математики им. В.И.Романовского,
Ташкент, Узбекистан, odiljon.axmedov@gmail.com

² АН РУз Институт математики им. В.И.Романовского,
Ташкент, Узбекистан, asliddintm@gmail.com

³ Гулистанский государственный университет,
Сырдарья, Узбекистан, sdustnazarov@mail.ru

Аннотация: Рассматривается математическая модель химических реакций, относящихся к типу брюсселятора И. Пригожина. В отличие от двумерных и трехмерных моделей, в четырехмерной модели отсутствует замкнутая траектория в первом октанте вопреки цикличности реакции. В связи с этим, предлагается модифицированная четырехмерная модель брюсселятора и методом DN-слежения А. Азамова доказывается существование замкнутой траектории.

Ключевые слова: динамическая система, замкнутая траектория, химическая реакция, отображение Пуанкаре, метод DN-слежения.

Введение

Одну из важных задач качественной теории динамических систем составляет задача о существовании замкнутых траекторий [1]. Несмотря на многочисленные методы, посвященные решению этой задачи, выяснение того, имеет ли конкретная нелинейная система замкнутую траекторию, остается сложной проблемой.

В данной работе методом DN-слежения [2] строится отображение Пуанкаре и доказывается существование замкнутой траектории в модифицированной модели циклической химической реакции типа брюсселятора [3].

Необходимость модификации обусловлена тем, что классическая модель брюсселятора в $\mathbb{R}^4$ не может иметь замкнутую траекторию в положительном октанте, хотя брюсселятор является математической моделью циклических химических реакций. Это следует из уравнения $A' = -A$ в соответствующей системе [4]. Для сравнения отметим, что в трехмерной модели замкнутая траектория существует для достаточного широкого поля значений параметров [5].

Основной результат

Модифицированная модель брюсселятора представляется системой

$$\begin{aligned}A' &= -A + BX; \\B' &= -BX + \beta; \\X' &= A - BX + X^2Y - X; \\Y' &= BX - X^2Y\end{aligned}\tag{1}$$

где β – параметр системы, A, B, X, Y – концентрации соответствующих реагентов. Таким образом, здесь учитывается влияние компонентов B и X на динамику A .

Теорема 1. *При $\beta = 1.17$ система (1) в области*

$$\Pi = \{ (A, B, X, Y) \mid 1.07 \leq A \leq 1.26, 0.85 \leq B \leq 1.15, \\ 0.98 \leq X \leq 1.38, 0.65 \leq Y \leq 1.1 \}$$

имеет замкнутую траекторию.

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть Σ – гиперплоскость, проходящая через точку

$$z_0 = (1.11692, 0.99112, 1.09485, 0.80461),$$

ортогональна к вектору $f(z_0)$. В гиперплоскости Σ выбирается декартова система координат (u, v, w) с началом z_0 , определяемый стандартный репером траектории, проходящей через z_0 [6, гл. 1, § 5].

В качестве области определения отображения Пуанкаре $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ берется подмножество

$$D = \{ (u, v, w) \in \Sigma \mid -325\delta \leq u \leq 325\delta, \\ -20\delta \leq v \leq 20\delta, -24\delta \leq w \leq 24\delta \}$$

гиперплоскости Σ , где $\delta = 4 \cdot 10^{-6}$.

Методом DN-слежения доказывается существование P и его свойство $P(D) \subset D$ (см. рис. 1).

Также методом DN-слежения можно установить, что система (1) имеет замкнутую траекторию для диапазона значений параметра $\beta \in (0.431, 1.173)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке молодежного гранта (проект ЁФА-Атех-2018-182).

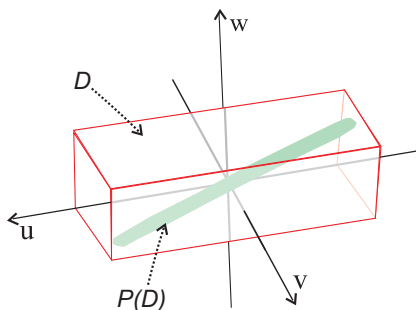


Рис. 1. Область определения D и образ $P(D)$ отображения Пуанкаре (в масштабе $u : v : w = 1 : 5 : 5$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
2. Азамов А.А. Метод DN-слежения для доказательства существования предельных циклов // Дифференциальные уравнения и топология: тезисы докл. междунар. конф., посв. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 17-22 июня 2008 г.). 2008. С. 87–88.
3. Glandsdorff P. and Prigogine I. Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations. New York: Wiley, 1971. 306 p.
4. Gray P., Scott S.K., Merkin J.H. The brusselator model of oscillatory reactions. Relationships between two-variable and four-variable models with rigorous application of mass conservation and detailed balance // J. Chem. Soc. Faraday Trans. 1. 1988. Vol. 84, no. 4. P. 993–1012.
5. Азамов А.А., Ахмедов О.С. О существовании замкнутой траектории в трехмерной модели брюсселятора // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82, № 6. С. 734–750.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 760 с.

Existence of a Closed Trajectory in Four-Dimensional Modified Brusselator Model

O.S. Akhmedov¹, A.M. Tilavov², S.B. Dustnazarov³

¹ Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, odiljon.axmedov@gmail.com

² Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan, asliddintm@gmail.com

³ Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan

Abstract: A mathematical model of chemical reactions related to the type of I. Prigogine's brusselator is considered. The difference is that, in contrast

the two-dimensional and three-dimensional models in the four-dimensional model, in the first octant there is no closed trajectory, despite the cyclical nature of the reaction. In this regard, a modified four-dimensional model of the brusselator is proposed and an existence of a closed trajectory is proved by A. Azamov's DN-tracking method.

УДК 517.977

Попятные процедуры для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом

А.Л. Багно¹, А.М. Тарасьев²

¹ УрФУ, Екатеринбург, Россия, bagno.alexander@gmail.com

² ИММ УрО РАН; УрФУ, Екатеринбург, Россия, tam@imm.uran.ru

Аннотация: Исследуется задача оптимального управления на бесконечном интервале времени с функционалом качества, который содержит подынтегральную функцию и дисконтирующий множитель. Особенностью постановки задачи является предположение о неограниченности подынтегральной функции. Описывается метод численного приближения обобщенного минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — попятная процедура. Основным результатом статьи является обоснование сходимости попятной процедуры. Задачи исследуемого типа встречаются при моделировании процессов экономического роста и в задачах стабилизации динамических систем. Полученные результаты могут быть использованы при построении конечно-разностных схем вычисления функции цены задач оптимального управления или дифференциальных игр.

Ключевые слова: оптимальное управление, функция цены, уравнение Гамильтона — Якоби, попятные процедуры, аппроксимационные схемы.

1. Динамика системы и функция цены

В статье изучается нелинейная задача оптимального управления

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \lambda > 0, \quad t_0 > 0, \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ (P — компактное множество). Предполагается, что выполняются следующие условия:

1. Функции f и h непрерывны по совокупности переменных.
2. Условие Липшица по аргументу x с константой L : $\forall x_1, x_2, \forall p$

$$\begin{aligned}\|f(x_1, p) - f(x_2, p)\| &\leq L\|x_1 - x_2\|, \\ |g(x_1, p) - g(x_2, p)| &\leq L\|x_1 - x_2\|.\end{aligned}$$

3. Условие подлинейного роста : для любых x, p

$$\|f(x, p)\| \leq \varkappa(1 + \|x\|), \quad |g(x, p)| \leq \varkappa(1 + \|x\|), \quad \varkappa > 0.$$

Введем переменную $y = e^{-\lambda\tau}g(x(\tau), u(\tau))$ и определим функцию цены. Пусть U — множество всех измеримых по Лебегу программных управлений $u(\cdot)$ на бесконечном интервале времени $[t_0, +\infty)$.

Определение 1. Функцией цены в задаче с бесконечным горизонтом для начальной точки (t_0, z_0) , где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, называется функция

$$w(t_0, z_0) = \inf_{u(\cdot) \in U} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(y_0 + \int_{t_0}^T e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right),$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет динамике (1)–(2) на интервале $[t_0, +\infty)$.

Для функции цены в точках ее дифференцируемости справедливо уравнение Гамильтона — Якоби вида

$$-\varphi(x) + H(x, \nabla\varphi(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Здесь $\nabla\varphi(x)$ — вектор частных производных. Гамильтониан задачи управления задается соотношением

$$H(x, s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u \in P} (\langle s, f(x, u) \rangle + g(x, u)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

В статье [1, с. 31] было показано, что понятия функции цены задачи (1)–(2), минимаксного решения, введенное А.И. Субботиным [4], и вязкостного решения в смысле Крэндалла — Лионса [5] уравнения (3) эквивалентны.

2. Попятная процедура

Построить попятную процедуру, аппроксимирующую минимаксное решение уравнения (3), затрудняет неограниченность значений функции $\varphi(x)$. Сделаем замену переменных

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}, \quad r_\varepsilon(x) = \begin{cases} \|x\|, & \text{если } \|x\| > \varepsilon, \\ \|x\|^2/(2\varepsilon) + \varepsilon/2, & \text{если } \|x\| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Уравнение (3) после замены можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\lambda\psi(x) + \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\psi(x)) &= 0, \quad \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\psi(x)) = \\ &= \min_{u \in P} \left(\langle \nabla\psi(x), f(x, u) \rangle + \varkappa\psi(x) \left\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x, u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))} \right\rangle + \frac{g(x, u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

По формуле Тейлора имеем

$$\psi^h(x + hf(x, u)) - \psi^h(x) \approx h \langle \nabla\psi(x), f(x, u) \rangle.$$

Подставляя это выражение в уравнение(4) (см. [1]), получим уравнение Гамильтона — Якоби вида

$$\min_{u \in P} (-\psi^h(x) + p(x, u)\psi^h(x + hf(x, u)) + q(x, u)),$$

$$p(x, u) = 1 - \lambda h + \varkappa h \left\langle \nabla r_\varepsilon(x), \frac{f(x, u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))} \right\rangle,$$

$$q(x, u) = \frac{hg(x, u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}.$$

Введем оператор T

$$T\psi(x) = \min_{u \in P} (p(x, u)\psi(x + hf(x, u)) + q(x, u)) \quad (5)$$

и опишем попятную процедуру. Рассмотрим отрезок времени $[t_0, t_n]$, где t_0 — начальный момент, t_n — некоторый достаточно большой момент времени. Введем разбиение этого отрезка $\{\Delta(t_i)\}$ и построим процедуру вычисления функций ψ_Δ :

$$\psi_\Delta(x_{n-1}) = T\psi_\Delta(x_n), \quad \psi_\Delta(x_n) = \psi(x(t_n)). \quad (6)$$

Определение 2. Метод вычисления функций ψ_Δ , задающийся соотношением (6), называется попятной процедурой.

В [6, теорема 2.1] утверждается, что выполняется оценка

$$\|\psi_\Delta - \psi\| \leq Ch^{1/2}, \quad C > 0. \quad (7)$$

Доказывается, что оператор (5) удовлетворяет условиям из статьи [6], и, следовательно, для попятной процедуры (6) верна оценка (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багно А. Л., Тарасьев А. М.* Дискретная аппроксимация уравнения Гамильтона — Якоби для функции цены в задаче оптимального управления с бесконечным горизонтом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 27–39.
2. *Багно А. Л., Тарасьев А. М.* Свойства стабильности функции цены в задаче оптимального управления с бесконечным горизонтом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–56.
3. *Багно А. Л., Тарасьев А. М.* Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 3–14.
4. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. Москва, Наука, 1991. 216 с.
5. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
6. *Souganidis P. E.* Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations // J. Differential Equations. 1985. Vol. 59, no. 1. P. 1–43.

Backward Procedures for Optimal Control Problems with Infinite Horizon

Alexander L. Bagno¹, Alexander M. Tarasyev²

¹ UrFU, Ekaterinburg, Russia, bagno.alexander@gmail.com

² IMM UrB RAS; UrFU, Ekaterinburg, Russia, tam@imm.uran.ru

Abstract: The article deals with the optimal control problem on the infinite horizon, the quality functional of which contains the integrand index and the discounting factor. Peculiarity of the problem is the assumption of the possible unboundedness of the integrand index. The article describes the backward procedure. This procedure is the method of numerical approximation of the minimax solution of the Hamilton—Jacobi equation. The main result of the article is justification of convergence for the backward procedure. Problems of the analyzed type are related to modeling processes of economic growth

and to problems of stabilizing dynamic systems. The obtained results can be used in construction of finite-difference schemes for calculating the value function of optimal control problems or differential games.

УДК 517.929.2+517.977

Об условиях пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем

И.Н. Банщикова¹, С.Н. Попова²

¹ УдГУ, Ижевск, Россия, banshhikova.irina@mail.ru

² УдГУ, Ижевск, Россия, udsu.popova.sn@gmail.com

Аннотация: Рассматривается задача о назначении спектра показателей Ляпунова линейной управляемой системы с дискретным временем посредством линейной по фазовым переменным обратной связи в малой окрестности спектра показателей свободной системы. Дополнительно требуется, чтобы норма матрицы обратной связи удовлетворяла липшицевой оценке по отношению к требуемому смещению показателей. Это свойство называется пропорциональной локальной управляемостью полного спектра показателей Ляпунова. Построен пример, показывающий, что найденные ранее достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова (равномерная полная управляемость исходной системы и устойчивость спектра показателей Ляпунова свободной системы) не являются необходимыми.

Ключевые слова: дискретная линейная система, показатели Ляпунова, управляемость, стабилизируемость.

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Будем предполагать, что матрица $B: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ограничена, а матрица $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ вполне ограничена [4], т. е. $A(k)$ обратима при каждом $k \in \mathbb{N}$, и $\sup_{k \in \mathbb{N}} (\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|) < \infty$. Полный спектр показателей Ляпунова [3, с. 57] свободной системы

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

обозначим через $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$.

Управление $u(\cdot)$ в системе (1) выберем в виде линейной обратной связи $u(k) = U(k)x(k)$, получим замкнутую систему вида

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (3). Будем говорить, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (3), если матрица $A(\cdot) + B(\cdot)U(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для (3) матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для замкнутой системы (3) с выбранным управлением $U(\cdot)$ определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU)$.

Определение 1 [5]. Будем говорить, что система (3) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова, если найдутся такие $\ell > 0$ и $\delta > 0$, что для любого набора чисел $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$, удовлетворяющих неравенству $\max_{i=1, \dots, n} |\mu_i - \lambda_i(A)| \leq \delta$, существует допустимое для системы (3) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U(k)\| \leq \ell \max_{i=1, \dots, n} |\mu_i - \lambda_i(A)|$$

и

$$\lambda_i(A + BU) = \mu_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 2 [6]. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что матрица Калмана $W(k, k+K) \doteq \sum_{j=k}^{k+K-1} X(k, j+1)B(j)B^T(j)X^T(k, j+1)$ системы (1) удовлетворяет неравенству $W(k, k+K) \geq \alpha E$ при всех $k \in \mathbb{N}$; здесь $X(k, s)$ — матрица Коши свободной системы (2), $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица.

Определение 3 [1]. Показатели Ляпунова системы (2) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой вполне ограниченной функции $R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, удовлетворяющей условию $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|R(k) - E\| < \delta$, выполнено неравенство $\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon$; здесь $\lambda_1(AR) \leq \dots \leq \lambda_n(AR)$ — полный спектр показателей Ляпунова мультипликативно возмущенной системы $y(k+1) = A(k)R(k)y(k)$.

В работе [5] было установлено, что если система (1) равномерно вполне управляема, а показатели Ляпунова системы (2) устойчивы, то полный спектр показателей Ляпунова системы (3) пропорционально локально управляем. Здесь построен пример, показывающий, что ни первое, ни второе условие не являются необходимыми для пропорциональной локальной управляемости спектра.

Пример 1. Определим последовательность $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ рекуррентно формулами $k_1 = 1$ и $k_{2j} = jk_{2j-1}$, $k_{2j+1} = j + k_{2j}$ для $j \in \mathbb{N}$, рассмотрим скалярные функции натурального аргумента

$$b(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 1 & \text{при } k \in [k_{2j-1}, k_{2j} - 1], \\ 0 & \text{при } k \in [k_{2j}, k_{2j+1} - 1], \end{cases}$$

$$\varphi(k) = e^{k \sin \ln k}$$

и линейную управляемую систему

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

где

$$A(k) = \begin{pmatrix} e^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)e} \end{pmatrix}, \quad B(k) = \begin{pmatrix} b(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В [2] доказано, что полный спектр показателей Ляпунова свободной системы $x(k+1) = A(k)x(k)$ неустойчив и состоит из чисел $\lambda_1(A) = -1/2$, $\lambda_2(A) = 0$.

Для каждого $K \in \mathbb{N}$ существует номер $j \doteq K$ такой, что для матрицы Калмана системы (4) имеет место равенство

$$W(k_{2j}, k_{2j} + K) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma_j \end{pmatrix},$$

где $\gamma_j > 0$. Это означает, что система (4) не является равномерно вполне управляемой.

Но оказывается, что полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

пропорционально локально управляем. Для произвольных чисел $\mu_1 \in (-3/4, -1/4)$ и $\mu_2 \in (-1/4, 1/4)$ положим $\alpha_1 = e^{\mu_1} - e^{-1/2}$, $\alpha_2 = \alpha_2(k) = e^{\mu_2} - \varphi(k+1)/(\varphi(k)e)$. Тогда матричное управление $U(k) = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$ обеспечивает выполнение равенств $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$, $i = 1, 2$, и при этом удовлетворяет требуемой липшицевой оценке $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U(k)\| \leq \ell \max_{i=1,2} |\mu_i - \lambda_i(A)|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-51-41005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Банищикова И.Н., Попова С.Н. О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 15–26.
2. Банищикова И.Н. Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26, вып. 2. С. 169–176.
3. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
4. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 7. С. 1247–1255.
5. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems // SIAM J. Control Optim. 2019. Vol. 57, no. 2. P. 1355–1377.
6. Halanay A., Ionescu V. Time-Varying Discrete Linear Systems. Input-Output Operators. Riccati Equations. Disturbance Attenuation. Ser. Oper. Theory Adv. Appl. Basel: Birkhäuser, 1994. 230 p.

On Conditions for Proportional Local Controllability of Lyapunov Exponents of Discrete-Time Linear Systems

Irina N. Banshchikova¹, Svetlana N. Popova²

¹ Udsu, Izhevsk, Russia, banshchikova.irina@mail.ru

² Udsu, Izhevsk, Russia, udsu.popova.sn@gmail.com

Abstract: We consider the problem of assigning a Lyapunov spectrum of a linear discrete-time control system by means of linear feedback in a small neighborhood of the Lyapunov spectrum of a free system. In addition, we require that the norm of the feedback matrix satisfy the Lipschitz estimate with respect to the required displacement of the Lyapunov exponents. This property is called proportional local controllability of the Lyapunov spectrum. Earlier, we proved that the uniform complete controllability of the original system and the stability of the Lyapunov spectrum of the free system are sufficient conditions for proportional local controllability of the Lyapunov

spectrum. Here we constructed an example showing that these conditions are not necessary.

УДК 517.926.4

Описание линейного эффекта Перрона при параметрических возмущениях, убывающих к нулю на бесконечности

Е.А. Барабанов¹, В.В. Быков²

¹ ИМ НАН Беларуси, Минск, Беларусь, bar@im.bas-net.by

² МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, vvbykov@gmail.com

Аннотация: Для каждой линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с ограниченными и непрерывными на временной полуоси коэффициентами рассматривается класс тех параметрических возмущений её матрицы коэффициентов, которые экспоненциально убывают к нулю на бесконечности равномерно относительно параметра, принадлежащего некоторому метрическому пространству, и не уменьшают её показатели Ляпунова. Получено полное описание спектров показателей Ляпунова систем с такими возмущениями как вектор-функций параметра. Получено также полное описание спектров показателей Ляпунова как функций параметра правильных по Ляпунову систем с параметрическими возмущениями, которые не уменьшают показатели Ляпунова и убывают к нулю на бесконечности равномерно относительно параметра.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, показатели Ляпунова, спектр показателей Ляпунова, правильная по Ляпунову система, убывающие к нулю возмущения, экспоненциально убывающие к нулю возмущения, функции второго класса Бэра

Введение

Для заданного натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с ограниченными и непрерывными на временной полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Показатели Ляпунова [6, с. 27] системы (1) обозначим через $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$, а через $\Lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))^T$ —

спектр системы (1). Далее мы отождествляем систему (1) с задающей её матричнозначной функцией $A(\cdot)$ и пишем $A \in \mathcal{M}_n$.

В работе [8] О. Перрон построил пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова, для которой существует такая непрерывная на полуоси (2×2) -матрица $Q(t)$, экспоненциально убывающая к нулю на бесконечности (т.е. $t^{-1} \ln \|Q(t)\| \rightarrow \text{const} < 0$ при $t \rightarrow +\infty$), что старший показатель Ляпунова $\lambda_2(A+Q)$ возмущённой системы $(A+Q) \in \mathcal{M}_2$ положителен (в частности, $\lambda_2(A+Q) > \lambda_2(A)$), а младший $\lambda_1(A+Q)$ совпадает с показателем невозмущённой системы $\lambda_1(A)$. О. Перроном построен также [9] пример системы $A \in \mathcal{M}_2$ с отрицательными показателями Ляпунова и такого её определённого в произведении $\mathbb{R}_+ \times G$ (G — окрестность нуля) непрерывного по совокупности переменных возмущения $f(t, x)$ высшего порядка малости (т.е. $\|f(t, x)\| \leq \text{const} \|x\|^m$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 1$), что показатель Ляпунова любого имеющего в начальный момент $t = 0$ ненулевую первую компоненту решения возмущённой системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$ больше некоторого положительного числа, а показатель Ляпунова решений с нулевой в начальный момент первой компонентой — тот же, что и у невозмущённой линейной системы.

Эти примеры Перрона послужили отправной точкой многочисленных исследований влияния различных классов линейных и нелинейных возмущений на показатели Ляпунова систем из $\mathcal{M}_n$, а результаты, полученные в этом направлении, составляют существенную часть современной теории показателей Ляпунова. Эффект изменения значений показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ при тех или иных «малых» её возмущениях назван в монографии [5, гл. 4] эффектом Перрона. Позднее, начиная с работы [4], это название — эффект Перрона — было усвоено только той ситуации (её, формально говоря, и рассмотрел О. Перрон), при которой возмущения не уменьшают показатели Ляпунова исходной системы (этой терминологии мы и следуем в дальнейшем). В отличие от [4, 5], в которых эффект Перрона в соответствии с работой [9] рассматривался при возмущениях высшего порядка малости, мы в соответствии с работой [8] рассматриваем линейные убывающие (в частности, экспоненциально) к нулю возмущения матриц коэффициентов систем из $\mathcal{M}_n$ и в этом случае называем эффект Перрона линейным.

Для дальнейшего важно отметить, что построенная в работе [8] матрица-возмущение имела вид $\mu Q(t)$, где μ — вещественный параметр, и доказано, что для любого $\mu \neq 0$ при таком возмущении

старший показатель Ляпунова возмущённой системы положителен, а младший не изменяется. Имея в виду это обстоятельство, далее, зафиксировав некоторое метрическое пространство M , будем рассматривать семейства линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t, \mu))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где $Q(\cdot, \cdot): \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — непрерывная по совокупности переменных матричнозначная функция. При каждом фиксированном в семействе (2) значении параметра $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с ограниченными (своей, вообще говоря, для каждого μ постоянной) и непрерывными на полуоси коэффициентами, показатели Ляпунова которой обозначим через $\lambda_1(\mu; A + Q) \leq \dots \leq \lambda_n(\mu; A + Q)$. Таким образом, показатели семейства (2) — функции параметра $\mu \in M$; в частности, определена вектор-функция $\Lambda(\cdot; A + Q) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1(\cdot; A + Q), \dots, \lambda_n(\cdot; A + Q))^T: M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Линейный эффект Перрона для систем класса $\mathcal{M}_n$ при экспоненциально убывающих к нулю возмущениях

Через E_n обозначим класс непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q(\cdot, \cdot): \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, экспоненциально убывающих к нулю при $t \rightarrow +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$ (т.е. $\sup_{\mu \in M} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|Q(t, \mu)\| < 0$). Для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n$ через $E_n(A)$ обозначим класс тех возмущений $Q \in E_n$, которые не уменьшают её показатели Ляпунова, т.е. для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n$ и любой $Q \in E_n(A)$ выполняется неравенство $\inf_{\mu \in M} \lambda_k(\mu; A + Q) \geq \lambda_k(A)$ при всех $k = \overline{1, n}$. Очевидно, что для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ класс $E_n(A)$ не пуст, поскольку ему принадлежит тождественно нулевая матрица.

Ставится задача полного описания для каждого $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M класса пар $(\Lambda(A), \Lambda(\cdot; A + Q))$, составленных из спектра $\Lambda(A)$ системы $A \in \mathcal{M}_n$ и вектор-функции $\Lambda(\cdot; A + Q)$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матричнозначная функция Q при каждом A — класс $E_n(A)$, т.е. класса

$$PE_n(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot; A + Q)) \mid A \in \mathcal{M}_n, Q \in E_n(A)\}.$$

Очевидно, что решение этой задачи будет содержать как частный случай пример Перрона. Так как при $n = 1$ справедливо равенство $\lambda_1(A) = \lambda_1(A + Q)$ для любой $Q \in E_1$, то $PE_1(M) = \{(\Lambda(A), \Lambda(A))\}$ для любого метрического пространства M . Поэтому далее считаем, что $n > 1$. Полное описание класса $PE_n(M)$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, и пространства M даёт

Теорема 1. Пусть n — натуральное число, большее единицы, и M — метрическое пространство. Пара $(l, F(\cdot))$, где $l = (l_1, \dots, l_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $F(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot))^T: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, тогда и только тогда принадлежит классу $PE_n(M)$, когда выполняются следующие условия: 1) $l_1 \leq \dots \leq l_n$, 2) $f_1(\mu) \leq \dots \leq f_n(\mu)$ для любого $\mu \in M$, 3) $f_k(\mu) \geq l_k$ для всех $\mu \in M$ и $k = \overline{1, n}$, 4) для любого $k = \overline{1, n}$ функция $f_k(\cdot): M \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена ($\sup\{f_k(\mu) | \mu \in M\} < +\infty$) и принадлежит классу $(*, G_\delta)$.

Напомним, что функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ называется [7, с. 224] функцией класса $(*, G_\delta)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([r, +\infty))$ полуинтервала $[r, +\infty)$ является G_δ -множеством метрического пространства M . В частности, класс $(*, G_\delta)$ — подкласс функций второго класса Бэра [7, с. 248]

2. Линейный эффект Перрона для систем классов $\mathcal{M}_n$ и $\mathcal{R}_n$ при убывающих к нулю возмущениях

Через $\mathcal{R}_n$ обозначим подкласс класса $\mathcal{M}_n$, состоящий из правильных по Ляпунову [6, с. 51] систем.

Одной из задач современной теории показателей Ляпунова, возникших благодаря примерам Перрона, является задача о поиске достаточно широких подклассов класса $\mathcal{M}_n$, показатели Ляпунова систем которых не изменялись бы при убывающих к нулю на бесконечности (не обязательно экспоненциально) возмущениях матриц коэффициентов. Долгое время держалась гипотеза, что таким свойством обладает класс $\mathcal{R}_n$ правильных по Ляпунову систем — гипотеза, основанная в существенном на фундаментальном результате Ляпунова о том, что если у нелинейной системы (при естественных ограничениях на правую часть) система её первого приближения правильная и обладает свойством условной экспоненциальной устойчивости, то этим же свойством (с теми же размерностью устойчивого многообразия и

показателем асимптотики) обладает и нулевое решение нелинейной системы [6, с. 53–55]. Тем не менее, в работе [2] Р.Э. Виноград привёл пример системы $A \in \mathcal{R}_2$, показатели Ляпунова которой изменяются при некотором убывающем к нулю на бесконечности возмущении её матрицы коэффициентов.

Как следует из теоремы Богданова – Гробмана [1, 3], показатели Ляпунова правильных систем при экспоненциально убывающих возмущениях матрицы коэффициентов не изменяются, т.е. если непрерывная на полуоси матричнозначная функция $Q(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ экспоненциально убывает к нулю на бесконечности, то для любой системы $A \in \mathcal{R}_n$ имеет место равенство $\lambda_k(A) = \lambda_k(A + Q)$ для всех $k = \overline{1, n}$. Таким образом, линейный эффект Перрона для класса правильных по Ляпунову систем при убывающих к нулю возмущениях их матриц коэффициентов возможен, только если возмущения убывают медленнее экспоненциальных (т.е. если $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|Q(t)\| = 0$).

Чтобы рассмотреть линейный эффект Перрона для систем из классов $\mathcal{M}_n$ и $\mathcal{R}_n$ при убывающих к нулю параметрических возмущениях их матриц коэффициентов, обозначим через Z_n класс матричнозначных функций $Q(\cdot, \cdot): \mathbb{R}_+ \times M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, непрерывных по совокупности переменных и убывающих к нулю при $t \rightarrow +\infty$ равномерно относительно $\mu \in M$. Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ через $Z_n(A)$ обозначим класс тех возмущений $Q \in Z_n$, которые не уменьшают её показатели Ляпунова, т.е. для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n$ и любой $Q \in Z_n(A)$ выполняется неравенство $\inf_{\mu \in M} \lambda_k(A + Q) \geq \lambda_k(A)$ при всех $k = \overline{1, n}$.

Аналогично предыдущему ставится задача полного описания для каждого $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M класса PZ_n (класса PVZ_n) пар $(\Lambda(A), \Lambda(\cdot; A + Q))$, составленных из спектра $\Lambda(A)$ системы $A \in \mathcal{M}_n$ (системы $A \in \mathcal{R}_n$) и вектор-функции $\Lambda(\cdot; A + Q)$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$ (множество $\mathcal{R}_n$), а матричнозначная функция Q при каждом A – класс $Z_n(A)$, т.е. классов

$$PZ_n(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot; A + Q)) \mid A \in \mathcal{M}_n, Q \in Z_n(A)\}$$

и

$$PVZ_n(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\Lambda(A), \Lambda(\cdot; A + Q)) \mid A \in \mathcal{R}_n, Q \in Z_n(A)\}.$$

Очевидно, что описание класса $PVZ_n(M)$ будет содержать как частный случай пример Винограда. По той же причине, что и выше, считаем, что $n > 1$.

Решение сформулированных задач даёт

Теорема 2. Пусть n — натуральное число, большее единицы, и M — метрическое пространство. Классы $PE_n(M)$, $PZ_n(M)$ и $PIVZ_n(M)$ совпадают между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. К теории систем линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814.
2. Виноград Р.Э. Отрицательное решение вопроса об устойчивости характеристических показателей правильных систем // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17. № 5. С. 645–650.
3. Гробман Д. М. Характеристические показатели систем, близких к линейным // Мат. сборник. 1952. Т. 30. № 1. С. 121–166.
4. Коровин С.К., Изобов Н.А. Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1536–1550.
5. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М., Ижевск: РХД, 2006.
6. Ляпунов А.М. Собрание сочинений: в 6 т. Т. 2. Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
7. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
8. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Bd 31. H. 4. S. 748–766.
9. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd 32. H. 5. S. 703–728.

Description of a Linear Perron Effect Under Parametric Perturbations Vanishing at Infinity

Е.А. Barabanov¹, V.V. Bykov²

¹ Institute of Mathematics of NAS of Belarus, Minsk, Belarus, bar@im.bas-net.by

² Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, vvbykov@gmail.com

Abstract: For each linear system of ODEs with coefficients bounded and continuous on the time half-line we consider the class of parametric perturbations of the coefficient matrix that do not decrease its Lyapunov exponents and vanish exponentially at infinity uniformly in the parameter ranging in a metric space. We obtain a complete description of the Lyapunov spectra of systems with such perturbations as vector functions of the parameter. It is also obtained a complete description of the Lyapunov spectra of systems as vector functions of the parameter for Lyapunov regular systems with parametric perturbations that do not decrease the Lyapunov exponents and vanish at infinity uniformly in the parameter.

Об одной задаче оптимального управления колебаниями струны с неразделенными многоточечными условиями в промежуточные моменты времени

В.Р. Барсегян

Институт механики НАН Армении,
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения,
e-mail: barseghyan@sci.am

Аннотация: Рассмотрена задача оптимального управления колебаниями струны с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями функции прогиба и скоростей в промежуточных моментах времени с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Задача решена с использованием методов разделения переменных и теории оптимального управления конечномерными системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено оптимальное управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными условиями на значения функции прогиба и скоростей струны в двух промежуточных моментах времени, а также в случае, когда в один момент времени задано только значение прогиба, а в другой момент — значение скорости.

Ключевые слова: колебания струны, оптимальное управление колебаниями, промежуточные значения, неразделенные многоточечные условия.

Введение

Многоточечные краевые задачи управления и оптимального управления, в которых, наряду с классическими краевыми (начальным и конечным) условиями, заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия исследованы в работах [1–4, 8]. Неразделенность многоточечных условий, в частности, может быть обусловлена невозможностью на практике мгновенно или в отдельно взятых точках проводить замеры параметров состояния объекта. Задачи управления и оптимального управления колебательными процессами, как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах краевых условий, рассмотрены в работах [3–8, 10].

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления колебаниями струны с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями прогиба и скоростей точек струны в промежуточных моментах времени с критерием качества, заданным на весь промежуток времени.

Об основных результатах

Рассмотрим однородную упругую натянутую струну длиной l , края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости отклонения струны от состояния равновесия, описывается функцией $Q(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 < t < T$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \quad (1)$$

с однородными граничными условиями

$$Q(0, t) = 0, \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

и удовлетворяет начальным и конечным условиям

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (4)$$

В уравнении (1) $a^2 = T_0/\rho$, где T_0 — натяжение струны, ρ — плотность однородной струны, $u(x, t)$ — управляющее воздействие. Функция $Q(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема вплоть до границы области. Предполагается, что функция $u(x, t) \in L_2(\Omega)$, где $\Omega = \{(x, t) : x \in [0, l], t \in [0, T]\}$. Пусть в промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$ на значения функции прогиба струны заданы неразделенные условия в виде:

$$\sum_{k=1}^m f_k Q(x, t_k) = \alpha(x), \quad \sum_{k=1}^m e_k \left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} = \beta(x), \quad (5)$$

где f_k и e_k — заданные величины ($k = 1, \dots, m$), $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — некоторые известные функции.

Предполагается, что $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_T(x)$, $\psi_T(x)$, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ заданные гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования.

Среди возможных управлений $u(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(x, t)$, переводящее колебания струны (1) с граничными условиями (2) из заданного начального состояния (3) в заданное конечное состояние (4), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (5) и минимизирующее функционал

$$J[u] = \left[\int_0^T \int_0^l (u(x, t))^2 dx dt \right]^{1/2}.$$

Используя метод разделения переменных, задача сводится к задаче оптимального управления систем, описываемых счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, неразделенными многоточечными промежуточными и конечными условиями с критерием качества, заданным на весь промежуток времени. Для каждой гармоники построено оптимальное управляющее воздействие, полученное с помощью методов теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями [2, 9]. Далее, построено оптимальное управление $u^0(x, t)$, которое является кусочно-непрерывной функцией. В качестве приложения полученных результатов построено оптимальное управление с заданными неразделенными значениями в двух промежуточных моментах времени, а также в случае, когда в момент t_1 задано только значение прогиба $Q(x, t_1) = \alpha(x)$, а в момент t_2 — значение скорости $\partial Q(x, t)/\partial t|_{t=t_2} = \beta(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асанова А.Т., Иманчиев А.Е. О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. 2016. № 1(81). С. 15–20.
2. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
3. Барсегян В.Р., Саакян М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // Известия НАН РА. Механика. 2008. Т. 61, № 2. С. 52 – 60.

4. *Барсегян В.Р.* Об одной задаче граничного оптимального управления колебаниями струны с ограничениями в промежуточные моменты времени // Труды XI Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Т. 3. Ч. I. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 119–125.
5. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с.
7. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. 2005. Т. 60, Вып. 6(366). С. 89–114.
8. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Труды Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62–70.
9. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением, М.: Наука, 1968. 476 с.
10. *Barseghyan V.R., Movsisyan L.A.* Optimal control of the vibration of elastic systems described by the wave equation // Internat. Appl. Mech. 2012. Vol. 48, no. 2. P. 234–239.

About One Problem of Optimal Control of String Oscillations with Non-separated Multipoint Conditions at Intermediate Moments of Time

V.R. Barseghyan

Institute of Mechanics of NAS of Armenia,
Yerevan State University, Yerevan, Armenia,
email: barseghyan@sci.am

Abstract: The problem of optimal control of string oscillations with given initial, final conditions and non-separated values of the deflection function and velocities at intermediate moments of time with a quality criterion specified for the entire time interval is considered. The problem is solved using the methods of separation of variables and the theory of optimal control of finite-dimensional systems with non-separated multipoint intermediate conditions. As an application of the proposed approach, an optimal control action is constructed for the string oscillation with given non-separated conditions on the values of the deflection function and string velocities at two intermediate moments of time.

Нижняя граница точности несмещённых оценок конца траектории для движения с переключениями

Д.А. Бедин

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, bedin@imm.uran.ru

Аннотация: Для задачи восстановления положения на конце траектории по дискретным зашумлённым измерениям проанализирована нижняя граница точности несмещённых оценок. Использовано неравенство Хаммерсли – Чепмена – Роббинса.

Ключевые слова: Несмещённая оценка, неравенство Рао – Крамера, неравенство Хаммерсли – Чепмена – Роббинса.

1. Задача оценивания конца траектории

Рассмотрим следующую задачу [1]. Есть траектория $x: [t_0, t^n] \rightarrow \mathbb{R}^2$, вид которой зависит от параметров $\theta_1, \dots, \theta_m$:

$$\begin{cases} x(t) = f(t; \theta_1), & t \in [t_0, t_1], \\ x(t) = f(t; \theta_1, \theta_2), & t \in (t_1, t_2], \\ \vdots \\ x(t) = f(t; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), & t \in (t_{m-1}, t^n]. \end{cases} \quad (1)$$

Функции $f(t; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j)$ для разных j известны и заданы формулами. Производятся измерения траектории в дискретные моменты времени $\{t^i\}_{i=1}^n$:

$$z^i = x(t^i) + w^i. \quad (2)$$

Здесь $w^i \sim \mathcal{N}(0, W)$ — независимые для разных i случайные ошибки наблюдения с матрицей ковариации W . Требуется по совокупности измерений $Z = \{(t^i, z^i)\}_{i=1}^n$ построить оценку $\hat{x}(t^n): \{Z\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ положения на последний момент времени, оптимизируя среднеквадратичное отклонение от истинного положения:

$$\mathbf{E}\{\|\hat{x}(t^n) - x(t^n)\|^2\} = \text{tr } \mathbf{E}\{(\hat{x}(t^n) - x(t^n))(\dots)^\top\}. \quad (3)$$

Здесь и далее символом $(\dots)$ обозначено повторяющееся выражение.

Отметим, что при построении оценки $\hat{x}(t^n)$ наблюдателю неизвестны ни сами параметры $\{\theta_j\}_{j=1}^m$, ни времена переключения $\{t_j\}_{j=1}^{m-1}$ «режимов движения» в формуле (1), ни даже их количество m , и приходится считать возможными [1] все траектории вида (1) с различными вариантами $m = 1, \dots, \infty$.

Набор параметров Θ , определяющий траекторию, разделяется на непрерывную ϑ и дискретную m составляющие:

$$x(t)=x(t; \Theta), \quad \vartheta = [\theta_1 \quad t_1 \quad \dots \quad \theta_{m-1} \quad t_{m-1} \quad \theta_m]^\top, \quad \Theta = \{m, \vartheta\}.$$

2. Нижняя граница точности для несмещённых оценок

Часто, кроме минимизации показателя (3), дополнительно от оценки требуется свойство несмещённости [2, 3]:

$$\mathbf{E} \{ \hat{x}(t^n) \} = x(t^n). \quad (4)$$

Важным для конструирования оценок $\hat{x}(t^n)$ является вопрос, насколько малым в принципе может быть показатель (3). Естественно, эта величина зависит от траектории $x(\cdot)$, какие-то траектории являются более сложными с точки зрения восстановления конечного положения, какие-то менее. Существуют неравенства для оценки нижней границы показателя (3) при фиксированной истинной траектории $x(\cdot)$, не использующие какой-либо информации о том, как устроена оценка $\hat{x}(t^n)$. Самым популярным таким неравенством для несмещённых оценок является неравенство Рао – Крамера [2, 3]

$$\mathbf{E} \left\{ (\hat{x}(t^n) - x(t^n; \Theta)) (\dots)^\top \right\} \succcurlyeq \frac{\partial x(t^n; \Theta)}{\partial \vartheta} I^{-1}(x(\cdot)) \frac{\partial x(t^n; \Theta)}{\partial \vartheta}^\top, \quad (5)$$

$$I(x(\cdot)) = \mathbf{E} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log \rho(Z|x(\cdot)) \right)^\top (\dots) \right\}.$$

Здесь $I(x(\cdot))$ — информационная матрица Фишера, зависящая от траектории $x(\cdot)$ через совместную плотность измерений $\rho(Z|x(\cdot))$; $A \succcurlyeq B$ обозначает, что матрица $A - B$ неотрицательно определена.

Неравенство Рао – Крамера (5) используется во многих работах, связанных с оценкой положения движущихся объектов [3]. И, несомненно, это неравенство задаёт нижнюю границу. Проблема в том,

что для постановки (1), (2) неравенство не является точным, то есть граница не достигается несмещёнными (4) оценками $\hat{x}(t^n)$.

В неравенстве (5) никак не учитывается дискретный параметр — число переключений «режима движения» на траектории. Подобного недостатка лишено неравенство Хаммерсли – Чепмена – Роббинса [2, 4], являющееся частным случаем неравенств типа Абеля [4] и Баранкина [5]. Оно записывается в виде

$$\forall \Theta' \neq \Theta, \quad \mathbf{E} \left\{ (\hat{x}(t^n) - x(t^n; \Theta)) (\dots)^\top \right\} \succcurlyeq \frac{(x(t^n; \Theta') - x(t^n; \Theta)) (\dots)^\top}{\mathbf{E} \left\{ (\rho(Z|\Theta')/\rho(Z|\Theta) - 1)^2 \right\}}. \quad (6)$$

Здесь левая часть должна быть «больше» правой одновременно для всех вариантов выбора Θ' . Для измерений Z , распределённых нормально согласно (2), неравенство (6) можно конкретизировать:

$$\begin{aligned} & \forall \Theta' \neq \Theta, \quad \mathbf{E} \left\{ (\hat{x}(t^n) - x(t^n; \Theta)) (\dots)^\top \right\} \succcurlyeq \\ & \succcurlyeq \frac{(x(t^n; \Theta') - x(t^n; \Theta)) (\dots)^\top}{\exp \left(\sum_{j=1}^n (x(t^j; \Theta') - x(t^j; \Theta))^\top W^{-1} (x(t^j; \Theta') - x(t^j; \Theta)) \right) - 1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вида (7) автору удалось доказать, что

$$\mathbf{E} \left\{ (\hat{x}(t^n) - x(t^n; \Theta)) (\dots)^\top \right\} \succcurlyeq W. \quad (8)$$

Это неравенство фактически означает, что точность несмещённых оценок в нашем случае не может быть лучше, чем точность измерений. Неравенство (8), очевидно, точное. В самом деле, в качестве оценки $\hat{x}(t^n)$ можно взять последнее измерение $\hat{x}^{(last)}(t^n) := z^n$, для которого выполняется соотношение

$$\mathbf{E} \left\{ (\hat{x}^{(last)}(t^n) - x(t^n; \Theta)) (\dots)^\top \right\} = W.$$

Правая часть неравенства (8) получается при рассмотрении траекторий, отличающихся от исходной новым переключением в момент $t_m \uparrow t^n$. Неопределённость, связанная с незнанием, было ли только что переключение на новый режим или нет, приводит к резкому ухудшению границы точности по сравнению с границей (5).

На рис. 2 показан график квадратного корня границы точности Рао – Крамера от времени для траектории на рис. 1. Приведена точность оценки $\hat{x}(t^n)$ по направлению, ортогональному траектории. Расчёты проведены последовательно по формуле (5) сначала для измерения 1, потом для измерений 1, 2, потом для 1, 2, 3, и так далее до измерений от 1 до $n = 50$. Матрица ковариации измерений W взята равной $100^2 I$. Согласно (8), на графике рис. 2 должна быть прямая линия на уровне 100, в то время как на длительном участке без переключений график границы Рао – Крамера гораздо ниже.

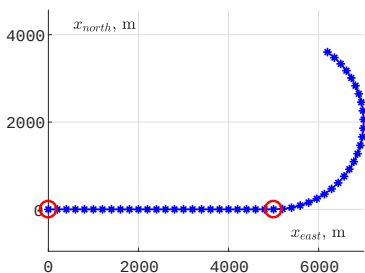


Рис. 1. Тестовая траектория

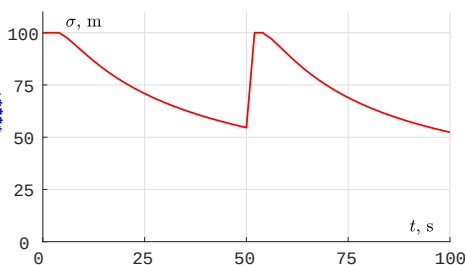


Рис. 2. Граница точности Рао – Крамера для тестовой траектории

Работа выполнена в рамках проекта «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники» по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. *La Rosa P.S., Renaux A., Muravchik C.H., Nehorai A.* Barankin-type lower bound on multiple change-point estimation // *IEEE Trans. Signal Process.* 2010. Vol. 58, No. 11. P. 5534–5549.
2. *Lehmann E.L., Casella G.* Theory of Point Estimation. 2nd ed. New York: Springer, 1998.
3. *Stepanov O.A., Vasilyev V.A.* Cramer-Rao lower bound for a nonlinear filtering problem with multiplicative measurement errors and forcing noise // *IFAC Proceedings Volumes*, 2014. Vol. 47, no. 3. P. 9557–9562.
4. *Abel J.S.* A bound on mean-square-estimate error // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1993. Vol. 39, no. 5. P. 1675–1680.
5. *Barankin E.W.* Locally best unbiased estimates // *Ann. Math. Statist.* 1949. Vol. 20, no. 4. P. 477–501.

Lower Bound of Accuracy of Unbiased Estimates of the End of Trajectory for Motion with Switching

Dmitrii A. Bedin

IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, bedin@imm.uran.ru

Abstract: The lower bound of the error of an unbiased estimate for the problem of resurrection of the end state of a trajectory is elaborated by means of Hammersley–Chapman–Robbins inequality.

УДК 528.088.6, 621.396.969.1

Применение генетического подхода для нахождения оптимальных параметров восстановления траектории воздушного судна

Д.А. Бедин¹, А.Г. Иванов²

¹ УрФУ, Екатеринбург, Россия, bedin@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, iagsoft@imm.uran.ru

Аннотация: Ранее в ИММ УрО РАН был разработан многогипотезный алгоритм восстановления траектории воздушного судна (ВС), показывающий хорошую точность в условиях выбросов замеров. Для нахождения оптимальных значений многочисленных параметров алгоритма использован генетический алгоритм. В критерии качества включены требования стандартов ГОСТ. Оптимизированные параметры позволили улучшить точность восстановления траектории.

Ключевые слова: генетический алгоритм, подбор параметров, восстановление траектории.

1. Многогипотезный алгоритм

Многогипотезный алгоритм восстановления траектории [1, 2] позволяет получить оценку положения ВС в реальном времени. Его работа основывается на поддержании некоторого пучка возможных траекторий ВС. Эти траектории совместны с общими ограничениями на динамику ВС, с историей наблюдений и возможными ошибками измерений. Итоговая оценка положения получается путём взвешенного усреднения конечных положений для каждой траектории из пучка.

Вес траектории выбирается исходя из качества приближения измерений.

Алгоритм показал хорошие результаты обработки модельных и реальных данных, включая данные с выбросами. Реальные данные были предоставлены фирмой «НИТА» (Санкт-Петербург).

Особенностью алгоритма является наличие большого количества настроечных параметров, от которых зависит его работа: выбор весов, инициация ответвлений от возможных траекторий, прореживание пучка траекторий. Для всех этих параметров необходимо установить значения, дающие хорошую производительность алгоритма в целом.

2. Генетический алгоритм подбора параметров

Для подбора оптимальных параметров алгоритма восстановления траектории был создан генетический алгоритм с элементами многокритериальности, который подробно описан в [3].

Обучение генетического алгоритма происходило по пакету модельных треков (последовательностей измерений во времени), сформированных на основе одной идеальной траектории. При этом идеальная траектория содержит участки с различными типами движения, характерные для движущегося ВС как на трассах, так и на подходе к аэродрому. Модельные треки из пакета отличаются друг от друга величиной случайной ошибки, шагом поступления замеров, наличием или отсутствием выбросов.

В качестве критериев качества работы алгоритма восстановления траектории было использовано несколько показателей, зависящих от невязок в моменты замеров. Два наиболее важных показателя — среднее и максимальное отклонения:

$$\rho_{\text{mean}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} \frac{r_j(t_{j,i})}{w_{j,i}}, \quad (1)$$

$$\rho_{\text{max}} = \max_{j=1,m} \max_{i=1,n_j} \frac{r_j(t_{j,i})}{w_{j,i}}. \quad (2)$$

Здесь $r_j(t_{j,i})$ — невязка, то есть расстояние между восстановленной траекторией (для модельного трека j) и идеальной траекторией в момент замера $t_{j,i}$; n_j — количество замеров в модельной траектории j ;

m — количество модельных траекторий в пакете; $w_{j,i}$ — вес, соответствующий i -му замеру на траектории j .

Оптимизируемая алгоритмом функция (функция фитнеса) является суммой показателей типа (1), (2), взятых с постоянными коэффициентами.

3. Учёт стандартов качества в восстановлении траектории

Применение генетического алгоритма позволило улучшить точность восстановления траектории ВС по сравнению с точностью алгоритма с параметрами по умолчанию (см. [3]). При этом в критериях (1), (2) использовались единичные веса $w_{j,i}$, что соответствует простым геометрическим среднему и максимальному оптимизируемым расстояниям.

Однако из инженерной практики известно, что различные участки траектории ВС не могут быть восстановлены одинаково: во время поворота или ускоренного движения качество восстановления хуже, чем во время прямолинейного равномерного движения, а резкое изменение типа движения (с прямой на поворот, например) всегда вызывает характерный «всплеск» ошибки. Такое знание нашло отражение в стандартах качества, которые требуют органы контроля за воздушным движением от алгоритмов восстановления [4, 5].

Было решено изменить веса $w_{j,i}$ в формулах (1), (2) так, чтобы они отражали требуемое по стандарту качество восстановления. В частности, более строго оценивали прямолинейные равномерные участки и менее строго переходы между режимами движения. Алгоритм был изменён, была написана подпрограмма автоматического вычисления весов $w_{j,i}$ в соответствии с ГОСТ [4], позволяющая не задавать веса вручную при изменении опорной истинной траектории. Внесенные изменения позволили улучшить качество восстановления траектории и привести поведение алгоритма к более «стандартному» с точки зрения диспетчеров, наблюдающих за ВС.

На рис. 1 показан график показателя $\rho_{\text{mean}}(t) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{r_j(t)}{w(t)}$ для тестовой траектории ВС (отличается от той, на которой проходило обучение). Толстая красная линия, расположенная на уровне 1, приведена для сравнения: если некоторый алгоритм даёт качество ниже её, это означает, что на данном участке движения восстановление

идёт лучше ГОСТа, если выше — то, наоборот, хуже. Зелёной линией показана производительность многогипотезного алгоритма в случае, когда в формулах (1), (2) выбирались единичные веса (соответствует работе [3]). Синяя линия изображает график качества работы текущего алгоритма с весами, соответствующими ГОСТу [4]. Красной тонкой линией показана производительность популярного алгоритма IMM (Interacting Multiple Model), ставшего де-факто стандартом в восстановлении траекторий для ВС. Чёрным цветом для сравнения изображена линия, соответствующая «сырым» измерениям, когда само измерение используется как оценка положения ВС.

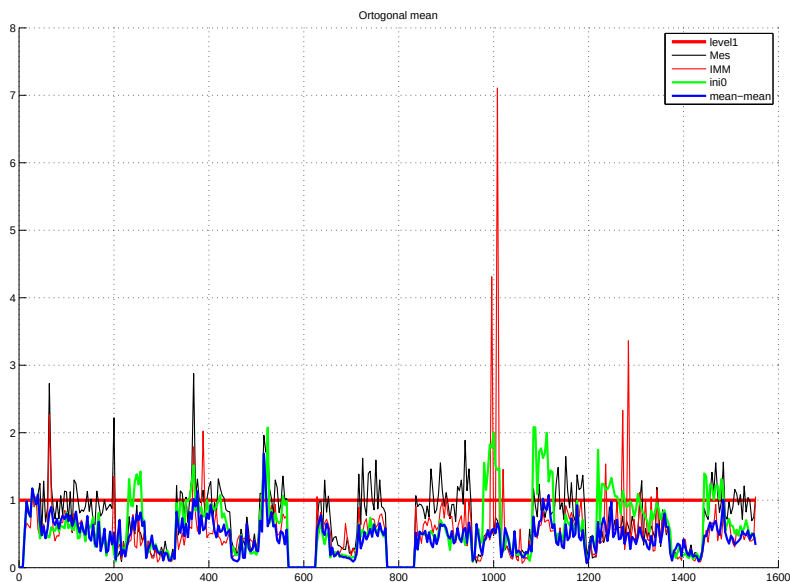


Рис. 1. Средняя относительная точность $\rho_{\text{mean}}(t)$ для поперечного канала. Тестовая траектория

Работа выполнена в рамках проекта «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники» по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bedin D.A., Fedotov A.A., Ivanov A.G.* Recovering an aircraft trajectory by using the detection of the motion type // 25th St.-Petersburg Int. Conf. on In-

- tegrated Navigation Systems, ICINS 2018. Proceedings. Ed. V.G. Peshekhonov. SPb.: State Research Center of the Russian Federation – Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2018. P. 127–130.
2. *Ivanov A.G., Bedin D.A., Fedotov A.A., Ganebnyi S.A.* Fixed types of motion in aircraft trajectory recovering // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 889–894.
 3. *Бедин Д.А., Иванов А.Г.* Использование генетического алгоритма для определения параметров многогипотезного алгоритма восстановления траектории воздушного судна // Сб. материалов XXVI Санкт-Петербургской международ. конф. по интегрированным навигационным системам. Ред. В.Г. Пешехонов. СПб.: ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2019. С. 87–90.
 4. Проект стандарта «Обработка информации наблюдения в средствах автоматизации управления воздушным движением единой системы организации воздушного движения Российской Федерации. Технические требования» (первая редакция). Филиал «НИИ Аэронавигации». М.: ФГУП ГосНИИ ГА, 2014. 24 с. http://www.atminst.ru/up_files/proekt%201-red_standart.pdf
 5. SUR.ET1.ST01.1000-STD-01-01: EuroControl standart document for radar surveillance in en-route airspace and major terminal areas. Edition 1.0, 1997. <http://www.eurocontrol.int/publications/eurocontrol-standard-radar-surveillance-en-route-airspace-and-major-terminal-areas>

Using a Genetic Approach to Find the Optimal Parameters of the Aircraft Tracking

Dmitrii A. Bedin¹, Alexey G. Ivanov²

¹ UrFU, Ekaterinburg, Russia, bedin@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, iagsoft@imm.uran.ru

Abstract: A multi-hypothetical algorithm for aircraft tracking was previously developed at the Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. The algorithm gives good accuracy in the presence of outliers. To find the optimal values of the numerous parameters of the algorithm, a genetic algorithm was used. The quality standards of the government regulatory agencies were included in the performance criterion. Optimized parameters allowed to improve accuracy of the trajectory tracking.

Распространение теорем о возмущениях накрывающих отображений

С. Бенараб¹, Е.С. Жуковский², В. Мерчела³

¹ ТГУ им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия, benarab.sarraa@gmail.com

² ТГУ им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия, zukovskys@mail.ru

³ ТГУ им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия, merchela.wassim@gmail.com

Аннотация: Обсуждается распространение известных теорем о возмущениях отображений, действующих в метрических и в частично упорядоченных пространствах. Для заданного отображения $F : X \times X \rightarrow Y$ и элемента $y \in Y$ рассматривается уравнение $F(x, x) = y$. Сначала исследуется случай, когда X — метрическое пространство, а на Y задано расстояние, удовлетворяющее только аксиоме тождества. Отображение F по первому аргументу предполагается накрывающим, по второму аргументу — липшицевым (используемые определения этих понятий существенно ослаблены сравнительно с их классическими определениями). В терминах коэффициентов накрывания и липшицевости получены условия разрешимости рассматриваемого уравнения. Далее разрешимость этого уравнения исследована в случае, когда X — частично упорядоченное пространство, на Y задано рефлексивное бинарное отношение, отображение F по первому аргументу является упорядоченно накрывающим, по второму аргументу — антитонным (определения этих понятий также существенно ослаблены сравнительно с известными).

Ключевые слова: накрывающее отображение, метрическое пространство, частично упорядоченное пространство.

Введение

В теореме Милютина [4] утверждается, что сумма действующих из метрического пространства X в линейное метрическое пространство Y α -накрывающего и β -липшицева отображений при $\alpha > \beta$ будет $\alpha - \beta$ -накрывающим отображением. В работе [1] получено распространение теоремы о возмущениях на отображения метрических пространств, а именно исследованы накрывающие свойства отображения $G(x) := F(x, x)$, где отображение $F : X \times X \rightarrow Y$ по первому аргументу является α -накрывающим, а по второму — β -липшицевым. В работе [5] аналогичные результаты получены для отображения $F : X \times X \rightarrow Y$ в случае, когда X, Y — частично упорядоченные пространства. В этом исследовании использовались идеи и методы [8] исследования упорядоченно накрывающих отображений.

В данном сообщении предлагаются распространения цитированных результатов [1] на случай, когда расстояние в пространстве Y удовлетворяет только аксиоме тождества, и результатов [5] на случай, когда в Y определено не отношение порядка, а рефлексивное бинарное отношение. При этом мы используем несколько более общие чем в [1, 5] определения понятий накрывания и упорядоченного накрывания.

1. Теорема о возмущениях накрывающего отображения в пространствах с расстоянием

Пусть $X = (X, \rho)$ — полное метрическое пространство, $Y \neq \emptyset$, $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ — расстояние в Y , то есть для $y_1, y_2 \in Y$ равенства $d(y_1, y_2) = 0$ и $y_1 = y_2$ равносильны (расстояние d не обязано быть симметричным и удовлетворять неравенству треугольника). Обозначим $B_Y(y_0, R) := \{y \in Y \mid d(y_0, y) \leq R\}$. В Y определим *сходимость*, полагая $y_i \rightarrow y$, если $d(y, y_i) \rightarrow 0$. Отметим, что при этом $d(y_i, y)$ может не сходить к 0, а предел y может быть не единственным.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем *замкнутым* если для любых $\{x_i\} \subset X$, $x \in X$, $y \in Y$ в случае $x_i \rightarrow x$ $f(x_i) \rightarrow y$ выполнено $f(x) = y$ (на отображения (q_1, q_2) -метрических пространств понятие замкнутости распространено в [2]).

Пусть заданы $\alpha > \beta \geq 0$. Положим

$$R_n := \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^n(\alpha - \beta)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{R_n\}$ возрастает и сходится к $R := (\alpha - \beta)^{-1}$. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ определим множество $\text{Cov}_\alpha[f]$ всех пар $(u, y) \in X \times Y$ таких, что существует $x \in X$, отвечающий соотношениям $f(x) = y$, $\rho(x, u) \leq \alpha^{-1}d(y, f(u))$, и множество $\text{Lip}_\beta[f]$ всех пар $(u, y) \in X \times Y$ таких, что для любого $x \in X$, если $f(x) = y$, то $d(y, f(u)) \leq \beta\rho(x, u)$. Называем $\text{Cov}_\alpha[f]$ *множеством α -накрывания*, $\text{Lip}_\beta[f]$ — *множеством β -липшицевости отображения f* .

Пусть заданы $\hat{y} \in Y$ и отображение $F : X \times X \rightarrow Y$. Сформулируем условия разрешимости уравнения

$$F(x, x) = \hat{y}. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть $x_0 \in X$; $\alpha > \beta \geq 0$; $\hat{R}_n := R_n d(y, F(x_0, x_0))$, $n \in \mathbb{N}$. Если для любого $x \in X$ такого, что $\hat{R}_n \leq \rho_X(x_0, x) \leq \hat{R}_{n+1}$, $\alpha^n d(\hat{y}, F(x, x)) \leq \beta^n d(\hat{y}, F(x_0, x_0))$, отображение $F(\cdot, x) : X \rightarrow Y$ замкнуто, справедливо $(x, \hat{y}) \in \text{Cov}_\alpha[F(\cdot, x)]$ и $(x, \hat{y}) \in \text{Lip}_\beta[F(x, \cdot)]$, то существует решение $\hat{x} \in B_X(x_0, \hat{R})$ уравнения (1), здесь $\hat{R} := R d(\hat{y}, F(x_0, x_0))$.

Из теоремы 1 может быть выведена теорема [7] о точках совпадения отображений, действующих из (X, ρ) в (Y, d) .

2. Теорема о возмущениях накрывающего отображения в пространствах с бинарным отношением

Пусть теперь $X = (X, \leq)$ — частично упорядоченное пространство, а на множестве $Y \neq \emptyset$ определено бинарное отношение ω , являющееся рефлексивным (т.е. для любого $y \in Y$ выполнено $(y, y) \in \omega$). Для элемента $u \in X$ определим множество $\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \leq u\}$.

Для отображения $f : X \rightarrow Y$ определим множество $\text{Cov}[f]$ всех пар $(u, y) \in X \times Y$ таких, что либо $(y, f(u)) \notin \omega$, либо $(y, f(u)) \in \omega$ и в этом случае существует $x \in X$, удовлетворяющий соотношениям $f(x) = y$, $x \leq u$. Это множество определено в [6] (и названо множеством упорядоченного накрывания отображения f). Далее определим множество $\text{Dcr}[f]$ всех пар $(u, y) \in X \times Y$ таких, что для любого $x \in X$, если $f(x) = y$ и $u \leq x$, то $(y, f(u)) \in \omega$. Называем $\text{Dcr}[f]$ множеством антитонности отображения f .

Пусть заданы $\hat{y} \in Y$ и отображение $F : X \times X \rightarrow Y$.

Теорема 2. Пусть существует элемент $x_0 \in X$ такой, что $(\hat{y}, F(x_0, x_0)) \in \omega$, для любого $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ справедливы включения $(x, \hat{y}) \in \text{Cov}[F(\cdot, x)]$, $(x, \hat{y}) \in \text{Dcr}[F(x, \cdot)]$ и любая цепь $S \subset \mathcal{O}_X(x_0)$, каждый элемент которой $u \in S$ удовлетворяет условиям

$$(\hat{y}, F(u, u)) \in \omega \quad \text{и} \quad \exists x \in S \quad x \leq u, \quad F(x, u) = \hat{y},$$

имеет нижнюю границу $w \in X$ такую, что $(\hat{y}, F(w, w)) \in \omega$. Тогда существует решение $\hat{x} \in \mathcal{O}_X(x_0)$ уравнения (1).

Отметим, что условия существования точки совпадения отображений, действующих из $(X, \geq)$ в (Y, ω) получены в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 17-41-680975).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. С. 613–634.
2. Арутюнов А.В., Грешинов А.В. (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 82, № 2. С. 3–32.
3. Бенараб С., Жуковский Е.С. Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 121. С. 10–16.
4. Дмитриук А.В., Милотин А.А., Осмоловский Н.П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.
5. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 12. С. 1610–1627.
6. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 1. С. 96–127.
7. Мерчела В. К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 121. С. 65–73.
8. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology Appl. 2015. Vol. 179, no. 1. P. 13–33.

Some Generalizations of Covering Mappings Perturbation Theorems

Sarra Benarab¹, Evgeny S. Zhukovskiy², Wassim Merchela³

Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia,

¹ benarab.sarraa@gmail.com ² zukovskys@mail.ru

³ merchela.wassim@gmail.com

Abstract: Generalizations of known theorems on perturbations of mappings acting in metric and partially ordered spaces is discussed. For a given mapping $F : X \times X \rightarrow Y$ and an element $y \in Y$, we consider the equation $F(x, x) = y$. At first we study the case when X is a metric space and Y is endowed with a distance function satisfying the identity axiom only. It is assumed that the mapping F is covering in the first argument and Lipschitzian in the second argument (the definitions of the concepts in use are substantially weakened in comparison with their classical analogs). Solvability conditions for the considered equation are obtained in the terms of the covering and Lipschitz coefficients. Further, the solvability of this equation is investigated for the case when X is a partially ordered set, Y is endowed with a reflexive binary relation, and the mapping F is orderly covering in the first argument and

antiton in the second argument (the definitions of these concepts are also significantly weakened in comparison with the known ones).

УДК 519.635.4

Первая краевая задача для многомерного псевдопараболического уравнения третьего порядка в области с произвольной границей

М.Х. Бештоков

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, beshtokov-murat@yandex.ru

Аннотация: Рассмотрены локально-одномерные разностные схемы для многомерного псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами в области с произвольной границей. Доказаны устойчивость и сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: уравнение переноса, псевдопараболическое уравнение, первая краевая задача, устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы.

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$ рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \alpha \frac{\partial}{\partial t} Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (3)$$

где

$$Lu = \sum_{k=1}^p L_k u, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Theta_k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - q_k(x, t)u, \quad k=1, 2, \dots, p,$$

$0 < c_0 \leq \Theta_k(x, t) \leq c_1$, $q_k > 0$, c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные.

Γ — граница области G , $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ — точка p -мерного евклидова пространства R_p .

Относительно области $\overline{G}$ используются два предположения (см. [1, стр. 486]):

а) пересечение области G с прямой C_k , параллельной оси координат O_{x_k} , состоит из одного интервала Δ_k ;

б) возможно построение в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ связной сетки $\bar{\omega}_h$ с шагами $h_k, k = 1, 2, \dots, p$. Множество ω_h внутренних узлов сетки состоит из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G$ пересечения гиперплоскостей $x_k = i_k h_k, i_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 1, 2, \dots, p$, а множество γ_h граничных узлов – из точек пересечения прямых $C_k, k = 1, 2, \dots, p$, проходящих через внутренние узлы $x \in \omega_h$, с границей Γ .

Обозначим через $\gamma_{h,k}$ множество граничных по направлению x_k узлов, γ_h – множество всех граничных узлов $x \in \Gamma$, $\omega_{h,k}^*$ – множество приграничных по направлению x_k узлов, ω_h^* – множество всех приграничных узлов, $\omega_{h,k}^{**}$ – множество нерегулярных по направлению x_k узлов, ω_h^{**} – множество всех нерегулярных узлов, $\omega_{h,k}$ – множество регулярных по направлению x_k узлов, ω_h – множество всех регулярных узлов.

Преобразуем уравнение (1), тогда умножая обе части (1) на $1/\alpha \cdot e^{t/\alpha}$ и интегрируя полученное выражение по τ от 0 до t , получим

$$\mathcal{B}_{0t}^\alpha u = Lu + \tilde{f}(x, t), \quad \alpha > 0,$$

где

$$\mathcal{B}_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-(t-\xi)/\alpha} u_\xi d\xi,$$

$$\tilde{f}(x, t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t e^{-(t-\xi)/\alpha} f(x, \xi) d\xi - e^{-1/\alpha} Lu_0(x).$$

Учитывая последнее, вместо (1)–(3) будем рассматривать следующую задачу с малым параметром

$$\varepsilon u_t^\varepsilon + \mathcal{B}_{0t}^\alpha u^\varepsilon = Lu^\varepsilon + f(x, t), \quad L = \sum_{k=1}^p L_k, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (4)$$

$$u^\varepsilon \Big|_\Gamma = \mu(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \quad (5)$$

$$u^\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (6)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

На каждом полуинтервале $\Delta_k = (t_{j+(k-1)/p}, t_{j+k/p}]$, $k = 1, 2, \dots, p$ будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{L}_k \vartheta_{(k)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

$$\vartheta_{(k)} = \mu(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma_k,$$

полагая при этом

$$\begin{aligned} \vartheta_{(1)}(x, 0) &= u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j), \\ \vartheta_{(k)}(x, t_{j+(k-1)/p}) &= \vartheta_{(k-1)}(x, t_{j+(k-1)/p}), \\ k &= 2, 3, \dots, p, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \end{aligned} \quad (8)$$

где Γ_k — множество граничных точек по направлению x_k .

Рассмотрим уравнение (7) при фиксированном k с оператором L_k :

$$\frac{\varepsilon}{p} \vartheta_t + \frac{1}{p} \mathcal{B}_{0t}^\alpha \vartheta_{(k)} - L_k \vartheta_{(k)} + f_{(k)}, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (9)$$

где $L_k \vartheta_{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Theta_k(x, t) \frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} \right) - q_k(x, t) \vartheta_{(k)}$.

Каждое из уравнений (9) заменим разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t}}^{j+k/p} + \frac{1}{p} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+(k-s)/p}} - e^{-\frac{1}{\alpha} t_{j+(k-s+1)/p}} \right) y_{\bar{t}}^{s/p} = \\ = \Lambda_k \left(\sigma_k y^{j+k/p} + (1 - \sigma_k) y^{j+(k-1)/p} \right) + \varphi_k^{j+k/p}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$y^{j+k/p}|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+k/p}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1,$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

σ_k — произвольные параметры, $\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов, разностный оператор $\Lambda_k \sim L_k$ имеет следующий вид:

1) В регулярных узлах:

$$\Lambda_k y^{j+k/p} = \left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+k/p} \right)_{x_k} - d_k y^{j+k/p},$$

2) В нерегулярных узлах:

$$\Lambda_k y_{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{h_k} \left(a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*} \right) - d_k y_{(k)}, & x^{(-1_k)} \in \gamma_{h,k} \\ \frac{1}{h_k} \left(a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k} \right) - d_k y_{(k)}, & x^{(+1_k)} \in \gamma_{h,k} \end{cases}$$

где h_k^* — расстояние от нерегулярного узла x до граничного узла $x^{(+1_k)}$ или $x^{(-1_k)}$. Если оба соседних с $x \in \omega_{h,k}^*$ узла $x^{(+1_k)}$ и $x^{(-1_k)}$ являются граничными, т.е. $x^{(\pm 1_k)} \in \gamma_{h,k}$, то

$$\Lambda_k y^{j+k/p} = \frac{1}{h_k} \left(a_{k,i_k+1} \frac{y^{(+1_k)} - y}{h_k^*} - a_{k,i_k} \frac{y - y^{(-1_k)}}{h_k^*} \right) - d_k y^{j+k/p},$$

где $h_{k\pm}^*$ — расстояние между и $x^{(+1_k)}$, $h_{k\pm}^* \leq h_k$.

В регулярных узлах Λ_k имеет второй порядок аппроксимации, $\Lambda_k u - L_k u = O(h_k^2)$, а в нерегулярных узлах $\Lambda_k u - L_k u = O(1)$ (см. [1, стр. 223]).

Теорема 1. Пусть задача (4)–(6) имеет единственное непрерывное решение $u(x, t)$ в $\overline{Q}_T$ при всех значениях ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$, $1 \leq k$, $\nu \leq p$, $k \neq \nu$, $0 < \alpha < 1$, тогда решение разностной задачи (8) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(h^2/\varepsilon + \tau/\varepsilon^2 + \varepsilon)$, $h^2 = o(\varepsilon)$, $\tau = o(\varepsilon^2)$, где ε — малый параметр.

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если выбрать $\varepsilon = \tau^{1/3}$ при любых $\alpha > 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ДНТ в рамках научного проекта № 19-51-45008.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

The First Boundary Value Problem for a Multidimensional Pseudo-Parabolic Equation of the Third Order in a Domain with an Arbitrary Boundary

M. Beshtokov

IAMA KBSC RAS, Nalchik, Russia, beshtokov-murat@yandex.ru

Abstract: Locally one-dimensional difference schemes for a multidimensional pseudo-parabolic equation of the third order with variable coefficients in an area with an arbitrary boundary. Stability and convergence of locally one-dimensional schemes for the problem are proved.

УДК 519.63

Разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка

М.Х. Бештоков¹, М.З. Худалов²

¹ ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, beshtokov-murat@yandex.ru

² СОГУ, Владикавказ, Россия, hnz@mail.ru

Аннотация: Исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженного дифференциального уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами с дробной производной Капуто. Для решения рассматриваемых задач методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, дробная производная Капуто, краевые задачи, устойчивость и сходимость разностных схем.

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмот-

рим задачу

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) - q(x, t)u + f(x, t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x, t) \leq c_1, \quad |k_x(x, t), r(x, t), q(x, t)| \leq c_2, \quad (4)$$

$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$, — дробная производная в смысле Капуро порядка α , $0 < \alpha < 1$, $c_i, i = 0, 1, 2$ — положительные постоянные числа, x_0 — произвольная точка интервала $[0, l]$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4), тогда для решения дифференциальной задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \left(\|\partial_{0t}^\alpha u\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2 \right) \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2 \right), \quad (5)$$

где $M = \text{const} > 0$, зависящая только от входных данных (1)–(3),

$D_{0t}^{-\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$.

Скалярное произведение и норма вводятся следующим образом

$$(a, b) = \int_0^l ab \, dx, \quad (a, a) = \|a\|_0^2,$$

где a, b — заданные на $[0, l]$ функции.

Из (5) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i = \left(a^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_{x,i} + r_i^j \left(y_{\bar{x},i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{\bar{x},i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+ \right) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (6)$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \quad (7)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (8)$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau^{3-\alpha})$ [2].

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha} \left[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha} \right] - \frac{1}{2} \left[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha} \right],$$

$$l \geq 1, \quad \text{при } j = 0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}), \quad \varphi_i^j = f(x_i, t^{j+\sigma}), \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad c_{s-1}^{(\alpha,\sigma)} > c_s^{(\alpha,\sigma)},$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2} (s+\sigma)^{-\alpha} > 0, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j, \quad d_i^j = d(x_i, t^{j+\sigma}),$$

$$r_0 = r(0, t) = r_0^{(j+\sigma)} \leq 0, \quad r_N = r(l, t) = r_N^{(j+\sigma)} \geq 0,$$

$$x_{i_0} \leq x_0 \leq x_{i_0+1}, \quad x_{i_0}^- = \frac{x_{i_0+1} - x_0}{h}, \quad x_{i_0}^+ = \frac{x_0 - x_{i_0}}{h}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4), тогда существует такое малое τ_0 , что если $\tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (6)–(8) справедлива априорная оценка

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M \left(\|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2 \right). \quad (9)$$

где $M = \text{const} > 0$, не зависящая от h и τ .

Из (9) следуют единственность и устойчивость решения задачи (6)–(8) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения (1)

$$\begin{cases} k(0, t) u_x(0, t) = \beta_{11}(t) u(0, t) + \beta_{12}(t) \partial_{0t}^\alpha u(0, t) - \mu_1(t), \\ -k(l, t) u_x(l, t) = \beta_{21}(t) u(l, t) + \beta_{22}(t) \partial_{0l}^\alpha u(l, t) - \mu_2(t), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$0 < c_0 \leq k, \quad \beta_{12}, \beta_{22} \leq c_1, \quad |\beta_{11}, \beta_{21}, r, q, k_x| \leq c_2. \quad (11)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (4), (11), тогда для решения задачи (1), (10), (3), справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^1(0,l)}^2 + D_{0t}^{-\alpha} \left(\|u_x\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2 + \|\partial_{0t}^\alpha u\|_0^2 \right) &\leq \\ &\leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} (\|f\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2) + \|u_0\|_{W_2^1(0,l)}^2 \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $M - \text{const} > 0$, зависящая только от входных данных задачи (1), (10), (3).

Из (12) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ задаче (1), (10), (3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i = (a^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + r_i^j (y_{\bar{x},i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{\bar{x},i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (13)$$

$$a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + 0.5hr_0 (y_{\bar{x},i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{\bar{x},i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) = \tilde{\beta}_{11} y_0^{(\sigma)} - \tilde{\mu}_1 + \tilde{\beta}_{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0, \quad (14)$$

$$-a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + 0.5hr_N (y_{\bar{x},i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{\bar{x},i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+) = \tilde{\beta}_{21} y_N^{(\sigma)} - \tilde{\mu}_2 + \tilde{\beta}_{22} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N, \quad (15)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{11}(t_{j+\sigma}) &= \beta_{11}(t_{j+\sigma}) + 0.5hd_0^j, & \tilde{\beta}_{12}(t_{j+\sigma}) &= \beta_{12}(t_{j+\sigma}) + 0.5h, \\ \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) &= \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j, & \tilde{\beta}_{21}(t_{j+\sigma}) &= \beta_{21}(t_{j+\sigma}) + 0.5hd_N^j, \\ \tilde{\beta}_{22}(t_{j+\sigma}) &= \beta_{22}(t_{j+\sigma}) + 0.5h, & \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) &= \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия (4), (11), тогда существует такое малое τ_0 , что если $\tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (13)–(16) справедлива априорная оценка

$$\|y^{j+1}\|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \right), \quad (17)$$

где $M - \text{const} > 0$, не зависящая от h и τ .

Из (17) следуют единственность и устойчивость решения задачи (13)–(16) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи (1), (10), (3) со скоростью $O(h^2 + \tau^2)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ДНТ в рамках научного проекта № 19-51-45008.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
2. Alikhanov A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. 2015. Vol. 280. P. 424–438.

Difference Methods for Solving Local and Nonlocal Boundary Value Problems for a Loaded Fractional Order Heat Equation

M. Beshtokov¹, M. Hudalov²

¹ IAMA KBSC RAS, Nalchik, Russia, beshtokov-murat@yandex.ru

² NOSU, Vladikavkaz, Russia, hnz@mail.ru

Abstract: Local and nonlocal boundary value problems for the loaded differential heat equation with variable coefficients with the fractional Caputo derivative are investigated. To solve the problems under consideration by the method of energy inequalities, a priori estimates in differential and difference interpretations are obtained, which implies the uniqueness and stability of the solution from the initial data and the right side, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem at a speed of $O(h^2 + \tau^2)$.

УДК 519.63

Экономичные аддитивные разностные схемы решения нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения теплопроводности

З.В. Бештокова

ИПМА КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, zarabaeva@yandex.ru

Аннотация: Данная работа посвящена построению локально-одномерной (экономичной) разностной схемы для численного решения нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы и доказана ее сходимость в L_2 со скоростью $O(h^2 + \tau)$.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, многомерное уравнение, нелокальное условие, аддитивные схемы, устойчивость и сходимость локально-одномерных разностных схем.

1. Постановка задачи

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого является p -мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ , $\overline{G} = G \cup \Gamma$ рассматривается следующая нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$k_\alpha(0, x', t)u_{x_\alpha}(0, x', t) = \beta_{-\alpha}(0, x', t)u(l_\alpha, x', t) + \int_0^t \rho_1(t, \tau)u(l_\alpha, x', \tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(0, x', t), \quad (2)$$

$$-k_\alpha(l_\alpha, x', t)u_{x_\alpha}(l_\alpha, x', t) = \beta_{+\alpha}(l_\alpha, x', t)u(0, x', t) + \int_0^t \rho_2(t, \tau)u(0, x', \tau)d\tau - \mu_{+\alpha}(l_\alpha, x', t), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \quad (4)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - q_\alpha(x, t)u, \quad (5)$$

$$0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1, \quad |q_\alpha(x, t)|, \quad |\beta_{\pm\alpha}(x, t)|, \\ |\rho_1(t, \tau)|, \quad |\rho_2(t, \tau)| \leq c_2, \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

$Q_T = \overline{G} \times [0 < t \leq T]$, c_0, c_1, c_2 — положительные постоянные, $\alpha = \overline{1, p}$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p)$.

2. Локально-одномерная схема

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

$$h_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

На отрезке $[0, T]$ также введём равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьём на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \tau \cdot \alpha/p$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = (t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\Re u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \Re_\alpha u = 0, \quad \Re_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x, t)$, $(\alpha = 1, 2, \dots, p)$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\Re_\alpha \vartheta_\alpha = \frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k_\alpha(0, x', t)(\vartheta_{(\alpha)})_{x_\alpha}(0, x', t) &= \beta_{-\alpha}(0, x', t)\vartheta_{(\alpha)}(l_\alpha, x', t) + \\ &+ \int_0^t \rho_1(t, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(l_\alpha, x', \tau)d\tau - \mu_{-\alpha}(0, x', t), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -k_\alpha(l_\alpha, x', t)(\vartheta_{(\alpha)})_{x_\alpha}(l_\alpha, x', t) &= \beta_{+\alpha}(l_\alpha, x', t)\vartheta_{(\alpha)}(0, x', t) + \\ &+ \int_0^t \rho_2(t, \tau)\vartheta_{(\alpha)}(0, x', \tau)d\tau - \mu_{+\alpha}(l_\alpha, x', t), \end{aligned} \quad (8)$$

полагая при этом [1, стр. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x, 0) = u_0(x),$$

$$\vartheta_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = \vartheta_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \quad (9)$$

$$\vartheta_{(1)}(x, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, t_j).$$

Аппроксимируем каждое уравнение (6) номера α двухслойной схемой на полуинтервале $(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}]$ неявной схемой, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad (10)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (11)$$

где

$$\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} = \begin{cases} \Lambda_\alpha y^{(\alpha)} = (a_\alpha y_{x_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha} - d_\alpha y^{(\alpha)}, \\ \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} = \frac{a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_{\alpha,0}}^{(\alpha)} - 0.5 h_\alpha d_\alpha^{(0)} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \beta_{-\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \sum_{s=0}^j \rho_{1,s,j} y_{N_\alpha}^s \tau}{0.5 h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} = - \frac{a_\alpha^{(N\alpha)} y_{x_{\alpha,N_\alpha}}^{(\alpha)} + 0.5 h_\alpha d_\alpha^{(N\alpha)} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \beta_{+\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \sum_{s=0}^j \rho_{2,s,j} y_0^s \tau}{0.5 h_\alpha}, \end{cases}$$

$$y_{\bar{t}} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}, \quad \Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \bar{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \bar{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5), тогда локально-одномерная схема (10)–(11) устойчива по начальным данным и правой части так, что для решения задачи (10)–(11) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \\ & \leq M(t) \left[\sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(t_{j'})) H / h_\alpha \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где $M(t) > 0$ — не зависит от h_α и τ .

Теорема 2. Пусть (1)–(4) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x, t)$ и существуют непрерывные Q_T производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad 1 \leq \alpha, \quad \beta \leq p,$$

тогда локально-одномерная схема (10)–(11) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(|h|^2 + \tau), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2,$$

$$\|z^{j+1}\|_1 = \left(\|z^{j+1}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|z_{\overline{x}_\alpha}\|_{L_2(\overline{\omega}_h)}^2 \right)^{1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

Economical Additive Difference Schemes for Solving a Nonlocal Boundary Value Problem for a Multidimensional Heat Equation

Z. Beshtokova

IAMA KBSC RAS, Nalchik, Russia, zarabaeva@yandex.ru

Abstract: This work is devoted to the construction of a locally one-dimensional (economical) difference scheme for the numerical solution of a nonlocal boundary value problem for a multidimensional heat equation with variable coefficients. An a priori estimate for solving a locally one-dimensional scheme is obtained by the method of energy inequalities and its convergence in L_2 at the rate of $O(h^2 + \tau)$.

Об одновременной многократной поимке группы убегающих

А.И. Благодатских

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия,
aiblag@mail.ru

Аннотация: В докладе рассматривается задача преследования группы жестко скоординированных убегающих в нестационарном конфликтно управляемом процессе с равными возможностями:

$$\begin{aligned} P_i : \quad \dot{x}_i &= A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ E_j : \quad \dot{y}_j &= A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Говорят, что в задаче преследования происходит многократная поимка, если заданное количество преследователей ловят убегающих, при этом моменты поимки могут не совпадать:

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha), \quad \alpha \in \Lambda, \quad \Lambda \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad |\Lambda| = b, \quad j_\alpha \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

В задаче о нестрогой одновременной многократной поимке требуется, чтобы моменты поимки совпадали: $x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau)$, $\alpha \in \Lambda$.

Одновременная многократная поимка происходит, если совпадают наименьшие моменты поимки:

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s), \quad s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Получены необходимые и достаточные условия многократной, нестрогой одновременной многократной и одновременной многократной поимок.

Ключевые слова: многократная поимка, одновременная многократная поимка, дифференциальные игры, конфликтно управляемые процессы.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$ с законами движения и начальными условиями

$$\begin{aligned} P_i : \quad \dot{x}_i &= A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i \in I(n), \\ E_j : \quad \dot{y}_j &= A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad j \in I(m), \end{aligned}$$

где $x_i, y_j \in \mathbb{R}^k$, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k , $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей, множество $I(q) = \{1, 2, \dots, q\}$ для всех $q \geq 1$, $S(a, b)$ — шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке a радиуса b , O — нуль-матрица.

Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из множества $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_q < \dots$ — интервала $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim_{q \rightarrow \infty} \theta_q = \infty$).

Определение 1. *Кусочно-программной стратегией убегающих E_j , $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ , будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $y_j(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть для всех $q = 0, 1, 2, \dots$*

$$v(t) = v(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q)), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}).$$

Здесь и далее, если θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для всех убегающих E_j , $j \in I(m)$ выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 2. *Кусочно-программной контрстратегией преследователей P_i , $i \in I(n)$, соответствующей разбиению σ , будем называть семейство отображений, ставящих в соответствие моменту θ_q , позициям $x_i(\theta_q)$, $y_j(\theta_q)$ и допустимому управлению $v(s)$, $s \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ убегающих E_j , $j \in I(m)$ допустимые управления $u_i(t)$, определенные для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть для всех $q = 0, 1, 2, \dots$*

$$u_i(t) = u_i(t, \theta_q, x_i(\theta_q), y_j(\theta_q), v(s), s \in [\theta_q, \theta_{q+1})), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}).$$

Для каждого $q = 1, 2, \dots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \{ \{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q, i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n) \}.$$

Определение 3. *В игре Γ возможна b -кратная поимка ($n \geq b \geq 1$), если существует конечный момент $T_0 = T_0(X_i^0, Y_j^0)$ такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающих E_j , $j \in I(m)$ существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i , $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых*

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \quad \text{при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый из преследователей P_i , $i \in I(n)$ может осуществить поимку не более одного раза, при этом любой из убегающих E_j , $j \in I(m)$ может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

Определение 4. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b -кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающих E_j , $j \in I(m)$ существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i , $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \quad \text{при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 5. В игре Γ возможна одновременная b -кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любых разбиения σ и кусочно-программной стратегии убегающих E_j , $j \in I(m)$ существуют такие кусочно-программные контрстратегии преследователей P_i , $i \in I(n)$, что найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \quad \text{при всех } s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ определения поимок совпадают. Если $b \geq 2$, то возможность b -кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b -кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b -кратной поимки.

Теорема 1. Пусть $A(t) \equiv O$ (задача простого преследования), $m = 1$ (одного убегающего), $U(t) = S(0, 1)$ (с максимальными по модулю скоростями игроков равными 1). Тогда для осуществления одновременной b -кратной поимки необходимо и достаточно, чтобы $Y_1^0 \in \text{Int co} \{X_p^0, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - b + 1)$.

В докладе планируется привести и другие условия разрешимости исследуемых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благодатских А.И.* Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 54–59.
2. *Благодатских А.И.* Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 433–440.
3. *Благодатских А.И.* Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 46–57.
4. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 2009. 266 с.
5. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
6. *Петров Н.Н.* Многократная поимка в примере Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 747–754.
7. *Blagodatskikh A.I., Petrov N.N.* Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dyn. Games Appl. 2019. Vol. 9, no. 3. P. 594–613. DOI: 10.1007/s13235-019-00300-8

About Simultaneous Multiple Capture of a Group of Evaders

Aleksandr I. Blagodatskikh

Udmurt State University, Izhevsk, Russia, aiblag@mail.ru

Abstract: The present report deals with the problem of pursuit of a group of rigidly coordinated evaders in a nonstationary conflict-controlled process with equal opportunities

$$\begin{aligned} P_i : \quad \dot{x}_i &= A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in U(t), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ E_j : \quad \dot{y}_j &= A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

We say that a multiple capture in the problem of pursuit holds if the specified number of pursuers catch evaders, possibly at different times

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha), \quad \alpha \in \Lambda, \quad \Lambda \subset \{1, 2, \dots, n\}, \quad |\Lambda| = b, \quad j_\alpha \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

The problem of nonstrict simultaneous multiple capture requires that capture moments coincide

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

The problem of a simultaneous multiple capture requires that lowest capture moments coincide

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \quad x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s), \quad s \in [t_0, \tau), \quad \alpha \in \Lambda.$$

The necessary and sufficient conditions for multiple capture, nonstrict simultaneous multiple capture and simultaneous multiple capture are obtained.

Об одной задаче динамического обращения для нелинейной распределенной системы

М.С. Близорукова¹, В.И. Максимов²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, msb@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, maksimovb@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается распределенное дифференциальное уравнение вида Клейна — Гордона с неизвестным входом. Предполагается, что с некоторыми ошибками производятся измерения решения этого уравнения. Указывается алгоритм восстановления, который характеризуется тем свойством, что его входные воздействия формируются по принципу обратной связи и служат аппроксимациями неизвестного входа заданного уравнения.

Ключевые слова: динамическое обращение, распределенное уравнение.

В статье рассматривается задача реконструкции правой части распределенного дифференциального уравнения второго порядка, частным случаем которого являются хорошо известное уравнение Клейна — Гордона. Метод решения основан на подходе из теории позиционного управления (управления с обратной связью) и представляет собой вариант принципа управления с моделью (с поводырем), который был введен в начале семидесятых годов прошлого века Н.Н. Красовским. Целью этого принципа было устранение эффекта неустойчивости обратных связей в системах с переменными входными возмущениями. Именно, было замечено, что если обратная связь успешно решает задачу управления с использованием точной информации о состояниях системы, то даже сколь угодно слабые возмущения этой информации могут разрушить данное свойство в корне: траектории могут принять совершенно иное, нежелательное качество. Схема управления с моделью устраняет эту неустойчивость за счет введения в контур управления вспомогательной, искусственной динамической системы — модели. Описываемая ниже методика развивает подход к решению задачи динамической реконструкции входа (см., например, [1, 3]).

Рассмотрим распределенное дифференциальное уравнение вида Клейна — Гордона

$$\ddot{y}(t) - \Delta y(t) + my(t) + \gamma \dot{y}(t) = g(y(t)) + Bv(t) + f(t), \quad t \in T \quad (1)$$

с начальным условием $y(0) = y_0 \in V = H_0^1(\Omega)$, $\dot{y}(0) = y_{10} \in H = L_2(\Omega)$. Здесь $T = [0, \vartheta]$, $0 < \vartheta < +\infty$, Δ — оператор Лапласа, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, $m = \text{const} > 0$, $\gamma = \text{const} > 0$, $g(\cdot) : H \rightarrow H$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L , $g(0) = 0$, $f(\cdot) \in L_\infty(T; H)$ — заданная функция, B — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства U с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_U$ (пространство возмущений) в пространство H ($B \in L(U; H)$). Всякую функцию $y(\cdot) \in C(T; V)$ такую, что $\dot{y}(\cdot) \in W(T; V) = \{x(\cdot) \in C(T; H) : \dot{x}(\cdot) \in L_2(T; V^*)\}$, удовлетворяющую соотношению (1), будем называть решением уравнения (1) на промежутке T и обозначать символом $y(\cdot) = y(\cdot; y_{10}, y_0, v(\cdot))$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 8.4.5 [2, стр. 152]. Тогда каково бы ни было $v(\cdot) \in L_2(T; U)$, существует единственное решение $y(\cdot) = y(\cdot; t_0, y_{10}, y_0, v(\cdot))$ уравнения (1) на промежутке T .

В настоящей статье мы остановимся на задаче восстановления правой части уравнения (1), суть которой состоит в следующем.

Функция $v(\cdot)$ (вход), стоящая в правой части уравнения (1), предполагается неизвестной. Относительно этой функции известно лишь, что она является элементом пространства $L_2(T; U)$. Наряду с уравнением (1) задано еще одно уравнение того же вида, а именно уравнение

$$\ddot{x}(t) - \Delta x(t) + mx(t) + \gamma \dot{x}(t) = g(x(t)) + Bu(t) + f(t), \quad t \in T \quad (2)$$

с начальным условием $x(0) = x_0^h \in V$, $\dot{x}(0) = x_{10}^h \in H$. В каждый момент t измеряются производные решений уравнений (1) и (2). Именно, определяются значения производных решений в этот момент, т.е. $\dot{y}(t)$ и $\dot{x}(t)$. Эти измерения могут быть неточными, т.е. вместо функций $\dot{y}(\cdot)$ и $\dot{x}(\cdot)$ определяются функции $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T; H)$ и $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; H)$ со свойствами

$$|\dot{y}(t) - \xi^h(t)|_H \leq \nu_{1,h}(t), \quad |\dot{x}(t) - \psi^h(t)|_H \leq \nu_{2,h}(t) \quad \text{при п.в. } t \in T,$$

$$\int_0^\vartheta \nu_{1,h}^2(t) dt \leq C^{(0)}h, \quad \int_0^\vartheta \nu_{2,h}^2(t) dt \leq C^{(1)}h,$$

где $C^{(0)}, C^{(1)}$ — положительные постоянные. Будем предполагать, что начальные состояния уравнений (1) и (2) связаны соотношениями $|x_{10}^h - y_{10}|_H \leq h$, $|x_0^h - y_0|_V \leq h$. Здесь $h \in (0, 1)$ — величина

погрешности измерения, символ $|\cdot|_H$ ($|\cdot|_V$) означает норму в пространстве $H(V)$.

Требуется указать семейство функций $u^{\alpha,h}(\cdot)$, зависящее от параметров $\alpha \in (0, 1)$ и $h \in (0, 1)$, такое что, во-первых,

$$u^{\alpha,h}(t) = u^{\alpha,h}(\xi^h(t), \psi^h(t)),$$

$$|x^h(t) - \psi^h(t)|_H \leq \nu_{2,h}(t), \quad |\dot{y}(t) - \xi^h(t)|_H \leq \nu_{1,h}(t),$$

и, во-вторых, имеют место сходимости

$$u^h(\cdot) = u^{\alpha(h),h}(\cdot) \rightarrow v(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; U), \quad (3)$$

$$x^h(\cdot) \rightarrow y(\cdot) \quad \text{в } W(V; H), \quad \text{если } h \rightarrow 0, \quad (4)$$

при подходящем согласовании $\alpha = \alpha(h)$ и h . Здесь $x^h(\cdot) = x(\cdot; x_{10}^h, x_0^h)$, $u^h(\cdot)$ означает решение уравнения (2) с правой частью $u(t) = u^{\alpha,h}(t)$.

Теорема 1. Пусть функция $u^h(\cdot)$ определяется по формуле

$$u^h(t) = u^{\alpha,h}(t) = \alpha^{-1} B^*(\xi^h(t) - \psi^h(t)),$$

$v(\cdot) = u_*(\cdot)$ и $\alpha = \alpha(h) = h^{1/3}$. Пусть также $\gamma > L\vartheta$. Тогда имеют место сходимости (3) и (4).

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимов В.И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург, 2000. 305 с.
2. Cazenave T., Haraux A. An introduction to semilinear evolution equations. Clarendon Press, Oxford, 1998. 199 p.
3. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995. 865 p.

On a Dynamic Deconvolution Problem for a Nonlinear Distributed System

M. Blizorukova¹, V. Maksimov²

¹ IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, msb@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, maksimov@imm.uran.ru

Abstract: A distributed differential equation of the Klein—Gordon type with an unknown input is considered. It is assumed that the measurements of the solution of this equation are observed with small errors. A reconstructing

algorithm characterized by the property that its inputs are formed according to the feedback principle and considered as approximations of the unknown input in a given equation is indicated.

УДК 539.3, 532.542

Исследование динамической устойчивости упругих элементов вибрационных устройств

П.А. Вельмисов¹, А.В. Анкилов²

УлГТУ, Ульяновск, Россия,

¹ velmisov@ulstu.ru, ² ankil@ulstu.ru

Аннотация: Исследуется устойчивость решений краевой задачи для связанной нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей динамику деформируемого элемента вибрационного устройства, который обтекается дозвуковым потоком идеальной жидкости. Принятые в работе определения устойчивости деформируемого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Воздействие газа или жидкости (в модели идеальной среды) определяется из асимптотических уравнений аэрогидромеханики. Для решения аэрогидродинамической части задачи используются методы теории функций комплексного переменного. Для описания динамики упругого элемента используется нелинейная теория твердого деформируемого тела, учитывающая его поперечную и продольную деформацию. Исследование устойчивости проводится на основе построения положительно определенного функционала типа Ляпунова.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток жидкости, система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, функционал.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассматривается плоское течение идеальной несжимаемой жидкости в вибрационном устройстве, моделируемом прямолинейным каналом $J = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ (рис. 1). Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругий элемент занимает часть стенки $y = y_0$, $x \in [b, c]$.

Введем обозначения: $u(x, t)$ и $w(x, t)$ — функции, описывающие продольную и поперечную составляющие деформации упругого элемента соответственно; $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости возмущенного потока.

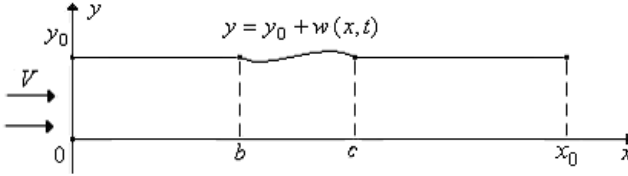


Рис. 1. Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент.

Тогда математическая постановка задачи примет вид:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad \varphi_x(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$w(b, t) = w'(b, t) = u(b, t) = w(c, t) = w'(c, t) = u(c, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

$$\begin{cases} -EF \left[w' \left(u' + 1/2 \cdot w'^2 \right) \right]' + Dw'''' + M\ddot{w} + Nw'' + \beta_0 w + \\ \quad + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \dot{w}''' = -\rho (\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \\ -EF \left(u' + 1/2 \cdot w'^2 \right)' + M\ddot{u} = 0, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка — частные производные по x и t соответственно; ρ — плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D, M — изгибная жесткость и погонная масса элемента (пластины); N — сжимающая (растягивающая) пластину сила; β_1, β_2 — коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 — коэффициент жесткости основания; E — модуль упругости материала элемента; F — площадь поперечного сечения элемента.

При помощи функции $\zeta = sn \frac{K(k)i(2z - 2x_0 - iy_0)}{y_0}$, где $sn(x)$ — эллиптический синус, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, модуль k определяется из соотношения $K(\sqrt{1-k^2})y_0 = 2K(k)x_0$, конформно отображим прямоугольник J на верхнюю полуплоскость $H = \{\zeta : \text{Im}\zeta > 0\}$ комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Используя методы теории функций комплексного переменного [2], получим выражение для аэродинамического давления в (7)

$$-\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)) = -\frac{\rho}{\pi} \int_b^c (\ddot{w}(\tau, t) + V\dot{w}'(\tau, t)) K(\tau, x) d\tau - \\ - \frac{\rho V}{\pi} \int_b^c (\dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)) K_x(\tau, x) d\tau, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

где $K(\tau, x) = \ln \left| \frac{cd(2K(k)i(x_0 - b)y_0^{-1}) - cd(2K(k)i(x_0 - c)y_0^{-1})}{cd(2K(k)i(x_0 - \tau)y_0^{-1}) - cd(2K(k)i(x_0 - x)y_0^{-1})} \right|$,
 $\tau \neq x$, $cd(x) = \frac{cn(x)}{dn(x)}$, $dn(x)$ — дельта амплитуда, $cn(x)$ — косинус эллиптический.

2. Основной результат

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad N < \lambda_1 D - \frac{\rho V^2 K_1}{\pi}, \quad M > \frac{\rho K_1}{\pi}, \quad (9)$$

где $K_1 = \sup_{x \in (b, c)} \int_b^c |K(\tau, x) + g(x) + g(\tau)| d\tau$; $g(x)$ — произвольная интегрируемая на (b, c) функция, выбираемая из соображений достижения как можно меньшего значения K_1 ; λ_1 — наименьшее собственное значение краевой задачи $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $x \in (b, c)$ с краевыми условиями (6) для функции $w(x, t)$. При условиях (9) с помощью функционала

$$\Phi(t) = \int_b^c \left\{ M(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + Dw''^2 + EF(u' + 0.5w'^2)^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx + \\ + \frac{\rho}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c \dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_b^c dx \int_b^c w'(x, t) w'(\tau, t) K(\tau, x) d\tau$$

исследована устойчивость нулевого решения $u(x, t) \equiv 0$, $w(x, t) \equiv 0$ системы (6)–(8) по Ляпунову и доказана теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (9). Тогда решение $u(x, t)$, $w(x, t)$ задачи (6)–(8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных $\dot{u}(x, 0)$, $u'(x, 0)$, $w(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $w'(x, 0)$, $w''(x, 0)$.

Заключение

В статье приведен пример исследования устройства с одним элементом. Аналогичные исследования проведены также в случае произвольного количества деформируемых элементов, расположенных как на одной или двух стенках канала, так и внутри него (некоторые результаты представлены в [3]). На основе метода Галеркина проведены численные эксперименты для конкретных примеров механических систем, подтверждающие достоверность полученных результатов. Полученные результаты предназначены для использования на этапе проектирования вибрационных устройств, применяемых для интенсификации технологических процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-730015).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.

Investigation of Stability of Elastic Element of Vibration Device

Petr A. Velmisov¹, Andrey V. Ankilov²

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia,

¹ velmisov@ulstu.ru, ² ankil@ulstu.ru

Abstract: The stability of solutions of the boundary value problem for a coupled nonlinear system of integro-differential partial differential equations, describing the dynamics of a deformable element of a vibrating device that

flows around a subsonic stream of an ideal fluid, is investigated. The definitions of the stability of a deformable body adopted in the work correspond to the concept of the stability of dynamic systems according to Lyapunov. The effect of a gas or liquid (in an ideal medium model) is determined from the asymptotic equations of aerohydraulics. To solve the aerohydrodynamic part of the problem, the methods of the theory of functions of a complex variable are used. To describe the dynamics of an elastic element, the nonlinear theory of a solid deformable body is used, taking into account its transverse and longitudinal deformation. The stability study is based on the construction of positive definite Lyapunov type functional.

УДК 517.977.8

Об уравнении Гамильтона — Якоби для дифференциальных игр в системах с дробными производными Капуто

М.И. Гомоюнов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, m.i.gomoyunov@gmail.com

Аннотация: Рассматривается дифференциальная игра, в которой движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$. На основе подходящего понятия коинвариантных производных порядка α для функционала цены этой игры выписывается уравнение Гамильтона — Якоби. Устанавливается, что достаточно гладкое решение этого уравнения является ценой исходной дифференциальной игры, и что в точках дифференцируемости цена удовлетворяет выписанному уравнению Гамильтона — Якоби.

Ключевые слова: дифференциальная игра, производная Капуто, коинвариантная производная, уравнение Гамильтона — Якоби.

1. Дифференциальная игра

В рамках позиционного подхода [2–4] (см. также [1, 6]) рассмотрим дифференциальную игру для динамической системы

$$\begin{aligned} ({}^C D^\alpha x)(\tau) &= f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)), \quad \tau \in [0, T], \\ x(\tau) &\in \mathbb{R}^n, \quad u(\tau) \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v(\tau) \in Q \subset \mathbb{R}^s. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь τ — время; $x(\tau)$ — состояние системы в момент τ ; через $({}^C D^\alpha x)(\tau)$ обозначена производная Капуто [5] порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$$({}^C D^\alpha x)(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{x(\xi) - x(0)}{(\tau - \xi)^\alpha} d\xi,$$

где Γ — гамма-функция; $u(\tau)$ и $v(\tau)$ — текущие управляющие воздействия 1-го и 2-го игроков; P и Q — компакты. Функция $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и удовлетворяет по второму аргументу условиям локальной липшицевости и подлинейного роста.

Пусть в момент $t \in [0, T]$ известна история движения $w(\cdot) \in AC^\alpha[0, t]$, где $AC^\alpha[0, t]$ — множество функций $w : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что существует измеримая и ограниченная функция $\psi : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$w(\tau) = w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\tau \frac{\psi(\xi)}{(\tau - \xi)^{1-\alpha}} d\xi, \quad \tau \in [0, t].$$

Через $X(t, w(\cdot))$ обозначим множество функций $x(\cdot) \in AC^\alpha[0, T]$, удовлетворяющих условию $x(\tau) = w(\tau)$, $\tau \in [0, t]$. Допустимыми реализациями $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ управляющих воздействий игроков на отрезке $[t, T]$ считаем измеримые функции $u : [t, T] \rightarrow P$ и $v : [t, T] \rightarrow Q$. Согласно [6] такие реализации единственным образом определяют движение системы (1) — функцию $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$, которая вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ при почти всех $\tau \in [t, T]$ удовлетворяет (1).

Полагаем, что показатель качества имеет вид

$$\gamma = \sigma(x(T)) + \int_t^T \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

где $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\chi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывные функции; выполняется условие седловой точки для маленькой игры [2, с. 79]:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (\langle f(\tau, x, u, v), s \rangle + \chi(\tau, x, u, v)) \\ &= \max_{v \in Q} \min_{u \in P} (\langle f(\tau, x, u, v), s \rangle + \chi(\tau, x, u, v)) = H(\tau, x, s), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau \in [0, T]$, $x, s \in \mathbb{R}^n$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Цель 1-го игрока — минимизировать γ , а 2-го — максимизировать γ .

Рассмотрим множество $G = \{(t, w(\cdot)) : t \in [0, T], w(\cdot) \in AC^\alpha[0, t]\}$ допустимых позиций системы (1). Стратегией управления 1-го (2-го)

игрока называем функцию $U : G \rightarrow P$ ($V : G \rightarrow Q$). Стратегия U и разбиение $\Delta_\delta = \{\tau_j : \tau_1 = t, 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leq \delta, j \in \overline{1, k}, \tau_{k+1} = T\}$ отрезка $[t, T]$ образуют закон управления 1-го игрока $\{U, \Delta_\delta\}$: $u(\tau) = U(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot))$, $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, $j \in \overline{1, k}$, где $x_{\tau_j}(\xi) = x(\xi)$, $\xi \in [0, \tau_j]$. Определим оптимальный гарантированный результат 1-го игрока:

$$\rho_u(t, w(\cdot)) = \inf_U \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v(\cdot)} \gamma, \quad (4)$$

где значение γ показателя качества (2) отвечает закону $\{U, \Delta_\delta\}$ и реализации $v(\cdot)$. По аналогии, для 2-го игрока имеем

$$\rho_v(t, w(\cdot)) = \sup_V \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u(\cdot)} \gamma. \quad (5)$$

В случае $\rho_u(t, w(\cdot)) = \rho_v(t, w(\cdot)) = \rho(t, w(\cdot))$ скажем, что игра (1), (2) имеет цену $\rho(t, w(\cdot))$. Стратегии U^0 и V^0 , на которых в (4) и (5) достигаются, соответственно, $\inf$ и $\sup$, назовем оптимальными.

2. Функциональное уравнение Гамильтона — Якоби

Обозначим $G^0 = \{(t, w(\cdot)) \in G : t < T\}$. Следуя конструкциям из [4, 7], функционал $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ назовем коинвариантно (*ci*-) дифференцируемым порядка α в точке $(t, w(\cdot)) \in G^0$, если существуют такие $\partial_t^\alpha \varphi = \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla^\alpha \varphi = \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, что для любой функции $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ справедливо равенство

$$\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) = (\tau - t) \partial_t^\alpha \varphi + \left\langle \int_t^\tau ({}^C D^\alpha x)(\xi) d\xi, \nabla^\alpha \varphi \right\rangle + o(\tau - t),$$

где $\tau \in (t, T)$ и $o(\tau - t)/(\tau - t) \rightarrow 0$ при $\tau \downarrow t$.

Дифференциальной игре (1), (2) поставим в соответствие задачу Коши для функционального уравнения Гамильтона — Якоби

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^0, \quad (6)$$

где H определяется согласно (3), и терминального условия

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(T)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha[0, T]. \quad (7)$$

Далее, на множестве G (и на $G^0 \subset G$) введем метрику [4, с. 25]

$$\mathbf{d}((t_1, w_1(\cdot)), (t_2, w_2(\cdot))) = \max\{\mathbf{d}_1^*, \mathbf{d}_2^*\}, \quad (t_1, w_1(\cdot)), (t_2, w_2(\cdot)) \in G,$$

где для $i \in \{0, 1\}$ обозначено

$$\mathbf{d}_{i+1}^* = \max_{\tau \in [0, t_{i+1}]} \min_{\xi \in [0, t_{2-i}]} \sqrt{|\tau - \xi|^2 + \|w_{i+1}(\tau) - w_{2-i}(\xi)\|^2}.$$

Эта метрика соответствует расстоянию по Хаусдорфу между графиками функций $w_1 : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $w_2 : [0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Функционал $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ назовем ci -гладким порядка α , если он непрерывен, ci -дифференцируем порядка α во всех точках из G^0 , и функционалы $\partial_t^\alpha \varphi : G^0 \rightarrow \mathbb{R}$ и $\nabla^\alpha \varphi : G^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны.

Рассмотрим стратегии управления 1-го и 2-го игроков

$$\begin{aligned} U^0(t, w(\cdot)) &\in \arg \min_{u \in P} \max_{v \in Q} (\langle f(t, w(t), u, v), \nabla^\alpha \varphi \rangle + \chi(t, w(t), u, v)), \\ V^0(t, w(\cdot)) &\in \arg \max_{v \in Q} \min_{u \in P} (\langle f(t, w(t), u, v), \nabla^\alpha \varphi \rangle + \chi(t, w(t), u, v)), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\nabla^\alpha \varphi = \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))$ и $(t, w(\cdot)) \in G^0$.

Имеют место следующие теоремы, позволяющие трактовать уравнение (6) как уравнение Гамильтона — Якоби для дифференциальных игр в системах с дробными производными Капуто.

Теорема 1. Пусть существует ci -гладкий порядка α функционал $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий уравнению Гамильтона — Якоби (6) и терминальному условию (7). Тогда для любой позиции $(t, w(\cdot)) \in G$ дифференциальная игра (1), (2) имеет цену; справедливо равенство $\rho(t, w(\cdot)) = \varphi(t, w(\cdot))$; стратегии (8) являются оптимальными.

Теорема 2. Функционал цены $\rho : G \rightarrow \mathbb{R}$ дифференциальной игры (1), (2) удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби (6) во всех точках из G^0 , в которых он ci -дифференцируем порядка α .

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 19-71-00073).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гомоюнов М.И. Экстремальный сдвиг на сопутствующие точки в позиционной дифференциальной игре для системы дробного порядка // Тр. ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 11–34.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

4. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011. 243 с
5. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p.
6. *Gomoyunov M.I.* Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dyn. Games Appl. 2019. P. 1–27. DOI: 10.1007/s13235-019-00320-4
7. *Kim A.V.* Functional Differential Equations: Application of i -Smooth Calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.

On a Hamilton – Jacobi Equation for Differential Games in Systems with Fractional Caputo Derivatives

Mikhail I. Gomoyunov

IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, m.i.gomoyunov@gmail.com

Abstract: A differential game is considered, in which a motion of the dynamical system is described by a differential equation with the Caputo derivative of an order $\alpha \in (0, 1)$. For the value functional of this game, based on an appropriate notion of coinvariant derivatives of the order α , a Hamilton—Jacobi equation is obtained. It is verified that a sufficiently smooth solution to this equation is the value of the differential game, and that the value functional satisfies the given Hamilton—Jacobi equation at the points of differentiability.

УДК 517.977.58

Вычислительная технология решения задач оптимального управления в системах с запаздыванием

А.Ю. Горнов¹, Т.С. Зароднюк²

¹ ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, gornov@icc.ru,

² ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, tz@icc.ru

Аннотация: Рассматривается класс задач оптимального управления для систем с запаздыванием. Предлагаемая вычислительная технология основана на методе Ритца и сплайн-коллокационных подходах. Для решения задач рассматриваемого класса траектории системы дискретизируются на сетке с постоянным шагом и формулируется обобщенный функционал

невязки, включающий взвешенные невязки исходного дифференциального уравнения. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: задача оптимального управления, система с запаздыванием, вычислительная технология.

Введение

В работе рассматриваются управляемые динамические системы следующего вида

$$F_i(x(g(t)), \dot{x}(g(t)), u) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$. На расширенном интервале изменения независимой переменной $t \in [t_N, t_K]$, $t_N \leq t_0$, $t_K \geq t_1$, за пределами основного интервала, доопределяются значения производных фазовых переменных

$$\dot{x}_i^L = h_i^L(t), \quad t \in [t_N, t_0], \quad \dot{x}_i^R = h_i^R(t), \quad t \in [t_1, t_K], \quad i = \overline{1, n}.$$

Краевые условия задаются функционалами $K_j(x(g(\tau_j)), \dot{x}(g(\tau_j)), u) = 0$, $\tau_j \in [t_0, t_1]$, $j = \overline{1, l}$. Функции $g_k(s)$, $k = \overline{1, N_k}$ характеризуют отклонение аргумента.

1. Вычислительная технология

Для аппроксимации исходной задачи оптимального управления (ЗОУ) на фиксированной сетке узлов по времени в работе предлагается применить метод Ритца: траектории приближаются с помощью сплайн-функций, коэффициенты которых возможно подбирать путем поиска минимума функционала невязок [1]

$$I_1 = \sum_{i=1}^n v_i^N \int_{t_N}^{t_0} (\dot{x}_i(g(t)) - h_i^L(t))^2 dt + \sum_{i=1}^n v_i^N \int_{t_1}^{t_K} (\dot{x}_i(g(t)) - h_i^R(t))^2 dt,$$

$$I_2 = \sum_{j=1}^l v_j^K K_j^2(x(g(\tau_j)), \dot{x}(g(\tau_j)), u) + K_0(x(g(\tau_0)), \dot{x}(g(\tau_0)), u),$$

$$I(x(t), u) = I_1 + I_2 \rightarrow \min,$$

где v_i^N , $i = \overline{1, n}$, и v_j^K , $j = \overline{1, l}$, — весовые коэффициенты для невязок и краевых условий.

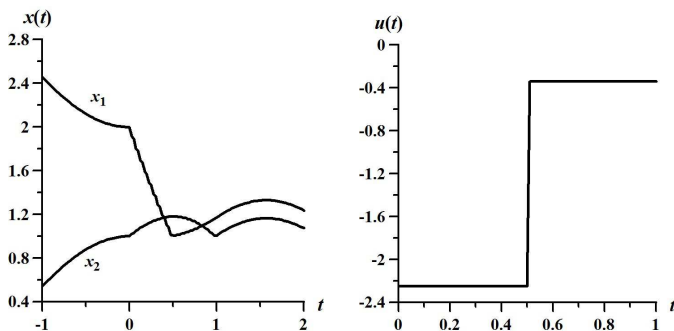


Рис. 1. Траектории системы и управление в тестовой задаче оптимального управления с запаздыванием

Для оценки производных от искомым траекторий системы используется методика «сплайн-дифференцирования», основанная на двух методах сплайн аппроксимации: с помощью кубических натуральных сплайнов и с применением специального типа сплайнов, вторые производные которых на краях также управляются с помощью оптимизируемых параметров [2].

2. Вычислительные эксперименты

Приведем результаты вычислительных экспериментов для тестовой ЗОУ с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}_1 = \sin t + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1(t+1) - (t+1)x_2(t-1)u_1, \quad t \in [0, 1],$$

$$\dot{x}_1 = \sin t, \quad \dot{x}_2 = -\sin t, \quad t \in [-1, 0],$$

$$\dot{x}_1 = \cos t, \quad \dot{x}_2 = \cos t, \quad t \in (1, 2],$$

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 1, \quad u \in [\underline{u}, \overline{u}].$$

Функционал формируется представленным выше способом. В результате численного решения задачи получены следующие оптимальные траектории и управление (рис. 1).

Результаты вычислительных экспериментов для ЗОУ с запаздыванием позволяют убедиться в работоспособности предложенной

вычислительной технологии исследования задач рассматриваемого класса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-07-00587.

ЛИТЕРАТУРА

1. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 203 с.
2. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.

Computational Technique for Solving Optimal Control Problems for Time-Delay Systems

Alexander Yu. Gornov¹, Tatiana S. Zarodnyuk²

¹ Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia, gornov@icc.ru

² Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia, tz@icc.ru

Abstract: A class of optimal control problems for time-delay systems is considered. The proposed numerical technology is based on the Ritz method and spline collocation approaches. To solving the presented problem we discretized system trajectories on the grid with a constant step and formulate the generalized residual functional, including weighted residuals of the original differential equation. The results of computational experiments are carried out for the problems of considerable class.

УДК 517.977

Методы стабилизации одной системы с постоянным запаздыванием

Б.Г. Гребенщиков¹, А.Б. Ложников^{2,3}

¹ УрФУ, Екатеринбург, Россия, b.g.grebenshchikov@urfu.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, ABLozhnikov@yandex.ru

³ УрФУ, Екатеринбург, Россия, a.b.lozhnikov@urfu.ru

Аннотация: Рассматривается сложная управляемая система линейных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Система

состоит из двух подсистем, причем одна из них содержит экспоненциальный множитель в правой части. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости этой системы. В случае неустойчивости решения этой системы предложены алгоритмы стабилизации на бесконечном промежутке времени, использующие методы стабилизации стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и методы стабилизации разностных систем. Составлена компьютерная программа, позволяющая достаточно эффективно осуществлять данные алгоритмы стабилизации, основанная на пакете прикладных программ Matlab. В ходе стабилизации с помощью данного пакета решаются численные нелинейные уравнения типа Ляпунова — Риккати. Приведен конкретный численный пример, построены графики как неустойчивого решения исходной системы, так и стабилизированного решения.

Ключевые слова: запаздывание, устойчивость, стабилизация.

Введение

Авторы исследуют асимптотические свойства решений систем с запаздыванием, схожих с системами обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих медленные и быстрые движения [2].

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система с запаздыванием

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_1x(t) + B_1x(t - \tau) + A_2y(t) + B_2y(t - \tau) + C_1u_1(t), \\ dy(t)/dt &= \vartheta_0 e^t [A_3x(t) + B_3x(t - \tau) + A_4y(t) + B_4y(t - \tau) + C_2u_2(t)], \\ t \geq 0, \quad \vartheta_0 &= \text{const}, \quad \vartheta_0 > 0, \quad \tau = \text{const}, \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

К ней заменой аргумента $t = \ln(\vartheta/\vartheta_0)$ приводятся системы с линейным запаздыванием. Матрицы A_j, B_j ($j = 1, 2, 3, 4$) имеют размерность $[m \times m]$, вектор-функции $x(t), y(t)$ имеют размерность m . Управляющее воздействие $u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}^T$, его компоненты $u_j(t)$ — r -мерные вектор-функции, матрицы C_j имеют размерность $[m \times r]$. Если при $u(t) \equiv 0$ решение системы неустойчиво, то возникает задача стабилизации системы на бесконечном промежутке времени.

2. Условия экспоненциальной устойчивости

Полагая $x_{n+1}(t) = x(t + n\tau)$, $y_{n+1}(t) = y(t + n\tau) : t \in [0, \tau]$, перейдем к счетной дифференциально-разностной системе на конечном

промежутке времени $[0, \tau]$ [1, с. 103]. Имеем соотношения

$$\begin{aligned} dx_{n+1}(t)/dt &= A_1 x_{n+1}(t) + B_1 x_n(t) + A_2 y_{n+1}(t) + B_2 y_n(t), \\ \varepsilon_n dy_{n+1}(t)/d\tau &= e^t [A_3 x_{n+1}(t) + B_3 x_n(t) + A_4 y_{n+1}(t) + B_4 y_n(t)], \\ \varepsilon_n &= \frac{\mu^n}{\vartheta_0}, \quad t \in [0, \tau], \quad x_{n+1}(0) = x_n(\tau), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим свойства дифференциально-разностной системы (2) при малом ε_n . Очевидно, система содержит медленные $x_n(t)$ и быстрые переменные $y_n(t)$. Как показано в [4], проблема получения достаточных условий устойчивости (а отсюда в дальнейшем и построения алгоритма стабилизации) сводится к исследованию асимптотических свойств более простой системы

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n+1}^0(\theta_n)}{d\theta_n} &= \varepsilon_n [(A_1 + B_1)x_{n+1}^0(\theta_n) + A_2 y_{n+1}^0(\theta_n) + B_2 y_n^0(\theta_n)], \\ \frac{dy_{n+1}^0(\theta_n)}{d\theta_n} &= e^{\theta_n \varepsilon_n} [(A_3 + B_3)x_{n+1}^0(\theta_n) + A_4 y_{n+1}^0(\theta_n) + B_4 y_n^0(\theta_n)], \\ \theta_n &= t/\varepsilon_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку подсистемы в (3) могут быть слабо связаны [4], то полагаем, что для матриц A_1, B_1 справедливы условия:

1) собственные числа λ матрицы A_1 имеют отрицательную вещественную часть, то есть

$$Re(\lambda) < -\beta_1, \quad \beta_1 = \text{const}, \quad \beta_1 > 0; \quad (4)$$

2) собственные числа $\bar{\lambda}$ матрицы $A_1 + B_1$ имеют отрицательную вещественную часть, то есть

$$Re(\bar{\lambda}) < -\beta_2, \quad \beta_2 = \text{const}, \quad \beta_2 > 0; \quad (5)$$

3) рассматривая вторую подсистему в (1), считаем, что для собственных чисел $\hat{\lambda}$ матрицы A_4 справедливо неравенство

$$Re(\hat{\lambda}) < -\beta_3, \quad \beta_3 = \text{const}, \quad \beta_3 > 0; \quad (6)$$

4) для собственных чисел ρ матрицы $-A_4^{-1}B_4$ справедливо неравенство

$$|\rho| < \gamma, \quad \gamma = \text{const}, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (7)$$

3. Методы стабилизации

Вначале стабилизируем первую подсистему, содержащую только переменные x_j^0 . Используем метод, предложенный в [3, с. 97], полагая управляющее воздействие $u_1(t) = -C_1^\top \Gamma x^0$, где Γ — симметричная матрица размерности $[m \times m]$ удовлетворяющая уравнению [3, с. 97]

$$\Gamma A_1 + (A_1)^\top \Gamma - 2\Gamma C_1(C_1)^\top \Gamma = -\alpha \Gamma - \delta E,$$

E — единичная матрица размерности $[m \times m]$; δ — малое положительное число; α — положительная величина, которой мы можем распоряжаться, за счет ее выбора часто удается добиться того, что наряду с выполнением неравенства (4) одновременно справедливо и (5). Далее, стабилизируем вторую подсистему без переменных x_j^0

$$\varepsilon_n dy_{n+1}^0(t)/dt = e^t[A_4 y_{n+1}^0(t) + B_4 y_n^0(t) + C_2 u_2(t)]. \quad (8)$$

Если матрица A_4 имеет некоторые собственные значения с неотрицательной вещественной частью, то стабилизируем соответствующую подсистему без запаздывающих членов методом, изложенным выше. При достаточно больших $\alpha > 0$ зачастую данным алгоритмом можно стабилизировать и всю подсистему (8). В противном случае стабилизируем (в дополнение) вырожденную (разностную) систему

$$\bar{y}_{n+1}^0(t) = -(A_4)^{-1} B_4 \bar{y}_n^0(t) - (A_4)^{-1} C_2 u_2(t).$$

Когда система не является слабо связанной, после стабилизации первой подсистемы с медленными переменными $x^0(t)$, ввиду малости их производных, получаем из соответствующей вырожденной подсистемы выражение $x_{n+1}^0(t) = -(A_1 + B_1)^{-1}[A_2 y_{n+1}^0(t) + B_2 y_n^0(t)]$. Подставив его во вторую подсистему стабилизируем соответствующую управляемую систему с малым параметром при производной. В этом случае исходная система (1) экспоненциально устойчива [3].

Для реализации методов, изложенных авторами, составлена компьютерная программа, основанная на пакете прикладных программ Matlab, позволяющая достаточно эффективно стабилизировать рассматриваемые системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

2. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971. 440 с.
3. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 248 с.
4. Grebenshchikov B.G., Lozhnikov A.B. Stabilization of some systems with constant delay // IFAC-PapersOnLine, 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 105–109.

Methods of Stabilization of One System with a Constant Delay

B.G. Grebenshchikov¹, A.B. Lozhnikov^{2,3}

¹ Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia, b.g.grebenshchikov@urfu.ru

² IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, ABLozhnikov@yandex.ru,

³ Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia, a.b.lozhnikov@urfu.ru

Abstract: A controlled system of linear differential equations with constant delay is considered. The system consists of two subsystems, one of which contains an exponential factor in the right side. Sufficient conditions for the asymptotic stability of this system are obtained. In the case of the instability of the solution of this system, the algorithms of stabilization on an infinite time interval are proposed, using methods for stabilizing stationary systems of ordinary differential equations and methods for stabilizing difference systems. We elaborated a computer program which implements these stabilization algorithms on the base of the Matlab package. In the course of stabilization the nonlinear Lyapunov—Riccati type equations are solved. A concrete numerical example is given, graphs of both the unstable solution of the initial system and the stabilized solution are constructed.

УДК 517.977.5

Программные и позиционные стратегии управления для модели конкуренции Лотки — Вольтерры

Н.Л. Григоренко¹, А.Д. Клименкова²,
А. Коробейников³, Е.Н. Хайлов⁴

¹ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, grigor@cs.msu.ru

² МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, klimenkovaad@mail.ru

³ Центр математических исследований, Барселона, Испания,
akorobeinikov@crm.cat

⁴ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, khailov@cs.msu.ru

Аннотация: В докладе для описания взаимодействия раковых и здоровых клеток используется модель конкуренции Лотки — Вольтерры.

Для рассматриваемой управляемой системы ставится задача минимизации терминального функционала, представляющего собой взвешенную разность концентраций раковых и здоровых клеток в конечный момент времени периода лечения. Рассматриваются три вида лечения. С помощью принципа максимума Понтрягина для каждого вида лечения установлены свойства оптимальных управлений, которые подтверждаются соответствующими численными расчетами. Также в докладе для заданной управляемой системы представлены результаты аналитического и численного исследований задачи терминального управления для двух вариантов ограничений на управления.

Ключевые слова: раковые заболевания, нелинейная управляемая система, оптимальное управление, задача терминального управления, позиционное управление.

Введение

На сегодняшний день рак является одной из самых распространенных причин смерти в мире. В 2018 году врачи диагностировали более 18 млн. случаев онкологических заболеваний и около 9,6 млн. из них имели летальный исход. Причины такой высокой смертности заключаются в том, что рак — многоуровневое заболевание с множеством различных проявлений. Поэтому возникает острая необходимость в разработке методов и средств ранней диагностики и лечения этого заболевания. Значительный вклад в решение данной проблемы вносит математическое моделирование, которое позволяет описать поведение клеток и органов до болезни, при её развитии и лечении. Для описания взаимодействия раковых и здоровых клеток в процессе лечения таких раковых заболеваний, как лимфома, миелома и лейкомия, используется модель конкуренции Лотки — Вольтерры. Для поиска эффективных стратегий лечения широко используется теория оптимального управления.

1. Модель

На заданном отрезке времени лечения $[0, T]$ рассматривается нелинейная управляемая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r(1 - \kappa_1 w(t))(1 - x(t) - a_{12}y(t))x(t) - m_1 u(t)x(t), \\ \dot{y}(t) = (1 - \kappa_2 w(t))(1 - y(t) - a_{21}x(t))y(t) - m_2 u(t)y(t), \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x_0, y_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ отражают концентрации здоровых и раковых клеток соответственно. Управляющие функции $u(t)$ и $w(t)$ отражают раз-

ные виды терапии, а именно: $u(t)$ задаёт концентрацию лекарственного препарата или интенсивность терапии, непосредственно убивающей раковые клетки, а $w(t)$ определяет концентрацию лекарственного препарата или интенсивность терапии, подавляющей пролиферацию (деление) раковых клеток. Коэффициенты r , a_{12} , a_{21} являются положительными параметрами системы: r отражает внутреннюю скорость роста здоровых клеток, a_{12} — скорость инактивации здоровых клеток раковыми, a_{21} — скорость инактивации раковых клеток здоровыми. Положительные величины m_1 , m_2 задают уровни смертности популяций соответственно здоровых и раковых клеток при лечении, убивающей раковые клетки. Положительные величины κ_1 , κ_2 определяют уровни пролиферации популяций соответственно здоровых и раковых клеток при лечении, подавляющем деление раковых клеток. Управляющие функции здесь подчинены ограничениям:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \leq 1, \quad 0 \leq w(t) \leq w_{\max} < \min\{\kappa_1^{-1}, \kappa_2^{-1}\}. \quad (2)$$

Считаем справедливыми неравенства:

$$a_{12} \cdot a_{21} \neq 1, \quad m_2 > m_1, \quad \kappa_2 > \kappa_1.$$

Второе и третье неравенства отражают естественное требование более сильного воздействия рассматриваемых способов лечения на популяцию раковых клеток, чем на популяцию здоровых клеток.

Под множеством допустимых управлений $\Omega(T)$ понимаются всевозможные пары измеримых по Лебегу функций $(u(t), w(t))$, которые при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют ограничениям (2). Тогда стандартными рассуждениями устанавливаются ограниченность, положительность и продолжимость на отрезок $[0, T]$ решения $(x(t), y(t))$ системы (1).

Для системы (1) на множестве допустимых управлений $\Omega(T)$ рассматривается задача минимизации функционала:

$$J(u, w) = y(T) - \alpha x(T), \quad (3)$$

который представляет собой взвешенную разность концентраций раковых и здоровых клеток в конечный момент времени T периода лечения $[0, T]$. Здесь α — положительный весовой коэффициент.

Рассматриваются задачи поиска оптимальных стратегий для трёх частных видов лечения: при терапии, непосредственно уничтожающей раковые клетки ($w(t) \equiv 0$); при терапии, подавляющей

деление раковых клеток ($u(t) \equiv 0$); при терапии, одновременно уничтожающей и подавляющей деление раковых клеток ($w(t) \equiv u(t)$).

Ограниченность решений системы (1) гарантирует существование в соответствующих задачах минимизации (3) оптимальных управлений ($u_*(t), w_*(t)$) и отвечающего им оптимального решения ($x_*(t), y_*(t)$).

В докладе для каждой задачи приведено аналитическое исследование, найдены виды оптимальных управлений и даны результаты численных расчётов, выполненных в среде ВОСОР-2.1.0, иллюстрирующие теоретические выводы. Представлены примеры лечений, которые приводят пациента к полному выздоровлению или же к замедлению развития болезни. Полученные результаты продолжают исследования, представленные в [1].

В докладе проведен также аналитический вид позиционных управлений, решающих задачу терминального управления для двух вариантов ограничений на управления системы (1). Первый вариант — случай отсутствия ограничений на управление u и постоянство управления $w \in [0, w_{\max}]$. В этом случае управление

$$u = m_2^{-1} \left((1 - \kappa_2 w)(1 - a_{21}x - y) + T_1^{-1} \right), \quad T_1 > 0,$$

для начальных условий $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ приводит систему (1) в малую окрестность заданной целевой точки, при выборе $w \in [0, w_{\max}]$, множества :

$$x \in \left\{ \frac{r(1 - \kappa_1 w) - m_1 m_2^{-1} \left((1 - \kappa_2 w) + T_1^{-1} \right)}{r(1 - \kappa_1 w) - m_1 m_2^{-1} (1 - \kappa_2 w) a_{21}}, w \in [0, w_{\max}] \right\}, \quad y = 0.$$

Второй вариант — случай наличия ограничений из (2) на управления u и w : управление u рассматривается в классе дифференцируемых функций $u(x, y)$, а управление w постоянно. В этом случае управление u , приводящее систему (1) в указанную целевую точку, имеет аналитический вид, зависящий от параметров используемого метода. Определение параметров для заданных начальных условий (x_0, y_0) предлагается находить посредством решения некоторой вспомогательной экстремальной задачи. Для этих двух вариантов постановок задач приводятся результаты соответствующих численных расчетов, выполненных в среде MAPLE. При конструировании позиционного управления $u(x, y)$ используются подходы к решению нелинейных управляемых процессов из [2–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клименкова А.Д., Коробейников А., Хайлов Е.Н.* Оптимальные стратегии подавления клеточного деления в антираковой терапии // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы Междунар. конф., посв. 110-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 12–14 декабря 2018) М.: Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН; МАКС Пресс, 2018. С. 134–137.
2. *Колесников А.А.* Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем. М. Энергоатомиздат, 1987. 160 с.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М. Наука, 1974. 456 с.
4. *Осипов Ю.С.* Пакеты программ: подходы к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН. 2006. Т. 61, № 4. С. 25–76.

Program and Positional Control Strategies for the Lotka—Volterra Competition Model

Nikolay L. Grigorenko¹, Anna D. Klimenkova²,
Andrei Korobeinikov³, Evgenii N. Khailov⁴

¹ MSU, Moscow, Russia, grigor@cs.msu.ru

² MSU, Moscow, Russia, klimenkovaad@mail.ru

³ CRM, Barcelona, Spain, akorobeinikov@crm.cat

⁴ MSU, Moscow, Russia, khailov@cs.msu.ru

Abstract: In this report, the controlled Lotka—Volterra competition model is used to describe the interaction between concentrations of healthy and cancer cells. For this controlled model, the minimization problem of the terminal functional is considered, which is a weighted difference of the concentrations of cancerous and healthy cells at the final moment of the treatment period. Three types of treatment are considered. Using the Pontryagin maximum principle, for each type of treatment, the properties of the optimal controls are established, which are confirmed by the corresponding numerical calculations. Also, for the given controlled model the report presents the results of the analytical and numerical studies of the terminal control problem for two variants of the control constraints.

Об асимптотике множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями на малых промежутках времени

М.И. Гусев

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, gmi@imm.uran.ru

Аннотация: В докладе исследуется задача приближенного описания множеств достижимости для аффинных по управлению систем с интегральными квадратичными ограничениями на управление на интервале времени малой длины. При определенных условиях, накладываемых на асимптотику грамиана управляемости линеаризованной системы, показано, что множество достижимости оказывается выпуклым при достаточно малом значении длины интервала и близким по форме к эллипсоиду в пространстве состояний. В частности, данное асимптотическое представление имеет место для достаточно широкого класса нелинейных управляемых систем второго порядка с интегральными ограничениями.

Ключевые слова: управляемая система множество достижимости, интегральные ограничения, выпуклость, малый параметр.

Введение

Геометрическая структура множеств достижимости на малых временных промежутках при геометрических ограничениях на управляющие параметры была предметом исследования в ряде работ по теории управления (см. [4]). Асимптотика множеств достижимости линейных систем с интегральными ограничениями изучена в [5]. В данной работе исследуется следующая задача. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1)$$

где $t_0 \leq t \leq \bar{t}_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, функции $f_1 : [t_0, \bar{t}_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : [t_0, \bar{t}_1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x . Обозначим через $\mathbb{L}_2$ гильбертово пространство интегрируемых с квадратом на $[t_0, \bar{t}_1]$ вектор-функций $u(t)$. Ограничения на $u(\cdot)$ заданы в виде шара $B(0, \mu) = \{u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : (u(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu^2\}$ радиуса $\mu > 0$.

Будем предполагать, что для любого $u(\cdot) \in B(0, \mu)$ существует и единственно решение $x(t)$ системы (1), это решение определено на промежутке $[t_0, \bar{t}_1]$ и все траектории системы (1), отвечающие управлениям из $B(0, \mu)$, принадлежат компакту $D \subset \mathbb{R}^n$. Также считаем, что производные функций $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$ и по x удовлетворяют условию Липшица на $[t_0, \bar{t}_1] \times D$. Для $t_1 \in [t_0, \bar{t}_1]$ обозначим $G(t_1, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : (u(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu^2, x = x(t_1, u(\cdot))\}$ — множество достижимости системы (1) в заданный момент t_1 . Далее поведение множеств достижимости $G(t_1, \mu)$ при фиксированном μ исследуется в предположении, что интервал $[t_0, t_1]$ является малым. Используя замену времени, мы сводим задачу описания множества достижимости на малом интервале к аналогичной задаче на фиксированном интервале для системы, уравнения и интегральные ограничения на управление которой зависят от малого параметра.

1. Основной результат

Обозначим $t_1 - t_0 = \varepsilon$. Представив t в виде $t = \varepsilon\tau + t_0$, положим $y(\tau) = x(\varepsilon\tau + t_0)$, $v(\tau) = \varepsilon u(\varepsilon\tau + t_0)$, тогда

$$\dot{y}(\tau) = \tilde{f}_1(\tau, y(\tau)) + \tilde{f}_2(\tau, y)v(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad y(0) = x^0, \quad (2)$$

где $\tilde{f}_1(\tau, y) = \varepsilon f_1(\varepsilon\tau + t_0, y)$, $\tilde{f}_2(\tau, y) = f_2(\varepsilon\tau + t_0, y)$, при ограничении на новое управление $v(\cdot)$

$$\int_0^1 v^\top(t)v(t)dt \leq (\mu\sqrt{\varepsilon})^2. \quad (3)$$

Траектории системы (2), (3) принадлежат компакту D при $\varepsilon \leq \bar{t}_1 - t_0$. Определим семейство отображений $F_\varepsilon : \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством $F_\varepsilon(v(\cdot)) = y_\varepsilon(1, v(\cdot))$, где $y_\varepsilon(t, v(\cdot))$ — соответствующее управлению $v(\cdot)$ решение системы (2). В силу того, что $y(1, v(\cdot)) = x(t_1, u(\cdot))$, имеем равенство $\tilde{G}(1, \mu(\varepsilon)) = G(t_1, \mu) = \{F_\varepsilon(x) : x \in B(0, \mu(\varepsilon))\}$. Здесь $\tilde{G}(1, \mu(\varepsilon))$ — множество достижимости системы (2) при ограничении (3), $\mu(\varepsilon) = \mu\sqrt{\varepsilon}$, $B(0, \mu(\varepsilon))$ — шар радиуса $\mu(\varepsilon)$ в пространстве $\mathbb{L}_2[0, 1]$ с центром в нуле. Производная отображения $F_\varepsilon(v(\cdot))$ определяется следующим образом: $F'_\varepsilon(v(\cdot))\Delta v(\cdot) = \Delta y(1)$, где $\Delta y(t)$ решение линеаризованной вдоль пары $(y(t, v(\cdot)), v(\cdot))$ системы (2)

$$\dot{\Delta y}(t) = \varepsilon A_\varepsilon(t)\Delta y(t) + B_\varepsilon(t)\Delta v(t), \quad t \in [0, 1], \quad \Delta y(0) = 0. \quad (4)$$

Отображение $F'_\varepsilon(v(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L(\varepsilon) = L_0 + L_1\varepsilon$ ($L_0, L_1 \geq 0$). Если коэффициенты матрицы f_2 в уравнении системы не зависят от состояния ($f_2(t, x) = f_2(t)$), то $L_0 = 0$.

Пусть $W_\varepsilon(t)$ — грамиан управляемости системы (4) с матрицами $A'_\varepsilon(t), B'_\varepsilon(t)$, отвечающими линеаризации вдоль траектории $y(t, 0)$, где 0 означает нулевое управление:

$$W_\varepsilon(t) = \int_0^t X_\varepsilon(t, \tau) B'_\varepsilon(\tau) B'^\top_\varepsilon(\tau) X'^\top_\varepsilon(\tau, \tau) d\tau.$$

Здесь $X_\varepsilon(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы ($\dot{X}_\varepsilon(t, \tau) = A'_\varepsilon(t) X_\varepsilon(t, \tau)$, $X(\tau, \tau) = I$). В случае невырожденности грамиана, которая эквивалентна полной управляемости линеаризованной системы на отрезке $[0, 1]$, имеет место равенство (см. [1]) $F'_\varepsilon(0) B_{\mathbb{L}_2}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top W_\varepsilon^{-1}(1) x \leq 1\}$. Здесь $F'_\varepsilon(0) B_{\mathbb{L}_2}(0, 1)$ — множество достижимости в момент $t = 1$ линеаризованной системы, с ограничениями на управление в виде единичного шара в $\mathbb{L}_2$. Это множество является эллипсоидом в $\mathbb{R}^n$, который можно представить в виде $F'_\varepsilon(0) B_{\mathbb{L}_2}(0, 1) = W_\varepsilon^{1/2}(1) B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$. Пусть $\gamma^2(\varepsilon), \eta^2(\varepsilon)$ — минимальное и максимальное собственные числа $W_\varepsilon(1)$.

Теорема 1. Пусть $W_\varepsilon(1)$ невырожден при $\varepsilon > 0$ и имеет место соотношение $\sqrt{\varepsilon} L(\varepsilon) / \eta(\varepsilon) = o(\gamma(\varepsilon))$, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда множество достижимости $G(t_1, \mu)$ выпукло при достаточно малых t_1 и

$$h(s(\varepsilon)(G(t_1, \mu) - x(t_1, 0)), \mu(\varepsilon)s(\varepsilon)W_\varepsilon^{1/2}B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)) = o(\gamma(\varepsilon)). \quad (5)$$

Здесь $t_1 = t_0 + \varepsilon$, $x(t, 0)$ — решение системы, отвечающее нулевому управлению, $s(\varepsilon) = 1/(\mu \eta(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon})$ — масштабирующий множитель, h — хаусдорфово расстояние между множествами.

Доказательство опирается на теорему о выпуклости нелинейного образа шара малого радиуса в гильбертовом пространстве [2]. Масштабирующий множитель $s(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, он играет роль коэффициента увеличения (см. [5]) и обеспечивает, что множества, фигурирующие в равенстве (5), не стягиваются к нулю.

Пусть исходная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + Bu(t), \quad x(0) = x^0, \quad 0 \leq t \leq t_1,$$

$0 \leq t \leq t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, B — матрица размеров $n \times 1$, с интегральными квадратичными ограничениями на

управление $u(\cdot) \in B(0, \mu)$. Пусть $A(t) = \partial f / \partial x(x(t, 0))$ матрица линеаризации системы вдоль траектории $x(t, 0)$, порожденной нулевым управлением. Предположим, что $f(x^0) = 0$, тогда $x(t, 0) \equiv 0$, следовательно, $A(t) \partial f / \partial x(x^0) = A$ — постоянная матрица. Линеаризованная система в этом случае имеет вид $\dot{y}(t) = \varepsilon Ay(t) + Bu(t)$, $t \in [0, 1]$. Из оценок минимального собственного числа грамиана управляемости [3] и теоремы 1 получаем

Следствие 1. Пусть $n = 2$ и пара A, B вполне управляема. Тогда множество достижимости $G(t_1, \mu)$ выпукло при достаточно малых t_1 и выполняется соотношение (5), где $o(\gamma(\varepsilon)) = o(\varepsilon)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Поляк Б.Т. Локальное программирование // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41, № 9. С. 1324—1331.
3. Gusev M. I. Estimates of the minimal eigenvalue of the controllability Gramian for a system containing a small parameter // Lecture Notes in Comput. Sci. 2019. Vol. 11548, P. 461—473.
4. Krener, A., Schättler, H.: The structure of small-time reachable sets in low dimensions // SIAM J. Control Optim. 1989. Vol. 27, no. 1. P. 120—147.
5. Goncharova E., Ovseevich A. Small-time reachable sets of linear systems with integral control constraints: birth of the shape of a reachable set // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 168, no. 2. P. 615—624.

On the Asymptotics of Reachable Sets of Nonlinear Systems with Integral Constraints on Small Time Intervals

Mikhail I. Gusev

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, gmi@imm.uran.ru

Abstract: The report explores the problem of approximate description reachable sets for affine control systems with integral quadratic control constraints on the time interval of small length. Under certain conditions imposed on the asymptotic behavior of the controllability Gramian of a linearized system, it is proved that the reachable set is convex for sufficiently small time intervals and close in shape to the ellipsoid in state space. In particular, this asymptotic representation is the case for a fairly wide class of second-order nonlinear control systems with integral constraints.

О задачах быстродействия для линейных управляемых систем с быстрыми и медленными переменными и гладкими ограничениями на управление

А.Р. Данилин¹, О.О. Коврижных²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, dar@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, koo@imm.uran.ru

Аннотация: Рассмотрены задачи оптимального быстродействия для линейных автономных систем с быстрыми и медленными переменными, непрямым управлением и гладкими геометрическими ограничениями на управление в виде шара. Особенность постановок задач заключается в том, что во всех рассматриваемых случаях собственные значения матрицы при быстрых переменных не удовлетворяют стандартному требованию отрицательности вещественной части. А именно, рассмотрены следующие случаи: указанная матрица нулевая, за исключением одного диагонального блока, спектр которого удовлетворяет условию асимптотической устойчивости; матрица второго порядка с чисто мнимым спектром; матрица представляет собой многомерный аналог жордановой клетки второго порядка с нулевым собственным числом. В каждой исследуемой задаче доказана разрешимость исходной и предельной задач, получены и обоснованы полные асимптотические разложения времени быстродействия и вектора, порождающего оптимальное управление, относительно малого параметра при производных в уравнениях системы. Показано, что структура асимптотики различная в зависимости от вида матрицы при быстрых переменных.

Ключевые слова: задача оптимального быстродействия, быстрые и медленные переменные, асимптотическое разложение, малый параметр.

Введение

В настоящей работе рассматриваются задачи оптимального управления для линейных автономных систем (см. [5, 6]), используются подходы из [2, 3] и общие соотношения, полученные в [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-

непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{12}y, & x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \\ \varepsilon \dot{y} = Jy + Bu, & u \in \mathbb{R}^r, \quad \|u\| \leq 1, \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min, \end{cases} \quad (1)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Предполагается, что матрица J при быстрых переменных имеет собственные значения с нулевой вещественной частью, тем самым нарушено стандартное условие (см., например, [1, Гл. 3, п. 3.2, предположение A1]) асимптотической устойчивости. Рассмотрены некоторые матрицы из такого класса:

$$n = r, \quad m = 2n, \quad J = \begin{pmatrix} -\alpha I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad (2)$$

$$A_{12} = (0, I_n), \quad B = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix},$$

$$n = m = r = 2, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta > 0, \quad A_{12} = I_2, \quad B = -J, \quad (3)$$

$$n = m = r = 2k, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = B = I_{2k}, \quad (4)$$

I_k — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$.

2. Основной результат

В каждом из исследованных случаев найдена предельная задача и установлена ее разрешимость, доказана разрешимость исходной задачи при достаточно малых ε . При выполнении некоторых дополнительных естественных условий общего положения относительно матриц системы и начальных данных в (1) справедливы следующие утверждения.

В задаче (1), (2) время быстрогодействия T_ε и компоненты вектора, порождающего оптимальное управление, раскладываются в

асимптотические ряды вида $\sum_{j=0}^{\infty} R_j(\sqrt{\varepsilon}, W(\varepsilon))$, где R_j — рациональные функции своих аргументов и $R_j(\sqrt{\varepsilon}, W(\varepsilon)) = O(\varepsilon^{j/2})$, $W(\varepsilon) := KW_0(\varepsilon g) = o(\sqrt{\varepsilon})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, $W_0(\varepsilon)$ — решение уравнения

$$W_0(\varepsilon) \ln(1/W_0(\varepsilon)) = \sqrt{\varepsilon} h$$

при малых ε , а K, g, h — некоторые известные постоянные.

В задаче (1), (3) время быстрогодействия T_ε и компоненты вектора, порождающего оптимальное управление, раскладываются в асимптотические в смысле Эрдеи ряды относительно последовательности $\{\varepsilon^j\}$. Слагаемые этих рядов однозначно находятся из систем линейных алгебраических уравнений, в правых частях которых присутствуют равномерно ограниченные по ε операторы, а коэффициенты определяются матрицами J и B .

В задаче (1), (4) при условии $x_{0,2} \neq 0$, где $x_{0,2} \in \mathbb{R}^k$ — вторая компонента начального вектора $x_0 \in \mathbb{R}^{2k}$, время быстрогодействия T_ε и вектор, порождающий оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды в смысле Пуанкаре по степеням $\{\varepsilon^j\}$. В случае $x_{0,2} = 0$, аналогично задаче (1), (2), асимптотика решения имеет сложный характер.

В задаче (1), (4) при выполнении предположений

$$x, y, u \in \mathbb{R}^2, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{0,2} = x_{0,2}(\varepsilon, \mu) = \varepsilon \mu \xi,$$

где μ — второй независимый малый параметр, $\xi \in \mathbb{R}$ — известная константа, $\xi \neq 0$, время быстрогодействия $T_{\varepsilon, \mu}$ и компоненты вектора, порождающего оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды в смысле Эрдеи относительно асимптотической последовательности $\varepsilon^{\gamma/3}(\varepsilon^{j/3} + \mu^j)$, $0 < \gamma < 1$. Слагаемые этих рядов не являются рациональными функциями $\varepsilon^{1/3}$ и $\ln \varepsilon$.

Заключение

Приведенные примеры показывают, что характер асимптотик времени быстрогодействия и компонент вектора, порождающего оптимальное управление, существенно зависит от типов вырождения матрицы J . При этом, как правило, эти разложения по существу являются асимптотическими в смысле Эрдеи, не сводятся к традиционно

рассматриваемым асимптотическим рядом, связанным с малым параметром, и отличаются друг от друга основным масштабом малого параметра ($\sqrt{\varepsilon}$, ε и $\varepsilon^{1/3}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гичев Т.Р., Дончев А.Л. Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстрогодействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
2. Данилин А.Р., Ильин А.М. О структуре решения одной возмущенной задачи быстрогодействия // Фундам. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
3. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
4. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О зависимости задачи быстрогодействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып 14.)
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
7. Erdelyi A., Wyman M. The asymptotic evaluation of certain integrals // Arch. Ration. Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.

On the Time-Optimal Control Problems for Linear Systems with Fast and Slow Variables and Smooth Constraints on the Control

A.R. Danilin¹, O.O. Kovrizhnykh²

¹ IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, dar@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, koo@imm.uran.ru

Abstract: We consider the time-optimal control problems for linear autonomous systems with fast and slow variables, indirect control and smooth geometric constraints on the control in the form of a ball. A feature of the problem statements is that in all considered cases the eigenvalues of the matrix at the fast variables do not satisfy the standard requirement of negativity of the real part. Namely, the following cases are considered: the specified matrix is zero, excepting one diagonal block whose spectrum satisfies the condition of asymptotic stability, or the second order matrix with imaginary eigenvalues, or the multidimensional analog of the second-order Jordan cell with zero eigenvalue. For each investigated problem, the solvability of the original and limit problems is proved, complete asymptotic expansions of the optimal time and the vector generating the optimal control in a small parameter at the derivatives in the equations of the system are obtained and justified. It is shown that the structure of the asymptotics is different depending on the type of matrix at the fast variables.

Оптимальная импульсная стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием

Ю.Ф. Долгий

УрФУ, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, yurii.dolgii@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается задача оптимальной стабилизации для линейной автономной системы с запаздыванием и вырожденным показателем качества переходных процессов. В работах А.Н. Сесекина используется преобразование ее к невырожденной задаче оптимальной стабилизации с запаздыванием в управлении. Для невырожденной задачи найдена система определяющих уравнений принципа динамического программирования Беллмана. Она содержит матричное уравнение в частных производных, что осложняет процедуру нахождения решения системы определяющих уравнений. В настоящей статье для вырожденной задачи оптимальной стабилизации предлагается формализация в функциональном пространстве состояний. Излагается метод позволяющий, при решении системы определяющих уравнений принципа динамического программирования Беллмана, сложную краевую задачу для матричного уравнения в частных производных заменить на краевую задачу для функционально-дифференциальных уравнений. Решение последней краевой задачи определяет импульсное оптимальное управление. Исследуются вопросы разрешимости краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений. Предлагается метод понижения ее размерности.

Ключевые слова: линейная автономная система, запаздывание, оптимальная стабилизация, импульсное управление.

1. Постановка задачи

Объект управления описывается автономной линейной системой с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + B \frac{dv(t)}{dt}, \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание, A_0, A_1, B — постоянные матрицы, $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^r$ имеет ограниченную вариацию на любом конечном отрезке. Для любой начальной функции $\varphi \in \mathbb{H}$ существует единственное решение $x(t, \varphi, v)$, $t > 0$,

системы (1) определяемое интегральным уравнением

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t (A_0 x(s) + A_1 x(s - \tau)) ds + B(v(t) - v(+0)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Здесь $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство функций со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle_H = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta$. Решения интегрального уравнения (2) являются функциями с ограниченными вариациями на любом конечном отрезке положительной полуоси $\mathbb{R}^+$.

Рассматривается задача оптимальной стабилизации с вырожденным критерием качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} x^\top[t] C_x x[t] dt, \quad (3)$$

где C_x — положительно определенная матрица. Используется описание постановки задачи оптимальной стабилизации (1), (3) в функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ [1].

Допустимые управления, формируемые по принципу неявной обратной связи, определяются решениями линейного операторного уравнения

$$v(t) = \mathbf{V}(v(t + \cdot), \mathbf{x}_t), \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_t \in \mathbb{H}, \quad \mathbf{x}_t(\vartheta) = x(t + \vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

в пространстве функций с локально ограниченными вариациями. Функция $x[t]$, $v[t]$, $t \in \mathbb{R}^+$, с локально ограниченными вариациями являются решениями системы уравнений (2), (4).

2. Нахождение оптимального стабилизирующего управления

Используется принцип динамического программирования Белмана [2]. Определяющая система уравнений оптимальной стабилизации, для поставленной выше задачи, построена в [3]. В настоящей работе предлагается метод ее решения. Рассматривается краевая задача для системы матричных функционально-дифференциальных

уравнений

$$\begin{aligned} X_1'(\vartheta) &= A_0^\top X_1(\vartheta) + X_2^\top(-\vartheta - \tau)A_1B \\ &- DW^{-1}X_3^\top(\vartheta) - \int_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s - \vartheta)W^{-1}X_3^\top(s)ds, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} X_2'(\vartheta) &= A_0^\top X_2(\vartheta) + X_2^\top(-\vartheta - \tau)A_1 \\ &- DW^{-1}X_4^\top(\vartheta) - \int_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s - \vartheta)W^{-1}X_4^\top(s)ds, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} X_3(\vartheta) &= X_1^\top(\vartheta)A_0B + B^\top A_1^\top X_1(-\vartheta - \tau) \\ &- \int_{-\tau}^{\vartheta} X_3(s)W^{-1}X_3^\top(s - \vartheta)ds, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} X_4(\vartheta) &= X_2^\top(\vartheta)A_0B + A_1^\top X_1(-\vartheta - \tau) \\ &- \int_{-\tau}^{\vartheta} X_4(s)W^{-1}X_3^\top(s - \vartheta)ds, \end{aligned} \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$X_1(-\tau) = KA_1B, \quad X_2(-\tau) = KA_1. \quad (9)$$

Здесь K удовлетворяет матричному уравнению

$$A_0^\top K + KA_0 - DW^{-1}D^\top + X_2^\top(-0) + X_2^\top(-0) + C_x = 0, \quad (10)$$

где $D = X_1(-0) + (C_x + KA_0)B$, $W = B^\top C_x B$.

Теорема 1. Пусть $\det W \neq 0$ и краевая задача (5)–(10) имеет единственное решение. Тогда оптимальное стабилизирующее управление задачи (1), (3) является решением функционально-разностного уравнения

$$Wv(t) + \int_{-\tau}^0 X_3^\top(s)v(t+s)ds + D^\top y(t) + \int_{-\tau}^0 X_4^\top(s)y(t+s)ds = 0, \quad (11)$$

где $y(t) = x(t) - Bv(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $X_3(\cdot)$, $X_4(\cdot)$ — компоненты решения краевой задачи (5)–(10).

Для функционально-разностного уравнения (11) выполнены условия существования решения задачи Коши [4]. Исследуются вопросы разрешимости краевой задачи (5–10). Предлагается метод понижения ее размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 336 с.
3. Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Импульсная линейно-квадратичная задача оптимизации в системах с последействием // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. С. 10–14.
4. Долгий Ю.Ф., Кукушкина Е.В. Общий вид решения нестационарной системы функционально-разностных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2003. № 9. С. 27–34.

Optimal Pulse Stabilization of Linear Autonomous Systems with Delay

Yu.F. Dolgii

UrFU, IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, yurii.dolgii@imm.uran.ru

Abstract: The problem of optimal stabilization for a linear autonomous system with delay and a degenerate transient quality indicator is considered. In the works of A.N. Sesekin's transformation to a nondegenerate problem of optimal stabilization with delay in control is used. For a non-degenerate problem, a system of governing equations of the Bellman dynamic programming principle was found. It contains the matrix equation in partial derivatives, which complicates the procedure for finding a solution to the system of governing equations. In the present article, a formalization in the functional space of states is proposed for the degenerate optimal stabilization problem. A method is proposed that, when solving a system of governing equations of the Bellman dynamic programming principle, a complex boundary value problem for a matrix partial differential equation is replaced by a boundary value problem for functional differential equations. The solution of the last boundary value problem determines the pulse optimal control. The problems of solvability of the boundary value problem for functional differential equations are investigated. A method for reducing its dimension is proposed.

Новый метод оценки ошибок коррекции координат по полю микрорельефа

К.В. Дунаевская¹, В.Б. Костоусов²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, k.dunaevskaya@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, vkost@imm.uran.ru

Аннотация: В работе исследуется новый метод статистического оценивания ошибки коррекции при решении задачи навигации по полю микрорельефа, примером которого является поле высот объектов местности. Задача рассматривается в вероятностной постановке. На основе этого метода строится критерий срыва коррекции в алгоритме коррекции ошибок определения координат движущегося объекта. Проведено статистическое исследование точности оценивания и качества предложенного критерия.

Ключевые слова: навигация по карте геофизического поля, функционал сопоставления, критерий срыва коррекции.

Введение

Рассмотрим задачу навигации по геофизическому полю [1–4], в которой в качестве поля выступает поле микрорельефа [5], измеряемое многолучевым дальномерным датчиком. В задаче рассматривается следующий набор исходных данных:

- эталонная карта поля высот микрорельефа:

$$h(x) : \Omega \rightarrow R, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

- результаты замеров поля, полученные с помощью многолучевого измерителя (фрагмент):

$$\varphi(t) = \varphi_{x^*}(t) = h(x^* + t) + \xi(t), \quad x^* \in Q, \quad t \in \Delta.$$

В формуле для $\varphi(t)$ приняты следующие обозначения:

$Q \subset \Omega$ — область априорного положения начальной точки $x^* \in Q$ фрагмента φ на эталоне h ;

x^* — истинное положение фрагмента;

$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — носитель функции φ ;

$\xi(t)$ — функция искажения фрагмента.

В простейшем, рассматриваемом здесь случае шум $\xi(t)$ представляет собой случайный нормальный белый шум с нулевым средним и заданной дисперсией σ^2 .

В задаче коррекции требуется по указанным исходным данным получить в некотором смысле «хорошую» оценку $\hat{x}$ неизвестного вектора x^* и оценить точность этой оценки. При задании вероятностных характеристик исходных данных (таких, как априорная и апостериорная плотности распределения вероятностей) эта задача исследуется в рамках байесовской теории нелинейной фильтрации [3].

В данной работе классический корреляционно-экстремальный метод навигации [1] дополняется новым способом оценки ошибки коррекции.

В качестве примера алгоритма коррекции рассматривается следующий функционал сопоставления замеров и карты поля:

$$\Phi(x) = \sum_{x'} \left(\left(h(x + x') - \frac{1}{k \cdot m} \bar{h}(x) \right) - \left(\varphi(x') - \frac{1}{k \cdot m} \bar{\varphi} \right) \right)^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

Символы $\bar{h}$ и $\bar{\varphi}$ означают сумму значений по множеству Δ :

$$\begin{aligned} \bar{h}(x) &= \sum_{x'' \in \Delta} h(x + x''), \\ \bar{\varphi} &= \sum_{x'' \in \Delta} \varphi(x''). \end{aligned}$$

Предлагаемый ниже метод оценки ошибки коррекции применим и для любого другого функционала сопоставления.

1. Способ оценивания ошибки коррекции и показатель срыва

Вычисление оценки ошибки коррекции опирается на следующее неравенство:

$$p_f^{\min}(x) = \frac{\Phi(x_{\min_1})}{\Phi(x_{\min_2})} < P_{\text{tr}}.$$

Здесь $x_{\min_1}$ — точка глобального минимума, $x_{\min_2}$ — точка второго по величине локального минимума, P_{tr} — пороговое значение, которое определяется из статистического эксперимента с помощью

критерия Неймана — Пирсона и соответствует минимальному уровню ошибок II-го рода при фиксированном уровне ошибок I-го рода.

Здесь под ошибкой I-го рода понимается принятие ошибочного результата алгоритма за правильную коррекцию, а под ошибкой II-го рода понимается ошибочный отказ от коррекции при правильном результате работы алгоритма. В статистическом эксперименте ошибочность результата работы определялась по превышению заданного порога расстояния между истинным положением фрагмента и решением задачи (1).

При полученном P_{tr} можно вычислить порог $\Phi_{tr} = \Phi(x_{min1})/P_{tr}$ и затем определить диаметр следующего множества:

$$D_{max} = \text{diam}\{x : \Phi(x) \leq \Phi_{tr}\}. \quad (2)$$

С помощью такого показателя решающее правило коррекции выглядит следующим образом: если диаметр (2) не превышает значение допустимой радиальной ошибки R_{max} , то принимается гипотеза о правильной коррекции.

Статистический анализ оценки D_{max} (2) был произведен для алгоритма (1) с решающим правилом $p_f^{min} < P_{tr}$, где $P_{tr} = 0.9213$.

На рисунке 1 приведена гистограмма ошибки оценивания $\Delta = D_{max} - \varepsilon$, где ε — истинная ошибка коррекции, не превышающая 30 м. При этом среднее $\bar{\Delta}$ и среднеквадратическое значение σ_{Δ} ошибки получились равными: $\bar{\Delta} = 0$ м, $\sigma_{\Delta} = 2$ м.

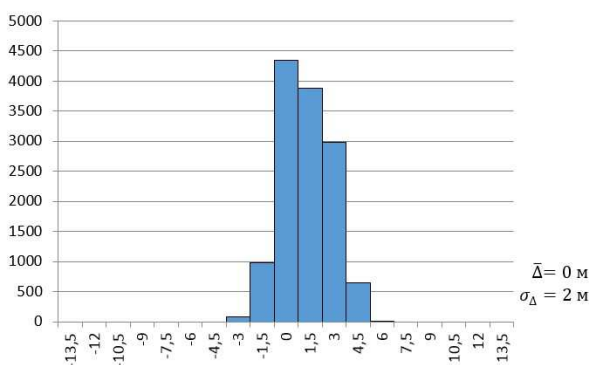


Рис. 1. Гистограмма величины Δ при условии $\varepsilon \leq 30$ м для выборки объемом $n = 12951$.

Полученные результаты показывают, что $D_{\max}$ хорошо аппроксимирует значение истинной ошибки коррекции.

В дальнейшем планируется более глубоко изучить вероятностные свойства предложенной оценки и в определённых условиях оценить её сходимость по вероятности к оптимальной байесовской оценке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы ФНИ УрО РАН «Классические и современные методы теории аппроксимации и приложения» № 18-1-1-14.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоглазов И.Н., Джанджсгава Г.И., Чигин Г.П. Основы навигации по геофизическим полям. М.: Наука, 1985. 328 с.
2. Бердышев В.И., Костоусов В.Б. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 270 с.
3. Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Часть 1. Обзор алгоритмов // Гироскопия и навигация. 2015. № 3(90). С. 102–125.
4. Степанов О.А., Торопов А.Б. Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Часть 2. Современные тенденции развития // Гироскопия и навигация. 2015. № 4(91). С. 147–159.
5. Костоусов В.Б., Дунаевская К.В., Метод коррекции навигационных ошибок по полю высот объектов местности // Материалы XXXI конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2018. С. 218–227.

A New Method for Estimating Coordinate Correction Errors Using a Microrelief Field

K.V. Dunaevskaya¹, V.B. Kostousov²

¹ IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, k.dunaevskaya@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, vkost@imm.uran.ru

Abstract: In this paper a new statistical estimation method of correction errors when solving the navigation problem for the microrelief field is researched. An example of microrelief is the heights field of terrain objects. This task is considered in the probabilistic formulation. The failure criterion in errors correction algorithm for coordinates determining of moving object is constructed. A statistical analysis of the estimation accuracy and quality for the proposed criterion is conducted.

Приближенный позиционный принцип минимума для субоптимальных процессов в негладких задачах оптимального управления

В.А. Дыхта

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН,
Иркутск, Россия, dykhta@gmail.com

Аннотация: Рассматривается негладкая задача оптимального управления с липшицевой динамикой по фазовым переменным и терминальным функционалом, который задан полувогнутой функцией (разность гладкой и непрерывной выпуклой функций). Для субоптимальных процессов этой задачи получено необходимое условие оптимальности вариационного типа. Это условие, с одной стороны, является обобщением так называемого позиционного принципа минимума, полученного автором в предыдущих публикациях, а с другой — существенно усиливает возмущенный принцип Экланда для субоптимальных процессов. Характерно, что полученное условие субоптимальности формулируется с использованием семейства вспомогательных задач динамической оптимизации, обусловленного множественностью решений сопряженного включения и субградиентов терминальной функции.

Ключевые слова: субоптимальный процесс, позиционное управление, экстремаль Кларка.

Введение

Рассматривается следующая задача оптимального управления (задача (P)):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \\ u(t) &\in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ J(\sigma) &= l(x(t_1)) \rightarrow \inf.\end{aligned}$$

Здесь через σ обозначаются пары функций $(x, u) \in AC(T, R^n) \times L_\infty(T, U)$, U — компактное множество в R^m , вектор-функция $f(t, x, u)$ непрерывна по совокупности аргументов и липшицева по x . Кроме того предполагается, что она удовлетворяет условию сублинейного роста (так что множество траекторий задачи предкомпактно в пространстве C), а терминальная функция l представима в виде

$$l(x) = l_1(x) - l_2(x),$$

где функция l_1 гладкая, а l_2 — выпукла и непрерывна на R^n (тогда l полувогнута).

В работах [1, 2] получены необходимые условия оптимальности допустимой пары функций $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$, использующие позиционные управления спуска по функционалу. Эти условия, названные позиционным принципом минимума, идейно связаны с важнейшими концепциями уральской школы теории управления Н.Н. Красовского (в частности, с понятием u -стабильных функций). Примечательно, что позиционный принцип минимума оказался достаточно конструктивным и эффективным методом решения конкретных задач.

Однако сфера применимости этого результата недостаточно широка; именно поэтому мы обращаемся к его распространению на субоптимальные процессы. Тем самым охватываются задачи, в которых оптимального управления в классе $\mathcal{U} = L_\infty(T, U)$ не существует, и делается шаг к обобщению позиционного принципа на задачи с терминальными ограничениями (если такие ограничения «снимаются» методом штрафов, то в аппроксимирующих задачах требуются именно условия субоптимальности).

1. ε -позиционный принцип минимума

Пусть Σ — множество допустимых процессов задачи (P) . Процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ называют ε -оптимальным, если

$$J(\bar{\sigma}) \leq \inf J(\Sigma) + \varepsilon$$

(здесь $\varepsilon > 0$).

Из полувогнутости функции $l(x)$ вытекает, что при любом субградиенте $s \in \partial l_2(\bar{x}(t_1))$ гладкая функция

$$\mathcal{L}^s(x) = l_1(x) - \langle s, x \rangle$$

является опорной сверху к функции l в точке $\bar{x}(t_1)$. Поэтому из ε -оптимальности процесса $\bar{\sigma}$ в задаче (P) вытекает его ε -оптимальность в каждой из задач семейства $\{CP^s\}$, $s \in \partial l_2(\bar{x}(t_1))$ вида

$$I^s(\sigma) := \mathcal{L}^s(x(t_1)) \rightarrow \inf, \quad \sigma \in \Sigma.$$

Введем функцию $H(t, x, \psi, u) = \psi \cdot f(t, x, u)$, сопряженное вклю-

чение Кларка

$$\begin{aligned} -\dot{\psi}(t) &\in \partial_x H(t, \bar{x}(t), \psi(t), \bar{u}(t)), \\ \psi(t_1) &\in l_{1x}(\bar{x}(t_1)) - \partial l_2(\bar{x}(t_1)), \end{aligned}$$

и множество его решений Ψ .

Для любой $\psi \in \Psi$ положим

$$\begin{aligned} p^\psi(t, x) &= \psi(t) + l_{1x}(x) - l_1(\bar{x}(t)), \\ U_{\psi, \varepsilon}(t, x) &= \{u \in U \mid H(t, x, p^\psi(t, x), u) \leq h(t, x, p^\psi(t, x)) + \varepsilon\}, \quad (1) \end{aligned}$$

где $h(t, x, \psi) = \min\{H(t, x, \psi, u) \mid u \in U\}$.

При любой $\psi \in \Psi$ обозначим через $\mathcal{V}_{\psi, \varepsilon}$ множество селекторов многозначного отображения (1) (позиционных управлений), а через $\mathcal{X}_{\psi, \varepsilon}$ — множество решений исходной динамической системы с управлениями $v(t, x)$ из $\mathcal{V}_{\psi, \varepsilon}$ (конструктивных движений и решений Каратеодори). Все множества, соответствующие $s \in \partial l_2(\bar{x}(t_1))$, будем отмечать верхним индексом s .

Первое утверждение приближенного позиционного принципа дает

Условие А. Если процесс $\bar{\sigma} = (\bar{x}, \bar{u})$ ε -оптимален в задаче (P), то $\forall s \in \partial l_2(\bar{x}(t_1))$

$$\mathcal{L}^s(\bar{x}(t_1)) \leq \mathcal{L}^s(x(t_1)) + \varepsilon \quad \forall x \in \bigcup \{\mathcal{X}_{\psi, \varepsilon} \mid \psi \in \Psi^s\}.$$

Далее, назовем $\bar{\sigma}$ ε -экстремалью задачи (P), если $\exists \psi \in \Psi : \bar{u}(t) \in U_{\psi, \varepsilon}(t, \bar{x}(t))$ на T . (Случай $\varepsilon = 0$ соответствует экстремали Кларка.) Через Ψ_ε^s обозначим множество котраекторий из Ψ^s , обеспечивающих ε -экстремальность $\bar{\sigma}$.

Заключительное утверждение таково:

Условие Б. Если $\bar{\sigma}$ — ε -экстремаль задачи (P), то $\forall s \in \partial l_2(\bar{x}(t_1)) : \Psi_\varepsilon^s \neq \emptyset$ траектория $\bar{x}$ ε -оптимальна в следующей задаче:

$$\mathcal{L}^s(x(t_1)) \rightarrow \inf, \quad x \in \bigcup \{\mathcal{X}_{\psi, \varepsilon} \mid \psi \in \Psi_\varepsilon^s\}.$$

Как следует из формулировок, ε -позиционный принцип в негладких задачах существенно использует множественность котраекторий и генерируемые ими множества позиционных управлений сравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00733).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дыхта В.А. Вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // Докл. Акад. наук. 2015. Т. 462, № 6. С. 653–656.
2. Dykhta V.A. Positional strengthenings of the Maximum Principle and sufficient optimality conditions // Proc. Steklov Inst. of Math. 2016. Vol. 293, supp. 1. Pp. S43–S57.

Approximate Feedback Minimum Principle for Suboptimal Processes in Non-smooth Optimal Control Problems

Vladimir A. Dykhta

Matrosov Institute for System Dynamic and Control Theory of SD RAS,
Irkutsk, Russia, dykhta@gmail.com

Abstract: We consider a non-smooth optimal control problem with Lipschitz dynamics with respect to state variables and a terminal functional, which is defined by a semiconcave function (the difference between smooth and continuous convex functions). For suboptimal processes of this problem, the variational-type necessary optimality condition is obtained. This condition, on one hand, is a generalization of the so-called Feedback Minimum Principle obtained by the author in previous publications, and on the other hand, it significantly strengthens ε -Maximum Principle for suboptimal processes obtained by I. Ekeland. An important feature of our result is that the obtained condition of suboptimality is formulated using a family of auxiliary problems of dynamic optimization, due to the multiplicity of solutions of the adjoint inclusion and the plurality of subgradients of the terminal function.

УДК 517.957, 336.76

Вычисление оптимального интервала хеджирования для опционной стратегии «медвежий колл спрэд» («bear call spread») в рамках RАРМ-модели

М.М. Дышаев¹, В.Е. Федоров²

¹ ЧелГУ, Челябинск, Россия, Mikhail.Dyshaev@gmail.com

² ЧелГУ, Челябинск, Россия, kar@csu.ru

Аннотация: Анализируется оптимальный временной интервал для хеджирования портфеля опционов, определяемый в соответствии с

моделью Jandačka — Ševčovič (2005), которая в отличие от классической модели Блэка — Шоулза учитывает риск роста транзакционных издержек и риск изменения стоимости портфеля из-за относительно редкого хеджирования. На примере опционной стратегии «медвежий колл спрэд» («bear call spread») осуществлен численный поиск оптимального временного интервала хеджирования и продемонстрирована его зависимость от времени, остающегося до истечения опционов в портфеле.

Ключевые слова: транзакционные издержки, нелинейные уравнения типа Блэка — Шоулза, хеджирование, RAPM.

Введение

Классическая модель ценообразования опционов, модель Блэка — Шоулза [1], была получена с использованием нескольких ограничений, в том числе таких как необходимость непрерывной торговли и отсутствие транзакционных издержек.

Для линейных моделей ценообразования опционов цена $u(x, t)$, как правило, является решением параболического уравнения

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad (1)$$

где цена базового актива $x \geq 0$ меняется в интервале времени $t \in [0, T]$, $r \geq 0$ — безрисковая процентная ставка, а σ — так называемая историческая волатильность базового актива.

Модель ценообразования опционов с поправкой на риск («risk adjusted pricing methodology», RAPM) была обобщена и проанализирована в работе [2]. Модель учитывает риск изменения стоимости портфеля, возникающий при недостаточно частом пересмотре портфеля. В этой модели функция волатильности имеет вид

$$\hat{\sigma}_{JS}^2(\sigma^2, k, R) = \sigma^2 \left(1 - \mu(xu_{xx})^{1/3}\right), \quad (2)$$

где $\mu = 3(k^2 R/2\pi)^{1/3}$, $R \geq 0$ — показатель премии за риск («risk premium coefficient»). Он представляет собой предельную стоимость подверженности инвестора риску. Здесь k — коэффициент транзакционных издержек, стоимость транзакции на единицу денежных средств.

В процессе построения модели авторы также получили формулу для оценки оптимального интервала времени для последовательных

ребалансировок портфеля в соответствии с δ -хеджированием (формула 2.14 в [2]). Данный интервал времени минимизирует величину суммарного риска:

$$\Delta t_{\text{opt}} = (2\pi\sigma^3 |xu_{xx}|)^{-2/3} \left(\frac{k}{R}\right)^{2/3}. \quad (3)$$

Поскольку величина данного интервала представляет большой интерес с практической точки зрения, было принято решение исследовать его на примере часто используемой на практике опционной стратегии «медвежий колл спрэд» («bear call spread»). Данная стратегия заключается в продаже опциона колл с меньшим страйком (цена исполнения опциона) K_1 и покупке опциона колл с большим страйком K_2 (т. е. $K_1 < K_2$). Трейдер, формирующий подобную стратегию, зарабатывает деньги при снижении цены базового актива и теряет при ее росте.

1. Основной результат

Для нахождения приближенного решения уравнения (1) с модифицированной волатильностью (2) строилась разностная схема на основе двухслойного неявно-явного шеститочечного шаблона с весами. В данной схеме значения искомой функции u_n^{m+1} на $(m+1)$ -м слое имеют вес ω , а значения с предыдущего m -го слоя учитываются с весом $1 - \omega$.

Подставив в уравнение (1) соответствующие разностные представления, получим следующую систему линейных уравнений, которая решалась методом прогонки:

$$a_n u_{n-1}^{m+1} - b_n u_n^{m+1} + c_n u_{n+1}^{m+1} = d_n,$$

где $n = 1, 2, \dots, N-1$, $m = 1, 2, \dots, M-1$,

$$a_n = -\frac{1}{2}\omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2, \quad c_n = a_n - \omega r n,$$

$$b_n = -\left[\frac{1}{\tau} + \omega (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 + \omega r n + r\omega\right],$$

$$d_n = \frac{1}{\tau} u_n^m + (1 - \omega) (\hat{\sigma}_n^m)^2 n^2 h^2 (u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m) - \\ - r(1 - \omega) u_n^m + r(1 - \omega) n (u_{n+1}^m - u_n^m),$$

и $(\delta_n^m)^2$ является модифицированной волатильностью (2) для модели RAPM. В формулах для волатильности используются значения u_{xx} с предыдущего временного слоя. Граничные условия для стратегии являются суммой граничных условий для входящих в нее опционов (схематично: $\text{call}_{K_2} - \text{call}_{K_1} = \text{spread}_{K_1-K_2}$), т. е.

$$u(0, t) = -p_1 + p_2, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = (K_1 - K_2) e^{-r(T-t)},$$

$$u(x, T) = \max\{x - K_2, 0\} - \max\{x - K_1, 0\},$$

где p_1 и p_2 являются ценами соответствующих опционов. Эти значения для простоты рассчитаны в соответствии с моделью Блэка — Шоулза.

Затем был рассчитан и проанализирован характер изменения величины оптимального интервала хеджирования (3). Результат представлен в виде графика на рис. 1.

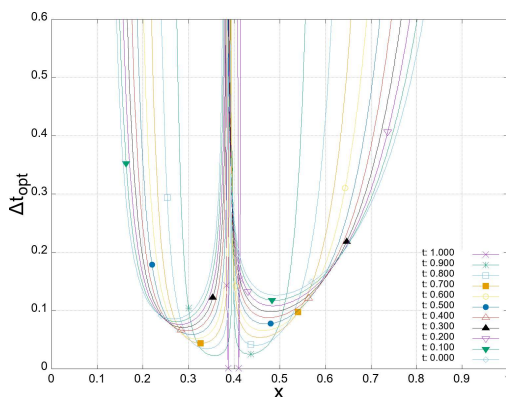


Рис. 1. Зависимость оптимального интервала хеджирования Δt_{opt} от цены базового актива x для разной величины времени t . Чем меньше значение Δt_{opt} , тем чаще необходимо проводить ребалансировку портфеля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00244).

ЛИТЕРАТУРА

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Econ. 1973. Vol. 81, no. 3. P. 637–654.

2. Jandačka M., Ševčovič D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile // J. Appl. Math. 2005. Vol. 2005, no. 3. P. 235–258.

Optimal Hedging Interval for the Bear Call Spread within the Framework of the RAPM

Mikhail M. Dyshaev¹, Vladimir E. Fedorov²

¹ Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia,
Mikhail.Dyshaev@gmail.com

² Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia, kar@csu.ru

Abstract: The optimal time interval for hedging a portfolio of options is analyzed. It is determined in accordance with the Jandačka—Ševčovič (2005) model RAPM, which, in contrast to the classical Black—Scholes model, takes into account the risk of rising transaction costs and the risk of changing the cost of a portfolio due to relatively rare hedging. Using the example of the option strategy Bear Call Spread, the numerical search is made, the dependence of the value of the optimal hedging interval on the time remaining until the expiration of options is demonstrated.

УДК 517.983.54

Алгоритм исследования математической модели теплопроводности в многослойной ограждающей конструкции

А.А. Ершова

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, ershova@imm.uran.ru

Аннотация: В работе построена модель, связанная с обратной граничной задачей теплопроводности, при условии, что коэффициент теплопроводности является кусочно-постоянным. Задача исследовалась с помощью ряда Фурье по собственным функциям для уравнения с разрывным коэффициентом. Для решения обратной задачи использовано преобразование Фурье, которое позволило свести обратную задачу к операторному уравнению, которое было решено методом невязки. Кроме того, разработан и реализован численный алгоритм для решения поставленной задачи.

Ключевые слова: метод проекционной регуляризации, обратная задача теплопроводности, кусочно-постоянный коэффициент теплопроводности, композитные материалы.

Введение

Граничная задача теплопроводности для композитных материалов занимает важное место в строительстве и промышленности. Материалы, используемые для ограждающих конструкций, имеют высокую теплопроводность. Поэтому дополнительно используются изоляционные материалы, коэффициенты теплопроводности которых очень малы. Например, коэффициент теплопроводности стали в 1000 раз больше чем коэффициент стекловаты. Итак, ограждающая конструкция может состоять из нескольких слоев, поэтому возникает задача о теплопроводности в многослойной конструкции.

Для простоты можно ограничиться рассмотрением ограждающих конструкций, состоящих из двух слоев. Поверхность обмена тепла большинства ограждающих конструкций имеет достаточно большую площадь, что температурный режим в каждой точке данной поверхности считается одинаковым. Из этого следует, что можно рассматривать линейную задачу о распространении тепла по толщине конструкции. Основе этого полагается, что пространственная координата по толщине конструкции: первый слой определен $0 < x < l_1$, а второй слой $l_1 < x < l$.

С математической точки зрения, классического решения задача не имеет. Обобщенное решение для исследуемой задачи не подходит, так как в нем производная от решения по пространственной координате принадлежит $L_2[0, l] \times [0, \infty)$.

В работе предлагается другое понятие решения. В отличие от классического решения, оно допускает точки разрыва производной по пространственной координате, и, в отличие от обобщенного решения, позволяет определить производную в конечных точках.

Кроме того, в работе решены прямая и обратная задачи, построено численное решение обратной задачи.

1. Основной результат

В работе исследована задача нахождения приближенного решения системы уравнений в частных производных, которая связана с моделированием изменения температуры композитных материалов.

Прямая задача теплопроводности для композитных материалов

имеет вид

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l_1), \quad t \in (0, \infty); \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (l_1, l), \quad t \in (0, \infty); \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad x \in [0; l_1]; \quad u_2(x, 0) = 0, \quad x \in (l_1, l]; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, +\infty); \quad (4)$$

$$u_2(1, t) = q(t), \quad t \in (0, +\infty); \quad (5)$$

$$u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad t \in (0, +\infty); \quad (6)$$

$$a_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = a_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad t \in (0, \infty). \quad (7)$$

Решение прямой задачи (1)–(7) заключается в определении функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, для которых выполняются условия:

1) $u_1(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) на множестве $(0, l_1) \times (0, \infty)$, а $u_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) на множестве $(l_1, l) \times (0, \infty)$.

2) $u(x, t) \in C([0, l] \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}((0, x_0) \times (0, \infty)) \cup C^{2,1}((l_1, l) \times (0, \infty))$.

3) $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию (3), граничным условиям (4), (5), а также условиям согласования (6), (7).

В работе доказываются теоремы существования и единственности этого решения при дополнительном условии на функцию $q(t)$.

Для применения преобразования Фурье к задаче (1)–(7) сделана замена, которую определим формулой

$$v(x, t) = u(x, t)e^{-\bar{b}t}, \quad \bar{b} > 0, \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Обратная задача заключается в нахождении $q(t) = v_2(1, t)$. Через $g(t)$ обозначена температура в точке сопряжения. Причем $g(t)$ считается заданной приближенно (так как температура измеряется с какой-то погрешностью).

Для решения обратной задачи используется нелинейный метод проекционной регуляризации

$$g_\delta(t) = P_\delta[g_\delta(t)] = \begin{cases} g_\delta(t)e^{\bar{b}t}, & t \in [0, \bar{\alpha}(\delta, g_\delta)], \\ 0, & t \geq \bar{\alpha}(\delta, g_\delta), \end{cases} \quad (9)$$

где $\overline{\alpha}(\delta, g_\delta)$ — решение уравнения

$$\int_{\alpha}^{\infty} g_{\delta}^2(t) dt = \frac{8\overline{A}^2}{b} \ln^{-4} \left(\frac{1}{\delta} \right). \quad (10)$$

Как известно, при условии $\int_0^{\infty} g^2(t) dt > \frac{8\overline{A}^2}{b} \ln^{-4} (1/\delta)$ существует решение $\overline{\alpha}(\delta, g_\delta)$ уравнения (10), которое однозначно определяет $q_\delta(t)$.

Гарантированная оценка уклонения приближенного решения от точного сформулирована в виде:

Теорема 1. *Предположим, что функция $q(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

$$q(t) \in C^2[0, +\infty), \quad q(0) = q'(0) = 0$$

и пусть существует r_1 , $b > 0$ и $\gamma_0 \in [0, 1/8]$ такие, что для любого $t \geq 0$ выполнено

$$\sup_{t \geq 0} \{|q(t)|, |q'(t)|, |q''(t)|\} \leq r_1, \quad |q(t)|^2 \leq b^2 / (1 + t^2)^{1/2(1+\gamma_0)}.$$

Тогда гарантированная оценка уклонения приближенного решения

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \leq \frac{d \cdot \sqrt{\ln \ln (1/\mu(\delta))}}{\ln^{\gamma_0/2} (1/\mu(\delta))},$$

где $q_\delta(t)$ — приближенное решение, определяемое (9); d — некоторая константа; $\mu(\delta) = \frac{\overline{A}}{\sqrt{2b}} \ln^{-2} (1/\delta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 279 с.
2. Танана В.П., Ершова А.А. О решении обратной граничной задачи для композитных материалов // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компют. науки 2018. Т. 28, № 4. С. 474–488.

Algorithm for Studying the Mathematical Model of Thermal Conductivity in a Multilayer Enclosing Structure

A. Ershova

IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, erhova@imm.uran.ru

Abstract: In the present paper, an inverse boundary value problem of thermal conduction is formulated, posed and solved, provided that the thermal diffusivity is piecewise constant. The problem was investigated using a Fourier series in eigenfunctions for an equation with a discontinuous coefficient. It is proved that for the solution of the inverse problem the Fourier transformation with respect to time is applicable. To solve the inverse problem, the Fourier transformation was used, which made it possible to reduce the inverse problem to the operator equation, which was solved by the discrepancy method. In addition, a numerical algorithm was developed and implemented to solve the problem.

УДК 532.582.3

Управление движением объекта в среде переменной плотности

Д.С. Завалицин

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
УрГУПС, Екатеринбург, Россия,
УрФУ, Екатеринбург, Россия,
zav@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается задача построения оптимального управления движением объекта в среде переменной плотности. В качестве критерия оптимальности выбраны суммарные энергетические затраты управляющих воздействий при перемещении объекта из начального фазового состояния в конечное за заданное время. Получены необходимые условия оптимальности. Построение оптимального перемещения связано с решением двухточечной граничной задачи для системы состоящей из уравнений Навье – Стокса и, имеющей аналогичную структуру, сопряженной системы. Такая задача не может быть решена аналитически и поэтому вопрос о структуре оптимального управления при нестационарном обтекании остается открытым даже в случае твердых тел простой формы. Гипотеза квазистационарного обтекания позволяет на предварительном этапе исследований использовать соответствующую аналитическую технику и провести анализ задачи на качественном уровне.

Ключевые слова: оптимальное управление, вырожденные задачи, гидродинамика.

Введение

Постановка задачи предполагает движение в среде переменной плотности. Это реальный эффект, который происходит, например, в океане. Существует такое естественное явление, как пикноклин [2, 3]. Пикноклином назван слой, в котором градиент плотности $\partial\rho/\partial z$ является наибольшим в толще воды. Течения в океане генерируются такими силами, как ломающиеся волны, перепады температуры и солености, ветер, эффект Кориолиса и приливы, вызванные гравитационным притяжением Луны и Солнца. Кроме того, физические свойства пикноклина, обусловленные градиентами плотности, также влияют на потоки и вертикальные профили в океане. Эти изменения могут быть связаны с переносом тепла, соли и питательных веществ через океан, а диффузия пикноклина контролирует апвеллинг. Ниже смешанного слоя стабильный градиент плотности (пикноклин) разделяет верхнюю и нижнюю воды, препятствуя вертикальному переносу. Таким образом, мировой океан является средой с переменной плотностью и исследование задач оптимального управления для таких сред актуально.

1. Модель объект — среда

В качестве модели объекта управления (см. рис. 1) используется математическая модель, разработанная в предыдущих исследованиях [4, 5].

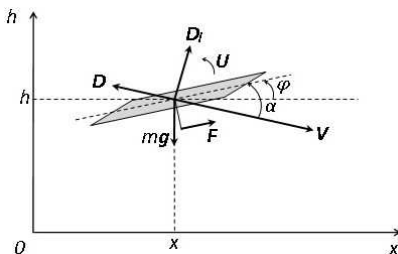


Рис. 1. Силы и моменты, действующие на объект.

Необходимые условия оптимальности следующие [1]

$$\begin{aligned}
V_c(t_p, y) &= 0, \\
\omega^\top e + \int_S \left[-\eta e^\top n + \operatorname{div}((-2\mu e^\top V_c + \nu e^\top \lambda)n) \right] dS + \\
&+ \int_\tau \lambda^\top \frac{\partial V_c}{\partial y} e d\tau + 2\mu \int_S \operatorname{div} n dS u = 0, \\
\lambda_t &= -\lambda_y(V_c - eu) + \eta_y^\top - \nu \operatorname{div} \lambda_y + \left(\frac{\partial V_c}{\partial y} \right)^\top (\lambda - \rho V_c) + 2\mu \operatorname{div} \frac{\partial V_c}{\partial y}, \\
\operatorname{div} \lambda_t &= 0, \quad \lambda(0, y) = \lambda(t_p, y) = 0, \quad \lambda(t, y)|_S = \lambda(t, y)|_{S_e} = 0,
\end{aligned}$$

где ω , η , λ — множители Лагранжа.

В приведенных выше соотношениях в соответствии с постановкой задачи следует учитывать свойства среды, а именно, переменную плотность. Плотность воды в океане нелинейно зависит от температуры, солености и давления $\rho = \rho(T, S, P)$. В качестве простейшей модели этой зависимости применяют приближение Буссинеска

$$\rho = 1.028(1 - \beta T), \quad (1)$$

где табличный коэффициент β выражает влияние на плотность температуры. На практике как правило используют Международное уравнение состояния морской воды [2], в котором плотность ρ при давлении в стандартную атмосферу ($P = 0$) зависит от температуры T и солености S

$$\begin{aligned}
\rho(T, S, 0) &= \rho_w + (8.244 \cdot 10^{-1} - 4.089 \cdot 10^{-3}T + \\
&+ 7.643 \cdot 10^{-5}T^2 - 8.246 \cdot 10^{-7}T^{-3} + 5.387 \cdot 10^{-9}T^4)S - \\
&- (5.724 \cdot 10^{-3} - 1.022 \cdot 10^{-4}T + 1.654 \cdot 10^{-6}T^2S^{3/2} + 4.831 \cdot 10^{-4}S^2).
\end{aligned}$$

Здесь ρ_w — средняя плотность стандартной воды в океане в диапазонах солености 0–42‰ и температуры от -2 до $+40^\circ\text{C}$,

$$\begin{aligned}
\rho_w &= 999.842 + 6.793 \cdot 10^{-2}T - 9.095 \cdot 10^{-3}T^2 + \\
&+ 1.001 \cdot 10^{-4}T^3 + 1.120 \cdot 10^{-6}T^4 + 6.536 \cdot 10^{-9}T^5.
\end{aligned}$$

Кроме этого существует скачок плотности на глубине порядка 100 метров. Он обусловлен слоем резкого падения температуры (термоклин) и солености (галоклин). Мощность слоя скачка скачка составляет около 50 метров в зависимости от долготы, сезона и времени суток.

На начальном этапе исследовались условия оптимальности для среды переменной плотности описываемой с помощью приближения Буссинеска (1). Построение оптимального управления движением объекта в описанных условиях представляет большой интерес.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завалищин Д.С., Завалищин С.Т.* Динамическая оптимизация обтекания. М.: Физматлит, 2002. 224 с.
2. *Рожков В.А.* Статистическая гидрометеорология. Часть 3. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2015. 255 с.
3. *Knauss J.A.* Introduction to Physical Oceanography, 2nd edition. Prentice-Hall, 1997.
4. *Zavalishchin D.S.* Mathematical modeling of the optimal control for a moving object with a variable geometry in a viscous medium // AIP Conf. Proceedings. 2016. Vol. 1789. P. 1–7.
5. *Zavalishchin D.S.* Modeling of the optimal programs dependence on bodies geometric constraints when moving in a viscous medium // AIP Conf. Proceedings. 2017. Vol. 1910. P. 1–5.

An Object Movement Control in a Variable Density Medium

Dmitry S. Zavalishchin

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia,
USURT, Yekaterinburg, Russia,
UrFU, Yekaterinburg, Russia,
zav@imm.uran.ru

Abstract: The problem of constructing an optimal control of the object motion in a variable density environment is considered. As an optimality criterion the total energy consumption of control actions is taken. The necessary conditions of optimality are obtained that generate the displacement of an object from the initial phase state to the final state in a given time. The construction of such a displacement is connected with the solution of some two-point boundary value problem for the system of the Navier – Stokes equations and the adjoint system having a similar structure. Such a problem cannot be solved analytically and therefore the question of the structure of optimal control in nonstationary flow around remains open even in the case of solids of simple form. The hypothesis of a quasistationary flow allows at the preliminary stage of research to use the appropriate analytical technique and to analyze such problems at a qualitative level.

О назначении спектра и стабилизации блочных систем статической обратной связью по выходу

В.А. Зайцев¹, И.Г. Ким²

¹ Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия, verba@udm.ru

² Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия,
kimingeral@gmail.com

Аннотация: Рассматривается линейная стационарная управляемая система, заданная в блочно-матричном виде. Исследуется задача назначения произвольного спектра замкнутой системы посредством статической обратной связи по выходу:

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}.$$

Предполагается, что блоки матричных коэффициентов системы имеют специальный вид: A имеет блочную форму Фробениуса, первые $(p - 1)$ блочных строк матрицы B и последние $(n - p)$ блочных строк матрицы C равны нулю ($1 \leq p \leq n$), и блоки матрицы C являются скалярными матрицами. В терминах коэффициентов A, B, C системы получены достаточные условия (типа ранговых условий управляемости) для назначения произвольного спектра замкнутой системы посредством статической обратной связи по выходу. Получено следствие о стабилизации. Результаты расширяют полученные ранее результаты для систем с блоками размерности один на системы с блоками размерности $s \geq 1$.

Ключевые слова: линейная управляемая система, назначение спектра, стабилизация, обратная связь.

Пусть $\mathbb{K}^n$ — линейное n -мерное пространство векторов-столбцов $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$, над полем $\mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $M_{n,m}(\mathbb{K})$ — пространство $n \times m$ -матриц с элементами из $\mathbb{K}$; $*$ — операция эрмитова сопряжения (вектора или матрицы), $I_n \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ — единичная матрица.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим линейную управляемую систему, заданную в блочном виде, с блоками размерностей $s \times s$:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}, \quad u \in \mathbb{K}^{ms}, \quad (1)$$

$$y = C^*x, \quad y \in \mathbb{K}^{ks}, \quad (2)$$

$$A \in M_{ns,ns}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{ns,ms}(\mathbb{K}), \quad C \in M_{ns,ks}(\mathbb{K}).$$

Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу

$$u = Uy, \quad U \in M_{ms,ks}(\mathbb{K}). \quad (3)$$

Система (1), (2), замкнутая управлением (3), примет вид

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}. \quad (4)$$

Исследуется задача назначения спектра системы (4): требуется для произвольного многочлена

$$q(\lambda) = \lambda^{ns} + \gamma_1 \lambda^{ns-1} + \dots + \gamma_{ns}, \quad \gamma_j \in \mathbb{K}, \quad j = \overline{1, ns}, \quad (5)$$

построить матрицу обратной связи $U \in M_{ms, ks}(\mathbb{K})$ так, что характеристический многочлен матрицы замкнутой системы (4) совпадает с (5); если такая матрица существует, то говорят, что *спектр системы (4) может быть назначен произвольным образом (arbitrarily assignable), или глобально управляем*.

Предположим, что коэффициенты системы (1), (2) имеют следующий блочный вид: A имеет блочную форму Фробениуса, первые $(p-1)$ блочных строк матрицы B и последние $(n-p)$ блочных строк матрицы C равны нулю, и блоки матрицы C являются скалярными матрицами, то есть

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_s & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & I_s \\ -A_n & -A_{n-1} & \dots & \dots & -A_1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ B_{p1} & \dots & B_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11}I_s & \dots & c_{1k}I_s \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1}I_s & \dots & c_{pk}I_s \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$A_i, B_{ij} \in M_s(\mathbb{K}), \quad c_{il} \in \mathbb{K}, \quad p \in \{1, \dots, n\}.$$

Введем отображение $\text{VEC} : M_{ns, ms}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{nms, s}$ (для зафиксированного s), которое «разворачивает» блочную матрицу $H = \{H_{ij}\}$, $H_{ij} \in M_s(\mathbb{K})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, по блочным строкам в блочный вектор-столбец

$$\text{VEC } H = \text{col}(H_{11}, \dots, H_{1m}, \dots, H_{n1}, \dots, H_{nm}) \in M_{nms, s}(\mathbb{K}).$$

Построим матрицу

$$P := [\text{VEC}(C^*B), \text{VEC}(C^*AB), \dots, \text{VEC}(C^*A^{n-1}B)] \in M_{mks, ns}(\mathbb{K}).$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты системы (1), (2) имеют вид (6), (7). Если ранг матрицы P равен ns , то спектр системы (4) глобально управляем.

Следствие 1. Пусть коэффициенты системы (1), (2) имеют вид (6), (7). Если ранг матрицы P равен ns , то система (4) стабилизируема с произвольным наперед заданным показателем устойчивости.

Теорема 1 и следствие 1 обобщают некоторые результаты работ [1–3], в которых соответствующие утверждения были установлены при $s = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект № 1.5211.2017/8.9) и РФФИ (проект № 18–51–41005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback // Differential Equations. 2009. Vol. 45, no. 9. P. 1348–1357.
2. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem // Differential Equations. 2010. Vol. 46, no. 12. P. 1789–1793.
3. Zaitsev V.A. Consistent systems and pole assignment: I // Differential Equations. 2012. Vol. 48, no. 1. P. 120–135.

On Eigenvalue Assignment and Stabilization of Block-Matrix Systems by Static Output Feedback

Vasilii A. Zaitsev¹, Inna G. Kim²

¹ Udmurt State University, Izhevsk, Russia, verba@udm.ru

² Udmurt State University, Izhevsk, Russia, kimingeral@gmail.ru

Abstract: We consider a linear time-invariant control system defined in a block-matrix form. We study the problem of assigning an arbitrary spectrum to a close-looped system by means of static output feedback:

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{K}^{ns}.$$

We assume that the blocks of the matrix coefficients of the system have a special form: A has a Frobenius block form, the first $(p - 1)$ block rows

of the matrix B and the last $(n - p)$ block rows of the matrix C are zero ($1 \leq p \leq n$), and the blocks of the matrix C are scalar matrices. In terms of the coefficients A, B, C of the system, sufficient conditions are obtained (that are the controllability-like rank conditions) for assigning an arbitrary spectrum to a closed system by means of static output feedback. The corollary on stabilization is obtained. The results extend the previously obtained results for systems with blocks of dimension one to systems with blocks of dimension $s \geq 1$.

УДК 519.857

Об одной импульсной дифференциальной игре со смешанной платой

И.В. Измestьев

ЧелГУ, Челябинск, Россия, j748e8@gmail.com

Аннотация: К задачам импульсного управления сводятся задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы. Если на механическую систему воздействуют неконтролируемые силы, о которых известны только области их возможных значений, то задача управления может быть рассмотрена в рамках теории дифференциальных игр. В данной статье рассмотрена импульсная дифференциальная игра, в которой первый игрок управляет точкой переменного состава, выбирая в каждый момент времени реактивную силу. Второй игрок управляет точкой с ограниченной по величине скоростью. Первый игрок стремится минимизировать плату, которая определяется как взвешенная сумма расстояния между игроками в фиксированный момент времени и начальной реактивной массы, выбранной первым игроком. Цель второго игрока максимизировать плату. Для рассматриваемой задачи найдена цена игры.

Ключевые слова: дифференциальная игра, импульсное управление, плата.

1. Постановка задачи

Первый игрок управляет движением точки переменного состава $x_1 \in \mathbb{R}^n$, выбирая в каждый момент времени реактивную силу [1]

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad dx_2 = dU,$$

где U — управление первого игрока, которое является функцией с ограниченным изменением. Расход ресурсов, затраченных на формирование этого управления на произвольном отрезке $[t, \tau]$, задается формулой

$$\int_t^\tau \|dU(r)\| = \sup \sum \|U(r_{l+1}) - U(r_l)\|,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям r_l отрезка $[t, \tau]$.

Второй игрок управляет движением точки $y \in \mathbb{R}^n$, выбирая в каждый момент времени ее скорость, которая ограничена по величине заданным числом $b > 0$:

$$\dot{y} = bv, \quad v \in \mathbb{R}^n, \quad \|v\| \leq 1.$$

Зададим начальный и конечный моменты времени $t_0 < p$, соответственно. Определим плату следующим образом

$$\|y(p) - x_1(p)\|\alpha + \mu(t_0) \rightarrow \min_{U, \mu(t_0)} \max_v,$$

где $\alpha > 0$ — весовой коэффициент, $\mu(t_0)$ — начальный запас ресурсов, который не может быть перерасходован в процессе управления:

$$\mu(t) = \mu(t_0) - \int_{t_0}^t \|dU(r)\| \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq p. \quad (1)$$

2. Формализация задачи

В переменных $z(t) = y(t) - x_1(t) - (p-t)x_2(t)$ рассматриваемая задача примет вид

$$dz = -(p-t)dU + bv, \quad t \leq p, \quad (2)$$

$$\|z(p)\|\alpha + \mu(t_0) \rightarrow \min_{U, \mu(t_0)} \max_v, \quad (3)$$

где управление U и число $\mu(t_0)$ удовлетворяют условию (1).

Управлением второго игрока является произвольная функция $v : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая ограничению $\|v\| \leq 1$.

Управлением первого игрока является функция вида $U(t, z) = \phi(t)u(t, z)$, где $u : [t_0, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольная функция, удовлетворяющая равенству $\|u(t, z)\| = 1$. При выборе функции $\phi(t)$ в отдельные моменты времени осуществляется ее коррекция, которая проводится следующим образом. Первый игрок в начальный момент

времени выбирает конечный набор моментов коррекции $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q < p$. В момент времени τ_i , зная реализовавшееся состояние $\|z(\tau_i)\|$, $\mu(t_i)$, он выбирает абсолютно-непрерывную, неубывающую функцию $\phi : [\tau_i, \tau_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int_{\tau_i}^t \dot{\phi}(r) dr \geq 0, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}.$$

Зафиксируем разбиение $\omega : \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}$. Движение, порожденное выбранными на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ управлениями, определим как равномерный предел последовательности ломаных [3, с. 75], у которых диаметр разбиения $d(\omega) \rightarrow 0$.

3. Основной результат

Зафиксируем $\varepsilon \geq 0$, $\mu(t_0) \geq 0$ и рассмотрим дифференциальную игру (2) с терминальным условием $\|z(p)\| \leq \varepsilon$ и условием не перерасхода начального запаса ресурсов (1). Необходимые и достаточные условия окончания в данной задаче могут быть записаны в виде (см. [2] и [3, с. 84-85]) $f(\varepsilon) \leq \mu(t_0)$, где

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} b + \frac{\|z(t_0)\| - \varepsilon}{p - t_0}, & \text{при } p - \frac{\varepsilon}{b} \leq t_0 < p, \\ \frac{\|z(t_0)\|}{p - t_0} + b \ln \left(\frac{(p - t_0)b}{\varepsilon} \right), & \text{при } t_0 < p - \frac{\varepsilon}{b}. \end{cases}$$

Далее рассмотрим задачу

$$\alpha\varepsilon + \mu \rightarrow \min, \quad f(\varepsilon) \leq \mu, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \mu \geq 0. \quad (4)$$

В задаче (4) при различных значениях $\alpha > 0$ были найдены следующие решения:

$$\varepsilon_0 = \|z(t_0)\| + (p - t_0)b, \quad \mu_0 = 0 \quad \text{при } (p - t_0)\alpha < 1;$$

(ε_0, μ_0) — любая точка из отрезка с концами

$$\left((p - t_0)b, \frac{\|z(t_0)\|}{p - t_0} \right) \text{ и } (\|z(t_0)\| + (p - t_0)b, 0) \quad \text{при } (p - t_0)\alpha = 1;$$

$$\varepsilon_0 = \frac{b}{\alpha}, \quad \mu_0 = \frac{\|z(t_0)\|}{p - t_0} + b \ln((p - t_0)\alpha) \quad \text{при } (p - t_0)\alpha > 1.$$

Пусть ε_0 и μ_0 является решением задачи (4). Тогда можно показать, что значение цены игры в дифференциальной игре (2), (3) равно

$$V(t_0, z(t_0)) = \alpha\varepsilon_0 + \mu_0.$$

4. Перспективы дальнейшего исследования

Планируется рассмотреть задачу в общем случае:

$$dz = -a(t)dU + b(t)v, \quad t \leq p,$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — неотрицательные скалярные функции, причем функция $a(t)$ является непрерывной на полуоси $(-\infty, p]$, а функция $b(t)$ суммируема на каждом отрезке полуоси $[\tau_1, \tau_2] \subset (-\infty, p]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00264_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Ухоботов В.И.* Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 4. С. 590–598.
3. *Ухоботов В.И.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями, учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.

On an Impulse Differential Game with Mixed Payoff

I.V. Izmet'sev

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia, j748e8@gmail.com

Abstract: Control problems for mechanical systems of variable composition, where a finite amount of reaction mass may separate at certain times, reduce to impulse control problems. If a mechanical system is affected by uncontrollable forces given only by known ranges of their possible values, then the control problem can be considered within the theory of differential games. This article considers an impulse differential game in which the first player controls a point of variable composition, choosing a reactive force at each time moment. The second player controls the point with a limited speed. The first player seeks to minimize the payoff, which is defined as the weighted sum of the distance between the players at a fixed time moment and the initial

reaction mass selected by the first player. The goal of the second player is to maximize the payoff. For considered problem the price of the game is found.

УДК 517.926.4

Полное описание суслинскими множествами положительных характеристических показателей Ляпунова в эффекте Перрона смены их значений

Н.А. Изобов¹, А.В. Ильин²

¹ ИМ НАН Беларуси, Минск, Беларусь, izobov@im.bas-net.by

² МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия, iline@cs.msu.su

Аннотация: В эффекте Перрона смены значений характеристических показателей Ляпунова получено их полное описание ограниченными суслинскими множествами.

Ключевые слова: показатель Ляпунова, эффект Перрона, суслинское множество.

Рассматриваем линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с ограниченной непрерывно дифференцируемой матрицей коэффициентов $A(t)$ и отрицательными характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) < 0$. Она является линейным приближением для нелинейной системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y), \quad y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

При этом так называемое m -возмущение $f(t, y)$ непрерывно дифференцируемо по своим аргументам $t \geq 0$ и $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ и имеет порядок $m > 1$ малости в некоторой окрестности начала координат и роста вне неё:

$$\|f(t, y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Эффект Перрона [9], [6, с. 50, 51], смены знака и значений характеристических показателей устанавливает существование такой

системы (1) с отрицательными показателями Ляпунова и 2-возмущения (3), что все нетривиальные решения возмущённой системы (2) оказываются бесконечно продолжимыми и имеют конечные показатели Ляпунова, равные:

1) отрицательному старшему показателю λ_2 исходной системы (1) для решений, начинающихся в начальный момент на оси $y_1 = 0$ (это позволяет считать эффект Перрона *неполным*);

2) некоторому одному положительному значению для всех остальных решений (вычисленному в [8, с. 13–15]).

В цикле наших работ получены различные варианты *полного* эффекта Перрона, когда все нетривиальные решения нелинейной системы (2) с m -возмущением (3) являются бесконечно продолжимыми (в общем случае это не так) и имеют конечные положительные показатели Ляпунова при отрицательных показателях системы линейного приближения (1). Эти варианты соответствуют различным видам множества $\Lambda(A, f) \subset (0, +\infty)$ характеристических показателей Ляпунова всех нетривиальных решений возмущённой системы (2), распределению этих решений по показателям из множества $\Lambda(A, f)$ и, наконец, произвольному порядку систем (1) и (2). В частности, в работе [3] получен континуальный вариант полного эффекта Перрона с произвольно заданным отрезком-множеством $\Lambda(A, f) \subset (0, +\infty)$ характеристических показателей возмущённой системы (2).

В полном эффекте Перрона оставался открытым, в частности, вопрос о наиболее общем виде множества $\Lambda(A, f)$ характеристических показателей (всех нетривиальных решений) возмущённой системы (2) — вопрос о полном описании этого множества.

Цель настоящего сообщения — доказать, что в полном эффекте Перрона смены значений характеристических показателей: 1) всякое множество $\Lambda(A, f)$ является суслинским [7, с. 97, 98, 192]; 2) произвольное ограниченное суслинское множество $S \subset (0, +\infty)$ реализуется соответствующей совокупностью $\Lambda(A_s, f_s) = S$ характеристических показателей всех нетривиальных решений возмущённой системы (2).

Отметим, что в противоположном случае экспоненциально устойчивых систем (2) с любыми m -возмущениями f для предельных совокупностей $\Lambda_0(A, f) \subset (-\infty, 0)$ характеристических показателей всех нетривиальных решений этих систем из достаточно малых окрестностей начала координат ранее были реализованы произвольные принадлежащие промежутку $(-\infty, 0)$ отрезок [2] и ограниченное суслинское множество [1].

1°. Первое утверждение, необходимое для описания совокупности $\Lambda(A, f) \subset (0, +\infty)$ характеристических показателей Ляпунова $\lambda[y(\cdot, y_0)]$ всех нетривиальных решений $y(t, y_0)$ возмущённой системы (2) с m -возмущением (3) в полном эффекте Перрона, устанавливает следующая

Теорема 1 [4]. Пусть все нетривиальные решения $y(t, y_0)$ системы (2) бесконечно продолжимы и имеют конечные характеристические показатели. Тогда характеристический показатель $\lambda[y(\cdot, y_0)] \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|y(t, y_0)\|$ этих решений является функцией 2-го класса Бэра их начальных векторов $y_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Следствие 1 [4]. В полном эффекте Перрона множество $\Lambda(A, f)$ нетривиальных решений системы (2) является суслинским.

2°. Второе необходимое и более сильное утверждение о реализации в полном эффекте Перрона произвольного ограниченного суслинского множества $S \subset (0, +\infty)$ совокупностью характеристических показателей $\Lambda(A_s, f_s)$ всех нетривиальных решений соответствующей системы (2) докажем в более узких классах бесконечно дифференцируемых по своим аргументам матрицы $A(t)$ и вектор-функции $f(t, y)$ в рассматриваемых областях. Справедлива

Теорема 2 [5]. Для любых параметров $m > 1$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ и произвольных ограниченных на оси $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus 0$ функций

$$\psi_i: \mathbb{R}_0 \rightarrow [\beta_i, b_i] \subset (0, +\infty), \quad b_1 \leq \beta_2, \quad i = 1, 2,$$

1-го класса Бэра существуют линейная система (1) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на полуоси $[t_0, +\infty)$ коэффициентами и показателями $\lambda_1(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2 = \lambda_2(A)$ и бесконечно дифференцируемое по своим аргументам $t \geq t_0$ и $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ m -возмущение $f(t, y)$, такие, что все нетривиальные решения $y(t, c)$ нелинейной системы (2) бесконечно продолжимы вправо и имеют характеристические показатели

$$\lambda[y(\cdot, c)] = \begin{cases} \psi_1(c_1), & c_1 \neq 0, \quad c_2 = 0, \\ \psi_2(c_2), & c_2 \neq 0, \quad c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Из этой теоремы вытекает необходимое

Следствие 2 [5]. Для произвольных параметров $m > 1$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ и ограниченного суслинского множества $S \subset (0, +\infty)$ существуют указанные в теореме такие системы (1) и (2), что множество характеристических показателей нетривиальных решений последней совпадает с множеством S .

При доказательстве теоремы 2 используются утверждения:

Лемма 1 [5]. Пусть ограниченная на оси $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функция

$$\psi : \mathbb{R}_0 \rightarrow |\beta_0, b_0|, \quad -\infty < \beta_0 < b_0 < +\infty,$$

является функцией 1-го класса Бэра. Тогда для любых постоянных $\beta < \beta_0$ и $b > b_0$ существует последовательность $\{\psi_n(x)\}$ бесконечно дифференцируемых равномерно ограниченных на оси $\mathbb{R}_0$ функций $\psi_n : \mathbb{R}_0 \Rightarrow [\beta, b]$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся на этой оси к функции $\psi(x)$.

Лемма 2 [5]. Для любых числа $\varepsilon > 0$ и непрерывной на оси $\mathbb{R}_0$ функции $F_0 : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ существует бесконечно дифференцируемая на этой оси функция $F : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнено неравенство $|F(x) - F_0(x)| \leq \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского (проект Ф18 Р-014) и Российского (проект 18-15-00004Бел-а) фондов фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барабанов Е.А., Волков И.А. Строение множества характеристических показателей Ляпунова экспоненциально устойчивых квазилинейных систем // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 3–19.
2. Изобов Н.А. О числе характеристических и нижних показателей экспоненциально устойчивой системы с возмущениями высшего порядка // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 774–794.
3. Изобов Н.А., Ильин А.В. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1427–1439.
4. Изобов Н.А., Ильин А.В. О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439.
5. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472.

6. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М., Ижевск, 2006.
7. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М., Л., 1937.
8. *Izobov N.A.* Lyapunov Exponents and Stability. Cambridge, 2012.
9. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 702–728.

The whole description by Suslin sets of Lyapunov characteristic exponents in the Perron effect of their value change

N.A. Izobov¹, A.V. Il'in²

¹ Institute of Mathematics of NAS of Belarus, Minsk, Belarus, izobov@im.bas-net.by

² Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, iline@cs.msu.su

Abstract: In the Perron effect of value change of Lyapunov characteristic exponents, we have obtained their whole description by bounded Suslin sets.

УДК 531.36

Об одном методе решения задачи стабилизации стационарных движений систем с нелинейными геометрическими связями

А.Н. Ильина¹, А.Я. Красинский^{1,2}

¹ МАИ, Москва, Россия, happyday@list.ru

² МГУПП, Москва, Россия, krasinsk@mail.ru

Аннотация: В работе описывается подход к решению задачи устойчивости и стабилизации стационарных движений мехатронных систем с нелинейными геометрическими связями. Предполагается, что конфигурация системы описывается переменными Лагранжа, среди координат имеются псевдоциклические. Информация о состоянии системы может быть неполной. Управление прикладывается по вектору позиционных, избыточных, или циклических координат. В качестве основы построения математической модели динамики используются уравнения в форме М.Ф. Шульгина. Коэффициенты стабилизирующего управления и наблюдателя могут быть найдены численно по методу Н.Н. Красовского посредством решения соответствующих линейно-квадратичных задач. Предлагаемый метод позволяет свести задачу стабилизации полной нелинейной

системы в окрестности исследуемого движения к задаче стабилизации линейной управляемой подсистемы, характеристическое уравнение которой не имеет нулевых корней.

Ключевые слова: геометрические связи, стабилизация, устойчивость, избыточные координаты, уравнения Шульгина, наблюдатель.

Введение

Для математического моделирования систем с нелинейными геометрическими связями, когда явное исключение “лишних” координат затруднительно, традиционно применяются уравнения Лагранжа с множителями связей. Однако если в задаче не предполагается определение реакций связей, неопределённые множители необходимо исключать. М.Ф. Шульгин в своей монографии [4] вывел форму уравнений динамики с избыточными координатами, не содержащую множителей связи. На её основе, с применением результатов нелинейной теории устойчивости, были получены важные результаты в решении задач устойчивости и стабилизации систем с нелинейными геометрическими связями [2]. В статье [5] была построена математическая модель динамики рассматриваемых систем в переменных Лагранжа и получено достаточное условие разрешимости задачи устойчивости и стабилизации стационарных движений в случае управления по всему вектору циклических координат. В настоящей работе обобщим полученный результат для различных способов управления.

1. Стабилизация стационарных движений мехатронных систем с геометрическими связями

Рассмотрим мехатронную систему, конфигурация которой описывается $n + m$ параметрами $q' = (q_1, \dots, q_{n+m})$, $m \geq 1$, число которых превосходит необходимое n – число степеней свободы системы, и на которую наложено m независимых нелинейных геометрических связей

$$F' = (F_1(q), \dots, F_m(q)) = 0, \quad \text{rank} \frac{\partial F}{\partial q} = m. \quad (1)$$

Пусть также $l \geq 1$ из $n + m$ параметров являются псевдоциклическими [1]. Рассмотрим три возможных способа введения управляющих воздействий: по вектору позиционных координат, по вектору избыточных координат и по всему вектору циклических координат.

Разделим фазовый вектор на три части $q' = (\alpha', \beta', s')$, где $\alpha' = (q_1, \dots, q_k)$ – вектор позиционных координат, $\beta' = (q_{k+1}, \dots, q_n)$, $l = n - k$ – циклические координаты, $s' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$ – избыточные координаты.

Продифференцировав уравнения связей (1) по времени, выразим скорости избыточных координат в виде

$$\dot{s} = B(s, \alpha)\dot{\alpha}, \quad B(s, \alpha) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right). \quad (2)$$

Обозначим векторы управляющих воздействий: u_α , $\dim u_\alpha \leq k$ – по независимым координатам с постоянной матрицей M_α ; u_s , $\dim u_s \leq m$ – по избыточным координатам с матрицей M_s ; u_β , $\dim u_\beta = l$ – по циклическим координатам. Тогда математическая модель динамики системы, включающая возможные управления, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}'} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha'} = Q_\alpha^* + M_\alpha u_\alpha + B'(\alpha, s) \left(\frac{\partial L^*}{\partial s'} + Q_s^* + M_s u_s \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\beta}'} = u_\beta, \quad \dot{s} = B(\alpha, s)\dot{\alpha}, \end{cases} \quad (3)$$

где L^* – функция Лагранжа, Q_α^* , Q_s^* – непотенциальные силы, отнесённые к координатам α и s . Звёздочкой отмечено, что из их выражений исключены зависимые скорости $\dot{s}$ с помощью (2).

При $u_\beta = 0$ система (3) допускает циклические интегралы и может совершать стационарные движения:

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad s = s_0 = \text{const}, \quad \dot{\beta} = c_\beta = \text{const}. \quad (4)$$

После проведения аналитических преобразований, приводящих систему к специальному виду теории критических случаев, и выделения первого приближения в окрестности движения (4), система (3) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + V_1 u_1 + V_2 u_2 + V_3 u_3 + Zz + X^{(2)}(\xi, z), \\ \dot{z} = B^{(1)}(x, z)\dot{x}, \end{cases} \quad (5)$$

где $\xi' = (x', \dot{x}', w')$ – вектор возмущений параметров системы, причём

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + x, & s &= s_0 + y, & \dot{\beta} &= c_\beta + w, & z &= y - B(0)x, \\ u_\alpha &= u_{\alpha_0} + u_1, & u_s &= u_{s_0} + u_2, & u_\beta &= u_3, & B(0) &= B(\alpha_0, s_0), \\ & & B^{(1)}(x, z) &= B(\alpha_0 + x, s_0 + B(0)x + z) - B(0). \end{aligned}$$

Матрицы коэффициентов N , V_j , Z , $j = \overline{1, 3}$, постоянны и выражаются известным образом.

Пусть информация о состоянии системы получается в виде вектора измерений, линейное приближение которого в окрестности (4) имеет вид $\sigma_i = \Sigma_i \xi$, где $\Sigma_1 = (E_k \ 0 \ 0)$, $\Sigma_2 = (0 \ E_k \ 0)$, $\Sigma_3 = (0 \ 0 \ E_l)$. Наблюдатель для определения полного вектора возмущений будем синтезировать в виде

$$\dot{\hat{\xi}} = N\hat{\xi} + V_\alpha u_\alpha + V_s u_s + V_\beta u_\beta + \Lambda_i(\sigma_i - \Sigma_i \hat{\xi}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где $\hat{\xi}' = (\hat{x}, \hat{x}', \hat{w}')$ — вектор оценки фазового состояния, Λ_i — некоторые постоянные матрицы коэффициентов системы оценивания. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если для систем (5) и (6) пара (N, V_j) , $j = \overline{1, 3}$ управляема, а пара (N, Σ_i) наблюдаема, то стационарное движение (4) может быть стабилизировано до асимптотической устойчивости по всем переменным приложением по соответствующему вектору (позиционных, избыточных или циклических координат, соответственно) управления вида $u_j = -K_{j,i}\hat{\xi}$, где $K_{j,i}$ — некоторая постоянная матрица.*

Матрицы $K_{j,i}$ и Λ_i могут быть найдены по методу Н.Н. Красовского [3, с. 475–515] решением соответствующих линейно-квадратичных задач. Необходимо подчеркнуть, что асимптотическая устойчивость достигается, только если начальные возмущения удовлетворяют уравнениям связей (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Клоков А.С., Самсонов В.А. О стабилизируемости тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами // ПММ, 1985. Т. 49. № 2. С. 199–202.
2. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // Наука и образование, 2013. № 3. С. 347–376. DOI: 10.7463/0313.0541146
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
4. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент: САГУ, 1958. 183 с.
5. Krasinskiy A.Ya., Ilyina A.N. The mathematical modelling of the dynamics of systems with redundant coordinates in the neighborhood of steady motions // Вестник ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 2. С. 38–50. DOI: 10.14529/mmp170203

About One Method of Stabilization of Steady Motions for Systems with Redundant Coordinates

A.N. Il'ina¹, A.Ya. Krasinskiy^{1,2}

¹ Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, happyday@list.ru

² Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia,
krasinsk@mail.ru

Abstract: The paper describes an approach to solving the problem of stability and stabilization of stationary motions for mechatronic systems with nonlinear geometric connections. It is assumed that the configuration of the system is described by Lagrange variables. There are pseudocyclic coordinates. The information of the state is not complete. Control is applied by the vector of positional, redundant, or cyclic coordinates. It is proposed to use equations in the form of M.F. Shulgina as a basis for constructing a mathematical model of dynamics. The control coefficients and the estimation system coefficients are specified numerically by solving the corresponding Krasovskii linear-quadratic problems. The proposed method makes it possible to reduce the problem of stabilization of a complete nonlinear system in the vicinity of the studied motion to the problem of stabilization of a linear controlled subsystem whose characteristic equation has no zero roots.

УДК 517.98

Связь между основными операторами в нелинейных дифференциальных играх преследования с фиксированным временем

И.М. Исканаджиев

Ташкентский химико-технологический институт,
Ташкент, Узбекистан, iskan1960@mail.ru

Аннотация: Решение задачи преследования в нелинейных дифференциальных играх основано на операторных конструкциях. В этой статье рассмотрены аппроксимационные свойства основных операторов нелинейных дифференциальных игр с фиксированным временем. В частности, предложены упрощенные схемы построения нижнего оператора Понтрягина. На основе этих схем установлена связь между верхним и нижним операторами в нелинейных дифференциальных играх с фиксированным временем и их применение к задаче преследования.

Ключевые слова: дифференциальная игра, допустимое управление, преследователь, убегающая, нижний оператор, терминальное множество.

Для решения задачи преследования в нелинейных дифференциальных играх с фиксированным временем в работе [1] введен оператор Π^t как естественный обобщение понятия альтернированного интеграла для линейных дифференциальных игр [2]. Дальнейшему развитию операторных конструкций посвящены много работ. В частности, в работах [3, 4] предложен нижний оператор Π_t и его приложения к изучению качественной структуры фазового пространства дифференциальных игр преследования-убегания. В дальнейшем, для симметричности понятий, оператор Π^t будем называть верхним, а его нижний аналог Π_t — нижним оператором в нелинейных дифференциальных играх с фиксированным временем. В настоящей работе изучается связь между этими операторами.

Рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{z} = f(z, u, v), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^d$, u — параметр управления преследователя, v — параметр управления убегающего. Значения этих параметров стеснены ограничениями $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q — выпуклые компактные множества; функция $f : \mathbb{R}^d \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ непрерывна. В дальнейшем предполагается, что функция f удовлетворяет условию существования и единственности решения с заданным начальным условием. Кроме того, дано непустое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^d$ называемое терминальным множеством.

Если X — подмножество евклидова пространства, Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, то через $X[\Delta]$ обозначим совокупность всех измеримых функций $a(\cdot) : \Delta \rightarrow X$. В случае $\Delta = [\alpha, \beta]$ пишем просто $X[\alpha, \beta]$.

Любую функцию $u(\cdot) \in P[\alpha, \beta]$ (соответственно, $v(\cdot) \in Q[\alpha, \beta]$) назовем допустимым управлением преследователя (убегающего). Решение уравнения (1), определяемое допустимыми управлениями и начальной точкой, обозначим через $z(t, u(\cdot), v(\cdot), \xi)$.

Определение 1. Оператор Π^ε ($\varepsilon \geq 0$) ставит в соответствие каждому множеству $X \subset \mathbb{R}^d$ множество $\Pi^\varepsilon X$ всех точек, таких что для каждого допустимого управления убегающего $v(\cdot) \in Q[0, \varepsilon]$ найдется допустимое управление преследователя $u(\cdot) \in P[0, \varepsilon]$ такое, что траектория $z(t) = z(t, u(\cdot), v(\cdot), \xi)$ системы (1), соответствующая начальной точке ξ и управлениям $u = u(t)$, $v = v(t)$

попадает на множество X не позднее, чем в момент времени ε , т.е. $z(t_*) \in M$ для некоторого $t_* \in [0, \varepsilon]$.

Определение 2. Оператор Π_ε ($\varepsilon \geq 0$) ставит в соответствие каждому множеству $A \subset \mathbb{R}^d$ множество $\Pi_\varepsilon A$ всех точек, таких что существует допустимое управление преследователя $u(\cdot) \in P[0, \varepsilon]$, что при любом допустимом управлении убегающего $v(\cdot) \in Q[0, \varepsilon]$ соответствующая траектория $z(t) = z(t, u(\cdot), v(\cdot), \xi)$ с началом в точке $\xi \in \mathbb{R}^d$ попадает на множество $A \subset \mathbb{R}^d$ в момент времени ε , т.е. $z(\varepsilon) \in A$.

Пусть $\omega = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\}$ — разбиение отрезка $[0, \tau]$. Положим

$$\Pi_\omega = \Pi_{\delta_1} \Pi_{\delta_2} \dots \Pi_{\delta_n} M,$$

где $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 3. $\tilde{\Pi}_t M = \bigcup_{\omega} \Pi_\omega M$.

Определение оператора Π^t аналогично определению оператора Π_t .

Теорема 1. Пусть M — открытое подмножество множества $\mathbb{R}^d$, $f(z, P, v)$ и $f(z, u, Q)$ — выпуклые множества для каждого (z, v) и (z, u) , соответственно. Тогда справедливо равенство

$$\Pi_t M = \bigcup_{\delta > 0} \Pi^t(M \underset{*}{\delta} H).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
2. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сбор. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
3. Азамов А. О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх // Мат. сбор. 1982. Т. 118, № 3. С. 422–430.
4. Азамов А. Об альтернативе для дифференциальных игр преследования-убегания на бесконечном интервале времени // ПММ. 1986. Т. 50, № 4. С. 564–567.

Connection Between the Basic Operators in Nonlinear Differential Games with Fixed Time

I.M. Iskanadjiev

Tashkent Institute of Chemical Technology,
Tashkent, Uzbekistan, iskan1960@mail.ru

Abstract: The solution of the pursuit problem in nonlinear differential games is based on operator constructions. In this paper, we study the approximative properties of the basic operators of nonlinear differential games with fixed time. In particular, simplified schemes for constructing the lower Pontryagin's operator are proposed. On the basis of these schemes, a connection between the upper and lower operators in nonlinear differential games with fixed time and its application to the pursuit problem are established.

УДК 514.174.2

Об упаковке шаров двух типов в трехмерном неевклидовом пространстве

А.Л. Казаков¹, А.А. Лемперт²

¹ ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, kazakov@icc.ru

² ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, lempert@icc.ru

Аннотация: В статье рассматривается задача оптимальной упаковки двух наборов шаров в многосвязное множество. Количество шаров задано, а их радиусы одинаковы в каждом наборе, но отличаются в разных. Требуется максимизировать радиусы шаров, когда их соотношение фиксировано. Проблема упаковки обычно изучается в случае, когда расстояние между точками является евклидовым, и даже тогда она относится к классу NP-трудных задач. Мы предполагаем, что расстояние определяется с помощью некоторой специальной метрики, которая, вообще говоря, не является евклидовой. Предложен и реализован специальный численный алгоритм, основанный на оптико-геометрическом подходе, который был разработан авторами и ранее использовался только для упаковки шаров одинакового радиуса.

Ключевые слова: оптимальная упаковка шаров, неевклидово пространство, оптико-геометрический подход, многосвязное множество, вычислительный алгоритм.

Задача о построении оптимальных упаковок принадлежит к числу классических математических проблем [1]. История возникновения и исследования данной задачи подробно описана в работе [2].

Отметим, что, хотя проблема упаковки равных сфер в бесконечное пространство решена [3], для случая ограниченного множества она до сих пор остается открытой. Большинство книг и статей посвящены исследованию задач об упаковке в евклидовом пространстве, однако в некоторых случаях требуется использовать другие метрики. В частности, нами рассматривается задача, в которой радиусу шара соответствует минимально возможное время перемещения из центра до ограничивающей его сферы.

Пусть X — трехмерное метрическое пространство, $P \subset X$ — замкнутое многосвязное множество, C_i — шары с центрами в точках $s_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n + m$. Не нарушая общности рассмотрения, будем предполагать, что первые n шаров имеют радиус R_1 , а остальные m — радиус $R_2 = R_1/k$, $k \in \mathbb{R}^+$. Расстояние между точками пространства X определим следующим образом [4]:

$$\rho(a, b) = \min_{G \in G(a, b)} \int_G \frac{dG}{f(x, y)}, \quad (1)$$

где $G(a, b)$ — множество непрерывных кривых, лежащих в X и соединяющих точки a и b , $0 < \alpha \leq f(x, y) \leq \beta$ — непрерывная функция, задающая мгновенную скорость движения в каждой точке множества P .

Необходимо найти вектор $s = (s_1, \dots, s_{n+m}) \in \mathbb{R}^{2(n+m)}$, который обеспечит размещение в области P заданного числа кругов максимального радиуса R_1 (и R_2). Тогда задача имеет вид

$$R_1 \rightarrow \max, \quad (2)$$

$$R_2 = \frac{1}{k} R_1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq 2R_1, \quad \forall i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad (4)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq 2R_2, \quad \forall i, j = \overline{n+1, n+m}, \quad i \neq j, \quad (5)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq R_1 + R_2, \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j = \overline{n+1, n+m}, \quad (6)$$

$$\rho(s_i, \partial P) \geq R_1, \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$\rho(s_j, \partial P) \geq R_2, \quad \forall j = \overline{n+1, n+m}, \quad (8)$$

$$s_i \in P, \quad \forall i = \overline{1, n+m}. \quad (9)$$

Равенство (3) задает отношение радиусов. Неравенства (4)–(6) обеспечивают непересечение шаров, а (7)–(9) — гарантируют, что каждый шар полностью лежит внутри множества P .

Для решения рассмотренной задачи авторы использовали подход, основанный на двух фундаментальных принципах геометрической оптики: Ферма и Гюйгенса, который позволяет эффективно выполнять разбиение множества на зоны Дирихле для широкого класса метрических пространств, включая и евклидово. На основе данного подхода разработаны численные алгоритмы, позволяющие успешно решать задачу об упаковке для неодносвязных множеств, в первую очередь, для неевклидовой метрики (1).

На рис. 1 представлены примеры упаковки в единичный куб двух наборов шаров для случая $f(x, y) = x + y + 1$ и коэффициента $k = 1.5$. Известно [5], что для такой метрики шары сохраняют свою форму, а их центры смещаются в направлении начала координат.

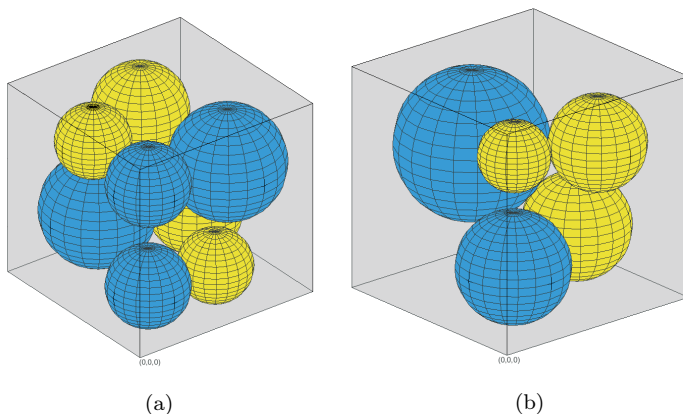


Рис. 1. Упаковка для $n = m = 4$ (a) и для $n = 3, m = 2$ (b).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-00604).

ЛИТЕРАТУРА

1. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. В 2-х томах. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

2. Szabó P.G., Specht E. Packing up to 200 equal circles in a square // Models and Algorithms for Global Optimization. Torn A., Zilinskas Ju. (eds.) NY: Springer, 2007. P. 141–156.
3. Hales T.C. Cannonballs and honeycombs // Notices Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 47. P. 440–449.
4. Казаков А.Л., Лемперт А.А. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // АиТ. 2011. № 7. С. 50–57.
5. Borovskikh A. The two-dimensional eikonal equation // Siberian Math. J. 2006. Vol. 47, no. 2. P. 813–834.

On the Packing of Spheres of Two Types in Three-Dimensional Non-Euclidean Space

Alexander L. Kazakov¹, Anna A. Lempert²

¹ ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia, kazakov@icc.ru

² ISDCT SB RAS, Irkutsk, Russia, lempert@icc.ru

Abstract: The paper deals with the problem of optimal packing of two sets of spheres into a multiply-connected container. The number of spheres is given. The radii of these spheres are equal within each set, but they differ between sets. It is required to maximize the radii of the spheres when their ratio is fixed. The sphere packing problem is usually studied in the case when the distance between points is Euclidean and even then belongs to the class of NP-hard problems. We assume that the distance is determined by means of some special metric, which is not Euclidean. The special numerical algorithm is suggested and implemented. It based on optical-geometric approach, which is developed by the authors and previously used only for packing spheres of equal radius.

УДК 519.626.2

Метод малого параметра в линейно-квадратичной задаче оптимального управления с линейными терминальными ограничениями

А.И. Калинин¹, Л.И. Лавринович²

¹ БГУ, Минск, Беларусь, kalininai@bsu.by

² БГУ, Минск, Беларусь, lavrinovich@bsu.by

Аннотация: Рассматривается задача минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях линейной сингулярно возмущен-

ной системы, в которой на правый конец траекторий наложены линейные ограничения. Строятся асимптотическое субоптимальное программное управление и асимптотически субоптимальная обратная связь в рассматриваемой задаче. Основное достоинство предложенных алгоритмов состоит в том, что при их применении исходная задача оптимального управления распадается на две невозмущенные задачи меньшей размерности.

Ключевые слова: оптимальное управление, обратная связь, линейно-квадратичная задача, малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотические приближения.

1. Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при части производных, принято называть сингулярно возмущенными. Задачи оптимизации таких систем в различных постановках исследовались многими авторами (см. обзор в [1]). Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные задачи оптимального управления распадутся на задачи меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими. Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с подвижным правым концом траекторий.

2. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad (1)$$

$$\mu \dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*, \quad (2)$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, \quad H_2 z(t^*) = g_2, \quad (3)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y' M(t)y + \mu z' L(t)z + u' P(t)u) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y — n -вектор медленных переменных, z — m -вектор быстрых переменных, u — r -вектор управления, g_1, g_2 —

векторы размерностей n_1, m_1 соответственно ($n_1 \leq n, m_1 \leq m$), H_1 и H_2 — матрицы полного ранга, $P(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица, а $M(t), L(t)$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы для всех $t \in [t_*, t^*]$.

Заметим, что задача (1)–(4) является обобщением сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с фиксированным правым концом, которая рассмотрена в [2].

Предположение 1. Действительные части всех собственных значений матрицы $A_4(t)$, $t \in [t_*, t^*]$ отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Введем понятия, которые позволят уточнить то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N -го порядка ($N = 0, 1, 2, \dots$), если оно отклоняется по критерию качества (4) от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $y(t, \mu), z(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, системы (1)–(2) удовлетворяет терминальным ограничениям (3) с точностью того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N -го порядка, если для любого начального состояния (y_*, z_*, t_*) , ($t_* < t^*$), имеет место $u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, — асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в задаче (1)–(4).

Целью исследования рассмотренной задачи является построение асимптотически субоптимальных управлений и обратных связей. Суть применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра множителей Лагранжа, соответствующих в силу принципа максимума [3] оптимальному управлению. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения двух базовых невозмущенных задач оптимального управления с n и m фазовыми переменными

соответственно. Первой из них является вырожденная задача:

$$\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \quad H_1 y(t^*) = g_1,$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_*}^{t^*} (y' M(t)y + u' P(t)u) dt \rightarrow \min,$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$.

Предположение 3. *Динамическая система в первой базовой задаче является управляемой на отрезке $[\tau, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0$ при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ (см. [4]).*

Заметим, что для стационарной динамической системы это предположение эквивалентно требованию [4]

$$\text{rank}(H_1 B_0, H_1 A_0 B_0, \dots, H_1 A_0^{n-1} B_0) = n_1.$$

Вторая базовая задача имеет вид

$$\frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u,$$

$$H_2 z(0) = H_2 A_4^{-1}(t^*)(A_3(t^*)y^0(t^*) + B_2(t^*)u^0(t^*)) + g_2,$$

$$z(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u'(s)P(t^*)u(s)ds \rightarrow \min,$$

где $u^0(t), y^0(t)$ ($t \in [t_*, t^*]$) — соответственно оптимальные управление и траектория в первой базовой задаче.

Предположение 4. *Выполнен критерий относительной управляемости на подпространство:*

$$\text{rank}(H_2 B_2(t^*), H_2 A_4(t^*)B_2(t^*), \dots, H_2 A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)) = m_1.$$

Сделанные предположения гарантируют существование и единственность оптимальных управлений в базовых задачах, которые являются нормальными экстремалиями. При этих предположениях разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N построить асимптотически субоптимальное управление N -го порядка в рассмотренной задаче. Вычислительная процедура алгоритма помимо решения базовых задач включает в себя интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений и нахождение

корней невырожденных линейных алгебраических систем. Заметим что, асимптотическое субоптимальное управление нулевого порядка может быть построено непосредственно после решения базовых задач, поскольку оно представимо в виде

$$u^{(0)}(t, \mu) = u^0(t) + u^*((t - t^*)/\mu), \quad t \in [t_*, t^*],$$

где $u^*(s)$, $s \leq 0$ — оптимальное управление во второй базовой задаче.

Наряду с асимптотическими приближениями к программному оптимальному управлению построена асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка, которая линейна по медленным переменным и не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
2. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2015. Т. 55, № 2. С. 194–206.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

The Small Parameter Method in a Linear-Quadratic Optimal Control Problem with Linear Terminal Constraints

A. Kalinin¹, L. Lavrinovich²

¹ BSU, Minsk, Belarus, kalininai@bsu.by

² BSU, Minsk, Belarus, lavrinovichl@bsu.by

Abstract: The problem of minimizing the integral quadratic functional on the trajectories of a linear singularly perturbed system in which linear constraints are imposed on the right end of the trajectories is considered. Asymptotic suboptimal program control and asymptotically suboptimal feedback in the considered problem are constructed. The main advantage of the proposed algorithms is that in their application the initial optimal control problem is divided into two unperturbed problems of smaller dimension.

Численное построение множеств разрешимости в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания

Л.В. Камнева

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, kamneva@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается задача построения множества разрешимости $G_\vartheta(M)$ первого игрока в линейной антагонистической дифференциальной игре двух лиц с плоским терминальным множеством M , которое является простым (в общем случае, невыпуклым) многоугольником. Множество $G_\vartheta(M)$ строится для “эквивалентной” дифференциальной игры с двумерной фазовой переменной. Множество разрешимости совпадает с сечением в начальный момент времени максимального стабильного моста [3] с терминальным множеством M , а также с сечением множества уровня функции цены при подходящей постановке игры с терминальной функцией платы. Разработан алгоритм численного построения множества разрешимости на основе попятной процедуры [1, 2]. В рамках одного шага попятной процедуры используется алгоритм [4] построения множества разрешимости для дифференциальных игр на плоскости с динамикой простых движений. Работа программы проиллюстрирована тестовым примером.

Ключевые слова: линейная дифференциальная игра, задача сближения “в момент”, множество разрешимости, попятная процедура.

1. Постановка задачи

Пусть дифференциальная игра задана динамикой

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu + Cv, \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \vartheta], \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1)$$

Здесь A — $n \times n$ -матрица, B и C — $n \times 2$ -матрицы, $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограничения на управления первого и второго игроков. Каждое из множеств P и Q — простой выпуклый многоугольник или линейный отрезок на плоскости. Момент ϑ окончания игры фиксирован. На плоскости выделенных двух компонент z_{m_1} и z_{m_2} фазового вектора $z = (z_1, \dots, z_n)^T$ задано терминальное множество $M \subset \mathbb{R}^2$. Цель первого игрока — обеспечить включение $(z_{m_1}(\vartheta), z_{m_2}(\vartheta)) \in M$, цель второго игрока противоположна.

Для построения оптимального управления первого игрока можно использовать процедуру прицеливания [3] на соответствующие множества разрешимости. *Множество разрешимости* определяется как множество всех начальных точек, из которых первый игрок гарантирует достижение M в заданный момент ϑ . Для задачи с плоским терминальным множеством прицеливание может осуществляться в “эквивалентных” координатах $x = (x_1, x_2)^T$ на плоские множества разрешимости для дифференциальной игры с динамикой вида

$$\dot{x}(t) = B^1(t)u + C^1(t)v, \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, \vartheta], \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (2)$$

которая получается из (1) стандартным преобразованием [3] при помощи двух строк матрицы Коши.

Задача состоит в численном построении множества разрешимости в эквивалентных координатах системы (2) при входных данных дифференциальной игры (1).

2. Основной результат

Разработан алгоритм численного построения множества разрешимости $G_\vartheta(M)$ на основе известной попятной процедуры [1, 2]. Заданный отрезок времени $[0, \vartheta]$ разбивается с некоторым шагом, и на каждом промежутке разбиения замораживаются коэффициенты динамики (2). В рамках одного шага попятной процедуры используется алгоритм [4] построения множества разрешимости для дифференциальных игр на плоскости с динамикой простых движений и невыпуклым многоугольным терминальным множеством.

В качестве тестового примера рассматривалась дифференциальная игра из работы [5] с невыпуклым терминальным множеством. Первый игрок управляет действием двух догоняющих, цель которых — минимизация промаха относительно убегающего (второго игрока) в фиксированный момент времени ϑ .

Данные для системы (1) при $n = 9$, полученные на основе динамики трех игроков из раздела 6.5.1 в [5], имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & D \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_2 & D \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & B_2 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ B_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{pmatrix};$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ d_i \\ (1 - d_i)/\tau_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\tau_3 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{0}_{k \times l}$ — $k \times l$ -матрица, состоящая из нулей. Заданы ограничения

$$P = \{(u_1, u_2) : |u_i| \leq \mu_i, \quad i = 1, 2\}, \quad Q = \{(v_1, v_2) : |v_1| \leq \nu, \quad v_2 = 0\}$$

на управления игроков. Исходное неограниченное терминальное множество

$$M_c = \{(z_1, z_4) : \varphi(z_1, z_4) \leq c\}, \quad \varphi(z_1, z_4) = \min\{|z_1|, |z_4|\},$$

заменено ограниченным множеством в виде креста:

$$M = M_c \cap \{(z_1, z_4) : |z_1| \leq r, \quad |z_4| \leq r\}.$$

На рис. 1 показаны границы терминального множества M и множества разрешимости $G_\vartheta(M)$ для $\vartheta = 12$, $\nu = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.9$, $\tau_1 = \tau_2 = 1/0.9$, $\tau_3 = 1$, $d_1 = d_2 = 0.5$, $c = 2$, $r = 145$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-0100410).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боткин Н.Д. Численное построение сечений множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Сб. науч. тр. (ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко). Свердловск, 1984. С. 5–38.
2. Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Сб. науч. тр. (ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко). Свердловск, 1984. С. 127–158.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Kamneva L. Computation of solvability set for differential games in the plane with simple motion and non-convex terminal set // Dyn. Games Appl. 2019. Vol. 9, no. 3. P. 724–750. DOI: 10.1007/s13235-018-00292-x
5. Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S. Zero-Sum Pursuit-Evasion Differential Games with Many Objects: Survey of Publications // Dyn. Games Appl. 2017. Vol. 7, no. 4. P. 609–633. DOI: 10.1007/s13235-016-0209-z

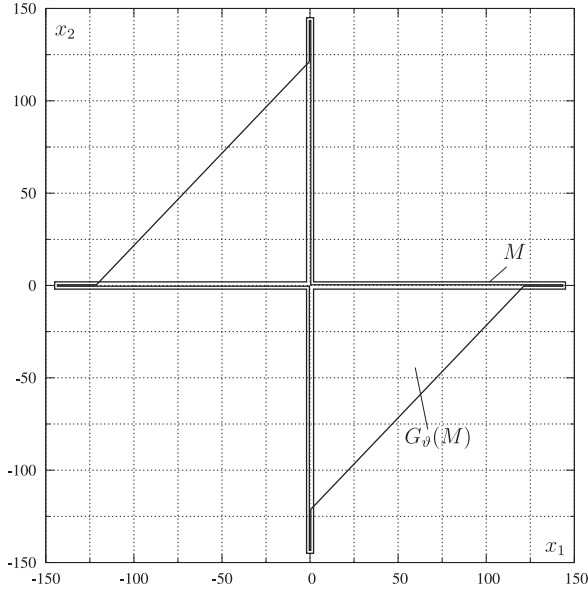


Рис. 1. Множество разрешимости $G_\vartheta(M)$ для $\vartheta = 12$.

Computation of Solvability Set for Linear Differential Games with Fixed Terminal Time

Liudmila V. Kamneva

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia,
kamneva@imm.uran.ru

Abstract: We consider the problem of constructing a solvability set $G_\vartheta(M)$ of the first player in a linear antagonistic two-person differential game with a flat terminal set M , which is a simple (generally non-convex) polygon. The set $G_\vartheta(M)$ is constructed for an “equivalent” differential game with a two-dimensional phase variable. A solvability set coincides with the section at the initial instant of the maximal stable bridge [3] with the terminal the set M , as well as with the section of a level set of the value function with a suitable formulation of the game with terminal payoff function. An algorithm for numerical construction of solvability set based on the backward procedure [1, 2] is developed. In the framework of one step of the procedure, an algorithm [4] for constructing a solvability set for differential games on a plane with the dynamics of simple motion is used. The program is illustrated by an example.

Численное исследование функции максимальной перегрузки в задаче оптимального выведения ракеты-носителя

И.Н. Кандоба¹, И.В. Козьмин², Е.К. Костоусова³

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, kandoba@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, IKozmin@imm.uran.ru

³ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, kek@imm.uran.ru

Аннотация: Обсуждаются вопросы построения допустимых управлений в одной задаче оптимального управления нелинейной динамической системой при наличии ограничений на ее фазовое состояние. Динамическая система описывает управляемое движение ракеты-носителя от точки старта до момента ее выхода на заданную околоземную орбиту. Задача заключается в построении программного управления, которое обеспечивает вывод на орбиту полезной нагрузки максимальной массы и выполнение дополнительных фазовых ограничений. Основное внимание уделяется вопросу построения допустимых управлений, позволяющих в любой момент времени обеспечить успешное возвращение полезной нагрузки (космического аппарата) на Землю. Рассматривается случай неуправляемого баллистического спуска космического аппарата от момента его отделения от ракеты-носителя до соприкосновения с земной поверхностью. Возникающая при таком движении максимальная перегрузка на космический аппарат не должна превышать некоторой априори заданной пороговой величины. При ряде упрощающих предположений определяются параметры математической модели движения ракеты, которые оказывают доминирующее влияние на значение максимальной перегрузки. Определяется функция, определяющая зависимость максимальной перегрузки от значений этих параметров. Численно исследуются ее свойства. На основе установленных свойств функции максимальной перегрузки предлагаются подходы к построению допустимых управлений, позволяющих удовлетворить указанному фазовому ограничению до как можно большей высоты полета ракеты-носителя. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, оптимальное управление, фазовые ограничения, баллистический спуск, максимальная перегрузка.

Введение

Рассматривается задача оптимального выведения ракеты-носителя на заданную околоземную орбиту, которая заключается в построении управления, обеспечивающего доставку на орбиту полезной нагрузки максимальной массы. Эта задача может быть сформулиро-

вана как задача быстрогодействия для нелинейной динамической системы [1]. В ней движение центра масс ракеты на промежутке $[t_s, t_f]$ в нормальном гравитационном поле в некоторой системе координат описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = W(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi), \quad \dot{\vartheta} = u_1, \quad \dot{\psi} = u_2, \quad (1)$$

где $\mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость центра масс ракеты; ϑ, ψ — углы тангажа и рыскания строительной оси ракеты; $W(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \vartheta, \psi)$ — ускорение, которое задается суммой составляющих, определяемых реактивными, аэродинамическими и гравитационными силами; t_s — момент начала движения; t_f — момент выхода ракеты на заданную орбиту.

В качестве управления $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ используется кусочно-непрерывная на $[t_s, t_f]$ вектор-функция, удовлетворяющая

$$|u_1(t)| \leq u_1^{\max}, \quad |u_2(t)| \leq u_2^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]. \quad (2)$$

В момент времени t_s для системы (1) задаются начальные условия, на ее фазовое состояние накладывается ряд ограничений, в том числе и терминальные [1, 2]. Существуют ситуации, когда требуется обеспечить и успешное возвращение полезной нагрузки (космического аппарата) на Землю с любой точки траектории ракеты-носителя. Для этого необходимо, чтобы максимально возможные перегрузки при неуправляемом баллистическом (аварийном) спуске космического аппарата не превышали заданного допустимого значения $\bar{n}_{\max}$. Тогда ограничение на перегрузки может быть записано в виде

$$\max_{\hat{t}_s \in [t_s, t_f]} \max_{t \in [\hat{t}_s, \hat{t}_f]} n(\hat{\mathbf{x}}(t; \hat{t}_s), \hat{\mathbf{v}}(t; \hat{t}_s)) \leq \bar{n}_{\max}, \quad (3)$$

где $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость космического аппарата [3]; $\hat{t}_s \in [t_s, t_f]$ — момент времени его отделения от ракеты-носителя; $\hat{t}_f$ — момент времени соприкосновения космического аппарата с земной поверхностью; $n(\hat{\mathbf{x}}(t; \hat{t}_s), \hat{\mathbf{v}}(t; \hat{t}_s))$ — значение перегрузки [3] в момент времени $t \in [\hat{t}_s, \hat{t}_f]$.

Задача 1. Для управляемой системы (1) с заданными в момент времени t_s начальными условиями найти программное управление $\mathbf{u}$, минимизирующее значение функционала $J[\mathbf{u}(\cdot)] = t_f$ и удовлетворяющее ограничениям (2). При этом должны быть выполнены все ограничения на фазовое состояние системы (1), включая условия (3) на перегрузки при аварийном спуске космического аппарата.

1. Функция максимальной перегрузки

Определим функцию максимальной перегрузки $n_{\max} = \max_{t \in [\hat{t}_s, \hat{t}_f]} n(\hat{\mathbf{x}}(t; \hat{t}_s), \hat{\mathbf{v}}(t; \hat{t}_s), \hat{t}_s) \in [t_s, t_f]$. При некоторых упрощающих задачу предположениях удастся определить параметры, оказывающие доминирующее влияние на значения этой функции.

Теорема 1. Пусть аварийный спуск космического аппарата осуществляется в центральном поле тяготения в предположении, что Земля — это шар радиуса R , без учета вращения Земли и наличия систематического ветра. Тогда $n_{\max} = n_{\max}(H, V, \alpha)$, где $H = \|\hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_s)\| - R$, $V = \|\hat{\mathbf{v}}(\hat{t}_s)\|$, α — угол между $\hat{\mathbf{x}}(\hat{t}_s)$ и $\hat{\mathbf{v}}(\hat{t}_s)$.

Проведено численное исследование свойств функции $n_{\max}(H, V, \alpha)$. В частности, установлено, что точка $\alpha_* = \pi/2$ является точкой минимума функции $n_{\max}(\bar{H}, \bar{V}, \alpha)$ для фиксированных значений $\bar{H} \geq H_*$ и $\bar{V} > 0$, где H_* — высота полета ракеты-носителя, до которой ограничение (3) выполняется автоматически для некоторого субоптимального в задаче 1 управления $\mathbf{u}$, априори построенного [2] без учета этого ограничения.

На основе установленных свойств функции $n_{\max}(H, V, \alpha)$ разработан общий подход к построению в задаче 1 допустимых управлений, позволяющих удовлетворить ограничению (3) на перегрузки на высотах, превышающих H_* . Искомые управления могут быть построены в результате решения серии вспомогательных задач оптимального управления на фиксированных промежутках времени $[t_*, t^*] \subset [t_s, t_f]$, где t_* — момент времени достижения ракетой-носителем высоты H_* , а t^* — последовательно увеличиваемый момент времени, до которого удастся за счет выбора управления в соответствующей вспомогательной задаче удовлетворить ограничению (3). В каждой вспомогательной задаче это ограничение учитывается путем введения в минимизируемый функционал специальных слагаемых со штрафами.

Результаты численного моделирования с использованием реальных данных позволяют сделать общее заключение о применимости предложенного подхода к построению в задаче 1 допустимых управлений, обеспечивающих выполнение ограничения (3) на перегрузки до как можно большей высоты полета ракеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Думиева Т.Д., Костоусов В.Б., Костоусова Е.К., Починский В.И.* Исследование задачи оптимального вывода полезной нагрузки на заданную эллиптическую орбиту // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 57–65.
2. *Мазгалин Д.В.* Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3(46). С. 21–29.
3. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулдзе Ю.Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975. 399 с.

Numerical Investigation of the Maximum G-Force Function in a Problem of Optimal Launch of the Carrier Rocket

I.N. Kandoba¹, I.V. Koz'min², E.K. Kostousova³

¹ IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, kandoba@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, ikozmin@imm.uran.ru

³ IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, kek@imm.uran.ru

Abstract: The issues of constructing admissible controls in a problem of optimal control of a nonlinear dynamic system under state constraints are discussed. The dynamic system under consideration describes the controlled motion of a carrier rocket from the launching point to the time when the carrier rocket enters a given elliptic earth orbit. The problem consists in designing a program control for the carrier rocket that provides the maximal value of the payload mass led to the given orbit and the fulfillment of some additional state constraints. The main attention is paid to the issue of constructing admissible controls, which ensure the successful return of the payload (spacecraft) to the Earth at any time. The case of uncontrolled ballistic descent of a spacecraft from the moment of its separation from the carrier rocket till the contact with the Earth surface is considered. The maximum G-force acting upon the spacecraft arising under such motion should not exceed some a priori specified threshold value. Under a number of simplifying assumptions in the mathematical model of motion, we determine the parameters that have a dominant influence on the maximum G-force value. Then we examine numerically properties of the maximum G-force function as a function of these parameters. On the basis of the established properties of the maximum G-force function we propose approaches to constructing admissible controls satisfying the specified state constraints up to the highest possible altitude of rocket flight. The results of numerical modeling are presented.

Одна гибридная двухшаговая задача динамического управления с тремя участниками

А.Ф. Клейменов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, kleimenov@imm.uran.ru

Аннотация: Динамика управляемой системы описывается уравнениями простых движений на плоскости. На первом шаге (этапе) процесса (от начального момента до некоторого заданного момента) на систему действует управление только первого игрока ($P1$), который решает задачу оптимального управления с заданным терминальным функционалом. В начале второго шага (этапа) процесса игрок $P1$ решает, будут ли участвовать в процессе управления на оставшемся промежутке времени второй ($P2$) и третий ($P3$) игроки, или нет. Если «да», то участвующие игроки разыгрывают неантагонистическую дифференциальную игру двух или трех лиц, в которой в качестве решения берется равновесие по Нэшу, наилучшее по Парето. Если «нет», то игрок $P1$ решает задачу оптимального управления до момента окончания процесса. Исследуется задача наилучшего выбора действий со стороны игрока $P1$.

Ключевые слова: задача оптимального управления, неантагонистическая позиционная дифференциальная игра, нэшевское равновесие.

Постановка задачи

Работа посвящена приложению теории позиционных дифференциальных игр [1, 2] к анализу одного класса гибридных неантагонистических игр [3, 4] и является продолжением работы [5].

Управляемая система описывается уравнениями простых движений на плоскости. Максимальное число участников управляемого процесса (игроков) равно трем (игрок $P1$, игрок $P2$ и игрок $P3$). Игроки действуют в классе позиционных стратегий; движения, порожденные этими стратегиями, определяются аналогично [6].

На первом шаге (этапе) процесса (от начального момента t_0 до заданного момента T , $t_0 < T < \vartheta$) правая часть уравнений движения содержит управляющее воздействие u , $u(t) \in P^0$ только игрока $P1$, который решает задачу оптимального управления на отрезке $[t_0, T]$ с заданным терминальным функционалом выигрыша I_1 .

В начале второго шага (этапа), то есть в момент T , игрок $P1$ должен решить, кто из остальных игроков также будет участвовать

в управляемом процессе на оставшемся промежутке времени $[T, \vartheta]$. Всего у игрока $P1$ имеется 4 варианта выбора: 1°) участвует игрок $P2$; 2°) участвует игрок $P3$; 3°) участвуют оба игрока $P2$ и $P3$; 4°) никто из игроков $P2, P3$ не участвует. Предполагаем, что игрок $P2$ располагает ресурсом управления v , $v(t) \in Q^0$ и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_2 , а игрок $P3$ располагает ресурсом управления w , $w(t) \in S^0$ и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_3 . Предполагаем также, что за участие в управляемом процессе на отрезке $[T, \vartheta]$ вновь вошедшие игроки выплачивают игроку $P1$ платеж в размере $L > 0$ единиц. Заметим, что выигрыши игроков являются трансферабельными [3].

Если игрок $P1$ выбрал вариант 4°), то-есть если никто из игроков $P2, P3$ не участвует, то на отрезке $[T, \vartheta]$ игрок $P1$ продолжает решать задачу оптимального управления; при этом его выигрыш, получаемый в конечной точке $x^0(\vartheta)$ оптимальной траектории $x^0(\cdot)$, обозначим через I_1^0 .

Если игрок $P1$ выбрал вариант 1°), то игроки $P1$ и $P2$ на отрезке $[T, \vartheta]$ разыгрывают неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц, причем в этой игре игрок $P1$ распоряжается выбором управления u уже из другого множества $u(t) \in P$, а игрок $P2$ распоряжается выбором управления v , $v(t) \in Q^0$. При этом множество $P \subset P^0$ выбирается так, что два множества — векторограмма уравнений динамики дифференциальной игры (где $u \in P$, $v \in Q^0$) и векторограмма уравнений динамики задачи оптимального управления (где $u \in P^0$) — совпадают. Полагаем, что игроки выбирают одно из $P(NE)$ -решений [6] игры, порождающее траекторию $x^{(1)}(\cdot)$; значения выигрышей игроков на ней обозначим через $I_1^{(1)}$ для игрока $P1$, и через $I_2^{(1)}$ для игрока $P2$.

Аналогично, если игрок $P1$ выбрал вариант 2°), то игроки $P1$ и $P3$ на отрезке $[T, \vartheta]$ также разыгрывают неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц; значения выигрышей игроков на траектории $x^{(2)}(\cdot)$, порожденной выбранным $P(NE)$ -решением этой игры, обозначим через $I_1^{(2)}$ для игрока $P1$, и через $I_3^{(2)}$ для игрока $P3$.

Утверждение 1. *Игрок $P1$ решает, что игрок Pi , $i \in \{2, 3\}$ участвует в управляемом процессе на промежутке времени $[T, \vartheta]$,*

если имеют место неравенства

$$I_1^{(i-1)} + L > I_1^0, \quad (1)$$

$$I_i^{(i-1)} - L > I_i^0, \quad (2)$$

где I_i^0 — значение функционала I_i в точке $x^0(\vartheta)$.

Неравенство (1) означает, что при участии игрока Pi в управляемом процессе игрок $P1$ получает выигрыш (с учетом полученного платежа в размере L) больший, чем если это участие не состоится. Неравенство (2) означает, что игроку Pi выгодно участвовать в процессе, даже заплатив за это игроку $P1$ платеж в размере L .

Задача 1. Найти траекторию $x^i(\cdot)$, порожденную $P(NE)$ -решением игры двух лиц, и число $L > 0$ такие, что выполняются неравенства (1) и (2).

В общем случае Задача 1 решений не имеет.

Наконец, если игрок $P1$ выбрал вариант 3°), то игроки $P1$, $P2$ и $P3$ на отрезке $[T, \vartheta]$ разыгрывают неантагонистическую позиционную дифференциальную игру трех лиц, причем в этой игре игрок $P1$ распоряжается выбором управления из множества u , $u(t) \in P$, игрок $P2$ распоряжается выбором управления v , $v(t) \in Q^0$, а игрок $P3$ распоряжается выбором управления w , $w(t) \in S^0$. При этом множество $P \subset P^0$ выбирается так, что два множества — векторограмма уравнений динамики дифференциальной игры (где $u \in P$, $v \in Q^0$, $w \in S^0$) и векторограмма уравнений динамики задачи оптимального управления (где $u \in P^0$) — совпадают. В этой игре игроки выбирают одно из $P(NE)$ -решений игры; выигрыши игроков, получаемые в конечной точке $x^{(3)}(\vartheta)$ траектории $x^{(3)}(\cdot)$, порожденной выбранным $P(NE)$ -решением, обозначим через $I_1^{(3)}$ для игрока $P1$, $I_2^{(3)}$ для игрока $P2$, и через $I_3^{(3)}$ для игрока $P3$.

Утверждение 2. Игрок $P1$ решает, что игроки $P2$ и $P3$ участвуют в управляемом процессе на промежутке времени $[T, \vartheta]$, если имеют место следующие два неравенства

$$I_1^{(3)} + L > I_1^0, \quad (3)$$

$$I_2^{(3)} + I_3^{(3)} - L > I_2^0 + I_3^0. \quad (4)$$

Замечание 1. Возможна следующая интерпретация действий игроков на втором шаге (см. также работу [4]). Игрок $P1$ продает часть своих активов за цену L либо игроку $P2$ (вариант 1°), либо игроку $P3$ (вариант 2°), либо игрокам $P2$ и $P3$ (вариант 3°), если такая продажа является взаимовыгодной (оба неравенства хотя бы в одной из систем (1), (2), или в системе (3), (4) выполнены). Если продажа невыгодна (по крайней мере одно из неравенств как в системе (1), (2), так и в системе (3), (4) не выполнено), то она не состоится (вариант 4°).

Для различных наборов значений параметров задачи проведен вычислительный эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. БХВ-Петербург, СПб., 2012.
4. Kort P.M., Wrzaczek S. Optimal firm growth under the threat of entry // Eur. J. Oper. Res. 2015. Vol. 246, no. 1. P. 281–292.
5. Клейменов А.Ф. Принятие решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 123. С. 415–423.
6. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.

A Hybrid Two-Step Problem of Dynamic Control with Three Participants

Anatolii F. Kleimenov

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, kleimenov@imm.uran.ru

Abstract: The controlled system is described by the equations of simple movements on the plane. At the first step (stage) of the process (from the initial moment to some given moment), only the first player ($P1$) controls the system, which solves the optimal control problem with the given terminal functional. At the beginning of the second step (stage) of the process, the first player decides whether the second ($P2$) and third ($P3$) players will participate in the control process for the remaining period of time or not. If yes, then all participating players play a non-antagonistic differential game of two or three persons in which the Nash equilibrium, the best of Pareto, is taken as a solution. If no, then the first player continues to solve the problem of optimal

control until the end of the process. The problem of the best choice of action by the player 1 is solved.

УДК 517.97

О задачах минимаксного типа с векторным критерием

Ю.А. Комаров¹, А.Б. Куржанский²

¹ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, ykomarov94@gmail.com

² МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, kurzahns@mail.ru

Аннотация: Работа посвящена методам решения задач динамической многокритериальной оптимизации. Подобные задачи требуют описания всей границы Парето множества значений векторного критерия и исследования её динамики. Особый интерес представляют динамические системы, содержащие ограниченную помеху в уравнении динамики. В связи со сказанным, представляется полезной разработка метода построения гарантированных оценок для подобных систем. Последнее предлагается в данной работе. Здесь определено понятие векторных минимакса и максмина и приведены основные их свойства. Во второй части работы приводятся достаточные условия выполнения аналога классического неравенства, связывающего эти две границы. В качестве примера рассматривается линейно-квадратичная задача с ограниченной помехой.

Ключевые слова: векторная оптимизация, фронт Парето, минимаксное неравенство, гарантированное оценивание.

1. Основные определения

Паретовский порядок. Рассмотрим отображение $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Определение 1. Будем говорить, что вектор $x \in \mathbb{R}^p$ доминируется вектором $y \in \mathbb{R}^p$ в смысле Парето, если $x \neq y$ и $y_i \leq x_i$, $i = 1, \dots, p$. Это соотношение будем обозначать $y \leq x$.

Определение 2. Векторным минимумом множества значений отображения $F(x)$ будем называть

$$\text{Min } F(x) = \{f_* \in F(x) \mid \nexists x \in X : F(x) \leq f_*\}.$$

Определение 3. Векторным максимумом этого множества будем называть

$$\text{Max } F(x) = \{f^* \in F(x) \mid \nexists x \in X: f^* \leq F(x)\}.$$

Понятие векторных MinMax и MaxMin. Рассмотрим теперь отображение

$$F(u, v) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Всюду далее будем предполагать, что образ $F(U, V)$ удовлетворяет некоторым условиям существования обеих границ Парето — как максимума, так и минимума, например, ограниченности (в смысле рассматриваемого порядка) множества с обеих сторон константами:

$$\exists M_*, M^*: M_* \leq F(u, v) \leq M^* \quad \forall u \in U, v \in V.$$

Доказательство этого факта приводится в [1].

Определение 4. Векторным минимаксом значений отображения $F(u, v)$ на множестве $U \times V$ будем называть

$$\text{Min}_u \text{Max}_v F(u, v) = \text{Min} \left\{ \bigcup_{u \in U} \text{Max } F(u, V) \right\}.$$

Максимум внутри скобок берется по одной переменной $u \in U$ при фиксированных значениях v .

Определение 5. Векторным максмином значений $F(u, v)$ на $U \times V$ будем называть отображение

$$\text{Max}_v \text{Min}_u F(u, v) = \text{Max} \left\{ \bigcup_{v \in V} \text{Min } F(U, v) \right\}.$$

Определение 6. Будем говорить, что произвольные множества $A, B \subset \mathbb{R}^p$ удовлетворяют соотношению

$$A \not\leq B,$$

если $\nexists a \in A, b \in B: a \leq b$.

Определение 7. Основным минимаксным неравенством для паретовского порядка будем называть соотношение

$$\text{Min}_u \text{Max}_v F(u, v) \not\leq \text{Max}_v \text{Min}_u F(u, v). \quad (1)$$

Специфика векторного минимакса такова, что это неравенство, всегда верное в $\mathbb{R}^1$, может не выполняться. Необходимое условие его нарушения устанавливает следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть существуют такие значения отображения $f^* = F(u^*, v^*) \in \text{Min}_u \text{Max}_v F$, $f_* = F(u_*, v_*) \in \text{Max}_v \text{Min}_u F$, что $f^* \leq f_*$. Тогда $\hat{f} = F(u^*, v_*)$ не сравним ни с одним из этих значений: $\hat{f} \not\leq f^*$, $\hat{f} \not\leq f_*$.

2. Постановка линейно-квадратичной задачи управления с векторным критерием

Рассмотрим динамическую систему с помехой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, \vartheta], \\ x_0 &= x^0, \quad u(t) \in \mathcal{P}(t), \quad v(t) \in \mathcal{R}(t), \end{aligned}$$

с векторным критерием

$$\vec{\mathcal{J}}(\vartheta, x, u, v) = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1(\vartheta, x, u, v) \\ \vdots \\ \mathcal{J}_p(\vartheta, x, u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x, N_1 x \rangle + \langle u, M_1 u \rangle - \langle v, P_1 v \rangle \\ \vdots \\ \langle x, N_r x \rangle + \langle u, M_r u \rangle - \langle v, P_r v \rangle \end{bmatrix}.$$

После применения формулы Коши, этот функционал может быть переписан в виде:

$$\mathcal{J}[\vartheta] = \vec{F}(u, v) + \vec{\Phi}(u) + \vec{\Psi}(v).$$

3. Минимакс функционала $\vec{S}(u, v) = \vec{\Phi}(u) + \vec{\Psi}(v)$

Опираясь на неравенство

$$\text{Min}(A + B) = \text{Min}(A + \text{Min } B),$$

полученное в [1], можно доказать справедливость следующего соотношения.

Предложение 2. Для векторного функционала $\vec{S}(u, v) = \vec{\Phi}(u) + \vec{\Psi}(v)$ выполняется основное минимаксное неравенство (1):

$$\text{Min}_u \text{Max}_v (\vec{\Phi}(u) + \vec{\Psi}(v)) \not\leq \text{Max}_v \text{Min}_u (\vec{\Phi}(u) + \vec{\Psi}(v)),$$

если и минимакс, и максмин для него существуют.

4. Минимакс функционала $\vec{G}(u, v) = [\langle u, A_1 v \rangle, \dots, \langle u, A_r v \rangle]^T$

Как показало численное построение, для функционалов указанного вида особенно характерно нарушение основного минимаксного неравенства — имеют место случаи как пересечения двух границ, так и существование регулярных условий, гарантирующих выполнение обратного неравенства. В связи с этим получено следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть для всех $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$ все угловые миноры $M_k[S]$ матрицы

$$S = A_i v v' A_j' + A_j v v' A_i'$$

порядка $k \leq 2$ неотрицательны сразу для всех $v \in (V - V)$, где разность множеств понимается в смысле разности по Минковскому. Тогда имеет место неравенство (1):

$$\text{Min}_u \text{Max}_v \vec{G}(u, v) \not\leq \text{Max}_v \text{Min}_u \vec{G}(u, v). \quad (2)$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия предложения 3. Тогда

$$\forall i \neq j = 1, \dots, r \rightarrow [A_i]_{kl} [A_j]_{kl} \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, m.$$

Замечание 1. Можно показать, что в случае скалярного $u \in \mathbb{R}^1$ или $v \in \mathbb{R}^1$ соотношение (2) обращается в равенство.

Заключение

В ходе проделанной работы был сформулирован векторный аналог минимакса для паретовского порядка, а также аналог максмина. Было установлено, что классическое неравенство, задающее связь между этими границами, в многомерном случае может нарушаться. В связи с этим были исследованы достаточные условия справедливости этого соотношения на примере линейно-квадратичной задачи с ограниченной помехой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-29-04191 офи_м).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куржанский А. Б., Комаров Ю. А. Гамильтонов формализм для задачи управления движением с векторным критерием // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480, № 4. С. 408–412.

On the Problems of Minmax Type under Vector-Valued Criteria

Yu. Komarov¹, Alexander B. Kurzanski²

¹ Lomonosov MSU, Moscow, Russia, ykomarov94@gmail.ru

² Lomonosov MSU, Moscow, Russia, kurzhans@mail.ru

Abstract: This paper is devoted to problems of dynamic optimization under vector-valued criteria. Such problems require a full description of the related Pareto boundary for the set of all values of the vector criteria and also an investigation of the dynamics of such set. Of special interest are problems for systems that also include a bounded disturbance in the system equation. Hence it appears useful to develop methods of calculating guaranteed estimates for possible realizations of related solution dynamics. Such estimates are introduced in this paper. Introduced here are the notions of vector values for minmax and maxmin with the basic properties. In the second part of this work there given are some sufficient conditions for the fulfilment of an analogy of classical scalar inequalities that involve relations between minmax and maxmin. An illustrative example is worked out for a linear-quadratic type of vector-valued optimization with bounded disturbance in the system equations.

УДК 517.977.1

О внешнем и внутреннем полиэдральном оценивании множеств достижимости многошаговых систем с интегральными ограничениями и неопределенностью в матрицах

Е.К. Костоусова

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, kek@imm.uran.ru

Аннотация: В докладе рассматривается задача двустороннего (внешнего и внутреннего) оценивания множеств достижимости многошаговых систем билинейного типа с неопределенностями в начальных условиях,

матрицах и аддитивных воздействиях. Предполагается, что вышеупомянутые неопределенности стеснены заданными параллелепипедозначными, интервальными и интегральными неквадратичными ограничениями соответственно. Множества достижимости рассматриваются в исходном и “расширенном” пространстве. Предлагаются алгоритмы построения внешних и внутренних полиэдральных оценок множеств достижимости в “расширенном” пространстве в виде политопов специального типа и параллелепипедозначных и параллелотопозначных оценок множеств достижимости в исходном пространстве. Оценки находятся по явным формулам из параметрических систем рекуррентных соотношений.

Ключевые слова: множество достижимости, интегральные ограничения, неопределенность в матрице, полиэдральные оценки, параллелепипеды, параллелотопы.

Введение

Решение многих задач управления и оценивания в условиях неопределенности основывается на построении множеств достижимости (МД) и их аналогов [8–10]. Поскольку их точное построение является, как правило, непростой задачей, активно развиваются численные методы, в том числе не слишком трудоемкие, основанные на аппроксимации множеств более простыми областями фиксированной формы, в частности, эллипсоидами, параллелепипедами [1–7, 9, 10]. Работа принадлежит к вышеупомянутому направлению и посвящена построению полиэдральных оценок МД в виде параллелепипедов, параллелотопов и политопов специального типа (определения см. в [2, 3, 6]) для МД следующего класса многошаговых систем, которые можно рассматривать как дискретные аналоги импульсных систем.

Основные результаты

Рассматривается многошаговая система

$$x[j] = A[j]x[j-1] + B[j]u[j] + v[j], \quad j = 1, \dots, N; \quad (1)$$

$$x[0] \in \mathcal{X}_0 \subset \mathbb{R}^n; \quad \sum_{j=1}^N \|u[j]\|_{\infty} \leq \mu_0; \quad (2)$$

$$u[j] \in \mathcal{K}[j] \subseteq \mathbb{R}^r, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь $x[j] \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $v[j] \in \mathbb{R}^n$ — известные воздействия, $B[j] \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ($r \leq n$). Начальное состояние $x[0]$ и входные воздействия $u[j] \in \mathbb{R}^r$ неизвестны, но стеснены ограничениями (2), (3), где $\mathcal{X}_0$ — заданный выпуклый компакт, $\mu_0 > 0$, $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq r} |u_i|$, $\mathcal{K}[j] \subseteq \mathbb{R}^r$ — заданные выпуклые замкнутые конусы. Матрицы $A[j] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ точно не заданы, но удовлетворяют ограничениям

$$A[j] \in \mathcal{A}[j] = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \underline{A}[j] \leq A \leq \overline{A}[j]\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4)$$

интервального типа с известными матричными функциями $\underline{A}[\cdot]$, $\overline{A}[\cdot]$ (матричные неравенства понимаются покомпонентно).

Множеством достижимости $\mathcal{X}[k]$ системы (1)–(4) в момент k называется множество всех таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют x_0 , $u[\cdot]$ и $A[\cdot]$, удовлетворяющие ограничениям (2)–(4) и порождающие решение $x[\cdot]$ системы (1) такое, что $x[k] = x$.

Полезно рассматривать также (подобно [6]) множества достижимости $\mathcal{Z}[k]$ системы в “расширенном” пространстве состояний $z = \{x, \mu\} = (x^\top, \mu)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$, где μ соответствует текущему “запасу” u , удовлетворяет $\mu[j] = \mu[j-1] - \|u[j]\|_\infty$, $j = 1, \dots, N$, и фазовым ограничениям $\mu[j] \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, которые накладываются вместо интегральных ограничений на u из (2). Удобно искать МД $\mathcal{Z}[k]$ в виде объединения их μ -сечений $\mathcal{X}(\mu, k)$: $\mathcal{Z}[k] = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \mu^t[k]} \{\mathcal{X}(\mu, k), \mu\}$. При этом, если начальные состояния удовлетворяют $z[0] = \{x[0], \mu[0]\} \in \mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$, то оказывается, что $\mathcal{X}[k] = \bigcup \{\mathcal{X}(\mu, k) \mid 0 \leq \mu \leq \mu_0\} = \mathcal{X}(0, k)$, $k = 1, \dots, N$.

Предполагается, что начальное множество $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}_0$ является параллелепипедом, а конусы $\mathcal{K}[j]$ таковы, что параллелепипедами являются также множества $\mathcal{R}[j] = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}[j]$, где $\mathcal{C}$ — единичный куб в $\mathbb{R}^r$ с центром в нуле (с помощью таких $\mathcal{K}[j]$ можно задавать условия неотрицательности).

В работе представлены способы построения внешних $\Pi^+[k]$ и внутренних $\Pi^-[k]$ полиэдральных оценок МД $\mathcal{Z}[k]$ в виде политопов $\Pi = \Pi(\{\mathcal{P}^b, 0\}, \{\mathcal{P}^t, \mu^t\}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ специального типа [6], определяемых двумя своими сечениями, соответствующими $\mu = 0$ и $\mu = \mu^t$, посредством операции выпуклой оболочки, причем эти сечения $\mathcal{P}^b$ и $\mathcal{P}^t$ — либо параллелепипеды с одинаковыми матрицами ориентации, либо одинаковые параллелотопы. Выведены рекуррентные соотношения для $\Pi^\pm[k]$, определяющие целые параметрические семейства оценок для $\mathcal{Z}[k]$ и использующие явные формулы для элементарных полиэдральных оценок результатов операций с множествами в $\mathbb{R}^{n+1}$.

С помощью политопов $\Pi^+[k]$ и $\Pi^-[k]$ построены семейства параллелепипедозначных внешних $\mathcal{P}^+[k]$ и параллелотопозначных внутренних $\mathcal{P}^-[k]$ оценок для $\mathcal{X}[k]$. При этом внешние оценки $\mathcal{P}^+[k]$ получается отличными от введенных ранее в [7], и, как показывает численное моделирование, могут оказаться более эффективными.

Для примера приведем описание оценок $\mathcal{P}^-[k]$, где функции $h[\cdot]$ и $\Gamma^i[\cdot]$ служат параметрами, определяющими семейство оценок. Обозначим $\mathcal{G}^{r \times n} = \{\Gamma = \{\gamma_\alpha^\beta\} \in \mathbb{R}^{r \times n} \mid \|\Gamma\| \leq 1\}$, $\|\Gamma\| = \max_{1 \leq \alpha \leq r} \sum_{\beta=1}^n |\gamma_\alpha^\beta|$.

Теорема 1. Пусть $h[j]$ — произвольные числа, удовлетворяющие условиям $h[j] \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, $\sum_{j=1}^N h[j] \leq \mu_0$; $J[k]$ — произвольные перестановки чисел $\{1, 2, \dots, n\}$, $k = 1, \dots, N$; $\Gamma^i[k]$ — произвольные матрицы, такие что $\Gamma^1[k], \Gamma^2[k], \Gamma^3[k] \in \mathcal{G}^{n \times n}$, $\Gamma^4[k] \in \mathcal{G}^{r \times n}$, $k = 1, \dots, N$, а параллелотопы $\mathcal{P}^-[k]$ построены по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{1-}[k] &= \mathcal{P}_{J[k], \Gamma^1[k], \Gamma^2[k]}^-(\mathcal{A}[k] \circ \mathcal{P}^-[k-1]) + v[k], \quad k=1, \dots, N; \\ \mathcal{P}^-[k] &= \mathcal{P}_{\Gamma^3[k], \Gamma^4[k]}^-(\mathcal{P}^{1-}[k] + h[k]B[k]\mathcal{R}[k]), \quad k=1, \dots, N; \quad \mathcal{P}^-[0] = \mathcal{P}_0 \end{aligned}$$

с помощью элементарных внутренних оценок типа $\mathcal{P}_{\Gamma^1, \Gamma^2}^-(\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2)$ и $\mathcal{P}_{J, \Gamma^1, \Gamma^2}^-(\mathcal{A} \circ \mathcal{P})$, описанных в [2, 3]. Тогда $\mathcal{P}^-[k]$ являются внутренними оценками для множеств достижимости $\mathcal{X}[k]$: $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{X}[k]$, $k = 1, \dots, N$.

Предлагаемые оценки могут быть использованы для получения оценок МД импульсных дифференциальных систем [5, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев Б.И., Гусев М.И., Филиппова Т.Ф. Управление и оценивание состояний динамических систем с неопределенностью. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2018.
2. Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 55–74.
3. Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 195–210.
4. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
5. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities // Ural Mathematical Journal. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 45–54.

6. *Koustousova E.K.* External polyhedral estimates for reachable sets of linear discrete-time systems with integral bounds on controls // *Int. J. Pure Appl. Math.* 2009. Vol. 50, no. 2. P. 187–194.
7. *Koustousova E.K.* External polyhedral estimates of reachable sets of linear and bilinear discrete-time systems with integral bounds on additive terms // *Proc. of 14th Int. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference, STAB 2018)*. 2018. P. 1–4. IEEE Xplore Digital Library. DOI: 10.1109/STAB.2018.8408370
8. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
9. *Kurzhanski A.B., Daryin A.N.* Dynamic Programming for Impulse Feedback and Fast Controls. The Linear Systems Case. Ser. Lecture Notes in Control and Inform. Sci. Vol. 468. London: Springer, 2020.
10. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. Ser. Systems & Control: Foundations & Applications. Vol. 85. Basel: Birkhäuser, 2014.

On External and Internal Estimation of Reachable Sets of Discrete-Time Systems with Integral Constraints and Uncertain Matrices

Elena K. Kostousova

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, Russia,
kek@imm.uran.ru

Abstract: The paper considers the problem of two-sided (external and internal) estimation of reachable sets of discrete-time systems of bilinear type with uncertainties in initial states, matrices and additive inputs. It is assumed that the above uncertainties are restricted by given parallelepiped-valued, interval and integral constraints respectively. The reachable sets are considered in an initial space and in an “extended” one. Algorithms are proposed for constructing external and internal estimates for the reachable sets in the “extended” space in the form of polytopes of some special shape and for the reachable sets in the initial space in the form of parallelepipeds and paralleloptopes. All the estimates are calculated by explicit formulas using parametric systems of recurrence relations.

Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях в некоторых критических случаях

А.Я. Красинский

МГУПП, Москва, Россия
МАИ, Москва, Россия, krasinsk@mail.ru

Аннотация: Рассмотрено применение теоремы Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях к системам, характеристическое уравнение которых без учета постоянно действующих возмущений имеет нулевые корни и структура уравнений возмущенного допускает сведение к особому случаю теории критических случаев. Асимптотическая устойчивость установлена за счет дополнительных условий на начальные возмущения критических переменных. Показано, что такой подход применим к задачам устойчивости и стабилизации стационарных движений систем с геометрическими связями при использовании свободных от множителей связей уравнений Шульгина в переменных Рауса.

Ключевые слова: устойчивость, постоянно действующие возмущения, критический случай, принцип сведения, геометрические связи.

В системах с постоянно действующими возмущениями достаточная для применения теоремы Малкина [7] асимптотическая устойчивость в системе без возмущений традиционно устанавливается отрицательностью действительных частей всех корней характеристического уравнения. Если хотя бы один его корень имеет нулевую действительную часть при отрицательности действительных частей остальных корней, получаем критический случай, доказательство асимптотической устойчивости в системе без возмущений в общем случае существенно усложняется. Для специальной категории критических случаев, когда характеристическое уравнение, кроме корней с нулевыми действительными частями, обязательно имеет корни с отрицательными действительными частями, принципом сведения [1, 6, 7] установлены условия, при которых заключение об устойчивости в полной системе следует из рассмотрения так называемой укороченной системы, содержащей только те переменные, которым отвечают критические корни характеристического уравнения.

Результаты принципа сведения сформулированы в переменных, связанных с линейными и нелинейными заменами переменных, вследствие чего в общем случае чрезвычайно сложно переформулировать эти условия в первоначальных переменных. В частности,

для применения теоремы Каменкова [1, с. 134–136] (об устойчивости в особенном случае нескольких нулевых и пар чисто мнимых) необходима сходимость ряда, определяющего нелинейную замену по некритическим переменным, одновременно обнуляющую свободно входящие критические переменные и в присоединенной, и в укороченной системах. В отличие от общей ситуации, развитый аппарат аналитической механики позволяет выделить такие классы задач устойчивости, когда условия применимости результатов принципа сведения могут формулироваться в исходных переменных. За счет выбора форм уравнений движения и типов переменных, установлены [2] достаточные условия неасимптотической устойчивости в системах, в которых структура уравнений возмущенного движения создала возможность выполнения вышеуказанной замены только по части некритических переменных, причем последним соответствовали дифференциальные уравнения второго порядка, в то время, как критическим переменным отвечали уравнения первого порядка специальной структуры, когда в правых частях обязательно присутствовали в виде множителя некритические переменные, по которым нелинейной замены не было.

Такая структура возникает в задачах устойчивости положений равновесия неголономных систем с однородными связями, причем сходимость ряда в нелинейной замене существенно связана с неизолированностью исследуемого движения, вследствие чего имела место неасимптотическая устойчивость по отношению к критическим переменным и той части некритических, по которым проводилась указанная нелинейная замена. Это исключало возможность применения теоремы Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. Отмеченная выше специальная структура уравнений возмущенного движений возникает и в задачах устойчивости положений равновесия голономных систем с геометрическими связями при использовании (свободных от множителей связи) уравнений Шульгина [8] с продифференцированными уравнениями геометрических связей. Но ограничения, накладываемые геометрическими связями на начальные возмущения, позволили доказать [4] асимптотическую устойчивость при отрицательности действительных частей всех ненулевых корней характеристического уравнения. Это делает возможным применение теоремы Малкина к задаче стабилизации движений систем с геометрическими связями при наличии циклических координат, если в качестве постоянно действующих возмущений

рассматривать возмущения циклических интегралов.

Рассмотрим механическую систему с вектором координат $q' = (q_1, \dots, q_{n+m})$, кинетической энергией $T = 1/2 \sum_{\rho, \nu=1}^{n+m} \tilde{a}_{\rho\nu}(q) \dot{q}_\rho \dot{q}_\nu + \sum_{\rho=1}^{n+m} \tilde{a}_\rho(q) \dot{q}_\rho + T_0(q)$, на которую наложены геометрические связи

$$F(q) = 0, \quad F' = (F_1(q), \dots, F_m(q)), \quad \det \left\| \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(q_{n+1}, \dots, q_{n+m})} \right\| \neq 0. \quad (1)$$

и на систему действуют, кроме потенциальных сил с энергией $\Pi(q)$, и непотенциальные $\tilde{Q}_\rho$, соответствующие координатам q_ρ . Введем векторы $q' = (r', s')$; $r = (q_1, \dots, q_n)'$; $s = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$; $\alpha = (q_1, \dots, q_k)'$, $\beta = (q_{k+1}, \dots, q_l)$; $\gamma = (q_{l+1}, \dots, q_n)$, $1 < k < l < n$. Пусть координаты β и γ не входят в уравнения связей, в выражения для кинетической и потенциальной энергий и непотенциальных сил, непотенциальные силы по этим координатам отсутствуют. Вектор β нужен для выделения управляемых циклических координат, если возникнет задача стабилизации, стабилизирующее управление в которой можно определить [3] решением методом Красовского [5] линейно-квадратичных задач для выделяемой подсистемы [2]. Продифференцируем геометрические связи (1) по времени и выразим из полученных соотношений зависимые скорости.

$$\dot{s} = B_\alpha(\alpha, s) \cdot \dot{\alpha}, \quad B_\alpha(\alpha, s) = - \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right). \quad (2)$$

Исходя из функции Рауса $R = T^*(\alpha, s, \dot{r}) - \Pi(\alpha, s) - p'_\beta \dot{\beta} - p'_\gamma \dot{\gamma}$; $p_\beta = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\beta}}$; $p_\gamma = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\gamma}}$, запишем уравнения Шульгина :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial R}{\partial \alpha} = Q_\alpha + B'_\alpha \left(Q_s + \frac{\partial R}{\partial s} \right); \quad p_\beta = 0; \quad p_\gamma = 0; \quad \dot{s} = B_\alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (3)$$

Уравнения (3) допускают стационарное движение

$$p_\beta = p_{\beta 0}, \quad p_\gamma = p_{\gamma 0}, \quad \alpha = \alpha_0, \quad s = s_0. \quad (4)$$

Введем возмущения $p_\beta = p_{\beta 0} + v$, $p_\gamma = p_{\gamma 0} + w$, $\alpha = \alpha_0 + x$, $\dot{\alpha} = x_1$, $s = s_0 + y$, и после замены $z = y - B_\alpha(0) x$ запишем уравнения возмущенного движения в нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{\xi} = N\xi + Vv + Ww + Zz + \Phi^{(2)}(\xi, v, w, z); \\ \dot{z} = B_\alpha^{(1)}(x, z)x_1; \quad \dot{v} = 0; \quad \dot{w} = 0; \quad \xi' = \begin{pmatrix} x' \\ x_1' \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5)$$

Постоянные матрицы коэффициентов известным образом [3, 4] выражены через параметры системы. Если действительные части всех корней характеристического уравнения матрицы N отрицательны, имеем ([4], теорема 1) асимптотическую устойчивость в подсистеме

$$\dot{\xi} = N\xi + Zz + \Phi^{(2)}(\xi, 0, 0, z); \quad \dot{z} = B_{\alpha}^{(1)}(x, z)x_1; \quad (6)$$

несмотря на наличие m нулевых корней. Движение (4) для системы (5), согласно теореме Малкина, устойчиво неасимптотически, поскольку (5) может рассматриваться как подсистема (6) при постоянно действующих начальных возмущениях импульсов $v = v_0, w = w_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. Избр. труды. Т. 2. М.: Наука. 211 с.
2. Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем. // Избранные труды VIII Междунар. семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, ИПУ РАН. 2004. С. 97–103. <http://www.ipu.ru/semin/arhiv/stab04>.
3. Красинский А.Я., Красинская Э.М. Об одном методе стабилизации установившихся движений с нулевыми корнями в замкнутой системе // АиТ. 2016. № 8. С. 85–100.
4. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации установившихся движений механических систем с избыточными координатами // Матер. XII Всерос. сов. по проблемам управления (ВСПУ-2014, Москва, 16–19 июня 2014). 2014. С. 1766–1778.
5. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // В кн. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. С. 475–514.
6. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Второе изд. при редакционном участии Г. Мюнтц, Л.–М: ОНТИ, 1935. 386 с.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 532 с.
8. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Научные труды САГУ. Ташкент, 1958. 183 с.

On Stability under the Permanently Acting Perturbations in Some Critical Cases

A.Ya. Krasinskiy

Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia,
Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, krasinsk@mail.ru

Abstract: The application of the Malkin theorem on stability under permanently acting perturbations to systems, whose characteristic equation without perturbations has zero roots, is being developed.

Анализ равновесных решений в трехмерной динамической аукционной игре

Н.А. Красовский¹, А.М. Тарасьев²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, nkrasovskiy@gmail.com

² ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, tam@imm.uran.ru

Аннотация: В статье развивается подход для динамических игр [1, 3, 5] по поиску точек максимума Парето, которые обладают специальными декомпозиционными характеристиками, наследующими свойства конкурентного равновесия по Нэшу [4]. Рассматривается прототип модели по снижению выбросов в атмосферу эмиссий углекислого газа [6]. Выведены формулы для конкурентного равновесия по Нэшу. Построено множество точек Парето для кооперативных действий игроков. На множестве Парето выделяется точка рыночного равновесия и ставится задача перевода игроков из конкурентного равновесия по Нэшу в эту точку. Для этого построен алгоритм аукционного типа. Алгоритм реализован в виде системы дифференциальных уравнений, правые части которых описывают механизм формирования цен аукциона и наилучших ответов игроков на эти цены. Траектории динамической системы описывают сдвиг игроков от равновесия по Нэшу к множеству Парето. Результаты алгоритма демонстрируются моделью аукционной игры быстрорастущих экономик [2].

1. Описание модели

В работе рассматривается игровая модель, целью которой является сдвиг игроков от конкурентного равновесия к кооперативному максимуму. Модель включает в себя n игроков, которыми могут являться страны — участники соглашения, решающие задачу по снижению эмиссий парниковых газов. Предполагается, что соглашение достигается в процессе пошагового аукционного процесса, который управляется аукционером. Каждая страна i контролирует собственное количество снижения эмиссий $x_i \geq 0$, а также заинтересована в максимизации собственной функции полезности w_i :

$$w_i(x) = -C_i(x_i) + B_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right).$$

Здесь символ $x = (x_1, \dots, x_n)$ — полный вектор снижения эмиссий; $C_i(x_i)$ — функция затрат страны i на снижение эмиссий x_i ;

$B_i(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j)$ — функция экологического эффекта, который получает страна i благодаря общему снижению загрязнения $\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j$ на ее территории, и a_{ji} — коэффициент трансграничного переноса, т. е. часть промышленных выбросов страны j , перенесенных на территорию страны i . Предполагается, что $a_{ji} > 0$ и $\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j \leq 1$.

Модель специфицируется для игровой ситуации между тремя игроками: Китай, Индия и Азиатские страны с быстрорастущими экономиками. Для них идентифицированы квадратичные функции затрат и логарифмические функции экологического эффекта:

$$C_i(x_i) = \frac{e_i}{2}x_i^2 + c_i \quad (i = 1, \dots, 3);$$

$$B_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right) = d_i \ln\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right) \quad (i = 1, \dots, 3).$$

2. Равновесие по Нэшу и множество максимумов Парето

В силу того, что функции полезности строго вогнуты, конкурентное равновесие по Нэшу определяется соотношениями:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x^N) = 0 \quad (i = 1, \dots, 3).$$

Множество точек максимума Парето определяется формулой:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, 3).$$

3. Рыночное равновесие

Определение 1. Назовем рыночным равновесием вектор положительного снижения эмиссий $x^M = (x_1^M, \dots, x_n^M)$, если для каждого игрока i функция $w_i(\lambda x^M)$ ($\lambda > 0$) достигает своего максимума при $\lambda = 1$,

$$x^M = \operatorname{argmax}\{w_i(\lambda x^M) : \lambda > 0\},$$

что эквивалентно

$$\frac{dw_i(\lambda x^M)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Функции наилучших ответов игроков определяются уравнениями:

$$f_i(y_i) = y_i \times \left(\frac{(e_i(x_1^N + x_2^N + x_3^N)(x_i^N + y_i))}{(d_i - e_i y_i(x_i^N + y_i))} - 1 \right) \quad (i = 1, \dots, 3),$$

где переменная y_i обозначает сдвиг от равновесия по Нэшу к точке рыночного равновесия.

Динамика наилучших ответов игроков имеет вид:

$$\begin{cases} dy_1/dt = -f_1(y_1) - y_1 + p_1 y_1, \\ dy_2/dt = -f_2(y_2) - y_2 + p_2 y_2, \\ dy_3/dt = -f_3(y_3) - y_3 + p_3 y_3, \end{cases} \quad (1)$$

где цены p_i заданы уравнениями: $p_i = (y_1 + y_2 + y_3)/y_i \quad (i = 1, \dots, 3)$.

Система уравнений аукциона (1) интегрируется методом Рунге — Кутты.

На рис. 1 изображены точка равновесия по Нэшу NE , множество максимумов Парето PM и траектории алгоритма TR_1, TR_2, TR_3 , стартующие из различных начальных точек и сходящиеся к точке рыночного равновесия, расположенной на множестве Парето.

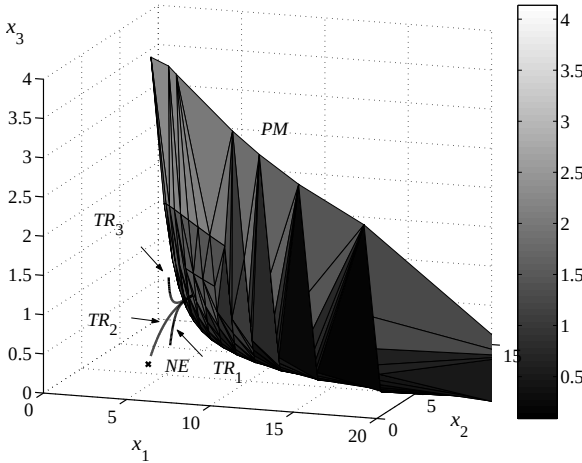


Рис. 1. Траектории динамического аукциона.

Исследование первого автора Н.А. Красовского выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-11-00105).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.А., Кряжиский А.В., Тарасьев А.М.* Уравнения Гамильтона — Якоби в эволюционных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 114–131.
2. *Krasovskii A.A., Taras'ev A.M.* Dynamic optimization of investments in the economic growth models // Autom. Remote Control. 2007. Vol. 501, no. 10. P. 1765–1777.
3. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control Under Lack of Information. Boston etc.: Birkhauser, 1995. 322 p.
4. *Krasovskii N.A., Tarasyev A.M.* Decomposition algorithm of searching equilibria in a dynamic game // Autom. Remote Control. 2015. Vol. 76, no. 10. P. 1865–1893.
5. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game–Theoretical Control Problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 518 p.
6. *Kryazhinskii A., Nentjes A., Shybaiev S., Tarasyev A.* Modeling market equilibrium for transboundary environmental problem // Nonlinear Analysis. 2001. Vol. 47, no. 2. P. 991–1002.

The Analysis of Equilibrium Solutions in Three-Dimensional Dynamic Auction Game

Nikolay A. Krasovskii¹, Alexander M. Tarasyev²

¹ IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, nkrasovskiy@gmail.com

² IMM UB RAS, UrFU, Yekaterinburg, Russia, tam@imm.uran.ru

Abstract: In the paper an approach for dynamic games is developed for the search of maximum Pareto points which possess special decomposition characteristics, that inherits the properties of competitive Nash equilibrium. We consider the prototype of the model on carbon dioxide emissions reduction in the atmosphere. Formulas are derived for competitive Nash equilibrium. The set of Pareto points is constructed for cooperative actions of players. On the set of Pareto there stands out a point of market equilibrium and the problem is posed to shift players from competitive Nash equilibrium to this point. For this shift it is required to construct an algorithm of auction type. The algorithm is implemented as a system of differential equations, right sides of which describe the mechanism of formation of auction prices and players' best replies to these prices. Trajectories of this dynamic system describe the shift of players from Nash equilibrium to Pareto maximum. The results of the algorithm are demonstrated by the model of the auction game of fast growing economies.

Геометрический подход к решению одного класса задач оптимального управления

Д.Р. Кувшинов

УрФУ; ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
kuvshinovdr@yandex.ru

Аннотация: Рассматривается класс задач оптимального управления с динамикой, заданной ОДУ, терминальной функцией платы и фазовыми ограничениями следующего вида: вдоль всякого допустимого движения заданная функция должна достигать максимума на правом конце. Предлагается алгоритм поиска глобального оптимума, основанный на двоичном поиске, в процессе которого решаются вспомогательные задачи управления, имеющие геометрический характер.

Ключевые слова: оптимальное управление, фазовые ограничения, численный метод.

Введение

Рассматриваемая в работе задача возникла как обобщение задачи численного построения решений Штакельберга в классе позиционных дифференциальных игр на основе формализма теории неантагонистических позиционных дифференциальных игр [1], которая, в свою очередь, основывается на формализации и результатах теории позиционных дифференциальных игр, разработанной Н.Н. Красовским и его научной школой. Таким образом, данная работа является продолжением серии работ [2–4].

Численные методы оптимального управления динамическими системами составляют отдельное обширное поле исследования и могут быть разбиты на две большие группы: прямые методы, основанные на сведении задачи оптимального управления к (конечномерной) задаче нелинейного программирования, и методы, базирующиеся на результатах теории оптимального управления, таких как уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана и принцип максимума Понтрягина. Численным методам оптимального управления с фазовыми ограничениями посвящена книга [5].

Предлагаемый в работе подход базируется на конструкции множества достижимости и, по мнению автора, может быть отнесен к прямым методам. Интерес представляет тот факт, что способность

построить достаточно качественную аппроксимацию множества достижимости дает возможность в представленной ниже задаче найти глобальный оптимум.

1. Постановка задачи

Пусть динамика управляемой системы задана уравнением:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^d$ есть фазовый вектор, $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^p$ есть управление, выбираемое из компакта P , $T \in (0, +\infty)$ есть заданный конечный момент времени. Предполагается выполнение стандартных условий существования, единственности и продолжимости решений (1), а также замкнутости множества достижимости для случая измеримых управлений.

Пусть задана непрерывная функция $\gamma(t, x)$. Движение системы (1) $x(\cdot)$ называется допустимым, если оно удовлетворяет фазовому ограничению следующего вида:

$$\forall t \in [0, T] \quad \gamma(t, x(t)) \leq \gamma(T, x(T)). \quad (2)$$

Пусть задана непрерывная функция $\varphi(x)$. Показатель качества определен на допустимых движениях и имеет терминальный вид:

$$J[x(\cdot)] \triangleq \varphi(x(T)) \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \quad (3)$$

2. Подход к решению

Пусть заданы динамика (1) и показатель (3), но допустимыми будем считать движения, которые для некоторого заданного $g \geq g_* \triangleq \gamma(0, x_0)$, удовлетворяют условиям:

$$\gamma(T, x(T)) = g, \quad \forall t \in [0, T] \quad \gamma(t, x(t)) \leq g. \quad (4)$$

Определим следующую функцию:

$$c^{\max}(g) \triangleq \max_{u(\cdot)} \varphi(x(T)), \quad (5)$$

где управления $u(\cdot)$ выбираются такие, что порождаемые ими движения удовлетворяют (4) для аргумента g . Таким образом, вычисление значения $c^{\max}(g)$ эквивалентно решению задачи оптимального

управления стандартного вида, а глобальный максимум $c^{\max}(g)$ на $g \in [g_*, g^*]$, где g^* есть максимальное g , для которого множество допустимых движений не пусто, соответствует решению исходной задачи.

Рассмотрим теперь фазовые ограничения вида:

$$\varphi(x(T)) \geq c, \quad \forall t \in [0, T] \quad \gamma(t, x(t)) \leq g, \quad (6)$$

и показатель качества:

$$J'[x(\cdot)] \triangleq \gamma(T, x(T)) \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \quad (7)$$

Значение максимума показателя (7) на движениях, удовлетворяющих условиям (6), обозначим функцией параметров g и c :

$$g^{\max}(g, c) \triangleq \max_{u(\cdot)} \gamma(T, x(T)). \quad (8)$$

Определим рекуррентную последовательность:

$$g_c^0 \triangleq g^*, \quad g_c^i \triangleq g^{\max}(g_c^{i-1}, c). \quad (9)$$

Лемма 1. Пусть c таково, что множество $\mathcal{G} = \{g \in [g_*, g^*] \mid g^{\max}(g, c) = g\}$ не пусто. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} g_c^i = \max \mathcal{G}$.

Лемма 2. Пусть c таково, что множество $\mathcal{G}$, определенное в лемме 1, пусто. Тогда найдется $i \in \mathbb{N}$ такое, что либо g_c^i не определено (множество движений, по которым берется максимум, пусто), либо $g_c^i < g_*$.

Леммы 1 и 2 позволяют построить алгоритм, проверяющий, достигим ли заданный уровень c показателя качества (3) исходной задачи, и таким образом, организовать поиск глобального оптимума с заданной точностью в форме двоичного поиска.

Введем имеющую геометрический характер вспомогательную задачу управления (показатель качества отсутствует). В этой задаче динамика задана (1), а фазовые ограничения заданы условиями:

$$\gamma(T, x(T)) \geq y, \quad \varphi(x(T)) \geq c, \quad \forall t \in [0, T] \quad \gamma(t, x(t)) \leq g. \quad (10)$$

Ее решение — любое движение, удовлетворяющее (10) или факт отсутствия таких движений. Используя решатель данной задачи,

несложно записать процедуры вычисления с заданной точностью $c^{\max}(g)$ (5) и $g^{\max}(g, c)$ (8), а также общий алгоритм решения исходной задачи (1)(2)(3). Следует отметить два факта. Во-первых, вычисление последовательности (9) необязательно начинать с g^* — можно начинать с предела, вычисленного для некоторого меньшего значения параметра c . Во-вторых, при достижении малых значений $g_c^{i-1} - g_c^i$ можно взять $c^{\max}(g_c^i)$ в качестве следующей новой оценки снизу максимума показателя качества. Данное значение может быть очень близким к c . В этом случае следующее проверяемое значение c следует взять не посередине между оценками сверху и снизу, а существенно ближе к оценке снизу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.
2. Кувшинов Д.Р., Осипов С.И. Численное построение решений Штакельберга в линейной позиционной дифференциальной игре на основе метода многогранников // Автомат. и телемех. 2018. № 3. С. 111–126.
3. Осипов С.И. О реализации алгоритма построения решений для класса иерархических игр Штакельберга // Автомат. и телемех. 2007. № 11. С. 195–207.
4. Kuvshinov D.R., Osipov S.I. Numerical Stackelberg solutions in a class of positional differential games // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 32. P. 326–330.
5. Pytlak R. Numerical methods for optimal control problems with state constraints. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 223 p.

A Geometric Approach to a Class of Optimal Control Problems

Dmitrii R. Kuvshinov

Yeltsin Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia;
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia,
kuvshinovdr@yandex.ru

Abstract: A global optimum search algorithm is proposed for a class of optimal control problems which have ODE dynamics, terminal functional and state constraint in the following form: along any admissible motion a given function must reach maximum at the right end. The algorithm is based upon binary search in the course of which auxiliary control problems of geometrical nature are being solved.

Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления

Н.В. Кузнецов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
n.v.kuznetsov@spbu.ru

Аннотация: Обзор посвящен теории скрытых колебаний, отражающей современный этап развития теории колебаний А.А. Андропова, и ее приложениям к анализу систем управления, механических и электромеханических моделей.

Ключевые слова: теория скрытых колебаний, контрпримеры к гипотезам Айзермана и Калмана об абсолютной устойчивости систем управления Лурье, модель Келдыша подавления флаттера, электронные цепи Чуа, система фазовой автоподстройки.

Введение

Математическое моделирование динамики и определение устойчивости в технических системах является актуальнейшим направлением в научном и технологическом развитии любого государства, которое стремится занять лидирующие позиции в современном мире. Изучение предельных динамических режимов и устойчивости необходимо как в классических теоретических, так и в актуальных практических задачах.

Систематическое изучение предельных колебаний (аттракторов) и критериев их отсутствия в прикладных динамических системах связано с работами научной школы А.А. Андропова. Соединив математические идеи анализа локальной устойчивости А.М. Ляпунова и возникновения колебаний А. Пуанкаре, им была создана математическая теория колебаний, объясняющая поведение многих инженерных систем [1].

Эта теория позволила изучать возникновение предельных периодических колебаний, а также получать необходимые и достаточные условия отсутствия колебаний и глобальной устойчивости для систем невысокого порядка. Одним из ярких результатов А.А. Андропова в этом направлении являются строгий нелокальный анализ

нелинейной модели регулятора Уатта с сухим трением и доказательство достаточности условий локальной устойчивости Вышнеградского [2] для глобальной устойчивости и отсутствия нежелательных колебаний (существование отрезка покоя, притягивающего траектории из любых начальных данных) [3].

Эта работа А.А. Андропова стала ответом на публикации, в том числе выдающегося российского ученого Н.Е. Жуковского [4], критиковавшие подход И.А. Вышнеградского и ставившие под сомнение его выводы. Отметим, что дальнейшее развитие результатов Вышнеградского-Андропова до сих пор остается актуальным для современных регуляторов турбин, как показала недавняя авария на Саяно-Шушенской ГЭС и анализ ее возможных причин [5].

Задачи анализа многомерных динамических моделей и получения необходимых и достаточных условий глобальной устойчивости, в том числе гарантирующих отсутствие хаотических колебаний, показали необходимость дальнейшего развития теории колебаний А.А. Андропова и создания новых аналитических и численных методов анализа устойчивости и колебаний. Современные вычислительные средства позволяют численно анализировать возникновение колебаний в динамических системах. В общем случае колебание в динамической системе может быть легко вычислено, если начальные данные из его окрестности соответствуют притягиваемым к нему траекториям. Классический инженерный анализ устойчивости и предельных колебаний в системе заключается в определении состояний равновесия, аналитическом определении их локальной устойчивости, а затем численном анализе поведения траекторий с начальными данными в окрестности неустойчивых состояний равновесия. Такой анализ позволяет показать притяжение траекторий из окрестности неустойчивых состояний равновесия к устойчивым состояниям равновесия – тривиальным аттракторам, или выявить колебательные аттракторы.

1. Основной результат

Однако в рамках классического инженерного подхода открытым оставался вопрос: могут ли существовать в системе аттракторы, к которым не притягиваются траектории из окрестностей состояний равновесия? В работах [6–8] была предложена следующая классификация аттракторов динамических систем: аттрактор называется

скрытым, если область его притяжения не соприкасается с неустойчивыми состояниями равновесия, в противном случае аттрактор называется самовозбуждающимся. Эта классификация отразила экспериментальный подход к анализу возникновения самовозбуждающихся колебаний и численные методы поиска аттракторов, а также стала катализатором открытия новых скрытых аттракторов в известных системах. В то время как самовозбуждающиеся аттракторы (*self-excited attractors*) могут быть легко обнаружены и визуализированы в численных экспериментах траекториями с начальными данными из окрестностей неустойчивых состояний равновесия, скрытые аттракторы (*hidden attractors*) не связаны с состояниями равновесия и их области притяжения “скрыты” в фазовом пространстве системы. Поэтому численный поиск скрытых аттракторов и определение начальных данных для их визуализации в общем случае является нетривиальной задачей. Анализ существования скрытых аттракторов позволяет определять точные границы глобальной устойчивости состояний равновесия и оценивать зазор между необходимыми и достаточными условиями глобальной устойчивости [9–11].

Скрытые аттракторы связаны с исследованиями эффекта Зоммерфельда застревания частоты вращения ротора, динамических моделей буровых установок, подавления флаттера в моделях Келдыша, гипотез Айзермана и Калмана об абсолютной устойчивости нелинейных систем управления, систем управления генераторами на основе фазовой автоподстройки, электронных генераторов Чуа, 16-ой проблемы Гильберта, а также многих других фундаментальных и прикладных задач [12–16].

Работа поддержана грантом Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки Ведущих научных школ Российской Федерации на 2018-2019 годы (НШ-2858.2018.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ, 1937. [English transl.: Andronov A.A., Chaikin S.E. Theory of Oscillations. Princeton University Press. 1949].
2. Вышнеградский И.А. О регуляторах прямого действия // Изв. Санкт-Петербургского технологического института, 1:21–62, 1877.
3. Андронов А.А., Майер А.Г. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования // Доклады АН СССР. 1945. Т. 47, № 5. С. 345–348
4. Жуковский Н.Е. Теория регулирования хода машин. Часть 1. Типо-литогр. Т-ва И.Н. Кушнерев и Ко. 1909.

5. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Соловьева Е.П.* Математическая модель гидротурбины, генератора и системы управления Саяно-Шушенской ГЭС // Доклады Акад. наук. 2016. Vol. 466. С. 654–659.
6. *Кузнецов Н.В.* Аналитико-численные методы анализа скрытых колебаний. Дисс. докт. физ.-матем. наук. Санкт-Петербургский государственный университет, 2016.
7. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V.* Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 2013. Vol. 23, no. 1. Art. no. 1330002.
8. *Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 3–36.
9. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1959.
10. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
11. *Геллиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. Наука, 1978.
12. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В.* Прямой метод вычисления ляпуновских величин двумерных динамических систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 119–126
13. *Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Prasad A.* Hidden attractors in dynamical systems // Phys. Rep. 2016. Vol. 637. P. 1–50.
14. *Kuznetsov N.V.* Theory of hidden oscillations (plenary lecture) // 5th IFAC Conf. on Analysis and Control of Chaotic Systems, 2018.
15. *Кузнецов Н.В.* Теория скрытых колебаний // Материалы пленарных заседаний 11-й Российской мультиконференции по проблемам управления. СПб.: АО Концерн ЦНИИ Электроприбор, 2018.
16. *Кузнецов Н.В.* Теория скрытых колебаний и устойчивость систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. [в печати].

Theory of Hidden Oscillations and Stability of Control Systems

Nikolay V. Kuznetsov

St. Petersburg State University, Russia,
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of
Sciences (IPME RAS), St. Petersburg, Russia,
n.v.kuznetsov@spbu.ru

Abstract: The need to study stability and limiting dynamic regimes (limiting oscillations) arises in various classical theoretical and practical problems. This report is devoted to the theory of hidden oscillations, which represents the genesis of the modern era of Andronov’s theory of oscillations, and its applications to classical problems and applied problems.

Бесконфликтное слияние потоков самолетов в аварийных ситуациях

С.И. Кумков¹, С.Г. Пятко², М.М. Овчинников¹

¹ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,

²ООО «Фирма НИТА», Санкт-Петербург, Россия

kumkov@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматриваются алгоритмы управления очередью воздушных судов при слиянии их потоков на веерных схемах в зонах подхода и захода на посадку в условиях появления аварийного (или внеочередного) судна. Такое судно необходимо без дополнительной задержки — максимально быстро — довести до точки слияния потоков. При этом возможно наведение конфликтных ситуаций (опасных сближений) этого судна с другими воздушными судами. Разработанные алгоритмы обеспечивают бесконфликтное и оптимальное по минимуму времени задержки управление слиянием потоков как в нормальной воздушной обстановке, так и при появлении одного или нескольких внеочередных судов одновременно. Бесконфликтное вписывание аварийного ВС реализуется устранением его возможных конфликтных ситуаций с другими судами путём задержки или ускорения этих конфликтующих судов. В случае невозможности разрешения конфликтов («тупиковые» ситуации) осуществляется направление одного или двух обычных судов в зону задержки. Результаты работы алгоритмов предоставляются диспетчеру в форме рекомендации для обоснованного принятия им решений по выдаче команд управления экипажам судов. Алгоритмы предназначены для использования в диспетчерских тренажерах и перспективных автоматизированных системах управления воздушным движением. Приводится компьютерная анимация процессов управления.

Ключевые слова: воздушные суда, аварийное судно, бесконфликтное слияние потоков, оптимальное управление, алгоритмы.

1. Постановка задачи

Принята [2, 3] следующая идеология организации и реализации управления очередью при появлении аварийного (или внеочередного) воздушного судна (ВС).

1) Полагается, что аварийное ВС появляется на контроле во входной точке основной траектории своего потока.

2) Это судно без задержки максимально быстро доводится до точки слияния веерной схемы этого потока [4–6].

3) Выявляются возможные конфликтные ситуации аварийного ВС с парой ближайших (по прогнозируемым моментам выхода в точку слияния) судов очереди: перед и после прогнозируемого момента выхода аварийного судна в точку слияния.

4) Устранение обнаруженных конфликтных ситуаций выполняется необходимой задержкой или ускорением впереди идущего или задержкой сзади идущего ВС. В случае невозможности реализации необходимой величины «окна» для аварийного судна, впереди идущее ВС или сзади идущее ВС выводятся из очереди и направляются в зону предварительной задержки.

5) Алгоритмы гарантируют выполнение следующих технических требований [2, 3]:

— продольное временное эшелонирование судов над точкой слияния веерной схемы выдерживается не менее безопасного временного интервала $\tau_{\text{без}}$;

— при вписывании в посадочную очередь аварийного судна величины задержек судов всех остальных потоков реализуются минимально необходимыми.

Управляемое движение воздушных судов описывается стандартной системой дифференциальных уравнений шестого порядка [1]

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \psi + W_{\text{в},x}, \quad \dot{z} = V \cos \theta \sin \psi + W_{\text{в},z}, \quad \dot{y} = V \sin \theta + W_{\text{в},y},$$

$$\dot{\theta} = \beta_1/V u_{\text{в}}, \quad \dot{\psi} = \beta_2/V u_{\text{б}}, \quad \dot{V} = a,$$

$$|u_{\text{в}}| \leq 1, \quad |u_{\text{б}}| \leq 1, \quad a_{\min} \leq a \leq a_{\max}, \quad a_{\min} < 0, \quad a_{\max} > 0.$$

Здесь x — ордината положения ВС по оси OX (м), ось направлена на Север; z — абсцисса положения ВС по оси OZ (м), ось направлена на Восток; y — высота (м), аппликата положения ВС по оси OY , ось направлена по вертикали; плоскость XOZ горизонтальна; плоскость XOY вертикальна; V — пространственная приборная скорость (м/с); $W_{\text{в},x}$, $W_{\text{в},z}$, $W_{\text{в},y}$ — компоненты вектора скорости ветра по каждой из координатных осей; θ — скоростной угол (рад), угол вектора приборной скорости относительно горизонтальной плоскости XOZ , направление отсчёта угла — вверх от плоскости XOZ ; ψ — курсовой угол (рад), угол между проекцией вектора пространственной приборной скорости на горизонтальную плоскость и осью OX , угол отсчитывается в горизонтальной плоскости XOZ по часовой стрелке от оси OX ; β_1 , β_2 — максимальные величины допустимых вертикального и бокового ускорений судна (м/с²). Управляющими

факторами являются продольное a , вертикальное u_v и боковое u_b ускорения, на величины которых наложены соответствующие ограничения.

Задача состоит в создании алгоритмов, обеспечивающих безопасное «окно» для пролета аварийного ВС путем задержки или ускорения судов, конфликтующих с аварийным.

2. Результаты моделирования работы алгоритмов

На рис. 1 показан пример организации воздушного движения в а/п Внуково Московской воздушной зоны. Для анализа обстановки и обоснованного принятия решения по управлению судами вся информация выводится диспетчеру в изображенном диалоговом окне. Отмечены: маршруты полетных планов трех потоков, их зоны предварительного ожидания, веерная схема точного управления задержкой судов, точка общего слияния потоков. Отдельно указан маршрут скорейшего движения аварийного судна в точку слияния потоков. Цветными линиями условно указаны траектории движения судов после выполнения ими задержек на зонах ожидания и дугах ожидания веерной схемы. Направления движения судов отмечены маркерами «самолетик». На вставке (рис. 1) приведен пример: а) возникших конфликтных ситуаций между аварийным ВС и обычными судами BC_i и BC_{i+1} в уже сформированной очереди; б) разрешения этих ситуаций направлением BC_i в зону задержки и задержкой BC_{i+1} на необходимую величину $\tau_{зд}$.

Работа алгоритмов слияния всех потоков при появлении аварийных судов иллюстрируется программой **Alarm_b**.

Работа выполнена при поддержке Комплексной Программы УрО РАН 18-1-10-10.

ЛИТЕРАТУРА

1. *ГОСТ 20058-80*. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Госстандарт, 1980.
2. *Королев Е.Н.* Технологии работы диспетчеров управления воздушным движением. М.: Воздушный транспорт, 2000.
3. *Пятко С.Г., Красов А.И.* (Ред.) Автоматизированные системы управления воздушным движением. Санкт-Петербург: Политехника, 2004. 446 с.
4. *Boursier L., Favennec B., Hoffman E., and others.* Merging Arrival Flows without Heading Instructions // Proc. of the USA/Europe air traffic management R&D seminar, Barcelona, Spain, July, 2007.

5. *Report: Air Traffic Management Technology Demonstration-1 (ATD-1) / NASA Report FS-2011-10-01-ARC. 2011.*
6. *Report: Point Merge Integration of Arrival Flows Enabling Extensive RNAV Application and Continuous Descent. Operation Services and Environment Definition / Report, Eurocontrol Experimental Center, Bretigny-sur-Orge.*

Non-Conflict Merging Aircraft Flows under Alarm Situations

S.I. Kumkov¹, S.G. Pyatko², M.M. Ovchinnikov¹

¹IMM UrB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation,

²NITA, Llc., St. Petersburg, Russian Federation
kumkov@imm.uran.ru

Abstract: The paper deals with algorithms for control of merging the flows of aircrafts on the point-merge schemes in zones of approach and ones of landing preparation under situations of appearing the aircrafts with alarm signals or ones demanding out-of-queue landing. Such aircrafts have to be directed just to the point of landing beginning for the minimal time, *i.e.*, without delay. Such direction of the aircraft can cause conflict situations (danger closing) with other aircrafts. The elaborated algorithms provide the non-conflict and time-optimal (with the minimal necessary delay of all the aircrafts) control both in the normal situations and under presence of one or several aircrafts with the alarm signals. The non-conflict merging the alarm aircraft is implemented by resolving possible conflict situations by delay or acceleration of other aircrafts. If such techniques do not resolve the conflict situations (the dead-lock ones), then aircrafts making the conflict with the alarm one are directed by controlling operator to the waiting zone. Under this, maximum two such aircrafts are exposed to such directions. Results of the algorithms' operation are presented to the air traffic controller as recommendations for making verified decision on commands for all aircrafts. The algorithms are aimed for application in perspective automated air traffic control systems and trainer-simulators. Computer animation of control processes is presented.

УДК 517.954

Маркеры псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для одного класса уравнений Гамильтона — Якоби

П.Д. Лебедев¹, А.А. Успенский²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, pleb@yandex.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, uspen@imm.uran.ru

Аннотация: Развиваются аналитические и численные подходы к построению сингулярных множеств минимаксных решений плоской задачи Ди-

рихле для одного класса уравнений Гамильтона — Якоби. Подходы базируются на выявлении псевдовершин — особых точек краевого множества, определяющих наличие сингулярности у решения. Каждой псевдовершине границы краевого множества соответствует числовой маркер — скалярная величина, характеризующая порядок гладкости границы в этой точке, и определяющая геометрию ветви сингулярной кривой — одномерного многообразия, на котором «рвется» градиент решения. Приводятся значения маркеров для ряда случаев, отличающихся друг от друга порядком гладкости границы краевого множества. Предъявляются примеры решения задач управления по быстродействию, демонстрирующие возможности развиваемых подходов.

Ключевые слова: управление, быстродействие, уравнение Гамильтона — Якоби, маркер, псевдовершина, краевое множество, сингулярное множество.

Введение

Необходимость создания теоретических процедур и вычислительных алгоритмов построения решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка (УЧППП) и уравнений Гамильтона — Якоби (УГЯ) продиктована потребностями механики, геометрической оптики, теории оптимального управления, дифференциальных игр, сейсмологии, экономики и других отраслей знания. Проблема построения нелокальной теории для таких уравнений, решения которых в общем случае не являются гладкими функциями, снимается введением соответствующей концепции обобщенного решения [5, 7, 14]. Концепция минимаксного решения [7] базируется на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [4] и показала свою эффективность при разработке теоретических методов и аппроксимационных процедур построения решений различных классов краевых задач для УЧППП и УГЯ, в частности, при решении прикладных задач управления и в дифференциальных играх (см., например, [6]).

Одной из таких задач является задача оптимального управления по быстродействию, которая рассматривается в контексте краевой задачи Дирихле для УГЯ:

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$. Краевое условие (2) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого мно-

жества $M \subset \mathbb{R}^2$. При этом $\Gamma = \gamma(t)$, где $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение числового отрезка $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$, $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$, на плоскость. Кривая Γ не имеет точек самопересечения, может содержать конечное число точек негладкой склейки и является регулярной в точках дифференцируемости. Минимаксное решение $u = u(x, y)$ задачи (1), (2) совпадает с функцией оптимального результата для соответствующей задачи управления по быстродействию [12].

1. Методы решения краевой задачи

Разрабатываются процедуры выявления и построения сингулярных множеств решений УГЯ, использующие аппарат частичных пределов многоточечных дифференциальных отношений [8], дискриминантные преобразования [1], аппроксимативную технику струй [2], множества симметрии [3], конструкции теории альфа-множеств [3]. В рамках развиваемой теории предполагается существование скалярного локального диффеоморфизма как решения уравнения, связывающего дифференциальный оператор краевой задачи (1), (2) и геометрию границы краевого множества, при этом удовлетворяющего свойствам (подробнее, см. [10, 11]):

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0,$$

(A3) существует маркер $c(\gamma(t_0)) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1)$ псевдовершины $\gamma(t_0) \in \Gamma$.

Невышуклость краевого множества влечет негладкость решения задачи (1), (2). Отыскание псевдовершин краевого множества и их маркеров — необходимое звено построения сингулярного множества. Показывается, что значимый диапазон значений порядка гладкости, влияющий на величину маркера псевдовершины, изменяется от 0 до 3. Это означает, в частности, что псевдовершина границы множества с порядком гладкости выше 3 выявляется также, как и в случае псевдовершины с порядком гладкости 3. В указанной ситуации значения маркеров псевдовершин не меняются (см. [10]):

$$c(\gamma(t_0)) = -1,$$

здесь псевдовершина $\gamma(t_0) \in \Gamma$ имеет порядок гладкости не меньше 3.

Представляет интерес определение значения маркера псевдовершины $\gamma(t_0) \in \Gamma$ для случая, когда классическая кривизна $k(t_0)$ в точке $\gamma(t_0) \in \Gamma$ определена, но при этом не является гладкой функцией от параметра, задающего границу целевого множества. Указанный случай, когда порядок гладкости в псевдовершине равен 2, ценен установленной связью задач различных разделов математики — рассматриваемой краевой задачи для УГЯ и задачи алгебры многочленов.

Теорема 1. *Если $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\Gamma = \gamma(t)$, ограничивающей краевое множество M в задаче Дирихле (1), (2), определены односторонние производные кривизны $k'(t_0 - 0)$ и $k'(t_0 + 0)$, $k'(t_0 - 0) \neq k'(t_0 + 0)$, $k'(t_0 + 0) \neq 0$, то числовой маркер $c(\gamma(t_0))$ равен неположительному корню уравнения*

$$k'(t_0 + 0)c^3 - 3k'(t_0 + 0)c^2 + 3k'(t_0 - 0)c - k'(t_0 - 0) = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 18-01-00264_а и 18-31-00018 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: «Фазис», 1996. 334 с.
2. Брекер Т, Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977. 206 с.
3. Брус Дэс., Дэжблмн П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Кружков С.Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала, I // Матем. сборник. 1975. Т. 98, № 3. С. 450–493.
6. Папаков Г.В., Тарасьев А.М., Успенский А.А. Численные аппроксимации обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 4. С. 570–581.
7. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.
8. Успенский А.А. Производные в силу диффеоморфизмов и их приложения в теории управления и геометрической оптике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 252–266.
9. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрого действия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.

10. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
11. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2018. Т. 28, № 1. С. 59–73.
12. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
13. *Ушаков В.Н., Успенский А.А.* Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26. № 1. С. 95–120.
14. *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.

Markers of Pseudo-Vertices of a Boundary Set in the Dirichlet Problem for One Class of Hamilton—Jacobi Equations

Pavel D. Lebedev¹, Alexandr A. Uspenskii²

¹ IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, pleb@yandex.ru

² IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, uspen@imm.uran.ru

Abstract: Analytical and numerical approaches are developed for constructing singular sets of minimax solutions of the plane Dirichlet problem for one class of Hamilton—Jacobi equations. The approaches are based on identifying pseudo-vertices—singular points of the boundary set that determine the presence of a singularity in the solution. Each pseudo-vertex of the boundary of the boundary set corresponds to a numerical marker—a scalar quantity characterizing the order of smoothness of the boundary at this point, and defining the geometry of the branch of a singular curve—a one-dimensional manifold on which the gradient of the solution “breaks”. The values of markers are given for a number of cases that differ from each other in the order of smoothness of the boundary of the boundary set. Examples are presented of solving performance control problems, demonstrating the capabilities of the approaches being developed.

Итерационная процедура построения оптимальных упаковок в невыпуклые плоские фигуры

П.Д. Лебедев¹, А.А. Успенский², В.Н. Ушаков³

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, pleb@yandex.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, uspen@imm.uran.ru

³ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, ushak@imm.uran.ru

Аннотация: Изучается задача о построении оптимальных упаковок из заданного числа конгруэнтных кругов в плоскую невыпуклую фигуру M . Критерием оптимальности считается минимизация радиуса r кругов. Предложен и реализован алгоритм численного построения упаковки, основу которого составляет итерационная минимизация функций, задающих максимальный радиус элемента упаковки с центром в текущей точке при фиксированных координатах всех остальных. Доказана теорема о существовании направления максимального роста этих функций.

Ключевые слова: упаковка, максимизация, супердифференциал, выпуклое множество.

Введение

При решении задач управления [2] часто требуется выполнять подмену целевых множеств или связанных с ними конструкций, например, множеств достижимости, наборами из унифицированных элементов. Одним из вариантов внутренней аппроксимации служит так называемая упаковка множества [4]. Ранее авторы изучали её построение для выпуклых фигур, но особенно сложной и в то же время актуальной, является задача для невыпуклых множеств сложной геометрии, см. например, [7].

Назовем упаковкой U_n плоского множества M набор из $n \in \mathbb{N}$ кругов $O(\mathbf{s}_i, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leq r\}$, $r > 0$, которые вложены в M и попарно не пересекаются (кроме, может быть, в точках границы). Требуется найти оптимальную упаковку U_n^* множества M , то есть ту, для которой радиус r^* шаров был бы максимально возможным. Будем считать данную задачу решённой, если найден хотя бы один набор. В общем случае их может быть более одного.

Обозначим $S_n \triangleq \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$ множество центров кругов упаковки. Если $n > 1$, то максимальный радиус $R_M(S_n)$ кругов упаковки (с цен-

трами в точках из S_n) равен

$$R_M(S_n) = \min_{i=\overline{1,n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \quad (1)$$

где

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \min \left\{ \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)}), \rho(\mathbf{x}, \partial M) \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

— максимальные радиусы кругов, которые могут располагаться с центрами в точках $\mathbf{x}$, не пересекаясь с другими кругами того же радиуса с центрами в точках из $S_n^{(i)} \triangleq S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$ по внутренним точкам и не выходя за пределы множества M . Здесь ∂M — граница множества M , $\rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{m}\| : \mathbf{m} \in M\}$ — евклидово расстояние от $\mathbf{x}$ до замкнутого множества M .

1. Методы решения задачи

Авторы применяют методы, основанные на итерационном изменении координат текущего набора точек S_n с целью минимизации величины (1). При этом некоторое начальное положение $S_n^{(0)}$ центров кругов генерируется стохастически. Их координаты равны сумме случайных векторов и узлов гексагональных решёток [5]. Каждая точка из $S_n^{(0)}$ получают как сумма элемента решётки, наложенной на M со случайным вектором.

При построении нового значения массива точек выполняется циклический перебор элементов, и для каждой точки $\mathbf{s}_i$ строится новое значение $\widehat{\mathbf{s}}_i$, такое, что $\varphi^{(i)}(\widehat{\mathbf{s}}_i) \leq \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$. Новый набор центров упаковок получается путём замены точки $\mathbf{s}_i$ на $\widehat{\mathbf{s}}_i$.

В работах [3, 6] показано, что функция $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ являются супердифференцируемой [1] на множестве $M \setminus (\partial M \cup S_n^{(i)})$, то есть во всех точках компакта M , в которых она отлична от нуля. Её супердифференциал равен

$$D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \text{co} \left(\Phi(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \right), \quad (3)$$

где

$$\Phi(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \triangleq \left(\frac{\{\mathbf{x}\} - (S_n^{(i)} \cap O(\mathbf{x}, 2\varphi^{(i)}(\mathbf{x})))}{4\varphi^{(i)}(\mathbf{x})} \right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{\{\mathbf{x}\} - (\partial M \cap O(\mathbf{x}, \varphi^{(i)}(\mathbf{x})))}{\varphi^{(i)}(\mathbf{x})} \right),$$

$\text{co}(M)$ — выпуклая оболочка множества M .

Для уменьшения значения функций (2) применяется процедура итерационного изменения координат. Для её обоснования доказана

Теорема 1. *Если для точки $\mathbf{x}^* \in M$ выполняется условие*

$$\mathbf{x}^* \notin \text{co} \left(\left(S_n^{(i)} \cap O(\mathbf{x}^*, 2\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)) \right) \cup \left(\partial M \cap O(\mathbf{x}^*, \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)) \right) \right), \quad (4)$$

то среди всех векторов из окружности $\partial O(\mathbf{0}, 1)$ есть ровно один $\mathbf{g}^$, такой, что*

$$\frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \max \left\{ \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} : \mathbf{g} \in \partial O(\mathbf{0}, 1) \right\} > 0, \quad (5)$$

равный $\mathbf{g}^ = \mathbf{d}^* / \|\mathbf{d}^*\|$, где $\mathbf{d}^*$ — наименьший по норме вектор из $D^+ \varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$.*

В работах [3, 6] показано, что если выполняется (4), то супердифференциал (3) в точке $\mathbf{x}^*$ определён и не содержит вектора $\mathbf{0}$. Поскольку супердифференциал — выпуклое множество, то наименьший по норме вектор в нём только один.

Заметим, что если условие (4) не выполняется, то в точке $\mathbf{x}^*$ функция $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ может достигать локального максимума, но для установления данного факта требуется дополнительное исследование.

2. Пример решения задачи

Пусть задано невыпуклое множество M , ограниченное кривой

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4, \quad (6)$$

при значениях параметров $a = 1.05, c = 1$. Требуется построить оптимальную упаковку U_{12} множества M объединением 12 кругов.

Кривая (6) является частным случаем овала Кассини. Решение задачи было осуществлено путём многократного запуска программного комплекса, основанного на пошаговом сдвиге точек $\mathbf{s}_i, i = \overline{1, n}$

в сторону вектора $\mathbf{g}^*$, задающего по формуле (5) в соответствии с теоремой 1 направление максимального роста функции $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$. Полученный массив центров

$$S_{12} = \{(0.719, 0.334), (1.124, 0.248), (0.145, -0.131), (-1.174, 0.2), \\ (0.832, -0.345), (-0.791, 0.344), (-0.17, 0.137), (1.201, -0.158), \\ (-0.56, 0.004), (-0.778, -0.344), (0.549, -0.043), (-1.166, -0.21)\}.$$

Радиус кругов упаковки $r \approx 0.205$. Плотность упаковки (отношение суммы площадей кругов к площади фигуры) равна $\sigma \approx 0.62$.

Результаты моделирования представлены на рис. 1.

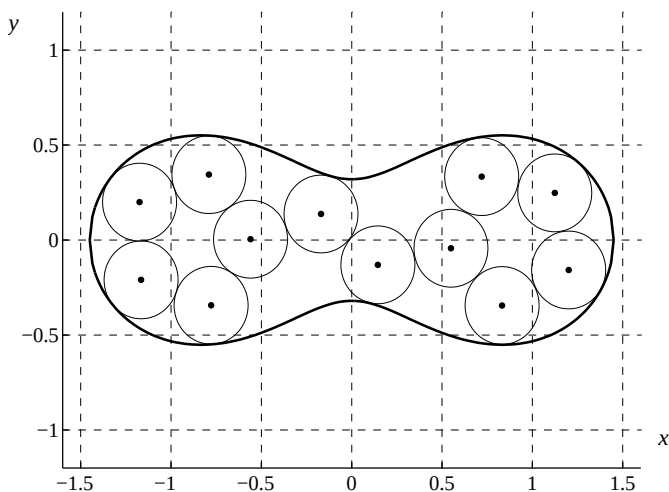


Рис. 1. Аппроксимация оптимальной упаковки 12 кругов в фигуру M .

Исследование Лебедева П.Д. и Ушакова В.Н. поддержано грантом РНФ, проект № 19-11-00105.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы, 1981. 384 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

3. Лебедев П.Д., Казаков А.Л. Итерационные методы построения упаковок из кругов различного диаметра на плоскости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 141–151.
4. Лебедев П.Д., Успенский А.А. Алгоритмы построения оптимальных упаковок в трехмерном евклидовом пространстве // CEUR Workshop Proceedings: Proc. of the 47th Int. Youth School-Conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications”, (MPMA 2016). 2016. Vol. 1662. P. 84–93.
5. Том Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958. 364 с.
6. Ушаков В.Н., Лебедев П.Д., Лавров Н.Г. Алгоритмы построения оптимальных упаковок в эллипсы // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 3. С. 67–79.
7. Machchhar J., Elber G. Dense packing of congruent circles in free-form non-convex containers // Comput. Aided Geom. Design. 2017. Vol. 52–53, March–April. P. 13–27. DOI: 10.1016/j.cagd.2017.03.006

An Iterative Procedure for Constructing of Optimal Packings in Non-Convex Flat Shapes

Pavel D. Lebedev¹, Alexandr A. Uspenskii²,
Vladimir N. Ushakov³

¹ IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia, pleb@yandex.ru

² IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia, uspen@imm.uran.ru

³ IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia, ushak@imm.uran.ru

Abstract: We study the problem of constructing optimal packings from a given number of congruent circles into a flat nonconvex figure M . The minimization radius of r circles is considered to be the optimality criterion. An algorithm for the numerical construction of a package is proposed and implemented, the basis of which is iterative minimization of functions that define the maximum radius of a package element with its center at the current point at fixed coordinates of all others. A theorem on the existence of a direction of maximum growth of these functions is proved.

Исследование устойчивости стохастических дифференциальных включений методом функций Ляпунова

А.А. Леваков¹, М.М. Васьковский², Я.Б. Задворный³

¹ БГУ, Минск, Беларусь, levakov@tut.by

² БГУ, Минск, Беларусь, vaskovskii@bsu.by

³ БГУ, Минск, Беларусь, yaraslau.zadvorny@yandex.ru

Аннотация: Рассматривается вопрос о глобальной устойчивости нулевого решения стохастического дифференциального включения. Для исследования устойчивости применен метод функций Ляпунова.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное включение, устойчивость, метод функций Ляпунова.

Н.Н. Красовский и И.Я. Кац [1], Дж.Э. Бертрам и П.Э. Сарачик [2] первыми использовали метод функций Ляпунова для исследования устойчивости стохастических систем. Первыми монографиями, посвященными этой теме, были книги Р.З. Хасьминского [3] и Г.Дж. Кушнера [4].

Настоящая работа посвящена обобщению хорошо известных теорем [3] об устойчивости стохастических дифференциальных уравнений на стохастические дифференциальные включения, в частности, доказательству аналога теоремы Барбашина — Красовского [5] для стохастических дифференциальных включений.

Пусть заданы ограниченные многозначные отображения $f : R^d \rightarrow cl(R^d)$, $G : R^d \rightarrow cl(R^{d \times d})$, $0 \in f(0)$, $0 \in G(0)$ ($cl(R^m)$ — множество непустых замкнутых подмножеств из R^m). Рассмотрим стохастическое дифференциальное включение

$$dx(t) \in f(x(t))dt + G(x(t))dW(t).$$

Построим многозначные отображения $x \rightarrow F(x)$ и $x \rightarrow A(x)$, где $F(x)$ и $A(x)$ — наименьшие выпуклые замкнутые множества, содержащие соответственно все векторы из множества $f(x)$ и матрицы $a(x)$ из множества $A_0 = \{bb^T : b \in G(x)\}$ и соответственно все предельные точки для $f(x')$ и $A_0(x')$ при $x' \rightarrow x$.

Введем определения слабого решения включения (слабого решения на R и слабого решения на промежутке $(-\infty, 0]$).

Определение 1. Пусть $x(t)$ — процесс, непрерывный на промежутке $t \in [0, \infty)$ (на R , на промежутке $t \in (-\infty, 0]$), заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть $(\mathcal{F}_t)$ — поток σ -алгебр на этом пространстве, порожденный процессом $x(t)$. Если процесс $x(t)$ удовлетворяет условиям:

1) для $t_0 = 0$ (для каждого $t_0 \in (-\infty, 0]$) существуют расширения $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и поток $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, на этом расширении такие, что на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ с $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ можно определить $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -броуновское движение $W_{t_0}(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$ ($t \in [t_0, +\infty)$, $t \in [t_0, 0]$) с $W(t_0) = 0$ п. н.;

2) существуют процессы $v \in L_1^{\text{loc}}$ и $u \in L_2^{\text{loc}}$, которые для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, +\infty)$ ($(t, \omega) \in (-\infty, +\infty) \times \Omega$, $(t, \omega) \in (-\infty, 0] \times \Omega$) удовлетворяют включениям

$$v(t, \omega) \in F(x(t, \omega)),$$

$$u(t, \omega)u^\top(t, \omega) \in A(x(t, \omega)),$$

где L_i^{loc} — множество всех измеримых $(\mathcal{F}_t)$ -согласованных процессов $\psi(t)$, $t \in R$, таких, что для каждых $t_2 > t_1 \geq 0$ (для каждых $t_2 > t_1$, для каждых $t_1 < t_2 \leq 0$) $\int_{t_1}^{t_2} \|\psi(s, \omega)\|^i ds < \infty$ п. н., $i \in \{1, 2\}$;

3) с вероятностью 1 для всех $t \in [t_0, +\infty)$ ($t \in R$, $t \in [t_0, 0]$) имеет место равенство

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(s)ds + \int_{t_0}^t u(s)dW_{t_0}(s),$$

то $x(t)$ называем слабым решением включения (слабым решением на R , слабым решением на промежутке $(-\infty, 0]$).

Определение 2. Нулевое решение называют устойчивым по вероятности, если для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ с $\|x(0)\| \leq \delta$ п. н. имеем $P\{\sup_{t \geq 0} \|x(t)\| \geq \varepsilon_1\} \leq \varepsilon_2$.

Определение 3. Нулевое решение называется глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если: а) оно устойчиво по вероятности; б) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| < K$ п. н., выполняется $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 0$.

Определение 4. Нулевое решение называется ϖ -устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого слабого решения $x(t)$ уравнения, для которого $\|x(0)\| \leq \delta$ п. н., имеем $E(\|x(t)\|^\varpi) \leq \varepsilon \forall t \geq 0$.

Определение 5. Нулевое решение называется глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1) -устойчивым, если: а) оно ϖ -устойчиво; б) для любого $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \leq K$ п. н., выполняется $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi_1}) = 0$.

Определение 6. Нулевое решение называется асимптотически (ϖ, ϖ_1) -устойчивым, если: а) оно ϖ -устойчиво; б) существует $K > 0$, для любого слабого решения $x(t)$, для которого $\|x(0)\| \leq K$ п. н., выполняется $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(\|x(t)\|^{\varpi_1}) = 0$.

Введем следующие условия.

Условие L). Существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V : R^d \rightarrow R_+$ такая, что $\forall x \in R^d$

$$DV(x) = \sup_{b \in F(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} b + \sup_{a \in A(x)} \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} a \right) \leq 0.$$

Положим

$$N_V = \{x \in R^d : DV(x) = 0\}, n_V = \{x \in R^d : V(x) = 0\}.$$

Скажем, что слабое решение $x(t)$ на R (на промежутке $(-\infty, 0]$) принадлежит множеству N_V (множеству n_V), если

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} v(t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\partial^2 V(x(t))}{\partial x^2} u(t) u^\top(t) \right) = 0$$

для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in R \times \Omega$ (при каждом $t \in (-\infty, 0]$ выполняется равенство $n_V(x(t)) = 0$ п. н.).

Условие M). Существуют постоянные $r > 1$, $\sigma > 0$ и $K > 0$ такие, что для любого слабого решения $x(t)$, удовлетворяющего условию $\|x(0)\| \leq \sigma$, выполняется неравенство

$$E(\|x(t)\|^r) \leq K \quad \forall t \geq 0. \quad (1)$$

Условие N). Система не имеет ненулевых слабых решений $x(t)$ таких, что $x(0) = 0$ п. н.

Теорема 1. Пусть для включения выполняется условие L) и пусть функция $V(x)$ в этом условии положительно определенная. Тогда нулевое решение включения устойчиво по вероятности. Если, кроме того, $V(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ и множество N_V не содержит ненулевых слабых решений на R , то нулевое решение глобально асимптотически устойчиво по вероятности.

Теорема 2. Пусть для включения выполняется условие L) и функция $V(x)$ в этом условии удовлетворяет неравенствам: $k\|x\|^{\varpi_1} \leq V(x) \quad \forall x, \|x\| \geq a$; $k_1\|x\|^\varpi \leq V(x) \quad \forall x, \|x\| \leq b$, где $\varpi, \varpi_1, k, k_1, a, b$ — положительные постоянные. Если не существует ненулевых слабых решений включения на R , принадлежащих множеству N_V , то нулевое решение является глобально асимптотически (ϖ, ϖ_1) -устойчивым.

В следующей теореме не предполагается, что функция V является положительно определенной.

Теорема 3. Пусть включение удовлетворяет условиям L), M), N) и пусть $0 < s < r$. Если существует постоянная $a > 0$ такая, что включение не имеет ненулевых слабых решений $x(t)$ на промежутке $(-\infty, 0]$, обладающих свойствами: $x(t) \in N_V$; $E(\|x(t)\|^s) \leq a \quad \forall t \in (-\infty, 0]$, то нулевое решение включения s -устойчиво. Если, кроме того, существует постоянная $b > 0$ такая, что включение не имеет ненулевых слабых решений $x(t)$ на R таких, что $x(t) \in M_V$, $E(\|x(t)\|^s) \leq b \quad \forall t \in R$, то нулевое решение асимптотически (s, s) -устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 809–823.
2. Bertram J.E., Sarachik P.E. On the stability of systems with random parameters // Trans. IRE-PGCT. 1959. Vol. 5.
3. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
4. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. М.: Наука, 1969.
5. Варбашич Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
6. Леваков А.А., Васильковский М.М. Стохастические дифференциальные уравнения и включения. Минск: БГУ, 2019.

Research of Stability of Stochastic Differential Inclusions by the Lyapunov Functions Method

A.A. Levakov¹, M.M. Vaskouski², Y.B. Zadvorny³

¹ BSU, Minsk, Belarus, levakov@tut.by

² BSU, Minsk, Belarus, vaskovskii@bsu.by

³ BSU, Minsk, Belarus, yaraslau.zadvorny@yandex.ru

Abstract: We study the global stability of the zero solution of stochastic differential inclusions. For stability research we apply the Lyapunov functions method.

УДК 517.977

Инфинитезимальный критерий стабильности функционалов относительно дифференциальных включений нейтрального типа

Н.Ю. Лукоянов¹, А.Р. Плаксин²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, nyul@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, a.r.plaksin@gmail.com

Аннотация: Рассматривается динамическая система, движения которой описываются функционально-дифференциальным включением нейтрального типа в форме Дж. Хейла. Функционал от истории движения является стабильным относительно этой системы, если для всякой начальной истории существует движение, вдоль которого он монотонен. Получен критерий такой стабильности в терминах подходящих производных по направлениям.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные системы нейтрального типа, стабильные функционалы, производные по направлению.

Рассмотрим следующее функционально-дифференциальное включение нейтрального типа:

$$\frac{d}{d\tau}(x(\tau) - g(\tau, x(\tau - h))) \in F(\tau, x(\tau), x(\tau - h)), \quad (1)$$

$$x(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad h = \text{const} > 0.$$

Всюду ниже двойными скобками $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидову норму; $\text{Lip}([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство липшицевых функций из

$[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабженное равномерной нормой; $\text{Lip} = \text{Lip}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$; $\mathbb{G} = [t_0, \vartheta] \times \text{Lip}$.

Полагаем, что функция $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \ni (\tau, x) \mapsto g = g(\tau, x) \in \mathbb{R}^n$ является локально липшицевой, т.е. для любого ограниченного множества $S \subset \mathbb{R}^n$ существует такая константа $\lambda > 0$, что для всех $(\tau, x), (t, y) \in [t_0, \vartheta] \times S$ справедлива оценка

$$\|g(t, y) - g(\tau, x)\| \leq \lambda (|t - \tau| + \|y - x\|).$$

Многозначное отображение $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\tau, x, y) \mapsto F = F(\tau, x, y) \subset \mathbb{R}^n$ выпукло-компактно-значно, непрерывно в метрике Хаусдорфа и удовлетворяет следующему условию подлинейного роста: существует такая константа $\alpha > 0$, что

$$\sup \{\|f\| \mid f \in F(\tau, x, y)\} \leq \alpha (1 + \|x\| + \|y\|).$$

Рассмотрим функционал

$$\mathbb{G} \ni (t, w(\cdot)) \mapsto \varphi = \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}.$$

Обозначим

$$X(t, w(\cdot)) = \{x(\cdot) \in \text{Lip}([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n) : x(t + \xi) = w(\xi), \xi \in [-h, 0]\}.$$

Определение 1. Функционал φ называется стабильным относительно включения (1), если для любых $(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, существует такая функция $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$, которая, удовлетворяя при почти всех $\tau \in [t, \vartheta]$ включению (1), удовлетворяет неравенству

$$\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) \leq \varphi(t, w(\cdot)), \quad \tau \in [t, \vartheta],$$

где $x_\tau(\xi) = x(\tau + \xi)$, $\xi \in [-h, 0]$.

Стабильные функции и функционалы играют важную роль в решении задач позиционного управления и дифференциальных игр, в теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби. Различные критерии стабильности относительно обыкновенных дифференциальных систем и функционально-дифференциальных систем запаздывающего типа изучались во многих работах (см., например, [1–3, 5, 7, 8], и приведенную там библиографию). Стабильность относительно движений систем нейтрального типа рассматривалась

в [4, 6]. В продолжение этих исследований ниже получен инфинитезимальный критерий стабильности функционала φ относительно дифференциального включения (1) в терминах производных по направлениям.

Пусть $(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $x(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$. Обозначим

$$d^- \{ \varphi(t, w(\cdot)) | x(\cdot) \} = \liminf_{\tau \rightarrow t+0} \frac{\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))}{\tau - t}.$$

Пусть $z(\cdot) \in \text{Lip}([t, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ и L — непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$D^- \{ \varphi(t, w(\cdot)) | z(\cdot), L \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{x(\cdot) \in \Omega_\varepsilon} d^- \{ \varphi(t, w(\cdot)) | x(\cdot) \}, \quad (2)$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x(\cdot) \in X(t, w(\cdot)) : \frac{d}{d\tau}(x(\tau) - z(\tau)) \in [L]^\varepsilon \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta] \right\}.$$

Здесь $[L]^\varepsilon$ обозначает ε -окрестность множества L в $\mathbb{R}^n$. Отметим, что формулы для вычисления производных по направлению (2) в типичных частных случаях можно найти в [4].

Пусть функция $\bar{x}(\cdot) \in X(t, w(\cdot))$ такова, что $\bar{x}(\tau) = w(0)$, $\tau \in [t, \vartheta]$. Обозначим

$$z(\tau | t, w(\cdot)) = g(\tau, \bar{x}(\tau - h)), \quad \tau \in [t, \vartheta].$$

Теорема 1. *Для непрерывного функционала φ стабильность относительно включения (1) эквивалентна дифференциальному неравенству*

$$D^- \{ \varphi(t, w(\cdot)) | z(\cdot | t, w(\cdot)), F(t, w(0), w(-h)) \} \leq 0,$$

$$(t, w(\cdot)) \in \mathbb{G}, \quad t < \vartheta.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3566.2019.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
2. Лукоянов Н. Ю. Об условиях оптимальности гарантированного результата в задачах управления системами с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2009. Т. 15, № 3. С. 158–169.

3. *Лукоянов Н. Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.
4. *Лукоянов Н. Ю., Плаксин А. Р.* Стабильные функционалы динамических систем нейтрального типа // Тр. МИАН, 2019. Т. 304. С. 221–234.
5. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последствием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
6. *Плаксин А. Р.* Об уравнении Гамильтона–Якоби–Айзека–Беллмана для систем нейтрального типа // Вестник Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27, вып. 2. С. 222–237.
7. *Субботин А. И., Тарасьев А. М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
8. *Subbotin A. I.* Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.

Infinitesimal Criterion of Stability of Functionals with Respect to Neutral-Type Differential Inclusions

Nikolai Yu. Lukoyanov¹, Anton R. Plaksin²

¹ IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, nyul@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, a.r.plaksin@gmail.com

Abstract: A dynamical system is considered which motions are described by neutral-type differential inclusion in the form of J. Hale. A functional of the motion history is stable with respect to this system if, for any initial history, there exists a motion along which it is monotonous. A criterion of such stability is obtained in terms of appropriate directional derivatives.

УДК 517.977.5

Управление движением фазового вектора по заданной плоской кривой для модели конкуренции Лотки — Вольтерры

Л. Н. Лукьянова

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, ln@cs.msu.ru

Аннотация: Рассматривается задача управляемости в заданное положение при движении траекторий в окрестности заданной кривой, для системы Лотки — Вольтерры с мультипликативным векторным управлением. Найдено управление решающее задачу на основе метода структурного

синтеза нелинейных систем. Представлены результаты аналитического и численного расчета терминального управления для варианта заданной кривой.

Ключевые слова: нелинейная управляемая система, задача управляемости, терминальное управление, позиционное управление.

Введение

Для описания концентрации нездоровых и здоровых клеток в процессе лечения таких заболеваний, как лимфома, миелома и лейкемия, используется модель конкуренции Лотки — Вольтерры. Для анализа возможных стратегий лечения используется теория управления [1]. В работе описан поиск управления, осуществляющего движение фазового вектора в окрестности заданной кривой на основе метода структурного синтеза нелинейных систем [2]. Формализация позиционного управления для нелинейной системы опирается на работу [3].

1. Задача управления движением фазового вектора по заданной плоской кривой

Рассмотрим модель конкуренции Лотки — Вольтерры с фазовыми переменными x, y и управляемыми параметрами w, u [1], при отсутствии ограничений на управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= r(1 - k_1 w(t))f_1(x(t), y(t))x(t) - m_1 u(t)x(t), \\ \dot{y}(t) &= (1 - k_2 w(t))f_2(x(t), y(t))y(t) - m_2 u(t)y(t), \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0; \quad x_0, y_0 > 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$f_1(x, y) = 1 - x(t) - a_{12}y(t), \quad f_2(x, y) = 1 - a_{21}x(t) - y(t), \quad a_{12}, a_{21} > 0.$$

В качестве целевого множества рассматривается окрестность точки $x_1 = 1, y_1 = 0$. Движение к ней из начальной точки необходимо осуществить в окрестности кривой, задаваемой дифференцируемой функцией

$$F(x, y) = 0, \quad F(1, 0) = 0. \quad (2)$$

Необходимо найти управление системой (1) для которого траектория системы (1) удовлетворяет (2) и движение осуществляется в заданном направлении.

2. Позиционное управление

Введем ошибку выполнения равенства (2) $\varphi = F(x, y)$, и потребуем, что бы ошибка удовлетворяла уравнению $T \cdot d\varphi/ds + \varphi = 0$. Переходной процесс задаем относительно переменной s , связанной со временем соотношением $ds/dt = \beta \geq 0$. Из дифференциального уравнения для функции φ получим

$$F_1 \dot{x} + F_2 \dot{y} = -\frac{\beta}{T} F, \quad \text{где} \quad F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial y},$$

или с учетом системы уравнений (1)

$$F_1 \left[xr(1-k_1w)f_1(x, y) - m_1ux \right] + F_2 \left[y(1-k_2w)f_2(x, y) - m_2uy \right] = -\frac{\beta}{T} F. \quad (3)$$

Обозначим $\Phi_1 = -F_1 x r k_1 f_1(x, y) - F_2 y k_2 f_2(x, y)$, $\Phi_2 = -F_1 m_1 x - F_2 m_2 y$, $\Phi_3 = F_1 x r f_1(x, y) + F_2 y f_2(x, y)$. Тогда, (3) перепишем в виде

$$\Phi_1 w + \Phi_2 u = -\frac{\beta}{T} F - \Phi_3. \quad (4)$$

Для нахождения двух управляющих переменных имеем одно уравнение. Следуя работе [2] представим управляющие переменные как линейные функции Φ_1 и Φ_2 :

$$w = c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2, \quad u = c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2, \quad (5)$$

Коэффициенты в этих уравнениях найдем из условия обращения уравнения (4) в тождество. Подставив (5) в уравнение (4) имеем $c_{11} \Phi_1^2 + (c_{12} + c_{21}) \Phi_1 \Phi_2 + c_{22} \Phi_2^2 + \beta/T \cdot F + \Phi_3 = 0$. Это уравнение превращается в тождество, если принять, например

$$c_{11} = 0, \quad c_{22} = -\frac{\beta T \cdot F + \Phi_3}{\Phi_2^2}, \quad c_{12} = -c_{21} = c, \quad (6)$$

$\beta = \Phi_2^2$ для упрощения c_{22} или

$$c_{11} = -\frac{\beta/T \cdot F + \Phi_3}{\Phi_1^2}, \quad c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = c, \quad (7)$$

$\beta = \Phi_1^2$ для упрощения c_{11} . При выбранных $F(x, y)$, x_0, y_0 анализируются функции Φ_1, Φ_2 на наличие нулей в области $1 \geq x > 0, 1 \geq y > 0$

и выбирается один из вариантов коэффициентов (6) или (7). Если, например, функция $\Phi_2 > 0$, то выбирается вариант (6). В этом случае искомая структура управления

$$w = c\Phi_2, \quad u = -c\Phi_1 - \frac{\beta/T \cdot F + \Phi_3}{\Phi_2}, \quad (8)$$

где $c(x, y) \neq 0$ — дифференцируемая функция. При различных вариантах функции β решению могут быть приданы новые свойства.

При управлении (8) точка (x, y) стремится попасть из любого начального положения на заданную линию и остаться на ней, так как переходный процесс по ошибке устойчив. Скорость перемещения по заданной линии определяется функцией c . Знак $c(x, y) \neq 0$ определяет направление, а ее величина — скорость перемещения точки (x, y) .

На рис. 1–3 приведены результаты численного моделирования траекторий и управлений системы (1) для функции $F(x, y) = y - a_1(x - 1)^2$ (пунктирная линия) и параметров $a_1=1$, $a_{12} = 1.5$, $a_{21} = 1$, $r = 0.9$, $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.5$, $m_1 = 0.3$, $m_2 = 1.4$, $T = 6$, $c = -7$. На рис. 1 приведены траектории для следующих начальных условий (x_0, y_0) : $(1, 0.3)$, $(1, 0.4)$, $(1, 0.5)$, $(1, 0.7)$, $(1, 0.8)$, $(0.1, 0.91)$, на рис. 2, 3 приведены графики управлений (9), (10) при начальном условии $(1, 1)$.

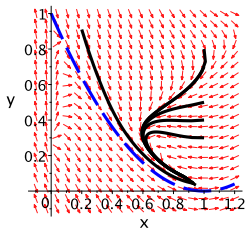


Рис. 1. $y(x)$

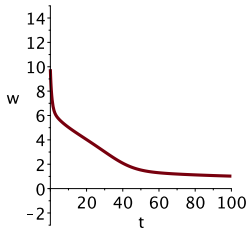


Рис. 2. $w(t)$

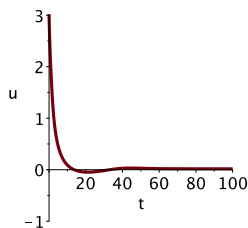


Рис. 3. $u(t)$

3. Скорость перемещения точки (x, y) вдоль линии $F = 0$

Зададим скорость перемещения точки (x, y) вдоль линии $F = 0$: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2(x, y)$, $v(x, y)$ — непрерывная функция, и из этого

условия найдем значение $c(x, y)$. Обозначим $A = -rk_1\Phi_2f_1(x, y) + m_1\Phi_1$; $B = rf_1(x, y) + m_1/\Phi_2(\beta/T \cdot F + \Phi_3)$; $A_1 = -k_2\Phi_2f_2(x, y) + m_2\Phi_1$; $B_1 = f_2(x, y) + m_2/\Phi_2(\beta/T \cdot F + \Phi_3)$. Из (8) имеем $c^2A_2 + cB_2 + S_2 = 0$, где $A_2 = A^2x^2 + A_1^2y^2$; $B_2 = 2(ABx^2 + A_1B_1y^2)$; $S_2 = B^2x^2 + B_1^2y^2 - v^2$; Следовательно, при $F = 0$: $c = (-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4A_2S_2})/2A_2$. Таким образом, структура управления, необходимая для устойчивого движения точки (x, y) вдоль линии $F(x, y) = 0$ со скоростью $v(x, y)$:

$$w = \Phi_2 \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4A_2S_2}}{2A_2}, \quad (9)$$

$$u = -\Phi_1 \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4A_2S_2}}{2A_2} - \frac{\beta/T \cdot F + \Phi_3}{\Phi_2}. \quad (10)$$

при условии $A_2 \neq 0, \Phi_2 \neq 0, c \neq 0$. Пусть желательная скорость движения фазовой точки системы (1) (заданная врачом) $v_0(x, y)$. Поиск ее приближения $v(x, y)$, при котором $A_2 \neq 0, \Phi_2 \neq 0, c \neq 0$ и u, w имеют заданные ограничения, проводилось с использованием пакета численного решения задачи нелинейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клименкова А.Д., Коробейников А., Хайлов Е.Н. Оптимальные стратегии подавления клеточного деления в антираковой терапии // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы междунар. конф., посв. 110-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (12–14 декабря 2018, Москва). Москва: МИАН; МАКС Пресс, 2018. С. 134–137.
2. Войчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971. 113 с.
3. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

Motion Control of the Phase Vector Along Given Flat Curve for Model Competition Lotka—Volterra

Lilia N. Lukianova

MSU, Moscow, Russia, lln@cs.msu.ru

Abstract: We consider the problem of controllability at a given position as the trajectory moves in the neighborhood of a given curve, for the system of Lotka—Volterra with multiplicative vector control. A control is found to solve the problem based on the method of structural synthesis of nonlinear systems. The results of the analytical and numerical calculation of the terminal control for the variant of a given curve are presented.

Полилинейные аппроксимации в сеточных методах нахождения обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби

Н.В. Мунц¹, С.С. Кумков²

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, natalymunts@gmail.com,

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, sskumk@gmail.com

Аннотация: В докладе обсуждаются проблемы численного метода, конструирующего функцию цены задачи быстрогодействия с линией жизни. Данный итерационный сеточный метод находит функцию цены как вязкостное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона — Якоби. Предложенный ранее метод аппроксимации нарушает симметричность результирующей функции в задачах, симметричных относительно выбранной сетки (симметричность динамики, терминального множества и множеств ограничений на управления игроков). Во-первых, несимметричность возникает возле границы множества игры. Во-вторых, на результат влияет несимметричность разделения ячейки сетки на симплексы для построения кусочно-линейной аппроксимации искомой функции. В докладе рассматриваются методы устранения указанных недостатков, основанных на иных методах построения аппроксимации. Также будут приведены различные примеры игр быстрогодействия с линией жизни, в которых старый метод дает несимметричный результат, исправляемый применением новых методов аппроксимации вычисляемой функции.

Ключевые слова: дифференциальные игры быстрогодействия с линией жизни, функция цены, уравнения Гамильтона — Якоби, численный метод

1. Постановка задачи

Рассмотрим конфликтно-управляемую систему с динамикой [1, 5]

$$\dot{x} = f(x, p, q), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad p \in P, \quad q \in Q,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы; p и q — управления первого и второго игроков, соответственно. Ограничения P и Q на управления считаются компактными множествами в своих евклидовых пространствах. Задано компактное терминальное множество $\mathcal{T}$ и открытое множество $\mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$ и граница $\partial\mathcal{W}$ является ограниченной. Обозначим $\mathcal{G} := \mathcal{W} \setminus \mathcal{T}$ и $\mathcal{F} := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{W}$. Множество $\mathcal{T}$ является целевым; в множестве $\mathcal{G}$ происходит игра; множество $\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{W}$ —

это линия жизни, при выходе системы на которую второй игрок безоговорочно выигрывает. Цель первого игрока, распоряжающегося управлением p , — привести систему из состояния $x_0 \in \text{cl } \mathcal{G}$ на множество $\mathcal{T}$ как можно скорее, удерживая при этом траекторию вне $\mathcal{F}$; цель второго игрока, распоряжающегося управлением q , — привести систему на множество $\mathcal{F}$, или, если это невозможно, удержать траекторию внутри множества $\mathcal{G}$ навсегда, или, если и это невозможно, максимально отсрочить достижение системой множества $\mathcal{T}$.

Цели игроков могут быть формализованы следующим образом. Пусть $x(\cdot; x_0)$ — это траектория системы, выпущенная из начальной точки x_0 . Для нее рассмотрим две величины:

$$t_* = t_*(x(\cdot; x_0)) = \min\{t : x(t; x_0) \in \mathcal{T}\},$$

$$t^* = t^*(x(\cdot; x_0)) = \min\{t : x(t; x_0) \in \mathcal{F}\},$$

которые являются моментами времени, в которые траектория $x(\cdot; x_0)$ в первый раз попадает на множества $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$, соответственно. Если траектория не приходит на множество $\mathcal{T}$ ($\mathcal{F}$), то значение t_* (t^*) положим равным $+\infty$. Результат игры на траектории $x(\cdot; x_0)$ определим следующим образом:

$$\tau(x(\cdot; x_0)) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t_* = +\infty \text{ или } t^* < t_*, \\ t_*, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В [2] доказано, что для такой задачи существует функция цены, в [3] показано существование минимаксного решения соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона — Якоби, в [4] описана численная схема, позволяющая приближенно вычислять функцию цены описанной задачи и доказана ее сходимость.

2. Проблемы численного метода

Численный метод строит приближение функции цены как обобщенное (вязкостное) решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона — Якоби. Сеточный метод представляет собой итерационный процесс, в котором значения функции вне узлов сетки вычисляются с помощью кусочно-линейной аппроксимации.

Оказалось, что этот метод аппроксимации нарушает симметричность результирующей функции в задачах, симметричных относи-

тельно выбранной сетки (то есть имеющих симметричность динамики, терминального множества и множеств ограничений на управления игроков относительно этой сетки).

Во-первых, несимметричность возникает возле границы множества $\mathcal{G}$. Этот недостаток иллюстрируется следующим примером.

Материальная точка. Пусть рассматривается задача управления с динамикой следующего вида:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = p, \quad |p| \leq 1.$$

(Данная задача, конечно, не является игрой, но может быть рассмотрена как игра с фиктивным вторым игроком, чье управление входит в динамику аддитивно и ограничено одноточечным множеством — началом координат.) На рис. 1 представлены линии уровня функции цены для этой задачи, вычисленные с использованием базовой идеи кусочно-линейной аппроксимации функции между узлами сетки. Приведен крупный план несимметричных участков, которые хотелось бы иметь симметричными.

Вторая причина возникновения несимметричности в симметричных задачах — несимметричность разделения параллелограмма на симплексы, внутри которых производится кусочная аппроксимация вычисляемой функции. Для случая пространства $\mathbb{R}^2$ эту проблему можно проиллюстрировать следующей схемой (см. рис 2).

На приведенном рисунке для двух симметричных узлов указаны оптимальные движения на шаге времени, приходящие в симметрич-

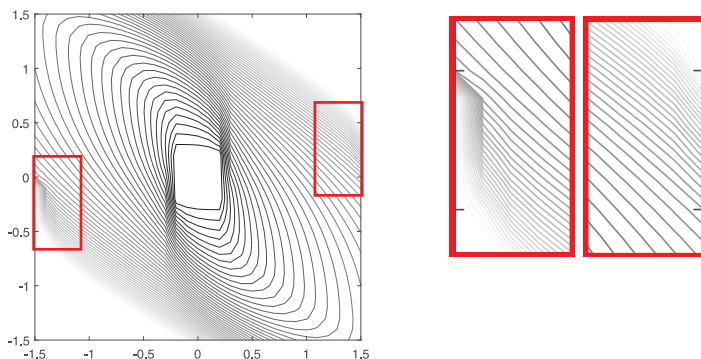


Рис. 1. Несимметричные участки функции цены

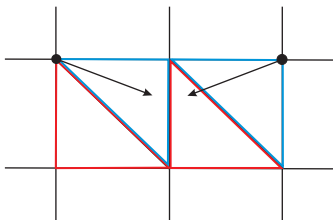


Рис. 2. Схема разделения параллелограмма на симплексы

ные точки, которые попадают в несимметричные симплексы, что, вообще говоря, приводит к нахождению различных аппроксимирующих значений в этих точках.

В докладе будет обсуждаться улучшенная аппроксимация функции цены, которая помогает избавиться от указанных выше недостатков. Она, в частности, строится на основе полилинейных аппроксимаций функции в ячейках сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Мунц Н.В., Кумков С.С. Существование функции цены в игре быстрогодействия с линией жизни [Existence of value function in time-optimal game with life line] // Proc. of the 47th Int. Youth School-Conference “Modern Problems in Mathematics and its Applications” (Yekaterinburg, Russia, Jan. 31 – Feb. 6, 2016). 2016. С. 94–99. <http://ceur-ws.org/Vol-1662/opt6.pdf>
3. Мунц Н.В., Кумков С.С. О совпадении минимаксного решения и функции цены игры быстрогодействия с линией жизни // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург: УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 200–214.
4. Мунц Н.В., Кумков С.С. Численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10, № 3. С. 48–75.
5. Isaacs R. Differential Games. New York: John Wiley and Sons, 1965.

Polylinear Approximations in Grid Methods for Constructing Generalized Solution of Hamilton—Jacobi Equation

Nataly V. Munts¹, Sergey S. Kumkov²

¹ IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, natalymunts@gmail.com,

² IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, sskumk@gmail.com

Abstract: This talk discusses problems of numerical method constructing the value function of a time-optimal game with lifeline. The iterational grid method constructs the value function as a viscosity solution of the corresponding boundary value problem for Hamilton—Jacobi equation. The concerned

approximation method breaks the symmetry of the result function in problems, which are symmetrical with respect to a chosen grid (symmetry of dynamics, a terminal set and control sets). Firstly, unsymmetry arises close to the border of the game set. Secondly, unsymmetry in dividing a parallelotope cell of the grid into simplices affects the result. The talk deals with methods to avoid specified problems based on the algorithm improvement. Also, different examples of time-optimal games with lifeline with unsymmetrical result (with the use of an old version of the algorithm) and with symmetrical one (by the use of the advanced one) are considered.

УДК 517.977.5

Построение множества разрешимости в задаче химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по обобщенному логистическому закону

Н.Г. Новоселова

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
УрФУ, Екатеринбург, Россия,
n.g.novoselova@gmail.com

Аннотация: Рассматривается задача химиотерапии злокачественной опухоли, растущей по обобщенному логистическому закону. Математическая модель имеет вид системы, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуется задача оптимального управления (оптимальной терапии), целью которой является минимизация злокачественных клеток в организме в заданный финальный момент времени T . В работе построено множество разрешимости до момента T , т.е. множество начальных состояний модели (объема опухоли и количества лекарства в организме), для которых оптимальное управление гарантирует динамику злокачественной опухоли вплоть до момента времени T в объеме, не превышающем предельный объем, совместимый с жизнью.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, теория оптимального управления, множество выживаемости.

Введение

В данной работе рассматривается математическая модель, которая появляется при химиотерапии злокачественной опухоли [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = g(m) - \gamma m f(h), & m(t_0) = m_0, \quad \gamma - \text{const} > 0, \\ \frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), & h(t_0) = h_0, \quad \alpha - \text{const} > 0, \end{cases}$$

здесь m — число злокачественных клеток, h — количество лекарства, способного убивать клетки опухоли, $f(h)$ — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли, $u(t)$ — управление количеством лекарства в единицу времени.

Исследуется случай, когда скорость роста злокачественных клеток $g(m)$ определяется обобщенным логистическим законом:

$$g(m) = rm \left[1 - \left(\frac{m}{\theta} \right)^\beta \right], \quad r, \theta, \beta - \text{const} > 0.$$

Предполагается, что выполнены следующие ограничения:

1. доза вводимого лекарства ограничена: $0 \leq u(t) \leq Q$, где Q — максимально допустимая доза;
2. $0 < m < M$, где M — максимальное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью,
3. $0 \leq h \leq L$, где L — максимальное допустимое количество лекарства в организме.

1. Постановка задачи

Ставится задача оптимального управления процессом терапии путем воздействия $u(t)$ так, чтобы минимизировать в заданный финальный момент времени T количество злокачественных клеток в организме, т.е. минимизировать терминальную функцию платы:

$$\sigma(m(T)) = m^\beta(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \rightarrow \inf_{u(\cdot)},$$

где управление $u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto [0, Q]$ — кусочно постоянные функции.

2. Функция цены

В данной работе и работе [3] рассмотрен случай, когда функция терапии $f(\cdot) : [0, M] \mapsto [0, F]$ (F — максимум функции терапии $f(h)$), описывающая влияние лекарства на скорость роста клеток, непрерывно дифференцируемая кусочно монотонная функция, имеющая два максимума.

Для этого случая построена аналитически функция цены, которая каждому начальному состоянию $(t_0, m_0, h_0) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L]$ ставит в соответствие оптимальный результат рассматриваемой задачи оптимального управления $\text{Val}(t_0, m_0, h_0)$.

Теорема 1. *Функция цены $\text{Val}(t_0, m_0, h_0)$ в исследуемой задаче имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} \text{Val}(t_0, h_0) &= \\ &= \frac{\theta^\beta m_0^\beta e^{-\beta\gamma V(t_0, h_0)}}{\theta^\beta e^{-\beta(r(T-t_0))} + \beta m_0^\beta r \int_{t_0}^T e^{-\beta(r(\tau-t_0) + \gamma V(\tau, h^0(\tau)))} d\tau}, \end{aligned}$$

где $V(t_0, h_0)$ — оптимальный результат в следующей вспомогательной задаче оптимального управления:

$$V(t_0, h_0) = \sup_{u(\cdot)} \int_{t_0}^T f(h(\tau; t_0, h_0, u(\tau))) d\tau;$$

$$\frac{dh(\tau)}{d\tau} = -\alpha h(\tau) + u(\tau), \quad h(t_0) = h_0, \quad 0 \leq \tau \leq Q.$$

Полученная конструкция опирается на результаты работ [4–7].

3. Множество разрешимости

Данная работа посвящена построению множества разрешимости задачи оптимального управления для рассматриваемой модели:

$$W = \{(t_0, m_0, h_0) \in [0, T] \times [0, M] \times [0, L] : \text{Val}(t_0, m_0, h_0) \in [0, M]\}.$$

Это множество состоит из таких точек (t_0, m_0, h_0) , что, стартуя из них при $t = t_0$, в течение всего процесса лечения $h^0(t)$ вплоть до

заданного финального момента $t = T$ оптимальные траектории $m^0(t)$ остаются в этом множестве, т.е. количество злокачественных клеток в организме остается ниже критического уровня M .

Все оптимальные траектории $m^0(t; t_0, m_0, h_0)$, стартующие из точки $(t_0, m_0, h_0) \notin W$ не выживают до финального момента времени T , так как они удовлетворяют условию:

$$m^0(t^*; t_0, m_0, h_0) > M$$

для некоторых $t^* \in (t_0, T)$.

Конструкция множества разрешимости строится по аналогии с конструкцией множества разрешимости для модели химиотерапии опухоли, растущей по закону Гомперца, представленной в работе [8].

Работа выполнена в рамках проекта "Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем" по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. Братусь А. С., Чумерина Е. С. Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. Вып. 6. С. 946–966.
2. Субботина Н.Н., Новоселова Н.Г. Оптимальный результат в задаче управления системой с кусочно монотонной динамикой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 4. С. 265–280.
3. Субботина Н. Н., Новоселова Н. Г. О приложениях уравнений Гамильтона–Якоби и теории оптимального управления к задачам химиотерапии злокачественных опухолей // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения: сб. статей. К 110-летию со дня рождения академика Л.С. Понтрягина. Тр. МИАН. 2019. Т. 304. М.: МИАН. С. 273–284.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456 с.
6. Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.
7. Subbotin A.I. Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Birkhauser: Boston, 1995.
8. Субботина Н.Н., Новоселова Н.Г. Построение множества выживания в задаче химиотерапии злокачественных опухолей // Материалы конф. «Современные проблемы математики и механики», посв. 80-летию академика В.А. Садовниченко (14–15 мая 2019, Москва). 2019. С. 789–792.

Construction of the Viability Set in a Chemotherapy Problem for Malignant Tumor Growing According to a Generalized Logistic Law

N.G. Novoselova

N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
Ural Federal University named after the first president of Russia B.N. Yeltsin,
Ekaterinburg, Russia
n.g.novoselova@gmail.com

Abstract: The problem of chemotherapy of a malignant tumor growing according to the logistic law is considered. The mathematical model has the form of a system consisting of two ordinary differential equations. We study the optimal control problem (optimal therapy), the purpose of which is to minimize the malignant cells in the body at a given final instant T . In this paper, a viability set up to the moment T is constructed, the set of initial states of the model (tumor volume and amount of drug in the body), for which optimal control guarantees the dynamics of a malignant tumor up to time T in a volume not exceeding the maximum volume compatible with life.

УДК 517.911.5, 517.972.4

Процесс выметания с разрывным движущимся множеством

Св.С. Орлов¹, О.Н. Самсонок²

¹ ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, s.orlov@icc.ru

² ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, olga.samsonyuk@icc.ru

Аннотация: Рассматривается процесс выметания с решениями из пространства пополнений графиков BV -функций. Такие процессы возникают при релаксационном расширении вырожденных задач оптимального управления системами с гистерезисными нелинейностями. В докладе будет введено понятие решения, изучено свойство непрерывности соответствующего оператора решения и доказана теорема существования и единственности процесса выметания.

Ключевые слова: процесс выметания, гистерезис, решения ограниченной вариации, пополнение графика, непрерывность оператора решения.

В докладе изучаются свойства оператора решения для процесса выметания, заданного в пространстве пополнений графиков функций ограниченной вариации. Процесс выметания задан на отрезке

времени $T = [t_0, t_1]$ разрывным движущимся множеством $C(t, w(t))$, где $w \in BV_r^m(T)$. Через $BV_r^m(T)$ обозначено пространство функций ограниченной вариации $w : T \mapsto \mathbb{R}^m$ (BV -функций), непрерывных справа на $(t_0, t_1]$. Предполагаем, что отображение $C : T \times \mathbb{R}^m \mapsto \text{compr}(\mathbb{R}^r)$, где $\text{compr}(\mathbb{R}^r)$ — множество всех непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^r$, удовлетворяет условиям:

- 1) $C(t, w)$ — выпуклое множество для всех $(t, w) \in T \times \mathbb{R}^m$,
- 2) отображение C локально липшицево относительно метрики Хаусдорфа, т. е. для любого компакта $Q \subset \mathbb{R}^m$ найдется число $L_Q > 0$ такое, что для всех $(s_1, w_1), (s_2, w_2) \in T \times Q$

$$d_H(C(s_1, w_1), C(s_2, w_2)) \leq L_Q(|s_1 - s_2| + \|w_1 - w_2\|).$$

Здесь $d_H(A, B)$ — расстояние Хаусдорфа между $A, B \in \text{compr}(\mathbb{R}^r)$.

Пусть $w(\cdot) \in W^{1,1}(T, \mathbb{R}^m)$. Рассмотрим процесс выметания, заданный дифференциальным включением:

$$-\dot{y}(t) \in N_{C(t, w(t))}(y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \in C(t_0, w(t_0)). \quad (1)$$

Здесь $N_C(y)$ — нормальный конус (в смысле выпуклого анализа) к множеству C в точке y . Процесс выметания (1) хорошо изучен, имеет единственное абсолютно непрерывное решение $y(\cdot)$ при каждом заданном входе $w(\cdot)$ и начальном условии y_0 (см., например, обзор в [9]). В частности, при $C(t, w) = w + Z$, где Z — замкнутое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^r$ (или, в более общем случае, действительного гильбертова пространства $\mathcal{H}$), оператор решения принято называть play оператором, он является оператором гистерезиса типа люфт [1]. В этом случае дифференциальное включение (1) равносильно дифференциальному вариационному неравенству

$$\langle \zeta - w(t) + y(t), \dot{y}(t) \rangle \leq 0 \quad \text{для всех } \zeta \in Z, \quad \text{п.вс. на } T, \quad (2)$$

$$w(t) - y(t) \in Z \quad \text{для всех } t \in T, \quad y(t_0) = y_0. \quad (3)$$

В докладе рассматривается процесс выметания (1) при $w \in BV_r^m(T)$. В этом случае движущееся множество $t \mapsto C(t, w(t))$ имеет ограниченную полную вариацию относительно метрики Хаусдорфа, причем для всех $t_0 \leq s \leq t \leq t_1$ выполняется неравенство

$$\text{var}_{[s, t]} C \doteq \sup_{\rho} \sum_{i=1}^N d_H(C(\tau_{i-1}, w(\tau_{i-1})), C(\tau_i, w(\tau_i))) \leq \text{var}_{[s, t]} w,$$

где супремум в левой части неравенства берется по всем конечным разбиениям $\rho = \{s = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N = t\}$ отрезка $[s, t]$. Будет сформулировано понятие решения, которое отличается от классического BV -решения, данного в [4, 5]. Отметим также [10], где доказана теорема существования и единственности BV -решения для случая ограниченной усеченной ретракции (bounded truncated retraction) отображения C в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и [2, 3, 6], где изучено расширение вариационного неравенства (2), (3) (и соответствующего процесса выметания) на входы $w \in BV_r(T, \mathcal{H})$.

Один из мотивов расширения классического понятия BV -решения связан с вырожденными задачами оптимального управления системами с гистерезисными нелинейностями. Заметим, что релаксационное расширение таких задач с траекториями ограниченной вариации нельзя описать через классические BV -решения соответствующих процессов выметания. В [7, 8] предложено другое понятие BV -решения вариационного неравенства (2), (3), рассматриваемого на отдельных пополнениях графика функции $w \in BV_r^m(T)$, и приведены примеры появления play оператора с разрывными входами ограниченной вариации в оптимизационных моделях математической экономики. В докладе мы распространим этот подход на процесс выметания (1).

Пополнение графика для $w \in BV_r^m(T)$ определяется следующим образом. Пусть $\tau_1 > 0$. Будем называть параметризацией времени функцию $\eta : [0, \tau_1] \rightarrow [t_0, t_1]$, если она удовлетворяет условиям: а) $\eta(\cdot)$ — неубывающая липшицева функция, б) $\eta(0) = t_0, \eta(\tau_1) = t_1$.

Определим псевдообратную функцию $\theta : [t_0, t_1] \rightarrow [0, \tau_1]$ правилом: $\theta(t) = \inf\{\tau \in [0, \tau_1] \mid \eta(\tau) > t\}$, $t \in (t_0, t_1)$, $\theta(t_0) = 0$, $\theta(t_1) = \tau_1$. Для заданных $\eta(\cdot)$ и $\theta(\cdot)$ введем обозначения: $S^\eta \doteq S_d(\theta)$, $d_s^\eta \doteq \theta(s) - \theta(s-)$, где $S_d(\theta)$ — множество точек скачка θ .

Пусть $z^s : [0, d_s^\eta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $s \in S^\eta$ — семейство липшицевых функций с соответствующими константами $L(z^s)$, причем $\sup_{s \in S^\eta} L(z^s) < +\infty$.

Будем называть $w_\eta \doteq (w(\cdot), \{z^s(\cdot)\}_{s \in S^\eta})$ пополнением графика функции $w \in BV_r^m(T)$, а $\eta(\cdot)$ согласованной параметризацией времени, если выполняются следующие условия:

- $S_d(w) \subseteq S^\eta$, $z^s(0) = w(s-)$, $z^s(d_s^\eta) = w(s)$ для всех $s \in S^\eta$,

- функция $\xi : [0, \tau_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданная правилом

$$\xi(\tau) = w(\eta(\tau)) \quad \text{для всех } \tau \in [0, \tau_1] \setminus \bigcup_{s \in S^\eta} \Delta_s, \quad \Delta_s \doteq [\theta(s-), \theta(s)],$$

$$\xi(\tau) = z^s(\tau - \theta(s-)) \quad \text{для всех } \tau \in \Delta_s \text{ и всех } s \in S^\eta,$$

является абсолютно непрерывной.

Обозначим через $\mathcal{T}_w([0, \tau_1], T)$ множество всех параметризаций времени, согласованных с $w(\cdot)$. Определим множество $BV_{gr}^m(T)$ всех пополнений графиков, соответствующее $BV_r^m(T)$, т. е.

$$BV_{gr}^m(T) = \{w_\eta \mid w \in BV_r^m(T), \eta \in \mathcal{T}_w([0, \tau_1], T), \tau_1 \geq t_1 - t_0\}.$$

В докладе будет введено понятие решения и доказана теорема его существования и единственности для процесса выметания (1) при $w_\eta \in BV_{gr}^m(T)$, а также доказана непрерывность соответствующего оператора решения в топологии, заданной метрикой Хаусдорфа между графиками элементов $BV_{gr}^m(T)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00026).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 271 с.
2. *Kopfova J., Recupero V.* BV-norm continuity of sweeping processes driven by a set with constant shape // J. Differential Equations. 2016. Vol. 261. No. 10. P. 5875–5899. DOI: 10.1016/j.jde.2016.08.025
3. *Krejčí P., Recupero V.* Comparing BV solutions of rate independent processes // J. Convex Anal. 2004. Vol. 21. P. 121–146.
4. *Marques M.D.R.M.* Regularization and graph approximation of a discontinuous evolution problem // J. Differential Equations. 1987. Vol. 67. P. 145–164.
5. *Moreau J.-J.* Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space // J. Differential Equations. 1977. Vol. 26. P. 347–374. DOI: 10.1016/0022-0396(77)90085-7
6. *Recupero V.* BV continuous sweeping processes // J. Differential Equations. 2015. Vol. 259. P. 4253–4272. DOI: 10.1016/j.jde.2015.05.019
7. *Samsonyuk O.N., Timoshin S.A.* Optimal impulsive control problems with hysteresis // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the Memory of V.F. Demyanov, CNSA-2017): proc. 2017. P. 276–280. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974010
8. *Samsonyuk O.N., Timoshin S.A.* Optimal control problems with states of bounded variation and hysteresis // J. Global Optim. 2019. Vol. 74. No. 3. P. 565–596. DOI: 10.1007/s10898-019-00752-7

9. *Kunze M., Marques M.D.R.M.* An introduction to Moreau's sweeping process // *Impacts in Mechanical Systems* (ed.: Bernard Brogliato). Lecture Notes in Phys., 2000. Vol. 551. P. 1–60. DOI: 10.1007/3-540-45501-9
10. *Thibault L.* Moreau sweeping process with bounded truncated retraction // *J. Convex Anal.* 2016. Vol. 23. P. 1051–1098.

A Sweeping Process with a Discontinuous Moving Set

Svyatoslav S. Orlov¹, Olga N. Samsonyuk²

¹ Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS,
Irkutsk, Russia, s.orlov@icc.ru

² Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS,
Irkutsk, Russia, olga.samsonyuk@icc.ru

Abstract: A sweeping process whose solutions are graph completions of BV -functions is considered. Such processes arise from a relaxation of singular optimal control problems for systems with hysteresis nonlinearities. We introduce a solution concept for this sweeping process, study the continuity property of the corresponding solution operator, and prove the existence and uniqueness theorem for the sweeping process.

УДК 519.83

Новый подход к определению характеристической функции в стохастических играх

Е.М. Парилина¹, Л.А. Петросян²

¹ СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, e.parilina@spbu.ru

² СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, l.petrosyan@spbu.ru

Аннотация: В работе предлагается метод построения кооперативной стохастической игры в форме характеристической функции по изначально заданной некооперативной стохастической игре с конечным множеством состояний и конечными множествами стратегий игроков в этих состояниях. Построение характеристической функции основано на вычислении максимальных значений игры коалиции против анти-коалиции для каждого состояния игры. Предложенная характеристическая функция обладает рядом положительных свойств, включая простоту вычисления и сильную позиционную состоятельность s -ядра, построенного по данной функции.

Ключевые слова: кооперативная стохастическая игра, сильная позиционная состоятельность, характеристическая функция, s -ядро.

Введение

Построение кооперативного варианта стохастических игр, впервые определенных в работе [9], является актуальной задачей, которая имеет множество решений. К решению этой задачи могут быть применены классические подходы к определению кооперативной стохастической игры, задав значение характеристической функции в виде значения стохастической игры с нулевой суммой между коалицией и анти-коалицией [4]. В настоящей работе предлагается подход, представленный в работе [2] для динамических игр. Данный способ построения характеристической функции основан на вычислении нижних значений игр между коалицией и анти-коалицией во всех состояниях игры. Он позволяет уменьшить вычислительную сложность алгоритма построения характеристической функции, предложенной в [4]. Стоит также отметить альтернативные способы построения характеристических функций для дифференциальных игр [6, 7], которые могут быть также адаптированы для стохастических игр. Другое положительное свойство, вытекающее из построения новой характеристической функции, — сильная позиционная состоятельность с-ядра [1]. Это свойство является более «сильным» по сравнению с позиционной состоятельностью с-ядра (см. [5]) и требует выполнения дополнительных условий. Достаточные условия сильной позиционной состоятельности с-ядра были получены в работах [3] и [8] для стохастических и многошаговых игр соответственно.

1. Стохастические игры с конечным множеством состояний

Определим стохастическую игру G набором

$$\left\langle N, \Omega, \{\Gamma(\omega)\}_{\omega \in \Omega}, \pi_0, \left\{p(\omega''|\omega', a^{\omega'})\right\}_{\substack{\omega', \omega'' \in \Omega \\ a^{\omega'} \in \prod_{i \in N} A_i^{\omega'}}}, \delta \right\rangle,$$

где $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество игроков; $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ — конечное множество состояний; $\Gamma(\omega)$ — игра в нормальной форме, разыгрываемая игроками из N в состоянии ω , определяемая множествами стратегий игроков и функциями выигрышей: A_i^ω — конечное множество стратегий игрока $i \in N$ в состоянии $\omega \in \Omega$, элемент которого $a_i^\omega \in A_i^\omega$ называется стратегией игрока $i \in N$ в этом состоянии; $K_i^\omega : \prod_{j \in N} A_j^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ — конечная функция выигрыша игрока $i \in N$

в состоянии ω ; $p(\cdot|\omega, a^\omega) : \Omega \times A^\omega \rightarrow \Delta(\Omega)$ — функция перехода из состояния $\omega \in \Omega$ и ситуации $a^\omega \in \prod_{j \in N} A_j^\omega$, $\Delta(\Omega)$ — вероятностное распределение на множестве Ω ; $\pi_0 = (\pi_0^{\omega_1}, \dots, \pi_0^{\omega_k})$ — начальное состояние игры, определенное вероятностным распределением, где π_0^ω — вероятность того, что состояние ω реализуется в первый период, $\sum_{\omega \in \Omega} \pi_0^\omega = 1$; δ — дисконтирующий фактор.

Стационарной стратегией игрока i называется отображение $\eta_i : \Omega \rightarrow \prod_{\omega \in \Omega} A_i^\omega$. Обозначим через H_i набор стационарных стратегий игрока i . Ситуацией в игре G называется набор стратегий $\eta = (\eta_i : i \in N)$.

Рассмотрим кооперативный вариант игры, предположив, что игроки объединяются и максимизируют суммарный выигрыш, который равен математическому ожиданию дисконтированной суммы пошаговых выигрышей. Набор кооперативных стратегий — это ситуация

$$\bar{\eta} = \arg \max_{\eta \in \prod H_j} \sum_{i \in N} E_i(\eta),$$

где $E_i(\eta) = (E_i^{\omega_1}(\eta), \dots, E_i^{\omega_k}(\eta))$ и $E_i^\omega(\eta) = \pi_0^\omega (\mathbb{I} - \delta \Pi(\eta))^{-1} K_i(a)$, π_0^ω — единичный вектор размерности k с единицей, соответствующей состоянию ω , $K_i(a) = (K_i^{\omega_1}(a^{\omega_1}), \dots, K_i^{\omega_k}(a^{\omega_k}))$ и $\eta_i(\omega) = a_i^\omega$, $\omega \in \Omega$.

Определим несколько характеристических функций:

1. Для каждой игры в нормальной форме Γ^ω , $\omega \in \Omega$, определим характеристическую функцию как нижнее значение игры с нулевой суммой между коалициями $S \subseteq N$ (максимизирующий игрок) и $N \setminus S$ (минимизирующий игрок), т. е.

$$v(\omega, S) = \max_{a_S} \min_{a_{N \setminus S}} \sum_{i \in S} K_i^\omega(a_S^\omega, a_{N \setminus S}^\omega). \quad (1)$$

Для каждой коалиции $S \subseteq N$ найдем максимальное значение функции (1) на множестве состояний Ω :

$$\bar{w}(S) = \max_{\omega \in \Omega} v(\omega, S). \quad (2)$$

2. Для каждого состояния $\omega \in \Omega$ определим характеристическую функцию $w(\omega, S)$ по правилу:

- если $S = N$, то $w(\omega, S) = \sum_{i \in S} K_i^\omega(\bar{a}^\omega)$;

- если $S \subset N$, $S \neq N$, то $w(\omega, S) = \bar{w}(S)$, заданное формулой (2).

Обозначим через $C(\omega)$ с-ядро состояния ω , построенное по характеристической функции $w(\omega, S)$, и предположим, что оно непусто для любого $\omega \in \Omega$.

3. Определим характеристическую функцию для подыгры G^ω , начинающуюся из состояния ω , используя максиминный подход:

$$\bar{v}(\omega, S) = \max_{\eta_S} \min_{\eta_{N \setminus S}} \sum_{i \in S} E_i^\omega(\eta_S, \eta_{N \setminus S}). \quad (3)$$

Обозначим через $\bar{C}(\omega)$ с-ядро состояния ω , построенное по характеристической функции $\bar{v}(\omega, S)$, и предположим, что оно непусто для любого $\omega \in \Omega$.

4. По значениям функции $w(S)$ определим характеристическую функцию для стохастической игры по формуле:

$$\bar{w}(S) = w(S) + \delta w(S) + \delta^2 w(S) + \dots = \frac{1}{1 - \delta} w(S). \quad (4)$$

Эту функцию можно считать «верхней оценкой» выигрыша коалиции S , который она может получить в стохастической игре. По характеристической функции $\bar{w}(S)$ определим аналог с-ядра $\bar{D}(\omega)$, и предположим, что оно непусто.

Теорема 1. Пусть для любого $S \neq N$ выполнено условие: $w(S) < \min_{\omega \in \Omega} v(\omega, N)$, тогда $\bar{D}(\omega) \subset \bar{C}(\omega)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01079).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л.А. Сильно динамически устойчивые принципы оптимальности в многокритериальных задачах оптимального управления // Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 169–174.
2. Pankratova Y.B., Petrosyan L.A. New characteristic function for multistage dynamic games // Vestnik St. Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. 2018. Vol. 14. Iss. 4. P. 316–324.
3. Parilina E.M., Petrosyan L.A. Strongly Subgame-Consistent Core in Stochastic Games // Automation and Remote Control, 2018. Vol. 79, no. 8. P. 1515–1527.

4. *Parilina E., Tampieri A.* Stability and cooperative solution in stochastic games // Theory and Decision, 2018. Vol. 84, no. 4. P. 601–625.
5. *Parilina E., Zaccour G.* Node-consistent core for games played over event trees // Automatica, 2015. Vol. 53. P. 304–311.
6. *Gromova E.V., Petrosyan L.A.* On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78, no. 9. P. 1680–1692.
7. *Petrosyan L., Zaccour G.* Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. Econom. Dynam. Control, 2003. Vol. 27, no. 3. P. 381–398.
8. *Sedakov A.A.* On the strong time consistency of the core // Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79, no. 4. P. 757–767.
9. *Shapley L.S.* Stochastic games // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1953. Vol. 39. P. 1095–1100.

New Approach to Define Characteristic Function in Stochastic Games

Elena M. Parilina¹, Leon A. Petrosyan²

¹ Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia, e.parilina@spbu.ru

² Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia, l.petrosyan@spbu.ru

Abstract: We propose a new method for constructing a cooperative stochastic game in the form of characteristic function based on a noncooperative stochastic game with a finite set of states and finite sets of players' strategies. The method is based on calculating maximin values of zero-sum games between the coalition and anti-coalition in all states. The characteristic function has positive properties, including computational simplicity and the strongly subgame consistency of the core constructed by this function.

УДК 517.977

Принцип максимума Понтрягина и свойство выпуклости сечений по угловой координате трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса

В.С. Пацко¹, А.А. Федотов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

¹ patsko@imm.uran.ru

Аннотация: Для управляемого объекта, называемого “машиной Дубинса”, рассмотрена взаимосвязь свойств выпуклости множества достижимо-

сти в фиксированный момент времени и принципа максимума Понтрягина. Исследуются двумерные сечения трёхмерного множества достижимости по угловой координате. Рассмотрены различные варианты ограничения на скалярное управляющее воздействие. В случаях, когда ограничение на управление допускает повороты в обе стороны, сечения множества достижимости по угловой координате, вообще говоря, не являются выпуклыми и принцип максимума составляет лишь необходимое условие перевода на границу множества достижимости. Если же ограничение на управление допускает только односторонний поворот, то сечения являются выпуклыми и принцип максимума становится достаточным условием перевода на границу.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, машина Дубинса, геометрическое ограничение на управление, множество достижимости.

1. Постановка задачи

Движение “машины Дубинса” описывается в нормированных переменных следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad \varphi \in (-\infty, \infty).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости, φ — угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси x . В ограничении на управление u условимся считать $u_2 = 1$. Значение $u_1 \in [-1, 1)$ полагаем параметром задачи.

Если $u_1 = -1$, то это симметричный случай. Если $u_1 \in (-1, 0)$, то такой случай называем несимметричным. В третьем случае считаем $u_1 = 0$. Здесь поворот возможен только в одну сторону (против часовой стрелки), но движение по прямой не запрещено. В четвёртом случае условимся, что $u_1 \in (0, 1)$. Это случай строгого одностороннего поворота.

Подчеркнём, что угол φ рассматривается в диапазоне $(-\infty, \infty)$.

Допустимыми управлениями считаем измеримые функции времени со значениями в множестве $[u_1, 1]$.

Нас интересует трёхмерное множество достижимости $G(t_f)$ в заданный момент t_f . Оно представляет собой совокупность всех фазовых состояний в момент t_f , реализуемых в системе (1) при помощи допустимых программных управлений из оговоренного в момент t_0 начального состояния x_0, y_0, φ_0 . Не теряя общности, полагаем $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = \varphi_0 = 0$.

Известно, что любое программное управление, ведущее на границу множества достижимости $G(t_f)$, удовлетворяет [1, 2] принципу максимума Понтрягина (ПМП).

Цель работы – в рамках модели Дубинса выделить случаи, когда ПМП является не только необходимым, но и достаточным условием перевода движения на границу множества достижимости $G(t_f)$. Такой анализ дополняет факты, изложенные в [3, 4].

2. Принцип максимума Понтрягина

Специфика исходной системы (1) состоит в том, что её правая часть не зависит от переменных x, y геометрического положения. Пусть в исходной системе действует управление $u^*(\cdot)$, вызывающее движение $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$. Соответствующая сопряженная система имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t).\end{aligned}\tag{2}$$

Необходимое условие перевода на границу в виде ПМП означает существование *ненулевого* решения $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ системы (2), такого, что

$$\psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, 1]} \psi_3^*(t)u, \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_f].\tag{3}$$

Опираясь на принцип максимума, доказывается, что при исследовании управлений, ведущих на границу множества достижимости, можно ограничиться кусочно-постоянными управлениями, принимающими значения $u_1, 1$ и 0 в первых трёх случаях ограничений на управление и значения $u_1, 1$ в четвёртом случае.

3. Результаты работы

Установлено, что в симметричном и несимметричном случаях двумерные сечения трёхмерного множества достижимости $G(t_f)$ по угловой координате φ (φ -сечения) не являются, вообще говоря, выпуклыми. В этих случаях ПМП является только необходимым условием для управлений, ведущих на границу множеств достижимости

$G(t_f)$. Приводятся примеры, когда некоторое управление вместе с соответствующим движением удовлетворяют ПМП, однако в момент t_f получаемая конечная точка лежит не на границе множества $G(t_f)$, а в его внутренности.

В случае одностороннего поворота, когда $u_1 = 0$, любое φ -сечение множества $G(t_f)$ представляет собой выпуклое множество. ПМП является при этом не только необходимым, но и достаточным условием для движений, ведущих на границу множества достижимости.

В случае строго одностороннего поворота, когда $u_1 \in (0, 1)$, любое φ -сечение множества достижимости $G(t_f)$, за исключением крайних одноточечных сечений, представляет собой строго выпуклое двумерное множество. ПМП является достаточным условием для перевода на границу множества $G(t_f)$, и, более того, для любой точки на границе кусочно-постоянное управление, ведущее в эту точку, является единственным.

Замечание. Свойство выпуклости φ -сечений, специфическое для случаев одностороннего и строго одностороннего поворотов, теряется, если угол φ просчитывать по модулю 2π .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410).

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
3. Пацко В.С., Федотов А.А. Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 143–155.
4. Patsko V.S., Fedotov A.A. Attainability set at instant for one-side turning Dubins car // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 201–206.

The Pontryagin Maximum Principle and the Convexity Property of the Cross Sections by the Angular Coordinate of the Three-Dimensional Reachable Set for the Dubins Car

Valerii S. Patsko¹, Andrey A. Fedotov

IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia,

¹ patsko@imm.uran.ru

Abstract: For a controlled object called “Dubins car”, the interconnection of convexity properties of the reachable set at a fixed time with the Pontryagin

maximum principle is considered. Two-dimensional cross sections of a three-dimensional reachable set by angular coordinate are investigated. Various variants of constraints on the scalar control are considered. In the cases, where the constraint allows turns in both directions, the cross sections of the reachable set by angular coordinate, generally speaking, are not convex; and under this, the maximum principle is only the necessary condition for the transfer onto the boundary of the reachable set. If the control constraint allows only one-direction turn, then the sections are convex, and the maximum principle becomes the sufficient condition for the transfer onto the boundary.

УДК 517.977

К вопросу об управляемости одной вырожденной гибридной системой

П.С. Петренко

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, petrenko_p@mail.ru

Аннотация: Данная работа лежит в русле тематики дискретно-непрерывных гибридных систем, но существенным образом опирается на методику исследования вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для такого рода систем построена эквивалентная структурная форма, получены условия R -управляемости (управляемости в пределах множества достижимости).

Ключевые слова: гибридные системы, дифференциально-алгебраические уравнения, управляемость.

Введение

Рассмотрим дискретно-непрерывную систему

$$Ax'(t)=Bx(t)+C_k y_k+U_k u_k(t), \quad t \in T_k=[t_k, dt_{k+1}), \quad k=\overline{0, m}, \quad (1)$$

$$y_k = D_{k-1}x(t_{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-1} G_{k-1,i} y_i + V_{k-1} v_{k-1}, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad (2)$$

где $A, B, C_k, U_k, D_k, G_{k,i}, V_k$ — заданные вещественные матрицы размеров $n \times n, n \times n, n \times s, n \times l, s \times n, s \times s, s \times \lambda$, соответственно, $\det A = 0$; $x(t) \in \mathbf{C}(T_k)$ — непрерывная, а $y_k \in \mathbf{R}^s$ — дискретная компонента

искомой функции состояния системы; $u_k(t)$ и v_k ($k = \overline{0, m}$) — l - и λ -мерные векторы непрерывного и дискретного управления, соответственно; $t_0 < \dots < t_{m+1}$, $T = [t_0, t_{m+1})$. Систему (1), (2) будем называть вырожденной линейной гибридной.

Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена ее многочисленными приложениями, в частности, в обзоре [3], посвященном моделированию и оптимизации гибридных систем, хорошо представлен прикладной аспект таких исследований. К примеру, в виде (1), (2) может быть представлена модель двух вращающихся на одной оси твердых тел, которые в процессе вращения переключаются из режима скользящего соединения на режим жесткого сцепления между собой.

1. Эквивалентные преобразования

Рассмотрим систему

$$Ax'(t) = Bx(t) + f(t), \quad t \in I \subset \mathbf{R}, \quad (3)$$

где A, B — $(n \times n)$ -матрицы, $\det A = 0$, $f(t)$ — некоторая непрерывная на I функция; $x(t)$ — n -мерная искомая функция состояния. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ).

Обозначим

$$D_{r,z} = \begin{pmatrix} A & O & \dots & O \\ B & A & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A \end{pmatrix}, \quad D_{r,y} = \begin{pmatrix} A & O \\ \begin{pmatrix} B \\ \vdots \\ O \end{pmatrix} & D_{r,z} \end{pmatrix},$$

$$D_{r,x} = \begin{pmatrix} B_r & D_{r,y} \end{pmatrix}, \quad B_r = (B, O, \dots, O).$$

Пусть для некоторого целого r ($0 \leq r \leq n$) в матрице $D_{r,x}$ найдется неособенный минор порядка $n(r+1)$, включающий в себя $\rho = \text{rank } D_{r,z}$ столбцов матрицы $D_{r,z}$ и n первых столбцов матрицы $D_{r,y}$. Такой минор будем называть разрешающим.

Лемма 1 [1]. Пусть в матрице $D_{r,x}$ имеется разрешающий минор, а также выполняется соотношение $\text{rank } D_{r+1,y} = \text{rank } D_{r,y} + n$. Тогда существует обратимый на I оператор

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1 \frac{d}{dt} + \dots + R_r \left(\frac{d}{dt} \right)^r, \quad (4)$$

действие которого преобразует ДАУ (3) к виду

$$x'_1(t) = J_1 x_1(t) + f_1(t), \quad x_2(t) = J_2 x_1(t) + f_2(t), \quad t \in I, \quad (5)$$

причем решения ДАУ (3) являются решениями системы (5) и наоборот. Здесь

$$\begin{aligned} (x_1(t), x_2(t)) &= Q^{-1} x(t), \quad \begin{pmatrix} J_2 & E_d \\ J_1 & O \end{pmatrix} = R_0 B Q, \quad (f_2(t), f_1(t)) = \mathcal{R}[f(t)]; \\ \begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \end{pmatrix} \Gamma_r^\top (\Gamma_r \Gamma_r^\top)^{-1}; \\ \Gamma_r &= D_{r,x} \operatorname{diag} \left\{ Q \begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix}, Q, \dots, Q \right\}. \end{aligned}$$

2. Основной результат

Из уравнений (1), (2) определим векторы $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$:

$$y_k = S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad (6)$$

где $S_0 = E_s$, $S_k = \sum_{j=0}^{k-1} G_{k-1,j} S_j$, $P_{k,k-1} = D_{k-1}$, $L_{k,k-1} = V_{k-1}$, $k = \overline{1, m}$; $P_{k,i} = \sum_{j=i+1}^{k-1} G_{k-1,j} P_{j,i}$, $L_{k,i} = \sum_{j=i+1}^{k-1} G_{k-1,j} L_{j,i}$, $k = \overline{2, m}$, $i = \overline{0, k-1}$.

Пусть $x_k(t) = x(t)$, $t \in T_k$ ($k = \overline{0, m}$). Тогда, подставив выражения для y_k из (6) в уравнение (1), получим семейство систем ДАУ

$$\begin{aligned} A x'_k(t) &= B x_k(t) + C_k \left(S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x_i(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i \right) + U_k u_k(t), \\ t &\in T_k, \quad k = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поддействовав оператором (4) на уравнение (7), получим систему

$$\begin{aligned} x'_{k,1}(t) &= J_1 x_{k,1}(t) + C_{k,1} \left(S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x_i(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i \right) + \mathcal{H}_k \mathbf{d}_r[u_k(t)], \\ x_{k,2}(t) &= J_2 x_{k,1}(t) + C_{k,2} \left(S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x_i(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i \right) + \\ &+ \mathcal{K}_k \mathbf{d}_r[u_k(t)], \quad t \in T_k, \quad k = \overline{0, m}; \end{aligned}$$

где $\mathbf{d}_r[f(t)] = (f(t), f'(t), \dots, f^{(r)}(t))$, $x_i(t) = Q \begin{pmatrix} x_{i,1}(t) \\ x_{i,2}(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C_{k,2} \\ C_{k,1} \end{pmatrix} = R_0 C_k$, $\begin{pmatrix} \mathcal{K}_k \\ \mathcal{H}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{k,0} & \dots & K_{k,r} \\ H_{k,0} & \dots & H_{k,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 U_k & \dots & R_r U_k \end{pmatrix}$, $k = \overline{0, m}$. Здесь и далее функции $u_k(t)$ подразумеваются достаточно гладкими на T_k ($k = \overline{0, m}$).

Определение 1. Систему (7) назовем R -управляемой на отрезке T , если для любых согласованных состояний $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbf{R}^n$, $b_0 \in \mathbf{R}^s$ и любых векторов $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbf{R}^n$, $\beta \in \mathbf{R}^s$ из множества достижимости $\mathcal{M}$ (см. [2]) найдутся векторы v_k и достаточно гладкие на T_k l -мерные вектор-функции $u_k(t)$ ($k = \overline{0, m}$) такие, что существует решение системы (7), удовлетворяющее условиям: $x(t_k + 0) = a_k$, $x(t_{k+1} - 0) = \alpha_k$ ($k = \overline{0, m}$), $y_{m+1} = \beta$.

Теорема 1. Пусть выполнены все предположения леммы 1. Система (7) R -управляема на T тогда и только тогда, когда

$$q^\top \mathcal{S} \neq 0,$$

где

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{L}} & O \\ \Theta C_1 \mathcal{L} & \Theta_1 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \text{diag} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_m}^{t_{m+1}} X^{-1}(\tau) d\tau \right\},$$

$$\Theta_1 = \text{diag} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau) \mathcal{H}_0 \mathbf{d}_r[u_0(\tau)] d\tau, \dots, \int_{t_m}^{t_{m+1}} X^{-1}(\tau) \mathcal{H}_m \mathbf{d}_r[u_m(\tau)] d\tau \right\}, \quad C_1 = \text{diag}\{C_{0,1}, \dots, C_{m,1}\},$$

$X(t)$ — $(n - d) \times (n - d)$ -матрицант однородной системы $X'(t) = J_1 X(t)$, $t \in T_k$, $X(t_k) = E_{n-d}$, $k = \overline{0, m}$; $q \in \mathbf{R}^{s+(m+1)(n-d)}$ — произвольный ненулевой вектор;

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ L_{1,0} & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ L_{m,0} & L_{m,1} & \dots & L_{m,m-1} & O \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} L_{m+1,0} & \dots & L_{m+1,m} \end{pmatrix}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-20030).

ЛИТЕРАТУРА

1. Щеглова А.А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // АиТ. 2008. Т. 10. С. 57–80.
2. Щеглова А.А., Петренко П.С. R -наблюдаемость и R -управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Изв. вузов. Матем. 2012. № 3. С. 73–91.
3. Barton P.I., Lee C.K. Modeling, simulation, sensitivity analysis and optimization of hybrid systems // ACM Transactions Modeling Comput. Simulation. 2002. Vol. 12, no. 4. P. 256–289.

To the Question of Controllability of One Singular Hybrid System

P.S. Petrenko

IDSC T SB RAS, Irkutsk, Russia, petrenko_p@mail.ru

Abstract: This work is in line with the topic of discrete-continuous hybrid systems, but essentially relies on the methodology for studying singular systems of ordinary differential equations. For such systems an equivalent structural form has been constructed, the conditions of R -controllability (controllability in the reachable set) are obtained.

УДК 517.977.8

К задаче группового преследования в дифференциальных играх с дробными производными

Н.Н. Петров¹, А.И. Мачтакова², А.Я. Нарманов³

¹ Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия, kma3@list.ru

² Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия,
bichurina.alyona@yandex.ru

³ Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улукбека,
Ташкент, Узбекистан, narmanov@yandex.ru

Аннотация: Рассматривается линейная задача преследования группой преследователей группу убегающих с равными возможностями всех участников и геометрическими ограничениями на управления игроков. Цель преследователей — поймать заданное число убегающих. Получены достаточные условия поимки.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий.

Одним из направлений современной теории дифференциальных игр преследования является разработка методов решения задач конфликтного взаимодействия группы преследователей с группой убегающих [1–3]. Следует отметить, что кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [4, 5] рассматривалась задача преследования двух лиц, описываемая уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей группу убегающих с равными возможностями всех участников в дифференциальной игре, описываемой уравнениями с дробными производными. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих.

Определение 1 [6]. Пусть p — натуральное число, $\mu \in (p - 1, p)$, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — функция, такая что $f^{(p)}$ абсолютно непрерывна на $[0, +\infty)$. Производной по Капуто порядка μ функции f называется функция $D^{(\mu)}f$ вида

$$\left(D^{(\mu)}f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(p-\mu)} \int_0^t \frac{f^{(p)}(s)}{(t-s)^{\mu-1}} ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$, описывая системой вида

$$D^{(\mu)}z_{ij} = az_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = x_{ij}^0, \dots, z_{ij}^{(p)}(0) = z_{ij}^p, \quad u_i \in V.$$

Здесь $z_{ij}, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$, V — выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Кроме того, $z_{ij}^0 \notin M_{ij}$, где M_{ij} — заданные выпуклые компакты.

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее чем q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей ($r \geq 1, 1 \leq q \leq m$) при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи, на основе информации о выборе убегающих, выбирают свои управления и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geq rq, m \geq q$.

Определение 2. В игре происходит r -кратная поимка (при $r = 1$ поимка) убегающего E_β , если существует $T > 0$ при котором для любых допустимых управлений $v_j(t)$, $j \in J$, $t \in [0, \infty)$ убегающих E_j , $j \in J$ найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$ преследователей $P_1, \dots, P_n$, моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_r \in [0, T]$, попарно различные натуральные числа $i_1, \dots, i_r \in I$, что $z_{i_p \beta}(\tau_p) \in M_{i_p \beta}$ для всех $p = 1, \dots, r$.

Определение 3. В игре $G(n, m)$ происходит r -кратная поимка (при $r = 1$ поимка) не менее q убегающих, если существует $T > 0$ при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$ убегающих E_j , $j \in J$ найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$, $i \in I$ преследователей P_i , $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q, \quad \{N_l, l \in M\}, \quad N_l \subset I, \quad |N_l| = r \quad \text{для всех } l \in M, \\ N_l \cap N_s = \emptyset \quad \text{для всех } l \neq s,$$

такие, что группа преследователей $\{P_l, l \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β , причем если преследователь P_l ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Введем следующие обозначения. $\text{Int} A$, $\text{co} A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A . Пусть K — некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел.

$$\Omega_K(s) = \{(i_1, \dots, i_s) \mid i_1, \dots, i_s \in K \text{ и попарно различны}\}, \\ \lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda h \in V - v\},$$

Теорема 1. Пусть $a = 0$, $\alpha \in (0, 1)$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \text{Int co} \{z_{\alpha\beta}^0 - M_{\alpha\beta}, \alpha \in \Lambda\} \quad \text{для всех } \beta \in M.$$

Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

В дальнейшем предполагаем, что $M_{ij} = \{0\}$ для всех i, j .

Предположение 1. Для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что

$$\delta_N(\beta) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda\left(\frac{z_{l\beta}^{p-1}}{\Gamma(p)}, v\right) > 0$$

для всех $\beta \in M$.

Теорема 2. Пусть $a = 0$ и выполнено предположение 1. Тогда в игре $G(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 3. Пусть $a < 0$, $\alpha \in (0, 1)$ и выполнено предположение 1. Тогда в игре $G(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 4. Пусть $a < 0$, $\alpha \in (1, 2)$ и для всех $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что

$$\delta_N(\beta) = \min\left\{\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(z_{l\beta}^1, v), \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(-z_{l\beta}^1, v)\right\} > 0$$

для всех $\beta \in M$. Тогда в игре $G(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 5. Пусть $a \leq 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $q = r = 1$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, убегающие используют одно и то же управление и

$$\text{Intco}\{x_i^0, i \in I\} \cap \text{co}\{y_j^0, j \in J\} \neq \emptyset.$$

Тогда в игре $G(n, m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9), второго автора — грантом РФФИ (проект № 18-51-41005), третьего автора — грантом MRU-10/17.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благодатских А.И., Петров Н.Н.* Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
2. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
3. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
4. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 262–278.
5. *Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.* Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка // Украинский математический журнал. 2000. Т. 52, № 11. С. 1566–1583.
6. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent- II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. No. 13. P. 529–539.

To the Problem of Group Pursuit in Differential Games with Fractional Derivatives

N.N. Petrov¹, A.I. Machtakova², A.Ya. Narmanov³

¹ Udmurt State University, Izhevsk, Russia, kma3@mail.ru

² Udmurt State University, Izhevsk, Russia, bichurina.alyona@yandex.ru

³ National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, narmanov@yandex.ru

Abstract: The linear problem of pursuing a group of pursuers of a group of evaders with equal opportunities of all participants and geometric constraints on the controls of players is considered. The goal of the pursuers is to catch a given number of evaders. Sufficient capture conditions were obtained.

УДК 517.977.8

Построение динамически устойчивых решений в дифференциальных играх на сетях

Л.А. Петросян

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, l.petrosyan@spbu.ru

Аннотация: При рассмотрении неантагонистических кооперативных дифференциальных игр на сетях основной проблемой является построение характеристической функции игры, определяющей силу

коалиций игроков. В данной работе предлагается подход для построения характеристической функции не требующий выполнения операций максимизации или нахождения равновесий по Нэшу между коалицией, действующей как один игрок и другими игроками. Этот подход удалось реализовать, используя специфику сетевой игры, позволяющей игроку прерывать связи с соседями, если это в данный момент соответствует его интересам. Оказалось, что построенная таким образом характеристическая функция не только позволяет просто строить классические решения теории кооперативных игр, но и обеспечивает их динамическую устойчивость (состоятельность во времени), а в отдельных случаях и сильную динамическую устойчивость.

Ключевые слова: дифференциальная игра, кооперация, сеть, характеристическая функция, динамическая устойчивость, вектор Шепли.

Введение

В работе исследуются неантагонистические кооперативные игры с независимыми движениями на сети. Считается, что выигрыш игрока аддитивно зависит от поведения его соседей по сети. Выигрыши игроков предполагаются трансферабельными, поэтому как это и принято в классической кооперативной теории игр игроки выбирают стратегии, максимизирующие суммарный выигрыш и игра развивается вдоль траектории, порожденной этими стратегиями, т.е. вдоль кооперативной траектории. Проблема заключается в определении способа дележа полученного в результате кооперации этого максимального суммарного выигрыша и определении алгоритма выплат каждому игроку в процессе реализации кооперативной траектории.

Ранее нами было замечено, что выплаты должны осуществляться таким образом, чтобы обеспечить динамическую устойчивость [3] или состоятельность во времени выбранного способа дележа максимального суммарного выигрыша. Имеются различные подходы для решения этой задачи, однако многое зависит от того каким образом построена характеристическая функция [4] игры определяющая силу коалиций игроков в игре. В данной работе нами предложен новый способ построения характеристической функции, существенно использующий сетевую структуру игры и значительно упрощающий как форму характеристической функции так и способы ее вычисления, что приводит к серьезному упрощению построения динамического вектора Шепли и процедур распределения дележа (алгоритм выплат).

1. Основной результат

Пусть $N = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ множество игроков объединенных в сеть. Вершинами этой сети являются игроки из множества N . Поэтому для простоты множество вершин в сети мы также будем обозначать через N . Обозначим через $L = \{(i, j)\}$, $i \in N$, $j \in N$ множество всех дуг в сети. Подмножество $S \subset N$ называется коалицией. Обозначим через $K(i) = \{j : (i, j) \in L\}$.

Пусть x_i позиционная переменная игрока i и $u_i \in U_i$ соответствующее управление. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{x}_i = f^i(x^i, u^i), \quad x^i(t_0) = x_0^i, \quad u^i \in U^i, \quad t \in [t_0, T]. \quad (1)$$

В теории дифференциальных игр нетривиальным вопросом является определение класса допустимых стратегий игроков [1]. Особенностью данной постановки является возможность использования только программных стратегий, однако требуется выполнение следующего условия.

Условие У. Каждый игрок может прервать связь с любым игроком или любой группой игроков в любой момент времени.

Функция выигрыша игрока $i \in N$ имеет вид:

$$H_i(x_0^i, T - t_0; u^i, u^{K(i)}) = \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^T h_i(x^i, x^j) d\tau, \quad h_i \geq 0.$$

Она зависит от траекторий движения игрока i и игроков $j \in K(i)$.

Определение 1. Под кооперативной траекторией будем понимать траекторию $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^i, \dots, \bar{x}^n)$, для которой имеет место

$$\max_{u_1, \dots, u_n} \sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^T h_i(x^i(\tau), x^j(\tau)) d\tau = \sum_{i \in N} \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^T h_i(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau$$

при условии (1).

Определим характеристическую функцию по правилу

$$V(S; x_0, T - t_0) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in K(i) \cap S} \int_{t_0}^T h_i(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau,$$

где $\bar{x}(t) = (\bar{x}^1(t), \dots, \bar{x}^n)$ кооперативная траектория.

Можно показать, что характеристическая функция выпукла, а следовательно ядро не пусто и вектор Шепли принадлежит ядру.

Динамический вектор Шепли рассчитывается по формуле,

$$Sh_i(x_0, T - t_0) = \sum_{S \subset N, i \in S} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} \times \\ \times \sum_{j \in K(i) \cap S} \int_{t_0}^T h_i(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)) d\tau, \quad i \in N.$$

Из-за специфического определения характеристической функции удается получить динамическую устойчивость вектора Шепли и сильную динамическую устойчивость ядра. В работе [2] при определении значения характеристической функции выигрыш коалиции максимизировался по управлениям игроков в нее входящих, и это приводило к потере динамической устойчивости основных принципов оптимальности (вектор Шепли и, ядро и др.). Мы в данной работе предложили новый подход, который с нашей точки зрения не противоречит содержательному смыслу характеристической функции и значительно упрощая вычисления одновременно решает проблему динамической устойчивости принципов оптимальности кооперативной теории для динамических игр на сетях.

Работа выполнена при финансовой Российской Научного Фонда (проект № 17-11-01079).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
2. Петросян Л.А. Кооперативные дифференциальные игры на сетях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 143–150.
3. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. Устойчивые решения в неантагонистических дифференциальных играх с нетрансферабельными выигрышами // Вест. ЛГУ. 1979. Т. 1, вып. 1. С. 46–51.
4. Maschler M., Solan E., Zamir S. Game Theory. Cambridge University Press, 2013.
5. Shapley L.S. A value for n -person games // Contrib. to the Theory of Games. Princeton University Press, Princeton, 1953. P. 307–317.

Construction of Time-Consistent Solutions in Differential Network Games

Leon A. Petrosyan

SPbSU, Saint-Petersburg State University, Russia, l.petrosyan@spbu.ru

Abstract: The main problem in the theory of cooperative differential games is the construction of characteristic function, which determines the strength of player coalitions. In order to effectively calculate the values of characteristic function, it is necessary to find simple approaches for its construction. In this paper, we propose an approach for building a characteristic function that does not require maximization operations or finding Nash equilibrium between a coalition S acting as one player and other players. This approach was implemented using the properties of the network game, which allows the player to interrupt communication with neighbors at each time instant, if this corresponds to his interests. It turned out that the constructed characteristic function not only makes it possible to simplify finding of classical solutions from the cooperative game theory, but also ensures their dynamic stability (time-consistency), and in some cases strong dynamic stability. We derive formulas for the dynamic Shapley Value and the imputation distribution procedure (IDP) implemented to the Shapley Value which receives a natural interpretation and does not require a significant redistribution of players' gains in time when the game develops along the cooperative trajectory.

УДК 519.96

Метод Галеркина для дробного параболического уравнения с функциональным запаздыванием

В.Г. Пименов¹, А.Б. Ложников²

¹ УрФУ, Екатеринбург, Россия, v.g.pimenov@urfu.ru

² ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, ablozhnikov@yandex.ru

Аннотация: Работа посвящена разработке численных алгоритмов решения дробных по времени уравнений параболического типа с нелинейным функциональным запаздыванием в классе методов конечных элементов. Для аппроксимации дробной производной применяется L_1 -метод. Для учета функционального запаздывания применяются процедуры кусочно-постоянной интерполяции по времени с экстраполяцией продолжением. Процедура проектирования рассматривается в одномерном, двумерном или трехмерном пространстве, где множество определения решения по пространству может быть разбито соответственно на интервалы, треугольники или тетраэдры. Задача сводится к решению на каждом шаге

по времени системы линейных уравнений. Приводится основной результат — теорема о порядке сходимости. Эта теорема утверждает, что метод имеет первый порядок по временному шагу, а по шагу разбиения области по пространству — в степени, зависящей от гладкости решения. Анонсируются результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: дробное параболическое уравнение, функциональное запаздывание, метод конечных элементов, кусочно-постоянная интерполяция, экстраполяция продолжением, теорема сходимости.

Введение

Дробные дифференциальные уравнения различных типов в последнее время привлекают всё большее внимание исследователей. Однако, в связи с трудностью применения аналитических методов, на первый план выходит разработка численных алгоритмов их решения. Одним из таких методов является аналог метода Галеркина, который был сконструирован и исследован недавно в [2] для дробных по времени параболических уравнений. В данной работе этот метод модифицируется для дробных параболических уравнений с эффектом запаздывания общего вида, который возникает, в частности, при решении задач управления по принципу обратной связи. Этот эффект учитывается с помощью конструкций, предложенных в [1] для параболических уравнений целого порядка с запаздыванием.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \Delta u(x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1)$$

где $0 \leq t \leq T$, $x \in \Omega$ — независимые переменные, $u(x, t)$ — искомая функция, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\nu \leq s < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t ; ν — величина запаздывания, $\Omega \subset R^d$ ($d = 1, 2$ или 3) — компактное полигональное множество с границей $\partial\Omega$, Δu — оператор Лапласа, дробная производная Капуто порядка α ($0 < \alpha < 1$) определяется формулой

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial \xi} \frac{1}{(t - \xi)^\alpha} d\xi, \quad t > 0.$$

Пусть заданы начальные условия

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [-\nu, 0] \quad (2)$$

и граничные условия

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) представляет собой простейшую краевую задачу для дробного уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида. Будем предполагать, что функция $u_0(x, t)$, и функционал f таковы, что задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t)$. При оценке погрешности разрабатываемых численных методов будем требовать также определенную гладкость решения. Дополнительно предположим липшицевость f по двум последним аргументам в смысле [1].

2. Численный алгоритм

Введем шаг по времени $\tau = \nu/N_0$, где N_0 — натуральное число и пусть $N = [T/\tau]$. Введем точки $t_j = j\tau$, $j = -N_0, \dots, N$.

Пусть дана последовательность функций $\{\omega^n\}_{n=0}^N$, определим разностный оператор

$$D_\tau^\alpha \omega^n = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^n a_{n-j} (\omega^j - \omega^{j-1}), \quad a_i = (i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}, \quad i \geq 0.$$

Возьмем в качестве ω^n функции $u(x, t_n)$. Если точное решение задачи (1)–(3) $u(x, t) \in C^2([0, T]; L^2(\Omega))$, то [2]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t_n)}{\partial t^\alpha} = D_\tau^\alpha u(x, t_n) + Q^n, \quad \|Q^n\|_{L^2} \leq C\tau^{2-\alpha}.$$

Этот результат называется L_1 -аппроксимация дробной производной.

Дискретной (по времени) предысторией функций $\{\omega^n(x)\}_{n=-N_0}^N$, определенных на Ω к моменту t_n ($0 \leq n \leq N$), назовем множество $\{\omega^i\}_n = \{\omega^i(x), n - N_0 \leq i \leq n\}$. Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение IE , ставящее в соответствие $\{\omega^i\}_n$ функцию $\omega(x, t)$, определенную на $\Omega \times [t_n - N_0, t_n + \tau]$.

Простейшим примером оператора интерполяции-экстраполяции является оператор кусочно-постоянной интерполяции

$$\omega(x, t) = \omega^{i-1}(x), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad n - N_0 + 1 \leq i \leq n$$

с непрерывным продолжением

$$\omega(x, t) = \omega^{n-1}(x), \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Этот способ интерполяции-экстраполяции имеет первый порядок на точном решении [1].

Пусть F_h — квазиравномерное разбиение Ω на интервалы в одномерном случае, на треугольники в двумерном случае и на тетраэдры в трехмерном случае с размером h [2]. Обозначим через V_h множество функций, кусочно заданных полиномами степени r на F_h . Обозначим через P_h оператор проектирования на V_h .

Обозначим приближения $P_h u(x, t_n)$ через $U^n = U^n(x)$. В аналоге метода Галеркина для дробных уравнений с функциональным запаздыванием требуется найти U^n из условий

$$(D_\tau^\alpha U^n, v_h) + (\nabla U^n, \nabla v_h) = (f(x, t_n, U^{n-1}, U_{t_n}(x, \cdot)), v_h), \quad (4)$$

выполняющихся для всех $v_h \in V_h$.

3. Основной результат

Теорема 1. *Предположим, что задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, t) \in C^2([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{r+1}(\Omega))$, $U^n(x)$ — решение задачи (4), тогда существует константа C_0 , такая, что*

$$\|u(x, t_n) - U^n(x)\|_{L^2} \leq C_0(h^r + \tau)$$

для всех $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Основной момент в доказательстве состоит в использовании нового дискретного дробного неравенства Гронуолла [2].

Проведенные численные эксперименты подтвердили теоретические результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00019.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пименов В.Г., Ложиников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.
2. Li D., Liao H., Sun W., Wang J. and Zhang J. Analysis of L1-Galerkin FEMs for Time-Fractional Nonlinear Parabolic Problems // Commun. Comput. Phys. 2018. Vol. 24, no. 1. P. 86–103.

The Galerkin Method for a Fractional Parabolic Equation with Functional Delay

V.G. Pimenov¹, A.B. Lozhnikov²

¹ UrFU, Ekaterinburg, Russia, v.g.pimenov@urfu.ru

² IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, ablozhnikov@yandex.ru

Abstract: This paper is concerned with numerical algorithms for solving time-fractional equations of parabolic type with nonlinear functional delay in the class of finite element methods. To approximate the fractional derivative, the L_1 -method is used. To account the functional delay, the piecewise-constant interpolation in time with extrapolation by continuation is used. The design procedure is considered in one-dimensional, two-dimensional, or three-dimensional space, where the set of the definition of a solution by space can be divided into intervals, triangles or tetrahedra, respectively. The problem is reduced to solving at each time step a system of linear equations. The main result, a theorem on the order of convergence, is given. This theorem states that the method has the first order in time step, and in the step of partitioning the domain in space to a degree depending on the smoothness of the solution. The results of numerical experiments are announced.

УДК 517.952, 517.977

Субградиенты функционала цены в задачах оптимального управления системами с запаздыванием

А.Р. Плаксин

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
УрФУ, Екатеринбург, Россия,
a.r.plaksin@gmail.com

Аннотация: Рассмотрена задача оптимального управления, в которой движение динамической системы описывается нелинейным дифферен-

циальным уравнением с запаздыванием, а начальная история движения определяется кусочно-непрерывной функцией. На основе понятий суб- и суперградиентов функционалов вдоль продолжений, дана характеристика функционала цены в этой задаче.

Ключевые слова: задача оптимального управления, системы с запаздыванием, инвариантные производные, субградиенты.

Введение

В теории оптимального управления и теории дифференциальных игр для обыкновенных дифференциальных систем известны [1, 2, 6, 9] различные по форме, но эквивалентные по сути инфинитезимальные характеристики функции оптимального результата (функции цены), которые взаимно дополняют друг друга. Условно, здесь можно выделить два основных подхода. Первый базируется на исследовании производных функции цены по подходящим направлениям. Этот подход приводит к определению этой функции как минимаксного [9] решения соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби (Г-Я). Во втором подходе рассматриваются суб- и суперградиенты функции цены. В рамках этого подхода такая функция определяется как вязкостное [8] решение уравнения Г-Я.

В задачах управления и дифференциальных играх для систем с запаздыванием наиболее полным и естественным образом получил развитие первый подход [3–5, 7, 10]. Ниже даны согласованные с конструкциями из [3, 4] результаты, касающиеся развития второго подхода. При этом, чтобы преодолеть возникающие здесь трудности, предлагается рассматривать задачу оптимального управления в пространстве кусочно-непрерывных историй движения.

1. Основной результат

Функцию $x(\cdot): [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ называем кусочно-непрерывной, если она имеет конечное число точек разрыва, все разрывы первого рода, в точках разрыва функция непрерывна справа. Через $\text{PC}([a, b], \mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство кусочно-непрерывных функций, действующих из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть зафиксированы $t_0 < \vartheta$ и $h > 0$. Обозначим $\mathbb{G} = [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \text{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$.

Пусть движение динамической системы описывается дифферен-

циальным уравнение с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{U}. \quad (1)$$

Здесь t — время; $x(t)$ — состояние системы в момент t ; $u(t)$ — текущее управляющее воздействие; $\mathbb{U}$ — компакт в $\mathbb{R}^m$. Функция $f = f(t, x, y, u) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}$ непрерывна, удовлетворяют локальному условию Липшица по (x, y) , и при некоторой константе $c_f > 0$ неравенству $\|f(t, x, y, u, v)\| \leq c_f(1 + \|x\| + \|y\|)$.

Пусть $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$. Через $\mathcal{U}_\tau$ обозначим множество измеримых функций $u(\cdot): [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$. Можно показать, что при указанных условиях для любой $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ существует единственное движение $x(\cdot) = x(\cdot | \tau, z, w(\cdot), u(\cdot))$ системы (1) — функция из $\text{PC}([\tau-h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, липшицева на отрезке $[\tau, \vartheta]$, удовлетворяющая вместе с $u(t)$ почти всюду на этом отрезке уравнению (1) и удовлетворяющая начальному условию $x(\tau) = z$, $x(t) = w(t - \tau)$, $t \in [\tau - h, \tau]$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления системой (1): для любой $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ необходимо минимизировать по $u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau$ значение функционала

$$J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(\vartheta)), \quad x(\cdot) = x(\cdot | \tau, z, w(\cdot), u(\cdot)),$$

где функция $\sigma = \sigma(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ локально липшицева. В этой задаче функционал цены имеет вид

$$\rho = \rho(\tau, z, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_\tau} J(\tau, z, w(\cdot), u(\cdot)), \quad (\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}.$$

Через Φ обозначим класс функционалов $\varphi = \varphi(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$, $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$ непрерывных по τ и таких, что для любого $\alpha > 0$ найдется $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi(\alpha) > 0$ при котором справедливо неравенство

$$|\varphi(\tau, z_1, w_1(\cdot)) - \varphi(\tau, z_2, w_2(\cdot))| \leq \lambda_\varphi \left(\|z_1 - z_2\| + \int_{-h}^0 \|w_1(\xi) - w_2(\xi)\| d\xi \right),$$

для любых $(\tau, z_1, w_1(\cdot)), (\tau, z_2, w_2(\cdot)) \in \mathbb{G}$ таких, что $\|z_i\| \leq \alpha$ и $\max\{\|w_i(\xi)\| | \xi \in [-h, 0]\} \leq \alpha$, $i = 1, 2$. Отметим, что тогда будет справедливо включение $\rho \in \Phi$.

В работах [3, 4] для описания инфинитезимальных свойств функционала цены применялись инвариантные производные функционалов по продолжениям и производные по подходящим конечномерным и бесконечномерным продолжениям. Приведенные ниже определения суб- и суперградиентов функционалов наследуют идеологию рассматривать соответствующие инфинитезимальные конструкции вдоль продолжений. При этом, для функционалов из класса Φ достаточно будет рассматривать лишь постоянные продолжения.

Определение 1. Пары $(p_0, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $(q_0, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ будем называть соответственно суб- и суперградиентами функционала $\varphi \in \Phi$ в точке $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$, если для любых $v \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [\tau, \min\{\tau + h\vartheta\}]$ справедливы соотношения

$$\varphi(t, v, \kappa_t(\cdot)) - \varphi(\tau, z, w(\cdot)) \geq p_0 + \langle v - z, p \rangle + o(|t - \tau| + \|v - x\|),$$

$$\varphi(t, v, \kappa_t(\cdot)) - \varphi(\tau, z, w(\cdot)) \leq q_0 + \langle v - z, q \rangle + o(|t - \tau| + \|v - x\|),$$

где $\kappa_t(\cdot) \in \text{PC}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$: $\kappa_t(\xi) = w(t - \tau + \xi)$, $\xi \in [-h, \tau - t]$ и $\kappa_t(\xi) = z$, $\xi \in [\tau - t, 0]$, а величина $o(\cdot)$ такова, что $o(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$. Множества всех суб- и суперградиентов будет обозначать через $D^-\varphi(\tau, z, w(\cdot))$ и $D^+\varphi(\tau, z, w(\cdot))$, соответственно.

Обозначим

$$H(\tau, x, y, s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, x, y, u), s \rangle, \quad \tau \in [t_0, \vartheta], \quad x, y, s \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 1. Функционал $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ совпадает с функционалом цены ρ тогда и только тогда, когда для него выполнены

(а) включение $\varphi \in \Phi$;

(б) для любых $(\tau, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$, $\tau < \vartheta$ неравенства

$$p_0 + H(\tau, z, w(-h), p) \leq 0, \quad (p_0, p) \in D^-\varphi(\tau, z, w(\cdot)),$$

$$q_0 + H(\tau, z, w(-h), q) \geq 0, \quad (q_0, q) \in D^+\varphi(\tau, z, w(\cdot));$$

(с) равенство $\varphi(\vartheta, z, w(\cdot)) = \sigma(z)$, $(\vartheta, z, w(\cdot)) \in \mathbb{G}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3566.2019.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. Лукоянов Н.Ю. Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последствием // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 108–118
4. Лукоянов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011. 242 с.
5. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последствием // Доклады АН СССР. 1971. Т. 196. № 4. С. 779–782.
6. Субботин А.И., Тарасьев А.М. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 559–564.
7. Aubin J.P., Haddad G. History path dependent optimal control and portfolio valuation and management // Positivity. 2002. Vol. 6. P. 331–358. DOI: 10.1023/A:1020244921138
8. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Society. 1983. Vol. 277. № 1. P. 1–42. DOI: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8
9. Subbotin A.I. Generalized Solutions of First–Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 314 p.
10. Wolenski P.R. Hamilton–Jacobi theory for hereditary control problems // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1994. Vol. 22. № 7. 875–894. DOI: 10.1016/0362-546X(94)90056-6

Subgradients of a value functional in optimal control problems for time-delay systems

A.R. Plaksin

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia, Ekaterinburg
Ural Federal University, Russian Federation, Ekaterinburg,
a.r.plaksin@gmail.com

Abstract: The paper deals with an optimal control problem, in which the motion of a dynamical system is described by a nonlinear delay differential equation, and the initial motion history is determined by a piecewise continuous function. On the basis of notions of sub- and superdifferentials of functionals along extensions, the characterization of the value functional in this problem is given.

Принцип максимума для задачи оптимального импульсного управления уравнением неразрывности

Н.И. Погодаев^{1,2}, М.В. Старицын¹

¹ Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия, starmaxmath@gmail.com

² Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия, nickpogo@gmail.com

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления ансамблем взаимодействующих индивидуумов (агентов), динамика которого описывается нелокальным уравнением неразрывности в пространстве вероятностных мер. Предполагается, что управляющие воздействия универсальны для всех агентов. Более того, эти воздействия допускаются произвольно близкими к распределениям типа Дирака (атомическим борелевским мерам на числовой оси), в то время как управляющее векторное поле является аффинным по переменным управления. В докладе представлены результаты по релаксации поставленной задачи в классе разрывных кривых в пространстве мер — функций ограниченной вариации со значениями в пространстве Вассерштейна W_1 . Для ослабленной модели, преобразованной с помощью разрывной замены времени, доказано необходимое условие оптимальности в форме классического принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: оптимальное управление, импульсное управление, мультиагентные системы, уравнение неразрывности, принцип максимума.

Введение

В докладе изучается задача динамической оптимизации для одного класса мультиагентных динамических систем с “неограниченными” управлениями, обобщающего модели [1–4]. Система представляет собой совокупность (ансамбль) индивидуумов (агентов), которые неотличимы друг от друга, и каждый из которых может обмениваться информацией с каждым (другими словами, их “сеть” представляет собой полный равновзвешенный граф).

В случае, когда число агентов N относительно мало, динамика ансамбля на интересующем нас отрезке времени $[0, T]$ описывается

совокупностью индивидуальных траекторий $t \mapsto x^k(t)$, удовлетворяющих обыкновенной управляемой системе вида

$$\dot{x}^k = f_0(x^k) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(x^k - x^j) + \sum_{i=1}^m f_i(x^k) u_i, \quad k = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь f_i, g — заданные глобально липшицевые векторные поля, среди которых f_0 характеризует естественный “дрифт”, а g есть потенциал взаимодействия агентов.

С другой стороны, если N достаточно велико, разумно отказаться от описания динамики ансамбля в терминах системы (1) и перейти на язык динамических систем в пространстве вероятностных мер. В самом деле, множество траекторий $\{x^k(\cdot)\}_{k=1}^N$ порождает кривую в пространстве вероятностных мер вида $t \mapsto \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x^k(t)}$, где δ_a обозначает меру Дирака, сосредоточенную в точке a . Теперь если меры $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{x^k(t)}$ сходятся слабо при $N \rightarrow \infty$ к некоторой мере μ_t , то кривая $t \mapsto \mu_t$ оказывается решением нелокального уравнения непрерывности

$$\mu_0 = \vartheta, \quad \partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (\mu_t v_t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где ϑ — заданная вероятностная мера (начальное распределение агентов). Динамика состояния μ_t системы (2) определяется универсальным для всего ансамбля неавтономным векторным полем

$$v_t(x) \doteq f_0(x) + (g \star \mu_t)(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x) u_i(t),$$

которое зависит от текущего состояния ансамбля μ_t ; “ $\star$ ” — операция свертки функции и меры:

$$(g \star \mu)(x) = \int g(x - y) d\mu(y).$$

Диапазон допустимых управлений определяется “энергетическим” условием

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T |u_i(t)| dt \leq M, \quad (3)$$

где $M > 0$ — заданный объем имеющегося “ресурса”. Критерием качества управления выступает терминальный целевой функционал

$$I = \int \ell(x) dx,$$

где ℓ — ограниченная липшицевая функция.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$(P) \quad I \rightarrow \min \text{ при условиях (2), (3).}$$

Нетрудно обнаружить, что (P) не имеет решения в классе допустимых управлений (2) и соответствующих траекторий — решений (2) в слабом смысле, т.е. оказывается вырожденной в терминологии [5]. В докладе мы обсудим подход к расширению задачи (P) в классе разрывных (непрерывных справа) кривых ограниченной вариации со значениями в метрическом пространстве W_1 (т.н. пространстве Вессерштейна) с помощью метода разрывной замены времени [6].

1. Основной результат

Для расширенной задачи доказано существование решения в классе разрывных кривых в пространстве вероятностных мер и импульсных управлений — борелевских мер на $[0, T]$. Получен вид гамильтоновой системы и доказано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В докладе мы также обсудим возможности применения полученного условия оптимальности для численного решения задачи (P) .

Работа первого автора поддержана РНФ (проект № 17-11-01093), работа второго автора поддержана РФФИ (проект № 18-31-20030).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pogodaev N.* Optimal control of continuity equations // NoDEA, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2016. Vol. 23, no. 2. P. 1–24.
2. *Staritsyn M.* On “discontinuous” continuity equation and impulsive ensemble control // Systems Control Lett. 2018. Vol. 118, P. 77–83.
3. *Staritsyn M., Pogodaev N.* On a class of impulsive control problems for continuity equations // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, No. 32, P. 468–473.
4. *Staritsyn M., Pogodaev N.* Impulsive relaxation of continuity equations and modeling of colliding ensembles. In: Optimization and Applications. Springer, 2019. P. 367–381.

5. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах оптимального управления. Физматлит, 1997. 287 с.
6. Miller B.M., Rubanovich E.Ya. Impulsive Controls in Continuous and Discrete-continuous Systems. New York: Kluwer Academic Publishers, 2003.

Maximum Principle for Optimal Impulsive Control of Continuity Equations

Nikolay I. Pogodaev^{1,2}, Maxim V. Staritsyn¹

¹ Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Irkutsk, Russia, starmaxmath@gmail.com

² Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia, Ekaterinburg,
nickpogo@gmail.com

Abstract: We address a problem of optimal ensemble control of a “crowd” of interacting agents, described by a nonlocal continuity equation in the space of probability measures. The controls are common for all the agents, and can be arbitrary close to Dirac-type distributions (atomic Borel measures on the real line), while the driving vector field is affine in control variables. We describe a relaxation of the stated problem in a class of discontinuous curves in the space of measures — functions of bounded variation with values in the Wasserstein space W_1 . For the relaxed model, described through a discontinuous time change, we prove a necessary optimality condition of the spirit of the classical Pontryagin’s Maximum Principle.

УДК 517.97.7

Анализ структуры субдифференциала минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана

А.С. Родин

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, a.s.rodin@imm.uran.ru
УрФУ ИЕиМ, Екатеринбург, Россия, alexey.rodin.ekb@gmail.com

Аннотация: В данной статье рассматривается краевая задача Коши уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Исследуется структура минимаксного решения и структура субдифференциала. Приведено определение точки бифуркации и получено условие ее существования.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, формула Хопфа, субдифференциал, точка бифуркации, сопряженная функция

Введение

В задачах оптимального управления конечной целью является построение функции цены. Как правило функция цены имеет точки, где она не дифференцируема. В таком случае важным вопросом остается описание и построение сингулярного множества: множества точек в которых функция цены не дифференцируема. Построение сингулярного множества достаточно сложная задача, в отличие от нее, нахождение точек бифуркации, в которых сингулярное множество “зарождается”, является более простой, но в тот же момент очень важной задачей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана

$$D_t \varphi(t, x) + H(D_x \varphi(t, x)) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$D_x \varphi(t, x) = \left(\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_n} \right) = s.$$

Обозначим $\Pi_T = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in R^n\}$.

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях:

A1) функция $H(s) \in C^2$, выпукла;

A2) функция $\sigma(x) \in C^2$ собственная и гессиан $D^2 \sigma(x)$ положительно определен [6].

A3) существует $s_0 \in \text{dom } \sigma^*$, что $D^2 H(s_0)$ - положительно определен.

Здесь $D^2 \sigma(x) = \left\{ \frac{\partial^2 \sigma(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\}_{i=1, j=1}^{n, n}$ и $\text{dom } \sigma^* = \{s \in R^n : \sigma^*(s) < \infty\}$.

Условия A1), A2) обеспечивают существование и единственность минимаксного и вязкостного решения задачи (1) [4]. И данное минимаксное решение может быть описано с помощью формулы Хопфа [5], где $\sigma^*(s) = \sup_{\xi} \langle s, \xi \rangle - \sigma(\xi)$,

$$u(t, x) = \sup_s \langle x, s \rangle - \sigma^*(s) + (T - t)H(s). \quad (2)$$

В большинстве случаев минимаксное решение задачи (1) содержит точки недифференцируемости.

Определение 1. Множеством сингулярности Q для обобщенного решения φ задачи (1) называется множество точек $(t, x) \in \Pi_T$, в которых функция φ недифференцируема.

Определение 2. Точкой бифуркации (t, x) называется точка, для которой выполнено следующее условие $(t, x) \in \overline{Q} \setminus Q$, где $\overline{Q}$ есть замыкание множества Q .

2. Формула Хопфа и субдифференциал

Обозначим $\varphi(t, x, s) = \langle x, s \rangle - \sigma^*(s) + (T - t)H(s)$.

Введем множество $S(t_0, x_0) = \left\{ \bar{s} \in R^n : \lim_{s \rightarrow \bar{s}} \varphi(t_0, x_0, s) = u(t_0, x_0) \right\}$.

Если выполнены следующие условия при $s_0 \in S(t_0, x_0)$

$$x_0 = D\sigma^*(s_0) - (T - t_0)DH(s_0), \quad D^2\sigma^*(s_0) \neq (T - t_0)D^2H(s_0),$$

тогда множество $S(t_0, x_0)$ состоит из единственного элемента s_0 , и функция $u(t_0, x_0)$ является дифференцируемой в точке (t_0, x_0) [3, § 25]. Так как функция $\varphi(t, x, s) \forall s$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (t, x) [1, § 3], то справедлива формула

$$du(t, x; f) = \sup_{\bar{s} \in S(t_0, x_0)} \langle (-H(\bar{s}), \bar{s}), f \rangle, \quad f = (f_t, f_x) \in R \times R^n,$$

где символ $du(t, x; f)$ обозначает производную по направлению.

Напомним одно из эквивалентных определений субдифференциала [4]

$$D^-u(t_0, x_0) = \{p \in R^{n+1} : \langle p, f \rangle - d^-u(t_0, x_0; f) \leq 0, \forall f \in R^{n+1}\}.$$

Здесь $d^-u(t, x; f)$ является нижней производной в точке (t, x) по направлению f . Если существует $du(t_0, x_0; f)$, то $d^-u(t_0, x_0; f) = du(t_0, x_0; f)$.

Утверждение 1. Если выполнены условия A1), A2), то функция $u(t, x)$ вида (2) имеет субдифференциал в любой точке (t_0, x_0) и субдифференциал имеет вид

$$D^-u(t_0, x_0) = co \{ (-H(\bar{s}), \bar{s}) : u(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0, \bar{s}) \}.$$

Замечание 1. Нетрудно показать что, если выполнено условие

$$\exists i, j \in \overline{1, n}, \quad \lim_{\|s\| \rightarrow +\infty} D_{s_i s_j}^2 (\sigma^*(s) - (T - t_0)H(s)) \neq 0,$$

то $D^-u(t_0, x_0)$ — компактное множество. Тогда

$$du(t_0, x_0; f) = \max_{\bar{s} \in S(t_0, x_0)} \langle (-H(\bar{s}), \bar{s}), f \rangle.$$

Зафиксируем момент времени $t = t_0$. Введем функцию $\Psi_{t_0}(s) = \sigma^*(s) - (T - t_0)H(s)$. Тогда из формулы (2) следует

$$u(t_0, x) = \sup_s \langle x, s \rangle - \Psi_{t_0}(s).$$

Так как $\Psi_T(s) = \sigma^*(s)$ является строго выпуклой. Отметим, что при этом любые собственные числа матрицы $\Psi_T(s)$ — строго положительны и $|D^2\Psi_T(s)| > 0 \ \forall s \in \text{dom } \sigma^*$.

Из теоремы о монотонности собственных значений симметрической матрицы [6, р. 235] $\Psi_t(s)$ следует, что при изменении параметра t , для любого $s \in \text{dom } \sigma^*$ получаем, что собственные числа матрицы $\Psi_t(s)$ и $|\Psi_t(s)|$ монотонно не возрастают при $t \rightarrow -\infty$ [2, Приложение XI]. Следовательно функция $\Psi_{t_0}(s)$ является выпуклой. Откуда следует, что $u(t_0, x)$ является дифференцируемой по переменной x [3, § 25]. Под выпуклостью понимается не строгая выпуклость.

Лемма 1. Если A1)–A3) выполнены, то $\exists t_0 < T \ |D^2\Psi_{t_0}(s_0)| = 0$, тогда $\forall t^* < t_0$ существует отрицательное собственное значение матрицы $D^2\Psi_{t^*}(s_0)$ [6, р. 235], [2, Приложение XI].

3. Основной результат

Теорема 1. Если выполнены условия A1)–A3), то (t_0, x_0) , где

$$x_0 = D\sigma^*(s_0) - (T - t_0)DH(s_0),$$

является точкой бифуркации.

Работа выполнена в рамках проекта “Новейшие методы математического моделирования в изучении нелинейных динамических систем” по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом Российской академии наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демьянов В.Ф.* Минимакс: дифференцируемость по направлениям. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 112 с.
2. *Островский А.М.* Решение уравнений и систем уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
4. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М., Ижевск: Ин-т комп. исследований, 2003.
5. *Crandall M.G. and Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton — Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
6. *Magnus J.R., Neudecker H.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. 3rd. ed. John Wiley & Sons Ltd, 2007.

Analysis of the Structure of the Subdifferential of the Minimax Solution of Hamilton—Jacobi—Bellman Equation

Aleksei S. Rodin

IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia, a.s.rodin@imm.uran.ru
UrFU, Yekaterinburg, Russia, alexey.rodin.ekb@gmail.com

Abstract: This article discusses the Cauchy boundary value problem of Hamilton—Jacobi—Bellman equation. The structure of the minimax solution and the structure of the subdifferential are investigated. The definition of the bifurcation point is given and the condition of its existence is obtained.

УДК 517.977

Задача динамической реконструкции возмущения в системе специального вида при дефиците информации

В.Л. Розенберг

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, rozen@imm.uran.ru

Аннотация: С позиций подхода теории динамического обращения исследуется задача реконструкции входного воздействия в системе дифференциальных уравнений специального вида. Первое уравнение системы является линейным стохастическим уравнением Ито, второе — линейным

обыкновенным, в которое входит неизвестное возмущение. Рассматривается постановка, в которой реконструкция проводится на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций случайного процесса, являющегося решением первого уравнения. Задача сводится к обратной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую вместо стохастического уравнения входит уравнение, задающее динамику математического ожидания исходного процесса. Предлагается конечношаговый программно реализуемый алгоритм решения, основанный на методе вспомогательных позиционно управляемых моделей, получена оценка его точности относительно количества доступных измерению реализаций. Приводится иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, обыкновенное дифференциальное уравнение, динамическая реконструкция, дефицит информации, управляемая модель.

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, состоящая из стохастического уравнения Ито (СДУ) и обыкновенного уравнения (ОДУ) следующего вида:

$$dx(t, \omega) = (Ax(t, \omega) + By(t) + f_0(t)) dt + C d\xi(t, \omega), \quad x(0, \omega) = x_0, \quad (1)$$

$$dy(t) = (Dy(t) + Em(t) + Fu(t) + f_1(t)) dt, \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

Здесь $t \in T = [0, \vartheta]$; $(x(\cdot, \omega), y(\cdot))$ — фазовая траектория системы, $x(t, \omega) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$; (x_0, y_0) — известное детерминированное начальное состояние; $\xi(t, \omega) \in \mathbb{R}^k$ — стандартный винеровский процесс (т.е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{k \times k}$)), $\omega \in \Omega$, Ω — множество элементарных исходов; $m(t) = Mx(t, \omega)$ — математическое ожидание; $u(\cdot)$ — внешнее возмущение, принимающее значения из заданного выпуклого компакта $S_u \in \mathbb{R}^m$ и имеющее ограниченную на T вариацию; A, B, C, D, E и F — постоянные матрицы соответствующих размерностей; векторные функции $f_0(\cdot)$ и $f_1(\cdot)$ суммируемы на T с квадратом нормы. Решение уравнения (1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему в правой части стохастический интеграл Ито. Решение уравнения (2) понимается в смысле Каратеодори, предполагается абсолютная непрерывность компоненты $y(\cdot)$.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. Неизвестное возмущение $u(t)$, действующее на систему, входит только во второе уравнение. В то же время в дискретные, достаточно частые, моменты

времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0 : l]$, поступает информация о некотором количестве N реализаций первой фазовой компоненты, случайного процесса $x(\tau_i)$. Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестной функции $u(t)$ по доступной информации, причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближения от искомого входа в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R}^m)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

Алгоритм решения конструируется в рамках теории динамического обращения [1, 2]. В связи с неполнотой информации, согласно методике решения обратных задач в таких условиях [2], в модель вводится блок динамической аппроксимации неизвестной координаты $y(t)$, который играет роль поставщика информации о текущем полном фазовом состоянии системы. Эта информация оперативно передается на блок, формирующий по закону обратной связи модельное управление, приближающее реальное возмущение. Новизна работы состоит в специфике постановки обратной задачи для динамической системы смешанного типа, в которой возмущение, подлежащее реконструкции, стеснено геометрическими ограничениями и не входит в измеряемую компоненту.

Следуя [3], заменим в задаче восстановления линейное СДУ линейным ОДУ. Уравнение, описывающее динамику математического ожидания процесса, имеет следующий вид:

$$dm(t) = (Am(t) + By(t) + f_0(t)) dt, \quad m(0) = x_0. \quad (3)$$

Кроме того, необходима

Лемма 1. *Стандартные оценки m_i^N математических ожиданий $m(\tau_i)$, построенные по N реализациям случайных величин $x(\tau_i)$ по правилу*

$$m_i^N = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x^r(\tau_i),$$

обеспечивают выполнение оценки

$$P\left(\forall i \in [0 : l(N)] \quad \|m_i^N - m(\tau_i)\| \leq h(N)\right) = 1 - g(N),$$

причем $h(N)$, $g(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ и выписываются явно.

Таким образом, задача для исходной системы (1), (2) с измерениями траекторий СДУ трансформируется в задачу для системы ОДУ (2), (3) с неточными дискретными измерениями компоненты m .

Потребуем выполнения условия, стесняющего правую часть систем: полагаем, что $m \leq n_2 \leq n_1$ и существуют числа $d_1 > 0$ и $d_2 > 0$ такие, что неравенства $\|By\|_{n_1} \geq d_1\|y\|_{n_2}$ и $\|Fu\|_{n_2} \geq d_2\|u\|_m$ выполняются при всех $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ и $u \in \mathbb{R}^m$. В этом случае строится вспомогательная управляемая система-модель и конечношаговый ($l(N)$ однотипных шагов) конструктивный алгоритм управления ею по принципу обратной связи [4]. Обозначим выход алгоритма через $u^N(\cdot)$, подчеркивая зависимость всех его параметров от числа доступных измерению траекторий уравнения (1). Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *При выполнении некоторых дополнительных условий согласования параметров алгоритма для его выхода $u^N(\cdot)$ имеет место следующая оценка качества аппроксимации:*

$$P(\|u^N(\cdot) - u(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \leq H(N)) = 1 - G(N), \quad (4)$$

где $H(N), G(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ и выписываются явно.

Работа предложенного алгоритма и характер сходимости в оценке (4) проиллюстрированы модельным примером.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 51–60.
2. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 291 с.
3. Розенберг В.Л. Восстановление амплитуды случайной помехи в линейном стохастическом уравнении по измерениям части координат // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 3. С. 377–386.
4. Розенберг В.Л. К задаче динамического восстановления возмущения при дефиците информации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 207–218.

A Dynamical Input Reconstruction Problem in a System of Special Type under the Lack of Information

Valeriy L. Rozenberg

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, rozen@imm.uran.ru

Abstract: From the viewpoint of the approach of the theory of dynamic inversion, an input reconstruction problem in a differential system of special type is under investigation. The first equation of the system is a linear stochastic Ito equation, whereas the second is a linear ordinary equation containing an unknown disturbance. The statement when the reconstruction is performed from the discrete information on several realizations of the stochastic process being a solution of the first equation is considered. The problem is reduced to an inverse problem for the system of ordinary differential equations, which includes, instead of the stochastic equation, the equation describing the mathematical expectation of the desired process. A finite-step software-oriented solving algorithm based on the method of auxiliary feedback controlled models is designed; an estimate for its convergence rate with respect to the number of measurable realizations is obtained. An illustrating example is given.

УДК 518.9

Задача перехвата в нелинейных дифференциальных играх

Б.Т. Саматов¹, У.Б. Сайиббаев²

¹ Наманганский государственный университет,
Узбекистан, samatov57@inbox.ru

² Наманганский государственный университет, Узбекистан,
soibboevulmas@yandex.ru

Аннотация: В настоящей работе исследуется задача перехвата, когда игроки движутся в некотором силовом поле с различными нелинейными воздействиями на динамику движения. При рассмотрении задачи основным инструментом является метод параллельного сближения игроков. Предложена конструкция построения стратегии параллельного сближения, т.е. П-стратегии для преследователя в нелинейных дифференциальных играх. Для рассматриваемого случая получены новые достаточные условия к разрешимости задачи перехвата.

Ключевые слова: дифференциальная игра, задача перехвата, задача убегания, стратегия, поимка, уклонения, время перехвата.

Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ управляемый объект X , называемый преследователем, гонится за другим объектом Y , называемый убегающим. Обозначим через x местоположение преследователя, а через y — местоположение убегающего в $\mathbb{R}^n$. Движения этих объектов описываются в соответствии с уравнениями

$$\dot{x} = u + f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$\dot{y} = v + g(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad (2)$$

где $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0, y_0 — начальные положения объектов, предполагается $x_0 \neq y_0$; u, v — векторы управления игроков. При этом временное изменение вектора u должно оказаться измеримой функцией $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которого налагается ограничение

$$|u(t)| \leq \alpha, \quad \text{почти для всех } t \geq 0. \quad (3)$$

Аналогично, временное изменение вектора v должно быть измеримой функцией $v(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которого налагается ограничение

$$|v(t)| \leq \beta \quad \text{почти для всех } t \geq 0. \quad (4)$$

В уравнениях (1) и (2) функции $f(t, x)$ и $g(t, y)$ могут представлять, соответственно, внешние воздействующие силы на движения игроков. Отметим, что когда объекты движутся в некотором компакте из $\mathbb{R}^2$ с одинаковыми воздействиями на движения, дифференциальная игра типа (1)–(2) была изучена в работах [6, 7] методом построения оптимальных областей достижимости игроков. При этом, в качестве управления игроков выбираются кусочно-непрерывные функции. В настоящей работе при помощи метода параллельного сближения игроков [3, 4] исследуется более общий класс нелинейных дифференциальных игр преследования. Во многих модельных задачах преследования ключевую роль играет стратегия параллельного преследования, при помощи которой перехват убегающего осуществляется за наименьшее время. В [1, 2, 5] и во многих других работах П-стратегия нашла эффективное применение к решению ряда задач дифференциальных игр преследования.

Предложение 1. Пусть функции $f(t, x)$, $g(t, y)$ определены в области $D := R_+ \times R^n$, $R_+ := [0, \infty)$ и удовлетворяют условиям:

1) $f(t, x), g(t, y)$ непрерывны по x и y , соответственно, для каждого фиксированного t ; 2) $f(t, x), g(t, y)$ измеримы по t , для каждого фиксированного x и y , соответственно; 3) для каждого компактного множества Q из D существуют локально интегрируемые измеримые функции $m_f(\cdot) : R_+ \rightarrow R_+$ и $m_g(\cdot) : R_+ \rightarrow R_+$ такие, что $|f(t, x)| \leq m_f(t)$ и $|g(t, y)| \leq m_g(t)$ при $(t, x), (t, y) \in Q$.

Предложение 2. Существуют локально интегрируемые измеримые функции $k(\cdot) : R_+ \rightarrow R_+$ и $h(\cdot) : R_+ \rightarrow R$ такие, что

$$|f(t, x) - g(t, y)| \leq k(t)|x - y| + h(t), \quad (5)$$

для всех $x, y \in R^n$.

Целью объекта X является осуществление перехвата, т.е. равенства

$$x(t) = y(t), \quad (6)$$

где $x(t), y(t)$ — траектории, порождаемые в процессе игры. Убегающий Y стремится уклониться от встречи, а если это невозможно, то как можно дальше отодвинуть момент встречи (6). Разумеется, такая постановка задачи является предварительным.

1. Основной результат

Определение 1. Если $\alpha \geq |w|$, тогда функцию

$$u(w) = w - \lambda(w)\xi_0, \quad \lambda(w) = \langle w, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle w, \xi_0 \rangle^2 + \alpha^2 - |w|^2}, \quad (7)$$

назовем Π -стратегией преследователя в игре (1)–(5), где $w = v + g(t, y) - f(t, x)$, $\xi_0 = z_0/|z_0|$, $z_0 = x_0 - y_0$.

Предложение 3. Пусть

а) существует положительный корень уравнения

$$\Psi(t) = 0 \quad (8)$$

относительно t , где $\Psi(t) = |z_0| - \int_0^t \exp\left(-\int_0^s k(\tau)d\tau\right)(\alpha - \beta - h(s))ds$;

б) выполнено условие

$$\alpha > \beta + k(t)\Phi(t) + h(t),$$

при $t \in [0, T]$, где $T = \min\{t : \Psi(t) = 0\}$ и $\Phi(t) = \Psi(t) \exp \int_0^t k(s)ds$.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–3. Тогда при помощи Π -стратегии (7) преследователь X осуществляет перехват в промежутке времени $[0, T]$ в игре (1)–(5), где T – первый положительный корень уравнения (8).

Следствие 1. Рассматривается дифференциальная игра:

$$\dot{x} = u + Ax, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{y} = v + Ay, \quad y(0) = y_0, \quad (9)$$

где $x, y \in R^n$, $n \geq 2$, $|u| \leq \alpha$, $|v| \leq \beta$; A – постоянная квадратная матрица размерности $n \times n$. Тогда предположение 3 имеет вид: а) $|z_0| - (\alpha - \beta)[1 - \exp(-|A|t)] = 0$ если $|A| \neq 0$, или $|z_0| - (\alpha - \beta)t = 0$, если же $|A| = 0$; б) $\alpha > \beta + |A||z_0|$.

Утверждение 1. Если $\alpha > \beta + |A||z_0|$, то при помощи Π -стратегии (7) преследователь X осуществляет перехват в промежутке времени $[0, T_A]$ в игре (9), где $T_A = \frac{1}{|A|} \ln \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta - |A||z_0|}$, если $|A| \neq 0$, или $T_A = \frac{|z_0|}{\alpha - \beta}$, если $|A| = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда грантов фундаментальных исследований Национального университета Узбекистана (проект № Ф4-ЗЗНИ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π -strategy: Analogies and applications // The Fourth Int. Conf. Game Theory and Management (June 28–30, 2010, St. Petersburg, Russia): proc. 2010. P. 33–47.
2. Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publishers, 1997. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
3. Isaacs R. Differential Games. New York: John Wiley and Sons, 1965.
4. Petrosjan L.A. Differential Games of Pursuit. Ser. on Optimization, vol. 2. Singapore: World Scientific Publishing, 1993.
5. Samatov B.T. The Π -strategy in a differential game with linear control constraints // J. Appl. Math. Mech. 2014. Vol. 78, no. 3. P. 258–263.
6. Sun W., Tsiotras P. Pursuit evasion game of two players under an external flow field // American Control Conference (ACC), IEEE Xplore, 2015. P. 5617–5622. DOI: 10.1109/ACC.2015.7172219
7. Sun W., Tsiotras P., Lolla T., Subramani D.N., Lermusiaux P.F.J. Multiple-pursuit/one-evader pursuit-evasion game in dynamical flow fields // J. of Guidance, Control, and Dynamics. 2017. Vol. 40, no. 7. DOI: 10.2514/1.G002125

The Intercept Problem for Nonlinear Differential Games

B.T. Samatov¹, U.B. Soyibbayev²

¹ Namangan State University, Uzbekistan, samatov57@inbox.ru,

² Namangan State University, Uzbekistan, soibboevulmas@yandex.ru

Abstract: In this article is considered the Intercept Problem, when objects move in dynamic flow field with different influence. We here apply method of the parallel approach, i.e. the II-strategy for pursuer in nonlinear differential games. The new sufficient solvability conditions are obtained for problem of the intercept.

УДК 517.977

О динамической задаче удержания с неразложимым множеством помех

Д.А. Серков

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, serkov@imm.uran.ru

Аннотация: Для абстрактной динамической системы рассмотрена задача удержания движений в заданном подмножестве пространства историй движения. Изучается случай неразложимого множества помех. Предложена конструкция разрешающей квазистратегии, опирающаяся на метод программных итераций.

Ключевые слова: задача удержания, неразложимое множество помех, квазистратегия.

Введение

Рассмотрена задача удержания движений абстрактной динамической системы в заданном множестве — простой случай позиционной дифференциальной игры [1]. Решение задачи ищется во множестве квазистратегий. Новым в постановке является отказ от свойства разложимости [5] множества помех. В задачах управления это свойство определяется как возможность «склейки» двух допустимых помех в любой момент времени. Пример отсутствия разложимости множества помех дает случай непрерывных (постоянных) помех. В качестве основы предлагаемого решения использован непрямой метод

программных итераций [3]. Отсутствие топологических требований компенсируется увеличением количества итераций [2].

1. Постановка задачи

Обозначения. Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) обозначим все (все непустые) подмножества множества T . Если A и B — непустые множества, то B^A есть множество всех отображений из множества A в множество B . Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f|C) \in B^C$ есть сужение f на множество C : $(f|C)(x) \triangleq f(x) \forall x \in C$. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $(F|C) \triangleq \{(f|C) : f \in F\}$.

Динамическая система. Фиксируем непустое подмножество $\mathbf{I}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в качестве аналога временного интервала и непустое множество $\mathbf{X}$, задающее область изменения пространственных переменных. Если $t \in \mathbf{I}$, то $\mathbf{I}^t \triangleq \{\xi \in \mathbf{I} \mid \xi \leq t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in \mathbf{I} \mid \xi \geq t\}$. Выделяем множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X}^{\mathbf{I}})$ в качестве аналога траекторий. Фиксируем непустые множества $\mathbf{Y}$ и $\Omega \in \mathcal{P}'(\mathbf{Y}^{\mathbf{I}})$ — допустимые реализации помехи. Полагаем $\mathcal{D} \triangleq \mathbf{I} \times \mathbf{C} \times \Omega$ — фазовое пространство системы, понимаемое как пространство состояний управляемого процесса. Для любых $t \in \mathbf{I}$, $x \in \mathbf{C}$ обозначим $Z_0(x|\mathbf{I}^t) \triangleq \{x' \in \mathbf{C} \mid (x'|\mathbf{I}^t) = (x|\mathbf{I}^t)\}$.

Фиксируем (в качестве аналога «системы») отображение $\mathcal{S} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C})$ такое, что $\forall t \in \mathbf{I}$, $\forall \tau \in \mathbf{I}_t$ $\forall x, x' \in \mathbf{C}$ и $\forall \omega, \omega' \in \Omega$

$$\mathcal{S}(t, x, \omega) \in \mathcal{P}'(Z_0(x|\mathbf{I}^t)), \quad (1)$$

$$((x|\mathbf{I}^t) = (x'|\mathbf{I}^t)) \Rightarrow (\mathcal{S}(t, x, \omega) = \mathcal{S}(t, x', \omega)), \quad (2)$$

$$(h \in \mathcal{S}(t, x, \omega)) \Rightarrow (h \in \mathcal{S}(\tau, h, \omega)), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \left((\mathcal{S}(t, x, \omega)|\mathbf{I}^\tau) = (\mathcal{S}(t, x, \omega')|\mathbf{I}^\tau) \right. \\ & \left. \& (h \in \mathcal{S}(t, x, \omega)) \& (h' \in \mathcal{S}(\tau, h, \omega')) \right) \\ & \Rightarrow (h' \in \mathcal{S}(t, x, \omega')). \end{aligned} \quad (4)$$

Если $(t, x, \omega) \in \mathcal{D}$, то $\mathcal{S}(t, x, \omega)$ есть множество всех траекторий «системы» (1)–(4), отвечающих начальной истории x до момента t и действию помехи ω после момента t .

Фиксируем начальную историю $(t_0, x_0) \in \mathbf{I} \times \mathbf{C}$. Все дальнейшие построения проводятся с целью формулировки и решения задачи удержания для этой начальной истории. Выделим в $\mathcal{D}$ множество $\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)}$ всех состояний управляемого процесса, возникших в системе из начальной истории (t_0, x_0) при реализации всех возможных помех: $\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)} \triangleq \{(t, x, \omega) \in \mathcal{D} \mid t \in \mathbf{I}_{t_0} \ (x \mid \mathbf{I}^t) \in (\mathcal{S}(t_0, x_0, \omega) \mid \mathbf{I}^t)\}$. Для каждого $(t, x, \omega) \in \mathbf{SP}_{(t_0, x_0)}$ определим множество допустимых (совместимых) помех: $\Omega(t, x, \omega) \triangleq \{\omega' \in \Omega \mid (\mathcal{S}(t_0, x_0, \omega) \mid \mathbf{I}^t) = (\mathcal{S}(t_0, x_0, \omega') \mid \mathbf{I}^t)\}$. Тогда $\Omega(t_0, x_0, \omega) = \Omega$ для всех $\omega \in \Omega$.

Процедуры управления и задача удержания. Управляющая сторона для формирования пучка траекторий использует непустозначные неупреждающие мультифункции из $\mathcal{P}(\mathbf{C})^\Omega$. Итак, для $(t, x, \omega) \in \mathbf{SP}_{(t_0, x_0)}$ определим множество $\mathbb{M}_{(t, x, \omega)}$ допустимых процедур управления — квазистратегий:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{(t, x, \omega)} \triangleq \left\{ \alpha \in \prod_{\omega' \in \Omega(t, x, \omega)} \mathcal{P}'(\mathcal{S}(t, x, \omega')) \mid \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega(t, x, \omega) \forall \tau \in \mathbf{I} \right. \\ \left. \left((\mathcal{S}(t_0, x_0, \omega_1) \mid \mathbf{I}^\tau) = (\mathcal{S}(t_0, x_0, \omega_2) \mid \mathbf{I}^\tau) \right) \right. \\ \left. \Rightarrow \left((\alpha(\omega_1) \mid \mathbf{I}^\tau) = (\alpha(\omega_2) \mid \mathbf{I}^\tau) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Пусть множество $\mathbf{D} \in \mathcal{P}'(\mathbf{I} \times \mathbf{C})$, описывающее заданные фазовые ограничения, удовлетворяет условиям: $(t_0, x_0) \in \mathbf{D}$, $(t, x) \in \mathbf{D} \Rightarrow (\{t\} \times Z_0(x \mid \mathbf{I}^t) \subset \mathbf{D})$. Определим на его основе множество $\mathcal{N}$ вида $\mathcal{N} \triangleq (\mathbf{D} \times \Omega) \cap \mathbf{SP}_{(t_0, x_0)}$ и поставим целью управления удержание состояний системы во множестве $\mathcal{N}$. Мы будем считать ее достижимой для начального состояния (t, x, ω) , если для некоторой квази-стратегии $\alpha \in \mathbb{M}_{(t, x, \omega)}$ выполнены включения $(\tau, h, \nu) \in \mathcal{N}$, $\forall \tau \in \mathbf{I}_t$, $\forall h \in \alpha(\nu)$, $\forall \nu \in \Omega(t, x, \omega)$.

Для начальной позиции (t_0, x_0) это эквивалентно удержанию текущих позиций системы в пределах $\mathbf{D}$ при любых реализациях помехи $\nu \in \Omega$.

2. Квазистратегии, разрешающие задачу удержания

Оператор программного поглощения и его итерации. Пусть $H \in \mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})$, $(t, x, \omega) \in \mathbf{SP}_{(t_0, x_0)}$ и $\nu \in \Omega(t, x, \omega)$. Обозначим

$$\Pi(\nu \mid (t, x, \omega), H) \triangleq \{h \in \mathcal{S}(t, x, \nu) \mid (\tau, h, \nu) \in H \ \forall \tau \in \mathbf{I}_t\}. \quad (5)$$

В терминах (5) введем оператор $\mathbf{A} \in \mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})^{\mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})}$ (программного поглощения): для любого $H \in \mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})$

$$\mathbf{A}(H) \triangleq \{(t, x, \omega) \in H \mid \Pi(\nu \mid (t, x, \omega), H) \neq \emptyset \ \forall \nu \in \Omega(t, x, \omega)\}.$$

Для произвольного ординала α , следуя методу трансфинитной индукции [4, п. I.3], введем α -итерацию $\mathbf{A}^\alpha \in \mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})^{\mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})}$ оператора $\mathbf{A}$: при $\alpha = 0$ положим $\mathbf{A}^0(H) \triangleq H$, $\forall H \in \mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})$; если α имеет предшественника (пусть это ординал γ), примем $\mathbf{A}^\alpha \triangleq \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^\gamma$; для предельного ординала α , положим $\mathbf{A}^\alpha(H) \triangleq \bigcap_{\beta < \alpha} \mathbf{A}^\beta(H)$, $\forall H \in \mathcal{P}(\mathbf{SP}_{(t_0, x_0)})$.

Обратимся к вопросу о разрешимости в выбранном классе квазистратегий задачи удержания. Пусть ординал σ строго больше мощности множества $\mathcal{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Для любой $(t, x, \omega) \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ выполняется включение $\Pi(\cdot \mid (t, x, \omega), \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})) \in \mathbb{M}_{(t, x, \omega)}$.

Теорема 1. Выполняется равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) &= \{(t, x, \omega) \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_{(t, x, \omega)} : \\ &(\tau, h, \nu) \in \mathcal{N} \ \forall \tau \in \mathbf{I}_t \ \forall h \in \alpha(\nu) \ \forall \nu \in \Omega(t, x, \omega)\}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1 исходная задача удержания разрешима, если и только если $(t_0, x_0, \omega_0) \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ для некоторого $\omega_0 \in \Omega$; при этом (см. утверждение 1), в случае ее разрешимости квазистратегия $\Pi(\cdot \mid (t_0, x_0, \omega_0), \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}))$ реализует это решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 456 с.
2. Серков Д.А. Трансфинитные последовательности в методе программных итераций // Труды ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 228–240.

3. *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения с информационной памятью // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С. 306–309.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. Москва: Мир, 1986. 456 с.
5. *Rockafellar R.* Integrals which are convex functionals // Pacific J. Math. 1968. Т. 24, № 3. С. 525–539.

On a Dynamic Retention Problem with an Indecomposable Set of Disturbances

Dmitriy A. Serkov

IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, serkov@imm.uran.ru

Abstract: For an abstract dynamic system, the retention problem for a given subset of the motion histories space is considered. The case of an indecomposable set of disturbances is studied. A construction of a resolving quasi-strategy based on the method of programmed iterations is proposed.

УДК 517.977 + 62-50

Рекуррентное полиэдральное оценивание в задаче адаптивного оптимального робастного слежения

В.Ф. Соколов

Физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН, Сыктывкар, Россия, sokolov@ipm.komisc.ru

Аннотация: Рассматривается задача адаптивного оптимального робастного слежения для дискретного минимально-фазового объекта с ограниченным внешним возмущением и неопределенностью в канале выхода. Параметры номинальной модели и верхние границы возмущения и неопределенности предполагаются неизвестными. Асимптотически суб-оптимальное слежение достигается с помощью рекуррентного полиэдрального оценивания неизвестных параметров.

Ключевые слова: адаптивное управление, оптимальное управление, робастное управление, ограниченное возмущение, системы с неопределенностью, множественное оценивание.

Введение

Задачи синтеза асимптотически оптимального адаптивного управления системами с ограниченными возмущениями не могут быть решены с помощью традиционных градиентных алгоритмов оценивания или метода наименьших квадратов в силу неидентифицируемости неизвестных параметров системы и требуют применения алгоритмов множественного оценивания в пространстве неизвестных параметров [2]. Множественное оценивание широко использовалось екатеринбургской математической школой для оценивания состояний систем с ограниченными возмущениями в задачах оптимального управления на конечных интервалах времени [1]. В настоящей работе рассматривается задача слежения для системы с неизвестными параметрами, неизвестной верхней границей внешнего возмущения и неизвестным коэффициентом усиления неопределенности в канале выхода. Специфика задачи заключается в том, что показатель качества в виде наихудшей в классе возмущений установившейся ошибки слежения является дробно-рациональной функцией верхних границ возмущения и неопределенности, что позволяет использовать для синтеза адаптивного оптимального управления рекуррентные полиэдральные оценки заданной сложности.

1. Задача адаптивного оптимального робастного слежения

Объект управления описывается моделью с дискретным временем

$$a(q^{-1})y_{t+1} = b(q^{-1})u_t + v_{t+1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $y_t, u_t, v_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта, управление и суммарное возмущение в момент времени t , q^{-1} — оператор сдвига назад и $a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$, $b(\lambda) = b_1 + b_2\lambda + \dots + b_m\lambda^{m-1}$. Неизвестный вектор коэффициентов модели $\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)^T$ принадлежит известному ограниченному многограннику Ξ ,

$$\xi \in \Xi = \{ \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geq p \} \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)},$$

$b_1 \neq 0$ для любого $\xi \in \Xi$, и корни полинома $b(\lambda)$ лежат вне замкнутого единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Суммарное возмущение v удовлетворяет неравенству

$$|v_t| \leq \delta_w + \delta_y p_t, \quad p_t = \max_{t-\mu \leq s < t} |y_s| \quad \forall t \in \mathbb{N},$$

где $\delta_w \geq 0$ — неизвестная верхняя граница *внешнего возмущения* и $\delta_y \geq 0$ — неизвестный коэффициент усиления *неопределенности в канале выхода* с известной верхней границей $\bar{\delta}_y$: $\delta_y \leq \bar{\delta}_y < 1$. Память μ в описании неопределенности может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для гарантируемого качества управления. Ограниченность памяти возмущений обеспечивает независимость асимптотического качества замкнутой системы управления от начальных данных.

Пусть $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots)$ — ограниченный задающий сигнал задачи слежения и показателем качества управления является наихудшая по всем допустимым возмущениям v асимптотическая ошибка слежения:

$$J^\mu(\theta, y^*) := \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*|, \quad \theta := (\xi^T, \delta_y, \delta_w)^T.$$

Для модели с известным вектором коэффициентов ξ и любыми начальными значениями $y_0, \dots, y_{-n+1}$, $u_0, \dots, u_{-m+1}$ регулятор

$$b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + y_{t+1}^* \quad (2)$$

обеспечивает равенство $y_{t+1} - y_t^* = v_{t+1}$ и, следовательно, является *оптимальным* для показателя качества $J^\mu(\theta, y^*)$.

Из теорем 6 и 8 [3] следует

Теорема 1. Для модели (1), замкнутой регулятором (2),

$$J^\mu(\theta, y^*) \leq J(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \|y^*\|_{ss}}{1 - \delta_y}, \quad \|y^*\|_{ss} := \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t^*|,$$

и верхняя граница $J(\theta, y^*)$ является точной при $\mu \rightarrow +\infty$, если значения $|y_t^*|$ равномерно часто попадают в окрестности точки $\|y^*\|_{ss}$.

Задача. Пусть в каждый момент t известны y_{t+1}^* и верхняя оценка $\overline{\|y^*\|_{ss}} \geq \|y^*\|_{ss}$. Требуется построить обратную связь для модели (1), гарантирующую с заданной точностью неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - y_t^*| \leq J(\theta, y^*) := \frac{\delta_w + \delta_y \overline{\|y^*\|_{ss}}}{1 - \delta_y}.$$

Сложность сформулированной задачи *адаптивного оптимального слежения* заключается в неидентифицируемости вектора коэффициентов ξ в условиях описанной априорной информации и, как следствие, невозможности воспользоваться оптимальным регулятором (2) при неизвестном векторе коэффициентов ξ .

2. Адаптивное субоптимальное слежение на основе полиэдрального оценивания заданной сложности

Решение поставленной задачи базируется на множественном оценивании вектора всех неизвестных параметров θ и использовании показателя качества $J(\theta, y^*)$ в качестве идентификационного критерия для выбора текущих оптимальных оценок θ_t неизвестного вектора θ [2]. Некоторая оценка $\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{\delta}_y, \hat{\delta}_w)^T$ соответствует в момент $t + 1$ уравнению модели (1) и априорной информации если и только если

$$|\hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t| \leq \hat{\delta}_w + \hat{\delta}_y p_{t+1}, \quad (3)$$

где полиномы $\hat{a}$ и $\hat{b}$ соответствуют вектору коэффициентов $\hat{\xi}$. Неравенство (3) представляет собой пару линейных неравенств относительно $\hat{\theta}$, не более одного из которых может нарушаться. Полиэдральной оценкой Θ_t вектора θ служит система из фиксированного числа $N \geq \dim \theta = n + m + 2$ ранее нарушавшихся или априорных неравенств. Оценки Θ_t и θ_t обновляются в момент $t + 1$ только если расстояние от текущей оценки $\hat{\theta} = \theta_t$ до границы нарушаемого неравенства больше заранее выбранного числа $\varepsilon > 0$. Обновленная векторная оценка в момент $t + 1$ определяется формулой

$$\theta_{t+1} := \underset{\hat{\theta} \in \Theta_0 \cap \Theta_t \cap \Omega_{t+1}}{\operatorname{argmin}} J(\hat{\theta}, y^*),$$

где $\Theta_0 := \{ \hat{\theta} \mid \hat{\xi} \in \Xi, 0 \leq \delta_y \leq \bar{\delta}_y, \delta_w \geq 0 \}$ — система априорных ограничений, Ω_{t+1} обозначает множество оценок, удовлетворяющих нарушенному для θ_t неравенству и θ_{t+1} — вершина полиэдра, на котором минимизируется показатель качества J . Оценка Θ_{t+1} получается заменой любого строго выполняемого неравенства из системы Θ_t новым нарушаемым неравенством. Сформулированный алгоритм гарантирует в случае сходимости за конечное время решение поставленной оптимальной задачи с точностью порядка $O(\varepsilon)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Эффективность описанного полиэдрального алгоритма и целесообразность использования оценок метода наименьших квадратов на начальном отрезке времени для улучшения переходных процессов иллюстрируются результатами численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 18-1-1-7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в ℓ_1 -постановке // Автоматика и телемеханика. 1998. № 3. С. 107–131.
3. *Sokolov V.F.* ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty // Syst. Control Lett. 2001. Vol. 42, no. 5. P. 363-377.

Recurrent Polyhedral Estimation in Problem of Adaptive Optimal Robust Tracking

V.F. Sokolov

Komi Science Center, Syktyvkar, Russia, sokolov@ipm.komisc.ru

Abstract: This paper addresses a problem of adaptive optimal robust tracking for discrete-time minimum-phase system under bounded disturbance and output uncertainty. Parameters of nominal model and upper bounds of the disturbance and uncertainty are unknown to controller designer. Suboptimal worst-case steady-state tracking is achieved with the use of given complexity polyhedral estimation of the unknown parameters and upper bounds.

УДК 517.938: 519.642

Восстановление входных сигналов для одного класса динамических систем с помощью полиномиальных уравнений Вольтерра I рода

С.В. Солодуша

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск,
solodusha@isem.irk.ru

Аннотация: Рассмотрена задача приближенного решения одного класса полиномиальных уравнений Вольтерра I рода, возникающего при идентификации входных сигналов в нелинейной динамической системе типа “вход-выход”. Задача решена с использованием метода Ньютона – Канторовича. В качестве начального приближения выбрано численное решение соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода. В качестве приложения рассмотрена модель элемента теплообменной установки.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, полиномы Вольтерра, идентификация входных сигналов, метод Ньютона-Канторовича.

Введение

Идентификация входных сигналов в динамических системах — одно из интенсивно развивающихся научных направлений, имеющее различные практические приложения [1]. Данная работа посвящена решению проблемы численной идентификации входных сигналов, находящейся на стыке теории математического моделирования, теории автоматического управления, теории обратных задач и приложений интегральных уравнений Вольтерра I рода при моделировании объектов теплоэнергетики.

Рассматривается некоторый класс полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода при моделировании нелинейной динамики на базе полиномов Вольтерра с входом $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$:

$$\sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq 2} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1, \dots, i_m}(t, s_1, \dots, s_m) \prod_{j=1}^m x_{i_j}(s_j) ds_j = y(t), \quad (1)$$

$N = 2, 3$, $t \in [0, T]$, связанный с задачей восстановления управляющего входного сигнала $u(t) \equiv x_1(t)$, соответствующего известным ядрам K , возмущающему входному воздействию $\zeta(t) \equiv x_2(t)$ и заданному выходу $y(t)$. В (1) ядра Вольтерра непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по t , кроме того, $K_{i_1, \dots, i_m}$ симметричны по переменным $s_{i_1}, \dots, s_{i_m}$, индексы которых совпадают; $K_1(t, t) \neq 0$; $y(0) = 0$, $y'(t) \in C_{[0, T]}$. Принципиальное отличие полиномиального уравнения (1) от линейного случая (при $N = 1$) состоит в локальности T^* — области существования (единственного) непрерывного решения [2].

Об основных результатах

Исследуем специфику численного решения (1) при $N = 2$ с помощью метода Ньютона – Канторовича [3], полагая дополнительно к сделанным предположениям, что ядро K_{11} имеет вид

$$K_{11}(t, s_1, s_2) = \varphi(t, s_1)\varphi(t, s_2), \quad \varphi(t, s) \in C_\Delta,$$

где $\Delta = \{t, s : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $T < T^*$. Тогда вместо (1) имеем

$$P(u) \equiv f(u(t)) - y(t) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f(u(t)) &= I_1(u(t)) + I_2^2(u(t)) + p(t), \quad I_2(u(t)) = \int_0^t \varphi(t, s) u(s) ds, \\ I_1(u(t)) &= \int_0^t \left(K_1(t, s_1) + \int_0^t K_{12}(t, s_1, s_2) \zeta(s_2) ds_2 \right) u(s_1) ds_1, \\ p(t) &= \int_0^t K_2(t, s_1) \zeta(s_1) ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_{22}(t, s_1, s_2) \zeta(s_1) \zeta(s_2) ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Итерационный процесс решения (2) методом Ньютона – Канторовича имеет вид

$$u_m = u_{m-1} - [P'(u_{m-1})]^{-1} (P(u_{m-1})), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$[P'(u_{m-1})] (u) = I_1(u) + 2I_2(u_{m-1})I_2(u).$$

С учетом (3) последовательность приближенных решений $u_m(t)$ находится из решения линейного уравнения

$$I_1(u_m(t)) + 2I_2(u_{m-1}(t))I_2(u_m(t)) = I_2^2(u_{m-1}(t)) + y(t) - p(t). \quad (4)$$

В качестве начального приближения $u_0(t)$ в (4) выберем численное решение уравнения

$$I_1(u_0(t)) = y(t) - p(t). \quad (5)$$

Алгоритмы численного решения (4), (5) основаны на применении методов правых (средних) прямоугольников, обладающих свойством саморегуляризации. В частности, аппроксимация $u^*(t_i)$ в i -м узле сетки $t_i = ih$, $t_j = jh$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, i}$, $nh = T$, полученная с помощью метода правых прямоугольников, имеет следующий вид:

$$u_m^h(t_i) = \frac{Z_{m-1}(t_i) - \sum_{j=1}^{i-1} u_m^h(t_j) \Psi_{m-1}(t_i, t_j)}{\Psi_{m-1}(t_i, t_i)}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
Z_{m-1}(t_i) &= \left(h \sum_{j=1}^i \varphi^h(t_i, t_j) u_{m-1}^h(t_j) \right)^2 - p(t_i) + y(t_i), \\
\Psi_{m-1}(t_i, t_j) &= h K_1^h(t_i, t_j) + h^2 \sum_{k=1}^i K_{12}^h(t_i, t_j, t_k) \zeta^h(t_k) + \\
&\quad + 2h^2 \varphi^h(t_i, t_j) \sum_{k=1}^i \varphi^h(t_i, t_k) u_{m-1}^h(t_k)
\end{aligned}$$

с начальным приближением

$$\begin{aligned}
u_0^h(t_i) &= \frac{W(t_i)}{h K_1^h(t_i, t_i) + h^2 \sum_{k=1}^i K_{12}^h(t_i, t_i, t_k) \zeta^h(t_k)}, \\
W(t_i) &= y(t_i) - h^2 \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^i K_{12}^h(t_i, t_j, t_k) u_0^h(t_j) \zeta^h(t_k) - \\
&\quad - h \sum_{j=1}^{i-1} K_1^h(t_i, t_j) u_0^h(t_j) - h \sum_{j=1}^i K_2^h(t_i, t_j) \zeta^h(t_j) - \\
&\quad - h^2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i K_{22}^h(t_i, t_j, t_k) \zeta^h(t_j) \zeta^h(t_k),
\end{aligned}$$

где $p(t_i)$, $y(t_i)$ — значения функций в i -м узле сетки, при этом в (6) на каждой итерации должно выполняться условие $\Psi_{m-1}(t_i, t_i) \neq 0$.

Заключение

Рассмотрено численное решение задачи восстановления входного сигнала, сформулированной в виде полиномиального уравнения Вольтерра I рода. Разработанные алгоритмы основаны на применении метода Ньютона-Канторовича, метода правых и средних прямоугольников. В качестве начального приближения, с учетом специфики полиномиальных интегральных уравнений, используется численное решение соответствующих линейных уравнений Вольтерра I рода. Специфика алгоритмов проиллюстрирована на серии тестовых расчетов. Дальнейшее развитие работы связано с исследованием нелинейной динамики энтропии на выходе из элемента теплоэнергетической установки, входной сигнал которой является векторной функцией времени [4].

Работа выполнена в рамках научного проекта III.17.3.1 программы фундаментальных исследований СО РАН, рег. № АААА-А17-117030310442-8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейман Е.Г.* Идентификация входных сигналов в динамических системах // Автоматика и телемеханика. 1999. № 12. С. 3–15.
2. *Апарцин А.С.* Полиномиальные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Известия Иркутского государственного университета. Математика. 2007. Т. 1, № 1. С. 13–41.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматлит, 1959.
4. *Таиров Э.А.* Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1989. № 1. С. 150–156.

Identification of Input Signals for One Class of Dynamic Systems Using Volterra Polynomial Equations of the First Kind

S.V. Solodusha

Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, solodusha@isem.irk.ru

Abstract: We consider the problem of the approximate solution of a class of Volterra polynomial equations of the first kind arising from the identification of input signals in a nonlinear dynamic input-output system. The problem is solved using the Newton – Kantorovich method. For the initial approximations, we choose the numerical solution to the corresponding linear Volterra integral equations of the first kind. The results are applied to a heat exchanger unit model.

УДК 519.853

Разработка формализации задачи бесконфликтного слияния потоков воздушных судов

А.А. Спиридонов¹, С.С. Кумков²

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
¹ spiridonov@imm.uran.ru, ² kumkov.jr@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается задача бесконфликтного упорядочивания нескольких потоков воздушных судов в точке их слияния. Для решения

задачи используется информация автоматической системы о прогнозируемых моментах прибытия судов. Разработаны алгоритмы расчёта величины ускорения или замедления каждого судна в рамках допустимых интервалов варьирования. Целью варьирования моментов прибытия является выдерживание минимального безопасного временного интервала между моментами прохода судами точки слияния потоков. Программное обеспечение сведено в моделирующий пакет. Управление пакетом и процессом моделирования осуществляется с помощью диалоговой оболочки.

Ключевые слова: слияние потоков воздушных судов, бесконфликтная очередь, варьирование момента прибытия, условная конечномерная оптимизация, метод Хука — Дживса, градиентный спуск, метод Ньютона.

Введение

В настоящее время движение воздушных судов (ВС) происходит по трассам, состоящим из коридоров в горизонтальной плоскости и эшелонов в вертикальной. Трассы могут разветвляться или соединяться. В точке соединения трасс возникает задача слияния потоков самолётов в единую очередь на следующем участке трассы. Такая задача особенно актуальна вблизи аэродромов, где плотность воздушного движения высока. Основным требованием при слиянии потоков ВС является наличие минимального безопасного временного интервала между моментами прибытия судов в точку слияния.

Имеются два основных инструмента изменения момента прибытия ВС в точку слияния потоков. Первый из них — управление скоростью движения самолета, что позволяет достичь относительно небольшого изменения момента прибытия как в сторону более раннего, так и в сторону более позднего времени. Для значительных задержек используется второй инструмент — схемы задержки: зоны, в которых воздушное судно так или иначе отклоняется от движения по трассе, удлиняет свой путь и увеличивает время до выхода в точку слияния потоков.

В результате проектирования схем задержки для заданного аэропорта, осуществляемого с учётом особенностей конфигурации входящих трасс, ландшафта, расположения населённых пунктов и т.д., имеется информация о возможных ускорениях и замедлениях движения ВС по трассам. С использованием этой информации нужно исследовать возможности построенной системы по формированию безопасного слияния потоков ВС. При формировании безопасного расписания следует принимать во внимание, что и замедление, и

ускорение момента прибытия связаны с повышенным расходом топлива, который должен быть уменьшен по мере возможности.

В докладе представлены результаты исследования кусочно-линейных и нелинейных критериев оптимальности получаемого расписания. В рамках работы к решению поставленных задач условной конечномерной оптимизации применялись различные методы поиска локальных минимумов функции многих переменных.

1. Постановка задачи

Входными данными задачи являются следующие величины:

- $\{t_i^{\text{nom}}\}_{i=1}^N$ — упорядоченный по возрастанию набор номинальных моментов прибытия ВС в точку слияния;
- $t^{\text{acc}}, t^{\text{dec}}$ — величины промежутков времени, на которые можно задержать и ускорить ВС;
- τ_{safe} — минимальный безопасный временной интервал между двумя ВС в результирующей очереди.

Целью является получение набора моментов $\{t_i\}$ реального прибытия, удовлетворяющих условиям безопасности.

Таким образом возникает оптимизационная задача:

$$F(\{t_i\}) = \sum_{i=1}^N f(t_i) \rightarrow \min,$$

$$t_i \in [t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}], \quad t_i \geq 0, \quad \forall i \neq j \quad |t_i - t_j| \geq \tau_{\text{safe}}.$$

В зависимости от конкретного вида функции невязки f получаемая задача может решаться методами из различных областей теории оптимизации.

2. Рассматриваемые критерии качества

«Жадный» критерий Рассматривалась простейшая функция невязки $f(t_i) = t_i - t_i^{\text{nom}}$. Смысл критерия, основанного на ней, — «чем раньше ВС проходит точку слияния, тем лучше».

Данная задача решается «жадным» алгоритмом: каждому ВС приписывается наиболее ранний возможный момент прохождения точки слияния. Порядок прохождения ВС точки слияния совпадает с порядком номинальных моментов (доказано соответствующее утверждение).

Кусочно-линейные критерии. Следующая группа включала три функции невязки:

$$f(t_i) = |t_i - t_i^{\text{nom}}|; \quad (1)$$

$$f(t_i) = \begin{cases} -K^- \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & t_i < t_i^{\text{nom}}, \\ K^+ \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & t_i > t_i^{\text{nom}}; \end{cases} \quad (2)$$

$$f(t_i) = \begin{cases} -K^- \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & t_i < t_i^{\text{nom}}, \\ K_1^+ \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}), & t_i^{\text{nom}} \leq t_i \leq t_i^{\text{nom}} + \delta, \\ K_2^+ \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}) + A_2^+, & t_i > t_i^{\text{nom}} + \delta. \end{cases} \quad (3)$$

Смысл невязки (1) — «провести ВС через точку слияния как можно ближе к номинальному моменту». Отличие функции (2) от (1) в том, что ускорения и задержки ВС штрафуются по-разному. Функция (3) более деликатно рассматривает ситуацию замедления судна: вводится параметр δ , который описывает максимальную задержку, которую можно получить за счёт уменьшения скорости судна. При необходимости большей задержки ВС отправляется на схемы задержки. Соответственно, в этих двух ситуациях различаются расходы топлива и задержки в них штрафуются по-разному. Коэффициенты K^- , K^+ , K_1^+ , K_2^+ считаются положительными. Величина A_2^+ выбирается из условия непрерывности функции f в точке $t_i^{\text{nom}} + \delta$.

Функции невязки (1)–(3) могут быть представлены в виде суммы модулей разностей величин t_i и тех или иных констант, взятых с подходящими коэффициентами. Задачи с критериями, основывающимися на функциях, состоящими из суммы модулей, введением дополнительных переменных и ограничений на них сводятся к задачам линейного программирования (ЛП) и могут точно решаться методами ЛП, например, симплекс-методом.

Нелинейные критерии. Более точно требования к результирующей очереди можно описать с помощью нелинейных функций невязки. Однако решение нелинейной задачи оптимизации с ограничениями (связанными с интервалом варьирования) крайне затруднительно, поэтому мы переходим к задаче безусловной оптимизации:

$$\mathcal{F} = F(\{t_i\}) - \alpha \cdot \sum_{i=1}^N (\ln(t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{acc}}) + \ln(-t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}})) + I(\{t_i\}) \rightarrow \min. \quad (4)$$

Здесь слагаемое I штрафует нарушение безопасного временного интервала между судами, а коэффициент α отвечает за «жесткость» ограничений у границ интервала варьирования.

Штраф I рассматривался в виде «жестких» ограничений (подобных слагаемым с логарифмами в (4)) и в виде «мягких» ограничения, то есть в виде некоторой функции, определённой для всех t_i , но имеющей минимум в области $|t_i - t_j| \geq \tau_{\text{safe}}$.

Для решения задач безусловной минимизации использовались метод прямого поиска Хука — Дживса, метод градиентного спуска и метод Ньютона (с некоторыми модификациями, связанными с возможной невыпуклостью рассматриваемых функций F и I).

Все предложенные вычислительные процедуры реализованы в виде компьютерных программ на языке C++, которые сведены в моделирующий пакет. Управление пакетом и процессом моделирования осуществляется с помощью соответствующей диалоговой оболочки, реализованной с использованием библиотеки Qt.

Работа выполнена в рамках проекта «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники» по проведению фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым президиумом Российской академии наук.

Development of Formalization of Non-Conflict Aircraft Flows Merging Problem

Arseniy A. Spiridonov¹, Sergey S. Kumkov²

IMM UrB RAS, Ekaterinburg, Russia,

¹ spiridonov@imm.uran.ru, ² kumkov.jr@imm.uran.ru

Abstract: Non-conflict aircraft flows merging problem is considered. The input information about forecast aircraft arrival instants is obtained from the automatic system. Algorithms for computing magnitude of acceleration or deceleration for each aircraft have been worked out. The aim of arrival instants variation is to provide a minimal safe time interval between each two aircraft when they pass through the merge point. Created numerical procedures are joined into single simulation software. The system is controlled via GUI environment.

Регуляризация условий оптимальности в нелинейном оптимальном управлении

М.И. Сумин

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
m.sumin@mail.ru

Аннотация: Обсуждается как “нелинейная” версия основанной на двойственности регуляризации порождает соответствующую регуляризацию классических условий оптимальности в форме принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в нелинейной (невывуклой) задаче оптимального граничного управления с операторным ограничением типа равенства в случае третьей начально–краевой задачи для дивергентного параболического уравнения.

Ключевые слова: оптимальное управление, параболическое уравнение, нелинейная задача, граничное управление, двойственная регуляризация, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина.

Введение. Задачам оптимизации в целом и, в частности, задачам оптимального управления характерны различные проявления некорректности. Разнообразные примеры несуществования оптимальных элементов, их неустойчивости по отношению к возмущениям исходных данных оптимизационных задач можно найти, например, в [1]. Присущие самим оптимизационным задачам свойства некорректности, в полной мере, наследуют и получаемые в них классические условия оптимальности (КУО) [3–5]. В работах [3–5] (см. также их библиографию) на базе основанных на двойственности методов регуляризации [6] был предложен и развит подход к регуляризации задач условной выпуклой оптимизации, в соответствии с которым “основной целью” регуляризации является “не сама” оптимизационная задача, а соответствующие ей КУО, в частности, принцип Лагранжа (ПЛ), принцип максимума Понтрягина (ПМП). Такой подход порождает естественную трансформацию КУО, приводящую к их регуляризованным секвенциальным обобщениям, которые: 1) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона — Понтрягина; 2) “преодолевают” возможные неустойчивость и невыполнимость КУО, являясь регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач; 3) формулируются как утверждения о существовании в исходной (невозмущенной) задаче ограниченных минимизирующих приближенных

решений (МПП) в смысле Дж. Варги и сохраняют общую структуру КУО; 4) приводят к КУО “в пределе”. Тем самым, трансформирование КУО в утверждения секвенциального характера, представляющие собою регуляризирующие алгоритмы решения задач, позволяет принципиально расширить сферу действия оптимизационной теории, основанной на привычных конструкциях функций Лагранжа и Гамильтона — Понтрягина. В работах [3–5] (см. также их библиографию) указанный подход к регуляризации КУО был реализован для ряда задач выпуклого программирования с операторными ограничениями в гильбертовом пространстве и выпуклых задач оптимального управления сосредоточенными и распределенными системами.

В отличие от [3–5], в докладе обсуждается как “нелинейная” версия основанной на двойственности регуляризации [7, 8] порождает соответствующую регуляризацию КУО в форме ПЛ и ПМП в нелинейной (невыходной) задаче оптимального граничного управления с операторным ограничением типа равенства в случае третьей начально–краевой задачи для параболического уравнения.

Постановка задачи. Рассматриваем задачу оптимального граничного управления с фиксированным временем и с операторным ограничением–равенством в $L_2(\Omega)$

$$(P) \quad \int_{\Omega} F(x, z[w](x, T)) dx \rightarrow \inf, \quad G(\cdot, z[w](\cdot, T)) = h + p, \quad w \in \mathcal{D},$$

где $p \in L_2(\Omega)$ — параметр, $z[w] \in V_2^{1,0}(Q_T) \cap L_{\infty}(Q_T)$ — решение [2] третьей начально–краевой задачи для линейного параболического уравнения

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x, t) z_{x_j}) + a(x, t) z = f(x, t), \quad z(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x, t) z = w(x, t), \quad (x, t) \in S_T,$$

$\mathcal{D} \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(s, t) \in W \text{ при п.в. } (s, t) \in S_T\}$, $W \subset R^1$ — компакт, Ω — ограниченная область в R^n с кусочно–гладкой границей S , $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $S_T \equiv \{(x, t) : x \in S, t \in (0, T)\}$. Здесь: $F, G : \Omega \times R^1 \rightarrow R^1$ измеримые по Лебегу по первой компоненте x и непрерывные по второй компоненте z при п.в. $x \in \Omega$ функции, $h \in L_2(\Omega)$, $a_{i,j}, i, j = 1, \dots, n$, $a, f \in L_{\infty}(Q_T)$, $\psi \in L_{\infty}(\Omega)$, $\sigma \in L_{\infty}(S_T)$, коэффициенты $a_{i,j}$ подчиняются обычному условию

равномерной параболичности. Подразумевается, что все функции из набора исходных данных $\{F, G, h, a_{i,j}, a, f, \psi, \sigma\}$ задаются с определенной погрешностью и известны оценки отклонения возмущенных данных от точных в соответствующих метриках.

Обсуждение основных результатов. В докладе формулируются регуляризованные версии ПЛ и ПМП в неитерационной и итерационной формах для нелинейной (невыпуклой) задачи (P) . Основной его целью, помимо формулировки самих указанных результатов, является сравнение “нелинейной” регуляризации ПЛ и ПМП с аналогичной регуляризацией [3–5] в выпуклых задачах. С одной стороны, при определенных естественных условиях на исходные данные задач, регуляризованные ПЛ и ПМП в “выпуклом” и “невыпуклом” случаях формулируются схожим образом в форме теорем существования в этих задачах специальных, определяемых посредством функций Лагранжа и Гамильтона – Понтрягина, ограниченных МПР. С другой же стороны, эти регуляризованные ПЛ и ПМП имеют существенные отличия: 1) в случае выпуклых задач с сильно выпуклым функционалом качества конструируемые ограниченные МПР сильно (слабо, если этот функционал не сильно выпуклый) сходятся к решению исходной невозмущенной задачи; в то же время, в нелинейных задачах “гарантируется” лишь построение МПР, однако, в этом случае, вообще говоря, не требуется, чтобы существовало решение задачи; 2) в отличие от выпуклого случая формулировка теорем существования МПР в задаче (P) и других подобных ей нелинейных задачах существенно опирается на субдифференциальные свойства ее функции значений как функции параметра $p \in L_2(\Omega)$, которая в этом случае является лишь полунепрерывной снизу и, вообще говоря, невыпуклой; 3) в качестве понятий субдифференцируемости при формулировке “нелинейных” регуляризованных ПЛ и ПМП используются хорошо известные в современном негладком анализе понятия проксимальных субградиентов (см., например, [9]) и субдифференциалов Фреше (см., например, [10]) полунепрерывных снизу функций; 4) указанные понятия негладкого анализа, в свою очередь, неизбежно порождают соответствующие конструкции модифицированных функций Лагранжа, в терминах которых и формулируются регуляризованные “нелинейные” ПЛ и ПМП; 5) последним обстоятельством регуляризация КУО в нелинейных задачах существенно отличается от аналогичной регуляризации в выпуклых задачах [3–5], опирающейся лишь на конструкцию классической функции Лагран-

жа, “порождаемой” классическим же понятием субдифференцируемости в смысле выпуклого анализа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-07-00782).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
3. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
4. *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 1. С. 25–49.
5. *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 279–296.
6. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
7. *Сумин М.И.* Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 5. С. 796–816.
8. *Сумин М.И.* Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзавы в регулярной задаче нелинейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 6. С. 947–977.
9. *Loewen P.D.* Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings and Lecture Notes. Vol. 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. 153 p.
10. *Mordukhovich B.S.* Variational analysis and generalized differentiation, I: Basic Theory. Berlin: Springer, 2006. 579 p.

Regularization of Optimality Conditions in Nonlinear Optimal Control

Mikhail I. Sumin

NNSU named after N.I. Lobachevskii, Nizhnii Novgorod, Russia,
m.sumin@mail.ru

Abstract: We discuss how a “nonlinear” version of duality-based regularization generates a corresponding regularization of classical optimality conditions in the form of the Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in a nonlinear (nonconvex) optimal boundary control problem with an operator equality-constraint in the case of the third initial–boundary problem for a divergent parabolic equation.

Решение обратной граничной задачи теплопроводности для композиционных материалов

В.П. Танана¹, А.И. Сидикова²

¹ ЮУрГУ, Челябинск, Россия, tananavp@susu.ru

² ЮУрГУ, Челябинск, Россия, sidikovaai@susu.ru

Аннотация: В статье изучается задача об определении граничного условия в уравнении теплопроводности, состоящего из однородных частей с различными теплофизическими свойствами. В качестве граничных условий рассматриваются условие Дирихле на левом конце стержня (при $x = 0$), соответствующее нагреву этого конца и линейное условие третьего рода на правом конце (при $x = 1$), соответствующие охлаждению при взаимодействии с окружающей средой. В точке разрыва теплофизических свойств (при $x = x_0$) ставятся условия непрерывности температуры и теплового потока. В обратной задаче граничное условие на левом конце считается неизвестным на всем бесконечном интервале времени. Для его отыскания задается значение решения прямой задачи в точке x_0 , т. е. точке раздела стержня на два однородных участка. В работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, которое позволило применить к обратной граничной задаче преобразование Фурье по времени. Методом проекционной регуляризации решена обратная граничная задача для уравнения теплопроводности и получены точные по порядку оценки погрешности этого решения.

Ключевые слова: метод проекционной регуляризации, обратная задача теплопроводности, оценка погрешности, некорректная задача.

Введение

В различных отраслях современной техники нашли широкое применение композиционные материалы. Дальнейший прогресс в развитии многих направлений приборостроения в большей степени связан с увеличением доли использования таких материалов, а при создании новой аэрокосмической и специальной техники их роль становится решающей.

Развитие приборостроения идет по пути усложнения исследуемых моделей и постановок задач [1]. Исходя из модельных представлений механики, композиционный материал можно определить, как неоднородную среду, описываемую с помощью разрывных по координатам функций. В статье исследуется и решается обратная задача

об определении температуры на левом конце стержня для системы двух уравнений теплопроводности с разными коэффициентами температуропроводности. Поскольку к решению подобных задач предъявляются высокие требования точности, то необходимо получение гарантированных оценок, которые существенно повышают надежность численных результатов. Вопросы, связанные с оценками погрешности остаются недостаточно изученными.

В связи с этим в работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, которое позволило применить к обратной граничной задаче преобразование Фурье по времени, после применения которого использован метод проекционной регуляризации [2], с помощью которого получено приближенное решение, а также точная по порядку оценка погрешности этого решения.

1. Постановка обратной граничной задачи

Пусть тепловой процесс описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, x_0], \quad t \in (0, \infty), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in [x_0, 1), \quad t \in (0, \infty), \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad x \in [0; x_0]; \quad u_2(x, 0) = 0, \quad x \in [x_0; 1], \quad (3)$$

$$u_1(0, t) = q(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2(1, t)}{\partial x} + k u_2(1, t) = 0, \quad k > 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \quad a_1 \frac{\partial u_1(x_0, t)}{\partial x} = a_2 \frac{\partial u_2(x_0, t)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad (6)$$

где $q(t) \in C^2[0, +\infty)$, $q(0) = q'(0) = 0$ и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \geq t_0$, $q(t) = 0$.

Предположим, что функция $q(t)$ не известна, а вместо нее в точке $x_0 \in (0, 1)$ измеряется температура $f(t)$, соответствующая данному процессу

$$u_1(x_0, t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Требуется, используя $f(t)$, определить функцию $q(t)$ такую, что при подстановке ее в условие (4), решение $u(x, t)$ задачи (1)–(6) удовлетворяет соотношению (7).

Используя теорию функциональных рядов, была доказана теорема

Теорема 1. *Существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (1)–(6), удовлетворяющее условию*

$$u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)) \cap C^{1,0}([0, x_0)$$

$$\bigcup (x_0, 1) \times (0, \infty)) \cap C^{2,1}((0, x_0) \bigcup (x_0, 1) \times (0, \infty)),$$

а также $\forall t \in [0, \infty) \quad u(x, t) \in H^2[0, 1]$.

Рассмотрим множество $M_r \subset L_2[0; \infty)$,

$$M_r = \left\{ q(t) : q(t) \in L_2[0; \infty), \int_0^{+\infty} |q(t)|^2 dt + \int_0^{+\infty} |q'(t)|^2 dt \leq r^2 \right\}.$$

Предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in C[0, \infty)$ существует функция $q_0(t)$, принадлежащая множеству M_r , но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in L_2[0; \infty) \cap L_1[0, \infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\sup_{t \geq 0} |f_\delta(t) - f_0(t)| \leq \delta. \quad (8)$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_r определить приближенное решение q_δ задачи (1)–(3), (5), (6), (7) и оценить величину $\|q_\delta - q_0\|_{L_2[0, \infty)}$.

Продолжим решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3), (5), (6) на отрицательную полуось, положив $u(x, t) = 0$ при $t < 0$.

Применяя преобразование

$$F[q(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-it\tau} dt, \quad |\tau| \geq 0, \quad q(t) \in L_2[0; \infty).$$

сведем задачу (1)–(3), (5), (6), (7) к задаче вычисления значений неограниченного оператора T ,

$$T\hat{f}(\tau) = \frac{\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}/a_2 + \mu_0 x_0 \sqrt{\tau}/a_1 + \beta(\tau)]}{\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_0)\sqrt{\tau}/a_2 + \beta(\tau)]} \hat{f}(\tau), \quad (9)$$

$$D(T) = \{\hat{f}(\tau) : \hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty) \text{ и } T\hat{f}(\tau) \in L_2[0, \infty)\},$$

$\mu_0 = (1 + i)/\sqrt{2}$, $\operatorname{sh} \beta(\tau) = ka_2/\mu_0 \sqrt{\tau - ik^2 a^2}$, $\hat{q}_0(\tau) = T\hat{f}_0(\tau)$, $\hat{f}_0(\tau) = F[f_0(t)]$, а $\hat{f}_\delta(\tau) = F[f_\delta(t)]$. Из формулы (8) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta - \hat{f}_0\| \leq \sqrt{2}\delta. \quad (10)$$

Для решения задачи (9), (10) используем регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$, [3] определяемое формулой

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau), & |\tau| \leq \alpha, \\ 0, & |\tau| > \alpha. \end{cases}$$

Приближенное решение задачи (9), (10) определим формулой $\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau)$, в котором параметр регуляризации $\overline{\alpha}(\delta, r)$ определим из уравнения

$$\sqrt{1 + \alpha^2} e^{\frac{x_0 \sqrt{\alpha/2}}{a_1}} = \frac{r}{\delta}.$$

Решение $q_\delta(t)$ обратной задачи (1)–(3), (5), (6), (7) определим формулой

$$q_\delta(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} F^{-1}[\overline{q}_\delta(\tau)], & t \in [0, t_0], \\ 0, & t < 0, \quad t > t_0, \end{cases}$$

где F^{-1} оператор, обратный F .

Для приближенного решения $q_\delta(t)$ справедлива оценка

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \leq d \cdot r \ln^{-2} \delta,$$

где d — некоторая константа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 279 с.
2. Танана В.П., Данилин А.Р. Об оптимальности регуляризующих алгоритмов при решении некорректных задач // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 7. С. 1323–1326.
3. Tanana V.P., Sidikova A.I. Optimal Methods for Ill-Posed Problems With Applications to Heat Conduction. De Gruyter, 2018. 130 p.

Solving the Inverse Heat Conduction Boundary Problem for Composite Materials

V.P. Tanana¹, A.I. Sidikova²

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, tananavp@susu.ru

² South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, sidikova@susu.ru

Abstract: The paper deals with the problem of determining the boundary condition in the heat equation consisting of homogeneous parts with different thermal properties. As boundary conditions, the Dirichlet condition at the left end of the rod (at $x = 0$) corresponding to the heating of this end and the linear condition of the third kind at the right end (at $x = 1$) corresponding to the cooling when interacting with the environment are considered. In a point of discontinuity of heat-transfer properties (at $x = x_0$) conditions of continuity for temperature and heat flow are set. In the inverse problem, the boundary condition at the left is considered unknown over the entire infinite time interval. To find it, the value of the direct problem solution at the point of x_0 , that is, the point of the rod division into two homogeneous sections, is specified. In this paper, an analytical study of the direct problem was carried out, which allowed us to apply the time Fourier transform to the inverse boundary value problem. The inverse heat conduction boundary problem was solved using the projection-regularization method and order-accurate error estimates of this solution were obtained.

УДК 519.2, 656.02

Задача восстановления функции предпочтений пассажиров по распределению пассажиропотоков

Г.А. Тимофеева

УрГУПС, Екатеринбург, Россия, Gtimofeeva@usurt.ru

Аннотация: Рассматривается математическая модель предпочтения пассажиров при выборе вида транспорта и(ли) маршрута. Предполагается, что выбор маршрута осуществляется на основе функции предпочтения со случайным коэффициентом, отражающим предпочтение случайно выбранного пассажира. Анализируются свойства задачи, формулируется и изучается обратная задача: по распределению пассажиропотоков восстановить вид целевой функции и распределение случайных параметров.

Ключевые слова: функция предпочтения, прогнозирование пассажиропотоков, стохастическая оптимизация, выбор альтернатив.

Введение

Проблема прогнозирования пассажиропотоков является актуальной в настоящее время, в связи с объемными планами развития транспортной системы России, в том числе за счет строительства высокоскоростных железных дорог (ВСМ). Введение нового звена в транспортную систему требует значительных затрат, поэтому планирование новых ВСМ основывается на фундаментальном анализе потребности в улучшении транспортного обслуживания, оценке влияния нового звена на развитие территории в целом, прогнозировании пассажиропотоков [1].

Для описания выбора типа транспорта используются различные критерии выбора, такие как обобщенная стоимость поездки, учитывающая время проезда с коэффициентом, отражающим его ценность; анализируются затраты (стоимостные и временные) на 1 км пути и другие показатели; используются логистическая модель выбора типа транспорта.

В работах [2, 3] был предложен подход прогнозирования изменения пассажиропотоков при вводе нового звена, основанный на представлении задачи выбора вида транспорта как задачи оптимизации со случайной целевой функцией, представляющей линейную свертку критериев (стоимости проезда и времени перемещения) со случайным весовым коэффициентом. Последний подход не позволяет решать задачу классификации, то есть отнесения отдельного наблюдения (пассажира) к какому-либо классу, но дает решение задачи о распределении потоков при заданном (или определенном на основании предшествующих статистических данных) распределении предпочтений пассажиров. Статья посвящена развитию этого подхода, в том числе исследованию свойств математической модели и решению задачи восстановления распределения случайного параметра по данным о пассажиропотоках.

1. Математическая модель предпочтения

Изложим кратко математическую модель задачи о выборе типа транспорта, предложенную в статьях [2, 3]. Пусть у потребителя (пассажира) есть выбор между возможными n возможными маршрутами — элементами множества возможных альтернатив $A_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$. Если добавляется новый вид транспорта (но-

вый маршрут), то множество альтернатив изменяется и принимает вид $A_1 = A_0 \cup e_{n+1}$, где e_{n+1} — новый маршрут.

Предпочтения случайно выбранного пассажира описываются случайным вектором $\{\xi_0, \xi_1\}$, где ξ_j — зависимые между собой дискретные случайные величины, принимающие значения $\xi_j \in A_j$, $j = 0, 1$. Здесь ξ_0 — распределение предпочтений до введения нового звена транспортной сети, ξ_1 — после введения. Через вектор $q^{(0)}$ обозначим исходное распределение вероятностей, а через $q^{(1)}$ — распределение вероятностей после изменения структуры, то есть $q_i^{(j)} = Pr\{\xi_j = e_i\}$. Обозначим условные вероятности через $p_{ij} = Pr\{\xi_1 = e_i | \xi_0 = e_j\}$, Матрица переходных вероятностей P определяет распределение пассажиропотоков введения нового звена: $q^{(1)} = P^T q^{(0)}$.

Обозначим через c_i стоимости проезда каждым маршрутом, t_i — время проезда. Задача о выборе маршрута рассматривается, как задача с 2-мя критериями:

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= 1, \quad x_i \in \{0; 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \\ T(X) &= t_1 x_1 + \dots + t_n x_n \rightarrow \min_X, \\ C(X) &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \rightarrow \min_X. \end{aligned} \quad (1)$$

Множество недоминируемых (оптимальных по Парето) решений двухкритериальной задачи (1) обозначим $E_0 \subseteq A_0$. В отличие от модели с единственным лицом, принимающим решения, будем рассматривать вероятностную модель, когда потребителей (ЛПР) много и их предпочтения можно изучить на основе статистических данных. В качестве критерия будем использовать взвешенную сумму двух критериев $f_\theta(X) = C(X) + \theta T(X)$, где $\theta \geq 0$ — индивидуальная “ценность” единицы времени для данного пассажира. Получаем задачу минимизации одного критерия, зависящего от случайного параметра $\theta \in [0, \infty)$.

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_n &= 1, \quad x_i \in \{0; 1\}, \\ f_\theta(X) &= C(X) + \theta T(X) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем предполагать, что случайно выбранный пассажир выбирают оптимальное решение $X_0(\theta)$ из множества E_0 на основе решения задачи (2). Случайная величина $X_0(\theta)$ имеет дискретное распределение с вероятностями $q_i^{(0)}$ на множестве E_0 , которое определяется распределением параметра θ и значениями критериев $\{C, T\} \in \mathbb{R}^{2n}$.

На основании исследования свойств задачи (2) в работе [3] получены выражения для вероятностей $q_i^{(j)}$ и матрицы переходных вероятностей P .

2. Задача восстановления распределения предпочтений

Рассмотрим обратную задачу: по данным о ценах и времени перевозок $\{C, T\}$ и распределении пассажиропотоков $\{q_i, i = \overline{1, n}\}$ определить распределение предпочтений пассажиров, т.е. распределение случайного параметра θ . Эта задача может рассматриваться в различных постановках и учитывать, например, различные неопределенности в задании, как значений критериев, так и в значениях вероятностей q_i . Рассмотрим математическую задачу восстановления распределения параметра θ в точной постановке.

Задача В. Пусть заданы: упорядоченный по возрастанию цены набор значений критериев для n альтернатив $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, где $c_i < c_{i+1}$ и $t_i > t_{i+1}$, и распределение вероятностей альтернатив $\{q_i\}$, $q_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Найти распределение f_θ случайной величины θ такое, что решение $X(\theta)$ задачи (2) удовлетворяет условию

$$Pr\{X(\theta) = e_i\} = q_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Анализ Задачи В показывает, что, во-первых, не любые наборы критериев соответствуют задаче стохастической оптимизации с линейной целевой функцией, во-вторых, ограничение на класс возможных распределений (например, унимодальные непрерывные распределения) накладывает дополнительные условия на вероятности $\{q_i\}$. При наличии только двух альтернатив ($n = 2$) интерес представляет исследование взаимосвязи логистической модели выбора альтернативы и задачи стохастической оптимизации вида (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01123-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишарин А.С., Покусев О.Н., Намиот Д.Е., Катцын Д.В. О моделировании пассажирского потока для высокоскоростных железных дорог // Int. J. Open Inform. Technol. 2018. Vol. 6, no. 5. P. 15–19.
2. Timofeeva G., Martynenko A. Analysis of transport network development via probabilistic modelling // Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (STAB): 14th Intern. Conf. (Pyatnitskiy's Conference, 30

- May–1 June 2018, Moscow): proc. IEEE Xplore Digital Library. 2 p. DOI: 10.1109/STAB.2018.8408407
3. *Timofeeva G., Martynenko A., Zavalishchin D.* Probabilistic modeling of passengers and carriers preferences via bicriterial approach // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 496–498. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.469

Problem of Restoring of Passenger Preferences Function in the Distribution of Passenger Traffic

Galina A. Timofeeva

Ural State University of Railway Transport, Ekaterinburg, Russia,
Gtimofeeva@usurt.ru

Abstract: A mathematical model of passenger preferences is considered when choosing a mode of transport and/or a route. It is assumed that the choice of route is based on the preference function with a random coefficient reflecting the preferences of the randomly chosen passenger. The properties of the problem are analyzed, the inverse problem is formulated and studied: restore the form of the objective function and the distribution of random parameters according to the distribution of passenger flows.

УДК 517.911.5

ВВ решения выпуклого процесса выметания дифференциального включения с возмущениями

А.А. Толстоногов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
Иркутск, Россия, aatol@icc.ru

Аннотация: Рассматриваются вопросы существования и компактности множества решений выпуклого процесса выметания с возмущениями. Ретракция движущегося множества, определяющего процесс выметания, подчинена положительной мере Радона. Возмущениями являются многозначные отображения, обладающие различными свойствами непрерывности по фазовой переменной. Решением является пара: непрерывная справа функция ограниченной вариации и интегрируемый селектор возмущения, определенного на этой функции.

Полученные результаты применяются для изучения задач минимизации интегральных функционалов с невыпуклыми интегрантами. Доказана теорема релаксации и аналог теоремы Н.Н. Боголюбова в вариационном исчислении.

Ключевые слова: функция ограниченной вариации, дифференциальная мера, плотность меры, релаксация, теорема Н.Н. Боголюбова.

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается процесс выметания дифференциального включения. Правая часть дифференциального включения содержит нормальный конус движущегося выпуклого замкнутого множества и возмущение. Ретракция движущегося множества, порождающего процесс выметания, является функцией ограниченной вариации, дифференциальная мера (мера Стильтьеса) которой абсолютно непрерывна относительно положительной меры Радона. Возмущениями являются многозначные отображения, как правило, с замкнутыми невыпуклыми значениями, обладающие различными свойствами непрерывности по фазовой переменной. Под решением дифференциального включения понимается пара: непрерывная справа функция ограниченной вариации (BV функция) и интегрируемый селектор возмущения вдоль этой функции. BV функция порождает дифференциальную меру (меру Стильтьеса), которая абсолютно непрерывна относительно меры Радона и плотность этой дифференциальной меры относительно меры Радона удовлетворяет дифференциальному включению, в правой части которого вместо возмущения стоит член, содержащий его интегрируемый селектор.

Основное внимание уделено вопросам существования и свойствам множества решений при различных типах возмущений, взаимосвязям между решениями включений с исходным возмущением и возмущением с овыпукленными значениями.

Рассматривая возмущение как ограничение на управление, мы переходим к управляемой системе. Для управляемой системы мы изучаем взаимосвязи между задачами минимизации интегрального функционала с невыпуклым и овыпукленным по управлению интегрантом на решениях исходной системы и системы с овыпукленным ограничением на управление.

Для решения перечисленных выше вопросов изучается пространство непрерывных справа функций ограниченной вариации, наделенное топологией равномерной сходимости на отрезке. Найдены критерии компактности множеств в этом пространстве, которые используются при изучении оптимизационных задач. Получены правила вычисления плотностей дифференциальных мер, порожденных непрерывными справа функциями ограниченной вариации, абсолютно непрерывных относительно положительной меры Радона. Эти

правила являются аналогами правил вычисления производных абсолютно непрерывных функций.

Мы рассматриваем 3 типа многозначных возмущений:

I. возмущение с выпуклыми компактными значениями, которое имеет по времени измеримый селектор, а по фазовой переменной — замкнутый график;

II. возмущение состоит из суммы двух многозначных отображений. Одно из них имеет своими значениями замкнутые, невыпуклые, ограниченные множества. Оно измеримо по времени и удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной. Второе отображение является отображением I-го типа;

III. возмущение с замкнутыми, невыпуклыми, неограниченными значениями, которое измеримо по времени и удовлетворяет условию Липшица по фазовой переменной.

Все многозначные возмущения подчинены двум видам условия роста:

а) условие роста, описываемое функцией расстояния от нулевого элемента до значений многозначного отображения;

б) условие роста, описываемое функцией, мажорирующей многозначное отображение.

При выполнении условия роста а) для возмущений типа I–III мы доказываем теоремы существования. При выполнении условия роста б) мы изучаем свойства множества решений в прямом произведении пространства непрерывных справа BV функций и пространства интегрируемых функций со слабой топологией.

При некоторых дополнительных предположениях, относящихся к движущемуся множеству, мы доказываем компактность множества решений.

При рассмотрении возмущения III-го типа мы устанавливаем связь между решениями процесса выметания с исходным возмущением и возмущением с овыпукленными значениями. Показывается, что для любого решения процесса выметания с овыпукленным возмущением существует сходящаяся к нему последовательность решений процесса выметания с исходным возмущением. При этом, если выполняется условие роста а), то пространство интегрируемых функций в этом случае наделяется нормой Алексеевича (A. Alexiewicz).

Мы изучаем задачу минимизации интегрального функционала с невыпуклым по управлению интегрантом на решениях процесса

выметания с ограничением III-го типа на управление. Наряду с этой задачей рассматривается задача минимизации интегрального функционала, у которого интегрантом является биполяр по управлению исходного интегранта (овыпукленный по управлению интегрант) на решениях процесса выметания с овыпукленным ограничением на управление. При достаточно общих предположениях, относящихся к интегранту, показано для любого решения процесса выметания с овыпукленным ограничением на управление и значением на этом решении функционала с овыпукленным интегрантом существует сходящаяся к ним последовательность решений процесса выметания с исходным ограничением на управление и последовательность значений на этих решениях функционала с исходным интегрантом. При этом траектории сходятся в пространстве непрерывных справа BV функций, а управления сходятся в пространстве интегрируемых функций с нормой Алексеевича. Так как значения биполяры по управлению интегранта не превышают значений самого интегранта, то полученный результат является аналогом классической теоремы Н.Н. Боголюбова в вариационном исчислении.

При некоторых дополнительных предположениях доказывается, что овыпукленная задача минимизации имеет оптимальное решение.

Обсуждаются возможные обобщения условий, относящихся к движущемуся множеству.

Все основные результаты являются новыми.

Если ретракция движущегося множества является абсолютно непрерывной функцией, то мы приходим к абсолютно непрерывным решениям. Даже для таких решений в подавляющем большинстве полученные результаты являются новыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00026-а).

BV Solutions of a Convex Sweeping Process of a Differential Inclusion with Perturbations

Alexander A. Tolstonogov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory,
Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia, aatol@icc.ru

Abstract: The questions on existence and compactness of the solution set of a convex sweeping process with perturbations are considered. The retraction of the moving set describing the sweeping process is subject to a positive

Radon measure. The perturbations are multivalued mappings having various continuity properties with respect to the phase variable. A solution is the pair consisting of a right continuous function of bounded variation and an integrable selector of the perturbation defined on this function.

The results we obtain are applied to study minimization problems for integral functionals with nonconvex integrands. A relaxation theorem and an analogue of N.N. Bogolyubov's theorem in the calculus of variations are proved.

УДК 517.977

Задача стабилизации системы с переключениями при помощи кусочно-аффинного управления

П.А. Точилин¹, А.А. Атанесян²

¹ БМК МГУ, Москва, Россия, tochilin@cs.msu.ru

² БМК МГУ, Москва, Россия, at-an-ar@yandex.ru

Аннотация: Статья посвящена решению задачи стабилизации для математической модели гибридной системы с переключениями между режимами функционирования. Каждому такому режиму сопоставлены нелинейные дифференциальные уравнения с управляющими параметрами. Моменты (условия) переключений являются компонентой управления. Требуется построить стабилизатор в позиционной форме, за счет которого траектории совокупной нелинейной системы смогут достигнуть заданного целевого множества в фазовом пространстве за (заранее неизвестное) конечное время. Для решения задачи используется аппарат непрерывных кусочно-аффинных функций Ляпунова и соответствующих им кусочно-аффинных функций управления. Доказана теорема о достаточных условиях стабилизируемости гибридной системы в указанном классе управлений. Приведен алгоритм построения функции Ляпунова и стабилизатора.

Ключевые слова: нелинейная динамика, гибридная система, задача стабилизации, кусочно-аффинная функция Ляпунова.

Введение

Работа посвящена решению задачи стабилизации для гибридной системы [1–3] с возможными переключениями между составляющими ее подсистемами. Динамика для каждой такой подсистемы задана нелинейными дифференциальными уравнениями с управляющими

параметрами следующего вида:

$$\dot{x} = f(i, x) + g(i)u, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь $t \in [t_0, \infty)$, функция $f(i, x) \in \mathbb{R}^{n_x}$ является непрерывно дифференцируемой по переменной $x \in \Omega$, Ω — некоторое компактное множество, $g(i) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ — заданные матрицы, i — номер подсистемы (режима функционирования совокупной системы с переключениями), $u = u(i, x) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — позиционное управление, на возможные значения которого наложены “жесткие”, поточечные ограничения: $u(i, x) \in \mathcal{P}$, где множество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ — выпуклый компакт.

Предполагается, что для каждой подсистемы отдельно задача построения стабилизирующего ее позиционного управления является нетривиальной, а область притяжения целевого положения равновесия замкнутой системы является недостаточно большой. Например, такая ситуация может возникнуть в том случае, если стабилизатор построен лишь для линеаризованных уравнений и гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы лишь в малой окрестности положения равновесия [4, 5]. В то же время за счет переключений между подсистемами можно добиться расширения области притяжения. Такие переключения между подсистемами (мгновенные, скачкообразные смены режимов функционирования) производятся при определенных условиях, когда траектория системы попадает на специальные, выделенные множества. Условия переключений должны быть подобраны таким образом, чтобы для гибридной системы, замкнутой полученным управлением, можно было корректно определить решения.

Основной целью работы является определение правил для переключений между подсистемами, а также поиск стабилизирующих управлений в каждом из режимов с целью стабилизации совокупной системы. Предлагаемое решение включает кусочную линеаризацию исходных, нелинейных дифференциальных уравнений, и далее построение функции Ляпунова для управляемой системы в классе кусочно-аффинных функций специального вида, заданных на сетке из симплексов в фазовом пространстве. Параллельно с построением функции Ляпунова необходимо определить связанное с ней кусочно-аффинное управление — стабилизатор.

Идея поиска функции Ляпунова в классе кусочно-аффинных функций успешно используется при исследовании устойчивости систем (без управляющих воздействий). Для некоторых классов

нелинейных систем с устойчивыми положениями равновесия были получены алгоритмы построения таких функций [6]. В частности, разработан метод построения кусочно-аффинной функции Ляпунова для систем с переключениями [7, 8]. Эти алгоритмы, однако, еще предстоит адаптировать для решения более сложных задач стабилизации.

1. Основной результат

В данной работе исследованы свойства кусочно-аффинных функций Ляпунова для систем с переключениями, указаны ограничения на кусочно-аффинные управления, гарантирующие возможность корректного построения траекторий замкнутой системы, получена оценка области притяжения для функции Ляпунова указанного вида. Доказана теорема о достаточных условиях стабилизируемости гибридной системы в указанном классе управлений. Предложен конкретный алгоритм построения пары кусочно-аффинных функции Ляпунова и управления, позволяющих решить задачу стабилизации для системы с автономными переключениями.

Полученные теоретические результаты продемонстрированы на конкретных вычислительных примерах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 19-01-00613а, 16-29-04191офи_м.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van der Schaft A., Schumacher H.* An introduction to hybrid dynamical systems. Ser. Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 251. Springer, 2000. 174 p.
2. *Куржанский А.Б., Варайя П.* Задачи динамики и управления в гибридных системах // Тр. междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. С. 21–37.
3. *Куржанский А.Б., Точилин П.А.* Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1523–1533.
4. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
5. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1968. С. 475–514.
6. *Giesl P., Hafstein S.* Existence of piecewise linear Lyapunov functions in arbitrary dimensions // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. 2012. P. 3539–3565.
7. *Johansson M.* Piecewise Linear Control Systems. A Computational Approach. Springer, 2003.

8. *Hafstein S.* An algorithm for constructing Lyapunov functions // Electron. J. Differ. Equ. 2007. Conf. Monograph 08. 101 p.

Stabilization Problem for Switched System Using Piecewise Affine Control

Pavel A. Tochilin¹, Anna A. Atanesyan²

¹ CMC MSU, Moscow, Russia, tochilin@cs.msu.ru

² CMC MSU, Moscow, Russia, at-an-ar@yandex.ru

Abstract: The article is focused on the solution of stabilization problem for mathematical model of switched hybrid system. It includes several regimes corresponding to systems of nonlinear differential equations with control and also some rules for switching between them. Switching conditions are also part of control. It is required to construct a feedback stabilizer under which the trajectories of the nonlinear hybrid system will reach the predefined target set in a finite time, unknown in advance. The problem is solved using continuous piecewise affine Lyapunov functions and appropriate piecewise affine control functions. The theorem about sufficient conditions of hybrid system stabilization is proved. An algorithm for calculation of appropriate Lyapunov and control functions is described.

УДК 517.977

Стабилизация гамильтоновых систем на основе решения уравнения Риккати

А.А. Усова¹ А.М. Тарасьев²

¹ ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, ausova@umm.uran.ru,

² ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, tam@imm.uran.ru

Аннотация: В работе устанавливаются достаточные условия существования нелинейного регулятора. Выводится матричное уравнение Риккати, решение которого позволяет построить такой регулятор для гамильтоновой системы, полученной в рамках применения принципа максимума Понтрягина к задаче управления на неограниченном промежутке времени. Применение нелинейного регулятора к исходной управляемой системе, порождает асимптотически устойчивую систему, траектории которой воспроизводят поведение оптимальных решений с квадратичной точностью.

Ключевые слова: оптимальное управление, стабилизация гамильтоновых систем, нелинейный регулятор, матричное уравнение Риккати.

Введение

Анализ моделей роста, используемых для прогнозирования сценариев развития в экономических, экологических, демографических и других областях, сводится к исследованию задач оптимального управления на неограниченном промежутке времени [1]. В достаточно общих постановках задач управления динамика производственных факторов $x_1, \dots, x_n$ описывается системой уравнений

$$\dot{x}(t) = F(x(t))u(t) + G(x(t)) = \Phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

где матричная функция $F(x) = \{f_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n,m}$ и вектор-функция $G(x) = \{g_i(x)\}_{i=1}^n$ дважды непрерывно-дифференцируемые функции своих переменных. Величина $u = (u_1, \dots, u_m)$ есть вектор управлений, состоящий из измеримых (по Лебегу) функций, $u(\cdot)[0, +\infty) \mapsto \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — непустое компактное множество. Качество процесса управления оценивается функционалом вида

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(x(t), u(t)) dt, \quad (2)$$

где величина $c(x, u)$, определяемая в моделях как уровень потребления, вычисляется по формуле

$$c(t) = \prod_{i=1}^m (1 - u_i(t) - w_i(x(t))) f(x(t)). \quad (3)$$

Функция $f(x)$ играет роль производственной функции, а величины $w_i(x)$ ($i = 1, \dots, m$) выражают иные расходы, связанные с производственными факторами. Все указанные функции предполагаются дважды непрерывно-дифференцируемыми. Неотрицательность величины $c(t)$ (3) накладывает ограничения на параметры управления

$$0 < \sum_{i=1}^m u_i(t) < 1 \Rightarrow \exists \bar{u}_i \in (0, 1): u_i(t) \in [0, \bar{u}_i], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

В моделях роста эти ограничения являются следствием предположения о замкнутости экономической системы.

Задача (Р). *Требуется построить такой управляемый процесс $(x^0(t), u^0(t))$, который максимизирует функционал полезности (2) вдоль траекторий динамической системы (1) с учетом ограничений на управления (4).*

Исследование задачи и основной результат

Исследование задачи проводится в рамках принципа максимума Понтрягина, обобщенном для задач на бесконечном промежутке времени [1, 2]. Стационарная гамильтонова функция задачи управления (Р) имеет следующую структуру

$$H(\cdot) = \sum_{i=1}^m \ln(1 - u_i - w_i(x)) + \ln f(x) + \psi^\top \Phi(x, u), \quad (5)$$

где $\psi \in \mathbb{R}^n$ есть вектор сопряженных переменных. В виду строгой вогнутости гамильтониана (5) по параметрам управления u [5] найдется такой вектор u^0 , компоненты которого удовлетворяют ограничениям (4) и доставляют максимум гамильтониану (5).

$$u_j^0(x, \psi) = \begin{cases} 0, & (x, \psi) \in \Delta_j^1, \\ 1 - w_j(x) - \Gamma_j(x, \psi), & (x, \psi) \in \Delta_j^2, \\ \bar{u}_j, & (x, \psi) \in \Delta_j^3, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta_j^1 &= \{(x, \psi): w_j(x) + \Gamma_j(x, \psi) \geq 1\}, \quad \Gamma_j(x, \psi) = (\psi^T F_j(x))^{-1}, \\ \Delta_j^2 &= \{(x, \psi): 1 - \bar{u}_j \leq w_j(x) + \Gamma_j(x, \psi) \leq 1\}, \\ \Delta_j^3 &= \{(x, \psi): w_j(x) + \Gamma_j(x, \psi) \leq 1 - \bar{u}_j\}, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Согласно структуре вектора u^0 (6) существует 3^m областей с различными режимами управления. В силу гладкости функций, составляющих максимизированный гамильтониан $H_0(x, \psi) = H(x, \psi, u^0)$, легко убедиться, что $H_0(x, \psi)$ есть непрерывно-дифференцируемая функция своих переменных x и ψ во всех областях управления и на их границах. Гамильтонова система строится по формулам

$$\dot{x}(t) = \partial H_0(x, \psi) / \partial \psi, \quad \dot{\psi}(t) = \rho \psi - \partial H_0(x, \psi) / \partial x. \quad (7)$$

В рамках предположения о существовании и единственности установившегося состояния $P^* = (x^*, \psi^*)$ гамильтоновой системы (7) производится линеаризация системы (7) в окрестности O_δ^* точки P^*

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B\tilde{\psi}, & \tilde{x}(t) &= x(t) - x^*, \\ \dot{\tilde{\psi}} &= C\tilde{x} + (\rho \mathbb{E}_n - A^\top) \tilde{\psi}, & \tilde{\psi}(t) &= \psi(t) - \psi^*. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь используются следующие обозначения блоков матрицы Якоби

$$J^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \rho \mathbb{E}_n - A^\top \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} A &= \partial^2 H_0(P^*) / \partial \psi \partial x, \\ B &= \partial^2 H_0(P^*) / \partial \psi^2, \\ C &= -\partial^2 H_0(P^*) / \partial x^2. \end{aligned}$$

Задача стабилизации линеаризованной системы (8) сводится к поиску такой матрицы X , которая определяет линейную связь $\tilde{\psi} = X\tilde{x}$ фазовых $\tilde{x}$ и сопряженных $\tilde{\psi}$ переменных в окрестности O_δ^* , обеспечивая асимптотическую устойчивость следующей системе (см. [3])

$$\dot{\tilde{x}} = (A - BX)\tilde{x}, \quad \dot{\tilde{\psi}} = X\tilde{x}. \quad (9)$$

Для доказательства существования матрицы X рассматривается вспомогательная система

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (A - \rho/2\mathbb{E}_n)\xi + Bz, & \xi = \tilde{x} e^{-\rho/2t}, \\ \dot{z} = C\xi - (A^\top - \rho/2\mathbb{E}_n)z, & z = \tilde{\psi} e^{-\rho/2t}. \end{cases} \quad (10)$$

Матрица $M := J^* - \rho/2\mathbb{E}_{2n}$ системы (10) является гамильтоновой, и, следовательно, ее собственные значения симметричны относительно мнимой оси [4]. Это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Матрица X , стабилизирующая систему (8), существует и находится как решение матричного уравнения Риккати*

$$C - X(A - \rho/2\mathbb{E}_n) + (\rho/2\mathbb{E}_n - A^\top)X - XBX = 0.$$

Более того, если выполнено условие $|\operatorname{Re}(\lambda(M))| > \rho/2$, то система (9) асимптотически устойчива при любом начальном состоянии x_0^* таком, что $(x_0^*, \psi^* + X(x_0^* - x^*)) \in O_\delta^*$.

Нелинейный регулятор строится по правилу $\mathbf{u}^0(x) := u^0(x, \psi^* + X(x - x^*))$, где $u^0(\cdot, \cdot)$ определена в (6), и стабилизирует систему (1), приводя ее к виду $\dot{x} = F(x)\mathbf{u}^0(x) + G(x)$.

Исследование Усовой А.А. поддержано грантом РФФ, проект №19-11-00105.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев С.М., Кряжиский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
3. Ledyev Y.S. On analytical solutions of matrix Riccati equations // Proc. of the Steklov Inst. of Math. 2011. Vol. 273. No. 1. P. 214–228.
4. Paige C., Loan C.V. A Schur decomposition for Hamiltonian matrices // Linear Algebra Appl. 1981. Vol. 41. P. 11–32.
5. Tarasyev A., Usova A. Structure of the Jacobian in economic growth models // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, no. 25. P. 191–196.

Stabilization of the Hamiltonian Systems by Means of Solution for Riccati Equation

Anastasiia A. Usova¹, Alexander M. Tarasyev²

¹ IMM UB RAS, UrFU, Yekaterinburg, Russia, ausova@imm.uran.ru,

² IMM UB RAS, UrFU, Yekaterinburg, Russia, tam@imm.uran.ru

Abstract: The paper establishes sufficient conditions for existence of a nonlinear stabilizer. The matrix Riccati equation is derived, whose solution grounds the construction of the nonlinear stabilizer for the Hamiltonian system obtained within the Pontryagin maximum principle for the optimal control problem on the infinite time interval. Application of the nonlinear stabilizer to the original control system generates an asymptotically stable system, whose trajectories reproduces the behavior of optimal solutions with the quadratic precision.

УДК 519.857

Задача управления с помехой и неизвестным моментом изменения динамики

В.И. Ухоботов¹, И.В. Измestьев²

¹ Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия, ukh@csu.ru

² Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия,
j748e8@gmail.com

Аннотация: Рассматривается линейная задача управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. Известно только, что её значения принадлежат заданному связному компакт. Задан момент окончания процесса управления. Считается, что возможна одна поломка, которая приводит к изменению динамики управляемого процесса. Время наступления поломки заранее не известно. Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Противной стороной выступает помеха и момент наступления поломки. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным. В качестве примера рассмотрена задача управления стержнем, жестко прикрепленным к ротору электродвигателя. К другому концу стержня прикреплен маховик. Управлением являются напряжения, подаваемые на ротор и маховик. Цель выбора управлений — минимизация модуля отклонения угла, образуемого стержнем и вертикальной осью, от заданного значения в фиксированный момент времени.

Ключевые слова: управление, помеха, поломка.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, \tau)w + \xi + \eta, \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq p. \quad (1)$$

Здесь момент окончания p задан, t_0 — начальный момент времени; $w \in W \subset \mathbb{R}^s$ и $\xi \in M \subset \mathbb{R}^m$ являются управлениями. Множества W и M являются связными компактами, причем компакт W является симметричным относительно начала координат. Помеха η принадлежит связному компакт $Q \subset \mathbb{R}^m$. Далее, $B(t, \tau) = B_1(t)$ при $t_0 \leq t < \tau$ и $B(t, \tau) = B_2(t)$ при $\tau \leq t \leq p$. Здесь $A(t)$ и $B_i(t)$ непрерывны при $t_0 \leq t \leq p$ матрицы.

Такая ситуация может возникнуть тогда, когда в момент времени $t_0 \leq \tau \leq p$ происходит поломка, и меняется динамика процесса. Момент поломки τ заранее не известен. Поэтому момент поломки включается в помеху.

Показателем качества является величина $|\langle \psi_0, x(p) \rangle - G|$. Здесь вектор $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$ задан, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, G — заданное число.

Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата [1] показателя качества.

2. Основной результат

Следуя [2, С. 160], перейдем к новой управляемой системе, в уравнении движения которой отсутствует фазовый вектор. Рассмотрим при $t_0 \leq t \leq p$ решение $\psi(t)$ задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(p) = \psi_0. \quad (2)$$

Здесь $A^*(t)$ — транспонированная матрица.

Обозначим

$$b(t, \tau) = \max_{w \in W} \langle \psi(t), B(t, \tau)w \rangle \geq 0,$$

$$c_-(t) = \min_{\xi \in M} \langle \psi(t), \xi \rangle, \quad c_+(t) = \max_{\xi \in M} \langle \psi(t), \xi \rangle,$$

$$\beta_-(t) = \min_{\eta \in Q} \langle \psi(t), \eta \rangle, \quad \beta_+(t) = \max_{\eta \in Q} \langle \psi(t), \eta \rangle.$$

Тогда

$$\langle \psi(t), B(t, \tau)w + \xi \rangle = -a(t, \tau)u + \frac{1}{2}(c_+(t) + c_-(t)), \quad |u| \leq 1,$$

$$\langle \psi(t), \eta \rangle = \beta(t)v + \frac{1}{2}(\beta_+(t) + \beta_-(t)), \quad |v| \leq 1,$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}(\beta_+(t) - \beta_-(t)) \geq 0.$$

Здесь обозначено $a(t, \tau) = b(t, \tau) + \frac{1}{2}(c_+(t) - c_-(t)) \geq 0$.

Перейдем к переменной

$$z = \langle \psi(t), x \rangle + \frac{1}{2} \int_t^p (\beta_+(r) + \beta_-(r) + c_+(r) + c_-(r)) dr - G.$$

Тогда из (1) и (2) получим, что

$$\dot{z} = -a(t, \tau)u + \beta(t)v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1.$$

Показатель качества примет вид $|z(p)|$. Управление и помеха ищутся в виде произвольных функций $|u(t, z)| \leq 1$ и $|v(t, z)| \leq 1$. Решения определяются с помощью ломаных Эйлера [2].

Обозначим

$$f(t) = \int_t^p \beta(r) dr - \min_{t \leq \tau \leq p} \int_t^p a(r, \tau) dr,$$

$$F(t) = \max_{t \leq s \leq p} f(s),$$

$$\phi(z) = \frac{z}{|z|} \text{ при } |z| > 0 \text{ и } \phi(0) - \text{любое с ограничением } |\phi(0)| = 1.$$

Теорема 1. *Управление $u = \phi(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $|z(p)| \leq Q(t_0, |z(t_0)|)$ для любой помехи $|v(t, z)| \leq 1$ и при любом моменте поломки $t_0 \leq \tau \leq p$.*

Здесь обозначено $Q(t_0, |z(t_0)|) = \max(F(t_0); |z(t_0)| + f(t_0))$.

Теорема 2. *Помеха $v = \phi(z)$ с некоторым моментом поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ обеспечивает выполнение неравенства $|z(p)| \geq Q(t_0, |z(t_0)|)$ для любого управления $|u(t, z)| \leq 1$.*

3. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу управления стержнем OA [3]. В точке O стержень жестко прикреплен к оси ротора электродвигателя так, что он может вращаться вместе с ротором вокруг его оси в заданной плоскости Π . Симметричный относительно своей оси вращения маховик смонтирован так, что его центр находится в точке A . Маховик может вращаться вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости Π . Ось вращения маховика является осью ротора второго электродвигателя.

Управлениями являются напряжения, подаваемые на электродвигатели. Цель выбора управлений — минимизация модуля отклонения угла, образуемого стержнем и вертикальной осью, от заданного значения в фиксированный момент времени.

Будем считать, что возможно отключение первого электродвигателя в неизвестный момент времени τ . Уравнение движения для рассматриваемой системы может быть записано в виде (1). Следуя [4], принимаем нелинейные слагаемые в этом уравнении движения за помеху. Для рассматриваемого примера были найдены условия окончания и построены соответствующие гарантирующие управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-11-00105).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Izmet'ev I.V., Ukhobotov V.I. On a single-type differential game with a non-convex terminal set // LNCS, 2019. Vol. 11548. P. 595–606.
4. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 457–472.

Control Problem with Disturbance and Unknown Moment of Change of Dynamics

V.I. Ukhobotov¹, I.V. Izmet'ev²

¹ Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia, ukh@csu.ru

² Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia, j748e8@gmail.com

Abstract: A linear control problem is considered in the presence of exposure from an uncontrolled disturbance. It is known only that its values belong to

the given connected compact. The end time of the control process is set. It is believed that one breakdown is possible, which leads to a change in the dynamics of the controlled process. The time of occurrence of breakdown is not known in advance. Control is constructed based on the principle of minimizing the guaranteed result. The opposite side is the disturbance and the moment of occurrence of a breakdown. The necessary and sufficient conditions are found under which an admissible control is optimal. As an example, we consider the problem of controlling a rod rigidly attached to an electric motor rotor. A flywheel is attached to the other end of the rod. The controls are the voltages applied to the rotor and flywheel. The goal of choosing controls is to minimize the modulus of the deviation of the angle formed by the rod and the vertical axis from the given value at a fixed time moment.

УДК 517.977.58

Построение множеств достижимости нелинейных управляемых систем со вторым порядком точности относительно шага по времени

В.Н. Ушаков¹, А.А. Ершов²

¹ ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, ushak@imm.uran.ru

² ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, ale10919@yandex.ru

Аннотация: В работе исследуется пиксельный метод построения множеств достижимости динамических управляемых систем. Получены достаточные условия на управляемую систему, при которых явный метод Рунге — Кутты второго порядка (модифицированный метод Эйлера) обеспечивает второй порядок точности относительно шага по времени при построении множеств достижимости, даже если разрывные функции входят в класс допустимых управлений, а система является нелинейной.

Ключевые слова: модифицированный метод Эйлера, метод Рунге — Кутты второго порядка, управляемая система, множество достижимости, переключение управления.

Введение

В силу многочисленных практических приложений задач управления (см., напр., [6]), многие современные исследования направлены на повышение эффективности численных методов их решения. Как правило, первым и самым ресурсоёмким шагом построения оптимального управления является вычисление множеств достижимости

управляемых систем [1, 3]. Среди перспективных методов вычисления множеств достижимости управляемых систем выделим семейство методов Рунге — Кутта, поскольку данные методы обеспечивают высокие порядки точности относительно шага по времени при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, те же самые методы (с точностью до некоторых модификаций, отражающих специфику управляемых систем) не гарантируют тех же порядков точности при использовании их для вычисления множеств достижимости управляемых систем, если не ограничить класс допустимых управлений гладкими функциями [4]. Тем не менее, в работе [4] показана возможность вычисления множеств достижимости с высоким порядком точности относительно шага по времени для линейных управляемых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x^{(0)}, \end{cases}$$

где A и B — постоянные матрицы, а класс допустимых управлений состоит из измеримых функций со значениями из p -мерного куба $[0, 1]^p$. В работе [7] аналогичные результаты получены для линейных дифференциальных включений.

Настоящая работа посвящена нахождению максимально широкого класса нелинейных управляемых систем, для которых явный метод Рунге — Кутта второго порядка гарантирует второй порядок точности вычисления множеств достижимости относительно шага по времени.

Рассмотрим управляемую систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), & t \in (t_0, \vartheta), \\ x(t_0) = x^{(0)}, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — фазовая переменная со значениями из $\mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, представляющая собой программное управление, со значениями из отрезка $P = [a, b]$, $a < b$, t — время, $(t_0, x^{(0)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — начальная позиция системы (1).

Пусть $\Gamma_N = \{t_0, \dots, t_n = \vartheta\}$ — разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ на N равных частей, $\Delta = t_{i+1} - t_i$, $t_{i+1/2} = (t_i + t_{i+1})/2$, $i = \overline{0, N-1}$.

Обозначим через $X_i = X(t_i, t_0, x^{(0)})$ — множества достижимости в момент времени t_i , а через $\tilde{X}_i$ — их аппроксимации. Эти аппрок-

симации по методу Рунге — Кутты второго порядка [2, 5] будем вычислять следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_0 &= \{x^{(0)}\}, \\ \tilde{X}_{i+1} &= \tilde{X}_i + \bigcup_{x \in \tilde{X}_i} \bigcup_{\hat{u} \in P} \Delta \cdot f\left(t_{i+1/2}, x + \frac{\Delta}{2} f(t_i, x, \hat{u}), \hat{u}\right), \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (2)\end{aligned}$$

Целью данной работы является нахождение минимальных условий, достаточных для того, чтобы $\max_{i=1, N} d(X_i, \tilde{X}_i) = O(\Delta^2)$ при $N \rightarrow \infty$.

1. Основной результат

Обозначим через

$$\mathbb{U} = \{u(\cdot) : u(\cdot) \in C^2[t_0, \vartheta], \|u(\cdot)\|_{C^2[t_0, \vartheta]} \leq M_2, u(t) \in P \text{ при } t \in [t_0, \vartheta]\},$$

где $M_2 \geq \max\{|a|, |b|\}$ — некоторая постоянная.

Определение 1. Любое управление $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ назовём управлением без переключений.

Определение 2. Предположим, что некоторое управление

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [t_0, t_*], \\ u_2(t), & t \in (t_*, \vartheta], \end{cases}$$

где $u_1(\cdot) \in \mathbb{U}$, $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}$. Такое управление назовём управлением с одним переключением в точке t_* , которую мы назовём моментом переключения.

Аналогично можно определить управление с несколькими переключениями.

Посредством $\mathbb{V}$ обозначим класс управлений со сколь угодно большим числом переключений, но моменты которых отделены по времени не менее чем на некоторое фиксированное число $\varepsilon > 0$. Через $\mathbb{L}$ обозначим класс программных управлений из измеримых функций со значениями из P .

Введём в рассмотрение следующие условия на систему (1).

C1. Существует некоторый компакт $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, в котором гарантировано помещается интегральная воронка $X(t_0, \{x^{(0)}\})$ управляемой системы (1) вместе с некоторой её окрестностью.

C2. $F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in P\}$ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ при любых $(t, x) \in D$.

C3. Функция $f(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^2(D \times P)$.

C4. Классы управлений $\mathbb{L}$ и $\mathbb{V}$ порождают одинаковые интегральные воронки для управляемой системы (1).

C5. Для двух произвольных управлений $u_1(\cdot) \in \mathbb{U}$, $u_2(\cdot) \in \mathbb{U}$ обозначим $f_1(t, x) = f(t, x, u_1(t))$, $f_2(t, x) = f(t, x, u_2(t))$. Тогда должно выполняться тождество

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(t, x)f_1(t, x) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x)f_2(t, x) = \frac{\partial f_1}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f_2}{\partial t}(t, x),$$

где для $k = 1$ и $k = 2$ производные равны

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_k^1}{\partial t}(t, x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k^n}{\partial t}(t, x) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x}(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_k^1}{\partial x^1}(t, x) \dots \frac{\partial f_k^1}{\partial x^n}(t, x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_k^n}{\partial x^1}(t, x) \dots \frac{\partial f_k^n}{\partial x^n}(t, x) \end{pmatrix}.$$

C6. $\frac{\partial f}{\partial u}(t, x, u) \neq 0$ для всех $(t, x, u) \in D \times P$.

Теорема 1. При выполнении условий C1–C6 метод Рунге — Кутты (2) при построении множеств достижимости управляемой системы (1) имеет второй порядок точности, т.е. погрешность построения множеств достижимости в хаусдорфовой метрике для любого N не превосходит $M\Delta^2$, где $\Delta = (\vartheta - t_0)/N$ — шаг по времени, M — некоторая постоянная, зависящая только от вида функции f и компакта $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, в котором заведомо лежит интегральная воронка $X(t, \{x_0\})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекта № 18-01-00221) и постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Горнов А.Ю., Филькенштейн Е.А. Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации границы множества достижимости // Автоматика и телемеханика. 2015. № 3. С. 22–31. DOI: 10.1134/S0005117915030030

2. Новикова А.О. Построение множеств достижимости двумерных нелинейных управляемых систем пиксельным методом // Труды «Прикладная математика и информатика». 2015. Вып. 50. С. 62–82.
3. Филькенштейн Е.А., Горнов А.Ю. Алгоритм квазиравномерного заполнения множества достижимости нелинейной управляемой системы // Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”. 2017. Т. 19. С. 217–223. DOI: 10.26516/1997-7670.2017.19.217
4. Ferretti R. High-order approximations of linear control systems via Runge—Kutta schemes // Computing. 1997. Vol. 58, no. 4. P. 351–364.
5. Novikova A.O. Computation and visualization of control systems reachable sets with parallel processing on Graphics Processing Units // 13th Viennese Workshop on Optimal Control and Dynamic Games: Operations Research and Control Systems, TU Wien. 2015. P. 57.
6. Sethi S.P. Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics. 2nd ed. Springer, 2005. 521 p.
7. Veliov V.M. Second order discrete approximation to linear differential inclusions // SIAM J. Numer. Anal. 1992. Vol. 29, no. 2. P. 439–451.

Construction of Reachable Sets of Nonlinear Control Systems with a Second Order of Accuracy with Respect to the Time Step

V.N. Ushakov¹, A.A. Ershov²

¹ IMM UB RAS, UrFU, Ekaterinburg, Russia, ushak@imm.uran.ru

² IMM UB RAS, UrFU, Ekaterinburg, Russia, ale10919@yandex.ru

Abstract: The paper investigates the pixel method for constructing reachable sets of a dynamic control system. The sufficient conditions on the control system are obtained under which the explicit second-order Runge—Kutta method (modified Euler method) provides the second order of accuracy with respect to the time step in constructing reachable sets, even if discontinuous functions includes in the class of the admissible controls and the control system is nonlinear.

УДК 517.977.5

Конструирование решений в задаче о сближении стационарной управляемой системы

В.Н. Ушаков¹, В.И. Ухоботов², А.В. Ушаков¹

¹ ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, ushak@imm.uran.ru

² ЧелГУ, Челябинск, Россия, ukh@csu.ru

Аннотация: Рассматривается конфликтно-управляемая нелинейная система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном проме-

жутке времени. Обсуждается задача о сближении системы с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени. Задача изучается в рамках позиционного подхода предложенного в 60-е годы XX века Н.Н. Красовским. Дается описание алгоритма решения задачи о сближении, приводятся результаты применения алгоритма для конкретных механических задач.

Ключевые слова: множества достижимости, сеточные методы, динамические системы, сближение.

1. Основной результат

Рассматривается конфликтно-управляемая нелинейная система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени. Обсуждается задача о сближении системы с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени. Задача изучается в рамках позиционного подхода предложенного в 60-е годы XX века Н.Н. Красовским. Предполагается, что правая часть конфликтно-управляемой системы представима в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v) = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad x(t_0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^m, \\ u \in P, \quad v \in Q, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь u и v — управления, соответственно, первого и второго игроков, $P \in \text{comp}(\mathbb{R}^p)$, $Q \in \text{comp}(\mathbb{R}^q)$, где обозначено $\text{comp}(\mathbb{R}^k)$ — метрическое пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой.

Система (1), (2) удовлетворяет условиям

- А. Вектор-функции $f^{(1)}(t, x, u)$ и $f^{(2)}(t, x, v)$ определены и непрерывны по совокупности t, x, u и t, x, v соответственно на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$ и $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times Q$, а также для любого компакта $\mathbb{D} \in \text{comp}([t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m)$ найдется такая константа $L = L(\mathbb{D}) \in (0, \infty)$, что

$$\begin{aligned} \|f^{(1)}(t, x^{(1)}, u) - f^{(1)}(t, x^{(2)}, u)\| &\leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ \|f^{(2)}(t, x^{(1)}, v) - f^{(2)}(t, x^{(2)}, v)\| &\leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(i)}) &\in \mathbb{D}, \quad i = 1, 2, \quad u \in P, \quad v \in Q. \end{aligned}$$

- В. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u, v) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}^m \times P \times Q,$$

здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Наряду с системой (1), (2) задан компакт $M \in \text{comp}(\mathbb{R}^m)$.

Задача о сближении. Первому игроку требуется найти позиционную стратегию $u = u(t, x)$ обеспечивающую приведение фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1) на M , как бы ни действовал в процессе игры второй игрок в рамках допустимых управлений $v = v(t, x)$.

Пример. Система связанных маятников. В примере рассматривается четырехмерная управляемая система — два идентичных маятника без трения, связанные пружиной кручения.

Для этой управляемой система формулируется и решается игровая задача о сближении с целевым множеством M — шаром в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^n$. В игровой задаче участвует два игрока — первый и второй игроки. Цель первого игрока заключается в приведении управляемой системы на множество M в заданный момент времени, а второй игрок стремится воспрепятствовать первому игроку в достижении цели.

Игровая задача о сближении рассматривается и решается в рамках позиционной формализации Н.Н. Красовского. Ее решение осуществляется в два этапа. На первом этапе осуществляется приближенное вычисление временных сечений множества разрешимости W игровой задачи; на втором этапе применяется в ходе управления правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского множество W .

Первый игрок представлен в виде пары сил u_1, u_2 (скаляры), приложенных к маятникам, а второй игрок влияет на систему с помощью параметра v (скаляр) — параметры связи, пропорционального жесткости пружины. При этом силы u_1 и u_2 и параметр v ограничены по величине.

Динамика управляемой системы описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + v \cdot (x_3 - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -\sin(x_3) + v \cdot (x_1 - x_3) + u_2. \end{cases}$$

Моделирование проводилось на промежутке $T = [0; 4]$ с дискретизацией этого промежутка с шагом по времени $\Delta t = 0.01$. Ограничения на управляющие параметры u_1 и u_2 : $u_1 \in [-1; 1]$, $u_2 \in [-1; 1]$

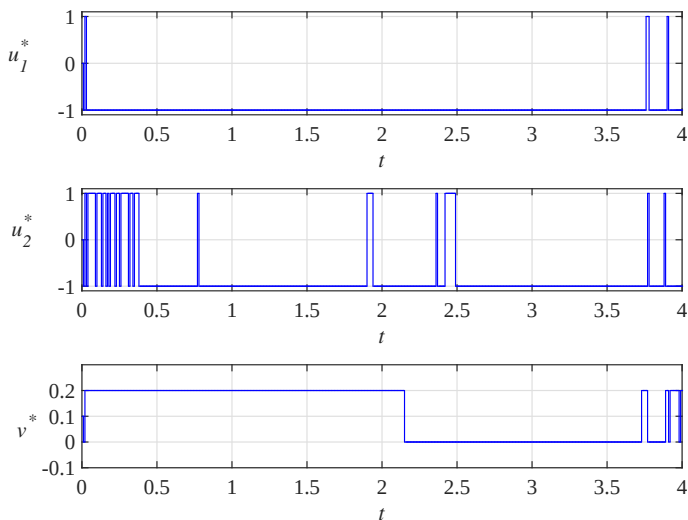


Рис. 1. Графики управлений $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$, $v^*(t)$

с шагом разбиения интервала $[-1; 1]$ равным $\Delta u = 0.1$. Ограничение на управляющий параметр v : $v \in [0; 0.2]$ и с шагом разбиения интервала $[0; 0.2]$ равным $\Delta v = 0.05$. Начальное состояние $x_0 = (-5.39; 3.16; -4.39; 2.11)$. Целевое множество M — шар в пространстве $\mathbb{R}^4$ радиуса $r = 0.3$ и с центром в начале координат $\mathbb{O}$. Задача заключается в том, чтобы из начального состояния x_0 привести систему на множество M при наличии помехи v .

График управлений первого и вторых игроков приведен на рис. 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00018 мол-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Куржанский А.Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.

4. *Кряжиский А.В., Осипов Ю.С.* Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики. 2000. Т. 6, № 1. С. 131–140.
5. *Николюцкий М.С.* Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 1. С. 136–144.
6. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх II // Доклады АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
7. *Ушаков В.Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения. // Изв. АН СССР, Техн. Кибернетика, 1980. С. 29–36.
8. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.

On Constructing Solutions in a Problem of Approaching for Stationary Control Systems

V.N. Ushakov¹, V.I. Ukhobotov², A.V. Ushakov¹

¹ IMM UrO RAN, Yekaterinburg, Russia, ushak@imm.uran.ru

² ChelGU, Chelyabinsk, Russia, ukh@csu.ru

Abstract: Non-linear conflict-control system in Euclidean space on a finite-time interval is under consideration. Problem of approaching system with a compact target set in a fixed time moment is investigated. The problem is being considered within the approach proposed by N.N. Krasovskiy in 1960's. Description of algorithm for approach problem is provided.

УДК 517.977.58

Задачи управления многозначными движениями систем с неопределенностью и нелинейностью

Т.Ф. Филиппова¹, О.Г. Матвийчук²

¹ ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, ftf@imm.uran.ru,

² ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, vog@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматриваются задачи управления и оценивания состояний нелинейной управляемой системы с неопределенностью по начальным данным и в предположении о квадратичной нелинейности, присутствующей в векторах фазовых скоростей динамической системы. Предполагается также, что значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями.

На основе применения результатов и методов теории эллипсоидального оценивания многозначных движений систем указанного типа исследуются проблемы гарантированного управления трубкой траекторий нелинейной системы с неопределенностью. Предлагаются алгоритмы гарантированного приведения многозначного состояния системы в минимальную окрестность заданного целевого множества, результаты иллюстрируются рядом модельных примеров.

Ключевые слова: управление, оценивание, неопределенность, множество достижимости, квадратичная нелинейность, эллипсоидальное исчисление.

Задачи, связанные с точным построением или приближенным оцениванием множеств достижимости управляемых систем, являются одними из фундаментальных проблем в теории управления и теории дифференциальных игр [1–3], их решение может быть использовано также в исследовании сложных реальных систем различной природы (механических, экономических, экологических и др.). Известно, что форма и структура множеств достижимости динамических систем может быть довольно сложной. В этих случаях представляет интерес приближение множеств достижимости областями определенной канонической формы. В качестве таких областей наиболее естественными являются эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и некоторые другие канонические множества.

В настоящее время разработана полная теория построения оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости линейных управляемых систем и ряда классов нелинейных динамических систем, основанная на технике эллипсоидального исчисления [4–6]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. В работах [7–10] техника эллипсоидального исчисления была использована для решения задач оценивания трубок траекторий некоторых нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. При этом предполагалось, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены являются квадратичными по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями.

В данной работе подход, основанный на идеях эллипсоидального исчисления, развивается для решения задач управления и оценива-

ния трубок траекторий нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным и нелинейностью квадратичного типа, при этом основной акцент сделан на решении задачи приведения многозначного состояния системы в минимальную окрестность заданного целевого множества. На основе вывода соответствующего необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума исследуются свойства трубок оптимальных движений, решающих задачу. Представлены результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие предложенные методы и алгоритмы управления и оценивания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты РФФИ № 18-01-00544-а и № 16-29-04191-ofi-m).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Kurzanski A.B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes. Theory and Computation. New York: Springer-Verlag, 2014. 445 p.
4. Kurzanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
5. Kurzanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control In: Adv. Nonlinear Dynamics Control: Rep. from Russia. Progress in Systems and Control Theory. Boston: Birkhäuser, 1993. Vol. 17. P. 122–188.
6. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
7. Филиппова Т.Ф. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 223–232.
8. Filippova T.F. Differential equations for ellipsoidal estimates of reachable sets for a class Of control systems with nonlinearity and uncertainty. // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 770–775.
9. Filippova T.F. Description of dynamics of ellipsoidal estimates of reachable sets of nonlinear control systems with bilinear uncertainty // Lecture Notes in Comput. Sci. 2019. Vol. 11189. Numerical Methods and Applications (NMA 2018). P. 97–105.
10. Matviychuk O.G. Estimates of the reachable set of nonlinear control system under uncertainty // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2025. P. 100005-1–9.

Control Problems for Set-Valued Motions of Systems with Uncertainty and Nonlinearity

Tatiana F. Filippova¹, Oxana G. Matviychuk²

¹ IMM UB RAS, UrFU, Ekaterinburg, Russia, ftf@imm.uran.ru,

² IMM UB RAS, UrFU, Ekaterinburg, Russia, vog@imm.uran.ru

Abstract: The control and estimation problems are considered for a nonlinear control system with uncertainty in the initial data and with quadratic nonlinearity in vectors of system velocities. It is assumed also that the values of unknown initial states and admissible controls are constrained by ellipsoidal constraints. Basing on the application of the results and methods of the theory of ellipsoidal calculus applied for estimation of set-valued motions of studied systems, the problems of guaranteed control for the tubes of trajectories of a nonlinear system with uncertainty are investigated. Algorithms for guaranteed moving of the set-valued state of the control system to the smallest neighborhood of a given target set are proposed, the results are illustrated by a number of model examples.

УДК 517.911.5

Принцип инвариантности для разрывных систем

И.А. Финогенко

ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, fin@icc.ru

Аннотация: Исследуется асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Полученные результаты носят форму обобщений принципа инвариантности, которым обычно называют теорему Ла-Салля, где (в рамках прямого метода Ляпунова для автономных дифференциальных уравнений) предполагается, что производная функции Ляпунова неположительна. Для неавтономных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с отсутствием свойств типа инвариантности ω -предельных множеств решений, а также с описанием множества нулей производной функций Ляпунова. Попытки преодолеть эти трудности привели к понятию предельных дифференциальных уравнений. Здесь метод предельных уравнений рассматривается для более широких классов систем и для систем с сухим трением.

Ключевые слова: принцип инвариантности, предельное дифференциальное уравнение, функция Ляпунова, дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, сухое трение.

Введение

Суть метода предельных уравнений состоит в следующем. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1)$$

Пусть $x(t)$ — ограниченное решение уравнения (1), определенное на промежутке $(\alpha, +\infty)$. Через $\Lambda^+(x)$ обозначим ω -предельное множество этого решения. Предположим, что $y_0 \in \Lambda^+(x)$. Тогда существует последовательность точек $x(t_k) \rightarrow y_0$ при $t_k \rightarrow +\infty$, $t_k \leq \alpha$. Обозначим $y_k(t) = x(t+t_k)$ для всех $k = 1, 2, \dots$, $t \leq 0$. Функции $y_k(t)$ являются решениями уравнений $\dot{y}_k(t) = f(t+t_k, y_k(t))$. Предположим, что $y_k(t) \rightarrow y(t)$. Возникает вопрос об уравнении, которому удовлетворяет предельная функция $y(t)$, решение которого позволит определить свойство типа инвариантности множества $\Lambda^+(x)$. При условии равномерной непрерывности и ограниченности функции $f(t, x)$ на каждом множестве вида $(\alpha, +\infty) \times K$, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, существует подпоследовательность $\{t_{k_i}\}$, такая, что $y^{t_{k_i}}(t, x) \rightarrow f'(t, x)$. Предельное уравнение определяется в виде $\dot{x} = f'(t, x)$ и функция $y(t)$ является его решением. Далее, если $V(t, x)$ — функция Ляпунова, удовлетворяющая неравенству $\dot{V}(t, x) \leq w(t, x) \leq 0$ в силу уравнения (1), то некоторый аналог принципа инвариантности для неавтономного уравнения (1) может быть установлен в терминах так называемой предельной пары (f', w') .

Ситуация существенно осложняется, если рассматривать разрывные функции f и дифференциальные включения, т.к. для них нет подходящих теорем математического анализа о сходимости функциональных последовательностей и возникает принципиальный вопрос о предельных уравнениях. В работах [3, 4] предельные дифференциальные соотношения получены в форме дифференциальных включений.

1. Принцип инвариантности для неавтономных разрывных систем

Рассматривается дифференциальное уравнение (1) с измеримой по совокупности переменных $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функцией $f(t, x)$. Общее определение функции f по Филиппову [2, стр. 66] имеет вид

$$F(t, x) = \cap_{\delta > 0} \overline{co} f(t, x^\delta \setminus N_0(t)),$$

где $N_0(t)$ — множество нулевой меры, на котором функция $x \rightarrow f(t, x)$ аппроксимативно непрерывна.

Введем в рассмотрение многозначное отображение $F'(t, x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{CO} \cup_{k \geq n} F(t + t_k, x)$, где $t_n \rightarrow +\infty$ — произвольная последовательность (одна и та же для любых точек (t, x)) и рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, x). \quad (2)$$

Будем говорить, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ квазиинвариантно, если для любой точки $y_0 \in D$ существует решение $y(t)$ включения (2) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t, x)$ в правой части, такое, что $y(0) = y_0$ и $y(t) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Теорема 1. Пусть $w : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ — измеримая по t и непрерывная по x функция, $f(t, x)$ — измеримая, ограниченная функция, $V : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая и ограниченная снизу на каждом множестве вида $\mathbb{R}^1 \times K$ функция, где $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Предположим, что для почти всех t и любых $x \notin N_0(t)$ справедливо неравенство

$$\dot{V} \triangleq V_t + \langle \nabla_x V, f(t, x) \rangle \leq -w(t, x).$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ уравнения (1) множество всех его ω -предельных точек принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества

$$E_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) = 0\},$$

где $\alpha(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{t \in (b, +\infty)} w(t, x)$ для любой точки x .

2. Механические системы с трением

Рассматривается механическая система с k степенями свободы, стесненная голономными, не зависящими от времени идеальными связями с силами трения скольжения, добавляемыми к активным силам.

Уравнения ее движения имеют вид [1]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i^T + Q_i^A, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3)$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, представляющая положительно определенную квадратичную форму обобщенных скоростей с симметричной матрицей $A(q) = [a_{ij}(q)]_1^k$. Обобщенные силы трения скольжения запишем в виде

$$Q_i^T(t, q, \dot{q}) = -f_i(t, q^i, \dot{q}^i) |N_i(q, \dot{q})| \operatorname{sgn} \dot{q}^i$$

при условии, что $\dot{q}^i \neq 0$, где $f_i(t, q^i, \dot{q}^i) > 0$ — коэффициенты трения, $|N_i(q, \dot{q})|$ — модули нормальных реакций. Предполагаем, что $Q_i^A(q, \dot{q}) = D_i(q, \dot{q}) + K_i(q)$, где $D_i(q, \dot{q})$ — диссипативные силы, $K_i(q) = \partial \Pi / \partial \dot{q}^i$, $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы

Положим $V_0 \triangleq \Pi + T$. Умножая уравнения (3) на $\dot{q}^i$ и затем складывая их, получаем

$$D^+V_0(q, \dot{q}) = - \sum_{i=1}^{k_*} f_i |N_i| |\dot{q}^i| + \sum_{i=1}^k D_i(q, \dot{q}) \dot{q}^i (\leq 0),$$

где D^+V_0 — правая производная функции Ляпунова. Теперь предположим, что для каждого фиксированного $(q, \dot{q})$ нижние пределы коэффициентов трения $f_i(t, q^i, \dot{q}^i)$ больше нуля при $t \rightarrow +\infty$ и $N_i(q, \dot{q}) \neq 0$, если $\dot{q}^i \neq 0$. Тогда множество $E(D^+V_0 = 0)$ нулей производной функции Ляпунова состоит из элементов вида $(q, 0)$ и принадлежит некоторой поверхности уровня функции $V_0(q, 0) = \Pi(q)$.

Следует отметить, что принцип инвариантности не дает полной информации о локализации правых предельных множеств системы. Чтобы уточнить расположение множества положений равновесия рассматриваемой системы, нужно использовать дополнительные сведения о структуре системы и функции Ляпунова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матросов В.М., Финогенко И.А. О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62. № 1. С. 100–109.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.
3. Финогенко И.А. Метод предельных дифференциальных уравнений для неавтономных разрывных систем // Докл. Акад. наук. 2016. Т. 466. № 1. С. 16–19.
4. Финогенко И.А. Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сиб. мат. журнал. 2014. Т. 55. № 2. С. 454–471.

Principle of Invariancy for Discontinuous Systems

I.A. Finogenko

Matrosov Institute of Systems Dynamics and Control Theory of SB RAS,
Irkutsk, Russia, fin@icc.ru

Abstract: Asymptotic behavior of solutions of the differential equations with a discontinuous right-hand part is studied. The obtained results have the form of generalizations of the principle of invariancy also known as the LaSalle theorem where (within the framework of the Lyapunov's direct method for the autonomous differential equations) the derivative of Lyapunov's function is supposed to be non-positive. For the non-autonomous equations this way brings the difficulties related with the absence of properties such as invariancy of ω -limiting sets of solutions, and also with the description of set of zero of a derivative of Lyapunov's functions. Attempts to overcome these difficulties have led us to the concept of the limiting differential equations. Here the method of limiting equations is considered for wider classes of systems, as well as for systems with the dry friction.

УДК 517.911.5

Позиционные импульсные и разрывные управления для дифференциальных включений

И.А. Финогенко¹, А.Н. Сесекин²

¹ ИДСТУ СО РАН, Иркутск, Россия, fin@icc.ru

² ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия, sesekin@list.ru

Аннотация: Рассматриваются нелинейные управляемые системы, представленные в форме дифференциальных включений с импульсными или разрывными позиционными управлениями. Приведена формализация импульсно-скользящего режима. Обсуждается вопрос о комбинированном использовании импульсно-скользящих и скользящих режимов.

Ключевые слова: импульсное позиционное управление, разрывное позиционное управление, дифференциальное включение, скользящий режим.

Мы исследуем динамическую систему вида:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + B(t, x(t))u, \quad t \in I = [t_0, \vartheta], \quad (1)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Здесь $F(\cdot, \cdot)$ — многозначная функция с выпуклыми, компактными значениями в $\mathbb{R}^n$; матрица-функция $B(\cdot, \cdot)$ размерности $n \times m$ непрерывна по совокупности переменных в рассматриваемой области. Относительно $F(\cdot, \cdot)$ будем предполагать следующее.

(B1) При почти каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $F(t, x)$ полунепрерывно сверху по x .

(B2) Для любого x многозначное отображение $t \rightarrow F(t, x)$ имеет измеримый селектор.

(B3) Многозначное отображение $F(t, x)$ удовлетворяет условию подлинейного роста: для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $w \in F(t, x)$ выполняется неравенство $\|w\| \leq l(1 + \|x\|)$.

При сделанных предположениях дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad (2)$$

имеет решение $x(t)$, которое может быть продолжено на всю числовую ось $\mathbb{R}^1$ (см. [1]) Предполагается, что матрица $B(t, x)$ удовлетворяет условию Фробениуса

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{ij}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t, x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{il}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t, x),$$

которое, обеспечит единственную реакцию системы (1) на управление u в случае, когда u — импульсное воздействие на эту систему.

Под импульсным позиционным управлением будем понимать некоторый абстрактный оператор $(t, x) \rightarrow U(t, x)$, отображающий пространство переменных t, x в пространство m вектор-распределений [2] по правилу: $U(t, x) = r(t, x(t)) \delta_t$, где $r(t, x)$ — вектор функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, δ_t — импульсная функция Дирака, сосредоточенная в точке t . “Бегущий импульс” $r(t, x(t)) \delta_t$, как обобщенная функция, смысла не имеет и означает лишь тот факт, что в системе функционирует импульсное управление, подразумевающее дискретную реализацию “бегущего импульса” в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в точках некоторого разбиения $h: t_0 < t_1 < \dots < t_N = \theta$ отрезка I . Результатом такой последовательной коррекции является разрывная кривая $x^h(\cdot)$, называемая здесь ломаной Эйлера или импульсно-скользящим режимом. Опишем более точно импульсно-скользящий режим.

Определим сеть “ломаных Эйлера” $x^h(\cdot)$, соответствующих направленному по величине $d(h) = \max(t_{k+1} - t_k)$ множеству разбиений $h : t_0 < t_1 < \dots < t_p = \vartheta$ отрезка I . Для этой цели вначале определим функцию скачков уравнениями:

$$S(t, x, r(t, x)) = z(1) - z(0), \quad \dot{z}(\xi) = B(t, z(\xi)) r(t, x), \quad z(0) = x.$$

Скачки “ломаных Эйлера” в точках разбиений h отрезка I определяются уравнениями:

$$S(t_i, x^h(t_i), r(t_i, x^h(t_i))) = z(1) - z(0), \quad \dot{z}(\xi) = B(t_i, z(\xi)) r(t_i, x^h(t_i)),$$

с начальными условиями $z(0) = x^h(t_i)$. “Ломаная Эйлера” $x^h(\cdot)$ строится как функция ограниченной вариации, совпадающая с решением дифференциального включения (2) на каждом промежутке $(t_i, t_{i+1}]$ с начальными условиями $x(t_i) = x^h(t_i) + S(t_i, x^h(t_i), r(t_i, x^h(t_i)))$, $x(t_0) = x_0$, $i = 0, \dots, p-1$.

Будем предполагать, что для всех допустимых t и x справедливо равенство

$$r(t, x + S(t, x, r(t, x))) = 0, \quad (3)$$

которое означает, что после импульсного воздействия на систему в момент t фазовая точка $x(t)$ окажется на многообразии (целевом множестве) $\Phi = \{(t, x) : r(t, x) = 0\}$. При некоторых дополнительных предположениях предел последовательности “ломаных Эйлера” окажется на поверхности Φ . В [3] получено уравнение идеального импульсно-скользящего режима в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} \in & \frac{\partial S(t, x, r(t, x))}{\partial t} + \frac{\partial S(t, x, r(t, x))}{\partial r} \frac{\partial r(t, x)}{\partial t} + \\ & + \left(E + \frac{\partial S(t, x, r(t, x))}{\partial x} + \frac{\partial S(t, x, r(t, x))}{\partial r} \frac{\partial r(t, x)}{\partial x} \right) F(t, x), \quad (4) \\ x(t_0 + 0) = & x(t_0) + S(t_0, x(t_0), r(t_0, x(t_0))). \end{aligned}$$

Будем рассматривать управляемое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x) + \tilde{u}, \quad (5)$$

где $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$, $\tilde{u}_i(t, x) = H_i(t, x) \operatorname{sign} S_i$, $H_i(t, x) \geq 0$ — некоторые непрерывные функции, S_i — i -я компонента функции скачков. Обозначим через $U_i(t, x)$ отрезок $[-H_i(t, x), H_i(t, x)]$ и положим

$\tilde{U}(t, x) = \tilde{U}_1(t, x) \times \cdots \times \tilde{U}_m(t, x)$. Под решением задачи (5) будем понимать решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x) + \tilde{U}(t, x). \quad (6)$$

Включение (5) представим в виде управляемой системы

$$\dot{x} \in F(t, x) + \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in \tilde{U}(t, x). \quad (7)$$

Решением для задачи (7), определенным на отрезке $I = [t_0, t_0 + T]$, называется пара $(x(t), \tilde{u}(t))$, состоящая из абсолютно непрерывной функции $x(t)$ (траектории) и измеримой функции $\tilde{u}(t)$ (управления), удовлетворяющих включениям (7) почти всюду на I .

Пусть S_t — частная производная функции $t \rightarrow S(t, x, r(t, x))$ по переменной t и S_x есть якобиан функции $x \rightarrow S(t, x, r(t, x))$ по переменной x . Положим

$$\tilde{U}^{eq}(t, x) = S_t + S_x F(t, x).$$

Одним из основных способов получения уравнений скользящих режимов является метод эквивалентных управлений (см. [4, стр. 44]), которые выбираются так, чтобы вектор $\dot{x}(t)$ в точках $(t, x(t))$ лежал в касательной плоскости к пересечению поверхностей разрыва управлений. Мнозначный аналог эквивалентного управления для дифференциального включения (6) определим в виде

$$\tilde{U}^{*eq}(t, x) = \tilde{U}^{eq}(t, x) \cap \tilde{U}(t, x).$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия B1–B3, условие (3) и неравенство $\|S(\tau, y, r(\tau, y)) - S(t, x, r(t, x))\| \leq L(|\tau - t| + \|y - x\|)$, для всех допустимых t, τ, x и y . Тогда для включения (1) из любой последовательности “ломаных Эйлера” можно выделить равномерно сходящуюся к идеальному импульсно-скользящему режиму подпоследовательность, любой идеальный импульсно-скользящий режим $\tilde{x}(t)$ удовлетворяет условиям $r(t, \tilde{x}) = 0$, $S(t, \tilde{x}, r(t, \tilde{x})) = 0$, является решением разрывной системы (7) и траекторией управляемой системы

$$\dot{x} \in F(t, x) + \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in \tilde{U}^{eq}(t, x). \quad (8)$$

с начальным условием $\tilde{x}(t_0 + 0) = x_0 + S(t_0, x_0, r(t_0, x_0))$.

Теорема 2. Пусть $S_x = -E_n$, выполняются условия теоремы 1 и существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность W_δ многообразия Φ такие, что справедливы неравенства $\max_{w \in F(t', x')} |S_t^i + w_i| < H_i(t, x) - \varepsilon$ для всех для всех индексов $i = \overline{1, m}$ и $(t', x') \in W_\delta$. Тогда любой идеальный импульсно-скользящий режим $\tilde{x}(t)$ включения (1) является скользящим режимом включения (6) с разрывным позиционным управлением $\tilde{x}$ и траекторией управляемой системы

$$\dot{x} \in F(t, x) + \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in \tilde{U}^{eq}(t, x). \quad (9)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371).

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 216 с.
2. Завалицын С.Т., Сесекин А.Н. Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 790–799.
3. Finogenko I.A., Seseikin A.N. Impulse position control for differential inclusions // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2048. P. 020008. DOI: 10.1063/1.5082026.
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М: Наука, 1985. 224 с.

Positional Impulse and Discontinuous Controls for Differential Inclusions

I.A. Finogenko¹, A.N. Seseikin²

¹ IDSTU SB RAS, Irkutsk, Russia, fin@icc.ru

² IMM UB RAS, UrFU, Yekaterinburg, Russia, seseikin@list.ru

Abstract: Nonlinear controlled systems, represented as differential inclusions with impulse or discontinuous positional controls, are considered. The formalization of the impulse-sliding regime is given. The question of the combined use of impulse-sliding and sliding regime is discussed.

О точности необходимых краевых условий для задач управления на бесконечном промежутке

Д.В. Хлопин

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, khlopin@imm.uran.ru

Аннотация: Для задач управления на бесконечном промежутке со свободным правым концом предложено краевое условие на сопряженную переменную, необходимое для слабо обгоняющего критерия. Это краевое условие не требует никаких априорных предположений на асимптотики сопряженных переменных, траекторий или их переменных. Впрочем, в случае достаточно гладкого на бесконечности функционала качества это условие эквивалентно предложенной А.В. Кряжкимским и С.М. Асеевым формуле, выделяющей ровно одно решение системы принципа максимума.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, необходимое условие, краевое условие на бесконечности, слабо обгоняющий критерий.

Рассмотрим на бесконечном промежутке следующую задачу:

$$\int_0^\infty f_0(t, x, u) dt \downarrow \min,$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x_*, \quad u \in U, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Здесь U — некоторое замкнутое подмножество конечномерного пространства, допустимые управления $u = u(\cdot)$ пробегают все ограниченные на каждом отрезке измеримые отображения из $[0, \infty)$ в U . Пусть функции $f_0 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывны по (x, u) , для всякого допустимого управления u отображения $[0, \infty) \times \mathbb{X} \ni (t, x) \mapsto f(t, x, u(t)) \in \mathbb{X}$ и $[0, \infty) \times \mathbb{X} \ni (t, x) \mapsto f_0(t, x, u(t)) \in \mathbb{R}$ вместе со своими производными по x локально липшицевы по x и удовлетворяют общему условию подлинейного роста по x . Всяким допустимому управлению u и начальной позиции x сопоставим траекторию $t \mapsto y(x, u; t)$ и функционал

$$\theta \mapsto J(x, u; \theta) = \int_0^\theta f_0(t, y(x, u; t), u(t)) dt.$$

Назовем допустимое управление $\hat{u}$ *локально слабо обгоняющим*, если для некоторого $\varepsilon > 0$, для всякого допустимого управления u

из условия $\text{meas} \{t \geq 0 \mid u(t) \neq \hat{u}(t)\} < \varepsilon$ следует $\limsup_{T \rightarrow \infty} [J(x_*, u; T) - J(x_*, \hat{u}; T)] \geq 0$.

Введем для всех $(x, \psi, u, \lambda, t) \in \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^m)^* \times U \times [0, \infty)^2$

$$H(x, \psi, u, \lambda, t) = \psi f(t, x, u) - \lambda f_0(t, x, u).$$

Хорошо известно [5], что для $(\hat{x}, \hat{u})$ также найдется такая не тождественно равная нулю пара $(\lambda, \psi) \in [0, \infty) \times C([0, \infty); (\mathbb{R}^m)^*)$, что

$$-\dot{\hat{\psi}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t), \hat{\lambda}, t); \quad (1)$$

$$\sup_{p \in U} H(\hat{x}(t), \hat{\psi}(t), p, \hat{\lambda}, t) = H(\hat{x}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t), \hat{\lambda}, t). \quad (2)$$

Эта система имеет обычно континуальное семейство решений, поскольку не содержит какого-либо краевого условия на ψ . Предложено много таких краевых условий [2], но, во-первых, имеется много примеров, где какое-нибудь из них (или даже все одновременно) не является необходимым; подробнее см. в [2, § 6]; во-вторых, им могут удовлетворять все решения системы (1)–(2) (см. [8, Example 10.2]).

Сложность решения системы принципа максимума можно проиллюстрировать на максимально упрощенном, фактически идеальном случае, когда из соотношения (2) управление $\hat{u}$ однозначно восстанавливается по известным $\hat{x}, \hat{\psi}, \hat{\lambda}$, более того, последняя зависимость априори достаточно гладкая. Тогда мы имеем замкнутую систему дифференциальных уравнений, заведомо имеющую одно и только одно решение этой системы для каждого начального условия $\hat{\psi}(0)$ и каждого значения $\hat{\lambda} \in \{0, 1\}$. В задаче со свободным правым концом на конечном промежутке $[0, T]$ мы бы знали, что λ в точности равна 1, а также имели бы соотношение $\hat{\psi}(T) = 0$, сводящее задачу к конечному перебору в ситуации общего положения (подробно для линейного случая это рассуждение со всеми необходимыми предположениями проведено, например в [3, П.14]). На бесконечном промежутке формально мы обязаны, во-первых, рассмотреть как случай $\lambda = 0$, так и $\lambda = 1$, во-вторых, в каждом случае, мы имеем, вообще говоря, в ситуации общего положения континуум решений у (1)–(2). Без какого-либо дополнительного краевого условия, мы по-прежнему должны перебрать все решения (1)–(2), а в случае критерия finite optimality [5], даже ограничить перебор каким-либо крайним условием не удастся.

Оказывается, что приведенное рассуждение в некотором смысле имеет место и для слабо обгоняющего критерия. Простой модификацией линейного осцилятора из [7, Example 1] можно добиться, чтобы всякое константное допустимое управление было слабо обгоняющим, удовлетворяя (1)–(2) с $\hat{\lambda} = 1$ при всех $\psi(0)$ из единичного шара. Тем самым, всякое необходимое краевое условие, примененное к этой задаче, выделит в качестве экстремали как минимум все константные управления. С другой стороны, можно найти условие, выделяющее в этом примере в точности единичный шар; при этом от задачи требуется предположить ее регулярность:

Теорема 1. *Для локально слабо обгоняющего управления $\hat{u}$ со свойством*

$$\lim_{\varkappa \downarrow 0} \limsup_{T \uparrow \infty} \sup_{\|\xi - x_*\| \leq \varkappa} [J(\xi, \hat{u}; T) - J(x_*, \hat{u}; T)] = 0, \quad (3)$$

найдется такое нетривиальное решение $(\hat{\psi}, \hat{\lambda})$ соотношений принципа максимума (1)–(2), что

$$-\hat{\psi}(0) \in \operatorname{co} \operatorname{Limsup}_{\theta \uparrow \infty, \xi \rightarrow x_*, \lambda \downarrow \hat{\lambda}} \left\{ \lambda \frac{\partial J}{\partial x}(\xi, \hat{u}; \theta) \right\}.$$

Более того, если $\partial J / \partial x(\xi, \hat{u}; \theta)$ ограничены для всех достаточно больших моментов θ и близких к x_ точек ξ , то предположение регулярности (3) выполнено автоматически, а $\hat{\lambda} = 1$.*

Еще один метод поиска необходимого краевого условия — сразу искать асимптотику, выделяющую ровно одно решение сопряженной системы (при фиксированных управлении и траектории) — по-видимому, впервые был рассмотрен в работе [1]. Обычно [2] это условие задается на основе формулы Коши, но имеются [6] и другие его представления, например следующее:

$$-\hat{\psi}(0) = \lim_{\theta \uparrow \infty} \frac{\partial J}{\partial x}(x_*, \hat{u}; \theta), \quad \hat{\lambda} = 1. \quad (4)$$

Необходимость такого условия была показана для разных критериев при разных дополнительных предположениях [2, 4, 6, 7]. Из указанной выше теоремы также следует подобный результат:

Следствие 1. Пусть для некоторого локально слабо обгоняющего управления $\hat{u}$ существует следующий предел:

$$\lim_{\theta \uparrow \infty, \xi \rightarrow x_*} \frac{\partial J}{\partial x}(\xi, \hat{u}; \theta).$$

Тогда система (1)–(4) совместна и имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 257. С. 1–271.
2. Асеев С.М., Кряжимский А.В., Тарасьев А.М. Принцип максимума Понтрягина и условия трансверсальности для одной задачи оптимального управления на бесконечном интервале // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2001. Т. 233. С. 71–88.
3. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
4. Aseev S., Veliov V., Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains. G. Wolansky and A. Zaslavski (eds.). Providence: AMS, 2014. P. 1–17.
5. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. P. 267–272.
6. Khlopin D.V. Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 11. P. 2417–2440.
7. Khlopin D.V. On boundary conditions at infinity for infinite horizon control problem // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA 2017): proc. IEEE Xplore Digital Library. 2017. P. 1–3.
8. Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103, no. 1. P. 201–230.

On Preciseness of Necessary Boundary Condition of Optimality in Infinite-Horizon Control Problem

Dmitry V. Khlopin

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, khlopin@imm.uran.ru

Abstract: An infinite-horizon control problem with free right end is considered. For the weakly overtaking criterium it is shown a necessary boundary condition on a co-state arc regardless of the asymptotic behavior of adjoint variables and its derivatives. In the case of smooth quality index at infinity this condition reduces the unique solution of the Pontryagin Maximum Principle.

Программные конструкции в абстрактной игровой задаче удержания

А.Г. Ченцов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, chentsov@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается игровая задача удержания в фазовых ограничениях для абстрактной динамической системы с элементами неопределенности. Фазовое пространство системы предполагается метрическим, а множества, определяющие фазовые ограничения, — замкнутыми и зависящими от времени произвольным образом. Допускается случай “прерывистого” времени, что позволяет объединить общей постановкой задачи с непрерывным и дискретным временем. Допустимые процедуры управления определяются в виде многозначных квазистратегий. Исследуется вопрос о построении множества успешной разрешимости и самих многозначных квазистратегий игрока, заинтересованного в реализации удержания. Для решения используется метод программных итераций.

Ключевые слова: квазистратегия, метод итераций, множество успешной разрешимости.

Введение

Вопросы, исследуемые в теории дифференциальных игр (ДИ) связаны с актуальными инженерными задачами управления в условиях неопределенности. В фундаментальных исследованиях Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного и их учеников заложены основы данного важного раздела современной теории управления и получены ключевые научные результаты. Принцип экстремального сдвига Н.Н. Красовского позволил конструировать управляющие воздействия в виде процедур управления по принципу обратной связи. Ключевым свойством, определяющим успех в применении процедур управления по принципу обратной связи, является стабильность множеств в пространстве позиций (или, в других задачах, стабильность функций позиции). Упомянутое свойство может отсутствовать у “первоначальных” множеств — параметров задачи, а, следовательно, требуется применение тех или иных процедур, доставляющих нужные стабильные множества. Оказывается, что ряд таких процедур, связанных с решением игровых задач программного управления, может исследоваться в условиях, более общих в сравнении с

“обычными” ДИ. А именно, соответствующие построения, связанные с получением аналогов стабильности и неупреждаемости реакций на помеховые воздействия, могут быть реализованы для абстрактной постановки, определяемой в аксиоматической форме. Данный вариант постановки принят и в настоящем исследовании, продолжающим цикл более ранних работ автора.

1. Основной результат

Рассматривается задача удержания траекторий аксиоматически определяемой динамической системы при нестационарных фазовых ограничениях и (потенциально) “прерывистым” временем. Последнее означает, что задано непустое подмножество (п/м) T вещественной прямой $\mathbb{R}$, отличное от синглтона. Как два возможных случая реализуются а) вариант в виде полупрямой (задача с непрерывным временем) и б) вариант, когда упомянутое п/м $\mathbb{R}$ является натуральным рядом (задача с дискретным временем). Множество X , определяющее фазовое пространство, оснащено топологией τ . Множество X^T всех отображений из T в X оснащается топологией $\otimes^T(\tau)$ тихоновской степени (X, τ) с индексным множеством T ; фиксируем непустое множество $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \subset X^T$, и полагаем, что траектории системы реализуются в $\mathbb{C}$ с топологией, индуцированной из $(X^T, \otimes^T(\tau))$.

Пусть Ω — непустое множество неопределенных факторов процесса: $\Omega \subset Y^T$, где Y — непустое множество. Фиксировано множество N , $N \subset T \times X$, с замкнутыми в (X, τ) сечениями $N\langle t \rangle$, $t \in T$; данные сечения образуют в совокупности фазовые ограничения (ФО), в соблюдении которых заинтересован игрок I , осуществляющий выбор траектории из пучка, зависящего от $\omega \in \Omega$. Допустимые процедуры упомянутого выбора полагаются многозначными квазистратегиями, то есть неупреждающими мультифункциями из Ω в $\mathbb{C}$.

Требуется найти множество успешной разрешимости возникающей при этом задачи удержания, то есть множество всех позиций из $T \times X$, “успешных” для игрока I в смысле гарантированной реализации траекторий в системе $N\langle t \rangle$, $t \in T$. Выбор $\omega \in \Omega$ осуществляет игрок II , цель которого противоположна. Для построения множества успешной разрешимости задачи удержания и конкретных многозначных квазистратегий, разрешающих данную задачу, предложены два варианта метода программных итераций (МПИ) и получены соотно-

шения двойственности упомянутых вариантов МПИ, позволяющие представлять итерационную процедуру в пространстве мультифункций в терминах итерационной процедуры на пространстве подмножеств $T \times X$. Показано, что для позиции из N , не принадлежащей множеству успешной разрешимости в классе квазистратегий, существует программа $\omega \in \Omega$, исключающая гарантированное удержание в сечениях N для всех квазистратегий, подчиненных в естественном смысле целевому многозначному отображению игрока I , связанному с осуществлением удержания в ФО.

2. Обсуждение задачи

Задачи управления в условиях помех и неопределенных факторов традиционно рассматриваются в теории ДИ, фундаментальным положением которой является теорема об альтернативе в ДИ сближения-уклонения Н.Н. Красовского и А.И. Субботина; см. [1, 2]. Игра удержания на конечном промежутке времени для нелинейной конфликтно-управляемой системы также может рассматриваться как ДИ сближения-уклонения, в которой целевое множество, отсутствующее в исходной задаче удержания, вводится как гиперплоскость пространства позиций, отвечающая фиксации момента окончания. Поэтому для данного случая игры удержания на основе положений [1, 2] реализуется альтернативное разбиение пространства позиций, одно из множеств которого полностью определяет возможности игрока I в части реализации удержания траекторий в ФО задачи. Если игровую задачу удержания рассматривать на бесконечном промежутке времени, то применить теорему об альтернативе уже не удастся. Тем не менее исследование множества успешной разрешимости все же возможно осуществить с помощью программных конструкций, используя логику решения ДИ, для которых альтернатива Н.Н. Красовского, А.И. Субботина имеет место. Главное содержание этих конструкций составляют итерационные (вообще говоря) процедуры построения стабильных мостов и (в задачах с функционалом платы) функции цены. Конструкции такого рода объединяются в рамках МПИ; см. [3–5, 10] и др. Более того, в задачах, связанных с построением разрешающих квазистратегий, оказалось возможным [6–9] исследовать аксиоматически определяемые варианты постановок, что используется и в настоящей работе (см. раздел 1).

Вариант МПИ, применяемый в [5, 6], является (по смыслу), непрямым с точки зрения построения разрешающих многозначных квазистратегий: процедура решения базируется на преобразовании множеств в пространстве позиций, осуществляемом оператором программного поглощения. Затем в терминах предельного множества (в пространстве позиций) по вполне определенному правилу для позиций из упомянутого множества конструируются многозначные реакции на помеховые (по смыслу) воздействия; эти реакции как раз и оказываются нужными многозначными квазистратегиями. Другой вариант МПИ [9], являющийся в упомянутом смысле прямым, реализуется непосредственно на пространстве мультифункций, имеющих смысл программных реакций на помеховые воздействия. При этом соответствующие варианты МПИ связаны с решением игровой задачи удержания в классе многозначных квазистратегий, определяемых аксиоматически. Важно отметить, что в упомянутом случае удастся [8] сформулировать основные положения в топологических терминах; метрики, если таковые и имеются, проявляются в построениях только через топологии, этими метриками порождаемые. В этом — существенное отличие от конструкций [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34. № 6. С. 1005–1022.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Ухоботов В.И.* Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. № 2. С. 358–364.
4. *Ченцов А.Г.* О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975 Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
5. *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976 Т. 226, № 1. С. 73–76
6. *Ченцов А.Г.* К вопросу о соотношении различных версий метода программных итераций: позиционный вариант // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 3. С. 130–149.
7. *Ченцов А.Г.* К вопросу о двойственности различных версий метода программных итераций // Изв. вузов. Математика. 2001. № 12. С. 77–88.
8. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания // Автоматика и телемеханика. 2004, вып. 2. С. 157–169.
9. *Ченцов А.Г.* К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Изв. вузов. Математика. 2000. № 3. С. 66–76.
10. *Чистяков С.В.* К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.

Program Constructions in Abstract Game Retention Problem

Alexander G. Chentsov

IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, chentsov@imm.uran.ru

Abstract: For abstract dynamical system with elements of indeterminacy, game problem of retention with phase restrictions is considered. It is supposed that phase space of our system is metric, and sets defining phase restrictions are closed and depend arbitrarily on time. The case of intermittent time is assumed. This allows you to combine problems with continuous and discrete time by single task statement. Admissible control procedures are defined as multi-valued quasistrategies. It is investigated the question about construction of the solvability set and multi-valued quasistrategies of the player interested in the retention realization. To solve the problem, program iteration method is used.

УДК 517.955

Кусочно-линейное минимаксное решение уравнения Гамильтона — Якоби с неоднородным гамильтонианом

Л.Г. Шагалова

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия, shag@imm.uran.ru

Аннотация: Рассматривается терминальная задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с неоднородным гамильтонианом. Предполагается, что гамильтониан и терминальная функция кусочно-линейны, а размерность фазового пространства равна двум. Эта задача сводится к задаче с однородным гамильтонианом в трехмерном пространстве, для которой разработан алгоритм точного построения минимаксного/вязкостного решения. Алгоритм состоит из конечного числа последовательных этапов, на каждом из которых решаются элементарные задачи нескольких типов и осуществляется непрерывная склейка этих решений. Построенное в результате алгоритма минимаксное решение является кусочно-линейной функцией. Выделены также случаи, когда исходная задача с неоднородным гамильтонианом может быть решена на плоскости, без перехода к задаче с однородным гамильтонианом в трехмерном пространстве.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, вязкостное решение, алгоритм, кусочно-линейные функции

Постановка задачи

Рассматривается следующая задача Коши.

$$\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial x}\right) = 0, \quad t \leq \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$\omega(\vartheta, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Здесь ϑ — заданное положительное число, гамильтониан $H(\cdot)$ и функция $\sigma(\cdot)$ — липшицевы. Известно [2, 9], что минимаксное решение $\omega(\cdot)$ задачи (1), (2) существует и единственно. Если хотя бы одна из функций $H(\cdot)$ или $\sigma(\cdot)$ является выпуклой или вогнутой, можно выписать явные формулы для решения, используя известные формулы Хопфа — Лакса [1, 5, 6]. Однако в общем случае получить явные формулы для решения не удастся. В [3, 7] был разработан конечный алгоритм точного построения минимаксного решения в случае, когда размерность фазового пространства равна двум, а гамильтониан $H(\cdot)$ и функция $\sigma(\cdot)$ являются кусочно-линейными и удовлетворяют условиям положительной однородности

$$\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \quad (3)$$

$$H(\lambda s) = \lambda H(s), \quad s \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0. \quad (4)$$

В [3, 7] условие (4) было существенным. В настоящей работе задача (1), (2) также рассматривается в случае двумерного фазового пространства и кусочно-линейных входных данных. Но сейчас не требуется выполнение условия (4) однородности гамильтониана. Целью является построение минимаксного/вязкостного решения.

Основные результаты

Определим функции

$$H^*(s, r) = \begin{cases} |r|H\left(\frac{s}{|r|}\right), & \text{при } r \neq 0, \\ \lim_{r \downarrow 0} rH\left(\frac{s}{r}\right), & \text{при } r = 0, \end{cases} \quad (s, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\sigma^\sharp(x, y) = \sigma(x) + y, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Предполагаем, что предел в (5) существует.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с положительно однородным относительно переменной $\bar{s} = (s, r)$ гамильтонианом $H^*(\cdot)$

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} + H^* \left(\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(t, x, y)}{\partial y} \right) = 0, \quad t \leq \vartheta, \quad (7)$$

$$u(\vartheta, x, y) = \sigma^\sharp(x, y), \quad (8)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Функция $\omega(t, x)$ является минимаксным решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда функция $u(t, x, y) = \omega(t, x) + y$ является минимаксным решением задачи (7), (8).*

Если $n = 2$, $H(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ — кусочно-линейны, минимаксное решение $\omega(t, x)$ также будет кусочно-линейной функцией. Алгоритм точного построения минимаксного решения в этом случае и структура решения описаны в [4, 8]. Здесь отметим лишь, что алгоритм заключается в последовательном решении элементарных задач нескольких типов и непрерывной склейке решений этих задач. Из вышеизложенного следует, что в общем случае решение задачи с неоднородным гамильтонианом сводится к решению задачи с однородным гамильтонианом в пространстве размерности на единицу больше. Выделим случай, когда не требуется переходить в пространство большей размерности.

Пусть для неоднородного гамильтониана $H(s)$, $s \in \mathbb{R}^n$ существует вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такой, что гамильтониан $H_a(s) = H(s + a)$ является положительно однородным. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} + H_a \left(\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial x} \right) = 0, \quad t \leq \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

$$\omega(\vartheta, x) = \sigma(x) - ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\omega_a(t, x)$ — минимаксное решение задачи (9), (10). Тогда функция $\omega(t, x) = \omega_a(t, x) + ax$ является минимаксным решением задачи (1), (2).*

Таким образом, в рассматриваемом случае при $n = 2$ и кусочно-линейных входных данных для построения минимаксного решения

задачи с неоднородным гамильтонианом можно использовать разработанный в [3, 7] алгоритм для задачи с однородным гамильтонианом, не требующий перехода в пространство большей размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00074) и Комплексной программы УрО РАН (проект № 18-1-1-10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
2. *Субботин А.И.* Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
3. *Субботин А.И., Шагалова Л.Г.* Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби // Доклады Академии Наук. 1992. Т. 325. № 5. С. 144–148.
4. *Шагалова Л.Г.* Функция цены дифференциальной игры с простыми движениями и интегрально-терминальной платой // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер.: естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 124. С. 877–890.
5. *Bardi M., Evans L.* On Hopf's formulas for solutions of Hamilton—Jacobi equations // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Applications. 1984. Vol. 8, no. 11. P. 1373–1381.
6. *Hopf E.* Generalized solutions of non-linear equations of first order // J. Math. Mech. 1965. Vol. 14, no. 6. P. 951–973.
7. *Shagalova L.G.* A piecewise linear minimax solution of the Hamilton—Jacobi equation // IFAC Proceedings Volumes. 1998. Vol. 31, No. 13. P. 193–197.
8. *Shagalova L.G.* The value function of a differential game with simple motions and an integro-terminal payoff functional // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 861–865
9. *Subbotin A.I.* Generalized Solutions of First Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. xi+312 p.

Piecewise Linear Minimax Solution of Hamilton—Jacobi Equation with Nonhomogeneous Hamiltonian

Lyubov G. Shagalova

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia,
shag@imm.uran.ru

Abstract: The terminal value Cauchy problem is considered for Hamilton—Jacobi equation with nonhomogeneous Hamiltonian. The Hamiltonian and the terminal function are piecewise linear, and the dimension of state space is two. This problem reduces to a problem with a homogeneous Hamiltonian in

three-dimensional state space. A finite algorithm for the exact construction of the minimax and/or viscosity solution is developed. The algorithm consists of a finite number of consecutive stages, at each of which elementary problems of several types are solved and the continuous gluing of these solutions are carried out. The solution built by the algorithm is a piecewise linear function. Cases are also indicated when the original problem with an inhomogeneous Hamiltonian can be solved on a plane without going to the problem with a homogeneous Hamiltonian in three-dimensional space.

УДК 330.42

Математическое моделирование инвестиций на несовершенном рынке капитала

А.А. Шананин

МФТИ, Москва, Россия, alexshan@yandex.ru

Аннотация: В экономике России сложилась ситуация, в которой коммерческие банки обладают ликвидными ресурсами, лишь незначительная часть которых используется для поддержки инвестиций в реальном секторе экономики. Ускорение темпов роста и выход из режима стагнации требуют преодоления институциональных ловушек, в которых оказалась экономика. Адекватным языком анализа косвенных последствий таких экономических реформ являются математические модели. Для описания предпринимательской среды используется модель Кантора — Липмана. Исследуется задача об оценке финансовой позиции инвестора на несовершенном рынке капитала. Предложен алгоритм для анализа ликвидности финансовой позиции. Алгоритм основан на итерациях оператора Беллмана. Показано, что в качестве дефлятора при оценке финансовой позиции инвестора следует выбирать минимальный положительный корень инвестиционной функции тиражируемых проектов.

Ключевые слова: оператор Беллмана, выпуклое программирование, несовершенный рынок, дефлятор, инвестор, финансовая позиция.

Инвестиционный проект в реальном секторе экономики характеризуется распределёнными по времени денежными потоками $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$, где a_i — величина денежного потока в i -й период времени от начала реализации проекта. Положительные значения a_i соответствуют доходам от реализации проекта, полученным в i -й

период времени, а отрицательные значения — вложениям в инвестиционный проект. В теории корпоративных финансов для отбора инвестиционных проектов используется показатель приведенной чистой прибыли **NPV** (net present value). Если платежи (и любая другая финансовая деятельность) осуществляются через некоторые равные промежутки времени, то NPV проекта с вектором потоков платежей $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$NPV(\vec{a}, r) = a_0 + a_1 e^{-r} + \dots + a_k e^{-rk}.$$

Здесь r — показатель доходности общедоступного для инвестора альтернативного способа вложения денег, который используется в расчёте в качестве дефлятора, приводящего распределённые по времени денежные потоки к периоду начала инвестиционного проекта. Величина дефлятора должна быть заключена между процентными ставками по депозитам и кредитам. Если разница между этими процентными ставками незначительна, то выбор дефлятора из этого интервала не влияет на принятие решения о поддержке основной массы инвестиционных проектов. Наблюдающееся в экономиках догоняющего типа значительное превышение процентных ставок по кредитам над процентными ставками по депозитам приводит к тому, что дефлятор денежных потоков и рентабельность проекта зависят от предпринимательских качеств инвестора. В работе в качестве модели экономической среды, в которой реализуется инвестиционный проект, предложено использовать модель Кантора — Липмана. Эта модель позволяет оценить доходность пула доступных инвестору тиражируемых инвестиционных проектов, моделирующих экономическую среду, в которой будет реализовываться анализируемый инвестиционный проект (см. подробнее [1]). Предположим, что для инвестора в любой период времени доступны в любом объёме M типов инвестиционных проектов. Проект m -го типа задаётся вектором финансовых потоков $\vec{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \dots, a_n^m)$. Здесь $n + 1$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов¹, а $m = 1, \dots, M$. Для того, чтобы эти проекты можно было считать общедоступным альтернативным источником вложений, они должны быть стационарными (доступными в неизменном виде в любой период времени) и тиражируемыми. Будем предполагать, что среди проектов имеется проект сохранения денег, который задаётся вектором $(-1, 1, 0, \dots, 0)$.

¹Если какой-то проект длится меньше, чем n периодов времени, то дополним соответствующий вектор нулями.

Обозначим через $s_k(t)$ финансовое состояние инвестора в период $t + k$ при условии, что, начиная с периода t , используется только проект сохранения денег. Тогда вектор $\vec{S}(t) = (s_0(t), \dots, s_{n-1}(t))$ описывает результат финансовой стратегии инвестора к периоду времени t . Обозначим через $u_m(t)$ интенсивность проектов m -го типа, начатых в период времени t . Тогда $\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t)$. Здесь $\vec{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_M(t))$ — вектор интенсивностей инвестиционных проектов, начатых в период времени t , $D = (D_{ij})_{i,j=0,n}$ — матрица $n \times n$, такая, что

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i + 1, \quad i = 0, \dots, n-2; \\ 1, & \text{если } i = j = n-1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

$B = (b_{im})_{i=1,\dots,n}^{m=1,\dots,M}$ — матрица $n \times M$, такая, что $b_{im} = \sum_{j=0}^i a_j^m$.

Дополнительных возможностей занимать, вкладывать деньги или переносить их из одного периода в другой у инвестора нет: все его возможности входят в доступный ему пул проектов; иными словами, должно выполняться условие самофинансирования. Целью инвестиционной стратегии является максимизация дохода в период времени не позднее T , т.е. оптимальная стратегия инвестиций определяется из решения задачи:

$$\begin{aligned} e^{-r\tau} h(\vec{S}(\tau)) &\rightarrow \max_{0 \leq \tau \leq T} \\ \vec{S}(t+1) &= D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t = 0, \dots, \tau-1; \\ s_0(t) + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m(t) &\geq 0, \quad t = 0, \dots, \tau-1; \\ \vec{u}(t) &\geq 0, \quad t = 0, \dots, \tau-1; \\ \vec{S}(0) &= \vec{\xi}, \end{aligned}$$

$$\text{где } h(\vec{S}) = \begin{cases} s_n, & \text{если } \vec{S} \in R_+^n; \\ -\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим через $W_T(\vec{\xi}, r)$ оптимальное значение функционала в этой задаче оптимизации. Функция $W_T(\vec{\xi}, r)$ оценивает финансовое

начальное состояние инвестора с дефлятором r . Отметим, что построить функцию $W_T(\vec{\xi}, r)$ можно, итерируя оператор Беллмана:

$$W_{T+1}(\vec{\xi}, r) = \max \left\{ W_T(\vec{\xi}, r), e^{-r} \sup \{ W_T(D\vec{\xi} + B\vec{u}) \mid \vec{u} \geq 0, \right. \\ \left. \xi_0 + \sum_{m=1}^M a_0^m u_m \geq 0 \} \right\}, \quad W_0(\vec{\xi}, r) = h(\vec{\xi}).$$

Инвестиционная функция пула проектов определяется на промежутке $[0, \infty)$ по формуле $F(r) = \max_{1 \leq m \leq M} \sum_{j=0}^n a_j^m e^{-rj}$. Будем предполагать выполненными условия прибыльности $F(0) > 0$ и отсутствия арбитража, т.е. существует $r > 0$ такое, что $F(0) < 0$. Пусть ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r)$, $\left| \left\{ m \mid \sum_{j=0}^n a_j^m e^{-\rho j} = F(\rho) \right\} \right| = 1$ и $F'(\rho) \neq 0$.

Теорема 1. При любых значениях $\vec{\xi} \in R_+^n$, $r > 0$, существует конечный или бесконечный предел $\lim_{T \rightarrow +\infty} W_T(\vec{\xi}, r) = W_\infty(\vec{\xi}, r)$. Функция $W_\infty(\vec{\xi}, r)$ является положительно однородной первой степени, вогнутой, монотонно неубывающей функцией по переменной $\vec{\xi}$. Если $r < \rho$, то $W_\infty(\vec{\xi}, r) = +\infty$ при $\vec{\xi} \in R_+^n \setminus \{0\}$. Если $r > \rho$, то $W_\infty(\vec{\xi}, r) = 0$ при $\vec{\xi} \in R_+^n$. Если $W_\infty(\vec{\xi}, r) > 0$ при $\vec{\xi} \in R_+^n \setminus \{0\}$, то $r = \rho$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 16-11-10246).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cantor D.G., Lippman S.A. Optimal investment selection with a multitude of projects // *Econometrica*. 1995. Vol. 63, no. 5. P. 1231–1240.

Mathematical Modeling of Investments in the Imperfect Capital Market

Alexander A. Shananin

МИПТ, Moscow, Russia, alexshan@yandex.ru

Abstract: The Russian economy has developed a situation in which commercial banks have liquid resources, only a small part of which is used to

support investment in the real sector of the economy. Accelerating growth and getting out of stagnation requires overcoming the institutional traps in which the economy finds itself. Adequate language for analyzing the indirect effects of such economic reforms are mathematical models. The Cantor – Lippman model is used to describe the business environment. We study the problem of assessing the financial position of investor in the imperfect capital market. An algorithm for analyzing the liquidity of the financial position is proposed. The algorithm is based on iterations of the Bellman operator. It is shown that the minimum positive root of the investment function of replicated projects should be chosen as a deflator in assessing the financial position of an investor.

УДК 517.977

Аппроксимирующие системы в задаче экспоненциальной устойчивости системы с запаздыванием

Р.И. Шевченко

УрФУ, Екатеринбург, Россия, oma170@hotmail.com

Аннотация: Для линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием рассматривается проблема экспоненциальной устойчивости тривиального решения. Исходной системе дифференциальных уравнений ставятся в соответствие аппроксимирующие системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. Получены условия для параметра аппроксимации, при которых экспоненциальная устойчивость аппроксимирующих систем влечет экспоненциальную устойчивость системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Ключевые слова: система с запаздыванием, экспоненциальная устойчивость, аппроксимация элемента запаздывания

Введение

Решению задач устойчивости и управления для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием методом аппроксимирующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы [1–4]. В статье [1] обоснована сходимость таких аппроксимаций для линейных систем с постоянным запаздыванием. Репин Ю.М. в работе [3] обобщил эти результаты на случай нелинейных систем, а

Куржанский А.Б. в работе [2] — на случай переменного запаздывания. Позднее в статье [4] эти аппроксимации применялись в задаче экспоненциальной устойчивости тривиального решения линейных систем с постоянным запаздыванием.

В настоящей работе для неавтономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием предлагается использовать аппроксимирующие системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. Получены условия, при которых из экспоненциальной устойчивости аппроксимирующих систем следует экспоненциальная устойчивость исходной системы.

1. Постановка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1(t)x(t) + A_2(t)x(t - \tau), \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (1)$$

с начальным условием $x(t_0 + \vartheta) = \varphi(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$. Здесь $x : [t_0 - \tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$; $A_1(\cdot), A_2(\cdot)$ — измеримые ограниченные матричнозначные функции; τ — запаздывание, $\varphi(\cdot)$ — непрерывная на отрезке $[-\tau, 0]$ функция.

Далее используется векторная норма $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ и согласованная с ней норма матрицы как линейного оператора. В пространстве непрерывных функций $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ используем норму $\|\varphi\|_C = \max_{\vartheta \in [-\tau, 0]} \|\varphi(\vartheta)\|$.

Определение 1. Система (1) называется экспоненциально устойчивой, если для любого $t_0 \geq 0$ и любого решения $x(t, t_0, \varphi)$ с начальной функцией $\varphi \in C$ справедливо неравенство

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq P e^{-\tilde{\alpha}(t-t_0)} \|\varphi\|_C, \quad t \geq t_0,$$

где $P, \tilde{\alpha} > 0$ — постоянные, не зависящие от функции φ и момента времени t_0 .

Задача исследования системы (1) на экспоненциальную устойчивость заменяется аналогичной задачей для системы дифференци-

альных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = A_1(t)y_0(t) + A_2(t)y_N(t), \quad (2)$$

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \frac{N}{\tau} \left(y_{i-1} \left(\left[\frac{tN}{\tau} \right] \frac{\tau}{N} \right) - y_i \left(\left[\frac{tN}{\tau} \right] \frac{\tau}{N} \right) \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где $[a]$ — целая часть числа a , $y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, N$, $N \geq 1$.

Определение 2. Система (2), (3) экспоненциально устойчива равномерно по $N \geq N_0$, $N_0 \geq 1$, если для каждого $t_0 \geq 0$ и произвольных $y^0, y^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times (N+1)}$ решение задачи Коши с начальными условиями $y(t_0) = y^0$, $y \left(\left[\frac{t_0 N}{\tau} \right] \frac{\tau}{N} \right) = y^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\|y(t, t_0, y^0, y^{-1})\|_N \leq \tilde{K} e^{-\alpha(t-t_0)} (\|y^0\|_N + \|y^{-1}\|_N), \quad t \geq t_0.$$

Здесь $\tilde{K}, \alpha > 0$ не зависят от t_0 , y^0 , y^{-1} , $N \geq N_0$; $y = \{y_k\}_0^N$, $\|y\|_N = \max_{0 \leq k \leq N} \|y_k\|$.

Ставится задача — доказать, что для экспоненциальной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы при достаточно больших N система (2), (3) была экспоненциально устойчива. Дополнительно требуется получить оценку величины числа N .

2. Основные результаты

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для экспоненциальной устойчивости системы (2), (3) равномерно по $N \geq 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\|y_0(t, t_0, y^0, y^{-1})\| \leq K e^{-\alpha(t-t_0)} (\|y^0\|_N + \|y^{-1}\|_N), \quad t \geq t_0.$$

Здесь $K \geq 1$, $\alpha > 0$ не зависят от t_0 , y^0 , y^{-1} , $N \geq 1$.

Для решений системы (3), как системы с заданной функцией $y_0(\cdot)$, последовательно установлены леммы.

Лемма 1. Пусть $\{y_i(t)\}_1^N$ — решение системы (3) с начальными условиями $y_i^0 = y_i^{-1} = y_0(t_0 - i/N \cdot \tau)$, $1 \leq i \leq N$, $N \geq 1$. Тогда если функция $y_0(t)$ при $t \geq t_0 - \tau$ имеет измеримую вторую производную, удовлетворяющую условию

$$\left\| \frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} \right\| \leq K_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)}, t \geq t_0 - \tau,$$

где $K_2, \alpha_2 > 0$ — постоянные, то справедливо неравенство

$$\|y_N(t) - y_0(t - \tau)\| \leq \frac{3\tau^2}{2N^2} K_2 e^{\alpha_2(N+2)/N \cdot \tau} e^{-\alpha_2(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad N \geq 1.$$

Лемма 2. Пусть $\{y_i(t)\}_1^N$ — решение системы (3) с начальными условиями $y_i^0 = y_i^{-1} = y_0(t_0 - i/N \cdot \tau)$, $1 \leq i \leq N$, $N \geq 1$. Тогда если функция $y_0(t)$ при $t \geq t_0 - \tau$ имеет измеримую первую производную, удовлетворяющую условию

$$\left\| \frac{dy_0(t)}{dt} \right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 - \tau,$$

где $K_1, \alpha_1 > 0$ — постоянные, то справедливо неравенство

$$\|y_N(t) - y_0(t - \tau)\| \leq \sqrt{6} \frac{\tau}{N} K_1 e^{\alpha_1 \frac{N+1}{N} \tau} \left(9e^{\alpha_1 \frac{N+1}{N} \tau} + 1 \right)^{1/2} e^{-\alpha_1(t-t_0)},$$

$$t \geq t_0, \quad N \geq 1.$$

Окончательно имеет место теорема.

Теорема 2. Если для $N > 2\sqrt{15}/\alpha \cdot K\tau na_2 (a_1 + a_2)$ система (2), (3) экспоненциально устойчива, то и система (1) экспоненциально устойчива. Здесь $a_1 = \sup_{t \geq 0} \|A_1(t)\|$, $a_2 = \sup_{t \geq 0} \|A_2(t)\|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 4. С. 716–724.
2. Куржанский А.Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.
3. Репин Ю. М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, № 2. С. 226–235.

4. Долгий Ю. Ф., Сажина С. Д. Оценка экспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием методом аппроксимирующих систем // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 12. С. 2046–2052.

Approximating Systems in the Exponential Stability Problem for Retarded System

R.I. Shevchenko

Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia, oma170@hotmail.com

Abstract: Under consideration is the problem of exponential stability of the trivial solution of the delay differential system. In our research we use the special approximating systems of differential equations with piecewise-constant arguments. The conditions on the approximation parameter, which guarantee that the exponential stability of the approximating systems implies the exponential stability of the initial system, are obtained.

УДК 681.511

Алгоритм решения задачи минимаксного адаптивного управления расходом топлива ракеты-носителя

А.Ф. Шориков¹, В.И. Калев²

¹ УрФУ, Екатеринбург, Россия, afshorikov@mail.ru

² АО «НПОА», Екатеринбург, Россия, butahlecoq@gmail.com

Аннотация: В работе рассматривается задача минимаксного адаптивного терминального управления расходом топлива жидкостной ракеты-носителя. Исходная нелинейная модель объекта управления аппроксимируется линейной дискретной динамической системой. При заданных ограничениях на векторы управления и возмущения для аппроксимирующей системы формулируется основная задача минимаксного адаптивного терминального управления рассматриваемым объектом, для решения которой предлагаются методика и численный алгоритм.

Ключевые слова: минимаксное адаптивное управление, управление расходом топлива, жидкостная ракета-носитель.

1. Постановка задачи и описание результатов

Задача управления расходом топлива [3] — одна из основных задач, решаемых на борту жидкостных ракет-носителей (ЖРН).

На промежутке времени $[\theta_0, \theta_f]$ рассматривается дискретно-непрерывная управляемая динамическая система [3], описывающая режим работы двигательной установки (ДУ) ЖРН (здесь θ_0 — начальный момент времени, а θ_f — финальный момент времени для процесса управления). Управление $u(t) \in \mathbb{R}^1$ реализуется в дискретные моменты времени $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{T-1}\} \subset [\theta_0, \theta_f]$, где $\theta_T = \theta_f$ ($t \in \overline{0, T-1}$, $T \in \mathbb{N}$), изменяя угол поворота дросселя $\alpha_{th}(t)$ и влияя на расход массы окислителя $m_o(\theta)$ и горючего $m_f(\theta)$:

$$\alpha_{th}(t+1) = \alpha_{th}(t) + c_0 u(t), \quad \alpha_{th}(0) = 0, \quad (1)$$

$$m_o(\theta) = \frac{(P + c_1 \alpha_{th}(\theta)^2 + c_2 \alpha_{th}(\theta))(K + c_5 \alpha_{th}(\theta))}{(I + c_3 \alpha_{th}(\theta)^2 + c_4 \alpha_{th}(\theta))(1 + K + c_5 \alpha_{th}(\theta))}, \quad (2)$$

$$m_f(\theta) = \frac{P + c_1 \alpha_{th}(\theta)^2 + c_2 \alpha_{th}(\theta)}{(I + c_3 \alpha_{th}(\theta)^2 + c_4 \alpha_{th}(\theta))(1 + K + c_5 \alpha_{th}(\theta))}, \quad (3)$$

где P, I, K — значения силы тяги, удельного импульса тяги и коэффициента соотношения расходов компонентов топлива, соответственно; $c_0, c_1, \dots, c_5$ — коэффициенты динамики работы ДУ ЖРН.

Массы окислителя $M_o(\theta)$ и горючего $M_f(\theta)$ в топливных баках рассчитываются по формулам

$$M_o(\theta) = M_{0.o} - \int_{\theta_0}^{\theta} m_o(\theta) d\theta, \quad M_f(\theta) = M_{0.f} - \int_{\theta_0}^{\theta} m_f(\theta) d\theta. \quad (4)$$

Исходная система (1)–(4) линеаризуется относительно опорной траектории и дискретизируется таким образом, что динамика объекта управления описывается линейной дискретной системой вида:

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + D(t)v(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in \overline{0, T-1}, \quad (5)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^4$ — фазовый вектор объекта ($x(0) = x_0$ — заданное его начальное состояние); $u(t) \in \mathbb{R}^1$ — скалярное управление; $v(t) \in \mathbb{R}^2$ — вектор погрешности аппроксимации модели (возмущение); $A(t), B(t), D(t)$ — известные действительные матрицы, соответствующих размерностей.

Предполагается, что управление $u(t)$ и возмущение $v(t)$ удовлетворяют заданным ограничениям:

$$u(t) \in \mathbf{U}_1(t), \quad v(t) \in \mathbf{V}_1(t), \quad t \in \overline{0, T-1}, \quad (6)$$

причем множество $\mathbf{U}_1(t) \subset \mathbb{R}^1$ — конечное, а множество $\mathbf{V}_1(t) \subset \mathbb{R}^2$ есть выпуклый, замкнутый и ограниченный многогранник.

Пусть $\mathbf{U}(\overline{\tau, T})$ и $\mathbf{V}(\overline{\tau, T})$ есть соответственно множества всех допустимых реализаций программных управлений и всех допустимых реализаций вектора возмущений на промежутке времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$, а $\mathbf{W}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbb{R}^4$ есть множество всех допустимых τ -позиций $w(\tau) = \{\tau, x(\tau)\}$ для рассматриваемого процесса управления. Тогда качество управления расходом топлива ДУ ЖРН на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ оценивается выпуклым терминальным функционалом $\gamma : \mathbf{W}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, T}) \times \mathbf{V}(\overline{\tau, T}) \rightarrow \mathbb{R}^1$, значения которого для допустимого набора $(w(\tau), u_\tau(\cdot), v_\tau(\cdot)) \in \mathbf{W}(\tau) \times \mathbf{U}(\overline{\tau, T}) \times \mathbf{V}(\overline{\tau, T})$ вычисляются по формуле:

$$\gamma_{\overline{\tau, T}}(w(\tau), u_\tau(\cdot), v_\tau(\cdot)) = \|x_\tau(T) - x_d\|_4 = \Phi(x_\tau(T)), \quad (7)$$

где $x_\tau(T) = \bar{x}(T; x(\tau), u_\tau(\cdot), v_\tau(\cdot))$ — финальное состояние фазовой траектории аппроксимирующей системы (5), соответствующее набору $(x(\tau), u_\tau(\cdot), v_\tau(\cdot))$; $x_d \in \mathbb{R}^4$ — вектор номинального (желаемого) состояния системы; $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — выпуклый функционал; $\|\cdot\|_4$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^4$.

Пусть согласно [2, 3] $\mathbf{U}^{(e)}(\overline{\tau, T}, w(\tau)) \subseteq \mathbf{U}(\overline{\tau, T})$ есть множество минимаксных программных управлений системы (5)–(7), т.е. решения соответствующей задачи минимаксного программного управления.

Для формализации адаптивного управления введем ряд определений. Допустимой стратегией $\mathbf{U}_a$ адаптивного управления расходом топлива ДУ ЖРН, описываемой на промежутке времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ дискретной динамической системой (5)–(7), будем называть отображение $\mathbf{U}_a : \mathbf{W}(\tau) \rightarrow \mathbf{U}_1(\tau)$, которое каждому моменту времени $\tau \in \overline{\tau, T-1}$ и реализации τ -позиции $w(\tau) = \{\tau, x(\tau)\} \in \mathbf{W}(\tau)$ ($w(0) = \{0, x_0\} = w_0$) назначает множество $\mathbf{U}_a(w(\tau))$ управлений $u(\tau) \in \mathbf{U}_1(\tau)$. Множество всех допустимых стратегий адаптивного управления расходом топлива ДУ ЖРН обозначим символом $\mathbf{U}_a^*$.

Согласно [1, 2], определим стратегию минимаксного адаптивного управления для системы (5)–(7) на промежутке времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$

как реализацию специфической стратегии $\mathbf{U}_a^{(e)} = \mathbf{U}_a^{(e)}(w(\tau)) \in \mathbf{U}_a^*$, $w(\tau) = \{\tau, x(\tau)\} \in \mathbf{W}(\tau)$ ($w(0) = w_0$) из класса всех допустимых стратегий адаптивного управления расходом топлива ДУ ЖРН $\mathbf{U}_a^*$, которая определяется следующими соотношениями:

1) для всех моментов времени $\tau \in \overline{\tau, T-1}$ и τ -позиций $w^{(e)}(\tau) = \{\tau, x^{(e)}(\tau)\} \in \mathbf{W}(\tau)$ ($w^{(e)}(0) = w_0$) пусть

$$\mathbf{U}_a^{(e)}(w^{(e)}(\tau)) = \bar{\mathbf{U}}^{(e)}(w^{(e)}(\tau)), \quad (8)$$

где множество $\bar{\mathbf{U}}^{(e)}(w^{(e)}(\tau))$ определяется из решения задачи минимаксного программного управления, а именно

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}^{(e)}(w^{(e)}(\tau)) &= \left\{ u^{(e)}(\tau) \mid u^{(e)}(\tau) \in \mathbf{U}_1(\tau), \right. \\ &\left. u^{(e)}(\cdot) = \{u^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{\tau, T-1}} \in \mathbf{U}^{(e)}(\overline{\tau, T}, w^{(e)}(\tau)) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где для допустимых на промежутке времени $\overline{0, \tau}$ реализаций управления $u_a^{(e)}(\cdot) \in \mathbf{U}(\overline{0, \tau})$ и возмущения $v_a(\cdot) \in \mathbf{V}(\overline{0, \tau})$, порожденных стратегией $\mathbf{U}_a^{(e)}$, $x^{(e)}(\tau) = \bar{x}(\tau; x_0, u_a^{(e)}(\cdot), v_a(\cdot))$;

2) для всех моментов времени $\tau \in \overline{0, T-1}$ и τ -позиций $w(\tau) \in \{\mathbf{W}(\tau) \setminus w^{(e)}(\tau)\}$ пусть

$$\mathbf{U}_a^{(e)}(w(\tau)) = \mathbf{U}_1(\tau). \quad (10)$$

Сформулируем многошаговую задачу минимаксного адаптивного терминального управления расходом топлива ДУ ЖРН.

Задача. Для заданных промежутка времени $\overline{0, T}$ и начальной позиции $w_0 = \{0, x_0\} \in \mathbf{W}(0)$ в системе (5)–(7) требуется найти стратегию минимаксного адаптивного управления $\mathbf{U}_a^{(e)} \in \mathbf{U}_a^*$, которая удовлетворяет соотношениям (8)–(10) и число $c_{a, \gamma}^{(e)}(\overline{0, T}, w_0)$ — минимаксный результат решения задачи, как реализацию конечной последовательности только одношаговых операций.

На основе работ [1–3], в докладе предлагаются методика и численный алгоритм решения сформулированной многошаговой задачи, сводящиеся к реализации конечной последовательности только одношаговых оптимизационных операций. Полученные результаты демонстрируются на модельном примере управления процессом расхода топлива ДУ третьей ступени ЖРН.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №18-01-00544).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Шориков А.Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 242 с.
3. *Калев В.И., Шориков А.Ф.* Решение задачи оптимального программного терминального управления расходом топлива ракеты-носителя // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 1. С. 166–176.

An Algorithm for Solving Minimax Closed-Loop Propellant Consumption Control Problem of Launch Vehicle

Andrey F. Shorikov¹, Vitaly I. Kaley²

¹ Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia, afshorikov@mail.ru

² R&D association of automatics, Ekaterinburg, Russia, butahlecoq@gmail.com

Abstract: The paper considers minimax closed-loop propellant consumption terminal control problem for liquid-propellant launch vehicle. The initial plant model is approximated by linear discrete-time dynamical system. Under given state and disturbance constraints in approximated system we formulate main problem of minimax closed-loop terminal control of considered plant. An approach and numerical algorithm are proposed to solve the problem.

UDC 519.7

One Problem of Statistically Uncertain Estimation

Boris I. Ananyev

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, abi@imm.uran.ru

Abstract: An abstract filtering problem for multistage stochastic inclusions is considered. For its solution, three various schemes for building of the sets of conditional distributions are proposed. We are interested in coincidence of these sets. Some sufficient conditions for this are given. Two theorems on the coincidence are proved for finite sets and for 2-multidimensional Euclidean special case.

Keywords: stochastic inclusions, statistically uncertain filtering, conditional distributions, selectors.

Introduction

Given a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a flow σ -fields $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$, two Borel spaces X and Y , and multistage stochastic inclusions

$$z_i \in Q_i(z_{i-1}, \omega), \quad z_i = [x_i, y_i] \in XY, \quad i \in 1 : N, \quad (1)$$

where the multifunctions Q_i are strongly measurable, one needs to obtain a set of conditional distributions $P(x_N \in A | y^N) \forall A \in \mathcal{B}_X$. Hereafter, $y^N = \{y_1, \dots, y_N\}$ is a set of observable projections, $\mathcal{B}_X$ is the Borel σ -field on topological space X . The strong measurability means that $Q_i^*(Z) = \{[z, \omega] : Q_i(z, \omega) \cap Z \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}_{XY} \cdot \mathcal{F}_i \forall Z \in \mathcal{B}_{XY}$. The sets $Q_i^*(z, Z) \subset \Omega$ given z are defined similarly. A topological space is said to be a Borel space if it homeomorphic to a Borel set of some Polish space. If $\mathcal{P}$ is a class of subsets of a set X , then $\sigma(\mathcal{P})$ is the smallest σ -field containing $\mathcal{P}$. If $X_1, X_2, \dots$ is a sequence of sets, the Cartesian product of $X_1, X_2, \dots$ is denoted by $X_1 X_2 \dots$. For two σ -fields $\mathcal{A}$ and $\mathcal{G}$ on X and Y , respectively, their product is defined as $\mathcal{A} \cdot \mathcal{G} = \sigma(\{AG : A \in \mathcal{A}, G \in \mathcal{G}\})$ on XY . We have $\mathcal{B}_{XY} = \mathcal{B}_X \cdot \mathcal{B}_Y$. If f is a random measured function with the finite expectation $E|f| < \infty$ and $\mathcal{A}$ is a σ -subfield of $\mathcal{F}$, then $E(f|\mathcal{A})$ is the conditional expectation. For the sequence y^N , the σ -field $\sigma(y^N)$ equals $\sigma(y_1^{-1}(\mathcal{B}_Y) \cup \dots \cup y_N^{-1}(\mathcal{B}_Y))$. For brevity, $E(f|\sigma(y^N)) = E(f|y^N)$.

1. Statistically Uncertain Filtering

Denote by $S(Q_i)$ the set of all measurable selectors: $S(Q_i) = \{h_i : XY\Omega \rightarrow XY, \mathcal{B}_{XY} \cdot \mathcal{F}_i | \mathcal{B}_{XY}\text{-measurable}, h_i(z, \omega) \in Q_i(z, \omega) \forall z, \omega\}$. Let $h_i(z, \omega) = [f_i(z, \omega), g_i(z, \omega)] \in XY$ and $h_i^{-1}(z, Z) = \{\omega : h_i(z, \omega) \in Z\} \forall Z \in \mathcal{B}_{XY}$. First, measurable stochastic kernels are introduced:

$$q_i(Z|z) = P(h_i^{-1}(z, Z)), \quad Z \in \mathcal{B}_{XY}, \quad (2)$$

on XY given z . Denote by $\mathbb{P}(X)$ the set of all probability Borel measures on X . It is known [2] that $\mathbb{P}(X)$ is a Borel space in the weak topology. Each the stochastic kernel $q_i(\cdot|z)$ is a collection of probability measures in $\mathbb{P}(XY)$ parameterized by $z \in XY$. The measurability of kernels (2) means the following. Let $\gamma : XY \rightarrow \mathbb{P}(XY)$ be the map of the form $\gamma(z) = q_i(\cdot|z)$, then $\gamma^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{P}(XY)}) \subset \mathcal{B}_{XY}$. This is equivalent to the Borel measurability of functions $q_i(Z|z)$ in z for all $Z \in \mathcal{B}_{XY}$. If X, Y, Z are three Borel spaces then according to

[2, Proposition 7.27] for any kernel $q(\cdot|z)$ on XY given z there exists a kernel $r(\cdot|z, y)$ on X given $[z, y]$ and a kernel $s(\cdot|z)$ on Y given z such that $q(AB|z) = \int_B r(A|z, y)s(dy|z) \quad \forall A \in \mathcal{B}_X, \quad \forall B \in \mathcal{B}_Y$. Here $s(B|z) = q(XB|z)$. Using this fact on the first stage, one can write $q_1(AB|z_0) = \int_B r_1(A|z_0, y_1)s_1(dy_1|z_0) \quad \forall A \in \mathcal{B}_X, \quad \forall B \in \mathcal{B}_Y$, where $r_1(\cdot|z_0, y_1)$ is a stochastic measurable kernel. Therefore, the conditional distribution equals $P(x_1 \in A|y^1) = p_1(A|z_0, y^1) = r_1(A|z_0, y_1)$.

Further, we act by induction. Let the distribution $p_{i-1}(\cdot|z_0, y^{i-1})$ be already constructed. Then on the stage i we have

$$\int_X q_i(AB|z_{i-1})p_{i-1}(dx_{i-1}|z_0, y^{i-1}) = \int_B r_i(A|z_0, y^i)s_i(dy_i|z_0, y^{i-1}), \quad (3)$$

where $s_i(B|z_0, y^{i-1}) = \int_X q_i(XB|z_{i-1})p_{i-1}(dx_{i-1}|z_0, y^{i-1})$. So, we have $p_i(A|z_0, y^i) = r_i(A|z_0, y^i) \quad \forall A \in \mathcal{B}_X$.

Particulary, let $X = R^n$, $Y = R^m$, and $q_i(AB|z_{i-1}) = \int_{AB} h_i(x, y|z_{i-1})dxdy$, where $h_i(x, y|z_{i-1})$ is a Lebesgue measurable non-negative probability density. Then on the first stage one has the conditional density $\hat{h}_1(x|z_0, y_1) = h_1(x, y_1|z_0)/\int_{R^n} h_1(x, y_1|z_0)dx$. Let $\hat{h}_{i-1}(x|z_0, y^{i-1})$ be the conditional density on the stage $i-1$. Then on the stage i one has the conditional density $\hat{h}_i(x|z_0, y^i) = \int_{R^n} h_i(x, y_i|z_{i-1})\hat{h}_{i-1}(x_{i-1}|z_0, y^{i-1})dxdx_{i-1}/\int_{R^n} \int_{R^n} h_i(x, y_i|z_{i-1})\hat{h}_{i-1}(x_{i-1}|z_0, y^{i-1})dxdx_{i-1}dx, \quad i > 1$, for the conditional measure $r_i(\cdot|z_0, y^i)$. Knowing the conditional measure, one can calculate the conditional expectation or dispersion of any real measurable function of x_N .

Various Filtering Schemes. Unfortunately, the stochastic kernel like (2) is unknown. We supposed that the multifunction Q_i are $\mathcal{B}_{XY} \cdot \mathcal{F}_i|\mathcal{B}_{XY}$ -measurable, where the flow is given. Consider the sets $S(Q_i)$ of selectors for inclusions (1). In order to exclude the case $S(Q_i) = \emptyset$, the multifunctions have to satisfy some conditions (see [3]). For each selector $h_i(z, \omega)$ we construct the conditional measures $r_i(\cdot|z_0, y^i)$, $i \geq 1$, according to (3). Therefore, we can get the set $\mathbb{R}_1 = \bigcup_{h_1 \in S(Q_1)} \{r_1(\cdot|z_0, y^1)\}$ of conditional distributions on the first stage. Let the set $\mathbb{R}_{i-1}$ of distributions be already constructed. Then on the stage i we may consider equality (3) for all $r_{i-1} \in \mathbb{R}_{i-1}$, $h_i \in S(Q_i)$. So, we obtain the set

$$\mathbb{R}_i = \bigcup_{h_i \in S(Q_i), r_{i-1} \in \mathbb{R}_{i-1}} \{r_i(\cdot|x_0, y^i)\} \quad (4)$$

and use it for the calculation of the set of conditional expectations or dispersions for any real measurable function of x_N .

Similarly, in the case $X = R^n$, $Y = R^m$, we may have the set H_i of probability densities $h_i(x, y|z_{i-1})$ on the stage i . Then one can recursively obtain the set $\hat{H}_i$ of conditional densities $\hat{h}_i(x|x_0, y^i)$.

Each selector $h_i(z, \omega)$ uniquely generates the measurable stochastic kernel $q_i(\cdot|z)$ on XY given z . Denote by $P_{i,z}$ the set of all such kernels. Let $P_{i,z}(Z) = \{q_i(Z|z) : q_i \in P_{i,z}\}$ and $\mathbb{P}(XY|z)$ be the set of all $\mathcal{B}_{XY}|\mathcal{B}_{\mathbb{P}(XY)}$ -measurable stochastic kernels $q(\cdot|z)$ on XY given z . We introduce the set $\Delta_{i,z} = \{q \in \mathbb{P}(XY|z) : q(Z|z) \in P_{i,z}(Z) \forall Z \in \mathcal{B}_{XY}\}$. It is clear that $P_{i,z} \subset \Delta_{i,z}$. To define one more set, introduce upper probability $P_i^*(Z|z) = P(\{\omega \in \Omega : Q_i(z, \omega) \cap Z \neq \emptyset\}) \forall Z \in \mathcal{B}_{XY}$. Then define the set $M_{i,z} = \{q \in \mathbb{P}(XY|z) : q(Z|z) \leq P_i^*(Z|z) \forall Z \in \mathcal{B}_{XY}\}$. We have the relation between defined sets:

$$P_{i,z} \subset \Delta_{i,z} \subset M_{i,z}. \quad (5)$$

Thus, we can build recursive procedures like (4) using stochastic kernels $q_i(\cdot|z) \in \Delta_{i,z}$ or $q_i(\cdot|z) \in M_{i,z}$. We call this sets $\mathbb{D}_i$ and $\mathbb{M}_i$, respectively. According to (5) we get:

$$\mathbb{R}_i \subset \mathbb{D}_i \subset \mathbb{M}_i \quad \forall i \in 1 : N. \quad (6)$$

2. Problem Formulation and its Partial Solution

The problem is: to give some conditions for coinciding the sets in (6). In the general case, these sets may be considerably different. Examples may be built on the base of example 3.1 in [4]. Nevertheless, some cases are described in literature when the sets like in (5), (6) are identical. But it is done only for finite sets or for 1-dimensional intervals like $[A(\omega), B(\omega)]$ (see [4]). As in the Euclidean case we have $n + m \geq 2$, then we are forced to consider at least the sets of the form $Q_i(z, \omega) = [A(\omega), B(\omega)][C(\omega), D(\omega)]$, i.e. products of two closed intervals. It is supposed that $A(\omega) \leq B(\omega)$ and $C(\omega) \leq D(\omega)$. As far as I know, the problem of coincidence of sets in (5), (6) in that case still is open.

In this talk, we prove theorems for finite sets X, Y and for the case $XY = R^2$ with special selectors and multifunctions.

Theorem 1. *Let the probability space be non-atomic, X and Y be finite. Then the sets in (5), (6) coincides.*

Consider a norm $\| [x, y] \| = \max\{|x|, |y|\}$ in R^2 .

Theorem 2. *Let $XY = R^2$ and multifunctions have a special form $Q_i(z, \omega) = [x_i(\omega), x_i(\omega)] + \{z : |z| < r_i(\omega)\}$ where x_i and r_i are simple functions. Moreover, instead $\mathbb{P}(XY)$, consider the set $\mathbb{P}^*(XY)$ with cumulative distribution functions $F(x, y)$ such that the inequality $F(x, y) \leq F(u, v)$ implies $x \leq u$ and $y \leq v$. Then for non-atomic probability space, the sets in (5), (6) coincides in the class $\mathbb{P}^*(XY)$.*

Theorem 2 may be distributed to the case $n = m > 1$. Note that other statistically uncertain filtering schemes are considered in [1].

REFERENCES

1. *Ananyev B.I.*, Some Aspects of Statistically Uncertain Minimax Estimation // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 195–200.
2. *Bertsecas D.P., Shreve S.E.*, Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. Academic Press, Inc. 1978.
3. *Himmelberg C.*, Measurable Relations // Fund. Math. 1974. Vol. 87. P. 53–72.
4. *Miranda E., Couso I., Gil P.*, Random Intervals as a Model for Imprecise Information // Fuzzy Sets and Systems. 2005. Vol. 154. P. 386–412.

UDC 517.9

Second Order Necessary Optimality Conditions for Abnormal Problems and Their Applications

A.V. Arutyunov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,
Russia, 117997, Moscow, Profsoyuznaya st., 65;

Institute for Information Transmission Problems of RAS,
Russia, 127051, Moscow, Bol'shoi Karetnyi per., 19;

arutyunov@cs.msu.ru

Abstract: In this paper we discuss necessary optimality conditions applicable to constrained optimization problems degenerating at the point of minimum. Some applications of this results to inverse function existence problem are studied.

Keywords: constrained optimization, optimality conditions, abnormal problem.

1. Some examples of abnormal problems of analysis

We will explain what abnormality is about on the example of two related problems (for more details see [1]). Let us start from the optimization theory. Let X be a linear space. Consider the minimization problem with constraints:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = 0. \quad (1)$$

Here $F : X \rightarrow Y = \mathbb{R}^k$ is a given map, and the minimum of a given function $f_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ is sought on the admissible set $M := \{x \in X : F(x) = 0\}$.

For simplicity, assume that X is a Banach space (we may even assume that $X = \mathbb{R}^n$), and f_0, F are twice continuously differentiable in some neighborhood of the point x_0 , which we assume to be a local minimizer for the problem (1). Then, in the point x_0 , the Lagrange multipliers rule holds true. In order to formulate it let us introduce the Lagrange function

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda) &= \lambda^0 f_0(x) + \langle y^*, F(x) \rangle; \\ \lambda &= (\lambda^0, y^*), \quad \lambda^0 \in \mathbb{R}^1, \quad y^* \in Y, \end{aligned}$$

where $(k+1)$ -dimensional vector $\lambda = (\lambda^0, y^*)$ and its components are called Lagrange multipliers.

Lagrange Principle. *Let x_0 be a local minimizer in the problem (1). Then there exists a Lagrange multiplier λ such that*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0, \quad \lambda^0 \geq 0, \quad |\lambda| = 1. \quad (2)$$

Lagrange Principle is well known as it provides first order necessary optimality conditions. The set of Lagrange multipliers, satisfying (2), we denote by $\Lambda(x_0)$.

Consider the two following cases. First, let the point x_0 be normal, that is $\text{im} F'(x_0) = Y$. In the Russian literature this condition is also known as “Lyusternik’s condition”. In addition, along with the term “normal” point it is also often used the term “non-degenerate” or “regular” point.

So, if the point of minimum x_0 is normal, then in view of (2) $\lambda^0 > 0$ and, hence, taking into account the positive homogeneity of the relations (2) in the variable λ , without loss of generality we can assume that $\lambda^0 = 1$. At the same time there exists unique Lagrange multiplier $\lambda =$

$(1, y^*)$. Besides, when the minimizer x_0 is normal, classic second order necessary conditions hold:

$$\exists \lambda \in \Lambda(x_0) : \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0 \quad \forall h \in X : F'(x_0)h = 0. \quad (3)$$

Consider the second case: let the point x_0 be abnormal, i.e.

$$\text{im} F'(x_0) \neq Y.$$

Then, Lagrange principle (2) is true with $\lambda^0 = 0$ and arbitrary $y^* \neq 0$ from the kernel of the conjugate operator $\ker F'(x_0)^*$ (which is not trivial due to $\text{im} F'(x_0) \neq Y$.) Thus, in any abnormal point, Lagrange principle holds automatically regardless of the functional f_0 being minimized, and so this principle appears only a paraphrase of abnormality definition. Therefore Lagrange principle is useless if we try to investigate whether an abnormal point is local minimizer or not. As for the classical second order necessary conditions (3), at abnormal points of extremum they can be violated.

The following 2-dimensional example clearly shows what has been said:

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^2, \quad f_0(x) = -|x|^2 \rightarrow \min, \\ f_1(x) &= x_1^2 - x_2^2 = 0, \\ f_2(x) &= x_1 x_2 = 0, \end{aligned}$$

where $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. In this problem, there is a unique point $x_0 = 0$ satisfying constraints, which naturally appears to be local minimizer here. However, this is easy to see, that the conditions (3) do not hold. Thus, in abnormal points, Lagrange principle is not meaningful, whereas the classic second order necessary conditions are not applicable (they might not be true at such points).

So the following problem arises: what are the meaningful necessary conditions for minimum in the problem (1) without a priori assumptions of normality of the point being under investigation?

We now turn to the related problem. Let the mapping $F : X \rightarrow Y$ be continuously differentiable in a neighborhood of the point $x_0 \in X$ and $y_0 = F(x_0)$. The question is whether there exists a neighborhood V of the point y_0 , such that for all $y \in V$ the equation

$$F(x) = y \quad (4)$$

has such a solution $x(y)$ that $x(y_0) = x_0$ and the map $x(\cdot)$ is continuous at y_0 , or even more, continuous throughout the neighborhood V ?

If the point x_0 is normal, then the classical theorem on the inverse function gives a positive answer to this question, and the mapping $x(\cdot)$ can be chosen continuously differentiable. If the point x_0 is abnormal, it is no longer the case. For example, the scalar equation

$$x_1^2 + x_2^2 = y,$$

considered in a neighborhood of $x = 0$, for $y < 0$ has no solutions, but the equation

$$x_1^2 - x_2^2 = y$$

has infinitely many continuous solutions for which $x(0) = 0$, although all of them are not differentiable at the origin. This raises the question of obtaining conditions, which are weaker than normality, and which would guarantee the existence of the solution $x(\cdot)$ to the equation (4) with the desired properties.

2. Second order necessary optimality conditions

Consider the extremum problem with equality and inequality constraints

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad f(x) = 0. \quad (5)$$

For non-negative integers s we introduce the sets (it may so happen that some of them will be empty) $\Lambda_s(x_0)$, consisting of those Lagrange multipliers $\lambda \in \Lambda(x_0)$, for which there exists (depending on λ) a subspace $\Pi \subseteq X$, such that

$$\text{codim } \Pi \leq s; \quad \Pi \subseteq \ker F'(x_0);$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[x, x]^2 \geq 0 \quad \forall x \in \Pi, \quad f'_0(x_0) \in \Pi^\perp.$$

Here, the map $F = (f_1, \dots, f_l, f)$ acts from X into $\mathbb{R}^m$, and $m = l + k$.

Consider the cone

$$\mathcal{K}(x_0) = \{h \in X : \langle f'_i(x_0), h \rangle \leq 0 \ \forall i, \ f'(x_0)h = 0\},$$

called “cone of critical directions”.

Theorem 1 (second order necessary conditions). *Let the point x_0 be a local minimizer in the problem (5). Then, as $m = k + l$ the set $\Lambda_m = \Lambda_m(x_0)$ is not empty and, moreover,*

$$\max_{\lambda \in \Lambda_m} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{K}(x_0).$$

For the case of abnormal minimizers x_0 Theorem 1 can be slightly strengthened.

Theorem 2. *Let the point x_0 be abnormal local minimizer in the problem (5). Then, as $m = k + l$ the set $\Lambda_{m-1} = \Lambda_{m-1}(x_0)$ is not empty and, moreover,*

$$\max_{\lambda \in \Lambda_{m-1}} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)[h, h] \geq 0 \quad \forall h \in \mathcal{K}(x_0).$$

The result of this theorem was generalized to the problem

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad x \in C, \quad F(x) \in D,$$

where $F : X \rightarrow Y = \mathbb{R}^m$. Here C, D defined closed subsets of X, Y (but not necessarily convex!). These results were also generalized to other types of problems, including a broad class of optimal control problems with terminal, mixed constraints, the problems with impulsive controls, the control problems with delay, etc.

Denote by $\mathcal{F}_2(x_0)$ the cone consisting of all $y \in Y$, $y \neq 0$, such that $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)^* y = 0$ and there exist a subspace of X

$$\Pi \subseteq \text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0),$$

such that

$$\text{codim } \Pi \leq k; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle y, F(x_0) \rangle [\xi, \xi] \geq 0 \quad \forall \xi \in \Pi.$$

Note that the cone $\mathcal{F}_2(x_0)$ might be empty. It, for example, certainly empty when the point x_0 is normal, since in this case $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)^* y \neq 0 \quad \forall y \neq 0$. Another observation: if we add $y = 0$ to $\mathcal{F}_2(x_0)$, then this cone becomes closed, but not necessarily convex.

Definition 1. Mapping $F : X \rightarrow Y$ is said to be 2-normal in the point x_0 , provided the cone $\text{conv}\mathcal{F}_2(x_0)$ is acute, i.e. it does not contain any non-trivial subspaces (the case $\mathcal{F}_2(x_0) = \emptyset$ is not excluded since empty cone is acute by definition).

When $X = \mathbb{R}^n$ and $n \gg m$, the set of 2-normal mappings is dense in $C_s^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Let us, for simplicity, assume that X is a Hilbert space.

Theorem 3. Assume the map F be 2-normal at x_0 and the second order necessary conditions stated in Theorem 1 hold. Then there exists a vector $y \in \mathbb{R}^m$ such that for any $\varepsilon > 0$, in the perturbed problem:

$$\begin{aligned} f_0(x) + \varepsilon \|x - x_0\|^2 &\rightarrow \min, \\ f_i(x) + \varepsilon y_i \|x - x_0\|^2 &\leq 0, \quad i = \overline{1, l}, \\ f_i(x) + \varepsilon y_i \|x - x_0\|^2 &= 0, \quad i = \overline{l+1, m}, \end{aligned}$$

the point x_0 is a strict local minimizer.

3. Applications. Inverse function theorem

We now turn to the inverse function theorem. Suppose again that we are given a mapping $F : X \rightarrow Y = \mathbb{R}^k$, and $F(x_0) = y_0$. For all y of neighborhood of y_0 we consider the nonlinear equation

$$F(x) = y.$$

The question is, when this equation for all y close to y_0 has a solution?

If the point x_0 is normal, then the answer is the classical inverse function theorem. But here, let us formulate an inverse function theorem which is true even without a priori assumptions of normality.

$$\text{Let } Y_1 = \text{Im } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0), Y_2 = \left(\text{Im } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0) \right)^\perp.$$

Denote by $P_1 : Y \rightarrow Y_1$, $P_2 : Y \rightarrow Y_2$ projection operators of Y onto subspaces Y_1 and Y_2 respectively.

Definition 2. Say that the mapping $F : X \rightarrow Y$ satisfies solvability condition at point x_0 provided there exist positive constants κ_1, κ_2 , such that $\forall y : |y - y_0| < \kappa_1$

$$\exists x = x(y) : F(x(y)) = y;$$

$$\|x(y) - x_0\| \leq \kappa_2 \left(|P_1(F(x_0) - y)| + |P_2(F(x_0) - y)|^{1/2} \right).$$

Theorem 4 (inverse function theorem). *Assume the map F be 2-normal in the point x_0 . Then, in order for F to satisfy solvability condition at x_0 , it is necessary and sufficient that*

$$\exists h \in X : \frac{\partial F}{\partial x}(x_0)h = 0; \quad \left\langle y, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0)[h, h] \right\rangle < 0 \quad \forall y \in \mathcal{F}_2(x_0).$$

The proof is based on the necessary conditions of extremum presented above.

If the point x_0 is normal, then this theorem becomes classic inverse function theorem.

Later, this result was extended up to the implicit function theorem, to the inverse function theorem on the cone, to nonlinear systems containing inequalities, etc. All the formulated results were published in [1]—[7].

It was also applied to the study of controllability in degenerate dynamical systems.

With the help of these theorems on inverse and implicit functions there were obtained new theorems on the existence of bifurcation points for nonlinear systems, we constructed a new theory of sensitivity for extremum problems without a priori assumptions of normality.

The investigation is performed in the Peoples' Friendship University of Russia under the financial support of Russian Science Foundation (project No. 17-11-01168).

REFERENCES

1. *Arutyunov A. V.* Smooth abnormal problems in extremum theory and analysis // Russian Math. Surveys. 2012. Vol. 67, no. 3. P. 403–457.
2. *Arutyunov A. V.* Second-order conditions in extremal problems. The abnormal points // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 350, no. 11, P. 4341–4365.
3. *Arutyunov A. V.* Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems. Ser. Mathematics and Its Application. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 2000. 300 p.
4. *Arutyunov A. V.* Necessary extremum conditions and an inverse function theorem without a priori normality assumptions // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Vol. 236. P. 25–36.
5. *Arutyunov A. V.* Perturbations of extremum problems with constraints, and necessary conditions of optimality // Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal., Moscow: VINITI, 1989. Vol. 27. P. 147–235.
6. *Arutyunov A. V., Karamzin D. Yu.* Necessary optimality conditions for abnormal problems with geometric constraint // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 2007. Vol. 47, no. 3. P. 364–375.
7. *Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F.* Necessary optimality conditions for problems with equality and inequality constraints: the abnormal case // J. Optim. Theory Appl. 2009. Vol. 140, no. 1. P. 391–408.

Optimal Control in the Presence of Risk Factors

Sergey M. Aseev

Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia, aseev@mi-ras.ru

Abstract: We consider an optimal control problem for autonomous differential inclusion with free terminal time and a mixed functional which contains the characteristic function of a given open set $M \subset \mathbb{R}^n$ ("risk zone") in the integral term. Necessary conditions for optimality are developed in the form of Clarke's Hamiltonian inclusion. The result involves a nonstandard stationarity condition for the Hamiltonian. As in the case of problems with state constraints, the obtained necessary optimality conditions may degenerate. Conditions guaranteeing their nondegeneracy and pointwise nontriviality are presented.

Keywords: optimal control, risk zone, state constraints, necessary optimality conditions, nondegeneracy conditions.

Introduction

In many applied problems of optimal control there is a set M ("risk zone") in the state space $\mathbb{R}^n$ which is admissible but unfavorable due to reasons of safety or instability of the system. The presence of such unfavorable set M is usually modeled via introducing an additional state constraint $Z = \mathbb{R}^n \setminus M$ ("safety zone") in the problem. Substantially, the state constraint implies the ban on the presence of admissible trajectories in the risk zone M . In our set up of the problem the presence of admissible trajectories in the set M is not prohibited but penalized with extra costs. This fact results in a discontinuity in the state variable in the integral term of the functional.

In this paper the necessary optimality conditions are developed for the corresponding optimal control problem in the case when system's dynamics is governed by an autonomous Lipschitz continuous differential inclusion and the risk zone M is an open set. The obtained result involves an additional nonstandard stationarity condition for the Hamiltonian. Similarly to the case of optimal control problems with state constraints, the stationarity condition allows us to exclude the degeneration of developed necessary optimality conditions under additional controllability type assumptions.

1. Main result

Consider the following optimal control problem (P):

$$J(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) + \int_0^T \lambda(x(t)) \delta_M(x(t)) dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad (2)$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \quad (3)$$

Here $x \in \mathbb{R}^n$ is a state vector, M_0 and M_1 are nonempty closed sets in $\mathbb{R}^n$, $F: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ is a locally Lipschitz multivalued mapping with nonempty convex compact values, $\varphi: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ is a locally Lipschitz function, $\lambda: \mathbb{R}^n \mapsto (0, \infty)$ is a continuously differentiable positive function, and $\delta_M(\cdot)$ is the characteristic function of a given open set M in $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

We assume that the set M and its complement $G = \mathbb{R}^n \setminus M$ are nonempty, and for any $x \in G$ the Clarke tangent cone $T_G(x)$ (see [3]) has nonempty interior. The terminal time $T > 0$ is assumed to be free. Denote by $H(F(x), \psi) = \max_{f \in F(x)} \langle f, \psi \rangle$ the value of the Hamiltonian of differential inclusion (2) and by $\partial H(F(x), \psi)$ the Clarke subdifferential of $H(F(\cdot), \cdot)$ at a point $(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Also, denote by $\hat{\partial}\phi(T, x_1, x_2)$ the generalized gradient of function $\phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ at a point $(T, x_1, x_2) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, and by $N_A(a)$ and $\hat{N}_A(a)$ the Clarke normal cone and the cone of generalized normals of a closed set $A \subset \mathbb{R}^n$ at $a \in A$.

We consider all absolutely continuous solutions $x(\cdot)$ of differential inclusion (2) that are defined on various time intervals $[0, T]$, $T > 0$, and satisfy endpoint constraints (3) as admissible trajectories in problem (P). An admissible trajectory $x_*(\cdot)$ defined on $[0, T_*]$, $T_* > 0$, is called optimal if functional (1) takes the minimal possible value at $(T_*, x_*(\cdot))$.

The following theorem is our main result (see [2] for details).

Theorem 1. *Let $x_*(\cdot)$ be an optimal admissible trajectory in problem (P), and let $T_* > 0$ be the corresponding optimal terminal time. Then there exist a constant $\psi^0 \geq 0$, an absolutely continuous function $\psi: [0, T_*] \mapsto \mathbb{R}^n$, and a bounded regular Borel vector measure η on $[0, T_*]$ such that the following conditions hold:*

- 1) the measure η is supported on the set $\mathfrak{M} = \{t \in [0, T_*] : x_*(t) \in \partial G\}$ and is nonpositive on the set of continuous functions $y: \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$ with values $y(t) \in T_G(x_*(t))$, $t \in \mathfrak{M}$, i.e.

$$\int_{\mathfrak{M}} y(t) d\eta \leq 0;$$

- 2) for a.a. $t \in [0, T_*]$ the Hamiltonian inclusion holds:

$$\begin{aligned} (-\dot{\psi}(t), \dot{x}_*(t)) \in \partial H\left(x_*(t), \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta \right. \\ \left. + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds\right); \end{aligned}$$

- 3) for $t = T_*$ and any $t \in [0, T_*)$ that is a point of right approximate continuity of the function $\delta_M(x_*(\cdot))$ (see [4]) the stationarity condition holds:

$$\begin{aligned} H\left(x_*(t), \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds\right) \\ - \psi^0 \lambda(x_*(t)) \delta_M(x_*(t)) = H(x_*(0), \psi(0)) - \psi^0 \lambda(x_*(0)) \delta_M(x_*(0)); \end{aligned}$$

- 4) the transversality condition holds:

$$\begin{aligned} \left(H(x_*(T_*), \psi(T_*) + \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s)) d\eta \right. \\ \left. + \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds), \psi(0), \right. \\ \left. - \psi(T_*) - \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s)) d\eta - \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \right) \\ \in \psi^0 \hat{\partial} \phi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \{0\} \times \hat{N}_{\widetilde{M}_0}(x_*(0)) \times \hat{N}_{\widetilde{M}_1}(x_*(T_*)). \end{aligned}$$

- 5) the nontriviality condition holds:

$$\psi^0 + \|\psi(0)\| + \|\eta\| \neq 0.$$

Here, the sets $\widetilde{M}_0$ and $\widetilde{M}_1$ are defined by the equalities

$$\widetilde{M}_0 = \begin{cases} M_0, & x_*(0) \in M, \\ M_0 \cap G, & x_*(0) \in G, \end{cases} \quad \text{and} \quad \widetilde{M}_1 = \begin{cases} M_1, & x_*(T_*) \in M, \\ M_1 \cap G, & x_*(T_*) \in G. \end{cases} \quad (4)$$

2. Nondegeneracy and pointwise nontriviality conditions

Similarly to [1], an admissible trajectory $x_*(\cdot)$ is called controllable at the endpoints $x_*(0)$ and $x_*(T_*)$ (with respect to the set G) if

$$H(x_*(0), -g_0) > 0 \quad \text{for any } g_0 \in N_G(x_*(0)) \cap \widehat{N}_{\widetilde{M}_0}(x_*(0)), \quad g_0 \neq 0,$$

and

$$H(x_*(T_*), g_1) > 0 \quad \text{for any } g_1 \in N_G(x_*(T_*)) \cap \widehat{N}_{\widetilde{M}_1}(x_*(T_*)), \quad g_1 \neq 0.$$

Similarly to [1], the proofs of the following two results are based on the use of stationarity condition 3) of Theorem 1.

Theorem 2. *Let an admissible trajectory $x_*(\cdot)$ be controllable at the endpoints $x_*(0)$ and $x_*(T_*)$ and satisfy the assumptions of Theorem 1. Then the following nondegeneracy condition holds:*

$$\begin{aligned} \psi^0 + \text{meas} \left\{ t \in [0, T_*] : \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta \right. \\ \left. + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \neq 0 \right\} > 0. \end{aligned}$$

Theorem 3. *Suppose that an admissible trajectory $x_*(\cdot)$ is controllable at the endpoints $x_*(0)$ and $x_*(T_*)$, and satisfies the assumptions of Theorem 1. Suppose also that*

$$H(x_*(t), (-1)^i g) > 0 \quad \text{for any } g \in N_G(x_*(t)), \quad t \in (0, T_*), \quad i = 1, 2.$$

Then

$$\psi^0 + \left\| \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x} ds \right\| > 0, \quad t \in (0, T_*).$$

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Aseev S.M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 930–952.
2. Aseev S.M. On an optimal control problem with discontinuous integrand // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2018. Vol. 24, no. 1. P. 15–26.
3. Clarke F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: Wiley, 1983. 308 p.

4. *Natanson I.P.* Theory of Functions of a Real Variable. New York: Dover, 2016. 544 p.
5. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., and Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York: Wiley, 1962. 368 p.

UDC 517.977.8

Stochastic Approximate Equilibria of Nonzero-Sum Differential Games

Yu. Averboukh

IMM UB RAS, Yekaterinburg, Russia, averboukh@gmail.com

Abstract: The talk is concerned with the design of the approximate Nash equilibrium for the nonzero-sum differential game. We consider the Nash equilibria in the class of public-signal stochastic strategies with memory. The key idea of the proposed construction is to use solutions of continuous-time stochastic games with the dynamics determined by a generator of the Lévy—Khintchine type. Notice that this type of games includes the stochastic differential games and the continuous time Markov games. To illustrate the general result we show that, given a strong solution of a parabolic system corresponding to the nondegenerate nonzero-sum stochastic differential game, one can construct an approximate equilibrium of the nonzero-sum differential game.

Keywords: nonzero-sum differential games, approximate equilibria, stochastic strategies, system of Hamilton—Jacobi equations.

Introduction

Krasovskii and Kotelnikova in their seminal papers [3], [4] proposed the construction of the stochastic guide for the zero-sum differential game. This allows to design suboptimal strategies of the players based on the solution of the parabolic equation corresponding to the stochastic differential game with the small viscosity term. This result was extended to the case when the motion of guide is determined by a generator of Lévy—Khintchine type [2]. In particular, this provides the Markov approximations of the solutions to the zero-sum differential games.

We apply the methodology of Krasovskii and Kotelnikova to the nonzero-sum differential games. The proposed construction also uses the idea of punishment assuming that the ideal motion is a stochastic process modeled as a public signal.

1. Statement of the problem

We study the nonzero-sum differential game with the dynamics given by

$$\dot{x} = f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

Here u (respectively, v) denotes the control of the first (respectively, second) player. We assume that the purpose of the i -th player is to maximize the terminal payoff $\gamma_i(x(T))$. Below we assume that U and V are metric compacts. To simplify notation we will also use the following designation:

$$f(t, x, u, v) \triangleq f_1(t, x, u) + f_2(t, x, v).$$

We assume that the players can observe the history $x(\cdot)$ and a public signal $\omega \in \Omega$. In this case a profile of players' strategies is a 6-tuple $\mathbf{w} = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t \in [t_0, T]}, u_{x(\cdot)}, v_{x(\cdot)}, P_{x(\cdot)})$, where $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}\}_{t \in [t_0, T]})$ is a measurable space with filtration, $u_{x(\cdot)}, v_{x(\cdot)}$ are stochastic process dependent on $x(\cdot)$ taking values in U and V and, for each $x(\cdot)$, $P_{x(\cdot)}$ is a probability on $\mathcal{F}$. Additionally, we impose certain non-anticipation and measurability conditions [1, Definition 2.1]. A pair $(X(\cdot), P)$ is called a motion produced by the profile of strategies $\mathbf{w}$ and the initial position (t_0, x_0) if X is a stochastic process taking values in $\mathbb{R}^d$ and P is a probability on $\mathcal{F}$ such that, for P -a.e. $\omega \in \Omega$,

$$\frac{d}{dt}X(t, \omega) = f_1(t, X(t, \omega), u_{X(\cdot, \omega)}(t, \omega)) + f_2(t, X(t, \omega), v_{X(\cdot, \omega)}(t, \omega))$$

and conditional probability of P for a given motion $x(\cdot)$ is equal to $P_{x(\cdot)}$.

Finally, the profile of strategies $\mathbf{w}^c = (\Omega^c, \mathcal{F}^c, \{\mathcal{F}_t^c\}_{t \in [t_0, T]}, P_{x(\cdot)}^c, u_{x(\cdot)}^c, v_{x(\cdot)}^c)$ is a unilateral deviation by the first (respectively, the second) player from $\mathbf{w}$ if it comprises $\mathbf{w}$, whereas the first (respectively, second) player does not observe an additional signal and play with the same strategy as in $\mathbf{w}$ (see for details [1, Definition 2.2]).

For a given initial position (t_0, x_0) and a profile of public-signal correlated strategies $\mathbf{w}$, we can introduce the upper and lower player's outcomes by the following rules:

$$J_i^+(t_0, x_0, \mathbf{w}) \triangleq \sup\{\mathbb{E}\gamma_i(X(T)) : (X(\cdot), P) \text{ generated by } \mathbf{w} \text{ and } (t_0, x_0)\},$$

$$J_i^-(t_0, x_0, \mathbf{w}) \triangleq \inf\{\mathbb{E}\gamma_i(X(T)) : (X(\cdot), P) \text{ generated by } \mathbf{w} \text{ and } (t_0, x_0)\}.$$

Here $\mathbb{E}$ denotes the expectation according to the probability P .

Definition 1. We say that a profile of public-signal correlated strategies $\mathfrak{w}^*$ is a public-signal correlated ε -equilibrium at the position $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ if, for any profile of strategies $\mathfrak{w}^i$ that is an unilateral deviation from $\mathfrak{w}^*$ by the player i , the following inequality holds true:

$$J_i^+(t_0, x_0, \mathfrak{w}^i) \leq J_i^-(t_0, x_0, \mathfrak{w}^*) + \varepsilon.$$

To construct a public-signal correlated ε -equilibrium we use a solution of an auxiliary stochastic game with a dynamics determined by a generator of the Lévy—Khintchine type $\Lambda_t[u, v]$ that is an operator from the set C^2 function with at most quadratic growth to $C(\mathbb{R}^d)$ defined by the following rule for each $t \in [0, T]$, $u \in U$, $v \in V$:

$$\begin{aligned} (\Lambda_t[u, v]\phi)(x) &\triangleq \frac{1}{2} \langle G(t, x, u, v) \nabla, \nabla \rangle \phi(x) + \langle b(t, x, u, v), \nabla \rangle \phi(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} [\phi(x + y) - \phi(x) - \langle y, \nabla \phi(x) \rangle \mathbf{1}_{B_1}(y)] \nu(t, x, u, v, dy). \end{aligned} \quad (1)$$

Here B_1 stands for the ball of radius 1 centered at the origin; for each $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$, $G(t, x, u, v)$ is a nonnegative symmetric $d \times d$ -matrix, $b(t, x, u, v)$ is a d -dimensional vector, $\nu(t, x, u, v, \cdot)$ is a measure on $\mathbb{R}^d$ such that $\nu(t, x, u, v, \{0\}) = 0$.

Notice that for the given generator the corresponding motion $X(\cdot)$ is produced by the following rule: for every C^2 -function of at most quadratic growth the value

$$\phi(X(r)) - \int_s^r \Lambda_t[u, v]\phi(X(t))dt$$

is a martingale. We assume that for the auxiliary game the i -th player tries to maximize

$$\mathbb{E} \left[\gamma_i(X(T)) + \int_{t_0}^T h_i(t, X(t), u(t), v(t)) dt \right].$$

We say that the pair of functions $(c_1(t, x), c_2(t, x))$ satisfies condition $(\mathcal{C})$ if the values $c_i(r, X(r)) + \int_s^r h_i(t, X(t), u(t), v(t)) dt$ can be maintained along some motion produced by the generator Λ and relaxed controls of the players, whereas, for any constant control of the first (respectively, second) player other player can punish her partner (see for details [1, Definition 3.1]).

Theorem 1. Assume that, for any $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$, $|\Sigma(t, x, u, v)| \leq \delta^2$, $\|f(t, x, u, v) - g(t, x, u, v)\|^2 \leq \delta^2$, $|h_i(t, x, u, v)| \leq \delta$, where $\Sigma(t, x, u, v) \triangleq \text{tr} G(t, x, u, v) + \int_{\mathbb{R}^d} \|y\|^2 \nu(t, x, u, v, dy)$, $g(t, x, u, v) \triangleq b(t, x, u, v) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_1} y \nu(t, x, u, v, dy)$. Then for any pair of function (c_1, c_2) satisfying condition (C) and the boundary condition $c_i(T, x) = \gamma_i(x)$ and any $\varepsilon > C\delta$, there exists a profile of public-signal correlates strategies $\mathbf{w}^*$ that is ε -equilibrium at (t_0, x_0) . The constant C is determined by the original differential game. Moreover, if X^* and P^* are generated by $\mathbf{w}^*$ and (t_0, x_0) , $\mathbb{E}^*$ denotes the expectation according to P^* , then

$$|\mathbb{E}^* \gamma_i(X^*(T)) - c_i(t_0, x_0)| \leq \varepsilon.$$

When δ vanishes, any pointwise limit lies in the convex hull of the values according to the usual punishment approach.

Now assume that $\nu = 0$, G is positively defined and do not depend on controls and one can find measurable functions $u^N(t, x, p_1, p_2)$, $v^N(t, x, p_1, p_2)$ such that $u^N(t, x, p_1, p_2)$ maximizes the function $u \mapsto \mathcal{H}_1(t, x, p_1, u, v^N(t, x, p_1, p_2))$, whereas $v^N(t, x, p_1, p_2)$ maximizes the function $v \mapsto \mathcal{H}_2(t, x, p_2, u^N(t, x, p_1, p_2), v)$. Here $\mathcal{H}_i(t, x, p, u, v) \triangleq \langle p, b(t, x, u, v) \rangle + h_i(t, x, u, v)$. In this case the strong solution of the system

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathcal{H}_i(t, x, \nabla c_i, u^N(t, x, \nabla c_1, \nabla c_2), v^N(t, x, \nabla c_1, \nabla c_2)) \\ + \langle G(t, x) \nabla, \nabla \rangle c_i(t, x) = 0, \quad c_i(T, x) = g_i(x) \end{aligned}$$

satisfies condition (C). Thus, it provides the approximate Nash equilibrium for the original nonzero-sum differential game.

The work is supported by the Russian Science Foundation under project 17-11-01093.

REFERENCES

1. Averboukh Yu. Approximate public-signal correlated equilibria for nonzero-sum differential games // SIAM J. Control Optim. 2019. Vol. 57, no. 1. P. 743–772.
2. Averboukh Yu. Approximate solutions of continuous-time stochastic games // SIAM J. Control Optim. 2016. Vol. 54, no. 5. P. 2629–2649.
3. Krasovskii N.N., Kotelnikova A.N. An approach-evasion differential game: stochastic guide // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 269, suppl. 1. P. S191–S213.
4. Krasovskii N.N., Kotelnikova A.N. Stochastic control in a determinate differential pursuit-evasion game // Autom. Remote Control. 2011. Vol. 72, no. 2. P. 305–322.

Stability and Robustness Problems in the Theory of Transition to Turbulence

Bassam Bamieh

Dept. of Mechanical Engineering, University of California,
Santa Barbara, USA, bamieh@ucsb.edu

Abstract: The mathematical analysis of transition to turbulence in wall-bounded shear flows has been a long standing problem in hydrodynamic stability since the early twentieth century. The problem is central to understanding skin-friction drag, and its reduction and control by both active and passive mechanisms. While a satisfactory mathematical theory of transition in these flows remains incomplete, substantial progress has been made in the past two decades. One key to this progress is to view transition in shear flows not only as a stability problem, but also as a problem of robust stability. I will describe these recent developments which have surprising connections with control theory, and in particular with robust stability problems. The implications of this new theory to control of turbulent skin friction drag will also be outlined.

Keywords: transition to turbulence, wall-bounded turbulence, robust stability, robust control, disturbance attenuation, system norms, spatio-temporal systems, distributed parameter systems.

REFERENCES

1. *Bamieh B., Dahleh M.* Energy amplification in channel flows with stochastic excitation // *Phys. Fluids*. 2001. Vol. 13, no. 11. P. 3258. DOI: 10.1063/1.1398044
2. *Jovanovic M., Bamieh B.* Componentwise energy amplification in channel flows // *J. Fluid Mech.* 2005. Vol. 534. P. 145–183.
3. *Ran W., Zare A., Hack M., and Jovanović M.R.* Stochastic Receptivity Analysis of Boundary Layer Flow. 2018. arXiv: 1807.07759 [physics.flu-dyn]

On a Differential Game in a System Described by a Functional Differential Equation

A.A. Chikrii¹, A.G. Rutkas², L.A. Vlasenko³

¹ Glushkov Institute of Cybernetics, Kiev, Ukraine, chik@insyg.kiev.ua

² Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov, Ukraine,
anatoly@rutrus.com

³ Kharkov National University of Radio Electronics, Kharkov, Ukraine,
lara@rutrus.com

Abstract: We study a differential game of approach in a system whose dynamics is described by a functional differential equation in a Hilbert space.

The main assumption on the equation is that the operator multiplying the system state at the current time is the generator of a strongly continuous semigroup of bounded linear operators. Weak solutions of the equation are represented by the variation of constant formula. To obtain solvability conditions for the approach of the system state to a cylindrical terminal set, we use the technique of set-valued mappings and their selections and also constraints on support functionals of sets defined by the behaviours of pursuer and evader. The paper contains an example to illustrate the differential game in a system described by a partial functional differential equation with time delay. In particular, we investigate the heat equation with heat loss and with controlled distributed heat source and leak.

Keywords: differential game, functional differential equation, generator of strongly continuous semigroup, weak solution, variation of constant formula, support functional, set-valued mapping, partial functional differential equation with time delay.

We study a differential game between a pursuer and an evader in a dynamical system with the following linear functional differential equation in a real separable Hilbert space Y

$$y'(t) = Ay(t) + F(y_t) + u(t) - v(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

As customary in the theory of functional differential equations, the symbol y_t denotes the function $y_t(\tau) = y(t + \tau)$, $-\omega \leq \tau \leq 0$ ($\omega > 0$), belonging to a class $\mathfrak{B}(-\omega, 0; Y)$ of Y -valued functions of the argument $\tau \in [-\omega, 0]$. A.D. Myshkis drew our attention to the fact that for the first time similar classes of functions were introduced by N.N. Krasovskii in studying time delay equations in a general functional differential form [3, 4]. He considered continuous or piecewise continuous functions as the class $\mathfrak{B}(-\omega, 0; \mathbb{R}^n)$. With respect to equation (1), we assume that a closed linear operator A in Y generates a strongly continuous semigroup of bounded linear operators; F is a mapping from $\mathfrak{B}(-\omega, 0; Y)$ into Y ; controls $u(t)$ and $v(t)$ of the pursuer and evader are measurable vector functions in control domains U and V , which are closed convex bounded sets in the space Y . We shall define the operator F later. The initial conditions for equation (1) are the following

$$y(t) = g(t), \quad \text{a.e. } t \in [-\omega, 0], \quad y(+0) = y_0, \quad (2)$$

where $g(t) \in L_2(-\omega, 0; Y)$. Solutions are understood in the weak sense, but not in the weakened sense as in [6]. *The goal of the game in system (1), (2) is to bring the state $y(t)$ to the cylindrical terminal set $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \oplus \mathfrak{M}_1$ at a time T_0 ($\leq T$) in the class of admissible controls of*

the pursuer for any admissible control of the evader. Here $\mathfrak{M}_0$ is a closed linear subspace in Y and $\mathfrak{M}_1$ is a convex closed set from the orthogonal complement $\mathfrak{M}_0^\perp$. Let Π be the orthogonal projector in Y to $\mathfrak{M}_0^\perp$, U_0 and V_0 denote the sets of admissible controls of the pursuer and evader.

Throughout the paper we assume that the mapping F in (1) is defined by the Stieltjes measure $\eta(\tau)$, $\tau \in [-\omega, 0]$:

$$F(\varphi) = \int_{-\omega}^0 d\eta(\tau)\varphi(\tau), \quad \eta(\tau) = -\sum_{r=1}^n \chi_{(-\infty, -\omega_r]}(\tau)A_r - \int_{\tau}^0 B(s)ds,$$

where $0 < \omega_1 < \dots < \omega_n = \omega$ are delays, $\chi_{(-\infty, -\omega_r]}(\tau)$ is the characteristic function of the semi-infinite interval $(-\infty, -\omega_r]$, $A_r \in \mathfrak{L}(Y)$ (the space of bounded linear operators in Y), $B(s) \in L_2(-\omega, 0; \mathfrak{L}(Y))$. Then the delay term $F(y_t)$ in (1) is written by

$$F(y_t) = \int_{-\omega}^0 d\eta(\tau)y_t(\tau) = \sum_{r=1}^n A_r y(t - \omega_r) + \int_{-\omega}^0 B(\tau)y(t + \tau)d\tau. \quad (3)$$

According to Corollary 2.1 from [5], there exists a unique solution of the initial value problem (1)–(3) given by the variation of constant formula

$$y(t) = W(t)y_0 + \int_{-\omega}^0 G_t(\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^t W(t-s)[u(s) - v(s)]ds, \quad (4)$$

where $W(t)$, $t \in \mathbb{R}$, and $G_t(\tau)$, $t \in [0, T]$, $\tau \in [-\omega, 0]$, are operator functions with values in $\mathfrak{L}(Y)$.

Using the technique of set-valued mappings and their selections, we derive sufficient conditions for the game termination in a time $T_0 (\leq T)$. Consider the set-valued mappings

$$Q(t, s, v) = \Pi W(t-s)[U-v], \quad Q_0(t, s) = \bigcap_{v \in V} Q(t, s, v), \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

We suppose that $Q_0(t, s)$ takes nonempty values and $\gamma(t, s)$ is its measurable in $s \in [0, t]$ selector. Introduce the vector functions

$$\zeta(t) = \Pi W(t)y_0 + \int_{-\omega}^0 \Pi G_t(\tau)g(\tau)d\tau, \quad \zeta_\gamma(t) = \zeta(t) + \int_0^t \gamma(t, s)ds,$$

and the support functional $\alpha(t, s, v)$ of the set-valued mapping

$$\Lambda(t, s, v) = \{\tilde{\alpha} \geq 0 : [Q(t, s, v) - \gamma(t, s)] \cap \tilde{\alpha}[\mathfrak{M}_1 - \zeta_\gamma(t)] \neq \emptyset\}$$

in the direction $+1$. This functional is the resolving function in finite dimensional case [1, 2] or the resolving functional in infinite dimensional case [8]. Put

$$\Upsilon = \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2, \quad \Upsilon_1 = \{t \in [0, T] : \zeta_\gamma(t) \in \mathfrak{M}_1\},$$

$$\Upsilon_2 = \{t \in [0, T] : \zeta_\gamma(t) \notin \mathfrak{M}_1 \wedge \inf_{v \in V_0} \int_0^t \alpha(t, s, v(s)) ds \geq 1\}.$$

If the set Υ is not empty, then the state of system (1)–(3) can be brought to the terminal set at any time $T_0 \in \Upsilon$.

As in Theorem 1 from [7], we can also obtain solvability conditions of the game problem in system (1)–(3), using constraints on the support functionals φ_U and φ_V of sets Ω_U and Ω_V defined by the behaviours of pursuer and evader. Let $\mathfrak{M}_1$ be the d -neighborhood of zero in $\mathfrak{M}_0^\perp$. Put

$$\Omega_U = \Phi U_0, \quad \Omega_V = -\Phi V_0, \quad \Phi z = \Pi \int_0^{T_0} W(T_0 - s) z(s) ds.$$

In order that T_0 be a game completion time, it is necessary and sufficient that, for every vector $h \in Y$ with unit norm, the relation holds:

$$\varphi_V(h) - \varphi_U(-h) \leq d - \langle h, \zeta(T_0) \rangle.$$

In the domain $[0, T] \times [0, l]$, we study the heat equation with heat loss

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} \right) + a_0(x) y(t, x) \\ &+ a_1(x) y(t - \omega, x) + \int_{-\omega}^0 b(\tau, x) y(s + \tau, x) d\tau + u(t, x) - v(t, x) \end{aligned} \quad (5)$$

with the boundary and initial conditions

$$\begin{aligned} y(t, 0) &= y(t, l) = 0, \quad t \in [0, T] \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y(t, x) = g(t, x), \quad \text{a.e. } (t, x) \in [-\omega, 0] \times [0, l], \end{aligned} \quad (6)$$

where $a(x) \in C^1[0, l]$, $a(x) > 0$, $a_0(x) \in C[0, l]$, $a_1(x) \in L_2(0, l)$, $b(t, x) \in L_2([-\omega, 0] \times [0, l])$, $y_0(x) \in L_2(0, l)$, $g(t, x) \in L_2([-\omega, 0] \times [0, l])$.

Admissible controls of the pursuer (source) $u(t, x) \in L_2([0, T] \times [0, l])$ and the evader (leak) $v(t, x) \in L_2([0, T] \times [0, l])$ satisfy the constraints: $u(t) \in U$ and $v(t) \in V$, where U and V are closed balls in $L_2(0, l)$ with the center at zero. *The goal of the game in system (5), (6) is to bring the state $y(t, x)$ to zero in a finite time not exceeding T in the class of admissible controls of the pursuer for any admissible control of the evader.*

REFERENCES

1. *Chikrii A.A.* Conflict-Controlled Processes. Boston, London, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1997. 424 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1135-7
2. *Chikrii A.A.* An analytical method in dynamic pursuit games // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 271. P. 69–85. DOI: 10.1134/S0081543810040073
3. *Krasovskii N.N.* The stability of quasilinear systems with after-effect // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1958. Vol. 119, no. 3. P. 435–438. (in Russian)
4. *Krasovskii N.N.* Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay. Stanford, California: Stanford Univ. Press, 1963. 192 p.
5. *Nakagiri S.* Optimal control of linear retarded systems in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 1986. Vol. 120. P. 169–210.
6. *Vlasenko L.A., Myshkis A.D., Rutkas A.G.* On a class of differential equations of parabolic type with impulsive action // Differ. Equ. 2008. Vol. 44, no. 2. P. 231–240. DOI: 10.1134/S0012266108020110
7. *Vlasenko L.A., Rutkas A.G.* On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation // Differ. Equ. 2015. Vol. 51, no. 6. P. 798–807. DOI: 10.1134/S0012266115060117
8. *Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A.* On a differential game in an abstract parabolic system // Proc. Steklov Inst. Math. 2016. Vol. 293, suppl. 1. P. 254–269. DOI: 10.1134/S0081543816050229

UDC 517.9

On Structural Stability of Dynamic Inequalities

A.A. Davydov^{1,2,3}, Yu.A. Skinder⁴

¹ National University of Science and Technology MISiS,

² Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,

³ International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria,
davydov@mi-ras.ru, davydov@iiasa.ac.at

⁴ Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs,
Vladimir, Russia, skinder@vlsu.ru

Abstract: We show that in a generic case the problem of structural stability of generic dynamic inequality with bounded admissible velocities on two-

dimensional sphere is equivalent to the problem of structural stability of such inequality on the plane, when near the infinity the inequality either locally controllable or have no admissible velocities at all. In particular, that implies the structural stability of such inequalities on the sphere in the simplest case.

Keywords: controllability, structural stability, dynamic inequality, generic.

Introduction

The notion of rough dynamical system was introduced in paper [1] by A.A. Andronov and L.S. Pontryagin for the case of differentiable vector fields on a two-dimensional disk, which has no tangency with the boundary. Such a field is rough if the family of phase curves of sufficiently C^1 -close field could be reduced to such a family of initial field by homeomorphism of the phase space, which is close to the identity. The necessary and sufficient conditions for such a field to be rough were also found in this paper. Later on such conditions were obtained for differentiable vector fields on a sphere and on any compact orientable surface [10]. In addition, this notion was extended for some objects of another nature, for example, for smooth maps [3], for net of asymptotic lines on surfaces [7] for smooth control systems [4], [5] and dynamic inequalities [8] and gets the name structural stability.

For control systems (or dynamic inequalities) the notion of structural stability is the same as for vector fields, just in the case of systems under the point trajectory one needs to consider the union of the positive and negative orbits of this point. In this case, the analogue of singular point of vector field is a local transitivity zone of the system, which is the union of all points, where the system is locally controllable. In addition, the analogue of the closed trajectories is nonlocal transitivity zone, which coincides with intersection of the positive and negative orbits of each of its points. A generic smooth control system on a sphere (or a closed orientable surface) is structurally stable [4], [5]. Note, in that case that includes also the stability of both local controllability properties and the nonlocal ones for considered system. Some property of object we call generic if it takes place for open everywhere dense subset in the space of objects endowed by an appropriate topology. Here we deal with smooth or sufficiently smooth fine Whitney topology.

The problem to analyze the orbits of smooth dynamical inequalities with locally bounded derivatives was posed by A.D. Myshkis in [9]. Such an inequality is defined by a smooth real function on the tangent bundle

to the manifold, in each layer of which the set of admissible velocities (in which the value of this function is non-positive) is compact. Such an inequality could have regions with no any admissible velocities and the ones, in which the motion do not satisfy the existence and uniqueness theorem of integral curve. For example, there could appear sliding regimes that can not be eliminated by a small perturbation of the inequality under consideration. This makes the problem of the structural stability for dynamic inequalities on surfaces much more complicated than for control systems.

The stability of the local controllability properties for a generic dynamic inequalities on surfaces was proved in [6].

Structural stability of generic simplest dynamic inequalities on the plane

$$(\dot{x} - a(x, y))^2 + (\dot{y} - b(x, y))^2 \leq f(x, y),$$

where a, b and f are smooth function and $\dot{x}$ is derivative along the time, was proved in [8] for the cases when the far from zero either

$$a^2 + b^2 < f,$$

that is the inequalities are completely controllable, or $f < 0$, and so the inequalities have no admissible velocities at all. Here the vector field (a, b) stays for the drift in the flat sea $\mathbb{R}_{x,y}^2$ and the function f characterizes own capacities to move of the object under control. This result also provides the structural stability of characteristics net of a generic second-order linear partial equation of mixed type on the plane with a finite region of hyperbolicity, if the net is orientable (see [8]).

1. Reduction theorem and structural stability on S^2

Here our main results are formulated.

A control system or dynamic inequality has small time transitivity property at a point of the phase space if for any neighborhood of this point and any time $T > 0$ there exists another neighborhood of the point such that any two points from the second neighborhood are attainable from one another for a time less than T and along the admissible trajectory lying in the first neighborhood.

Theorem 1. *For a generic smooth dynamic inequality with locally bounded derivatives on two dimensional sphere there exist point of the*

sphere and its neighbourhood such that at any point of this neighbourhood the inequality either has small time transitivity property or has no any admissible velocities at all.

Theorem 1 implies the following reduction statement.

Theorem 2. *In three dimensional Euclidian space the structural stability of a generic smooth dynamic inequality with bounded derivatives on the unit sphere is equivalent to the structural stability of dynamic inequality on the plane, which is obtained from the initial one by stereographic projection from a point P from Theorem 1 of the sphere to the plane, which goes through the center O of sphere and is orthogonal to vector OP .*

Due to the projection is continuous map in Whitney topology for any bounded domain in the projection plane we get

Theorem 3. *The problem of structural stability of generic smooth dynamic inequalities with bounded derivatives on two dimensional sphere is equivalent to the problem of structural stability of generic dynamic inequalities on the plane with locally bounded derivatives, which near the infinity either are completely controllable or have no any admissible velocities at all.*

The last theorem and main result of [8] imply

Theorem 4. *On two dimensional sphere endowed by Riemannian metric a generic smooth simplest dynamic inequality is structurally stable.*

The admissible velocities of a simplest dynamic inequality are determined by the sum of the drift (= vector field) and the velocities modulo not exceeding $\sqrt{f}$ of a function in a given Riemannian metric.

The work is partially supported by the RFBR under project No. 19-51-50005 JR_a and by Ministry of Education and Science of the Russian Federation under the project 1.638.2016/FPM.

REFERENCES

1. *Andronov A.A., Pontryagin L.S.* Rough Systems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1937. Vol. 14, no. 5. P. 247–250. (in Russian)
2. *Arnold V.I.* Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983.
3. *Arnold V.I., Varchenko A.N., Gusein-Sade S.M.* Singularities of Differentiable Mapping. Vol. 1. Ser. Monogr. Math., vol. 82. Boston: Birkhäuser, 1985. 396 p.

4. *Davydov A.A.* Structural stability of control systems on orientable surfaces // Math. USSR-Sb. 1992. Vol. 72, no. 1. P. 1–28.
5. *Davydov A. A.* Qualitative Theory of Control Systems. Ser. Transl. Math. Monogr., vol. 141. Providence, RI, 1994. 147 p.
6. *Davydov A.A.* Local controllability of typical dynamical inequalities on surfaces // Proc. Steklov Inst. Math. 1995. Vol. 209. P. 73–106.
7. *Garcia R., Gutierrez C., Sotomayor J.* Structural stability of asymptotic lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^3$ // Bull. Sci. Math. 1999. Vol. 123. P. 599–622.
8. *Grishina Yu.A., Davydov A.A.* Structural stability of simplest dynamical inequalities // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. Vol. 256. P. 80–91.
9. *Myshkis A.D.* On differential inequalities with locally bounded derivatives // Notes of Mekh.-Math. Department and Kharkiv Mathematical Society. 1964. Vol. 30. P. 152–163. (in Russian)
10. *Peixoto M.M.* Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. Vol. 1, no. 2. P. 101–120.

UDC 517.9

A Discrete Time Dynamic Programming Approach on a Tree Structure for Finite Horizon Optimal Control Problems

Maurizio Falcone

Dipartimento di Matematica, Università di Roma “La Sapienza”,
falcone@mat.uniroma1.it

Abstract: The classical Dynamic Programming (DP) approach to optimal control problems is based on the characterization of the value function as the unique viscosity solution of a Hamilton—Jacobi—Bellman (HJB) equation [2]. The DP scheme for the numerical approximation of viscosity solutions of those equations is typically based on a time discretization which is projected on a fixed space triangulation of the numerical domain [3]. The time discretization can be done by a one-step scheme for the dynamics and the projection on the grid typically uses a polynomial interpolation. This approach, which allows to get information on optimal controls in feedback form, has been shown to be very powerful for low dimensional optimal control problems although convergence results have been proved in $\mathbb{R}^d$. Several methods have been proposed to mitigate the curse of dimensionality of DP schemes, e.g. static and dynamic domain decomposition, fast-marching and fast-sweeping methods, discrete representation formulas.

We will discuss a new approach for finite horizon optimal control problems where we compute the value function on a tree structure constructed directly by the time discrete dynamics and we do not use a space triangulation to solve the HJB equation [1]. This allows to drop the cost of the space interpolation, moreover the tree will guarantee a perfect matching with the discrete

dynamics. To prove convergence and a-priori estimates we will follow [4] and [5]. In the simple case, we will discretize the dynamics with an Euler scheme and we will prove first order convergence by the means of viscosity solutions. We will also discuss how this approach can be extended to high-order schemes and we will show some examples of second order approximation schemes.

Keywords: optimal control, dynamic programming, Hamilton—Jacobi—Bellman equations, viscosity solutions.

This is a joint work with Alessandro Alla (PUC, Rio de Janeiro) and Luca Saluzzi (Gran Sasso Science Institute, L'Aquila, Italy).

REFERENCES

1. *Alla A., Falcone M., Saluzzi L.* An Efficient DP Algorithm on a Tree Structure for Finite Horizon Optimal Control Problems. 2019. arXiv: 1807.11008v2 [math.NA]. To appear on SIAM J. Sci. Comp.
2. *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton—Jacobi—Bellman Equations. Basel: Birkhäuser, 1997. 574 p.
3. *Falcone M., Ferretti R.* Semi-Lagrangian Approximation Schemes for Linear and Hamilton—Jacobi Equations. Philadelphia: SIAM, 2013.
4. *Falcone M., Giorgi T.* An Approximation Scheme for Evolutive Hamilton—Jacobi Equations. In: “Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: A Volume in Honor of W.H. Fleming”, W.M. McEneaney, G. Yin, Q. Zhang (eds.). Ser. Systems Control Found. Appl. Boston: Birkhäuser, 1999. P. 289–303.
5. *Falcone M., Ferretti R.* Discrete time high-order schemes for viscosity solutions of Hamilton—Jacobi—Bellman equations // Numer. Math. 1994. Vol. 67. P. 315–344.

UDC 517.977

On the Regularity of Solutions in an Optimal Control Problem with Hybrid Dynamics

D. Gromov^{1,2}, A. Bondarev³

¹ Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
St. Petersburg State University, St. Petersburg Russia,

² N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (IMM UB RAS),
Yekaterinburg, Russia, dv.gromov@gmail.com

³ International Business School Suzhou, Xi'an Jiaotong-Liverpool University,
Suzhou, P. R. China, anton.bondarev@xjtlu.edu.cn

Abstract: In this contribution, we consider a hybrid optimal problem that has recently arisen within the framework of differential games with regime

switching. We first characterize the regular solutions of the considered problem and formulate the conditions under which the system exhibits irregular behavior such as limit cycles or chattering.

Keywords: hybrid optimal control, regime-switching, spillover effect.

1. Main result

It is a common situation in real life that parameters of a process change either at certain time or when the state crosses some hyper-surface in the state space. Such processes are called *hybrid* and there is a well developed theory behind them, see, e.g., [6]. Particularly important result consists in the formulation of Hybrid Maximum Principle, [1, 7] Recently, the notion of hybrid differential games was introduced in [4].

The problem considered in this contribution initially appeared in the context of differential games with regime switching (i.e., hybrid differential games), [2, 3]. However, it can be of general interest within a more general hybrid optimal control framework. Consider a linear one dimensional system described by

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (1)$$

with $a < 0$, $b > 0$, $x(0) = x_0 \geq 0$, and $u \in [0, \bar{u}]$. The performance functional to be maximized is

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) dt, \quad (2)$$

where p and q are (positive) constants.

This linear-quadratic structure can often be encountered in advertising and marketing models (see the paper [8] and more recent [5] for a review) and includes a *spillover effect* modeled by the cross-product term xu . This term is novel and rarely appears in economic applications. See [2, 3] for a motivation for introducing this term in game-theoretic applications. Such effects are typically present in advertising and goodwill models, where the value of advertising for one firm positively depends on advertising efforts of the other firm provided they have similar products.

The problem (1), (2) can be transformed into a hybrid optimal control problem, once we assume that the system parameters a and b can change as certain event occurs. Let $f(x, t)$ be a smooth map, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

such that the rank of Df is equal to 1 for all $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. The level set $f(x, t) = 0$ is the *switching manifold*. We define

$$a = \begin{cases} a^+, & f(x(t), t) \geq 0, \\ a^-, & f(x(t), t) < 0, \end{cases} \quad b = \begin{cases} b^+, & f(x(t), t) \geq 0, \\ b^-, & f(x(t), t) < 0. \end{cases} \quad (3)$$

In the following we shall limit ourselves to the two basic cases (using the terminology from [4] and [7]):

1. Time-driven (controlled) switch : $f(x(t), t) = t - \tau^*$ with τ^* fixed.
2. State-driven (autonomous) switch : $f(x(t), t) = x(t) - x^*$ with x^* fixed, but t left free.

While in the case of time-driven switch the optimal solution is well-defined, the situation with the state-driven switch turns out to be more involved. We shall assume that the initial state is such that $f(x(t)) < 0$, i.e., we start at the first regime.

There are two types of regular solutions: a) a normal mode, when the optimal trajectory does not cross the switching manifold; b) a switching mode, when the optimal trajectory crosses the switching manifold once. However, we are interested in the situations the optimal trajectory either stays on the switching manifold or cross it a (possibly infinite) number of times.

We shall present initial results along these lines and outline the further directions of research.

The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01093).

REFERENCES

1. *Azhmyakov V., Attia S., Gromov D., Raisch J.* Necessary optimality conditions for a class of hybrid optimal control problems // Hybrid systems: computation and control (ed. Bemporad A., Bicchi A., Butazzo G.), LNCS 4416, 2007. P. 637–640.
2. *Bondarev A.* Games without winners: Catching-up with asymmetric spillovers. WWZ Working Paper 2018/12, Basel, 2018.
3. *Bondarev A., Greiner A.* Catching-up and falling behind: Effects of learning in an R&D differential game with spillovers // J. Econom. Dynam. Control. 2018. Vol. 91. P. 134–156.
4. *Gromov, D. Gromova E.,* On a class of hybrid differential games // Dyn. Games Appl. 2017. Vol. 7, no. 2. P. 266–288.

5. *He, X., Prasad A., Sethi S. P., Gutierrez G. J.*, A survey of Stackelberg differential game models in supply and marketing channels // J. Syst. Sci. Syst. Eng. 2007. Vol. 16, no. 4. P. 385–413.
6. Modelling, Analysis and Design of Hybrid Systems. Eds.: Engell S., Frehse G., Schnieder E. Springer, 2002.
7. *Shaikh M.S., Caines P.E.* On the hybrid optimal control problem: Theory and algorithms // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. Vol. 52, no. 9 P. 1587–1603. Corrigendum: IEEE Trans. Automat. Control. 2019. Vol. 54, no. 6. P. 1428.
8. *Sethi S.P.* Nearest feasible paths in optimal control problems: Theory, examples, and counterexamples // J. Optim. Theory Appl. 1977. Vol. 23, no. 4. P. 563–579.

UDC 517.977

On the Form of Payoff Functional in the Optimal Control Problem with Random Starting Time

E.V. Gromova^{1,2}, A.P. Malakhova¹

¹ St. Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia,

² Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB of RAS,
Yekaterinburg, Russia, e.v.gromova@spbu.ru

Abstract: We consider an optimal control problem with random time interval that often appears in differential games. For the case, where the starting time is a random variable, we present a transformed expression for the payoff function that is better suited for the application of standard optimal control methods.

Keywords: optimal control, payoff functional, random initial time.

Introduction

In this contribution we consider an important problem that has recently attracted certain attention in game theory. It is widely accepted that any realistic controlled process cannot be considered on an a priori fixed time interval. Therefore, a considerable research effort has been aimed at studying game-theoretic problems that evolve on a time interval whose end point is a random variable (see [2–4, 6, 8, 9] and also [1, 7, 10] for initial works). Now we turn to a different, but closely related problem and study an optimization problem whose initial time is a random variable. It turns out that this problem statement differs from the previously mentioned one. We present several results on the reformulation of the payoff functional to the form better suited for the application of standard optimal control methods.

1. Main result

We consider a controlled process that starts at the moment $T_s \in [0, T_f]$ from the state $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$. The evolution of the considered process is governed by the following ODEs:

$$\dot{x} = g(x, u_1(t), \dots, u_n(t)), \quad x(T_s) = x_0 \quad (1)$$

with an assumption that $g(x, 0) = 0$ for all $x \in X$.

The optimization problem is defined as

$$J(T_s, x_0, u^*) = \max_u \int_{T_s}^{T_f} h(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad (2)$$

where $h_i(\tau, x, u)$ is a continuous function and $x(t)$ is the solution of (1) for controls $u(t)$.

We consider a special case where the initial time is considered to be a random variable, which is distributed on the interval $[0, T_f]$ with a probability function $F(t)$. Obviously, $F(t)$ has to satisfy all necessary conditions, i.e. $F(t)$ is a monotonously increasing function s.t. $F(0) = 0$ and $F(T_f) = 1$. In the following, we will assume that $F(t)$ is absolutely continuous and so, there exists a function $f(t) = F'(t)$, called the probability distribution function. Hence, (2) can be reformulated as

$$\begin{aligned} J(x_0, u^*) &= \max_u \mathbb{E} \left[\int_{T_s}^{T_f} h(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \right] \\ &= \max_u \int_0^{T_f} f(s) \int_{T_s}^{T_f} h(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau ds, \end{aligned} \quad (3)$$

This problem statement requires some additional clarification. We assume that the starting time T_s is a priori unknown while the optimal control is open loop and hence computed in advance. Thus, we should account for the fact that on the interval $[0, t_s]$ the optimal control cannot be applied, i.e. $u^*(t) = 0$, $t \in [0, t_s]$, where t_s is a realization of the random variable T_s .

In the following, we assume that the equation (1) satisfies the existence and uniqueness conditions for all admissible controls [5]; also, we

assume that the optimization problem in (2) admits a unique solution for any fixed $T_s \in [0, T_f]$.

The following results allow for putting the described problem into the classical framework of optimal control.

Theorem 1. *The payoff $J(x_0, u^*)$ is equivalent to*

$$J(x_0, u(t)) = \int_{t_0}^{T_f} F(t)h(\tau, x(\tau), u(\tau))dt. \quad (4)$$

In game-theoretic applications it is often desirable to define the payoff functional (1) on a subinterval $[\theta, T_f] \subset [T_s, T_f]$. The following theorem formalizes that.

Theorem 2. *The payoff functional in the subproblem defined on $[\theta, T_f]$ takes the form*

$$J(x_0, u(t)) = \int_{\theta}^{T_f} \frac{F(t) - F(\theta)}{1 - F(\theta)} h(t, x(t), u(t))dt. \quad (5)$$

The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01093).

REFERENCES

1. Boukas E.K., Haurie A., Michel P. Optimal Control Problem with a Random Stopping Time // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, no. 3. P. 471–480.
2. Gromov D., Gromova E.V. Differential games with random duration: a hybrid systems formulation // Contrib. Game Theory and Management. 2014. Vol. 7. P. 104–119.
3. Kostyunin S., Palestini A., Shevkoplyas E.V. On a nonrenewable resource extraction game played by asymmetric firms // J. Optim. Theory Appl. 2014. Vol. 163. P. 660–673.
4. Kostyunin S., Shevkoplyas E. On simplification of integral payoff in differential games with random duration // Vestnik S. Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr. 2011. Vol. 4. P. 47–56.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
6. Marin-Solano J., Shevkoplyas E.V. Non-constant discounting and differential games with random time horizon // Automatica. 2011. Vol. 47, no. 12. P. 2626–2638.
7. Petrosjan L.A., Murzov N.V. Game-theoretic problems of mechanics // Litovsk. Mat. Sb. 1966. Vol. 6. P. 423–433. (in Russian)
8. Petrosjan L.A., Shevkoplyas E.V. Cooperative Solutions for games with random duration // Game Theory Appl. 2003. Vol. 9. P. 125–139.

9. Kort P.M., Wrzaczek S. Optimal firm growth under the threat of entry // European J. Oper. Res. 2015. Vol. 246, no. 1. P. 281–292.
10. Yaari M.E. Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer // Rev. Econom. Stud. 1965. Vol. 32, no. 2. P. 137–150.

UDC 517.9

Block Jacobi Preconditioning for Solving Dynamic General Equilibrium Models

A.P. Gruzdev¹, N.B. Melnikov^{1,2}

¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,
gruzdev@cs.msu.ru

² Central Economics and Mathematics Institute, RAS, Moscow, Russia

Abstract: We apply block Jacobi preconditioning to improve the computation of perfect foresight competitive equilibrium for the global economy with multiple production sectors and regions. The model is solved by an iterative method of the Gauss–Seidel type. At each iteration, first intertemporal variables are updated, then equations for intra-temporal variables are solved using the Newton – Krylov method. The Jacobian matrix on the system for intra-temporal variables has a nearly block diagonal structure over regions. A block Jacobi preconditioning is shown to speed up the convergence of the Krylov method. The use of the preconditioner is illustrated in the example of the integrated-Population-Economy-Technology-Science (iPETS) model.

Keywords: intertemporal general equilibrium, economic growth, nonlinear systems of equations, Newton – Krylov method, preconditioning.

Dynamic general equilibrium models are widely used for estimating effects of demographic and technological changes on energy use and CO₂ emissions. The equilibrium is described in the framework of the Arrow – Debreu theory, which leads to a systems of nonlinear equations. The number of equations can reach hundreds of thousands and millions, and solving such systems can be time-consuming. Parallel computing and reordering techniques can be used to reduce the computing time (see, e.g., [1, 2]). An alternative is to apply a preconditioner for solving the linearized system of equation with an iterative method (see, e.g., [3, 4]).

The idea of preconditioning the linear system of equations $Ax = b$ consists in replacing it by another linear system, $ABy = b$, which is easier to solve, then setting $x = By$. The matrix B is called the (right) *preconditioner*. To be efficient, B must be relatively inexpensive to compute

and approximate A^{-1} . The two most popular options of preconditioning are performing the incomplete LU-decomposition (ILU) and using one of the stationary methods, such as Jacobi, Gauss – Seidel or SOR, as the preconditioner. A block Jacobi preconditioner with respect to time was applied to speed up the Newton – Krylov method for the stacked system [5]. However, application of stacked Newton-type methods can be impractical or infeasible for large systems with multiple regions and long time horizons. An application of Jacobi and ILU preconditioners for small-scale stochastic growth models was studied by [6].

We present and analyze a block Jacobi preconditioner with respect to regions in the extended path method [7] (for use of the block Jacobi method with regional blocks for solving the model, see, e.g., [8]). The method is illustrated in the example of the integrated-Population-Economy-Technology-Science (iPETS) model, a general equilibrium growth model with multiple regions, goods, sectors, households, and factors of production [9]. As is usual for such models, the infinite time horizon is replaced by a finite time interval $t = \overline{0, T}$, where T is chosen large enough so that the system reaches balanced growth for the time steps t greater than T . The first-order optimality conditions for agents and market clearance conditions for goods give the system of nonlinear equations

$$F(K, P) = 0, \quad (1)$$

where K stands for intertemporal variables, such as capital, consumption, investment, etc. for all regions $r = \overline{1, N_R}$ and all time steps $t = \overline{0, T}$, and P stands for intra-temporal variables, such as prices and input-output ratios of final and intermediate goods, international trade, etc., for all goods, regions and time steps.

System (1) is solved by an iterative method of the Gauss-Seidel type. Using the i th iterate of capital K^i , we solve the system $F(K^i, P) = 0$ with respect to prices, and thus obtain P^{i+1} . Then the new iterate of capital K^{i+1} is determined from the system $F(K, P^{i+1}) = 0$. The former can be solved independently at different time steps $t = \overline{0, T}$:

$$F_t(K^i, P_t) = 0. \quad (2)$$

For brevity, we denote system (2) as $F_{t,i}(u) = 0$, where $u = P_t$. At k th iteration of the Newton-type method, one solves the linearized system

$$F'_{t,i}(u_k)s_k = -F_{t,i}(u_k), \quad (3)$$

where u_k is the k th iterate of the solution and s_k is the step to the next iterate $u_{k+1} = u_k + s_k$. If the Jacobian matrix $A = F'_{t,i}(u_k)$ is close to its block-diagonal part over regions $\text{diag}(A_1, \dots, A_{N_R})$, then its inverse $B = \text{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_{N_R}^{-1})$ can be used as a preconditioner.

In the example of the iPETS model, the nonlinear system (2) for each t is solved by the Newton – Krylov method as implemented in the NITSOL [10]. The time horizon is $T = 105$ and dimension of the linear system (3) is $n = 144$. The preconditioner B consists of $N_R = 9$ blocks 16×16 each. The inverse of a block A_r is obtained by ILU.

There are two ways to implement the calculation of the Jacobian matrix $F'_{t,i}(u_k)$ for the problem (3). The first one is to compute the whole Jacobian matrix $A = F'_{t,i}(u_k)$ and the second one is to implement only the matrix-vector (matvec) product As . In the first case, n function evaluations are required to obtain the Jacobian matrix by the difference approximation (it is assumed that $F_{t,i}(u_k)$ has already been evaluated). Then the Jacobian matrix is stored and used for each matvec. In the second case one function evaluation is required for *each* matvec:

$$F'_{t,i}(u_k)s = \frac{1}{\delta} [F_{t,i}(u_k + \delta s) - F_{t,i}(u_k)], \quad (4)$$

where δ is the difference step. Then the total number of function evaluations is equal to the number of matvecs required for the Krylov method to converge. Calculations show that computing the whole Jacobian matrix requires 10 to 100 times more function evaluations. Therefore, we use only formula (4) for evaluating a matvec of the Jacobian matrix.

Table 1 shows statistics for iPETS model runs with and without preconditioning. We present the numbers for the $i = 1$ iteration. Since system (2) is solved independently for different time steps $t = \overline{0, T}$, we present the average numbers over t . The first column shows the results without preconditioning, second column with the preconditioner $B_{t,k}$ calculated for each t and k and third with the preconditioner $B_{0,0}$ used for all t and k .

Use of the preconditioner $B_{t,k}$ does not change the number of non-linear iterations much but dramatically decreases the number of linear iterations. As we see, the matrix $B_{t,k}$ is close to the Jacobian matrix $A_{t,k}$ and so one linear iteration is sufficient in this case. However, use of the preconditioner $B_{t,k}$ requires much more function evaluations and hence the computing time is greater than without the preconditioner.

The situation is improved if we calculate the preconditioner only

Operations	w/o	$B_{t,k}$	$B_{0,0}$
Function evals	155	908	16
Matvecs As	150	3	10
Matvecs Ms	0	13	27
Linear iters	150	3	10
Nonlinear iters	4	3	4
Speedup	1	0.3	1.6

Table 1. Average number of operations and iterations and speedup in solving the nonlinear system (2).

at the first iteration $k = 0$ for the time step $t = 0$ and use it for all k and t . The number of function evaluations decreases more than 50 times. The matrix $B_{0,0}$ can be less close to $A_{t,k}$, so the number of linear iterations slightly increases from 3 to 10, the number of matvecs As and Bs increases three and two times, respectively, and the number of nonlinear iterations becomes the same as without preconditioning. But overall use of the preconditioner $B_{0,0}$ gives the speedup of 1.6 times keeping the results within the same tolerance. The advantage of our approach is that preconditioning with respect to regions can be combined with the parallelization over time steps [1].

The resources of the Lomonosov supercomputer were used as part of the project “Parallel computing in dynamic general equilibrium models” at Lomonosov Moscow State University.

REFERENCES

1. *Melnikov N., Gruzdev A., Dalton M., O'Neill B.C.* Parallel algorithm for solving large-scale dynamic general equilibrium models // Proc. of the 1st Russian Conf. on Supercomputing. 2015. P. 84–95.
2. *Ha P.V., Kompas T.* Solving intertemporal CGE models in parallel using a singly bordered block diagonal ordering technique // Econ. Model. 2016. Vol. 52. P.3–12.
3. *Saad Y., van der Vorst H.A.* Iterative solution of linear systems in the 20th century // Int. J. Comput. Appl. Math. 2000. Vol. 123. P. 1–33.
4. *Wathen A.J.* Preconditioning // Acta Numer. 2015. Vol. 24. P. 329–376.
5. *Pauletto G., Gilli M.* Parallel Krylov methods for econometric model simulation // Comput. Econ. 2000. Vol. 16. P. 173–186.
6. *Mrkaic M., Pauletto G.* Preconditioning in economic stochastic growth models // IFAC Proceedings Volumes, 2001. Vol. 34. P. 349–353.
7. *Fair R., Taylor J.* Solution and maximum likelihood estimation of dynamic nonlinear rational expectations models // Econometrica. 1983. Vol. 51. P. 1169–1185.
8. *Faust J., Tryon R.* Block distributed methods for solving multi-country econometric models // Computational Economic Systems. Vol. 5. Adv. Comput. Econ.(ed. Gilli M.). Dordrecht: Springer, 1996. P. 229–242.

9. O'Neill B.C., Dalton M., Fuchs R., Jiang L., Pachauri S., Zigova K. Global demographic trends and future carbon emissions // Proc. of the USA National Academy of Sci. 2010. Vol. 107. P. 17521–17526.
10. Pernice M., Walker H. NITSOL: A Newton iterative solver for nonlinear systems // SIAM J. Sci. Comput. 1998. Vol. 19. P. 302–318.

UDC 51-74

Distributed Frequency Control in Power Systems with Limited Information

O.O. Khamisov

Skolkovo Institute of Science and Technology, oleg.khamisov@skolkovotech.ru

Abstract: The presented work addresses frequency control in power systems. Dynamics of the power system are described by a system of linear differential algebraic equations. Frequency control is aimed to keep power balance and consequently to rebuff frequency oscillations described by this system. Due to introduction of renewable energy and distributed generation, inertia of the systems is reduced, thus efficiency of the currently existing frequency control is challenged. Additionally, performance of the current frequency control is limited due to synchronization required by the centralized operation of the existing control. The control presented in this paper is designed to work in distributed manner in the low inertia systems.

Keywords: power systems, frequency control, integral algebraic equations, global asymptotic stability, distributed control.

1. Introduction

The aim of this work is to derive frequency generator- and load-side control for power systems. It is assumed, that system described by a system of linear differential algebraic equations suffers from failures on one or several buses, which result in step change disturbances represented by a constant inhomogeneity in the system. The two major problems connected with the frequency control are the following: (1) some parameters of the system are unknown; (2) control must be distributed: communication is allowed only between adjacent buses.

2. Physical system

Power system [1] is defined by an oriented connected graph $\Gamma = (N, E)$, where $N = G \cup L_1 \cup L_0$ is set of buses $|N| = n$. Set of generator buses is

denoted by $G = \{1, \dots, g\}$. The other buses are load buses. Load buses are divided into buses with non-zero inertia: $L_1 = \{g+1, \dots, g+l_1\}$ and buses with zero inertia: $L_0 = \{g+l_1+1, \dots, l_1+l_2\}$. Dynamics of the system are represented by the following system of differential algebraic equations:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i \in N, \quad (1a)$$

$$m_i \dot{\omega}_i = -d_i \omega_i - p_i^e + p_i^m, \quad i \in G, \quad (1b)$$

$$t^m \dot{p}_i^m = -p_i^m + v_i, \quad i \in G, \quad (1c)$$

$$t^g \dot{v}_i = -v_i + u_i, \quad i \in G, \quad (1d)$$

$$m_i \dot{\omega}_i = -d_i \omega_i - p_i^e + u_i + r_i, \quad i \in L_1, \quad (1e)$$

$$0 = -d_i \omega_i - p_i^e + u_i + r_i, \quad i \in L_0, \quad (1f)$$

$$p_{ij} = b_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad i, j \in E, \quad (1g)$$

$$p_i^e = \sum_{j:(i,j) \in E} p_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} p_{ji}, \quad i \in N. \quad (1h)$$

Here variables are bus phase angles: $\theta_i, i \in N$; deviations of bus frequencies from their nominal values (50 Hz or 60 Hz): $\omega_i, i \in N$; electrical powers injected to the system: $p_i^e, i \in N$; mechanical power injections: $p_i^m, i \in G$; governing valves positions: $v_i, i \in G$ and active power line flows: $p_{ij}, (i, j) \in E$. Parameters of the system are $m_i > 0, i \in G \cup L_1$; $d_i, i \in N$; $t_i^g > 0, t_i^m > 0, i \in G$ and $b_{ij} > 0, (i, j) \in E$. Values $r_i, i \in L_1 \cup L_0$ are constant values of step change disturbances. Control is given by $u_i, i \in N$. Control values have upper and lower limits:

$$\underline{u}_i \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i, \quad i \in N, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

In this work we prove the following result:

Theorem 1. *System (1) is asymptotically stable in $\omega_i, p_i^m, v_i, p_i^e, i \in N$. If $\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = u_i^*, i \in N$ then*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_i(t) = \frac{\sum_{i \in N} u_i^* - r_i}{\sum_{i \in N} d_i}, \quad i \in N.$$

3. Problem statement

System (1) describes the dynamics of the power systems, however not all parameters of the system are known. Only parameters m_i and d_i can be measured, the other parameters as well as the disturbances are unknown. Additionally for any control vector $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ it is possible to take measurements of bus frequency deviations $\omega_i(t)$ and electrical powers $p_i^e(t)$, $i \in N$. Based on this information control $u(t)$ must be derived so that it would satisfy the following criteria:

1. Control must be globally asymptotically stable and converge to a constant vector: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^*$, where u^* is called terminal point;
2. Bus frequency deviations must be eliminated: $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_i(t) = 0$, $i \in N$;
3. Control's terminal point must deliver minimum of the cost function $f(u^*) = 1/2 \sum_{i \in N} w_i (u_i^*)^2$, $w_i > 0$ on the set of all terminal points of the functions that satisfy items 1 and 2.

The control that satisfies this 3 items was derived in [3]. However in order to calculate control values on each bus global information about the system was required: all values of $\omega_i(t)$ and $p_i^e(t)$ and no control limits (2) were imposed. Here two additional constraints are introduced:

4. Control values $u_i(t)$ on each bus can be calculated only using the information about the control from the adjacent buses, local parameters, and measurements;
5. Control must satisfy control limits (2).

4. Frequency control

Within this work a new frequency control $u(t)$ is derived. The derivation technique is described and it is proved that the derived control satisfies the control criteria 1–5. The control is defined by a system of integral algebraic equations:

$$u_i(t) = \max \left\{ \min \left\{ \frac{y_1^i(t)}{w_i}, \bar{u}_i \right\}, \underline{u}_i \right\}, \quad i \in N, \quad (3a)$$

$$y_1^i(t) = \int_0^t \sum_{\substack{(i,j) \in E, \\ (j,i) \in E}} (y_2^i(\tau) - y_2^j(\tau)) - u_i(\tau) + d_i \omega_i + p_i^e(\tau) d\tau, \quad i \in L_0, \quad (3b)$$

$$y_1^i(t) = \int_0^t \sum_{\substack{(i,j) \in E, \\ (j,i) \in E}} (y_2^i(\tau) - y_2^j(\tau)) - u_i(\tau) + d_i \omega_i + p_i^e(\tau) d\tau + m_i \omega_i(t), \quad i \in L_1, \quad (3c)$$

$$y_2^i(t) = - \int_0^t \sum_{\substack{(i,j) \in E, \\ (j,i) \in E}} (y_1^i(\tau) - y_1^j(\tau)) d\tau, \quad i \in N. \quad (3d)$$

Here variables $y_1^i(t)$ and $y_2^i(t)$ are auxiliary variables. Equation (3a) defines control and ensures that control limits (2) are not violated. This function uses only local information (parameters and variables on the bus i). Equations (3b) and (3c) use only local and adjacent buses variables $y_2^i(t)$, local variables $u_i(t)$ and known local parameters d_i , m_i and measurements $\omega_i(t)$ and $p_i^e(t)$. Finally equations (3d) use only local and adjacent buses variables $y_1^i(t)$. The following result is obtained based on the Barbashin—Krasovskii—LaSalle Theorem [2]:

Theorem 2. *System (3) defines control that satisfies criteria 1–5.*

5. Numerical results

Frequency dynamics for traditional [1] and developed frequency controls are given in the figure 1.

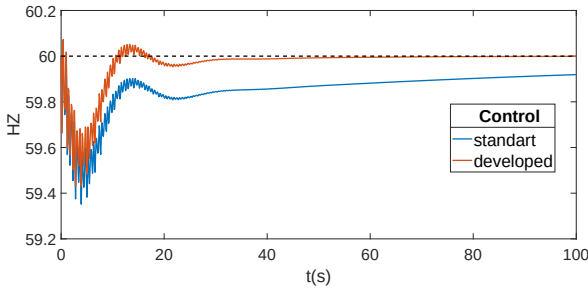


Figure 1. Frequency dynamics.

REFERENCES

1. *Machowski J., Bialek J., Bumby J.* Power System Dynamics: Stability and Control. 2nd ed. NJ, US: John Wiley & Sons, Inc., 2008, 629 p.
2. *Haddad W.M., Chellaboina V.* Nonlinear Dynamical Systems and Control. A Lyapunov-Based Approach. Princeton University Press, 2008, 948 p.
3. *Khamisov O.O.* Disturbance approximation based frequency control // Proc. of MIPT. 2019. Vol. 11, no. 2. P. 86–98.

UDC 517.977, 630*624

Discrete-Time Optimal Control in the Forestry Model

A.A. Krasovskii¹, A.S. Platov²

¹ International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria, krasov@iiasa.ac.at

² Vladimir State University (VLSU), Vladimir, Russia, platovmm@mail.ru

Abstract: We study an optimal control problem in the forestry models [2, 4]. The problem is formulated for a discrete system, reflecting the age sequence of forest stands. The optimization criterion is presented by the discounted profit, calculated on the finite-time horizon. To derive the optimal solution, we apply L.S. Pontryagin's maximum principle [3], developed for discrete systems in [1].

Keywords: Pontryagin's maximum principle, discrete forest management model.

1. Problem statement

Forest stand is located in a cell with number i , $i = 1, \dots, N$. Trees are divided in age-classes. Let us denote by symbol $x_i(a, t)$ the forest area in cell i , age class $a \in [0, A]$, at time $t \in [0, T]$. We consider discrete-time model:

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + \Delta a, & t_{k+1} &= t_k + \Delta t, & t_1 &= \Delta t, & t_K &= T, \\ j &= 1, \dots, M-1, & k &= 1, \dots, K-1, & \Delta t &= \Delta a, \end{aligned}$$

where M is the number of age classes, and K is the number of time periods. We denote the biomass factors by symbols $\beta_i(a_j) \geq 0$. Symbol $u_i(a_j, t_k) \in [0, 1]$ denotes control variable, that is the ratio of forest stand of type i , age a_j , that is harvested at time t_k .

For convenience we introduce the following vector notations:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i(t_k) &:= (x_i(a_1, t_k), \dots, x_i(a_M, t_k))^T, \\ \mathbf{u}_i(t_k) &:= (u_i(a_1, t_k), \dots, u_i(a_M, t_k))^T,\end{aligned}$$

and further:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i(k) &:= \mathbf{x}_i(t_k) \in \mathbf{R}^M, \quad \mathbf{u}_i(k) := \mathbf{u}_i(t_k) \in \mathbf{R}^M, \\ \mathbf{x}(k) &:= (\mathbf{x}_1(k), \dots, \mathbf{x}_N(k)) \in \text{Mat}_{M \times N}, \\ \mathbf{u}(k) &:= (\mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_N(k)) \in \text{Mat}_{M \times N}, \\ \bar{\beta}(k) &:= (\beta_i(a_1), \dots, \beta_i(a_M))^T \in \mathbf{R}^M.\end{aligned}$$

Let us define the following set:

$$\mathbf{U} := \left\{ \{u_i^j\} \in \text{Mat}_{M \times N} \mid 0 \leq u_i^j \leq 1 \right\}.$$

If control $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{U}$ for every $k = 1, \dots, K$, then $\mathbf{u}$ is called the *admissible control*. Discrete-time dynamics of the state variable are subject to the equation:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = (\mathbf{L} + \mathbf{M}\mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)))\mathbf{x}_i(k), \quad (1)$$

where matrices $\mathbf{L}, \mathbf{M} \in \text{Mat}_{M \times M}$ are determined in the following way:

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &:= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M} &:= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Here operator $\mathbf{Dg}$ transforms vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ into the diagonal matrix with elements of $\mathbf{y}$ on the diagonal and zeros otherwise.

The profit function is determined by the following relation:

$$\Pi(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) := p(k) \sum_{i=1}^N \left(\bar{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T \right) \mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \mathbf{x}_i(k). \quad (2)$$

Here $\mathbf{C}$ is the matrix of costs and p is the price trend in the US dollars.

Given the forest growth dynamics $\mathbf{x}_i(k+1)$ (1), the initial age distribution

$$\mathbf{x}_i^1 := \mathbf{x}_i(1), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

the biomass factors $\bar{\beta}_i$, and the profit function $\Pi(k)$ (2), the problem is to find among admissible controls $\mathbf{u}_i(k)$, the *optimal control* $\hat{\mathbf{u}}(k)$, maximizing the net present value:

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \left\{ J := \sum_{k=1}^K \rho_k \Pi(k) \right\}, \quad (4)$$

where $\mathcal{U}$ is the set of all admissible controls and ρ_k is the discount factor.

2. Solution to the bilinear optimal control problem

Proposition 1. *If all components of vectors $\mathbf{x}_i^1$ are non-negative, then for any admissible control $\mathbf{u}$ all components of the solution to (1), (3) are non-negative as well.*

According to the Pontryagin maximum principle [1], components $\hat{\mathbf{u}}_i$ of optimal control $\hat{\mathbf{u}}$ in each k -th time period maximize every component of the row-vector:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_i(k) = \arg \max_{\mathbf{u}_i(k) \in \mathbf{U}} \left\{ (\rho_k(p(k)\bar{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \right. \\ \left. + \bar{\lambda}_i(k+1)\mathbf{M})\mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{x}}_i(k))\mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Here $\bar{\lambda}_i(k+1)$ is the solution to the adjoint equation

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(k) = \rho_k(p(k)\bar{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T)\mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k)) + \\ + \bar{\lambda}_i(k+1)(\mathbf{L}^T + \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k))\mathbf{M}^T), \end{aligned} \quad (6)$$

that is calculated in the inverse time, starting from the transversality condition:

$$\bar{\lambda}_i(K+1) = 0. \quad (7)$$

Here dynamics $\hat{\mathbf{x}}_i(k)$ are determined by equation (1): $\hat{\mathbf{x}}_i(k+1) = (\mathbf{L} + \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k))\mathbf{M})\hat{\mathbf{x}}_i(k)$ with the initial condition: $\hat{\mathbf{x}}_i^1 := \mathbf{x}_i(1)$.

Instead of condition (5), we consider new condition:

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(k) = \arg \max_{\mathbf{u}(k) \in \mathbf{U}} \{ (\rho_k(p(k)\bar{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \bar{\lambda}_i(k+1)\mathbf{M})\mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \}. \quad (8)$$

Assumption A. There exists solution $\{\tilde{\lambda}, \tilde{\mathbf{u}}\}$ to problem (6), (7), (8), such that vectors

$$(\rho_k(p(k)\bar{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \tilde{\lambda}_i(k+1)\mathbf{M})$$

contain no zero components for all i, k .

Lemma 1. *If assumption A is satisfied, then problem (6), (7), (8) has the unique solution and all components of $\tilde{\mathbf{u}}$ take the values from set $\{0, 1\}$.*

Theorem 1. *Let assumption A be satisfied, $\{\tilde{\lambda}, \tilde{\mathbf{u}}\}$ be a solution to (6), (7), (8), and $\tilde{\mathbf{x}}$ be a solution to problem (1), (3), corresponding to control $\tilde{\mathbf{u}}$. Then $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ is the solution to problem (1), (3), (4).*

Remark 1. *There is a nonempty set of problems for which assumption A is satisfied. For example, if for all k, j , $\rho_k(p(k)\bar{\beta}^T - \mathbf{C}^T) = (2, 2, \dots, 2)$, then assumption A is satisfied and $u_i^j(k) = 1$ for all i, j .*

We will discuss the application of the method to identify optimal rotation times in IIASA's global spatially explicit forestry model G4M. Practical examples for plantation forestry in Indonesia (including acacia and teak species) will be demonstrated.

This work was supported by the RESTORE+ project (www.restoreplus.org), which is part of the International Climate Initiative (IKI), supported by the Federal Ministry for the Environment, Nature Conservation and Nuclear Safety (BMU) based on a decision adopted by the German Bundestag.

REFERENCES

1. *Boltjanskii V.G.* Optimal Control of Discrete Systems. John Wiley [etc.]. 1978.
2. *Clark C.* Mathematical Bioeconomics. New York: John Wiley and Sons Inc. 1990.
3. *Pontryagin L., Boltjanskii V., Gamkrelidze R., Mishchenko E.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York, London: Interscience Publishers John Wiley and Sons Inc. 1962.

4. Wear D.N., Coulston J.W. Specifying forest sector models for forest carbon projections // J. of Forest Economics. 2019. Vol. 34, no. 1–2. P. 73–97. DOI: 10.1561/112.00000443

UDC 517.977

On Solving Dynamic Reconstruction Problems for Systems with Large Number of Controls

E.A. Krupennikov

IMM UB RAS, Ekaterinburg, Russia, krupennikov@imm.uran.ru

Abstract: The talk is devoted to the problem of the dynamic reconstruction of the normal control generating a realized trajectory of a dynamic control system. Inaccurate measurements of this trajectory obtained in real-time are used. Control systems with dynamics linear in controls and non-linear in state variables are considered. A new algorithm for solving dynamic control reconstruction problem is suggested. The results presented in this paper develop the ideas of a new approach for solving inverse problems of optimal control theory. This approach relies on necessary optimality conditions in auxiliary variational problems on extremum of a convexo-concave integral discrepancy functional.

Introduction

The paper is devoted to the problem of dynamic reconstruction of the normal control by known inaccurate measurements of the trajectory, which is being realized in real-time.

One of the most well-known approaches to inverse problems was developed by A.V. Kryazhinskii and Yu.S. Osipov [1]. It relies upon Tikhonov regularization [2] and the works of N.N. Krasovskii's school on the theory of optimal feedback control [3].

Another approach has been suggested by N.N. Subbotina, E.A. Krupennikov and T.B. Tokmantcev [4–6]. It relies on auxiliary variational problems on extremum of a regularized integral discrepancy functional. The innovation of the suggested method consists of using a functional, which is convex in the controls and concave in the state variables.

In this paper a modification of this approach is presented. It is designed for solving real-time dynamic reconstruction problems.

1. Dynamics

We consider dynamic control systems of the form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= G(x(t), t)u(t) + f(x(t), t), \quad t \in [0, T], \quad T < \infty, \\ x(\cdot) &: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \geq n, \\ G(\cdot) &: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad f(\cdot) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Admissible controls are piece-wise continuous functions $u(t) \in \mathbf{U}$, $t \in [0, T]$, $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$ is a convex compact set.

2. Input data

The trajectory $x^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ of system (1) is being generated in real-time by an admissible control. Inaccurate discrete measurements $\{y_k^\delta\}$ of this trajectory arrive with time step Δt :

$$\{y_k^\delta : \|y_k^\delta - x^*(t_k)\| \leq \delta, \quad t_k = k\Delta t, \quad k = 0, \dots, K, \quad K = \lceil T/\Delta t \rceil \in \mathbb{N}\}.$$

Hypothesis 1. $\exists \delta_0 > 0$: the elements of $G(x, t)$ and $f(x, t)$ are continuously differentiable in all variables on $(x, t) \in \Psi$, where

$$\Psi = \left(\bigcup_{t \in [0, T]} B_{4\delta_0}[x^*(t)] \right) \times [0, T].$$

Hypothesis 2. The rows of the matrix $G(x, t)$ are linearly independent on $(x, t) \in \Psi$.

3. The reconstruction problem

There exists [6] a unique normal control $u^*(\cdot)$ with minimal norm in L_2 space, that generates $x^*(\cdot)$.

Let us consider the following dynamic reconstruction problem: for an arbitrary $\delta \in (0, \delta_0]$, $j \in \mathbb{N}$, $2 \leq j \leq K$ and a set of measurements $\{y_0^\delta, \dots, y_j^\delta\}$, to construct a function $u^\delta(\cdot) : [0, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that:

C1. $u^\delta(\cdot)$ is extended in real-time with arrival of new measurements and it is an admissible control;

C2. $u^\delta(\cdot)$ generates a trajectory $x^\delta(\cdot)$ of system (1) with boundary condition $x^\delta(0) = y_0^\delta$ such that $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_{C[0, t_j]} = 0$;

C3. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u^\delta(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L_2[0, t_j]} = 0$.

4. Algorithm for solution construction

The construction is carried step-wise with the step Δt . On a j^{th} step:

1) The function $y^\delta(\cdot) : [0, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$, which is a cubical spline interpolation of the discrete measurements, is extended on $[t_{j-1}, t_j]$.

2) The following auxiliary variational problem is introduced: for a $\delta \in (0, \delta_0]$ and $\alpha > 0$ to find a pair of functions $\{x(\cdot), u(\cdot)\} \in C^1[t_{j-1}, t_j]$ that satisfy (1) and the boundary conditions

$$x(t_{j-1}) = y^\delta(t_{j-1}), \quad \dot{x}(t_{j-1}) = \dot{y}^\delta(t_{j-1}) \quad (2)$$

and provide an extremum (maximum) for the functional

$$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[-\frac{\|x(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u(t)\|^2}{2} \right] dt,$$

where α is a small regularizing [2] parameter.

The necessary conditions can be written in the form of Hamiltonian system, where the vector $s(\cdot)$ is the adjoint variables vector:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\alpha^{-2} G(x(t), t) G^T(x(t), t) s(t) + f(x(t), t), \\ \dot{s}_i(t) &= x_i(t) - y_i^\delta(t) + \frac{1}{\alpha^2} \left\langle s(t), \frac{\partial G}{\partial x_i}(x(t), t) G^T(x(t), t) s(t) \right\rangle \\ &+ \left\langle s(t), \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t), t) \right\rangle, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [t_{j-1}, t_j]. \end{aligned} \quad (3)$$

The boundary conditions are derived from (2):

$$\begin{aligned} x(t_{j-1}) &= y^\delta(t_{j-1}), \quad s(t_{j-1}) = -\alpha^2 [G(y^\delta(t_{j-1}), t_{j-1}) \\ &\times G^T(y^\delta(t_{j-1}), t_{j-1})]^{-1} (\dot{y}^\delta(t_{j-1}) - f(y^\delta(t_{j-1}), t_{j-1})). \end{aligned} \quad (4)$$

3) We construct the so-called cut-off function

$$\hat{u}_j^{\delta, \alpha}(t) = \begin{cases} u_j^{\delta, \alpha}(t), & u_j^{\delta, \alpha}(t) \in \mathbf{U}, \\ \operatorname{argmin}_{w \in \mathbf{U}} \|u_j^{\delta, \alpha}(t) - w\|, & u_j^{\delta, \alpha}(t) \notin \mathbf{U}, \end{cases} \quad (5)$$

where $u_j^{\delta,\alpha}(\cdot) = -\alpha^{-2}G^T(y^\delta(\cdot), \cdot)s_j(\cdot)$ is the control reconstructed from the solution $s_j(\cdot)$ of system

$$\begin{aligned}\dot{x}_j(t) &= -\alpha^{-2}G(y^\delta(t), t)G^T(y^\delta(t), t)s_j(t) + f(y^\delta(t), t), \\ \dot{s}_j(t) &= x_j(t) - y^\delta(t), \quad t \in [t_{j-1}, t_j].\end{aligned}\tag{6}$$

It is a linearization of system (3). On the first construction step the boundary condition for system (6) coincide with (4). On the next steps the boundary condition are

$$x_j(t_{j-1}) = x_{j-1}(t_{j-1}), \quad s_j(t_{j-1}) = s_{j-1}(t_{j-1}).$$

Relying upon [5], one can prove

Proposition 1. *Let assumptions 1,2 hold. Then, there exists a concordance rule $\alpha = \alpha(\delta)$, which is defined by δ_0 , $\mathbf{U}$ and the input data, such that the piece-wise defined function $\hat{u}^{\delta,\alpha(\delta)}(t) := \hat{u}_j^{\delta,\alpha(\delta)}$, $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, J$ satisfies **C1–C3** for any $J \in \{2, 3, \dots, K\}$.*

This work was supported by the project "New developments in perspective directions of energetics, mechanics and robotics" of conducting fundamental scientific research in the priority directions, defined by the Presidium of Russian Academy of Sciences.

REFERENCES

1. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. Modelling of a control in a dynamic system // Engng. Cybernetics. 1984. Vol. 21, no. 2. P. 38–47.
2. Tikhonov, A.N. Ob ustoyichivosti obratnih zadach [On the stability of inverse problems] // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1943. Vol. 39. P. 195–198. (in Russian).
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
4. Subbotina N.N., Tokmantsev T.B., Krupennikov E.A. On the solution of inverse problems of dynamics of linearly controlled systems by the negative discrepancy method // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. Vol. 291. P. 266–275. DOI: 10.1134/S0081543815080209.
5. Krupennikov E.A. Solution of inverse problems for control systems with large control parameter dimension // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 434–438. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.423.
6. Krupennikov E.A. A new approximate method for construction of the normal control // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 343–348. DOI: 10.1016/j.ifacol.2018.11.407.

On Lower-Bound Estimates of the Lyapunov Dimension and Topological Entropy via Pyragas Control

N.V. Kuznetsov^{1,2}, T.N. Mokaev¹, T.A. Alexeeva³

¹ Faculty of Mathematics and Mechanics, St. Petersburg State University, Russia

² Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Russia

³ National Research University Higher School of Economics, Russia
n.v.kuznetsov@spbu.ru

Abstract: In this lecture, the applications of the Pyragas time-delay feedback control technique and Leonov analytical approach for estimation of Lyapunov dimension and topological entropy in the framework of studying the Eden's conjecture are discussed. The problem of reliable numerical computation of the mentioned dimension-like characteristics along the trajectories over large time intervals is demonstrated.

Keywords: chaos, Lyapunov dimension, Lyapunov exponents, unstable periodic orbit, time-delay feedback control.

Introduction

For the study of chaotic dynamics of attractors, the concept of the Lyapunov dimension, suggested by Kaplan and Yorke, was found useful and became widely spread [1]. Following the statistical physics approach and assuming the ergodicity (see, e.g. [2, 3]), the Lyapunov dimension of the attractor is often estimated by the local Lyapunov dimension, corresponding to a “typical” trajectory, which belongs to the attractor, and its limit value. However, from a practical point of view, the rigorous verification of ergodicity is a challenging task (see, e.g. discussions in [1, p. 118]). Also, since only a finite time can be considered in the numerical analysis of the dynamical system, in this lecture a “nonergodic” concept of the finite-time Lyapunov dimension (FTLD) [4], and approaches to its reliable numerical computation are discussed.

1. Lower-bound estimates of the Lyapunov dimension

Lower-bound estimates for Lyapunov dimension of an attractor could be obtained via the stabilization of unstable periodic orbits (UPOs) embedded in it. One of the effective methods for the numerical visualization

of the UPOs is the *time-delay feedback control* (TDFC) approach, suggested by K. Pyragas [5]. The main idea behind the Pyragas' approach for the stabilization of an UPO $u^{\text{upo}}(t)$ with period $\tau > 0$ in the system $\dot{u} = f(u)$ is to apply a feedback control $K[u(t - T) - u(t)]$, which is proportional to the difference between the current state $u(t)$ and an earlier state of the system $u(t - T)$ (delayed by some time value T). If $T = \tau$, then $K[u(t - T) - u(t)] = 0$ along the UPO, and the periodic solutions of the controlled and initial systems coincide.

Remark that the problem of computation of the Lyapunov dimension and topological entropy in the framework of the study of the Eden's conjecture and its various refinements [4, 6, 7] is important in tasks of estimating the intensity of information exchange, necessary and sufficient for observation/stabilization of systems with nonlinear dynamics through communication channels with limited bandwidth [8].

To illustrate the described approach, consider the Rössler system:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + 0.2y, \quad \dot{z} = 0.2 - 5.7z + xz, \quad (1)$$

with a *chaotic set* $\mathcal{A}$ (locally attractive in numerical experiments), which is self-excited [9] with respect to equilibria $O^+ = (5.693, -28.4649, 28.4649)$, and $O^- = (0.007, -0.0351, 0.0351)$.

For a dynamical system $\varphi^t(u_0) = u(t, u_0)$ generated by Eq. (1) we consider the concept of the *finite-time Lyapunov dimension* [4, 6], which is convenient for carrying out numerical experiments with finite time:

$$\dim_{\text{L}}(t, u) = j(t, u) + \frac{\text{LE}_1(t, u) + \dots + \text{LE}_{j(t, u)}(t, u)}{|\text{LE}_{j(t, u)+1}(t, u)|},$$

where $j(t, u) = \max\{m : \sum_{i=1}^m \text{LE}_i(t, u) \geq 0\}$, and $\{\text{LE}_i(t, u)\}_1^3$ is an ordered set of finite-time Lyapunov exponents (FTLEs). Then the *finite-time Lyapunov dimension* of dynamical system generated by (1) on compact invariant set $\mathcal{A}$ is defined as: $\dim_{\text{L}}(t, \mathcal{A}) = \sup_{u \in \mathcal{A}} \dim_{\text{L}}(t, u)$.

According to *Douady–Oesterlé theorem*, for any fixed $t > 0$ the FTLD is an upper estimate of the Hausdorff dimension: $\dim_{\text{H}} \mathcal{A} \leq \dim_{\text{L}}(t, \mathcal{A})$. The best estimation is called the *Lyapunov dimension* [6]: $\dim_{\text{L}} \mathcal{A} = \inf_{t > 0} \sup_{u \in \mathcal{A}} \dim_{\text{L}}(t, u)$.

Using the feedback gain $K = 0.3$ we stabilized the UPO $u^{\text{upo}} = \{u^{\text{upo}}(t), t \in [0, \tau]\}$ with period $\tau = 5.8811$ by the trajectory on the time interval $t \in [0, 1000]$ with initial data $u_0 = (1, 1, 1)$ on $[0, -\tau]$. Then for

the initial points u_0^{upo} , chosen on the UPO u^{upo} , we numerically compute the largest FTLE, $\text{LE}_1(t, u_0^{\text{upo}})$, and FTLD, $\text{dim}_L(t, u_0^{\text{upo}})$, along the trajectories integrated with ($K = 0.3$) and without the stabilization ($K = 0$) on sufficiently large time interval $[0, T = 500]$ (see Fig. 1). On the initial small time interval $[0, T_{\text{match}} \approx 127]$, even without the control, the obtained trajectory $\tilde{u}(t, u_0^{\text{upo}})$ traces approximately the “true” periodic orbit u^{upo} , and computed values of the largest FTLE and FTLD coincide of up to the 3th decimal place. But for $t > T_{\text{match}}$, without the control, the trajectory $\tilde{u}(t, u_0^{\text{upo}})$ diverge from u^{upo} , winds on the attractor $\mathcal{A}$, and the difference in computed values becomes significant.

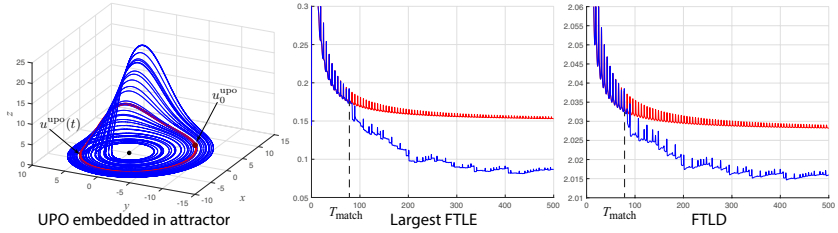


Figure 1. Numerical computation of the largest FTLE and FTLD for the time interval $t \in [0, 500]$ along the UPOs $u^{\text{upo}}(t)$ (red) and along the trajectory integrated without stabilization (blue). Initial point: $u_0^{\text{upo}} = (6.491, -7.0078, 0.1155)$ (dark red).

Further, for the Rössler system (1) we have confirmed the Eden conjecture and obtained the following relations between the Lyapunov dimensions: $3 = \text{dim}_L O^+ > 2.0341 = \text{dim}_L O^- > 2.0283 = \text{dim}_L(500, u^{\text{upo}}) > 2.0160 = \max_{u \in \mathcal{C}_{\text{grid}}} \text{dim}_L(500, u)$ and various values of topological entropy: $0.2799 = H_{\text{loc}}(O^-) > 0.2784 = H_{\text{loc}}(O^+) > 0.2219 = H_{\text{loc}}(500, u^{\text{upo}}) > 0.1250 = \max_{u \in \mathcal{C}_{\text{grid}}} H_{\text{loc}}(500, u)$.

Then for any invariant set or attractor containing period-1 UPO: $\mathcal{A} \supset u^{\text{upo}}$, we have the following lower-bound estimates for the Lyapunov dimension: $\text{dim}_L \mathcal{A} \geq 2.0283 \approx \text{dim}_L(u^{\text{upo}})$, and the topological entropy: $H(\mathcal{A}) \geq 0.2219 \approx H_{\text{loc}}(u^{\text{upo}})$.

2. Upper-bound estimates of the Lyapunov dimension

Along with numerical methods for computing the finite-time Lyapunov dimension, in this lecture we also discuss an effective analytical approach [6, 10].

Theorem 1. For any $u_0 \in U$, let $\lambda_1(u_0, S) \geq \dots \geq \lambda_n(u_0, S)$ be the eigenvalues of the matrix $1/2 (SJ(u(t, u_0))S^{-1} + (SJ(u(t, u_0))S^{-1})^*)$. Here $J(u) = Df(u)$ is the $n \times n$ Jacobian matrix. Let $d = (j + s) \in [1, n]$ with integer $j = \lfloor d \rfloor \in \{1, \dots, n\}$ and real $s = (d - \lfloor d \rfloor) \in [0, 1]$. If there exist a differentiable scalar function $V : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ and a nonsingular $n \times n$ matrix S such that

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} [\lambda_1(u, S) + \dots + \lambda_j(u, S) + s\lambda_{j+1}(u, S) + \text{grad}(V)^* f(u)] < 0,$$

then $\dim_{\mathbb{L}} \mathcal{A} \leq \dim_{\mathbb{L}}(T, \mathcal{A}) \leq j + s$ for all sufficiently large $T > 0$.

This method allows to obtain upper-bound estimates for the Lyapunov dimension of an invariant set $K \subset U$ without its localization in the phase space and to get exact Lyapunov dimension formula for attractors of various well-known dynamical systems (see e.g. [6, 9, 10]).

This work was supported by the Russian Science Foundation 19-41-02002.

REFERENCES

1. Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., Vattay G. Chaos: Classical and Quantum. Copenhagen: Niels Bohr Institute, 2016. <http://ChaosBook.org>.
2. Oseledets V. A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems // Tr. Mosk. Mat. Obs. 1968. Vol. 19. P. 179–210. (in Russian)
3. Kaplan J., Yorke J. Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations. In: Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points. Lecture Notes in Math., vol 730. Springer, Berlin, 1979. P. 204–227.
4. Kuznetsov N., Leonov G., Mokaev T., Prasad A., Shrimali M. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // Nonlinear Dynam. 2018. Vol. 92, no. 2. P. 267–285.
5. Pyragas K. Continuous control of chaos by selfcontrolling feedback // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 170. P. 421–428.
6. Kuznetsov N. The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method // hys. Lett. A. 2016. Vol. 380, no. 25–26. P. 2142–2149.
7. Kuznetsov N., Mokaev T., Kudryashova E., Kuznetsova O., Danca M.-F. On lower-bound estimates of the Lyapunov dimension and topological entropy for the Rossler systems // 15th IFAC Workshop on Time Delay Systems, 2019.
8. Matveev A., Pogromsky A. Observation of nonlinear systems via finite capacity channels, Part II: Restoration entropy and its estimates // Automatica. 2019. Vol. 103. P. 189–199.
9. Leonov G., Kuznetsov N., Mokaev T. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // Eur. Phys. J. Special Topics. 2015. Vol. 224, no. 8. P. 1421–1458.
10. Leonov G. On estimations of Hausdorff dimension of attractors // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 1991. Vol. 24, no. 3. P. 38–41.

Integral Decrease Principle and Robust Stabilization of Nonlinear Control Systems

Yu.S. Ledyae^{1,2}

¹ Western Michigan University, Kalamazoo, USA,

² Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia
ledyaev@wmich.edu

Abstract: We discuss mathematical techniques for constructing discontinuous stabilizing feedback which is robust with respect to external disturbances, actuator and measurement errors

Keywords: nonlinear control systems, stabilization problems, asymptotic controllability

Introduction

In this presentation we discuss a unified framework for a design of discontinuous stabilizing feedback which is robust with respect to external disturbances, actuator errors and to state vector measurement errors.

Let nonlinear control system

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \quad (1)$$

be asymptotically controllable which means for any starting (initial) point there exists an open-loop (program) control $u(t)$ which drives a trajectory $x(t) \in \mathbb{R}^n$ of system (1) to the origin in some uniform manner.

One of approaches to the problem of designing closed-loop (feedback) control $u = k(x)$ is based on the classical stability theory by assuming an existence of differentiable Lyapunov function $V(x)$ and positive function $W(x)$ which is proper, positive definite and satisfies the following infinitesimal decrease condition for some continuous feedback $k(x)$

$$\langle \nabla V(x), f(x, k(x)) \rangle \leq -W(x). \quad (2)$$

Then by using traditional argument we can show that the origin is also an asymptotically stable equilibrium of the closed-loop system

$$\dot{x} = f(x, k(x)). \quad (3)$$

The function $V(x)$ is called a *control Lyapunov function* and the condition (2) is called *infinitesimal decrease condition*.

Unfortunately this natural (from the point of view of classical stability theory) approach does not work in general.

It was shown that there exist topological obstacles to existence of smooth control Lyapunov functions and to existence of continuous stabilizing feedback $k(x)$.

Thus, there was a need to consider discontinuous stabilizing feedback which required to introduce an appropriate concept of solution of the differential equation (3) with discontinuous right-hand side.

The second challenge was related to the fact that the design of this discontinuous feedback should be based on nonsmooth (non-differentiable) control Lyapunov functions for which the classical infinitesimal decrease condition (2) should be replaced by the condition in terms of lower Dini directional derivatives at any $x \neq 0$

$$\min_{f \in \text{cof}(x, U)} DV(x; f) < -W(x) < 0,$$

which is equivalent to the following infinitesimal decrease condition in terms of proximal subgradients V' of the Lyapunov function $V(x)$

$$\min_{u \in U} \langle V', f(x, u) \rangle < -W(x), \forall V' \in \partial_P V(x).$$

1. Discontinuous Stabilizing Feedback

The long-standing open question on existence of stabilizing feedback for asymptotically controllable nonlinear system was answered positively in mid-1990s by Clarke, Ledyaev, Sontag and Subbotin.

Their construction of stabilizing feedback was based on the Sontag's characterization of asymptotically controllable systems in terms of existence of continuous nonsmooth control Lyapunov function, on a concept of *sample-and-hold* discontinuous feedback from Krasovskii and Subbotin's theory of positional differential games and on proximal subgradients calculus techniques for nonsmooth functions developed by Clarke and Ledyaev.

The concept of sample-and-hold discontinuous feedback presents a convenient model of computer-based digital controller, it is assumed that on the interval $[t_i, t_{i+1})$ between sampling moments the discontinuous feedback $k(x)$ determines the constant control $u_i = k(x(t_i))$ and the

solution of the closed-loop system (3) is defined as the solution of the ordinary differential equation

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

The importance of feedback control lies not only in automation of control process. Another important aspect of the feedback control $k(x)$ is its robustness (insensitivity) with respect to errors and disturbances. Namely, the solutions of perturbed system

$$\dot{x} = f(x, k(x + e(t)) + a(t)) + w(t)) \quad (4)$$

for small external disturbances $w(t)$, actuator errors $a(t)$ and measurement errors $e(t)$ should be driven close to the equilibrium state 0.

Certainly, study of robustness properties of discontinuous feedback requires a development of special mathematical techniques.

In this talk we discuss a general approach to construction of such robust stabilizing feedback. It is based on a construction of some auxiliary function $\tilde{V}$ which satisfies some *Integral Decrease Principle*.

We demonstrate that this universal framework which is based on Integral Decrease Principle can be used for robust stabilizing feedback's design and provides estimates for errors and disturbances bounds under which the perturbed system (4) stays asymptotically stable.

UDC 517.9

Optimal Control of a Market Economy with Endogenous Fertility and Deadly Emissions

U. Lehmijoki¹, T. Palokangas²

¹ University of Helsinki, Helsinki, Finland, ulla.lehmijoki@helsinki.fi

² University of Helsinki, Helsinki, Finland, tapio.palokangas@helsinki.fi

Abstract: We examine optimal population policy in an economy (i) where households dictate their number of children, save for capital and attempt to decrease their mortality by spending on health care, (ii) firms produce output from labor and capital, and (iii) the accumulation of population and capital generates mortal emissions. To establish the Pareto optimum, capital income must be taxed at the rate equal to the marginal emissions of capital per head all the time. The increase of the household size must be taxed at the rate

equal to the present cost of the flow of aggregate emissions until the steady state is reached.

Keywords: Stackelberg differential game, singular control, Uzawa transformation, saddle-point stability, growth of human population.

Introduction

We examine optimal environmental policy in a model where firms produce output from labor and capital with constant returns to scale and families decide on their consumption, saving, fertility and health care. We construct a *Stackelberg differential game* (cf. [1]), where the representative *family* is the *follower* that consumes, rears children, saves in capital and invests in its health, taking the taxes and aggregate deadly emissions as exogenous, and the *government* is the *leader* that determines taxes, observing the dependence of mortality on emitting production.

1. The economy as a whole

Population (labor force) L grows at the rate that is equal to the fertility rate f minus the mortality rate m :

$$\dot{L}/L = f - m, \quad L(0) = L_0, \quad (1)$$

where t is time and $\dot{L} = dL/dt$. We assume that one unit of labor is needed to rear one newborn. Then, fL units of labor L used for that and the remainder $(1 - f)L$ in production. Output Y is used in consumption C , investment in capital K and spending on health care H . It is produced from labor $(1 - f)L$ and capital L according to

$$Y = F(K, (1 - f)L), \quad F_K > 0, \quad F_L > 0, \quad F_{KK} < 0, \quad (2)$$

$$F_{LL} < 0, \quad F_{KL} > 0, \quad F_{LL} < 0, \quad F \text{ linearly homogeneous,}$$

where F subscripts K and L denote the partial derivatives of F with respect to capital K and labor $(1 - f)L$, correspondingly. We define macroeconomic variables or functions in proportion to population L :

$$c \doteq \frac{C}{L}, \quad h \doteq \frac{H}{L}, \quad k \doteq \frac{K}{L}, \quad \frac{Y}{L} = F(k, 1 - f) \doteq y(k, f), \quad (3)$$

$$y_k = F_K(k, 1 - f) > 0, \quad y_f = -F_L(k, 1 - f) < 0,$$

$$y_{kf} = -F_{KL} < 0, \quad y_{kk} = F_{KK} < 0,$$

where subscripts k and f denote the partial derivatives of y with respect to k and f , correspondingly. Because the firms are competitive, the marginal products of capital F_K and labor F_L are equal to the interest rate r and the wage w , correspondingly. This and (3) yields

$$\begin{aligned} r &= F_K = y_k, & w &= F_L, & y_f &= -K_L = -w, \\ y &= F_L(1 - f) + F_K k = (1 - f)w + rk. \end{aligned} \quad (4)$$

We assume that aggregate emissions S are a linearly homogeneous function of capital K and population L [cf. (3)]:

$$S(K, L), \quad s(k) \doteq S(K, L)/L = S(k, 1), \quad s' > 0. \quad (5)$$

The government sets a poll tax $a \leq 1$ on labor, the tax $\tau \leq 1$ on capital income rK , the parental tax x on fertility fL , and the tax z on an increase of the household size, $\dot{L} = (f - m)L$ [cf. (1)]. Its budget is balanced, if $aL + xfL + \tau rK + z\dot{L} = 0$ or [cf. (3)]

$$a + xf + \tau rk + z(f - m) = 0. \quad (6)$$

To obtain interpretable policy rules, the taxes (x, z) are chosen from the *set of constant controls*, and the tax τ the *set of continuously-evolving controls*, i.e. it cannot make discontinuous jumps.

Because total emissions S are a public good that increase every individual's mortality rate m , but each individual can decrease its mortality by its spending h on health care, we assume the following function

$$h = S - v(m) \Leftrightarrow m = v^{-1}(S - h). \quad (7)$$

At each moment t , an individual derives utility $u(t)$ from its consumption per head, $c(t)$, and the fertility rate in its family, $f(t)$. With the mortality rate $m(t)$, its expected utility for period $t \in [0, \infty)$ is

$$\int_0^\infty [\ln c(t) + \beta \ln f(t) + \eta] e^{-[\rho + m(t)]t} dt, \quad (8)$$

where $\beta > 0$ is a constant and η is a constant that ensures $u > 0$.

2. The family

The family chooses its consumption per head, c , fertility rate f and health care h . We replace health care h by the mortality rate m as the

family's control variable, for convenience. The family saves in capital K :

$$\dot{K} = Y - C - H - \mu K - [a + xf + \tau rk + z(f - m)]L, \quad K(0) = K_0,$$

where Y is output, C consumption, H spending on health care, $\mu > 0$ the constant depreciation rate of capital K and $[a + xf + \tau rk + z(f - m)]L$ tax expenditures (6). Noting (1), (3), (4) and (7), this constraint can be converted into per capita terms as follows:

$$\dot{k} = [(1 - \tau)r + m - \mu]k - (w + k + x + z)f + w - c - h - a + zm. \quad (9)$$

We eliminate the mortality rate m from the discount factor in the utility function (8) by Uzawa's transformation [3] into virtual time, $\theta(t) = [\rho + m(t)]t$. Noting this, (8) and (9), the family's optimal program is

$$\max_{c, f, m} \int_0^\infty \frac{\ln c(\theta) + \beta \ln f(\theta) + \eta}{\rho + m(\theta)} e^{-\theta} d\theta \quad \text{subject to} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dk}{d\theta} &= \frac{1}{\rho + m} \{ [(1 - \tau)r + m - \mu]k + v(m) - S + w \\ &\quad + zm - c - (w + k + x + z)f - a \}, \quad k(0) = k_0. \end{aligned} \quad (11)$$

This leads to the *Euler equation* and the *fertility rate function*:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\rho + m}{c} \frac{dc}{d\theta} = (1 - \tau)r - \rho - \mu - f, \quad f \doteq \frac{\beta c}{w + k + x + z}. \quad (12)$$

3. The government

The government maximizes utility (10) by setting the capital income tax τ and by controlling the fertility rate f the parental tax x and the mortality rate by the tax on the increase of the family, z , subject to the Euler equation [cf. (12)], and the evolution of population (1) and capital per head, (9). By Uzawa's transformation $\theta(t) = [\rho + m(t)]t$, this program takes the form

$$\begin{aligned} &\max_{c, f, m} \int_0^\infty \frac{\ln c(\theta) + \beta \ln f(\theta) + \eta}{\rho + m(\theta)} e^{-\theta} d\theta \quad \text{subject to} \\ \frac{dc}{d\theta} &= \frac{c}{\rho + m} [(1 - \tau)r - \rho - \mu - f], \quad \frac{dL}{d\theta} = \frac{f - m}{\rho + m} L, \quad L(0) = L_0, \end{aligned}$$

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{1}{\rho + m} [y(k, f) - c + (m - f - \mu)k + v(m) - s(k)L], \quad k(0) = k_0.$$

In the government's maximization, the capital income tax τ is a singular control that must be solved by the *generalized Glebsch-Legendre conditions* (cf. [2, P. 131–134]). The government's program contains two predetermined variables k and L and one non-predetermined variable c . It is saddle-point stable for common parameter values.

Proposition 1. *The optimal capital income tax is equal to the marginal emissions of capital per head, $\tau = s'(k)L$, and the optimal tax on the increase of the family size equal to the present cost of the flow of emissions, $z = \frac{S}{\rho + m}$. The parental tax per child can be eschewed, $x = 0$.*

Tapio Palokangas thanks IIASA for the opportunity to prepare this document during his visit in November 2018.

REFERENCES

1. Basar T., Olsder G.J. Dynamic Noncooperative Game Theory. New York: Academic Press, 1989.
2. Grass D., Caulkins J.P., Feichtinger G., Tragler G., Behrens D.A. Optimal Control of Nonlinear Processes. Heidelberg: Springer Verlag, 2008.
3. Uzawa H. Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings. In: Value, Capital, and Growth (ed. J. Wolfe). Chicago: Aldineer, 1968. P. 485–505.

UDC 517.9

Convex Trigonometry with Applications to Sub-Finsler Geometry

L.V. Lokutsievskiy

Steklov Mathematical Institute of RAS; Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia, lion.lokut@gmail.com

Abstract: In the talk, I will speak about a new convenient method for describing plane convex compact sets and their polars that generalizes the classical trigonometric functions $\cos$ and $\sin$. The properties of this pair of functions in the case of the unit circle are inherited by two pairs of functions $\cos_\Omega$, $\sin_\Omega$ and $\cos_{\Omega^\circ}$, $\sin_{\Omega^\circ}$ for the set Ω itself and its polar Ω° . This method turned out to be very useful for describing solutions of optimal control

problems with two-dimensional control in explicit form. With its help, in 2018, I managed to explicitly find geodesics in a series of sub-Finsler problems for the cases of Heisenberg, Grushin, Martinet, Engel, and Cartan. In 2019, together with Yu.L. Sachkov and A.A. Ardentov, we solved more than 10 classical problems with 2D control. For example, in the talk I will discuss Finsler geodesics on the Lobachevsky hyperbolic plane.

Keywords: convex trigonometry, optimal control, sub-Finsler, 2D control

The work is financially supported by Russian Foundation for Basic Research under project 17-01-00805.

REFERENCES

1. *Lokutsievskiy L.V.* Convex Trigonometry with Applications to Sub-Finsler Geometry. 2018. arXiv: 1807.08155 [math.OC]

UDC 517.977

UAV Path Planning in Search and Rescue Operations

B.M. Miller¹, G.B. Miller², K.V. Semenikhin³

¹ IPPI RAS, Moscow, Russia, bmiller@iitp.ru

² IPI FRC CSC RAS, Moscow, Russia, gmiller@frcsc.ru

³ MAI, Moscow, Russia, siemenkv@rambler.ru

Abstract: Unmanned aerial vehicle (UAV) search operations usually involve two consequent steps. The first one is the observation of the area of interest and capturing the data with the aid of optoelectronic cameras, and the second one is the data transmission to the flight control center. After capturing the data UAV must find an appropriate position to perform successful transfer of the information flow. In this paper, UAV search mission planning is considered as a path optimization problem. The optimization goal is to set up the best conditions for data capturing and transmission under velocity and timing mission constraints.

Keywords: UAV, search and rescue, path planning, data acquisition.

Introduction

Nowadays UAVs search and rescue missions become more and more important in various areas including the search of missing persons in various circumstances such as forest fires, earthquakes, shipwrecks etc. [1, 2].

The typical approach to the operation planning is based on the usage of a swarm of UAVs which provides maximum coverage of the operation area [3, 4]. In this case, the optimization of the search mission may be formulated as a scheduling problem with a constraint for each UAV to spend enough time in the assigned research area [5]. Though this approach takes into account the limited UAV's power resources and overall mission time limits, it ignores the quality of the gathered and transmitted information [3, 6]. In the planning of the search, besides the time and power constraints, one needs to take into account the quality of observations and transmission that depend on chosen UAV's trajectory.

1. Problem statement and the model description

UAV motion and utility model. In this research we use rather simple motion model, like in [7] assuming the planar motion at constant altitude with constant velocity

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}_1(t) = V \cos \gamma(t), \quad \dot{x}_2(t) = V \sin \gamma(t), \quad (1)$$

where $V \in [V_{min}, V_{max}]$ is a given constant velocity, $t \in [0, T]$ with fixed mission time limit T , and the control parameter is the yaw angle $\gamma(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$. The initial X_0 and terminal X_T points of the flight are known. During its mission the UAV must visit the vicinity of the set observation points, which are localized at $S = \{X_{ob}^m(t)\}$ and may change their positions with time.

The position of a base station (BS) $X_{bs}(t)$ is also known. The wireless channel between the UAV and the BS is assumed to be stochastic like in [8].

Each channel state corresponds to a certain noise level $1/\ell_k$, so if the signal level is u_t , then the product $\ell_k u_t$ is equal to the signal-to-noise ratio and thus $\log(1 + \ell_k u_t)$ is the instantaneous channel capacity in the corresponding state e_k [9].

Internal data transmission optimization. Data transmission optimization problem is to maximize the amount of useful information transferred along the fixed path of the UAV minus power consumed for this transmission. An optimization criterion, which corresponds to this

optimization goal can be defined in the following form

$$J_0[\gamma, u] = E^u \left\{ \int_0^T \nu \log(1 + \langle \ell, \mathbf{X}_t \rangle u_t) - \kappa u_t dt \right\} \rightarrow \max_{u=\{u(\cdot)\}}, \quad (2)$$

where $\ell = \text{col}(\ell_1, \dots, \ell_M)$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the scalar product; coefficient $\nu > 0$ determines the utility of the information transmitted via the channel; the linear term κu_t stands for the power consumed for the transmission at level u_t and hence the coefficient $\kappa > 0$ determines the strictness of overall power consumption constraint. Parameters ℓ_k and ν as well as the channel state $\mathbf{X}_t$ depend on the UAV position $X(t)$, therefore, the functional in the whole depends on the control $\gamma(\cdot)$.

The *utility model* is based on relation between ν and the distance between the UAV position $X(t)$ and the area S assigned for observation.

External optimization: surveillance path planning. This part of the problem uses the optimal criterion value obtained for the signal level u_t , which delivers a solution to (2), and maximizes it via yaw angle $\gamma = \gamma(t)$ with respect to the UAV dynamics equation (1):

$$\bar{J}[\gamma] = \max_{u=\{u_t\}} J_0[\gamma, u] - \kappa_T \|X(T) - X_T\|^2. \quad (3)$$

The coefficient κ_T is responsible for the accuracy of the arrival to the terminal point X_T .

2. Computer simulation

In this section we provide a numerical simulation of the model (1)–(3) with the following specifications:

- observation interval is $t \in [0, 60]$ min;
- observable object is a single point which moves from $X_{ob}(0) = (-1.31, -0.52)$ to $X_{ob}(T) = (3.77, 7.62)$ along the path shown in Fig. 1 (white dash line) with constant speed;
- UAV starts at $X_0 = (2.0, -1.0)$ and is aimed to finish around $X_T = (7.5, -4.0)$;
- UAV speed is subject to optimization within the bounds $V \in [0, 50]$ km/h;
- coefficient of the return accuracy significance is $\kappa_T = 0.05$ 1/km².

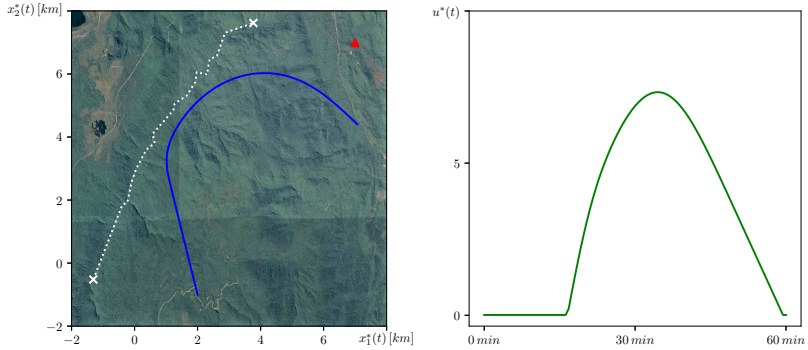


Figure 1. Left: observation point path (white dash line), base station position (red triangle), and UAV optimal path (blue curve). Right: optimal signal level $u^*(t)$ (green line).

— observation utility function is given by $\nu(X(t)) = 1/(1 + d^2/d_0^2)$, where $d = d(X(t))$ is the distance between the UAV and the observable object $d = \|X(t) - X_{ob}(t)\|$ and $d_0 = 2.5$ km is the distance where the utility halves in comparison with its value right above the object;

— position of the BS is $X_{bs} = (7.0, 7.0)$ (red triangle in Fig. 1) and it is not changing with time;

— noise level depends on the distance $r = \|X(t) - X_{bs}\|$ between the BS and the UAV: $\ell(X(t)) = 1/(1 + r^2/r_0^2)$, where $r_0 = 2.0$ km is a distance where the noise level is twice as high as above the BS;

— coefficient of the energy constraint strictness in (2) is $\kappa = 0.05$.

Solution of the optimal control problem is obtained on the basis of the algorithm described in [7]. Optimal path and the correspondent optimal signal level are shown in Fig. 1.

This work is partially supported by the Russian Foundation of Basic Research (RFBR Grant No. 19-07-00187-A).

REFERENCES

1. Waharte S., Trigoni N. Supporting search and rescue operations with UAVs // Int. Conf. on Emerging Security Technologies (EST 2010, Canterbury, UK, 6–7 Sept. 2010): proc. IEEE Xplore, 2010.
2. Schumacher C., Chandler Ph., Pachter M., Pachter L. Constrained optimization for UAV task assignment // AIAA Guidance, Navigation, and Control Con-

- ference and Exhibit (Providence, Rhode Island, USA, 16–19 Aug. 2004): proc. 2004.
3. *Hoang V.T., Phung M.D., Dinh T.H., Ha Q.P.* Angle-encoded swarm optimization for UAV formation path planning // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS 2018, Madrid, Spain, 1–5 Oct. 2018): proc. IEEE Xplore, 2018. P. 5239–5244.
 4. *Barkley B.E., Paley D.A.* Multi-target detection, tracking, and data association on road networks using unmanned aerial vehicles // IEEE Aerospace Conf. (Big Sky, MT, USA, 4–11 March 2017): proc. 2017.
 5. *Rasmussen S.J., Shima T.* Tree search algorithm for assigning cooperating UAVs to multiple tasks // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2008. Vol. 18. P. 135–153.
 6. *Grøtli E.I., Johansen T.A.* Path- and data transmission planning for cooperating UAVs in delay tolerant network // IEEE Globecom Workshops (Anaheim, CA, USA, 3–7 Dec. 2012): proc. IEEE Xplore, 2013. P. 1568–1573.
 7. *Andreev M.A., Miller A.B., Miller B.M., Stepanyan K.V.* Path planning for unmanned aerial vehicle under complicated conditions and hazards // J. Comput. Syst. Sci. Int., 2012. Vol. 51, no. 2. P. 328–338.
 8. *Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V.* Optimization of the data transmission flow from moving object to nonhomogeneous network of base stations // IFAC-PapersOnLine, 2017. Vol. 50, no. 1. P. 6160–6165.
 9. *Golomb S.W., Peile R.E., Scholtz R.A.* Basic Concepts in Information Theory and Coding. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 1994.

UDC 517.9

Optimal Taxation with Endogenous Population Growth and the Risk of Environmental Disaster

T. Palokangas

University of Helsinki, Helsinki, Finland, tapio.palokangas@helsinki.fi

Abstract: This study considers a market economy where firms produce goods from labor and capital and households save in capital, spend on mortality-decreasing health care and derive utility from their consumption and number of children, without caring of their adult offspring. The economy faces the risk that population growth and capital accumulation triggers a deadly environmental disaster. To solve optimal public policy, a leader-follower game between the government and the representative household is constructed. This shows that before the occurrence of the disaster, Pareto optimum can be restored by a temporary tax on capital income.

Keywords: Random regime switch, stochastic dynamic programming, leader-follower game, environmental disaster, endogenous fertility, endogenous mortality.

Introduction

The setup of public policy is modeled as a *Stackelberg game*, where both the leader's and follower's programs are solved by stochastic dynamic programming. The follower is the representative *household* that dictates its consumption per head, its spending on health care per head and its fertility rate, taking the taxes and the mortality rate as given. The leader is the *government* that determines the taxes, observing the follower's behavior, the behavior of the firms, the budget constraint of its own and the external effect of population growth and capital accumulation through pollution and mortality.

1. The economy as a whole

In the model, time t is continuous. Population L grows at the rate that is equal to the fertility rate f minus the mortality rate m :

$$\dot{L}/L = f - m, \quad L(0) = L_0, \quad (1)$$

where $\dot{L} \doteq dL/dt$. The units are normalized so that one unit of labor is needed to rear one newborn. Then, fL units of labor L is devoted to rearing babies and the remainder $B \doteq (1 - f)L$, to production. Output Y is used in consumption, spending H on health care and investment $I \doteq \dot{K}$ in capital K , where it is defined that production Y includes also the depreciation of capital, for simplicity. Output Y is produced from capital K and productive labor B according to neoclassical technology:

$$Y = F(K, B), \quad F_K \doteq \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad F_B \doteq \frac{\partial F}{\partial B} > 0, \quad F_{KK} \doteq \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,$$

$$F_{BB} \doteq \frac{\partial^2 F}{\partial B^2} < 0, \quad F_{KB} \doteq \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial B} > 0, \quad F \text{ linearly homogeneous.}$$

Per head values are denoted by $y \doteq Y/L$, $k \doteq K/L$ and $b \doteq B/L$. Because the firms are competitive, there are no pure profits and the marginal product of capital F_K is equal to the interest rate r , the marginal products of labor F_B equal to the wage w , correspondingly:

$$y(k, f) = F(k, b) = F_B b + F_K k = bw + rk = (1 - f)w + rk,$$

$$r = F_K(k, b) = y_k, \quad w = F_B(k, b), \quad y_f = -F_B(k, b) = -w.$$

Capital K and population L pollute according to $P = K^\gamma L^{1-\gamma} = k^\gamma L$, where $0 < \gamma < 1$ is a constant. The probability π of the environmental disaster q is an increasing function of pollution P :

$$q = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \pi(P), \\ 0 & \text{with probability } 1 - \pi(P), \end{cases} \quad \pi' > 0.$$

The environmental shock q increases every individual's mortality rate m simultaneously, but each individual can decrease its mortality rate m by spending h on health care with increasing marginal costs:

$$h = gq + z(-m), \quad \frac{dh}{d(-m)} = z' > 0, \quad \frac{d^2h}{d(-m)^2} = z'' > 0, \quad g \text{ constant.} \quad (2)$$

The government sets a poll tax a per head, the tax $\tau \in (-\infty, 1)$ on capital income rK , the tax x on the number of children, fL and the tax χ on an increase of the household size, $\dot{L} = dL/dt$ with the budget [cf. (1)]

$$aL + xfL + \tau rK + \chi \dot{L} = 0 \Leftrightarrow a + xf + \tau rk + \chi(f - m) = 0.$$

2. The household

Saving per head, $s = \dot{k}$, and the fertility rate f are the household's controls. By (2), the mortality rate m can replace leath spending h as the household's control. At each moment t , an individual's utility u is a function of consumption c and the fertility rate f in its household. With the mortality rate $m(t)$, its expected utility for period $t \in [\zeta, \infty)$ is

$$\int_{\zeta}^{\infty} u(t)^{\sigma} e^{(\rho+m)(\zeta-t)} dt \quad \text{with } u(t) \doteq c(t)f(t)^{\alpha}, \quad 0 < \sigma < 1, \quad \alpha > 0,$$

where σ and α are constants. To eliminate the mortality rate m from the discount factor of the utility function, Uzawa's transformation in [2] is used: $\theta(t) = (\rho + m)t$ with $dt = d\theta/(\rho + m)$. Because $\theta(\zeta) = \zeta$, $\theta(\infty) = \infty$ and $dt/d\theta = 1/(\rho + m) > 0$ hold true, then $\theta(t)$ can be defined as an alternative time variable and the value function at initial time ζ is given by

$$\Phi(k, w, r, q, a, x, \tau, \chi, \zeta) \doteq \max_{s(\zeta), f(\zeta), m(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{c^{\sigma} f^{\alpha\sigma}}{\rho + m(\theta)} e^{\zeta - \theta} d\theta,$$

where consumption c is a function of $(s, f, m, k, w, r, q, a, x, \tau, \chi, \zeta)$. To solve the value function Φ and the first-order conditions of the maximization, it is assumed that Φ is in constant proportion $\vartheta > 0$ to periodic utility $c^\sigma f^{\alpha\sigma}/(\rho + m)$. This leads the household's response functions

$$m = M(k, w, r, q, a, x, \tau, \chi, \zeta), \quad f = \frac{\alpha c}{w + k + x + \chi}, \quad f = (1 - \tau)r - \rho.$$

3. The government

Because the government can control saving per head, $s = \dot{k}$, the change of pollution, $v = \dot{P}$, and the mortality rate m by taxes (τ, x, χ) , the former can be taken as the government's controls in the model. The government maximizes the representative household's welfare by the controls (s, v, m) , its value function at initial time ζ is given by

$$\Psi(k, P, q, \zeta) \doteq \max_{s(\zeta), v(\zeta), m(\zeta)} \int_{\zeta}^{\infty} \frac{c(\theta)^\sigma f(\theta)^{\alpha\sigma}}{\rho + m(\theta)} e^{\zeta - \theta} d\theta.$$

At the occurrence of the environmental shock, q increases up to its upper limit 1 and welfare $\Psi(k, P, q, \zeta)$ changes into $\Psi(k, P, 1, \zeta)$. Thus, by [1], the Bellman equation for the government is

$$\Psi = \max_{s, v, m} \Upsilon \quad \text{with}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon &\doteq \frac{c^\sigma f^{\alpha\sigma}}{\rho + m} + \frac{\partial \Psi}{\partial k} \frac{dk}{d\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial P} \frac{dP}{d\theta} + \pi [\Psi(k, P, 1, \zeta) - \Psi(k, P, q, \zeta)] \\ &= \frac{1}{\rho + m} \left(c^\sigma f^{\alpha\sigma} + \frac{\partial \Psi}{\partial k} s + \frac{\partial \Psi}{\partial P} v \right) + \pi(P) [\Psi(k, P, 1, \zeta) - \Psi(k, P, q, \zeta)], \end{aligned}$$

where $\Psi(k, P, 1, \zeta) - \Psi(k, P, q, \zeta)$ is the change of welfare at the occurrence of the shock. To solve the value function Ψ and the first-order conditions of the maximization, it is assumed that Ψ is in constant proportion ϖ to periodic utility $c^\sigma f^{\alpha\sigma}/(\rho + m)$.

The relative fall in welfare Ψ due to the disaster is, roughly,

$$\Omega(k, P, q, \zeta) = \frac{\Psi(k, P, q, \zeta) - \Psi(k, P, 1, \zeta)}{\Psi(k, P, q, \zeta)} = \sigma \frac{g}{c} \left(1 - \xi \frac{g}{c} \right)^\sigma \approx \sigma \frac{g}{c} \quad (3)$$

for small values of g/c . Comparing the government's and the household's first-order conditions and noting (3) yield the following result:

Proposition 1. *The parental tax per child and the tax on the increase of the household size can be eschewed, i.e., their optimal values are zero, $x = T = 0$. The optimal tax on capital income is zero after the disaster, but $\tau = \pi\Omega/(1 + \pi\Omega) > 0$ before it. The higher the risk of disaster, π , or the greater is the welfare loss at the occurrence of disaster, Ω , the higher the precautionary tax τ must be. If the effect of the disaster in terms of output, g , is small relative to consumption c (e.g., g/c less than 10%), then the optimal tax on capital income before the disaster is $\tau \approx \sigma\pi g/(c + \sigma\pi g)$, approximately. The higher the expected loss for the disaster, πg , or the higher the intertemporal elasticity of substitution $1 - 1/\sigma$ (i.e. the higher σ) is, the higher the precautionary tax τ must be.*

Tapio Palokangas thanks IIASA for the opportunity to prepare this document during his visit in June/July 2019.

REFERENCES

1. Dixit A., Pindyck K. Investment under Uncertainty. Princeton: Princeton University Press, 1994.
2. Uzawa H. Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings. In: Value, Capital, and Growth (ed. J. Wolfe). Chicago: Aldineer, 1968. P. 485–505.

UDC 517.95

A Class of Semilinear Degenerate Equations with Fractional Lower Order Derivatives

M.V. Plekhanova^{1,2}, G.D. Baybulatova²

¹South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, mariner79@mail.ru

²Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia, baybulatova_g_d@mail.ru

Abstract: The unique solvability of the generalized Showalter—Sidorov problem for a class of fractional order semilinear equations with lower fractional derivatives is proved. The equation is suppose to be degenerate, i. e. it contains a linear operator with a nontrivial kernel at the highest fractional derivative.

Keywords: fractional Gerasimov—Caputo derivative, degenerate evolution equation, semilinear equation, initial value problem.

Introduction

Let $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ be Banach spaces. Consider the generalized Showalter—Sidorov problem

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

for the semilinear equation of fractional order

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1}x(t), D_t^{\alpha_2}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)),$$

where $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (linear and continuous operator from $\mathcal{X}$ into $\mathcal{Y}$), $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (linear closed operator with a dense domain D_M in the space $\mathcal{X}$ and with the image in $\mathcal{Y}$), $n \in \mathbb{N}$, $N : \mathbb{R} \times \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}$ is a nonlinear operator, $D_t^\alpha, D_t^{\alpha_1}, D_t^{\alpha_2}, \dots, D_t^{\alpha_n}$ are the fractional Gerasimov—Caputo derivatives, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. The equation is supposed to be degenerate, i.e. $\ker L \neq \{0\}$. The projection P on the complement $\mathcal{X}^1$ of the degeneracy subspace will be defined further. The closest results on unique solvability of fractional order degenerate semilinear equations, but with integer order lower derivatives are obtained in [1].

1. Nondegenerate case

Denote $g_\delta(t) = \Gamma(\delta)^{-1}t^{\delta-1}$, $J_t^\delta h(t) = \int_{t_0}^t g_\delta(t-s)h(s)ds$, $\tilde{g}_\delta(t) = (t-t_0)^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ for $\delta > 0$. At $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ the Gerasimov—Caputo derivative is defined as $D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} \left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1}(t) \right)$. For $\alpha, \beta > 0$ denote the Mittag-Leffler function $E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$.

Let $\mathcal{Z}$ be a Banach space, Z be an open set in $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, $B : Z \rightarrow \mathcal{Z}$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Consider the Cauchy problem

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D_t^{\alpha_1}z(t), D_t^{\alpha_2}z(t), \dots, D_t^{\alpha_n}z(t)). \quad (2)$$

A solution of (1), (2) on a segment $[t_0, t_1]$ is $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, such that $J_t^{m-\alpha} \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in C^m([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, for all $t \in [t_0, t_1]$ $(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)) \in Z$, equalities (1) and (2) for all $t \in [t_0, t_1]$ are valid.

Lemma 1. *Let $l - 1 < \beta \leq l \in \mathbb{N}$. Then there exists $C > 0$, such that for all $h \in C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ $\|D_t^\beta h\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|h\|_{C^l([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}$.*

Lemma 2. *Let $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $B \in C(Z; \mathcal{Z})$. Then function $z \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ is a solution of problem (1), (2), if and only if for all $t \in [t_0, t_1]$*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t - t_0)^k E_{\alpha, k+1} (A(t - t_0)^\alpha) z_k + \\ + \int_{t_0}^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} (A(t - s)^\alpha) B(s, D_t^{\alpha_1} z(s), D_t^{\alpha_2} z(s), \dots, D_t^{\alpha_n} z(s)) ds.$$

The bar over a symbol will mean an ordered set of n elements with indexes from 1 to n , for example, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Here, $S_\delta(\bar{x}) = \{\bar{y} \in \mathcal{Z}^n : \|y_k - x_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta, k = 1, 2, \dots, n\}$. A mapping $B : Z \rightarrow \mathcal{Z}$ is called locally Lipschitz continuous in z , if for every $(t, \bar{x}) \in Z$, there exist $\delta > 0$ and $l > 0$, for which $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x}) \subset Z$ and for all $(s, \bar{y}), (s, \bar{v}) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{x})$ $\|B(s, \bar{y}) - B(s, \bar{v})\|_{\mathcal{Z}} \leq l \sum_{k=1}^n \|y_k - v_k\|_{\mathcal{Z}}$. Using the initial data $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$ from (1), denote $\tilde{z}_1 = D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0} \tilde{z}(t)$, $\tilde{z}_2 = D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0} \tilde{z}(t), \dots, \tilde{z}_n = D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0} \tilde{z}(t)$, where

$$\tilde{z}(t) = z_0 + z_1(t - t_0) + \dots + \frac{z_{m-1}}{(m-1)!} (t - t_0)^{m-1}.$$

Theorem 1. *Suppose that $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, a set Z is open in $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^n$, and the mapping $B \in C(Z; \mathcal{Z})$ is locally Lipschitz continuous in z , $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, such that $(t_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n) \in Z$. Then there exists $t_1 > t_0$, such that problem (1), (2) has a unique solution on $[t_0, t_1]$.*

2. Degenerate case

Suppose $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, D_M is a domain of an operator M , endowed by the graph norm $\|\cdot\|_{D_M} = \|\cdot\|_{\mathcal{X}} + \|M \cdot\|_{\mathcal{Y}}$. Denote

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}.$$

An operator M is called (L, σ) -bounded, if there exists $a > 0$ such that for all $\mu \in \mathbb{C}$, if $|\mu| > a$, then $\mu \in \rho^L(M)$.

Take $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Then operators $P = 1/2\pi i \int_\gamma R_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $Q = 1/2\pi i \int_\gamma L_\mu^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$

are projections [2]. Put $\mathcal{X}^0 = \ker P$, $\mathcal{Y}^0 = \ker Q$; $\mathcal{X}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^1 = \operatorname{im} Q$. Denote by L_k (M_k) the restriction of the operator L (M) on $\mathcal{X}^k$ ($D_{M_k} = D_M \cap \mathcal{X}^k$), $k = 0, 1$. In [2] it is proved that $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$, $M_0 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}^0; \mathcal{Y}^0)$, $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$, there exist operators $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$.

Denote $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $G = M_0^{-1} L_0$. For $p \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ operator M is called (L, p) -bounded, if it is (L, σ) -bounded, $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Consider the generalized Showalter—Sidorov problem

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3)$$

for degenerate equation

$$D_t^\alpha Lx(t) = Mx(t) + N(t, D_t^{\alpha_1} x(t), D_t^{\alpha_2} x(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x(t)), \quad (4)$$

where $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1$. Suppose $r-1 < \alpha_n \leq r$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$, where X is an open set in $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$.

The solution of problem (3), (4) is a function $x \in C([t_0, t_1]; D_M) \cap C^r([t_0, t_1]; \mathcal{X})$, for which $Lx \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Y})$,

$$J_t^{m-\alpha} \left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in C^m([t_0, t_1]; \mathcal{Y}),$$

for each $t \in [t_0, t_1]$ ($t, D_t^{\alpha_1} x(t), D_t^{\alpha_2} x(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x(t) \in X$ and equalities (3), (4) for all $t \in [t_0, t_1]$ are hold.

Denote

$$\tilde{x} = x_0 + \frac{x_1}{1!}(t-t_0) + \frac{x_2}{2!}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{x_{m-1}}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1},$$

for x_k from (3), $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\tilde{x}_1 = D_t^{\alpha_1}|_{t=t_0} \tilde{x}(t)$, $\tilde{x}_2 = D_t^{\alpha_2}|_{t=t_0} \tilde{x}(t), \dots, \tilde{x}_n = D_t^{\alpha_n}|_{t=t_0} \tilde{x}$.

Theorem 2. Assume that $r \leq [(m-1)/2]$, M is $(L, 0)$ -bounded, X is open set in $\mathbb{R} \times \mathcal{X}^n$, $N : X \rightarrow \mathcal{Y}$; $V = X \cap (\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n)$, for each $(t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in X$, such that $(t, P\tilde{x}_1, \dots, P\tilde{x}_n) \in V$, the condition $N(t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = N_1(t, P\tilde{x}_1, \dots, P\tilde{x}_n)$ holds with some $N_1 : V \rightarrow \mathcal{Y}$, mapping $QN_1 : V \rightarrow \mathcal{Y}$ is locally Lipschitz continuous in x , $(I - Q)N_1 \in C^r(V; \mathcal{Y})$. Then for all $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, such that $(t_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in V$, there exists some $t_1 > t_0$, for which problem (3), (4) has a unique solution on $[t_0, t_1]$.

Proof. Multiply (4) from the left by the operators $M_0^{-1}(I - Q)$ and $L_1^{-1}Q$. Then we obtain the problem

$$\begin{aligned} D_t^\alpha v(t) &= S_1 v(t) + L_1^{-1} Q N_1(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)), \\ v^{(k)}(t_0) &= x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)) \quad (6)$$

for the functions $v(t) = Px(t)$, $w(t) = (I - P)x(t)$. Here $S_1 = L_1^{-1}M_1$. Since set V is open in $\mathbb{R} \times (\mathcal{X}^1)^n$, $L_1^{-1}QN_1 \in C(V; \mathcal{X})$ and locally Lipschitz continuous in x the problem (5) has a unique solution v on $[t_0, t_1]$ by Theorem 1. Then we we have the equality

$$w(t) = -M_0^{-1}(I - Q)N_1(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)).$$

The inequality $\alpha_n + r \leq m-1$ and the inclusion $v \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{X}^1)$ implies that $w \in C^r([t_0, t_1]; \mathcal{X}^0)$, besides, $Lw \equiv 0$. Thus, there exists a unique solution $x = v + w$ of problem (3), (4).

REFERENCES

1. *Plekhanova M.V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. Vol. 40, no. 17. P. 6138–6146.
2. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003. 216 p.

Dynamic Multicriteria Games with Different Planning Horizons

A.N. Rettieva

Institute of Applied Mathematical Research Karelian Research Center of RAS,
Petrozavodsk, Russia, annaret@krc.karelia.ru

Abstract: The approaches to construct optimal behavior in dynamic multicriteria games with different planning horizons are presented. The multicriteria Nash equilibrium is obtained via the Nash bargaining design (Nash products), and the cooperative equilibrium is determined by the Nash bargaining procedure. To illustrate presented approaches a multicriteria bioresource management problem with different planning horizons is investigated.

Keywords: dynamic games, multicriteria games, Nash bargaining solution, different planning horizons.

Introduction

Mathematical models involving more than one objective seem more adherent to real problems. Often players have more than one goal which are often not comparable. A multicriteria game approach helps to make decisions in multi-objective problems.

We extend multicriteria dynamic game [3] to the case of different planning horizons. When one player exploits a bioresource for a shorter period than the others, the former joins the exploitation process for a fixed time. But this player has a smaller planning horizon than her partners; and so, the player under consideration is interested in gaining more from exploitation than the players that continues exploitation.

1. Main result

Consider a bicriteria dynamic game with n participants in discrete time. The players exploit a common resource and wish to optimize two different criteria. The state dynamics is in the form

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt}), \quad x_0 = x, \quad (1)$$

where $x_t \geq 0$ is the resource size at time $t \geq 0$, $f(x_t, u_{1t}, \dots, u_{nt})$ denotes the natural growth function, and $u_{it} \geq 0$ gives the exploitation rate of player i at time t , $i \in N = \{1, \dots, n\}$.

We explore a model in which the players possess heterogeneous planning horizons. By assumption, players harvest the fish stock during $m_1, \dots, m_n$ steps, respectively, $m_1 < \dots < m_n$ and $m_1 > m_0 = 1$. Therefore, during the time period $[m_i, m_{i+1}]$ $n - i$ players harvest the same stock, and the problem consists in evaluating their optimal strategies.

The payoff functions of the players are defined by

$$J_i = \begin{pmatrix} J_i^1 = \sum_{k=1}^i \sum_{t=m_{k-1}}^{m_k} \delta^t g_i^1(x_{kt}, u_{kt}, \dots, u_{nt}) \\ J_i^2 = \sum_{k=1}^i \sum_{t=m_{k-1}}^{m_k} \delta^t g_i^2(x_{kt}, u_{kt}, \dots, u_{nt}) \end{pmatrix}, \quad i \in N, \quad (2)$$

where $g_i^j(\cdot) \geq 0$ gives the instantaneous utility, $j = 1, 2, i \in N$, $\delta \in (0, 1)$ denotes a common discount factor, and x_{it} , $i = 1, \dots, n$, possess the dynamics

$$x_{it+1} = f(x_{it}, u_{it}, \dots, u_{nt}), \quad x_{it}(m_{i-1}) = x_{i-1t}(m_{i-1}).$$

We design the noncooperative equilibrium in dynamic multicriteria game applying the Nash bargaining products [2].

Then, we find a multicriteria cooperative equilibrium as a solution of a Nash bargaining scheme with the multicriteria Nash equilibrium playing the role of status quo points [3].

A discrete-time game-theoretic bioresource management model (fishery problem) with different planning horizons is treated to show how the presented concepts work.

REFERENCES

1. *Pusillo L., Tjys S.* E-equilibria for multicriteria games // Ann. Internat. Soc. Dynam. Games. 2013. Vol. 12. P. 217–228.
2. *Rettieva A.N.* Equilibria in dynamic multicriteria games // Int. Game Theory Rev. 2017. Vol. 19, no. 1. P. 1750002.
3. *Rettieva A.N.* Dynamic multicriteria games with finite horizon // Mathematics. 2018. Vol. 6, no. 9. P. 156.
4. *Shapley L.S.* Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Res. Logist. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 57–61.

Alternate Pursuit of Two Targets, One of Which Is a False

E.Ya. Rubinovich

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia, rubinvch@ipu.ru

Abstract: The differential game of alternating pursuit of two targets, one of which is a false target with a given classification probability, is considered on the plane. The players have simple motions. The criterion is the average time to meet the true target.

Keywords: planar differential pursuit-evasion game, simple motions, false targets.

1. Introduction and problem statement

A conflict-cooperative differential game on the plane of one pursuer P against a coalition of two consistently evading targets E_A and E_B one of which is false is considered. The movements of the players are simple (inertialess). The velocity vectors of the players are the controls, which are imposed geometric (modular) restrictions: the speed of the pursuer $|u(t)| \leq 1$, the speed of the targets $|v_i(t)| \leq \beta < 1$, $i = A, B$; here β is a given constant. The pursuer does not know which target is true, but he knows the target classification probability p_A and p_B , ($p_A + p_B = 1$), where p_i is the probability that i -th target is true. The targets E_A and E_B are pursued alternately until a point meeting with the true target. The payoff functional (criterion) has the form

$$G = p_A T_A + p_B T_B \rightarrow \min_P \max_{E_A, E_B}, \quad (1)$$

where T_i is the time to meet the target E_i . The criterion (1) makes sense of the mathematical expectation of the time before meeting the true target. It is minimized by the pursuer. The targets consistently maximize this criterion. Such a statement with the criterion of “full time pursuit of two targets” (game Γ_{time}) was considered in [1], and with the criterion of “miss on the true target” (game Γ_{miss}) — in [2]. In these works it was noted that the priority choice of meetings with the targets is, in fact, additional control of the pursuer, which can be chosen:

a) programmatically (as a function of time) at the start of the game;

b) positionally, in the pursuit process, as a function of the current position of the players.

In [1, 2] both these possibilities are considered and it is shown that at certain initial positions in the case b) the stage of alternate pursuit is preceded by the stage of joint pursuit of some duration $[0, \theta]$ of the group of two targets and during which the upcoming order of meetings with the targets is not defined. It is determined directly at instant θ of the end of the joint pursuit phase.

The considered statement is ideologically close to [1, 2], however, as noted above, differs from it by the payment, and also by the fact that the probabilities of targets classification are a priori known.

2. Main result

Case a) — programmatic choice of the meetings order.

The index 1 will be assigned to the first in the order of pursuit. Then the payoff (1) takes the form

$$G = p_1 T_1 + p_2 (T_1 + T_{12}) = T_1 + p_2 T_{12}, \quad (2)$$

where T_{12} is the time in pursuit of E_2 after a meeting with E_1 .

The players motion equations:

$$\begin{array}{cc} \text{prior to } T_1 & \text{after the time } T_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = v_1(t) - u(t), \\ \dot{z}_2(t) = v_2(t) - u(t), \\ \dot{z}_3(t) = 1, \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1(t) = 0, \\ \dot{z}_2(t) = v_2(t) - u(t), \\ \dot{z}_3(t) = p_2. \end{array} \right. \end{array} \quad (3)$$

Here $z_i(t)$, $i = 1, 2$, is a two-dimensional vector directed from P^t to E_i^t , where P^t and E_i^t are current players positions; $z_3(t)$ is a variable that has the meaning of model time and allows us to determine the payoff (2) in the terminal form $G = z_3(T)$, where $T = T_1 + p_2 T_{12}$ is the duration of the game in the worst case for the pursuer, when the target E_1 was false. Initial conditions are specified: $z_1^0, z_2^0, z_3(0) = 0$, in addition $z_1(T_1) = 0$, and $z_2(T) = 0$.

The game solution in *Case a)* is based on the maximum principle for problems with the game situation [1, 2]. The following proposition takes place.

Proposition 1. *Optimal movements of the players are carried out along the lines with the maximum modulo speeds.*

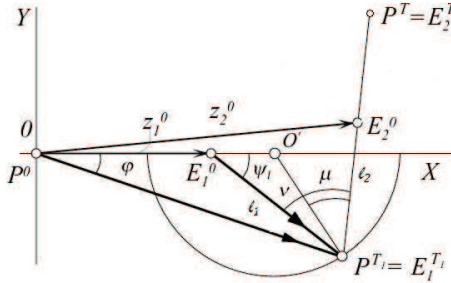


Figure 1. The optimal trajectories of the players in the Case a) ($\beta = 0.5$).

It is known that then the point $P^{T_1} = E_l^{T_1}$ of the meeting of players P and E_1 lies on the Apollonius circle (fig. 1) [1, 2]:

$$(x - |z_1^0|(1 - \beta^2)^{-1})^2 + y^2 = (|z_1^0|\beta(1 - \beta^2)^{-1})^2. \quad (4)$$

To localize this point, we rewritten the payoff (2) as

$$G = \frac{l_1}{\beta} + \frac{l_2 + l_1}{1 - \beta} p_2 = \frac{1 - p_1\beta}{1 - \beta} \left[\frac{l_1}{\beta} + \frac{l_2}{(1 - p_1\beta)p_2^{-1}} \right],$$

where $l_i \triangleq P^{T_1}E_i^0$ and consider the auxiliary problem of reflection from the circle (4) of a light beam emitted from the point E_1^0 at a speed β (since the beam of light minimizes the time of its movement in the given medium between the given points). After the reflection from the circle (4) at point P^{T_1} , the speed of light increases abruptly, the beam of light begins to move at a speed $(1 - p_1\beta)p_2^{-1} \geq 1 > \beta$ towards the point E_2^0 . At point P^{T_1} , the law of reflection must be fulfilled

$$\sin \nu / \sin \mu = \beta / [(1 - p_1\beta)p_2^{-1}],$$

which localizes this point on the circle of Apollonius. At time $t = 0$, the sequence of meetings is determined as follows. Let $\varrho_A(P^0, E_A^0, E_B^0)$ and $\varrho_B(P^0, E_A^0, E_B^0)$ be payoffs (as functions of initial positions) corresponding to the program choice of the sequence of meetings $E_A \rightarrow E_B$ or $E_B \rightarrow E_A$, respectively. The optimal sequence of meetings is determined at instant $t = 0$ from the conditions

$$E_A \rightarrow E_B, \text{ if } \min_{k=A,B} \varrho_k(P^0, E_A^0, E_B^0) = \varrho_A(P^0, E_A^0, E_B^0),$$

$$E_B \rightarrow E_A, \text{ if } \min_{k=A,B} \varrho_k(P^0, E_A^0, E_B^0) = \varrho_B(P^0, E_A^0, E_B^0).$$

In the case of identical targets ($p_A = p_B = 0.5$), the target closest to the pursuer is initially pursued. This target is assigned an index of 1.

Case b) — positional choice of the meetings order.

In the process of players movement a sign of the difference between payoffs (as a function of the current players positions $\{z_1(t), z_2(t), z_3(t)\}$)

$$\Phi(z_1(t), z_2(t), z_3(t)) \triangleq \varrho_2(z_1(t), z_2(t), z_3(t)) - \varrho_1(z_1(t), z_2(t), z_3(t)),$$

generally speaking, can change in the interval $[0, \theta]$. The positional choice of the sequence of meetings allows us to take into account the fact that whenever at some point in the game equality

$$\Phi(z_1(t), z_2(t), z_3(t)) = 0$$

is realized, the targets E_1 and E_2 become identical for the pursuer in the sense of the payoff value. This means that at this point t , the payoff (as a function of the current state $\{z_1(t), z_2(t), z_3(t)\}$) does not depend on the choice of the sequence of the meeting and the player P can re-index the targets, i.e. change the order of the upcoming sequence of meetings. The possibility of such reindexing allows to guarantee the preservation of the sign of inequality

$$\Phi(z_1(t), z_2(t), z_3(t)) \geq 0 \quad (5)$$

in interval $[0, \theta]$ of joint pursuit, $\theta \triangleq \sup\{t : \Phi(z_1(t), z_2(t), z_3(t)) = 0\}$. Inequality (5) plays the role of phase constraints and defines the relationship between the equations of motion (3) and the positional control of the sequence of meetings. In our case, the inequality (5) is equivalent to

$$p_1|z_2(t)| \geq p_2|z_1(t)|, \quad t \in [0, \theta].$$

REFERENCES

1. *Abramyants T.G., Maslov E.P., Rubinovich E.Ya.* Simplest differential game of alternate pursuer // Autom. Remote Control. 1980. Vol. 8, no. 1. P. 5–15.
2. *Rubinovich E.Ya.* A differential game of alternate pursuit with criterion “A miss on the true target” // Izvestiya SFedU. Engineering Sciences. 2019. Vol. 203, no. 1. P. 165–177. (In Russian)

Calculus of Variations in Solutions of Dynamic Reconstruction Problems

N.N. Subbotina

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
Ekaterinburg, Russia, subb@uran.ru

Abstract: The dynamic reconstruction problem for controlled systems is studied. It is assumed that information about inaccurate current measurements of the real states of the system comes at discrete instants. The control generating this real motion has to be reconstructed in real time. A new method for solving this inverse problem is suggested. This method relies on necessary optimality conditions in auxiliary problems of calculus of variations (CV) with integral convex-concave cost functional.

Keywords: dynamic reconstruction, calculus of variations.

Introduction

Inverse problems were always actual and important for the analysis and synthesis of optimal controls in dynamical systems theory [1–6].

The proposed below method of solving dynamic reconstruction (DR) problems is close to the approach developed in the works of Yu.S. Osipov and A.V. Kryazhimskii [8, 9]. They consider a coupled system which consists of the original controlled model and the similar guide model. Their approach is based on extreme aiming on the motion of the guide model. These ideas source in the differential game theory developed in N.N. Krasovskii's school [7].

The new method [10, 11] is based on solutions of the hamiltonian system of state variables and conjugate variables. This coupled system arises in necessary optimality conditions for auxiliary problems of calculus of variations (CV) with concave-convex integral cost functional.

1. Statement 1. Dynamic reconstruction problem

We consider the controlled system of the form

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t) + G(t, x(t))u(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

where $x \in R^n$ are state variables, parameters $u \in R^m$, $m \leq n$ are controls, constrained by the geometric restrictions:

$$u \in U = \{u_i \in [a_i^-, a_i^+], a_i^- < a_i^+, i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (2)$$

Information about current inaccurate measurements $y(t_k)$ of the real trajectory $x^*(t)$ of system (1)–(2) comes in real time at discrete instants $t_k = t_0 + k\Delta t$; $k = 1, \dots, N$, $\Delta t > 0$, $t_0 = 0$, $t_N = T$. The estimation $\delta > 0$ of inaccuracy is known

$$\|y(t_k) - x^*(t_k)\| \leq \delta, \quad k \in \overline{0, N} \quad (3)$$

where $\delta \in (0, \delta_0]$. The symbol $\|z\|$ denotes the Euclidean norm of the vector $z \in R^n$.

For any $\delta \in (0, \delta_0]$, step-by-step, up to the current instants $t_k \geq t_2$, $k = 2, \dots, N$, one can define a piecewise smooth function $y^\delta(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n$, which coordinates have piecewise continuous second derivatives, such that

$$\begin{aligned} \|y^\delta(t) - x^*(t)\| &\leq 2\delta, \quad \forall t \in [0, T], \\ \left| \frac{d^2 y_i^\delta(t)}{dt^2} \right| &\leq K, \quad i \in \overline{1, n}, \quad \forall t \in [0, T] \setminus \Theta^\delta, \end{aligned} \quad (4)$$

where $0 < K < \infty$ is a given constant, the sets Θ^δ have the measure $\beta^\delta = \beta(\Theta^\delta)$ and $\beta^\delta \rightarrow 0$, as $\delta \rightarrow 0$.

The inverse problem arises: to reconstruct in real time the control $u^*(\cdot)$ generating the real trajectory $x^*(\cdot)$. We consider the case when control $u^*(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$ can be a measurable function.

Statement 1. *After receiving in real time, at the current discrete instants $t_k \geq t_2$, information about a continuous interpolation $y^\delta(\cdot) : [0, t_k] \rightarrow R^n$ of the current measurements, we need to reconstruct such the control $u^\delta(\cdot) : [0, t_k - \Delta t] \rightarrow U$, which generates the trajectory $x^\delta(\cdot) : [0, t_k - \Delta t] \rightarrow R^n$ of system (1)–(2), that, at the end of the reconstruction process, the following relations hold:*

$$\begin{aligned} (t, x^\delta(t)) &\in D_0 = \{(t, x) : t \in [0, T], \|x - y^{\delta_0}(t)\| \leq 4\delta_0\}, \\ \|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C &= \max_{\tau \in [0, T - \Delta t]} \|x^\delta(\tau) - x^*(\tau)\| \rightarrow 0, \\ \|u^\delta(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L_2}^2 &= \int_0^{T - \Delta t} \|u^\delta(\tau) - u^*(\tau)\|^2 d\tau \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5)$$

as $\delta \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$.

Here the symbol $\|x(\cdot)\|_C$ denotes the norm in the space C of continuous vector-functions $x(\cdot) : [0, T - \Delta t] \rightarrow R^n$; the notion $\|u(\cdot)\|_{L_2}$ means the norm in the space L_2 of vector-functions $u(\cdot) : [0, T - \Delta t] \rightarrow R^n$.

2. Statement 2. Auxiliary calculus of variations problems

Consider the interval $[t_{k-2}, t_k]$, $k = 2, \dots, N$, a fixed parameter δ , and a continuous interpolation $y^\delta(\tau)$, $\tau \in [t_{k-2}, t_k]$. We introduce the integral discrepancy cost functional of the form

$$I_{t_{k-2}, x_{k-2}}(v(\cdot)) = \int_{t_{k-2}}^{t_k} \left[\frac{\|\hat{x}(\tau) - y^\delta(\tau)\|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \|v(\tau)\|^2 \right] d\tau, \quad (6)$$

where $\alpha > 0$ is a small parameter of regularization, the initial state $(t_{k-2}, x_{k-2}) \in D_0$.

We introduce the following modified controlled system

$$\frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} = f(\tau) + \hat{G}(\tau, \hat{x}(\tau))v(\tau), \quad \tau \in [t_{k-2}, t_k], \quad (7)$$

where $\hat{x} \in R^n$ are state variables, controls $v \in R^n$. The $n \times n$ -matrix $\hat{G}(\tau, \hat{x}) = \{\hat{g}_{i,j}(\tau, \hat{x})\}$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, n}$ has the following structure $\hat{g}_{i,j}(\tau, \hat{x}) = g_{i,j}(\tau, \hat{x})$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$, $\hat{g}_{i,j}(\tau, \hat{x}) = \gamma$, $i \in \overline{m+1, n}$, $j \in \overline{m+1, n}$, $i = j$, $\hat{g}_{i,j}(\tau, \hat{x}) = 0$ elsewhere.

The symbol $\gamma > 0$ denotes a small parameter of approximation.

Statement 2. For any fixed $\delta \in (0, \delta_0]$, $\alpha > 0$, we have to minimize cost functional (6) over all continuously differentiable functions $v_i(\cdot) : [t_{k-2}, t_k] \rightarrow R$, $i \in \overline{1, n}$ and $\hat{x}_i(\cdot) : [t_{k-2}, t_k] \rightarrow R$, $i \in \overline{1, n}$ — solutions of system (7) satisfied the boundary conditions

$$\hat{x}(t_{k-2}) = x_{k-2} = y^\delta(t_{k-2}), \quad \frac{d\hat{x}(t_{k-2})}{dt} = \frac{dy^\delta(t_{k-2})}{dt} \quad (8)$$

3. Main result

One can easily get necessary optimality conditions for $\hat{x}(\cdot)$ in CV problem (6)–(8) in the form of the hamiltonian system and provide consequently for $t \in [t_{k-2}, t_{k-1}]$, $k = 2, \dots, N$, the controls

$$v^0(t) = v^0(t, \hat{s}(t)) = -\frac{1}{\alpha^2} \hat{G}^\top(t_{k-2}, y^\delta(t_{k-2})) \hat{s}(t), \quad (9)$$

where $\hat{s}(t)$ are conjugate variables of the hamiltonian system, the symbol $^{\top}$ means transposition.

We put $u^0 = u^0(t) = (u_1^0(t), \dots, u_m^0(t))$, $t \in [t_{k-2}, t_{k-1}]$, $k \in \overline{2, N}$,

$$u^0 = \begin{cases} u_i^0(t) = v_i^0(t, \hat{s}(t)), & \forall i \in \overline{1, m}, \quad v^0(t, \hat{s}(t)) \in U, \\ u_{i_*}^0(t) = a_{i_*}^+, \quad v_{i_*}^0(t, \hat{s}(t)) \geq a_{i_*}^+, & \exists i_* \in \overline{1, m}, \\ u_{j_*}^0(t) = a_{j_*}^-, \quad v_{j_*}^0(t, \hat{s}(t)) \leq a_{j_*}^-, & \exists j_* \in \overline{1, m}. \end{cases} \quad (10)$$

Theorem 1. *Let elements of the matrix $G(t, x)$ be continuously differentiable functions, non oscillate, satisfy sub-linear growth conditions, and the sub-matrix $g_{ij}(t, x)$, $i, j \in \overline{1, m}$, have the rank m on set D_0 (5). Let the concordance hold*

$$\Delta t / \alpha^3 \rightarrow O(1), \quad \alpha / \gamma \rightarrow O(1), \quad \delta / \alpha \rightarrow O(1). \quad (11)$$

Then controls $u^\delta(\tau) = u^0(\tau)$ of the form (10) satisfy the relations (5), i.e. they solve DR problem for system (1)–(2).

REFERENCES

1. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957. 340 p.
2. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. M.: Nauka, 1961. 392 p.
3. Krasovskii N.N. Theory of Motion Control. M.: Nauka, 1968. 476 p.
4. Leitmann G. (Ed.) Optimization Techniques: with Applications to Aerospace Systems. Ser. Mathematics in Science and Engineering, vol. 5. Academic Press, 1962. 453 p.
5. Letov, A.M. Dynamics of Flight and Control. M.: Nauka, 1969. 360 p.
6. Michel A. Deterministic and stochastic optimal control. // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. Vol. 22, no. 6. P. 997–998.
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. NY: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
8. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Amsterdam: Gordon and Breach. 1995.
9. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. Some Algorithms for the dynamic reconstruction of inputs // Proc. Steklov Inst. Math. 2011. Vol. 275, Suppl. 1. P. S86–S120.
10. Subbotina N.N., Tokmantsev T.B. The method of characteristics in inverse problems of dynamics // Universal J. Control Autom. 2013. Vol. 1, no. 3. P. 79–85.
11. Subbotina N.N., Tokmantsev T.B., Krupennikov E.A. On the solution of inverse problems of dynamics of linearly controlled systems by the negative discrepancy method // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. Vol. 291. P. 253–262.
12. Krupennikov E.A. On control reconstruction problems for dynamic systems linear in controls. In: Frontiers of Dynamic Games. Static. & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Eds.: L.A. Petrosyan, V.V. Mazalov, N.A. Zenkevich. Birkhäuser, 2018. P. 89–120.

Suboptimal Nonlinear Filters with Poisson-Sampled Measurements

Aneel Tanwani¹, Olga O. Yufereva^{2,3}

¹ LAAS-CNRS, University of Toulouse, Toulouse, France, aneel.tanwani@laas.fr

² LAAS-CNRS, University of Toulouse, Toulouse, France,

³ Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia,
olga.o.yufereva@gmail.com

Abstract: We consider nonlinear continuous-discrete filters, i.e. filters for a class of continuous-time nonlinear systems with diffusion terms and discrete-time observations. The measurements are assumed to arrive randomly in time under a Poisson distribution. We design suboptimal filter with a reset map which updates the estimate whenever a new measurement is received. We provide error bounds on the covariance of the estimation error which depend on the mean sampling rate of the sampling process.

Keywords: nonlinear filter, continuous-discrete filter, continuous-time systems, suboptimal filter, covariance error bounds.

Introduction

Filtering theory deals with the question of reconstructing the state of a certain process using some noisy measurements. Such questions are extremely important in engineering problems and for this reason filtering algorithms find applications in various disciplines ranging from control theory and signal processing to robotics and image/audio processing. The book [1] provides an overview of the developments carried out in the area of filtering theory since its inception. While the problem is relatively well-studied for linear dynamical systems, the analysis and implementation of nonlinear filters has proven to be a rather challenging problem. For this reason, many research works have focused on providing relaxed versions of optimal filters for nonlinear systems, which are more amenable to computer implementation. This short note concerns this last line of research, and in particular, we study the problem of obtaining bounds on the covariance of the state estimation error for certain class of continuous-time nonlinear filters under discrete observations.

For stochastic systems, in general, the solution to nonlinear filtering problem is a partial differential equation which describes the probability density function of the state, and goes by the name of Stratonovich-Kushner equation, or Zakai equation. The book [1] provides the basic

results along with some recent developments, and a compact exposition can also be found in [2].

To implement control systems over networks, it is often of interest to consider random uncertainties into account. An overview of the stabilization problems under random sampling can be found in [3]. For filtering problem where the measurements arrive at random time instants, we can find some results in [4], [5], and [6], but all these works are for discrete-time systems. To work with continuous-time systems, one can adopt the structure of continuous-discrete observer proposed in [7]. However, such filters also suffer from the problem of implementation. As a result, there are no rigorous works that analyze the performance of continuous-time nonlinear filters in the presence of discrete measurements arriving at random time instants. This study aims to fill this gap.

1. Problem Formulation

System Class. We consider stochastic nonlinear systems of the form

$$dx_t = f(x_t) dt + d\omega_t, \quad (1a)$$

$$y_t = h(x_t) + \nu_t, \quad (1b)$$

where x is $\mathbb{R}^n$ -valued state process, and the measurements y , taking values in $\mathbb{R}^p$, constitute the output process. The process noise ω and the sensor noise ν are assumed to be independent Brownian motions. The drift term $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, and the output map $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ are both assumed to be continuous. For the sake of simplicity, we will assume that the covariances of the process noise and sensor noise remain constants over time and are denoted by W and V respectively.

Observation Process. We consider a monotone nondecreasing non-negative integer-valued sequence $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taking values in $\mathbb{R}$ which denote the time instants at which measurements are available for estimation. We introduce the process N_t defined as

$$N_t := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \tau_n \leq t\} \quad \text{for } t \in \mathbb{R},$$

and it is assumed that N_t is a Poisson stochastic process with intensity λ . The goal is to construct the mean-square estimate of the state x_t , denoted by $\hat{x}_t$, which minimizes the mean square estimation error $E[|x_t - \hat{x}_t|^2]$, using the discrete observations $\{y_{\tau_k} \mid k \leq N_t\}$.

Structural Assumption on System Nonlinearities. To get tractable results, we restrict ourselves to the so-called cone-bounded nonlinearities in the drift term and the output map. It is assumed that there exist matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, and the constants a, c such that

$$|f(x + \delta) - f(x) - A\delta| \leq a |\delta|, \quad (2a)$$

$$|h(x + \delta) - h(x) - C\delta| \leq c |\delta|. \quad (2b)$$

In other words, the nonlinearities, that we consider, are to be seen as the perturbations in the linear terms and the size of these perturbations is handled by the constants a and c . It is possible to make the nonlinearities f , h and the covariances of the noise, time-dependent. As a result, the matrices A, C and the constants a, c can also be time-dependent.

2. Estimations

The filter we propose is of the form

$$d\hat{x}_t = f(\hat{x}_t) dt, \quad (3a)$$

$$\hat{x}_{\tau_k^+} = \hat{x}_{\tau_k^-} + K_k(y_{\tau_k} - h(\hat{x}_{\tau_k^-})). \quad (3b)$$

where the gain K_k needs to be designed.

Theorem 1. *Consider system (1) under the small nonlinearity assumption (2), and the estimator (3) with*

$$K_k = P_{\tau_k^-} C^\top \left((1+c) C P_{\tau_k^-} C^\top + (2c+c^2) \text{trace } P_{\tau_k^-} I + V \right)^{-1},$$

where the $\mathbb{R}^{n \times n}$ -valued process P_t be defined by

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{dt} &= A^\top P_t + P_t A + a P_t + a \text{trace}(P_t) I + W + \lambda(c P_t - K_t C P_t), \\ P_{\tau_k^+} &= (1+c) P_{\tau_k^-} - K_k C P_{\tau_k^-}. \end{aligned}$$

Then, it holds that

$$\mathbb{E}[(x_t - \hat{x}_t)(x_t - \hat{x}_t)^\top] \leq P_t.$$

The foregoing theorem provides the bound on the covariance for each sample path. The expected value of P_t is given by the following statement:

Proposition 1. *Let $\mathcal{P}_t := \mathbb{E}[P_t]$, the expectation with respect to the sampling process. It then holds that*

$$\frac{d\mathcal{P}_t}{dt} = A^\top \mathcal{P}_t + \mathcal{P}_t A + a\mathcal{P}_t + a \operatorname{trace}(\mathcal{P}_t)I + W + \lambda(c\mathcal{P}_t - \mathcal{K}C\mathcal{P}_t),$$

where $\mathcal{K} := \mathcal{P}_t C^\top ((1+c)C\mathcal{P}_t C^\top + (2c+c^2) \operatorname{trace} \mathcal{P}_t I + V)^{-1}$.

REFERENCES

1. *Crisan D., Rozovskii B.* The Oxford handbook of nonlinear filtering. Oxford University Press, 2011.
2. *Davis, M.H.A.* Nonlinear filtering and stochastic flows. Proc. Int. Cong. Math., 1986.
3. *Tanwani A., Chatterjee D., Liberzon D.* Stabilization of deterministic control systems under random sampling: Overview and recent developments. In: Uncertainty in Complex Networked Systems. Birkhäuser, Cham, 2018. P. 209–246.
4. *Matveev A.S., Savkin A.V.* The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times // IEEE Trans. Automat. Control. 2003. Vol. 48, no. 4. P. 670–676.
5. *Sinopoli B., Schenato L., Franceschetti M., Poolla K., Jordan M.I., Sastry S.S.* Kalman filtering with intermittent observations // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. Vol. 49, no. 9. P. 1453–1464.
6. *Huang M., Dey S.* Stability of Kalman filtering with Markovian packet losses // Automatica. 2007. Vol. 43, no. 4. P. 598–607.
7. *Jazwinski, A.H.* Stochastic processes and filtering theory. Courier Corporation, 2007.

UDC 517.9

Model Predictive Control and Regularity of Mappings

V.M. Veliov

Vienna University of Technology, Vienna, Austria,

vladimir.veliov@tuwien.ac.at

Abstract: The Model Predictive Control (MPC) method, which has been widely used since more than half a century for process control in industry, faces new challenges due to its new applications in electronics, requiring fast implementation. Moreover, the justification of the method and the explanation for the good results it delivers in many cases is still an issue of current research.

After an introductory part about the basic MPC algorithm, the talk will address issues related to its mathematical justification and conditions under which such is available. The effects of cutting the horizon, discretization, and measurement errors will be in the focus. Result concerning optimal control problems satisfying a certain *coercivity condition*, and for problems that are *affine* with respect to the control, will be considered separately. A key role for these results is played by certain regularity properties of the so-called *optimality mapping* associated with the system of first order necessary optimality conditions (Pontryagin's maximum principle).

The regularity property of interest in the MPC context is the so-called *strong metric regularity*. This property of the optimality mapping is well studied in the case of coercive problems. However, its implications on the performance of the MPC method were established recently, and will be presented in the talk. The case of affine problems is more sophisticated and sufficient conditions for the regularity property which is relevant in this case (called strong bi-metric regularity) are also very recent and will be briefly presented.

Special attention will be attributed to affine problems with a finite set of feasible control values. A direct approach, avoiding any convexification and relaxation will be briefly described.

The exposition will be based on parts of the joint papers [1–6].

Keywords: optimal control, feedback control, model predictive control, metric regularity, discretization.

REFERENCES

1. *Osmolovskii N.P., Veliov V.M.* Metric Sub-Regularity in Optimal Control of Affine Problems with Free End State. ORCOS, Research Report 2019-04, TU Wien, 2019.
2. *Quincampoix M., Scarinci T., Veliov V.M.* On the metric regularity of affine optimal control problems // J. of Convex Analysis. 2020. Vol. 27, no. 2. Available as: ORCOS, Research Report 2018-08, TU Wien, 2018.
3. *Dontchev A.L., Kolmanovsky I.V., Krastanov M.I., Veliov V.M., and Vuong P.T.* Approximating Optimal Finite Horizon Feedback by Model Predictive Control. ORCOS, Research Report 2018-07, TU Wien, 2018.
4. *Dontchev A.L., Krastanov M.I., and Veliov V.M.* On the existence of Lipschitz continuous optimal feedback control // Vietnam J. Math. 2019. P. 1–19 DOI: 10.1007/s10013-019-00347-5 . Available as: ORCOS, Research Report 2018-04, TU Wien, 2018.
5. *Dontchev A.L., Kolmanovsky I.V., Krastanov M.I., Nicotra M.M., and Veliov V.M.* Lipschitz stability in discretized optimal control // SIAM J. Contr. Optim. 2019. Vol. 57, no. 1. P. 468–489.
6. *Preininger J., Scarinci T., and Veliov V.M.* Metric regularity properties in bang-bang type linear-quadratic optimal control problems // Set-Valued and Variational Analysis. 2019. Vol. 27. P. 381–404.

Analytical Solution of Newton's Aerodynamic Problem without the Assumption of Rotational Symmetry

M.I. Zelikin¹, L.V. Lokutsievskiy²

¹ Lomonosov Moscow State University, mzelikin@mtu-net.ru

² Steklov Mathematical Institute of RAS, lion.lokut@gmail.com

Abstract: The aerodynamic problem on the form of the convex body having minimal resistance while moving in rare media was proposed and solved by Sir Isaac Newton for surfaces in revolution. At the very end of the 20th century, it appears that the rejection of the hypothesis of axial symmetry allows reducing resistance: non-axially symmetric bodies with less resistance than symmetric ones of the same length and cross-section were found. The exact form of the best shape of bodies with minimal resistance was still unknown. It was considered as a challenge for experts in optimal control theory. We will present a new result, in which the body shape in the class of bodies with a vertical symmetry plane is analytically derived, and its local optimality is proved. The resistance obtained agrees well with the numerical computations performed by Lachand-Robert, Oudet and Wachmuth, which suggests its asymptotic optimality among all convex bodies.

Keywords: Newton's Aerodynamic Problem, Hessian measures.

The work is financially supported by Russian Foundation for Basic Research under project 17-01-00805.

REFERENCES

1. *Lokutsievskiy L.V., Zelikin M.I.* The Analytical Solution of Newton's Aerodynamic Problem without the Assumption of Axial Symmetry. arXiv:1905.02028 [math.OC]

Author Index

Abdrakhmanova, A.A., 18
Ageev, A.L., 21
Akhmedov, O.S., 37
Alexeeva, T.A., 425
Alsevich, V.V., 28
Ananievski, I.M., 32
Ananyev, B.I., 375
Andreeva, I.Yu., 34
Ankilov, A.V., 91
Antonova, T.V., 21
Arutyunov, A.V., 379
Aseev, S.M., 386
Atanesyan, A.A., 320
Averboukh, Yu., 390
Azamov, A.A., 25

Bagno, A.L., 40
Bamieh, B., 394
Banshchikova, I.N., 44
Barabanov, E.A., 48
Barseghyan, V.R., 54
Baybulatova, G.D., 444
Bedin, D.A., 58, 62
Benarab, S., 67
Beshtokov, M., 71, 75
Beshtokova, Z., 79
Blagodatskikh, A.I., 84
Blizorukova, M., 88
Bondarev, A., 403
Bykov, V.V., 48

Chentsov, A.G., 355
Chikrii, A.A., 394

Danilin, A.R., 115
Davydov, A.A., 398
Dolgii, Yu.F., 119
Dunaevskaya, K.V., 123
Dustnazarov, S.B., 37
Dykhta, V.A., 127
Dyshaev, M.M., 130

Ershov, A.A., 331
Ershova, A., 134

Falcone M., 402

Fedorov, V.E., 18, 130
Fedotov, A.A., 247
Filippova, T.F., 339
Finogenko, I.A., 342, 346

Gomoyunov, M.I., 95
Gornov, A.Yu., 99
Grebenshchikov, B.G., 102
Grigorenko, N.L., 106
Gromov, D., 403
Gromova, E.V., 406
Gruzdev, A.P., 409
Gusev, M.I., 111

Hudalov, M., 75

Il'in, A.V., 149
Il'ina, A.N., 153
Iskanadjiev, I.M., 157
Ivanov, A.G., 62
Izmest'ev, I.V., 145, 327
Izobov, N.A., 149

Kalev, V.I., 371
Kalinin, A., 163
Kamneva, L.V., 168
Kandoba, I.N., 172
Kazakov, A.L., 160
Khailov, E.N., 106
Khamisov, O.O., 413
Khlopin, D.V., 351
Kim, I.G., 142
Kleimenov, A.F., 176
Klimenkova, A.D., 106
Komarov, Yu., 180
Korobeinikov, A., 106
Kostousov, V.B., 123
Kostousova, E.K., 172, 184
Kovrizhnykh, O.O., 115
Koz'min, I.V., 172
Krasinskiy, A.Ya., 153, 189
Krasovskii, A.A., 417
Krasovskii, N.A., 193
Krupennikov, E.A., 421
Kumkov, S.I., 205
Kumkov, S.S., 231, 299

- Kurzhanski, A.B., 180
 Kuvshinov, D.R., 197
 Kuznetsov, N.V., 201, 425
- Lavrinovich, L., 163
 Lebedev, P.D., 209, 214
 Ledyayev, Yu.S., 429
 Lehmijoki, U., 431
 Lempert, A.A., 160
 Levakov, A.A., 219
 Lokutsievskiy, L.V., 435, 464
 Lozhnikov, A.B., 102, 263
 Lukianova, L.N., 226
 Lukoyanov, N.Yu., 223
- Machtakova, A.I., 255
 Maksimov, V., 88
 Malakhova, A.P., 406
 Matviychuk, O.G., 339
 Melnikov, N.B., 409
 Merchela, W., 67
 Miller, B.M., 436
 Miller, G.B., 436
 Mokaev, T.N., 425
 Munts, N.V., 231
- Narmanov, A.Ya., 255
 Novoselova, N.G., 235
- Orlov, Sv.S., 239
 Ovchinnikov, M.M., 205
- Palokangas, T., 431, 440
 Parilina, E.M., 243
 Patsko, V.S., 247
 Petrenko, P.S., 251
 Petrosyan, L.A., 243, 259
 Petrov, N.N., 255
 Pimenov, V.G., 263
 Plaksin, A.R., 223, 267
 Platov, A.S., 417
 Plekhanova, M.V., 444
 Pogodaev, N.I., 272
 Popova, S.N., 44
 Pyatko, S.G., 205
- Rettieva, A.N., 449
 Rodin, A.S., 275
 Rozenberg, V.L., 279
- Rubinovich, E.Ya., 451
 Rutkas, A.G., 394
 Ruzimuradova, D.H., 25
- Samatov, B.T., 283
 Samsonyuk, O.N., 239
 Semenikhin, K.V., 436
 Serkov, D.A., 287
 Sesekin, A.N., 34, 346
 Shagalova, L.G., 359
 Shananin, A.A., 363
 Shevchenko, R.I., 367
 Shorikov, A.F., 371
 Sidikova, A.I., 308
 Skinder, Yu.A., 398
 Sokolov, V.F., 291
 Solodusha, S.V., 295
 Soyibbayev, U.B., 283
 Spiridonov, A.A., 299
 Staritsyn, M.V., 272
 Subbotina, N.N., 455
 Sumin, M.I., 304
- Tanana, V.P., 308
 Tanwani, A., 459
 Tarasyev, A.M., 40, 193, 323
 Tilavov, A.M., 37
 Timofeeva, G.A., 312
 Tochilin, P.A., 320
 Tolstonogov, A.A., 316
- Ukhobotov, V.I., 327, 335
 Ushakov, A.V., 335
 Ushakov, V.N., 214, 331, 335
 Usova, A.A., 323
 Uspenskii, A.A., 209, 214
- Vaskouski, M.M., 219
 Veliov, V.M., 462
 Velmisov, P.A., 91
 Vlasenko, L.A., 394
- Yufereva, O.O., 459
- Zadvorniy, Y.B., 219
 Zaitsev, V.A., 142
 Zarodnyuk, T.S., 99
 Zavalishchin, D.S., 138
 Zelikin, M.I., 464
 Zhukovskiy, E.S., 67

«Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019)
Материалы Международной конференции, посвященной
95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского

Ответственные за выпуск
Б.В. Дигас, О.Г. Матвийчук

Подписано в печать 02.09.19 Формат 60×84/16
Бумага офсетная Печать офсетная Усл. печ. л. 28,9
Заказ № 6725 Тираж 140 экз.
Отпечатано в типографии
ООО «Издательство УМЦ УПИ»
г. Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2
Тел.: (343) 362-91-16, 362-91-17