Омск - 2009

IV Всероссийская конференция

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

29 июня - 4 июля 2009

Материалы конференции

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА
ОМСКИЙ ФИЛИАЛ

IV ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Омск, 29 июня – 4 июля 2009

Материалы конференции

Омск 2009

УДК 519 + 338

IV Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: Материалы конференции (Омск, 29 июня – 4 июля 2009) / Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. — Омск: Изд-во Наследие. Диалог Сибирь, 2009. — 254 с.

ISBN 978-5-9931-0077-7

Данный сборник содержит материалы IV Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения».

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-06047-г) и Омского государственного университета им. Ф.М. Достоевского.

Оригинал-макет подготовили:

П.А. Борисовский, Н.А. Косарев, А.К. Кучин, А.А. Навроцкая, Т.Г. Орловская, А.А. Романова, Т.А. Щербинина, А.В. Ярош

Ответственный за выпуск

А.А. Романова

Адрес Оргкомитета

644099, Омск-99, ул. Певцова, 13

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева

E-mail: omsk09@ofim.oscsbras.ru

тел. (3812) 23-67-39

http://www.ofim.oscsbras.ru /~omsk09

ISBN 978-5-9931-0077-7

IV Всероссийская конференция
Проблемы оптимизации и экономические приложения

- Ассоциация математического программирования
- Российский фонд фундаментальных исследований
- Омский научный центр СО РАН
- Министерство образования Омской области
- Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН
- Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
- Омский государственный технический университет
- Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия
- Омская экономическая лаборатория Института экономики и ОПП СО РАН
- Омская государственная областная научная библиотека им. А.С. Пушкина
- Омский Дом ученых

Дорогие коллеги и друзья!

Мы рады вновь приветствовать вас на Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения»!

Минувшие три года оказались достаточно насыщенными и продуктивными в жизни нашего научного сообщества, что нашло отражение на успешно проведенных конференциях в Екатеринбурге, Владивостоке, Северобайкальске и других городах.

Мы очень надеемся, что эта встреча также будет плодотворной, богатой на перспективные идеи и постановки задач, обозначит новые рубежи в области теории и приложений оптимизации, позволит укрепить научные связи.

Желаем вам интересных творческих встреч и плодотворных дискуссий!

С наилучшими пожеланиями,
Председатель Оргкомитета *А.А. Колоколов*

Программный комитет

Еремин И.И.	ИММ УрО РАН, Екатеринбург (сопредседатель)
Колоколов А.А.	ОФ ИМ СО РАН, Омск (сопредседатель)
Антипин А.С.	ВЦ РАН, Москва
Бахтин А.Е.	НГУЭУ, Новосибирск
Береснев В.Л.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Бояркин Г.Н.	ОмГТУ, Омск
Булатов В.П.	ИСЭ СО РАН, Иркутск
Васильев В.А.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Гимади Э.Х.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Дементьев В.Т.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Евтушенко Ю.Г.	ВЦ РАН, Москва
Журавлев Ю.И.	ВЦ РАН, Москва
Заботин Я.И.	КГУ, Казань
Зоркальцев В.И.	ИСЭ СО РАН, Иркутск
Карпов В.В.	ОЭЛ ИЭ и ОПП СО РАН, Омск
Кельманов А.В.	ИМ СО РАН, Новосибирск
Леонтьев В.К.	ВЦ РАН, Москва
Мазуров Вл. Д.	УрГУ, Екатеринбург
Мухачева Э.А.	УГАТУ, Уфа
Нурминский Е.А.	ИАиПУ ДВО РАН, Владивосток
Попков В.К.	ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск
Попов Л.Д.	ИММ УрО РАН, Екатеринбург
Соловьев А.А.	СибАДИ, Омск
Стрекаловский А.С.	ИДСТУ СО РАН, Иркутск
Хачай М.Ю.	ИММ УрО РАН, Екатеринбург
Шевченко В.Н.	ННГУ, Нижний Новгород

Локальный организационный комитет

Колоколов А.А.	ОФ ИМ СО РАН, Омск (председатель Оргкомитета)
Еремеев А.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск (ученый секретарь Оргкомитета)
Адельшин А.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Борисовский П.А.	ОмГТУ, Омск
Девятерикова М.В.	ОмГТУ, Омск
Забудский Г.Г.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Заозерская Л.А.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Косарев Н.А.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Леванова Т.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск
Навроцкая А.А.	ОмГУ, Омск
Романова А.А.	ОмГУ, Омск
Сервах В.В.	ОФ ИМ СО РАН, Омск

---

http://www.ofim.oscsbras.ru /~omsk09/
e-mail: omsk09@ofim.oscsbras.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ FLOW SHOP С МИНИМАЛЬНЫМИ ЗАДЕРЖКАМИ

А.А. Агеев

Рассматривается задача типа FLOW SHOP (потоковая конвейерная схема) на двух машинах с минимальными задержками. В задаче дано множество $J = \{1, \ldots, n\}$ независимых работ. Каждая работа $j \in J$ состоит из первой и второй операций (на первой и второй машине), на выполнение которых требуется a_j и b_j единиц времени соответственно. Кроме того, для каждой работы $j \in J$ задано неотрицательное целое число l_j, называемое задержкой. Выполнение второй операции работы $j \in J$ может начаться не ранее, чем по истечении l_j единиц времени после окончания выполнения первой операции. Требуется минимизировать длину расписания. В стандартной трехместной системе обозначений задач теории расписаний исследуемая задача записывается как $F2 \mid l_j \mid C_{\max}$.

В [5,6] доказано, что задача $F2 \mid l_j \mid C_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле даже в случае единичных длительностей всех операций. Делл Амико [3] в 1996 г. для общего случая задачи предложил четыре алгоритма с одной и той же оценкой точности 2 и временной сложностью $O(n \log n)$. С тех пор этот результат не улучшался, хотя вопрос о существовании полиномиальных алгоритмов с лучшей оценкой точности поднимался рядом исследователей (см., например, [4]). Для двух важных частных случаев задачи такие алгоритмы всё-таки удалось построить - эти результаты и составляют содержание данного доклада.

В [1] был построен алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$ и оценкой точности 3/2 для случая, когда длительность операции каждой работы не зависит от номера машины, т. е. $a_j = b_j$ при всех $j \in J$. В [2] приближенный алгоритм с такой же временной сложностью был построен для случая, когда $a_j \equiv a$, $b_j \equiv b$. Этот алгоритм имеет оценку точности $\min\{1 + \frac{2q+2}{q+4}, 2 - q\} < 1.628$, где

$$q = \frac{\max\{a, b\} - \min\{a, b\}}{\max\{a, b\}}.$$

В случае $a = b$ алгоритмы имеют одинаковую оценку точности $\frac{3}{2}$ (и в этом случае совпадают).

В основе обоих результатов лежит одна и та же перестановочная идея. Первый алгоритм вначале упорядочивает работы так, чтобы выполнялось условие $a_j + l_j \leq a_{j+1} + l_{j+1}$ для всех $j \in J \setminus \{n\}$. Затем он строит n допустимых расписаний таким образом, что последовательность выполнения работ на второй машине у всех этих расписании одна и та же — $1, 2, \ldots, n$, а порядок выполнения работ на первой машине зависит от расписания и состоит из двух переставленных местами отрезков последовательности работ на второй машине. Из полученных расписаний в качестве решения выбирается наиболее короткое. При анализе алгоритма фундаментальную роль играет нетривиальное обобщение нижней границы на длину оптимального расписания, установленной в [2,3]. Второй алгоритм является комбинацией первого алгоритма (для рассматриваемого частного случая $a_j \equiv a$, $b_j \equiv b$) с новым алгоритмом для общего случая задачи, который имеет оценку точности 2 и временную сложность $O(n \log n)$, но проще алгоритмов Делл Амико. Фактически установлено, что в любое разумное (в определенном смысле) расписание имеет длину, не более чем в 2 раза превосходящую длину кратчайшего расписания. Это результат представляет самостоятельный интерес. При анализе второго алгоритма используется нижняя граница из [2,3] и специальные свойства полученного решения.

В докладе представлено подробное описание алгоритмов и изложена техника получения оценок их точности.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00370.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.А. Алгоритм с оценками для пропорционального случая двухпроцессорной задачи теории расписаний типа flow shop с минимальными задержками // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. – 2007. – Т. 14, N 4. – С. 3-15.
2. Агеев А.А., Бабурин А.Е. Алгоритмы с оценками для двухпроцессорной задачи теории расписаний типа flow shop с минимальными задержками // Представлено к публикации.
3. Dell'Amico M. Shop problems with two machines and time lags // Operations Research. – 1996. – Vol. 44. – P. 777-787.
4. Strusevich V.A. A heuristic for the two-machine open-shop scheduling with transportation times // Discrete Applied Mathematics. – 1999. – Vol. 93. – P. 287-304.
5. Yu W. The two-machine shop problem with delays and the one-machine total tardiness problem. – Ph.D. thesis. – Technische Universiteit Eindhoven, 1996.
6. Yu W., Hoogeveen H., Lenstra J.K. Minimizing makespan in a two-machine flow shop with delays and unit-time operations is NP-hard // J. Sched. – 2004. – Vol. 7, N 5. – P. 333-348.

Агеев Александр Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-20-86, факс (383) 333-25-98.
E-mail: ageev@math.nsc.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСКУССТВЕННЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕД

В.А. Алексашенко, А.А. Соловьев, А.А. Солодов

Искусственные материалы, из которых можно создавать образования со специфическим слабым отражением и большим поглощением в СВЧ-диапазоне вызывают интерес, например, в связи с защитой военной техники от высокоточного оружия и других случаях. Прообразом таких сред могут служить пылевые облака, состоящие из фрактальных кластеров, наноструктур, т.е. частиц с рыхлой структурой. Массовая доля таких частиц, взвешенных в воздухе, может быть незначительной, поэтому облако как среда характеризуется коэффициентом преломления $n \cong 1$, и отражение от границы облака в СВЧ-диапазоне весьма мало. Указанные структуры часто формируются в виде рыхлых нитей с отношением длины к поперечнику $L/d \gg 1$. При этом удельный расход массы (г/м^2) на создание поглощающего облака оказывается незначительным.

Рассмотрим отражение электромагнитных волн на границе раздела двух сред. При нормальном падении ЭМ волны на плоскую границу раздела вакуум - поглощающая среда коэффицент отражения имеет величину:

$$R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}, \tag{1}$$

где безразмерные величины n, k – показатель преломления и коэффициент поглощения в среде. Если λ, λ^* – длина волны в вакууме и в рассматриваемой среде, l – длина поглощения, то $n = \lambda/\lambda^*$, $k = \lambda^*/l$. Согласно (1), отражение волны с частотой ω от границы подавлено, если диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega) \cong 1$ и при этом поглощение незначительно. Например, если $n \cong 1$ и $k = 0.1$, то параметр $R = 2.5 \cdot 10^{-3}$.

В качестве имитатора кластера можно рассматривать искусственное полимерное волокно, содержащее диспергированный проводящий материал в виде наполнителя. Следует ожидать, что при объемной доле наполнителя $>\sim 20\%$ часть проводящих частиц соединяется мостиками проводимости, в этом случае возникают проводящие участки, которые распределены вдоль нити случайным образом. В другом варианте можно использовать в качестве основы стеклянные нити, на которых по технологии низкотемпературной металлизации созданы проводящие участки.

Распределяя нити с проводящими участками в некотором объеме, можно имитировать облако кластерных частиц. Если расстояния между нитями меньше длины волны, то среду можно считать квазиоднородной. Эффективная диэлектрическая проницаемость среды в этом случае удовлетворяет оценке:

$$\varepsilon_{\text{eff}} = 1 + (\varepsilon - 1)\mu/\mu_0,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость материала нити, μ – масса нитей в единичном объеме поглощающей среды, μ_0 – плотность материала нитей, μ/μ_0 – объемная доля нитей в рассматриваемом объеме. Очевидно, легко достигается случай, когда эффективный показатель преломления среды удовлетворяет условию $n_{\text{f}} \cong 1$.

Оценки эффектов поглощения можно получить, приписывая среде эффективную проводимость σ. Уравнения Максвелла для проводящей среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \cong \varepsilon_0$ записываются в виде:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}E = \rho/\varepsilon_0,\\
&\mathrm{div}B = 0,\\
&\mathrm{rot}E = -\partial B/\partial t,\\
&c^2\mathrm{rot}B = j/\varepsilon_0 + \partial E/\partial t,
\end{aligned} \tag{2}$$

где B и E – магнитная индукция и напряженность электрического поля, ρ и j – плотность заряда и ток. В системе СИ константы в (2) имеют величину:

$$c = 3\cdot 10^8\ \text{м/сек},\quad \varepsilon_0 = (4\pi\cdot 9\cdot 10^9)^{-1}\ \text{фарада/м}.$$

Плоская волна в изотропной среде описывается функциями вида

$$E(x,t) = E_0\exp(i\omega t - ikx),\quad B(x,t) = B_0\exp(i\omega t - ikx),$$

где E_0, B_0 – постоянные векторы. Возбуждаемый волной ток проводимости имеет вид $j = \sigma E$. Используя тождество, выполненное для плоской волны:

$$j = \sigma E = \frac{\sigma}{i\omega}\cdot\frac{\partial E}{\partial t},$$

из системы уравнений (2) можно получить выражение для волнового вектора k

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 + \frac{\sigma}{i\varepsilon_0\omega}}. \tag{3}$$

Физически ясно, что отражение волны при переходе в проводящую среду слабое, если индуцируемые в среде токи (поляризации или проводимости) слабо возмущают поле падающей волны. Следовательно, для выполнения нужного свойства необходимо в (3) выполнить условие

$$\frac{1/2\sigma}{\varepsilon_0\omega} \ll 1. \tag{4}$$

Если выполнено (4), то волна в среде описывается функцией вида

$$E = E_0\exp(i\omega t)\exp\Big(-\frac{1/2\sigma}{\varepsilon_0\omega}x\Big),$$

Таким образом, при частоте выше граничной $\omega > \sigma/2\varepsilon_0$ среда слабо отражает падающую волну. Поглощение проходит на длине l, причем при $\omega \gg \sigma/\varepsilon_0$ длина поглощения l не зависит от частоты. Оценка l в единицах СИ имеет вид

$$l = \frac{2\varepsilon_0 c}{\sigma} = \frac{1}{60\pi\sigma}. \tag{5}$$

Соотношения (4) и (5) позволяют сформулировать количественные требования к поглощающей среде. Среда может быть выполнена, например, как регулярная решетка из проводящих нитей с шагом 1 мм. Таким образом, верхняя граница по частоте определяется конструктивными соображениями и лежит в диапазоне длин волн ~ 1 мм. Вторая граница определяется совместно критериями (4) и (5). Пусть, например, допустимая толщина поглощающего слоя $\sim$ 1 м, и длина поглощения $l \sim 10 - 100$ см. Тогда для частот в области $\lambda^* = 3$ см, $\omega^* = 2\pi\cdot 10^{10}$, критерии (4), (5) дают соотношения:

$$\sigma \ll \varepsilon_0\omega^* \cong 0.5\ \text{ом}^{-1}\text{м}^{-1}, \tag{6а}$$

$$\sigma \sim 1/(60\pi l) \sim 1/20 \div 1/200\ \text{ом}^{-1}\text{м}^{-1}. \tag{6б}$$

Критерии (6) найдены по заданной толщине поглощающего экрана и позволяют определить длину поглощения и нижнюю границу частот, на которых экран работоспособен. Например, выбор проводимости среды 1/100 Сим фиксирует длину поглощения $l = 0.5$ м. При толщине поглощающего экрана 0.5-1 м экран эффективен в дипазоне длин волн ~ 1 мм $\div$ 0.5 м.

Для упрощенной оценки расхода материалов можно принять модель, в которой проводимость среды σ пропорциональна объемной доле проводящего материала в поглощающем слое:

$$\sigma = \sigma_0(m/m_0), \tag{7}$$

где σ_0 и m_0 – проводимость и плотность используемого материала, σ и m – проводимость среды и масса проводящего материала в единичном объеме.

Показано, что на базе рыхлых структур, имитирующих нитевидные фрактальные кластеры, могут быть получены искуственные слабо проводящие среды с электромагнитными характеристиками, в которых сочетаются свойства газов (диэлектрическая проницаемость близка 1) и материалов с низкой проводимостью (проводимость среды в интервале $\sim 10^{-2}$ Сим). На базе указанных сред можно создавать экраны, не отражающие, но поглощающие СВЧ-излучение.

Технологически указанные материалы могут быть выполнены на основе тонких диэлектрических несущих нитей с наполнителем из мелкодисперсных проводящих материалов.

В численных примерах нами рассмотрен вариант, когда композитные нити поставлены в виде регулярной решетки с плотностью нитей ~ 1 нить/мм^2. Если проводящие участки на нитях достаточно длинные, то можно пользоваться понятием эффективной проводимости среды. В указанном варианте технологический критерий эффективности среды сводится к неравенствам (6а), (6б). По оценкам, в данном варианте экраны, не отражающие, но поглощающие СВЧ-излучение , могут иметь толщину порядка 0.1 – 1 м при удельной массе экрана порядка 0.5 кг/м^3.

Проводящие участки на нитях могут быть и короткими, в этом случае они имеют вид "иголок". Наиболее сложный вариант возникает в том случае, если расстояние между иголками оказывается больше размера иглы. В подобном варианте массовые характеристики экрана возрастают пропрционально доле непроводящих участков на несущей нити.

Результаты расчётов подтверждаются экспериментами в лабораторных и натурных условиях, например, при защите танков от обнаружения в радиочастотном и оптическом диапазонах.

Соловьев Анатолий Алексеевич,
Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия,
пр. Мира, 5, Омск, 644080, Россия, тел. (3812) 65-17-63.
E-mail: solovyov_aa@sibadi.org

Алексашенко Виктор Андреевич, Солодов Алексей Александрович,
Центральный научно-исследовательский радиотехнический институт,
ул. Новая Басманная, 20, Москва, 105066, Россия.

СЕДЛОВЫЕ ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ: ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

А.С. Антипин

1. Постановка проблемы. Задача скалярной оптимизации представляет собой классический инструмент математического моделирования ситуаций принятия решений, когда на множестве альтернатив необходимо выбрать наилучшее решение. Эта задача сыграла важную роль в формировании теории принятия решений. Однако со временем ситуация изменилась, появилась необходимость изучать проблемы группового принятия решений на множестве альтернатив при условии выполнения некоторых дополнительных балансовых условий. Существуют разнообразные математические модели для описания ситуаций группового выбора. Основные элементы этих моделей - это целевые функции и множества, которые позволяют каждому участнику выбрать лучшую альтернативу и балансы или условия, которым должны удовлетворять выбранные альтернативы. Решения таких моделей называются равновесными, поскольку они согласовывают интересы участников ситуации принятия решений. Равновесные решения одновременно являются неподвижными точками некоторых экстремальных отображений, к которым всегда можно свести равновесные задачи. Все эти задачи могут быть объединены в рамках концепции равновесного программирования [1],[2], которая включает в себя такие разделы как: игры n лиц с равновесиями по Нэшу, многокритериальные равновесные задачи, обратные задачи оптимизации и другие.

В данной работе мы рассмотрим относительно новую конструкцию седловой игры двух лиц, покажем ее возможности как инструмента математического моделирования и рассмотрим методы ее решения. Седловую игру двух лиц можно сформулировать как систему задач вида

$$x^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle \lambda^*, f(x)\rangle \mid g(x) \leq b(y^*), \quad x \in X\}, \tag{1}$$

$$\langle p - p^*, g(x^*) - b(y^*)\rangle \leq 0,\ p \geq 0, \tag{2}$$

$$y^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle p^*, b(y)\rangle \mid \ h(y) \leq f(x^*),\ y \in Y\}, \tag{3}$$

$$\langle \lambda - \lambda^*, h(y^*) - f(x^*)\rangle \leq 0,\ \lambda \geq 0. \tag{4}$$

Здесь $f(x) = (f_1(x), ..., f_{m_1}(x)), b(y) = (b_1(y), ..., b_{m_2}(y))$ - выпуклые вверх (вогнутые), а $g(x) = (g_1(x), ..., g_{m_2}(x)), h(y) = (h_1(y), ..., h_{m_1}(y))$ - выпуклые вниз функции для всех $x \in X, y \in Y$, где $X \subset R^{m_1}, Y \subset R^{m_2}$- выпуклые замкнутые множества. Пара $x^*, y^* \in X \times Y$ является решением системы (1)-(4), которая всегда существует, если множество $X \times Y$ ограничено (теорема Какутани). С другой стороны, эта пара является неподвижной точкой системы экстремальных включений правой части из (1)-(4). Заметим, что вариационные неравенства (2),(4) также всегда можно переписать в форме экстремальных включений.

Для задач выпуклого программирования (1),(3) введем функции Лагранжа

$$L_1(\lambda^*, y^*, p, x) = \langle \lambda^*, f(x)\rangle - \langle p, g(x) - b(y^*)\rangle,\ x \in X, p \geq 0, \tag{5}$$

$$L_2(\lambda, y, p^*, x^*) = \langle p^*, b(y)\rangle - \langle \lambda, h(y) - f(x^*)\rangle,\ y \in Y, \lambda \geq 0, \tag{6}$$

тогда в терминах этих функций систему (1)-(4) можно представить в более компактном виде - седловой игры двух лиц [3]

$$p^*, x^* \in \mathrm{ArgSdl}\{L_1(\lambda^*, y^*, p, x),\ x \in X, p \geq 0\}, \tag{7}$$

$$\lambda^*, y^* \in \mathrm{ArgSdl}\{L_2(\lambda, y, p^*, x^*),\ y \in Y, \lambda \geq 0\}, \tag{8}$$

где символ ArgSdl обозначает множество седловых точек соответствующей функции Лагранжа относительно собственных переменных при фиксированных параметрах. Эта игра порождает седловое отображение множества $R_+^{m_1}, Y, R_+^{m_2}, X$ в себя.

С другой стороны седловую задачу (1)-(4) можно интерпретировать как скаляризацию или линейную свертку многокритериальной игры двух лиц вида

$$x^* \in \mathrm{ParetoMax}\{f(x) \mid g(x) \leq b(y^*),\quad x \in X\}, \tag{9}$$

$$y^* \in \mathrm{ParetoMax}\{b(y) \mid\ h(y) \leq f(x^*),\ y \in Y\}. \tag{10}$$

Здесь требуется найти пару x^*, y^*, такую, что $x^*, y^* \in \Phi(x^*, y^*)$, где $\Phi(x, y)$- точечно-множественное отображение, любой образ которого состоит из пары паретовских многообразий, задач многокритериальной оптимизации, отвечающих конкретным $x, y \in X \times Y$.

Задачи (1)-(4) или (7),(8) формулируются относительно прямых x, y и двойственных переменных p, λ. В ситуациях экономического моделирования двойственные переменные, как правило, интерпретируются как цены или оценки. Если учесть, что любые материальные потоки в экономических системах всегда сопровождаются финансовыми или ценовыми потоками, то нетрудно видеть, что седловые игры могут представлять полезный инструмент для описания материальных и финансовых потоков одновременно. Рассмотрим некоторые частные примеры общей конструкции (1)-(4).

2. Равновесная модель производства (фирмы). Классическая модель производства (фирмы) представляет собой задачу выпуклого программирования вида

$$x^* \in \mathrm{Argmax}\{f(x) \mid g(x) \leq y,\quad x \in X\}, \tag{11}$$

$$\langle p - p^*, g(x^*) - y\rangle \leq 0,\ p \geq 0, \tag{12}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ соответственно скалярная и векторная выпуклые функции, y – фиксированный вектор ресурсов, p^* – вектор множителей Лагранжа задачи (11) (двойственная компонента седловой точки функции Лагранжа этой задачи). В этой модели предполагается, что в единицу времени $x = 1$ используется $g(1)$ единиц ресурсов и вырабатывается $f(1)$ единиц продуктов, если производство работает с интенсивностью x единиц времени, то соответственно используется и выпускается $g(x)$ и $f(x)$ единиц ресурсов и продуктов, при этом используемые ресурсы не должны превосходить имеющиеся запасы y. Вектор p^* трактуется как вектор цен или оценок используемых ресурсов. В задаче требуется выбрать вектор интенсивности работы $x = x^*$, который обеспечит максимум выпуска продукции.

В приведенной модели не учитываются такие характеристики производства, как его рентабильность, уровень дефицитности ресурсов, а также связь входных ресурсов с объемом выпуска продукции. Эта связь имеет решающее значение для существования фирмы. На первый взгляд кажется, что чем больше перерабатывается ресурсов, тем больше выпуск продукции и, следовательно, выше прибыль. Однако при покупке больших объемов ресурсов и их хранении доля этих расходов может составлять значительную часть в общей прибыли, поэтому чистая прибыль может резко падать с увеличением объемов ресурсов. С другой стороны, наоборот, если объемов ресурсов недостаточно, то возрастает их дефицитность (нехватка), которая потребует изменения параметров производства, что приведет к возрастанию технологических издержек и уменьшению чистой прибыли фирмы. Из этих рассуждений следует, что стоимость входных ресурсов должна быть согласована со стоимостью выпуска. В частном случае, стоимость ресурсов должна быть не выше прибыли (в крайнем случае, совпадать).

На базе (11),(12) сформулируем равновесную модель, которая учитывает вышеприведенные рассуждения [1]. Для простоты рассуждений приведем функции из (11) к одному знаку. Для этого введем функцию $f_-(x) = -f(x)$, которую будем называть функцией издержек, при этом минус издержки $-f_-(x) = f(x)$ совпадают с прибылью. Используя введенную функцию сформулируем равновесную модель в форме

$$x^* \in \mathrm{Argmin}\{f_-(x) \mid g(x) \leq p^*, \quad x \in X\}, \tag{13}$$

$$\langle p - p^*, g(x^*) - p^* \rangle \leq 0, \ p \geq 0, \tag{14}$$

$$p^* = s(y^*) \tag{15}$$

Сразу же отметим, что задачи (13),(14) определяют седловую точку функции Лагранжа $L(x,p) = f_-(x) + \langle p, g(x) - s(y^*)\rangle$ для всех $x \in X, p \geq 0$, подчиненную системе неравенств

$$f_-(x^*) + \langle p, g(x^*) - s(y^*)\rangle \leq f_-(x^*) + \langle p^*, g(x^*) - s(y^*)\rangle \leq f_-(x) + \langle p^*, g(x) - s(y^*)\rangle$$

для всех $x \in X, p \geq 0$ и случая, когда $p^* = s(y^*)$. Таким образом, в этой задаче требуется выбрать параметр ресурсов (вектор правой части ограничений задачи (13)) так чтобы он совпал с вектором множителей Лагранжа (уравнение (15)). Вектор множителей Лагранжа представляет собой субградиент функции чувствительности

$$\varphi(y) = f_-(x^*) = \mathrm{Min}\{f_-(x) \mid g(x) \leq y, \quad x \in X\}, \tag{16}$$

т.е. $\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = p^*$, а вектор $s(y)$ – градиент функции стоимости ресурсов $S = S(y)$, т.е. $\frac{dS(y)}{dy} = s(y)$. Другими словами, оба градиента имеют смысл цен, точнее маргинальных цен. Множители Лагранжа – это внутренние цены, связанные с технологией модели, а $s(y)$ - это внешние цены рынка. Векторная функция $s(y) = p$ отображает вектор ресурсов y, измеренный в натуральных единицах, в стоимости, измеренные в денежных единицах. Тогда отношение $p/s(y)$ обозначает стоимость единицы ресурса, т.е. его цену. Отображение $p = s(y)$ изначально можно считать пронормированным, тогда обе переменные будут иметь смысл цен и можно говорить о их равенстве. Обе переменные можно покоординатно перемножать, что будет означать пересчет цены ресурса из одной системы цен в другую, например, внешние цены во внутренние и наоборот.

Решение системы (13)-(15) распадается на две независимые задачи, сначала решается седловая задача (13),(14), затем, используя найденное значение вектора множителей Лагранжа, решается уравнение (15). Решение уравнения $y = y^*$ представляет собой "точку пересечения"двух многозначных отображений, одно из которых – субградиент функции чувствительности, другое (суб)градиент функции стоимости ресурсов. В точке пересечения выполняется условие равенства цен (15). Отклонение от точки равновесия $y = y^*$ порождает либо рост цен на ресурсы за счет увеличения их объема, либо рост цен (множителей Лагранжа) за счет усиления дефицита ресурсов. Любые отклонения от равновесия придают системе не устойчивый характер.

3. Равновесная поставка ресурсов. Эта модель [4] близка к задаче (13)-(15) с той лишь разницей, что здесь векторная функция $s(y)$ явно не задана, а определяется параметрической задачей оптимизации, которая в свою очередь, является моделью поставщика ресурсов

$$x^* \in \mathrm{Argmin}\{f_-(x) + \langle p^*, g(x) - y^*\rangle \ \mid \ x \in X\}, \tag{17}$$

$$\langle p - p^*, g(x^*) - y^*\rangle \le 0,\ p \ge 0, \tag{18}$$

$$\langle y - y^*, p^*\rangle \le 0,\ y \in Y. \tag{19}$$

Здесь, поставщик ресурсов, предполагая, что вектор цен $p^* \ge 0$ ему известен, вычисляет вектор ресурсов $y^* \in Y$, решая задачу максимизации (19) $\langle y, p^*\rangle \le \langle y^*, p^*\rangle$ на ограниченном замкнутом выпуклом множестве Y. Затем поставляет найденный вектор первому участнику. Если вектор множителей Лагранжа задачи (17),(18) совпадает с вектором цен $p^* \ge 0$ поставщика, то задача решена. Нетрудно заметить, что решение система задач (17)-(19) сводится к вычислению седловой точки $p^* \ge 0, x^* \in X, y^* \in Y$ функции

$$L(p, x, y) = f_-(x) + \langle p, g(x) - y\rangle,$$

которая зависит от прямых $x \in X, y \in Y$ и двойственных $p \ge 0$ переменных.

4. Модель равновесного кредитного рынка. Модель [5] представляет собой систему задач оптимизации, которая описывает поведение двух макро-игроков: заемщика и кредитора. Принятие решений каждого из них описывается задачей выпуклого программирования, а балансирование принятых решений представлено вариационными неравенствами или, что то же самое, линейными задачами оптимизации. Модель имеет вид

$$w^* \in \mathrm{Argmax}\{S_1(w) + (1 + r^*)M(w) \mid g(w) \le y^*, \quad w \in W_0\}, \tag{20}$$

$$\langle p - p^*, g(w^*) - y^*\rangle \le 0,\ p \ge 0, \tag{21}$$

$$y^* \in \mathrm{Argmax}\{S_2(y) + \langle p^*, y\rangle \mid \ \langle m, y\rangle \le M(w^*), y \in Y\}. \tag{22}$$

$$(r - r^*)(\langle m, y^*\rangle - M(w^*)) \le 0,\ r \ge 0. \tag{23}$$

Здесь $S_1(w), S_2(y), M(w)$ - выпуклые вверх (вогнутые) функции для $w \in W_0, y \in Y$, где $W_0 \subset R^n, Y \subset R^m$- выпуклые замкнутые множества. Первые две функции описывают планируемую прибыль участников ситуации, последняя - заемные средства, взятые в виде кредитов. $g(w)$ - выпуклая вниз функция, с помощью которой формируются балансы технологического сектора. $r^* > 0$ - процентная ставка или цена кредита, базовый параметр модели от значения которого зависит ненасыщенный спрос и соответственно равновесное состояние системы. Системы, близкие к (20)-(23) рассматривались в [3].

Задачи (20) и (22) описывают процесс принятия решений заемщиком и кредитором. Найденные прямые решения, а именно, величины w^*, y^* используются для формирования балансов друг у друга. Они присутствуют в балансах (21) и (23). Кроме того, в процессе принятия решений участники вырабатывают так называемые двойственные решения, а именно, величины $p^* \in R^m_+, r^* \in R^1_+$, где R^m_+, R^1_+ -положительные ортанты. С помощью этой информации они влияют на целевые функции друг друга и следовательно на процесс принятия решений. Вектор $p^* \geq 0$ формирует целевую функцию (22), а число $r^* > 0$ по своему содержательному смыслу не должно вырождаться в ноль, поскольку целевая функция задачи (22) предположительно обладает свойством ненасыщаемости. Это значит, что максимум задачи всегда лежит на границе множества и r^* как множитель Лагранжа, отличен от нуля. Фиксированный вектор $m \geq 0$ - это вектор рыночных цен, с помощью которых покупается вектор ресурсов $y^* \in Y$.

Заметим, что взаимодействие двух участников ситуации происходит по схеме: кредитор передает заемщику вектор ресурсов y^* и процентную ставку $r^* > 0$, а заемщик передает кредитору вектор множителей Лагранжа (внутренних цен) p^*, с помощью которого кредитор формирует свою функцию прибыли для участия в проекте и величину необходимого кредита $M(w^*)$. В этой схеме двойственные вектора p^* и r^* играют роль обратных связей, которые обеспечивают равновесное состояние системы (20)-(23).

5. Методы решения седловых игр двух лиц. Система задачи (1)-(4) является частным случаем более общей конструкции. Чтобы показать это, введем следующие обозначения:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} p \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \varphi(z) = \begin{pmatrix} f(x) \\ b(y) \end{pmatrix}, \quad \Phi(z) = \begin{pmatrix} g(x) \\ h(y) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где I_1, I_2 - единичные матрицы размеров соответственно, $m_1 \times m_1$ и $m_2 \times m_2$. Нетрудно проверить, что с помощью введенных обозначений система (1)-(4) в пространстве переменных $Z = Q \times U$ может быть записана в виде

$$z^*, l^* \in \operatorname{ArgSdl}\{\langle l^*, B\varphi(z)) \mid \Phi(z) \leq B\varphi(z^*), z \in Z\} \tag{24}$$

Вектор z^*, l^* в левой части включения (24) - седловая точка функции Лагранжа

$$L_0(z, l, z^*, l^*) = \langle l^*, B\varphi(z)\rangle - \langle l, \Phi(z) - B\varphi(z^*)\rangle.$$

Задача (24) определяет точечно-множественное отображение $\Psi(z, l)$, образ которого есть множество седловых точек функции $L_0(z, l, z^*, l^*)$. С помощью этого отображения решение задачи (24) сводится к отысканию неподвижной точки включения $z^*, l^* \in \Psi(z^*, l^*)$. Для решения задачи (24) используем прямые и двойственные методы экстрапроксимального типа [3]:

Двойственный метод

$$\bar{l}^n = \pi_+(l^n + \alpha(\Phi(z^n) - B\varphi(z^n)),$$

$$z^{n+1} \in \operatorname{argmax}\{-1/2|z - z^n|^2 + \alpha L_0(z, \bar{l}^n, z^n) \mid z \in Z\},$$
$$l^{n+1} = \pi_+(l^n + \alpha(\Phi(z^{n+1}) - B\varphi(z^{n+1})). \tag{25}$$

Прямой метод

$$\bar{z}^n \in \operatorname{argmax}\{-1/2|z - z^n|^2 + \alpha L_0(z, \bar{l}^n, z^n) \mid z \in Z\},$$

$$l^{n+1} = \pi_+(l^n + \alpha(\Phi(\bar{z}^n) - B\varphi(z^{\bar{n}})),$$
$$z^{n+1} \in \operatorname{argmax}\{-1/2|z - z^n|^2 + \alpha L_0(z, \bar{l}^{n+1}, z^n) \mid z \in Z\}. \tag{26}$$

Здесь размерности матриц и векторов, вообще говоря, различны, но предполагается, что они согласованы между собой так, что все матрично-векторные операции корректны. В предположении выпуклости функций и множеств, формирующих задачу, и при некотором ограничении на длину шага $\alpha > 0$ доказана сходимость этих процессов к равновесному решению исходной задачи, включая, в частности, модели, рассмотренные здесь отдельно.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00388 и Программой государственной поддержки ведущих научных школ НШ-5073.2008.1

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А.С. Многокритериальное равновесное программирование // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Том 1. Математическое программирование. – Иркутск, 2008. – С. 22-48.
2. Антипин А.С. Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2005. – Т. 45, N 11, N 12. – С. 1969-1990, 2102-2111.
3. Антипин А.С. Методы решения систем задач выпуклого программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1987. – Т. 27, N 3. – С. 368-376.
4. Антипин А.С. Седловая задача и задача оптимизации как единая система // Труды Института математики и механики. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2008. – Т. 14, N 2. – С. 5-15.
5. Антипин А.С., Попова О.А. О равновесной модели кредитного рынка: постановка задачи и методы решения // Ж. вычисл. матем и матем физ. – 2009. – Т. 49, N 3. – С. 465-481.

Антипин Анатолий Сергеевич,
Вычислительный Центр РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119333, Россия, тел. (495) 135-42-50, факс (495) 135-61-59.
E-mail: antipin@ccas.ru, http://www.ccas.ru/antipin

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРЕДПРИЯТИЯ В ПРОЦЕССЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ДРУГИМИ СУБЪЕКТАМИ. ПОИСК РАВНОВЕСИЯ

А.Е. Бахтин

Рассматривается задача оптимизации производства на предприятиях в условиях их взаимодействия, в частности, в процессе взаимовыгодного обмена производственными ресурсами (факторами производства). Для этого наряду с технологиями производства в модель предприятия включаются возможные способы обмена ресурсами, где указываются выгодные направления обмена и нормы (коэффициенты) обмена, которые являются искомыми величинами и подлежат определению. Такое расширение модели оптимизации производства приводит к тому, что в ограничениях задачи вместе с искомыми объёмами производства и величинами спроса и предложения по обмениваемым ресурсам появляются и неизвестные нормы обмена, т.е. в матрицу задачи добавляются билинейные элементы. Исследовано влияние обменного процесса на основные показатели предприятия, такие как объёмы производства, величина спроса и предложения, общая прибыль предприятия. На примере задачи с двумя ресурсами нелинейный характер указанных зависимостей от норм обмена исследован как графически с помощью двойственной задачи так и аналитически с использованием параметрического симплекс-метода. Показано, что графики точек спроса и предложения представляют собой зигзагообразные ломаные линии, а точку равновесия в случае взаимодействия двух предприятий можно получить с помощью ящика Эджворта как точку пересечения двух таких ломаных линий [2].

Графики же функций чистого спроса и предложения по каждому ресурсу представляются кусочно-гиперболическими функциями в зависимости от норм обмена. Равновесие между спросом и предложением достигается при равновесных нормах обмена ресурсов, которые могут быть определены как неподвижные точки в итеративном процессе взаимодействия предприятий, напоминающем паутинообразную процедуру поиска равновесия с помощью цен.

В докладе приводится иллюстративный пример взаимодействия двух предприятий и процедура поиска равновесия. Эксперименты по предлагаемому итеративному методу на различных числовых примерах подтверждают его сходимость к равновесному состоянию при любой начальной норме обмена. Если же начальное приближение взято вблизи равновесия, то сходимость может быть доказана теоретически, используя свойство выпуклости гиперболических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахтин А.Е. Анализ модели взаимодействия фирм при оптимизации производства продукции с помощью собственных и заемных денег // Совершенствование институциональных механизмов в промышленности. – Новосибирск, 2005. – С. 136-156.
2. Бахтин А.Е. Взаимовыгодный обмен ресурсами при оптимизации своих производств фирмами. Определение равновесия // Вестник НГУ. – 2007. – Т. 7, Вып. 1. – С. 81-92.

Бахтин Анатолий Егорович,
Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Ломоносова, 56, Новосибирск, 630099.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В.Л. Береснев

Задача размещения предприятий (средств обслуживания) с неограниченными мощностями — хорошо известная задача дискретной оптимизации [1]. В задаче размещения (на максимум) производитель решает вопрос о том, в каких местах из множества возможных открыть предприятия, производящие некоторый продукт, и к какому открытому предприятию прикрепить каждого из заданных потребителей данного продукта, чтобы получить максимальную прибыль (доход).

Ниже рассматривается более общая ситуация — размещение предприятий в условиях конкуренции. Предполагается, что две конкурирующие фирмы — производители некоторого продукта, последовательно принимают решения об открытии своих предприятий на заданном множестве возможных мест их размещения. Кроме того, в данной ситуации каждый потребитель рассматривается как сторона, принимающая решения, которая, исходя из своих собственных предпочтений, среди открытых предприятий выбирает для себя наилучшее и приносит тем самым доход одной из фирм. Процесс принятия решений при конкурентном размещении предприятий по аналогии с моделью Штакельберга [4] представляется состоящим из трех этапов. На первом этапе одна из фирм (фирма–лидер), учитывая возможную реакцию второй фирмы (фирмы–последователя), размещает свои предприятия. На втором этапе фирма–последователь, имея информацию о расположении предприятий фирмы–лидера, открывает свои предприятия. Наконец, на третьем этапе каждый потребитель, исходя из своих собственных предпочтений, выбирает лучшее для себя предприятие.

Задача, формулируемая от лица фирмы–лидера, состоит в выборе такого размещения предприятий, чтобы получить максимальную прибыль с учетом того, что фирма–последователь, также стремящаяся получить максимальную прибыль, "захватит" часть потребителей.

Математическая формулировка рассматриваемой задачи представляет собой задачу целочисленного двухуровневого программирования [3]. Исследование данной задачи проводится при дополнительном предположении, когда для каждого потребителя задано некоторое множество предприятий (мест размещения предприятий), которые являются "допустимыми" для этого потребителя. Кроме того, доход, получаемый любым допустимым предприятием от обслуживания данного потребителя не зависит от самого предприятия.

На задачу конкурентного размещения предприятий при указанных предположениях может быть распространен предложенный в [2] метод вычисления верхней границы целевой функции. Соответствующий алгоритм состоит в построении задачи размещения предприятий специального вида и отыскания оптимального решения этой задачи.

Предлагаемые алгоритмы построения приближенного решения задачи конкурентного размещения предприятий представляют собой процедуру локального подъема относительно окрестности специального вида, начинающегося из начального приближенного решения, получаемого одновременно с вычислением верхней границы. Используемые в алгоритмах окрестности строятся таким образом, чтобы включать в себя ограниченное число "перспективных" вариантов применения текущего решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09–01–00059) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск: Изд-во Инст. математики, 2005.

2. Береснев В.Л. Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, N 4. – P. 3-24.

3. Dempe S. Foundations of bilevel programming. – Kluwer Ac. Pub., 2002.

4. Stackelberg H. von. Grundlagender theorerischken Volkswirtschaftslahre (translated as The theory of the market Economy). — W. Hodge&Co Ltd, London, 1943.

Береснев Владимир Леонидович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383) 333-29-91, факс (8-383) 333-25-98.
E-mail: beresnev@math.nsc.ru.

ГЛОБАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.П. Булатов, О.В. Хамисов

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$c^T x \to \min, \tag{1}$$

$$Ax \le b, \tag{2}$$

$$x \in X = \{x : \underline{x}_j \le x_j \le \overline{x}_j, j = \overline{1,n}\}, \tag{3}$$

где $c, \underline{x}, \overline{x} \in E^n$, A – $m \times n$ матрица, $b \in E^m$. Будем предполагать, что коэффициенты векторов c и b и элементы матрицы A изменяются в пределах заданных интервалов:

$$\underline{c}_j \le c_j \le \overline{c}_j, j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\underline{a}_{ij} \le a_{ij} \le \overline{a}_{ij}, j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$\underline{b}_i \le b_i \le \overline{b}_i, i = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Оптимальное значение задачи (1)-(3) зависит от набора коэффициентов (c, A, b). Введем в рассмотрение функцию оптимального значения

$$\varphi(c, A, b) = \min_x \{c^T x : Ax \le b, \underline{x}_j \le x \le \overline{x}\}, \tag{7}$$

а множество всех наборов (c, A, b), удовлетворяющих условиям (4)-(6) обозначим через W. Опишем технику, предлагаемую в данном докладе, на следующем примере. Требуется определить границы $\underline{\varphi}$ and $\overline{\varphi}$ такие, что

$$\underline{\varphi} \le \varphi(c, A, b) \le \overline{\varphi}, \forall (c, A, b) \in W. \tag{8}$$

Для нахождения границы $\underline{\varphi}$ рассмотрим задачу

$$\varphi(c, A, b) \to \min, \tag{9}$$

$$(c, A, b) \in W. \tag{10}$$

Из (7) следует, что задача (9)-(10) эквивалентна следующей:

$$\min_{(x,c,A,b)} c^T x \tag{11}$$

$$Ax \le b, \tag{12}$$

$$x \in X = \{x : \underline{x} \le x \le \overline{x}\}, \tag{13}$$

$$(c, A, b) \in W. \tag{14}$$

Задача (11)-(14) – задача билинейного программирования. Она линейна по x при фиксированных значениях (c, A, b) и линейна по (c, A, b) при фиксированном x, т.е. задача (9)-(10) есть частный случай задачи билинейного программирования и ее можно решать, например, методами невыпуклого квадратичного программирования. В докладе предлагается иной подход, основанный на свойствах функции $\varphi(c, A, b)$.

Запишем функцию Лагранжа задачи (1)-(3)

$$L(x, c, A, b, \lambda) = c^T x + \lambda^T Ax - \lambda^T b \tag{15}$$

и двойственную по Лагранжу функцию

$$\theta(c, A, b, \lambda) = \min_{x \in X}\{c^T x + \lambda^T Ax - \lambda^T b\}. \tag{16}$$

Тогда, в силу соотношений двойственности

$$\varphi(c, A, b) = \max_{\lambda \geq 0} \theta(c, A, b, \lambda). \tag{17}$$

Пусть $(\hat{c}, \hat{A}, \hat{b})$ – некоторый допустимый набор коэффициентов. Решив соответствующую задачу (1)-(3), найдем пару $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ (предполагается, что $(\hat{c}, \hat{A}, \hat{b})$ определяет непустую допустимую область). В силу построения

$$\varphi(\hat{c}, \hat{A}, \hat{b}) = \theta(\hat{c}, \hat{A}, \hat{b}, \hat{\lambda}),$$

$$\varphi(c, A, b) \geq \theta(c, A, b, \hat{\lambda}),$$

т.е. $\theta(c, A, b, \hat{\lambda})$ – опорная функция-миноранта функции $\varphi(c, A, b)$. Из (16) следует, что $\theta(c, A, b, \hat{\lambda})$ линейная по b и вогнутая, кусочно-линейная функция по (c, A). Тогда, для решения задачи (9)-(10) предлагается использовать методы глобальной оптимизации с вогнутыми функциями-минорантами [1-3]. Для определения величины $\overline{\varphi}$ используется аналогичная техника.

Если компоненты вектора $\underline{x}$ неотрицательны, то описанная выше методика приводит к линейной функции-миноранте и, следовательно, задача (9)-(10) в этом случае сводится к задаче линейного программирования. Этот факт согласуется с результатами, полученными ранее Е.Г. Анциферовым и Б.И. Беловым.

Рассматриваются также частные случаи задания множества W, например, при условии, что все элементы столбцов матрицы A, изменяясь численно, не меняют знака. В этом случае функция задача (9)-(10) будет задачей выпуклого программирования.

Основной процедурой решения является метод отсечений в комбинации с методом ветвей и границ. Показано, что идентификация несовместности условий (2)-(3) при определенных значениях параметров из W не привносит существенной трудности в основной процесс решения, так как можно построить плоскость в пространстве параметров W, отсекающую набор генерирующий несовместность, и продолжать процесс далее на усеченном множестве параметров.

Предлагаемая методика сопровождается тестовыми расчетами.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00307-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Б.И., Анциферов Е.Г. К установлению линейных зависимостей в условиях неопределенности // Труды ВЦ Иркутского университета. – Иркутск, 1968. – С. 143-147.

2. Анциферов Е.Г. Проекция в билинейных системах // Методы оптимизации и их

приложения. – Иркутск: СЭИ, 1992. – С. 208-211.
3. Булатов В.П. Методы отсечения и аппроксимации в многоэкстремальных задачах. – В кн.: Методы решения задач математического программирования и оптимального управления. – Новосибирск: Наука, 1984. – С. 30-43.
4. Хамисов О.В. Глобальная оптимизация функций с вогнутой опорной минорантой // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, N 9. – С. 1552-1563.
5. Булатов В.П., Хамисов О.В. Методы отсечения в E^{n+1} для решения задач глобальной оптимизации на одном классе функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. — Т. 47, N 11. — С. 1830-1842.

Булатов Валерьян Павлович, Хамисов Олег Валерьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 42-84-39, факс (3952) 42-67-96.
E-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

ОБОБЩЕННОЕ РАСШИРЕНИЕ ОУЭНА И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ АУМАНА-ШЕПЛИ

В.А. Васильев

1. Введение

В докладе дается описание нового подхода к построению обобщенного расширения Оуэна для некоторых классов так называемых регулярных полиномиальных кооперативных игр. Этот подход основан на использовании неаддитивного интегрирования, объединяющего и конкретизирующего идеи v-интегрируемости, предложенные в [3]. Помимо построения и анализа ряда конструкций продолжения, связанных с неаддитивным интегрированием, большое внимание уделяется различным аспектам аксиоматизации свойств отображения, сопоставляющего играм их обобщенные расширения Оуэна. В частности, один из главных результатов доклада показывает, что в качестве искомой аксиоматизации для некоторых классов неатомических кооперативных игр можно использовать аксиоматизацию Аумана-Шепли [1], предназначенную для описания мультипликативного продолжения неатомических игр, необходимого для бесконечномерного обобщения известной интегральной формулы Оуэна [1, 2]. Как одно из важных следствий указанного результата получена явная формула для мультипликативного продолжения Аумана-Шепли, представляющая интерес как для численного отыскания вектора Шепли неатомических кооперативных игр, так и для теоретического анализа полярных форм этих игр [3]. Что касается дискретных кооперативных игр, то для этого класса найдена аксиоматизация классического расширения Оуэна, отличающаяся от аксиоматизации Аумана-Шепли лишь ослабленным вариантом аксиомы мультипликативности (следует подчеркнуть, что эта аксиома не выполняется в полном объеме ни для дискретных, ни для смешанных игр). Именно, в отличие от неатомического случая, расширение Оуэна произведения двух дискретных игр равно произведению расширений сомножителей только при условии дизъюнктности минимальных носителей этих игр.

Как уже отмечалось, полученные результаты могут найти применение в анализе так называемых полярных форм неатомических кооперативных игр и их использовании для представления вектора Шепли (подробности, касающиеся полярных форм, см. в [3]). Доклад завершается обсуждением одного из таких применений: разработкой новой схемы доказательства теоремы о полярном представлении вектора Шепли, основанной на обобщенной интегральной формуле Оуэна.

2. Регулярные полиномиальные игры

Ниже дается описание основного класса игр, используемого в главных конструкциях доклада (и, прежде всего, в явном определении мультипликативного продолжения Аумана-Шепли).

Пусть (Q, d) - произвольный непустой метрический компакт с метрикой d. Обозначим через B борелевскую σ-алгебру этого компакта и рассмотрим совокупность $\mathcal{V}$ фунций множества $v : B \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих требоанию $v(\emptyset) = 0$. Согласно теоретико-игровой терминологии [1] тройку $\Gamma = (Q, B, v)$ с v из $\mathcal{V}$ называют кооперативной игрой (с побочными платежами), элементы множества Q - игроками, а подмножества $e \subseteq Q$, принадлежащие алгебре B - коалициями игроков. Напомним, что значение $v(e)$ интерпретируется как максимальный гарантированный доход коалиции e. В дальнейшем, как это принято в литературе, кооперативными играми будем называть и сами функции v.

Детальное описание интересующего нас класса полиномиальных кооперативных игр требует введения некоторых вспомогательных понятий и обозначений (большинство из них, включая используемые понятия теории векторных решеток, можно найти в [3]; там же указан ряд полезных ссылок на литературу по смежной тематике). Пусть e - произвольный элемент алгебры B. Обозначим через $H(e)$ совокупность конечных B-измеримых разбиений e и положим $H = \cup_{e \in B} H(e)$. Далее, для каждого разбиения $\eta = \{e_i\}_{i\in\Omega} \in H$, состоящего из m элементов ($|\Omega| = m$), и для функции $v \in \mathcal{V}$ через $v(\eta) = v(\{e_i\}_{i\in\Omega})$ обозначим *полиномиальную m-разность,* определяемую формулой

$$v(\eta) := \sum_{\omega\subseteq\Omega} (-1)^{|\Omega|-|\omega|}\ v(\cup_{i\in\omega} e_i), \tag{1}$$

где, как обычно, символ $|\omega|$ обозначает число элементов конечного множества ω. *Полиномиальная вариация* $||v||_o$ функции $v \in \mathcal{V}$ определяется формулой

$$\|v\|_o := \sup\{\sum_{\omega\subseteq\Omega} |v(\eta^\omega)| \ \Big|\ \eta = \{e_i\}_{i\in\Omega} \in H(Q)\}$$

где $\eta^\omega := \{e_i\}_{i\in\omega}$, а $v(\eta^\omega)$ определена согласно формуле (1). Говорят, что функция $v \in \mathcal{V}$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если $||v||_o < \infty$. Положим $V := \{v \in \mathcal{V} \ \Big|\ \|v\|_o < \infty\}$ и определим конус положительных элементов векторного пространства V, наделяющий его структурой векторной решетки. Напомним [3], что игра $v \in \mathcal{V}$ называется *вполне положительной*, если $v(\eta) \geq 0$ для любого разбиения $\eta = \{e_i\}_1^m$ из $\in H$. В качестве вышеупомянутого конуса положительных элементов в дальнейшем рассматривается выпуклый конус вполне положительных игр. Обозначим этот конус через V_+. Ясно, что все элементы конуса V_+ имеют ограниченную полиномиальную вариацию. Кроме того, как показано в [3], частичный порядок $u \geq_o v \Longleftrightarrow u - v \in V_+$, индуцируемый V_+ (вместе с нормой полиномиальной вариации $\|\cdot\|_o$), наделяет V структурой банахова векторного кольца. Более подробно [3]: V является банаховой и дедекиндово полной векторной решеткой, с согласованными структурами упорядоченного и нормированного пространства (монотонная порядковая сходимость влечет монотонную сходимость по норме).

Следуя стандартным обозначениям теории векторных решеток, для каждой игры $v \in V$ введем в рассмотрение положительную (v^+), отрицательную (v^-) и полную ($|v|$) вариацию этой игры, полагая $v^+ := v \vee 0$, $v^- := (-v) \vee 0$ и $|v| := (-v) \vee v$, соответственно (здесь через $u \vee w = \sup\{u, w\}$ и $u \wedge w = \inf\{u, w\}$ обозначаются точная верхняя и нижняя грани двухэлементного множества $\{u, v\}$ в полуупорядоченном векторном пространстве $(V, \geq_o)$). Обозначим через F совокупность всех непустых замкнутых подмножеств метрического компакта Q. Укажем типичный класс игр, фигурирующих в дальнейших рассмотрениях.

Определение 1. Игра $v \in V$ называется *регулярной*, если ее полная вариация $|v|$ удовлетворяет условию: $|v|(\{e_i\}_1^m) = \sup\{|v|(\ \{f_i\}_1^m\ ) \ \Big|\ f_i \subseteq e_i,\ f_i \in F,\ i = 1, \ldots, m\}$ для любого разбиения $\eta = \{e_i\}_1^m \in H$.
Совокупность регулярных игр обозначим через $rV = rV(B)$.

Определение 2. Игра $v \in rV$ называется *регулярной полиномиальной игрой порядка n,* если все ее полиномиальные разности порядка $n+1$ обращаются в 0: $v(\{e_i\}_1^{n+1}) = 0$ для каждого разбиения $\{e_i\}_1^{n+1} \in H$.

Обозначим через rV^n пространство всех регулярных полиномиальных игр порядка n и положим $rpV = \cup_{n=1}^{\infty} rV^n$. Будем говорить, что игра v является *регулярной полиномиальной игрой*, если v принадлежит rpV.

3. Неаддитивное интегрирование и обобщенное расширение Оуэна

Для описания интегрирования по полиномиальной неаддитивной функции множества из rpV, зафиксируем некоторое натуральное число $n \geq 1$ и функцию $v \in rV^n$. Первое, что потребуется для характеризации искомого интегрирования - построить продолжение v на n-тую симметрическую степень $B^{[n]}$ алгебры B. С этой целью нам понадобится определение n-той симметрической степени $e^{[n]}$ коалиции $e \in B$, задаваемое формулой: $e^{[n]} = \{\tau \subseteq e \,\big|\, |\tau| \leq n\}$, где, как и ранее, через $|\tau|$ обозначается число элементов конечного множества τ.

Определение 3 [3]. *Симметрической степенью порядка n алгебры B* называется наименьшая алгебра подмножеств множества $Q^{[n]}$, содержащая семейство симметрических степеней $\{e^{[n]} \,\big|\, e \in B\}$ всех элементов алгебры B.

На основании описания строения алгебры $B^{[n]}$, предложенного в [3], установлено, что существует единственная аддитивная функция множества $\lambda_v : B^{[n]} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая условию: $\lambda_v(e^{[n]}) = v(e)$ для каждого $e \in B$. Более того, учитывая регулярность v и компактность метрического пространства (Q, d), с помощью стандартной аргументации можно доказать, что имеется единственное счетно-аддитивное продолжение μ_v функции λ_v на наименьшую σ-алгебру $\sigma B^{[n]}$, содержащую алгебру $B^{[n]}$ (другими словами, аддитивная функция $\lambda_v : B^{[n]} \to \mathbf{R}$ допускает единственное счетно-аддитивное продолжение $\mu_v : \sigma B^{[n]} \to \mathbf{R}$ на σ-алгебру $\sigma B^{[n]}$, порожденную алгеброй $B^{[n]}$). Интересно отметить, что σ-алгебра $\sigma B^{[n]}$ имеет достаточно простое описание в традиционных терминах теории меры.

Предложение 1. Алгебра $\sigma B^{[n]}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй метрического пространства $(Q^{[n]}, d^{[n]})$, где $d^{[n]}$ есть сужение стандартной метрики Хаусдорфа на $Q^{[n]} : d^{[n]}(\tau, \tau') := \min\{\epsilon \,\big|\, \tau \subseteq \tau'_\epsilon, \tau' \subseteq \tau_\epsilon\}$, где τ_ϵ, τ'_ϵ - ϵ-окрестности τ, τ' в пространстве (Q, d).

Пусть теперь f - произвольный элемент векторного пространства $I(Q, B)$ ограниченных и B-измеримых функций, определенных на Q. Введем *полиномиальное продолжение* $f_\rho^{[n]}$ функции f на $Q^{[n]}$, определяемое формулой

$$f_\rho^{[n]}(\tau) := \prod_{t \in \tau} f(t),\ \tau \in Q^{[n]}.$$

Нетрудно проверить, что полиномиальное продолжение каждой функции $f \in I(Q, B)$ является σB-измеримой ограниченной функцией, определенной на множестве $Q^{[n]}$ (другими словами, для каждой функции $f \in I(Q, B)$ ее полиномиальное продолжение $f_\rho^{[n]}$ принадлежит пространству $I(Q^{[n]}, \sigma B^{[n]})$ ограниченных $\sigma B^{[n]}$-измеримых функций, определенных на $Q^{[n]}$. Следовательно, для любой функции $f \in I(Q, B)$ ее продолжение $f_\rho^{[n]}$ является μ_v-интегрируемой функцией. Но это означает, в частности, что для каждого $v \in rV^n$ функционал $P_v :\ I(Q, B) \to \mathbf{R}$, задаваемый формулой

$$P_v(f) := \int f_\rho^{[n]} d\mu_v, \qquad f \in I(Q, B), \tag{2}$$

определен корректно.

Используя введенные обозначения и конструкции, сформулируем одно из главных понятий доклада.

Определение 4. Для каждого $v \in rV^n$ функционал P_v, определяемый формулой (2), называется *обобщенным расширением Оуэна кооперативной игры* v.

Нетрудно проверить, что в случае конечного множества Q введенное понятие обобщенного расширения Оуэна совпадает с классическим определением полилинейного продолжения кооперативной игры, предложенным Оуэном в [2]. Что касается бесконечного случая, то здесь мы отметим лишь некоторые характерные свойства обобщенного расширения Оуэна, показывающие, что и в случае бесконечного числа игроков выполняются аналоги ряда ключевых соотношений, типичных для конечных кооперативных игр. Для формулировки соответствующего результата потребуются некоторые дополнительные определения.

Определение 5. Будем говорить, что функция $v \in rV^n$ является *однородной порядка* n, если она дизъюнктна с пространством rV^{n-1} (то есть, выполняется соотношение: $|v| \wedge |u| = 0$ для всех $u \in rV^{n-1}$). Совокупность однородных порядка n регулярных полиномиальных функций обозначим через $rV^{(n)}$ ($V^0 = V^{(0)} := \{0\}$).

Предложение 2. Для всех $n \geq 1$ пространства $rV^{(n)}$ являются полосами пространства rV.

Отметим сразу же, что согласно предложению 2, для каждой функции $v \in rpV$ и для каждого натурального $m \geq 1$ существует проекция $v_{(m)}$ на $rV^{(m)}$, определяемая формулой

$$v_{(m)} := \sup\ \{u \in rV^{(m)} \Big| v^+ \geq_0 u\} - \sup\ \{u \in rV^{(m)} \Big| v^- \geq_0 u\}. \qquad (3)$$

Переходя к описанию некоторых важных для дальнейшего свойств обобщенного расширения Оуэна, напомним, что ниже через χ_e обозначается индикаторная функция множества $e \in B$, через $\mathcal{P}^{(n)}$ - совокупность однородных порядка n непрерывных полиномиальных функционалов на $I(Q,B)$ (с обычной нормой $||f||_\infty := \sup\ \{\ |f(t)|\ \Big|\ t \in Q\}$ на пространстве $I(Q,B)$), а через $\mathcal{P}_+$ - совокупность непрерывных полиномиальных функционалов l на $I(Q,B)$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\sum_{\omega \subseteq \{1,\ldots,m\}} (-1)^{m-|\omega|} l(\sum_{i \in \omega} f_i) \geq 0$$

для любых $m \geq 1$ и $f_i \in I(Q,B),\ i = 1,\ldots,m$.

Теорема 1. Для любой игры $v \in rV^n$ обобщенное расширение Оуэна P_v является непрерывным полиномиальным функционалом порядка n на нормированном пространстве $(I(Q,B), ||\cdot||_\infty)$. При этом выполняются следующие соотношения:

$(P.1)$ $P_v(\chi_e) = v(e)$ для любой коалиции $e \in B$;

$(P.2)$ $P_v \in \mathcal{P}_+$, если $v \in rV^n_+ := rV^n \cap V_+$;

$(P.3)$ $P_v \in \mathcal{P}^{(n)}$, если $v \in rV^{(n)}$;

$(P.4)$ $|P_v(f)| \leq \sum_{m=1}^n ||f||^m_\infty \cdot ||v_{(m)}||_o$ для любой функции $f \in I(Q,B)$

(здесь $v_{(m)}$ - однородные компоненты игры v, определяемые формулой (3)).

4. Аксиоматизация обобщенного расширения Оуэна

Напомним сначала аксиоматизацию мультипликативного продолжения для неатомических кооперативных игр, предложенную в [1] в связи с необходимостью обобщения известной интегральной формулы Оуэна на случай бесконечного множества игроков. Для простоты ограничимся случаем пространства $pvNA$, представляющего из себя замыкание в рассматривавшейся выше норме полиномиальной вариации $||\cdot||_o$ линейной оболочки всевозможных степеней $\mu^k,\ k \geq 1$, неатомических мер μ. Как и в [1], будем рассматривать случай, когда $Q = [0,1]$, а B - борелевская σ-алгебра единичного интервала $[0,1]$. *Продолжение φ Аумана-Шепли игры v* на пространство $I(Q,B)$ определяется неявным образом с помощью указания свойств оператора φ, сопоставляющего каждой игре $v \in pvNA$ ее расширение $\varphi(v) : I(Q,B) \to \mathbf{R}$ (с класса индикаторных функций на векторное пространство всех ограниченных B-измеримых функций на Q):

$(Qw.1)$ $\varphi(v)(\chi_e) = v(e), \quad v \in pvNA,\ e \in B;$
$(Ow.2)$ $\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ v, w \in pvNA;$
$(Ow.3)$ $\varphi(v \cdot w) = \varphi(v) \cdot \varphi(w), \quad u, w \in pvNA;$
$(Ow.4)$ $\varphi(v)(f) = \int f dv, \quad f \in I(Q,B), v \in rV^1.$

В заключение сформулируем один из главных результатов доклада - аксиоматическое описание обобщенного расширения Оуэна P_v на пространстве $pvNA$.

Теорема 2. Отображение $\varphi : pvNA \to \mathcal{P}$ удовлетворяет условиям $(Ow.1)-(Ow.4)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\varphi(v) = P_v,\ v \in pvNA$.

Работа поддержана грантами РФФИ 07-06-00363, РГНФ 09-06-00337 и грантом Президента РФ № НШ 4113.2008.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. – М.: Мир, 1977.
2. Owen G. Multilinear extensions of games // J. Manag. Aci. – 1972. – Vol. 18, N 5. – P. 64-79.
3. Vasil'ev V.A. The Shapley functional and the polar form of homogeneous polynomial games // Siberian Adv. Math. – 1998. – Vol. 8, N 4. – P. 109-150.

Васильев Валерий Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-28-92, факс (383) 333-25-98.
E-mail: vasilev@math.nsc.ru

О ВЕРОЯТНОСТНОМ АНАЛИЗЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Э.Х. Гимади

Введение

Одним из актуальных направлений в дискретной оптимизации является построение полиномиальных приближенных алгоритмов решения трудных задач принятия решений и их вероятностный анализ на случайных входных данных [1-3, 6, 8-11]. Результаты, получаемые по вероятностному анализу алгоритмов решения трудных задач дискретной оптимизации, как правило, связаны с предположением о независимости случайных величин, входящих в исследуемую целевую функцию задачи. Нетривиальные трудности возникают при наличии зависимых составляющих в целевой функции. В качестве такого примера можно привести работу [1] по вероятностному анализу приближенного алгоритма отыскания в полном случайном графе однородного связного подграфа. Аналогичные проблемы возникают при решении задачи k-VRP (см. доклад А.В. Шахшнейдер на данной конференции).

Ниже представлены полиномиальные приближенные алгоритмы и результаты их вероятностного анализа для двух известных труднорешаемых задач дискретной оптимизации [4]: задачи коммивояжера (ЗК) [11] и задачи размещения в так называемой p-медианной форме [7]. Учет фактора зависимости случайных величин продемонстрирован на примере второй задачи.

Далее нам понадобятся некоторые определения и свéдения. Рассмотрим алгоритм A решения оптимизационной задачи на минимум. Величинами $F_A(I)$, $F^*(I)$ мы обозначим значения целевой функции задачи на решении, полученном алгоритмом A на входе I, и на оптимальном решении для этого же входа соответственно.

Алгоритм A *имеет оценки* $(\varepsilon_n, \delta_n)$ в классе K_n задач минимизации размерности n, если для каждого n выполнено следующее неравенство:

$$\mathbf{Pr}\Big\{ F_A(I) > (1+\varepsilon_n)F^*(I) \Big\} \le \delta_n,$$

где $\mathbf{Pr}\{\cdot\}$ — вероятность соответствующего события; ε_n — *относительная погрешность*, δ_n — *вероятность несрабатывания* алгоритма A. Алгоритм называется *асимптотически точным* в классе задач $K = \cup\{K_n | n = 1, 2, \ldots\}$, если для него существуют такие оценки $(\varepsilon_n, \delta_n)$, что $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Определим класс $\mathcal{K}$ полных n-вершинных графов с расстояниями c_{ij} между вершинами i и j — независимыми случайными величинами из отрезка (a_n, b_n), $a_n > 0$, с одинаковой функцией распределения $P_\xi(x) = \mathbf{Pr}\{\xi < x\}$ нормализованной случайной величины $\xi = (c_{ij} - a_n)/(b_n - a_n)$, $0 \le \xi \le 1$.

Для вероятностного анализа предложенных алгоритмов используется следующая

Теорема 1 [5]. *Рассмотрим независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ и положим $S = \sum_{j=1}^n X_j$. Пусть существуют положительные постоянные $g_1, \ldots, g_n$ и T такие, что*

$$\mathbf{E}e^{tX_j} \le e^{\frac{1}{2}g_j t^2} \ (j = 1, \ldots, n)$$

для всех $0 \le t \le T$. *Положим* $G = \sum_{j=1}^n g_j$. *Тогда*

$$\mathbf{Pr}\{S > x\} \le \begin{cases} e^{-x^2/2G} \text{ , если } 0 \le x < GT, \\ e^{-Tx/2} \text{ , если } x \ge GT. \end{cases}$$

2. Задача коммивояжера (ЗК) на полном графе

Решение ЗК на полном ориентированном графе получаем посредством алгоритма $\widetilde{A}$, действующего согласно жадной эвристике — "Иди в ближайший непройденный город" [3]. Получаемую при этом длину обхода вершин графа (городов) можно представить в нормализованном виде

$$S_{\widetilde{A}} = \frac{F_{\widetilde{A}} - na_n}{b_n - a_n} = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{n-1} + \xi,$$

представляющем собой сумму независимых случайных величин, где ξ_k равно минимуму среди k случайных независимых величин с одинаковой функцией распределения $\mathcal{P}_\xi(x) = \mathbf{Pr}\{\xi < x\}$, $0 \le x \le 1$; $\xi = \xi_1$. В случае равномерного закона функция распределения случайной величины ξ_k имеет вид $\mathcal{P}_{\xi_k}(x) = 1 - (1-x)^k$, $1 \le k < n$.

Лемма 1. *Для равномерного распределения при всяких* $1 \le k < n$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{E}e^{t\xi_k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(k+1)\cdots(k+i)}.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ имеем

$$\mathbf{E}e^{t\xi_1} = \int_0^1 e^{tx}dx = \frac{e^t - 1}{t} = \frac{1}{0!}\sum_{i=0}^{\infty} t^i \frac{1}{(i+1)!}.$$

Считая утверждение доказанным для выбора минимального из $k < n$ элементов, покажем справедливость утверждения при выборе из $k+1$ элементов:

$$\mathbf{E}e^{t\xi_{k+1}} = \int_0^1 e^{tx} d\mathcal{P}_{\xi_{k+1}}(x) = \int_0^1 e^{tx}(k+1)(1-x)^n dx$$

$$= \frac{k+1}{t}\Big(k\int_0^1 e^{tx}(1-x)^{k-1}dx - 1\Big) = \frac{k+1}{t}(\mathbf{E}e^{t\xi_k} - 1) =$$

$$= \frac{k+1}{t}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(k+1)\cdots(k+i)} - 1\Big) = \frac{k+1}{t}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{(k+1)\cdots(k+i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(k+2)\cdots(k+1+i)}.$$

Лемма 2. *Пусть* $g_k = 1/(k+1)^2$, $\widetilde{\xi}_k = \xi_k - \mathbf{E}\xi_k$, $1 \le k < n$. *Тогда для всяких* $0 \le t \le 1$, $1 \le k < n$ *верно неравенство* $\mathbf{E}e^{t\widetilde{\xi}_k} \le e^{g_k t^2/2}$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$. С учетом того, что $\mathbf{E}\xi_k = \alpha_k$ и $0 \le t \le 1$, из леммы 1 следует

$$\mathbf{E}e^{t\xi_k} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(k+1)\cdots(k+i)} \le 1 + \frac{t}{k+1} + \Big(\frac{t}{k+1}\Big)^2 \frac{(k+1)}{(k+2)} \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{t}{k+3}\Big)^i$$

$$\le 1 + \alpha_k t + (\alpha_k t)^2 \frac{(k+1)}{(k+2)(1 - t/(k+3))} \le 1 + \alpha_k t + (\alpha k t)^2 \le e^{\alpha_k t + (\alpha_k t)^2/2} = e^{t\mathbf{E}\xi_k + g_k t^2/2}.$$

Отсюда $\mathbf{E}e^{t(\xi_k-\mathbf{E}\xi_k)}\le e^{\frac{g_k t^2}{2}}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *ЗК на классе $\mathcal{K}$ случайных входов с равномерным распределением решается алгоритмом $\widetilde{A}$ с оценками*

$$\varepsilon_n = O\Big(\frac{b_n/a_n}{n/\ln n}\Big); \tag{1}$$

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ , \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим суммы всех g_k, ξ_k и $\widetilde{\xi}_k$ через G, S и $\widetilde{S}$, соответственно. Имеем

$$\mathbf{E}S = 1/2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\le \ln n + 1/10;\quad G = 1/2+\sum_{k=1}^{n-1}1/(k+1)^2\le \pi^2/6-3/4<1.$$

Оценим вероятность несрабатывания алгоритма $\widetilde{A}$:

$$\mathbf{Pr}\Big\{F_A(I)>(1+\varepsilon_n)F^*(I)\Big\}\le \mathbf{Pr}\Big\{F_{\widetilde{\mathcal{A}}}(I)\ge(1+\varepsilon_n)na_n\Big\}$$

$$\le \mathbf{Pr}\Big\{na_n+(b_n-a_n)S\ge(1+\varepsilon_n)na_n\Big\}\le \mathbf{Pr}\Big\{\widetilde{S}\ge\frac{n\varepsilon_n}{b_n/a_n-1}-\mathbf{E}S\Big\}.$$

Положив $\varepsilon_n=(b_n/a_n-1)(\ln n+\mathbf{E}S)/n$, с учетом $\mathbf{E}S\approx\ln n$ имеем (1), а поскольку случайные переменные $\widetilde{\xi}_k$ удовлетворяют теореме Петрова для принятых g_k, G, и $T=1$, получим (2):

$$\mathbf{Pr}\Big\{F_A(I)>(1+\varepsilon_n)F^*(I)\Big\}\le \mathbf{Pr}\{\widetilde{S}\ge\ln n\}\le\exp\Big\{-T\ln n/2\Big\}=\frac{1}{\sqrt{n}}=\delta_n.$$

Отсюда следует асимптотическая точность алгоритма $\widetilde{A}$.

3. Задача о p-медиане

Требуется минимизировать целевую функцию $F_{\hat{A}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ при следующих условиях: $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=p$; $\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1$, для всяких $j=\overline{1,n}$; $x_{ij}\le x_i$, для всяких $1\le i,j\le n$; переменные выбора x_i и назначения x_{ij} — булевы.

Алгоритм $\hat{A}$. Сначала все вершины непомечены. Положим $m=\lceil n/p\rceil-1$. Для упрощения изложения далее считаем, что $n=(m+1)p$.

Общий шаг $k=1,\ldots,p$. Среди непомеченных вершин произвольная вершина выбирается в качестве медианной, а также m ближайших к ней, после чего выбранные вершины помечаются, а соответствующие переменные выбора и назначения полагаются равными 1.

Полученное в результате работы алгоритма значение целевой функции равно

$$F_{\hat{A}}=(n-p)a_n+(b_n-a_n)S,$$

где S — нормализованное значение целевой функции, представимое в виде суммы случайных величин

$$S=\sum_{k=1}^{p}\Big(X_{(1)}(n_k)+\ldots+X_{(m)}(n_k)\Big);$$

$n_k = n - (k-1)(m+1) - 1$ равно числу непомеченных вершин в начале k-го шага алгоритма, из которых выбираются m вершин, ближайших к последней медианной; $X_{(r)}(n_k)$ — r-я порядковая статистика, $1 \le r \le m$, на k-ом шаге.

Заметим, что в теореме 1 речь идет о случайных независимых величинах. В нашем же случае на шагах алгоритма мы получаем суммы порядковых статистик, которые не являются независимыми случайными величинами. Поэтому мы не можем использовать теорему 1 напрямую.

Представим нормализованное значение целевой функции в виде суммы независимых случайных величин $S = \Theta_1 + \ldots + \Theta_p$, где

$$\Theta_k = X_{(1)}(n_k) + \ldots + X_{(m)}(n_k),\ 1 \le k < p;\ \Theta_p = m\xi.$$

Теорема 3. *Алгоритм $\hat{A}$ решения задачи о p-медиане на классе $\mathcal{K}$ случайных входов с равномерным распределением асимптотически точен при выполнении условий*

$$\frac{b_n}{a_n} = o\Big(\frac{p}{\ln p}\Big);\ p = p(n) \to \infty \ \textit{при}\ n \to \infty.$$

Справедливость теоремы следует из приведенных ниже лемм, доказательства которых для краткости изложения опущены.

Лемма 3. *В случае равномерного распределения при всяких $1 \le m \le n_k \le n$ и $t \le 1$ для m-й порядковой статистики $X_{(m)}(n_k)$ имеем:*

$$\mathbf{E}e^{tX_{(m)}(n_k)} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)\cdots(i+m-1)}{(n_k+1)\cdots(n_k+i)}\ t^i \le e^{\frac{mt}{n_k+1}}e^{(\frac{mt}{n_k+1})^2/2}.$$

Лемма 4. *Для всяких $1 \le k < p$, $t \le 1$ и $1 \le m \le n_k/2$ справедлива следующая оценка сверху для математического ожидания случайной величины $e^{t\Theta_k}$:*

$$\mathbf{E}e^{t\Theta_k} \le \mathbf{E}e^{(1+\rho)(m+1)X_{(m)}(n_k)t/2},$$

где $\rho = 1/18$. Обозначим $\beta_k = \frac{m(m+1)}{2(n_k+1)}$; $g_k = (1+\rho)^2\beta_k^2$. Очевидно, $\mathbf{E}\Theta_k = \beta_k$.

Лемма 5. *При $t \le 1/m$ для центрированной случайной величины $\mathbf{E}e^{t\widetilde{\Theta}_k}$ имеет место следующее неравенство:*

$$\mathbf{E}e^{t\widetilde{\Theta}_k} \le e^{\rho\beta_k t}\ e^{g_k^2 t^2/2}.$$

Лемма 6. *Справедливы неравенства*

$$\mathbf{E}S = \sum_{k=1}^{p} \le \frac{n\ln p}{2p};\ G = \sum_{k=1}^{p}(1+\rho)^2\beta_k^2 \le \frac{\big((1+\rho)m\big)^2}{4}.$$

Лемма 7. *При $T = 1/m$ алгоритм $\hat{A}$ имеет следующие оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания:*

$$\varepsilon_n = O\Big(\frac{b_n/a_n}{p/\ln p}\Big);\quad \delta_n = \frac{1}{n^{\lambda/2}} \quad \text{для всякого}\ \ \lambda > 0.$$

Замечание. *Результаты, представленные в статье для алгоритмов решения задач ЗК и о p-медиане справедливы для любых распределений мажорирующего типа: $\mathcal{P}_\xi(x) \le x,\ 0 \le x \le 1$. Они справедливы как для ориентированных, так и неориентированных графов.*

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00516 и 01-07-00222.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Приближенный алгоритм отыскания d-однородного регулярного остовного связного подграфа максимального веса в полном графе со случайными весами ребер // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2006. – Т. 13, N 2. – С. 3-20.
2. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1975. – Вып. 31. – С. 35-42.
3. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы. Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. – Вып. 12. – С. 35-45.
4. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.
5. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987.
6. Angluin D., Valiant L.G. Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings // J. Comput. System Sci. – 1979. – Vol. 18. – P. 155-193.
7. Discrete Location Theory. Ed. P.B.Mirchandani, R.L.Francis. Wiley-Interscience Publication. Wiley and Sons Inc. 1. – 1990.
8. Frieze A. On random symmetric travelling salesman problems // Mathematics of Operations Research. – 2004. – Vol. 29, N 4. – P. 878-890.
9. Karp R. M. The probabilistic analysis of some combinatorial algorithms. In Algorithms and complexity: New Directions and recent results, 1976. – P. 1-19.
10. Slominski L. Probabilistic Analysis of Combinatorial Algorithms: A Bibliography with Selected Annotations // Computing. – 1982. – Vol. 28. – P. 257-267.
11. The Traveling Salesman Problem and its Variations. Gutin G., Punnen A.P. (eds). Kluver Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London. – 2002.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-24, факс (383) 333-25-98.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В.Т. Дементьев, Р.М. Ларин, А.В. Пяткин, Ю.В. Шамардин

В докладе приводятся результаты рассмотрения некоторых известных задач исследования операций, сформулированных в двухуровневой постановке. Все они в общем случае являются NP-трудными. Поэтому основные усилия были направлены на выявление эффективно разрешимых случаев, а также получение оценок оптимумов задач с целью использования их при разработке точных алгоритмов на основе метода ветвей и границ.

1. Двухуровневая задача стандартизации и размещения [1-4].

Целевая функция верхнего уровня – доход производителя, который зависит от выбираемой им номенклатуры продукции, а также от реализации ее потребителями.

Нижний уровень – потребитель осуществляет закупки согласно своей выгоде, минимизируя закупочно-эксплуатационные затраты. От того, какой выбор сделает потребитель, зависит доход производителя.

Рассматривались постановки задач с ограниченными и неограниченными производственными мощностями. Предполагая выполнение некоторых дополнительных свойств матрицы затрат, удалось выделить эффективные случаи решения двухуровневой задачи.

Дальнейшее обобщение этих задач касалось построения трехуровневой модели принятия решений по согласованию интересов потребителей и производителя с помощью дотаций от государственных структур. Здесь верхний уровень – государство стремится минимизировать дотации нижним уровням – производителю и потребителям. Производитель получает при этом гарантированный доход, а самый нижний уровень – потребители с минимальными затратами полностью удовлетворяют свои потребности. В данной модели, введя условие "α - отделимости" решения задачи второго уровня, удалось свести исходную задачу к серии задач линейного программирования.

2. Двухуровневая задача о назначениях [5, 6].

В данной задаче верхний уровень – заказчик, имеющий m работ, нижний уровень – исполнитель, имеющий n рабочих ($m > n$). Заданы две матрицы размерности $m \times n$: матрица доходов (для заказчика) и матрица затрат (для исполнителя).

Заказчик стремится выбрать n работ так, чтобы получить наибольший доход с учетом интереса исполнителя, который назначает n рабочих на выбранные работы, минимизируя свои суммарные затраты.

Для этой задачи установлена NP-трудность и предложен метод ветвей и границ, позволяющий получать решение в общем случае (даже при неединственности решений задачи нижнего уровня). В предположении, что матрица затрат в задаче нижнего уровня удовлетворяет обобщенному условию Монжа, показана полиномиальная разрешимость исходной двухуровневой задачи.

3. Двухуровневая биматричная игра [7].

Рассматривается двухуровневая биматричная игра, в которой игрок верхнего уровня не только выбирает смешанную стратегию, но и имеет возможность изменять элементы матриц выигрышей. Игрок нижнего уровня строит свою оптимальную стратегию с учетом выбора стратегии на верхнем уровне и изменения матрицы выигрышей.

Показано, что в кооперативном случае, когда интересы нижнего уровня не противоречат интересам верхнего уровня, решение игры сводится к серии задач линейного программирования. В антикооперативном случае доказано существование ε-оптимальных решений.

4. Задачи выбора цен на продукцию [8, 9].

В этих задачах верхний уровень – производитель выбирает цены с учетом возможностей и спроса потребителей, желая получить наибольший доход. Нижний уровень – потребители стремятся закупать продукцию с наименьшими затратами.

Здесь проведено исследование ряда постановок задач. Выявлены эффективно разрешимые случаи.

5. Децентрализованная транспортная задача [10].

Как известно, классическая транспортная задача моделирует централизованное распределение продукции. В рыночных же условиях каждый потребитель действует индивидуально, максимизируя свою собственную выгоду.

В рассматриваемой задаче предполагается, что производитель может контролировать лишь очередность обслуживания (доступа) потребителей. Кроме того, считается, что потребители имеют ту же матрицу доходов, что и производитель. Очевидно, что выгода каждого потребителя зависит от очередности, в которой он будет допущен к производителю.

При заданной очередности обслуживания, которую можно интерпретировать как перестановку строк матрицы доходов, доход каждого потребителя легко находится из последовательного решения простейших задач линейного программирования.

В задаче требуется найти перестановку, при которой суммарный доход производителя максимален.

Установлено, что данная задача является NP-трудной. Для случая одинаковых объемов спроса предлагается эффективный приближенный алгоритм с оценкой точности решения.

Работа поддержана интеграционным грантом СО РАН № 30.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачевская Л.Е. Алгоритмы и сложность решения двухуровневых задач стандартизации с коррекцией дохода // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 1998. – Т. 5, N 2. – С. 20-33.

2. Горбачевская Л.Е., Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 1998. – Т. 6, N 2. – С. 3-11.

3. Шамардин Ю.В. О двухуровневой задаче размещения при ограничениях на объемы производства // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2000. – Т. 7, N 2. – С. 114-118.

4. Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Трехуровневая модель выбора номенклатуры изделий // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2001. – Т. 8, N 1. – С. 40-46.

5. Ларин Р.М., Пяткин А.В. Двухуровневая задача о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2001. – Т. 8, N 2. – С. 42-51.

6. Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Двухуровневая задача о назначениях при обобщенном условии Монжа // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2003. – Т. 10, N 2. – С. 19-28.

7. Ларин Р.М., Пяткин А.В. Двухуровневая биматричная игра с регулировкой выигрыша // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2000. – Т. 7, N 2. – С. 54-59.

8. Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Задача о выборе цен на продукцию при условии обязательного удовлетворения спроса // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2002. – Т. 9, N 2. – С. 31-40.

9. Шамардин Ю.В. Некоторые случаи полиномиальной разрешимости задачи о выборе цен на продукцию // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2005. – Т. 12, N 2. – С. 85-96.

10. Дементьев В.Т, Пяткин А.В. О децентрализованной транспортной задаче // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2008. – Т. 15, N 3. – С. 22-30.

Дементьев Владимир Тихонович, Ларин Рудольф Михайлович,
Пяткин Артём Валерьевич, Шамардин Юрий Владиславович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-22, (383) 363-46-75, факс (383) 333-25-98.
E-mail: demvt@math.nsc.ru, larin@math.nsc.ru, artem@math.nsc.ru, orlab@math.nsc.ru

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ С ВОЗМОЖНОСТЯМИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.В. Еремеев

Введение. В последние годы для решения ряда задач дискретной оптимизации предложены эволюционные алгоритмы (ЭА), имеющие среднее время получения оптимального решения, близкое к трудоемкости алгоритмоов динамического программирования (ДП). В данной работе рассматриваются обобщения этих результатов и сравниваются оценки трудоемкости полученных ЭА и ДП.

Эволюционные алгоритмы зарекомендовали себя как практически работоспособные методы оптимизации в большом числе приложений [6], однако, теоретически эти методы до сих пор изучены недостаточно, несмотря на активные исследования [3]. Особый интерес с точки зрения теоретического исследования представляет сравнение ЭА с классическими методами дискретной оптимизации.

Важные результаты получены при анализе ЭА для таких классических задач дискретной оптимизации как задача о кратчайшем пути в графе [8], задача об остовном дереве минимального веса [5], задачи о покрытии множества [4]. Однако, обобщений результатов о поведении ЭА на целых классах задач недостаточно. Одним из первых шагов в этом направлении является работа [7], где предложена общая схема ЭА с полиномиальным в среднем временем поиска решения для задач оптимизации на матроидах.

В настоящей работе приведен краткий обзор результатов [1,2,9] Б. Доэрр, К. Хороба, Ф. Нейманна, М. Тиле и автора. Показано, что при несколько большей трудоемкости в среднем, эволюционные алгоритмы имеют те же возможности, что и ДП. Используемая общая схема ДП подобна предложенной в [10]. Ввиду ограниченности объема, подробно рассматривается лишь случай ДП с табличным представлением. Для иллюстрации предложенного подхода приводится простейший эволюционный алгоритм (1+1)-EA в многокритериальной модификации.

Общая схема ДП. Пусть P – задача NP-минимизации, x обозначает исходные данные индивидуальной задачи, $Sol(x)$ – множество допустимых решений, $f_x : Sol(x) \to R$ – целевая функция. Оптимальное значение целевой функции для индивидуальной задачи x обозначим через $f_x^* = \min_{y \in Sol(x)} f_x(y)$. Случай задачи максимизации рассматривается аналогично и для краткости здесь и далее опускается.

Рассмотрим задачу P с точки зрения возможности построения для нее алгоритма ДП. Предположим, что для P существует точный алгоритм ДП, работа которого состоит из n стадий (n, вообще говоря, может зависеть от исходных данных x). На k-й стадии ДП, $k = 1, \dots, n$, строится множество состояний $\mathcal{S}_k \subseteq \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ – множество всевозможных состояний ДП. На этапе инициализации пространство состояний $\mathcal{S}_0$ формируется как конечное подмножество $\mathcal{S}$. Пусть конечное множество $\mathcal{F}$ отображений вида $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ зависит от индивидуальной задачи x и служит для перехода от состояний текущей стадии к состояниям следующей стадии. Пусть также имеется конечное множество $\mathcal{H}$ вспомогательных отображений $H_F : \mathcal{S} \to Z$ (здесь и далее Z обозначает множество целых чисел). Для каждого $F \in \mathcal{F}$ отображение $H_F \in \mathcal{H}$ служит для проверки соответствия состояний $F(S), S \in \mathcal{S}$ исходным данным x. На стадии k, $k = 1, \dots, n$, множество состояний $\mathcal{S}_k$ вычисляется на основе $\mathcal{S}_{k-1}$:

$$\mathcal{S}_k = \{F(S) : \ F \in \mathcal{F}, \ S \in \mathcal{S}_{k-1}, \ H_F(S) \le 0\}. \tag{1}$$

Пусть $G : \mathcal{S} \to R$ – значение целевой функции задачи P, вычисляемое на элементах последнего множества состояний $\mathcal{S}_n$. Ввиду предположения о том, что ДП доставляет точное решение задачи, $f^*_x = \min\{G(S) : S \in \mathcal{S}_n\}$.

Будем предполагать что решение $Y(S_1, \ldots, S_n) \in Sol(x)$ вычисляется на основе последовательности состояний $S_0 \in \mathcal{S}_0, \ldots, S_n \in \mathcal{S}_n$, если эта последовательность *допустима*, т.е. $S_k = F_k(S_{k-1}),\ F_k \in \mathcal{F}$ и $H_{F_k}(S_{k-1}) \le 0,\ k = 1, \ldots, n$.

Вычислительная сложность ДП, как правило, сокращается за счет исключения из рассмотрения «неперспективных» состояний, например, с использованием принципа Беллмана. В настоящей работе, подобно [10], «неперспективные» состояния исключаются посредством отношения доминирования.

Будем говорить, что $EXT_k(S) \in \mathcal{S}_n$ – допустимое продолжение состояния S, если $EXT_k(S) = F_{n-1}(F_{n-2}(...F_k(S)...))$ для некоторых $F_k, F_{k+1}, \ldots, F_{n-1} \in \mathcal{F}$ и для всех $i = k, \ldots, n-1$ выполняется $H_{F_i}(F_{i-1}(...F_k(S)...)) \le 0$.

Пусть $S, S' \in \mathcal{S}$ таковы, что для любого допустимого продолжения $EXT_k(S)$ соответствующее ему продолжение $EXT_k(S')$ доставляет решение, не уступающее по целевой функции первому, т.е. $G(EXT_k(S')) \le G(EXT_k(S))$. Тогда будем говорить, что S' *доминирует по продолжениям* S на стадии k. Состояние без допустимых продолжений считаем доминируемым по продолжениям любым другим состоянием.

Непосредственная проверка доминирования по продолжениям, вообще говоря, требует перебора всех возможных продолжений, поэтому для быстрого исключения «неперспективных» состояний обычно пользуются некоторым просто вычислимым отношением частичного порядка $\preceq_{dom}$. Достаточно предусмотреть, чтобы из соотношения $S \preceq_{dom} S'$ следовало бы доминирование S состоянием S' по продолжениям. Будем говорить, что $S \in \mathcal{S}$ *доминируется* состоянием $S' \in \mathcal{S}$, если $S \preceq_{dom} S'$.

Пусть $J \subseteq \mathcal{S}$. Тогда через $M(J, \succeq_{\mathrm{dom}})$ будем обозначать *совокупность минимальных по включению доминирующих подмножеств* $\mathcal{T} \subseteq J$. Иными словами, для любого $\mathcal{T} \in M(J, \succeq_{\mathrm{dom}})$ и любого $S \in J$ найдется такое $S' \in \mathcal{T}$, что $S \preceq_{dom} S'$, но при удалении какого-либо элемента из $\mathcal{T}$, для некоторых $S \in J$ такого S' уже не найти.

Если частичный порядок $\preceq_{dom}$ выбран так, что из доминирования следует доминирование по продолжениям, то в ДП вместо множеств $\mathcal{S}_k$ достаточно строить только множества состояний, доминирующие $\mathcal{S}_k$.

Будем считать следующие три условия на $\preceq_{dom}$ выполненными (этих условий достаточно, чтобы из доминирования следовало доминирование по продолжениям [1]):

C1. Для любых $S, S' \in \mathcal{S}$, если $S \preceq_{dom} S'$, то $F(S) \preceq_{dom} F(S')$.
C2. Для любых $S, S' \in \mathcal{S}, H \in \mathcal{H}$, если $S \preceq_{dom} S'$ и $H(S) \le 0$, то $H(S') \le 0$.
C3. Для любых $S, S' \in \mathcal{S}_n$, если $S \preceq_{dom} S'$, то $G(S) \ge G(S')$.

Если из доминирования следует доминирование по продолжениям, то общая схема ДП может быть реализована, вообще говоря, более эффективно: пусть доминирующие множества состояний $\mathcal{T}_k,\ k = 1, \ldots, n$ вычисляются таким образом, что

$$\mathcal{T}_k \in M\Big(\{F(S) :\ F \in \mathcal{F},\ S \in \mathcal{T}_{k-1},\ H_F(S) \le 0\}, \succeq_{\mathrm{dom}}\Big), \qquad (2)$$

тогда $\mathcal{T}_n$ содержит состояние, доставляющее оптимум, т.е., $f^*_x = \min\{G(S) : S \in \mathcal{T}_n\}$.

Трудоемкость ДП зависит от времени вычисления функций $F \in \mathcal{F}$ (пусть это время не превышает $\theta_{\mathcal{F}}$), времени вычисления функций $H_F(S)$ (пусть оно не превышает $\theta_{\mathcal{H}}$) и нахождения всех множеств, доминируемых заданным $S \in \mathcal{S}_k$ среди построенных на данной итерации (пусть это время не более $\theta_{\preceq}$). Положим, кроме того, $\kappa := |\mathcal{F}|$, и пусть G вычислима за время θ_G, а начальное множество состояний $\mathcal{S}_0$ может быть сформировано за время θ_0. Тогда трудоемкость ДП есть

$$O\left(\theta_0 + \kappa \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{T}_{i-1}|(\theta_{\mathcal{F}} + \theta_{\mathcal{H}} + \theta_{\preceq}) + |\mathcal{T}_n|\theta_{\mathrm{G}}\right). \quad (3)$$

Табличное представление ДП. Рассмотрим случай, когда $\mathcal{S} = B_1\times, \dots, \times B_\beta$, и $B_j \subset Z,\ j = 1, \dots, \beta,\ \beta \geq 2$, причем в частичном порядке $\preceq_{dom}$ первая координата s_1 состояния $S \in \mathcal{S}$ играет особую роль: $S \preceq_{dom} S'$ тогда и только тогда, когда $s_1 \preceq_1 s'_1$ и $s_j = s'_j$ для всех $j > 1$. Здесь и далее $\preceq_1$ обозначает линейный порядок, определенный на B_1. В таком случае, процесс вычислений ДП удобно представлять как заполнение некоторой таблицы M размерности $m \times (n+1)$, где $m = \prod_{j=2}^{\beta} |B_j|$. Строки M соответствуют всевозможным комбинациям координат $s_2, \dots, s_\beta$ (будем индексировать строки посредством $r = (s_2, \dots, s_\beta)$). Столбцы $k = 0, \dots, n$ соответствуют стадиям ДП. Пусть $Q(s_2, \dots, s_\beta) = \{S' \in \mathcal{S} : s'_2 = s_2, \dots, s'_\beta = s_\beta\}$ обозначает множество состояний, которые могут быть представлены в строке $r = (s_2, \dots, s_\beta)$.

В процессе вычислений ДП таблица M заполняется значениями s_1. Если ни одного состояния $S \in \mathcal{T}_k \cap Q(r)$ не построено, то $M_{rk} := \infty$ (предполагается что никакое $s_1 \in B_1$ не доминируется символом ∞ в порядке $\preceq_1$). Если отношение $\preceq_1$ проверяется за константное время, то трудоемкость алгоритма есть

$$O\left(\theta_0 + m(\kappa n(\theta_{\mathcal{F}} + \theta_{\mathcal{H}}) + \theta_G)\right). \quad (4)$$

Как правило, в процессе работы алгоритма ДП сохраняется дополнительная информация для обратного хода алгоритма. Обозначим эти значения через Γ_{rk}, и пусть $\Gamma_{rk} = r'$, если состояние $S = (M_{rk}, r) \in \mathcal{T}_k$ было получено из $S' = (M_{r',k-1}, r') \in \mathcal{T}_{k-1}$ посредством некоторой функции $F \in \mathcal{F}$, т.е. $S = F(S'),\ H_F(S') \leq 0$. На обратном ходе ДП значения Γ могут использоваться для восстановления цепочки состояний $S_0 \in \mathcal{T}_0, \dots, S_n \in \mathcal{T}_n$, начиная с $S_n \in \mathcal{T}_n$.

Пусть M^*-таблица, получаемая по окончании вычислений ДП. Тогда при произвольных r и k, состояние $(M^*_{r,k}, r)$ доминирует все $S \in \mathcal{S}_k \cap Q(r)$, если $\mathcal{S}_k \cap Q(r) \neq \emptyset$.

Многокритериальный (1+1)-EA. Пусть имеется задача многокритериальной оптимизации «на минимум» с множеством допустимых решений D и конечным семейством $\mathcal{C}$ критериев вида $f : D \to Z \cup \{\infty\}$. В качестве эвристического метода для поиска Парето-оптимального решения рассмотрим простейший эволюционный алгоритм, так называемый многокритериальный (1+1)-EA [8]. Алгоритм начинает работу с допустимого решения, и на каждой его итерации по текущему решению X строится новое решение X' с помощью рандомизированной процедуры *мутации*: $X' = Mut(X) \in D$. Если $f(X') \geq f(X)$ по каждому критерию $f \in \mathcal{C}$, то полагаем $X := X'$. Иначе новое решение отбрасывается и текущее решение остается прежним.

Перейдем от исходной задачи P к задаче отыскания матрицы M^*, получаемой в результате работы ДП. Задача отыскания M^* может быть поставлена как задача многокритериальной оптимизации с nm критериями M_{rk} в предположении что множество допустимых решений D есть всевозможные способы вычисления элементов M_{rk} с помощью функций $F \in \mathcal{F}$. При этом предполагается, что столбец M_{r0} – часть исходных данных задачи. Кроме того, предположим что все $F \in \mathcal{F}$ – инъекции.

Вычисление значений M_{rk} осуществляется последовательно, по возрастанию k. Допустимое решение $X = (\Phi, \Gamma) \in D$ состоит из целочисленной матрицы Γ размерности $m \times n$ и $(m \times n)$-матрицы Φ, элементы которой обозначают функции $\Phi_{rk} \in \mathcal{F}$.

Рассмотрим многокритериальный (1+1)-ЕА для данной задачи, предполагая что начальное решение строится случайным образом с равномерным распределением всех компонент Φ и Γ.

Будем называть *локальной операцией* следующее изменение решения (Φ, Γ): во-первых, случайным образом с равномерным распределением выбираются $r \in B_2 \times \ldots \times B_\beta$ и $k \in \{1, \ldots, n\}$. Во-вторых, значение Φ_{rk} выбирается случайным образом с равномерным распределением из $\mathcal{F}$, а значение Γ_{rk} выбирается равным $F^{-1}(r)$.

Пусть s – случайная величина с распределением Пуассона с параметром $\lambda = 1$. При мутации с решением X независимо $s + 1$ раз выполняется локальная операция.

Сравнение ЭА и ДП. В [8] для задачи о кратчайшем пути в графе на N вершинах предложен многокритериальный (1+1)-ЕА со средним числом итераций $O(N^3)$, воспроизводящий все стадии алгоритма Дейкстры. Подобную роль описанный выше (1+1)-ЕА играет для класса задач, разрешимых ДП с табличным представлением:

Теорема [1]. *Среднее число итераций описанного выше (1+1)-ЕА до достижения решения X^* со значениями критериев из таблицы M^* есть $O(n^2 \kappa m \log m)$.*

Заметим, что на каждой итерации (1+1)-ЕА требуется обновить матрицу M, что требует времени $O(nm(\theta_\mathcal{F} + \theta_\mathcal{H}))$, если случайный выбор локальной операции выполняется за константное время. Поэтому среднее время получения матрицы M^* составляет $O(n^3 \kappa m^2 (\theta_\mathcal{F} + \theta_\mathcal{H}) \log m)$ и оптимальное значение целевой функции задачи P вычислимо в среднем за время $O(n^3 \kappa m^2 (\theta_\mathcal{F} + \theta_\mathcal{H}) \log m + m\theta_G)$, что только в $O(n^2 m \log m)$ раз превышает оценку трудоемкости ДП с табличным представлением.

В качестве иллюстрации рассмотрим известные алгоритмы ДП для задачи об одномерном 0/1-рюкзаке с трудоемкостью $O(KW)$, где K-число предметов, W – допустимый вес рюкзака, и для задачи коммивояжера с трудоемкостью $O(N^2 2^N)$, где N-число вершин графа. Применение теоремы 1 показывает, что среднее число итераций многокритериального (1+1)-ЕА до получения матрицы M^* есть $O(K^2 W \log W)$ для задачи об одномерном 0/1-рюкзаке, а для для задачи коммивояжера $O(2^N N^3 \log N)$.

Аналогичный теореме 1 результат получен в [2] для более широкого класса алгоритмов ДП, где табличного представления и инъективности $F \in \mathcal{F}$ не предполагается. Для этого в [2] предложен многокритериальный ЭА со средней трудоемкостью

$$O\Big(\theta_0 + \kappa n \log |DP| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{T}_{i-1}|(\theta_\mathcal{F} + \theta_\mathcal{H} + \theta_\preceq) + |\mathcal{T}_n|\theta_\mathrm{G}\Big),$$

где $|DP| = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{T}_{i-1}|$. Данная оценка только в $O(n \log |DP|)$ раз превышает оценку трудоемкости ДП (3). Дополнительная адаптация ЭА для задачи коммивояжера [9] позволяет снизить оценку среднего числа итераций до $O(2^N N^3)$.

Заключение. В работе представлен новый подход к использованию специфики задачи в ЭА. Рассмотренные результаты не дают оснований говорить о более быстрых алгоритмах по сравнению с классическими методами оптимизации (то же относится и к ЭА из [4,7,8]). Однако, эти результаты показывают, что к эволюционным алгоритмам, наряду со сходимостью к оптимуму [3] и точностью аппроксимации [4], естественно предъявить новые требования в терминах среднего времени получения оптимума в тех случаях, когда к задаче применимо ДП. Кроме того, показана перспективность использования многокритериальных ЭА даже если исходная задача является однокритериальной, что согласуется с выводами [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремеев А.В. О связи динамического программирования и многокритериальных эволюционных алгоритмов // Препринт. – Омск: ОмГУ, 2008. – 20 с.
2. Doerr B., Eremeev A., Horoba C., Neumann F., Theile M. Evolutionary algorithms and dynamic programming // Proc. of Genetic and Evolutionary Computation Conf. (GECCO). – New York: ACM Press, 2009. To appear.
3. Eremeev A.V., Reeves C.R. Evolutionary algorithms in discrete optimisation // Book of abstracts of Discrete Analysis and Operations Research Conf. (DAOR-2002). – Novosibirsk, 2002. – P. 40-45.
4. Friedrich T., Hebbinghaus N., Neumann F., He J., Witt C. Approximating covering problems by randomized search heuristics using multi-objective models // Proc. Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO). – New York: ACM Press, 2007. – P. 797-804.
5. Neumann F., Wegener I. Randomized local search, evolutionary algorithms, and the minimum spanning tree problem // Theor. Comp. Sci. – 2007. – Vol. 378, N 1. – P. 32-40.
6. Reeves C.R. Genetic algorithms for the operations researcher // INFORMS Journ. on Comput. – 1997. – Vol. 9, N 3. – P. 231-250.
7. Reichel J., Skutella M. Evolutionary algorithms and matroid optimization problems // Proc. Genetic and Evolutionary Computation Conf. (GECCO). – New York: ACM Press, 2007. – P. 947-954.
8. Scharnow J., Tinnefeld K., Wegener I. The analysis of evolutionary algorithms on sorting and shortest paths problems // Journ. Math. Mod. and Alg. – 2004. – Vol. 3. – P. 349-366.
9. Theile M. Exact solutions to the traveling salesperson problem by a population-based evolutionary algorithm // Proc. European Conf. on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimisation (EvoCOP). LNCS 5482. Springer, 2009. – P. 145-155.
10. Woeginger G.J. When does a dynamic programming formulation guarantee the existence of a fully polynomial time approximation scheme (FPTAS)? // INFORMS Journ. on Comput. – 2000. – Vol. 12, Issue 1. – P. 57-74.

Еремеев Антон Валентинович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО КОММУНИКАЦИОННОГО ДЕРЕВА В БЕСПРОВОДНОЙ СЕНСОРНОЙ СЕТИ

А.И. Ерзин, Ю.В. Шамардин

Беспроводная сенсорная сеть (БСС) состоит из множества сенсоров, которые размещены в области мониторинга и используют беспроводную связь для обмена информацией. Основными функциями сенсора являются сбор (мониторинг), первичная обработка и передача информации. В БСС сенсоры, обеспечивающие покрытие (т.е. *активные* сенсоры), должны порождать *связный* граф. Энергозатраты на передачу данных пропорциональны d^b, где d – дальность передачи, а b – заданная положительная константа. Пусть дальность передачи – это регулируемый параметр сенсора, принимающий значения из заданного отрезка. Минимизировать энергозатраты на передачу данных между активными сенсорами сети можно путем выбора дальности передачи каждого сенсора, что однозначно определяет коммуникационную сеть. В литературе в качестве коммуникационного графа сенсорной сети принято рассматривать остовное дерево *минимального* веса P, когда вес ребра, связывающего пару вершин, – это расстояние между этими вершинами [1]. Однако минимальный остов не всегда является оптимальным коммуникационным графом БСС, т.к. для обеспечения связи по ребрам $(i,j)\in P$, инцидентным вершине i, дальность передачи сенсора i должна быть не менее $\max\limits_{j|(i,j)\in P} d_{ij}$, и в целевую функцию войдет слагаемое

$$(\max_{j|(i,j)\in P} d_{ij})^b = \max_{j|(i,j)\in P} d_{ij}^b.$$

Таким образом, для построения оптимального коммуникационного графа, который можно считать остовным деревом, необходимо решить следующую задачу.

Задан простой неориентированный взвешенный граф $G=(V,E)$ с множеством вершин-сенсоров V, $|V|=n$, и множеством ребер E. Ребро (i,j) принадлежит множеству E тогда и только тогда, когда максимальная дальность передачи сенсоров i и j не менее расстояния $d_{ij}\geq 0$ между ними. Пусть *вес* ребра $(i,j)\in E$ равен $c_{ij}=d_{ij}^b$. Требуется найти остовное дерево T^*, являющееся решением задачи:

$$W(T)=\sum_{i\in V}\max_{j\in V_i(T)} c_{ij}\to\min_T, \tag{1}$$

где $V_i(T)$ – множество вершин, смежных с вершиной i в дереве T.

Лемма 1. *Задача (1) является NP-трудной в сильном смысле.*

Доказательство. Сведем NP-трудную в сильном смысле задачу о минимальном покрытии (МП) [2] к частному случаю задачи (1). В задаче МП дано множество объектов J, множество элементов I и параметры $a_{ij}=1$, если элемент $i\in I$ покрывает объект $j\in J$, и $a_{ij}=+\infty$ в противном случае. Требуется найти подмножество $I'\subseteq I$ минимальной мощности, покрывающее все объекты.

По произвольной индивидуальной задаче МП построим граф $G=(V,E)$, в котором множество вершин $V=\{0\}\cup I\cup J$, а множество ребер $E=\{(0,i),\ i\in I\}\cup\{(i,j),\ a_{ij}=1,\ i\in I,\ j\in J\}$. Положим веса ребер $c_{0i}=0,\ i\in I$, и $c_{ij}=a_{ij},\ i\in I,\ j\in J$. Тогда в *любом* остовном дереве T графа $G=(V,E)$ для произвольной вершины $j\in J$ имеем $\max\limits_{i\in V_j(T)} c_{ij}=1$, а для любой вершины $i\in I$ либо $\max\limits_{j\in V_i(T)} c_{ij}=1$ (если i связана с некоторой вершиной $j\in J$), либо $\max\limits_{j\in V_i(T)} c_{ij}=0$ (вершина i связана только с вершиной 0). Решение T^* такой задачи (1) определяет минимальное покрытие $I' \subseteq I$, в которое войдут вершины множества I, смежные с вершинами множества J в дереве T^*. Таким образом, NP-трудная в сильном смысле задача МП полиномиально сведена к частному случаю задачи (1). Следовательно, задача (1) также является NP-трудной в сильном смысле.

Лемма 2. *Пусть граф G полный, и веса ребер принимают два значения $c_{ij} \in \{a, b\}$, $a < b$. Тогда задача (1) полиномиально разрешима.*

Доказательство. Построим следующий минимальный остов, начиная с тривиального графа $(V, \emptyset)$. Добавим максимальное количество ребер веса a, чтобы получились ациклические компоненты связности (пусть m – число компонент связности). Для построения остовного дерева необходимо связать компоненты связности $m-1$ ребром. Таким образом, задача сводится к минимизации количества вершин, которые будут связаны с вершинами других компонент связности. Для этого в каждой компоненте связности выберем по *одной* вершине и свяжем их ребрами веса b, чтобы получилось остовное дерево.

Следствие 1. *Пусть $c_{ij} \in \{a_1, a_2, \ldots\}$, $a_i < a_{i+1}$. В тривиальное дерево добавим ребра длины a_1, чтобы получилось минимальное число ациклических компонент связности. Если в каждой компоненте связности можно выбрать по одной вершине и связать эти вершины ребрами длины a_2, то построенное таким образом дерево является оптимальным решением задачи (1).*

Следствие 2. *Пусть $c_{ij} \in [a, b]$, $(i, j) \in E$. Если веса всех ребер в минимальном остове P равны a, то P является оптимальным решением задачи (1).*

В [3] рассматриваются так называемые регулярные покрытия плоскости кругами двух радиусов. Во всех рассмотренных в [3] покрытиях минимальные остовы содержат только ребра минимальной длины. Значит, в этих покрытиях в качестве оптимального коммуникационного дерева корректно использовать минимальный остов. С другой стороны, в [1] предлагается покрытие, в котором используются круги трех радиусов (модель III). Минимальный остов, связывающий активные сенсоры в модели III, не является оптимальным коммуникационным деревом, и выводы авторов работы [1], относящиеся к энергоэффективности связи, не верны.

Лемма 3. *Для любого остовного дерева T справедливы неравенства:*

$$\sum_{(i,j)\in T} c_{ij} \le \sum_{i\in V} \max_{j\in V_i(T)} c_{ij} \le 2 \sum_{(i,j)\in T} c_{ij}. \tag{2}$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Действительно, если выбрать произвольную вершину в качестве корня дерева T, то у каждой вершины i будет один предшественник $p(i)$ в пути в корень (предшественник вершины-корня совпадает с корнем), и вес дерева можно записать в виде

$$\sum_{(i,j)\in T} c_{ij} = \sum_{i\in V} c_{i,p(i)} \le \sum_{i\in V} \max_{j\in V_i(T)} c_{ij}.$$

Правое неравенство в (2) следует из того факта, что каждое ребро инцидентно двум вершинам и, следовательно, его вес может войти в целевую функцию не более, чем дважды. Лемма доказана.

Пусть T^* – решение задачи (1), т.е.

$$W(T^*) = \min_T W(T),$$

а

$$C = \sum_{(i,j)\in P} c_{ij} = \min_T \sum_{(i,j)\in T} c_{ij}$$

– вес минимального остова P.

Теорема 1. *Для минимального остова P справедлива достижимая оценка:*

$$\frac{W(P)}{W(T^*)} \leq 2. \tag{3}$$

Доказательство. Из (2) следует, что

$$C = \min_T \sum_{(i,j)\in T} c_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in T^*} c_{ij} \leq W(T^*) = \min_T \sum_{i\in V} \max_{j\in V_i(T)} c_{ij} \leq$$

$$\sum_{i\in V} \max_{j\in V_i(P)} c_{ij} = W(P) \leq 2C.$$

Неравенство (3) превращается в равенство, если ребра, вес которых учтен в правой части выражения (2) менее двух раз, имеют нулевые веса. Теорема доказана.

В силу того, что в регулярных покрытиях расстояния между сенсорами ограничены снизу положительными числами [1, 3], можно получить более точную оценку погрешности для минимального остова. Для этого упорядочим ребра, вошедшие в минимальный остов P, согласно их весам $a = c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{n-1} = b$. Пусть количество ребер дерева P, вес которых учтен в целевой функции $W(P)$ дважды, равно k, количество ребер дерева P, вес которых учтен в целевой функции один раз, равно l, и число ребер дерева P, вес которых не вошел в $W(P)$, равно m. Тогда $k+l+m = n-1$, а $2k + l = n$. Отсюда следует, что $l = n - 2k$ и $m = k - 1$. Значит,

$$W(P) \leq 2\sum_{i=n-k}^{n-1} c_i + \sum_{i=n-k-l}^{n-k-1} c_i = 2\sum_{i=n-k}^{n-1} c_i + \sum_{i=k}^{n-k-1} c_i = 2C - \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i + \sum_{i=1}^{n-k-1} c_i\right).$$

В последних скобках $n-2$ слагаемых, сумма которых убывает с ростом k. С учетом неравенства $k \leq (n-1)/2$, получаем

$$W(P) \leq 2C - \sum_{i=1}^{[(n-1)/2]-1} c_i - \sum_{i=1}^{n-[(n-1)/2]-1} c_i \leq 2C - 2\sum_{i=1}^{[(n-1)/2]-1} c_i \leq 2C - a(n-2).$$

Следовательно,

$$\varepsilon(P) = \frac{W(P)}{W(T^*)} \leq 2 - \frac{a(n-2)}{C} = \varepsilon_1(C).$$

С другой стороны

$$\varepsilon(P) \leq \frac{bn}{C} = \varepsilon_2(C).$$

Вес C минимального остова P не известен заранее. Однако $\varepsilon_1(C)$ возрастает, а $\varepsilon_2(C)$ убывает и, следовательно, можно найти такое $\overline{C} \in [a(n-1), b(n-1)]$, при котором $\varepsilon_1(\overline{C}) = \varepsilon_2(\overline{C})$. Имеем $\overline{C} = ((a+b)(n-2)+2b)/2$ и

$$\varepsilon(P) \le \min_C\{\varepsilon_1(C), \varepsilon_2(C)\} \le \varepsilon_1(\overline{C}) = \varepsilon_2(\overline{C}) = 2 - \frac{2a}{a+b+2b/(n-2)}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть веса ребер, вошедших в минимальный остов P, принадлежат отрезку $[a,b]$. Тогда справедлива оценка*

$$\varepsilon(P) = \frac{W(P)}{W(T^*)} \le 2 - \frac{2a}{a+b+2b/(n-2)},$$

и

$$\varepsilon(P) \le \frac{2b}{a+b} \tag{4}$$

при $n \to +\infty$.

В [1] рассматривается модель покрытия III, где в качестве коммуникационной сети используется минимальный остов, связывающий узлы бесконечной решетки, в который входят ребра веса $c_1 \approx 0.071$, $c_2 \approx 0.095$ и $c_3 \approx 1.071$. Значит, согласно (4) относительная погрешность для минимального остовного дерева P_{III} равна

$$\frac{W(P_{III}) - W(T^*)}{W(T^*)} \le \frac{2 \cdot 1.071}{0.071 + 1.071} - 1 \approx 0.87.$$

Рассмотрим следующий приближенный алгоритм решения задачи (1), учитывающий структуру функционала. Алгоритм строит остовное дерево по шагам, исходя из некоторого остовного леса. На каждом шаге объединяются две или более компонент связности, следуя "жадному" принципу.

Введем веса вершин a_i, $i \in V$, вначале полагая $a_i = \min\{c_{ij} | j \in V \setminus \{i\}\}$. Выберем остовный лес L, ребра которого удовлетворяют условию

$$c_{ij} \le \min\{a_i, a_j\}, \quad (i,j) \in L.$$

Опишем общий шаг алгоритма. Пусть лес L содержит $K+1$ компоненту связности. Выберем произвольную вершину i в некоторой компоненте и обозначим через $j_1, \ldots, j_K$ ближайшие к i вершины остальных компонент. Нумерация соответствует неубыванию длин ребер, то есть $c_{ij_1} \le \ldots \le c_{ij_K}$.

Если к лесу L добавить ребра $(i, j_1), \ldots, (i, j_k)$, то приращение функционала (1) составит величину

$$D_{ik} = \max\{0, c_{ij_k} - a_i\} + \sum_{l=1}^{k} \max\{0, c_{ij_l} - a_{j_l}\}.$$

Минимальное приращение функционала в среднем, в расчете на одну компоненту, равно величине

$$d_v = \min_{k=1,\ldots,K} \left\{ \frac{D_{vk}}{k} \right\}.$$

Пусть вершина i обладает минимальным средним показателем среди всех вершин, то есть

$$d_i = \min_{v \in V}\{d_v\} = \frac{D_{is}}{s}.$$

К лесу L добавляем новые ребра, полагая

$$L = L \cup \{(i, j_1), \ldots, (i, j_s)\},$$

и пересчитываем веса вершин, полагая

$$a_i = \max\{a_i, c_{ij_s}\}, \quad a_{j_k} = \max\{a_{j_k}, c_{ij_k}\},\ k = 1, \ldots, s.$$

Веса остальных вершин остаются прежними. Если лес L содержит более одной компоненты связности, то описанный шаг повторяется.

Нетрудно привести примеры, когда изложенный алгоритм строит остовное дерево, лучшее по функционалу (1), чем минимальный остов P. Однако вопрос о гарантированной оценке точности алгоритма остается открытым.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-07-91300-ИНД_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wu J., Yang S. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges // Int. J. of Foundations of Computer Science. – 2005. – Vol. 16, N 1. – P. 3-17.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.
3. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В., Раха С. Модели и методы регулярного покрытия в сенсорных сетях // Материалы 14 Байкальской межд. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск: ИСЭ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 322-331.

Ерзин Адиль Ильясович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-82, факс (383) 333-25-98.
E-mail: adilerzin@gmail.com

Шамардин Юрий Владиславович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-75, факс (383) 333-25-98.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ

Г.Г. Забудский

Важным направлением в области исследования операций является анализ и решение задач оптимального размещения объектов. Такие задачи необходимо решать при проектировании предприятий и робототехнологических комплексов, определении мест расположения пунктов обслуживания, автоматизированном конструировании электронных устройств и выполнении многих других работ [1, 3, 5, 8, 9-12].

В задачах оптимального размещения можно выделить два класса: задачи размещения взаимосвязанных объектов и задачи размещения-распределения. Отличие состоит в том, что в задачах первого класса необходимо найти места расположения объектов, между которыми имеются фиксированные связи. В задачах второго класса связи устанавливаются в результате их решения. Например, при размещении пунктов обслуживания к ним прикрепляются клиенты (устанавливаются связи). Классическими представителями первого класса являются задача Вебера и квадратичная задача о назначениях (КЗН). Разработкой этой проблематики занимались Ахмедов И.С., Демиденко В.А., Панюков А.В., Сергеев С.И., Сигал И.Х., Трубин В.А., Francis R.L., Koopmans T.C. и др. Наиболее известные задачи второго класса: простейшая задача размещения, задачи о p-медиане и о p-центре. Заметный вклад в их исследование внесли Агеев А.А., Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Дементьев В.Т., Колоколов А.А., Кочетов Ю.А., Hakimi S.L., Kariv O., Krarup J. и ряд других авторов.

Классическая задача Вебера на плоскости заключается в следующем. На плоскости имеются фиксированые объекты и на ней необходимо разместить другие объекты, которые связаны между собой и с фиксированными. Критерий – минимум суммарной стоимости связей между всеми объектами. Рассматривается также задача Вебера с минимаксным критерием. Отметим, что в указанных задачах нет ограничений на взаимное расположение объектов, в частности, допускается их размещение в одной точке. КЗН – это дискретный вариант задачи Вебера, когда в каждую преполагаемую точку размещается только один объект. Задача Вебера с минимаксным и минисуммным критериями полиномиально разрешима, если расстояния между объектами измеряется в прямоугольной метрике, а КЗН – NP-трудна.

Одно из направлений обобщения задачи Вебера, которое часто встречается на практике, – это наличие зон запрета для размещения объектов. Запрещенными зонами могут быть элементы географического ландшафта (горы, озера), а также здания, санитарные зоны и другие участки. Запишем математические модели для задачи Вебера с отмеченными выше критериями при наличии запрещенных зон.

На плоскости имеются фиксированные объекты $P_1, P_2, \ldots, P_m$, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множество их номеров и (a_i, b_i) – координаты объектов, $i \in M$. На этой же плоскости размещаются объекты $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество номеров размещаемых объектов и (x_j, y_j) – их координаты, $j \in N$. Удельную стоимость связи между i-м фиксированным и j-м размещаемым объектами обозначим через $w_{ij} \geq 0$, $i \in M, j \in N$, а $v_{jk} \geq 0$ – удельная стоимость связи между j-м и k-м размещаемыми объектами $j, k \in N$, $j < k$. Кроме того, задано z прямоугольных запрещенных зон $F_1, F_2, \ldots, F_z$ со сторонами, параллельными осям координат, $Z = \{1, 2, \ldots, z\}$ – множество их номеров. Пусть $F = \bigcup_{k \in Z} F_k$, $d(P_i, X_j)$ – расстояние между i-м фиксированным и j-м размещаемым объектами, а $d(X_j, X_k)$ – расстояние между j-м и k-м размещаемыми объектами, которое измеряется в прямоугольной метрике l_1.

Требуется разместить объекты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ вне запрещенных зон $F_1, F_2, \ldots, F_z$ так, чтобы либо суммарная стоимость связей между всеми объектами либо максимальная связь была минимальной

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} d(P_i, X_j) + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} v_{jk} d(X_j, X_k) \to \min_X, \qquad (1)$$

$$f_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \max\{\max_{j,k\in J, j<k} v_{jk}\rho(X_j, X_k), \max_{i\in I, j\in J} w_{ij}\rho(P_i, X_j)\} \to \min_X, \qquad (2)$$

$$X_j \notin F, \quad j \in N. \qquad (3)$$

Задачи минимизации функций f_1 и f_2 без условия (3) в метрике l_1 достаточно хорошо исследованы. Задача (1) декомпозируется на две независимые задачи линейного программирования (ЛП) одинаковой структуры. С учетом специфики такой задачи ЛП предложены более эффективные алгоритмы ее решения. В работе [9] указанная задача сводится к нахождению потока минимальной стоимости в специально построенной сети. Трубин В.А. представил ее решение в виде последовательности задач о максимальном потоке [6]. В работе [12] задача решается с помощью нахождения минимальных разрезов в сети с числом узлов сети не более $n+2$. Минимизация функции f_2 сводена к задаче поиска кратчайших путей в сети, длины дуг которой зависят от параметра [11].

Наличие ограничений (3) приводит к тому, что область допустимых решений задач (1),(3) и (2),(3) является невыпуклй и несвязной. Она может быть найдена с помощью методов вычислительной геометрии, в частности, метода плоского заметания [7]. Один из подходов к решению таких задач размещения – это использование моделей и методов целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Для этого область допустимых решений задач с помощью булевых переменных представляется в виде объединения выпуклых прямоугольных областей. Это подход позволяет использовать достаточно разработанный аппарат целочисленной оптимизации. Кроме того, свойства целевой функции f_1 задачи (1),(3) позволяют разрабатывать эффективные комбинаторные алгоритмы, так как исходная непрерывная задача может быть сведена к дискретной.

Задачи с минимально допустимыми расстояниями между объектами являются дальнейшим обобщением ограничений на расположение объектов. Задача на линии с такими ограничениями рассматривалась в работе [1]. Показано, что она является NP-трудной даже для простейшей структуры связей между объектами – корневого дерева. В дереве вершины соответствуют объектам, а дуги указывают на наличие связей между ними и задают частичный порядок на их размещение. Для решения таких задач размещения также можно использовать модели и методы ЦЛП. Исследована структура соответствующего многогранного множества такой задачи, в частности, получены оценки цепей дробных L-классов [4]. В случае размещения объектов на плоскости можно эффективно находить локальные оптимумы. Подобный алгоритм для метрики l_1 в целевой функции и l_∞ в ограничениях приведен в [6].

Часто для разработки алгоритмов решения задач размещения требуется уметь вычислять нижние оценки оптимальных значений целевых функций. Если в матрице минимально допустимых расстояний нарушается неравенство треугольника, то для построения нижней оценки суммарной стоимости связей между объектами можно решать задачу ЛП. Для КЗН с минимально допустимыми расстояниями такие оценки можно находить с помощью построения специальной задачи о назначениях с запретами. Структура запретов позволяет эффективно решать такую задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забудский Г.Г. Задачи оптимального размещения взаимосвязанных объектов на линии. Методы решения и анализа задач дискретной оптимизации. – Омск: ОмГУ, 1992. – С. 5-24.
2. Забудский Г.Г. Построение моделей и решение задач размещения на плоскости с запрещенными зонами // Автоматика и телемеханика. – 2006.– N 12. – С. 136-141.
3. Исследование операций. Модели и их применение. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981.
4. Колоколов А.А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журнал исслед. операций. – 1994. – Т. 1, N 2. – С. 18-39.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
6. Панюков А.В. Алгоритмы локальной оптимизации для задачи размещения прямоугольных объектов с минимальной длиной связывающей их сети // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1981. – N 6. – С. 180-184.
7. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. – М.: Мир, 1989.
8. Трубин В.А. Эффективный алгоритм для задачи Вебера с прямоугольной метрикой // Кибернетика. – 1978. – N 6. – С. 67-70.
9. Cabot V., Francis R.L., Stary M.A. A network flow solution to a rectilinear distance facility location problem // AIIE Trans. – 1970. – N 2. – P. 132-141.
10. Dearing P.M., Francis R.L. A network flow solution to a multifacility minimax location problem involving rectilinear distances Transportation Science. – 1974. – Vol. 8. – P. 126-141.
11. Ichimori T. A shortest path approach to a multifacility minimax location problem with rectilinear distances // Journal of the Operations Research Society of Japan. – 1974. – Vol. 8. – P. 126-141.
12. Picard J.C., Ratliff D.H. A cut approach to the rectilinear distance facility location problem // Oper. Res. – 1978. – Vol. 26, N 3. – P. 422-433.

Забудский Геннадий Григорьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zabudsky@iitam.omsk.net.ru

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ И СВОЙСТВА СРЕДНИХ

В.И. Зоркальцев

Рассматривается проблема построения агрегированных экономических индексов на примере индексов цен. Пусть P_i^τ, P_i^t – цены двух моментов времени τ и t для набора благ $i = 1, \ldots, n$ при $n \geq 2$. Обозначим $p_i = P_i^t / P_i^\tau$ – темп роста цены блага i к моменту t по сравнению с моментом τ. Обозначим l, r – максимальное и минимальное значения p_i по всем $i = 1, \ldots, n$. Далее считаем, что темпы роста цен по отдельным благам различаются, $l > r$.

Введем набор положительных весов отдельных благ $\alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ в сумме равных единице, $\sum \alpha_i = 1$. Пусть

$$I(m) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (p_i)^m \right)^{1/m} \tag{1}$$

– средняя величина от темпов роста цен на отдельные товары, m– параметр среднего, величина из интервала $(-\infty, +\infty)$. При $m = 2$ имеем среднюю квадратическую, при $m = 1$ – среднюю арифметическую. При $m \to 0$ выражение (1) переходит в среднюю геометрическую

$$I(0) = \prod_{i=1}^{n} (p_i)^{\alpha_i}\,. \tag{2}$$

Действительно, используя правило Лопиталя для раскрытия неопределенности 0/0, получаем

$$\lim_{m \to 0} \ln I(m) = \lim_{m \to 0} \frac{\ln \sum \alpha_i (p_i)^m}{m} = \lim_{m \to 0} \frac{d \left(\ln(\sum \alpha_i (p_i)^m \right) / dm}{dm/dm}$$

$$= \lim_{m \to 0} \frac{\sum \alpha_i (p_i)^m \ln p_i}{\sum \alpha_i (p_i)^m} = \sum \alpha_i \ln p_i = \ln I(0).$$

В течение XIX века во многих странах активно использовались индексы цен в форме средних арифметических $I(1)$. Некоторый интерес, в том числе в связи с теоретическим изучением индексов, был проявлен к индексу цен в форме средней гармонической $I(-1)$. Более совершенным является индекс цен в форме средней геометрической $I(0)$. Он был введен в конце XIX века У. Джевонсом и активно использовался в России в 20-х годах. В докладе планируется рассмотреть более подробно достоинства и недостатки индексов в форме средних с постоянными и переменными весами, их взаимосвязи с широко используемыми в настоящее время агрегатными индексами (в т.ч. Ласпейреса, Пааше).

В анонсируемой ниже теореме приводятся некоторые свойства и взаимосвязи индексов в форме средних (1), (2). Обозначим $I'(m)$, $I''(m)$ первую и вторую производные средней величины $I(m)$ по параметру среднего m.

По классификации К. Джини [2] рассматриваемые здесь средние $I(m)$ относятся к подклассу средних степенных взвешенных класса средних аналитических взвешенных.

Теорема. *При любом* $m \in (-\infty, +\infty)$

$$l > I(m) > r, \tag{3}$$

$$I'(m) > 0. \tag{4}$$

При этом

$$I(-\infty) = r, \ I(\infty) = l, \tag{5}$$

$$I'(-\infty) = 0, \quad I'(0) = \infty, \ I'(\infty) = 0. \tag{6}$$

Если $m > 0$, *то*

$$I''(m) > 0. \tag{7}$$

Если $m < 0$, *то*

$$I''(m) < 0. \tag{8}$$

Доказательство соотношений (3) – (5) имеется в [1].

Выражения $I(-\infty),\ I(+\infty)$, а также $I'(-\infty),\ I'(+\infty),\ I''(-\infty),\ I''(+\infty)$ являются значениями пределов $I(m), I'(m), I''(m)$ при $m \to -\infty$ и $m \to \infty$.

Из (3), (4), в частности, следуют известные неравенства между средним квадратическим $I(2)$, средним арифметическим $I(1)$, средним геометрическим $I(0)$ и средним гармоническим $I(-1)$

$$l > I(2) > I(1) > I(0) > I(-1) > r.$$

Согласно (7), (8) функция $I(m)$ является вогнутой при $m < 0$ и выпуклой при $m > 0$. Отсюда, в частности, следует что средняя квадратическая отстоит от средней арифметической меньше, чем средняя арифметическая отстоит от средней геометрической

$$I(1) - I(0) > I(2) - I(1) > 0.$$

Для того, чтобы подчеркнуть, что рассматриваемый индекс сопоставляет цены момента времени t с ценами момента времени τ, воспользуемся обозначением $I^{\tau t}(m)$. Соответственно, $I^{t\tau}(m)$ – индекс для случая, когда сопоставляемые моменты времени меняются местами. Естественно предположить, что для индексов цен должно выполняться равенство

$$I^{\tau t}(m) I^{t\tau}(m) = 1,$$

которое принято называть требованием обратимости во времени. Можно убедиться, что это требование выполняется для индекса в форме средней геометрической

$$I^{\tau t}(0) I^{t\tau}(0) = 1. \tag{9}$$

Если для индекса цен всегда выполняется неравенство

$$I^{\tau t} I^{t\tau} < 1,$$

или всегда выполняется обратное неравенство

$$I^{\tau t} I^{t\tau} > 1,$$

то говорим [1], что анализируемый метод расчета индексов дает систематическое смещение относительно требования обратимости во времени в сторону занижения или, соответственно, в сторону завышения. Из (4), (9) следует, что рассматриваемые средние аналитические индексы при $m \neq 0$ дают систематическое смещение в сторону занижения при $m < 0$ и в сторону завышения при $m > 0$:

$$I^{\tau t}(m) I^{t\tau}(m) < 0 \text{ при } m < 0,$$

$$I^{\tau t}(m)I^{t\tau}(m) > 0 \text{ при } m > 0.$$

В частности, наличие систематических смещений в сторону завышения у среднеарифметического индекса с постоянными весами стало одной из основных причин отказа от его применения после длительного широкого использования во многих странах в течение всего XIX века.

Работа поддержана грантом РГНФ 09-02-00278а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоркальцев В.И. Индексы цен и инфляционные процессы. – Новосибирск: Наука, 1996.
2. Джини К. Средние величины. – М.: Статистика, 1970.

Зоркальцев Валерий Иванович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-88-27.
E-mail: zork@isem.sei.irk.ru

ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ СУПЕРМОДУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ НА МАТРОИДАХ И КОМАТРОИДАХ

В.П. Ильев, С.Д. Ильева

1. Супермодулярные функции на матроидах и коматроидах

Пусть I — конечное множество и $\mathcal{A} \subseteq 2^I$ — непустое семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующей *аксиоме наследственности*: $A \in \mathcal{A},\ A' \subseteq A \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$. Пара $\boldsymbol{S} = (I, \mathcal{A})$ называется *системой независимости* или *наследственной системой* на I. Множества семейства $\mathcal{A}$ называются *независимыми*, все остальные подмножества I — *зависимыми*. Семейство всех зависимых множеств обозначим $\mathcal{D}$. Очевидно, что $\mathcal{D}$ обладает свойством *наследственности "вверх"*: $D \in \mathcal{D},\ D \subseteq D' \Rightarrow D' \in \mathcal{D}$. Поскольку каждое из семейств $\mathcal{A}, \mathcal{D}$ однозначно определяет наследственную систему $\mathcal{S}$, будем записывать $\boldsymbol{S} = (I, \mathcal{A})$ или $\boldsymbol{S} = (I, \mathcal{D})$ в зависимости от того, какая сторона наследственной системы будет нас интересовать.

Базами системы $\boldsymbol{S}$ называются максимальные по включению независимые множества, а *циклами* — минимальные по включению зависимые множества.

Пусть $\boldsymbol{S} = (I, \mathcal{A}) = (I, \mathcal{D})$ — произвольная наследственная система и $X \subseteq I$. *Базой множества* X называется любое максимальное по включению независимое множество, содержащееся в X. *Циклом множества* X назовем любое минимальное по включению зависимое множество, содержащее X.

Наследственная система $\boldsymbol{S}$ называется *матроидом*, если все базы любого множества $X \subseteq I$ имеют одинаковую мощность, и *коматроидом*, если все циклы любого множества $X \subseteq I$ имеют одинаковую мощность. Из этих определений следует, что все базы множества I в матроиде имеют одинаковую мощность, называемую *рангом* матроида, и все циклы пустого множества в коматроиде имеют одинаковую мощность, называемую *обхватом* коматроида.

Примерами могут служить *p-однородный* матроид $\boldsymbol{M}_p = (I, \mathcal{A})$ и *p-однородный* коматроид $\boldsymbol{K}_p = (I, \mathcal{D})$, где $\mathcal{A} = \{A \subseteq I : |A| \le p\}$, $\mathcal{D} = \{D \subseteq I : |D| \ge p\}$, p — натуральное число, $p < |I|$.

Функция множеств $f : 2^I \to R_+$ называется *супермодулярной*, если для любых множеств $X, Y \subseteq I$ имеет место неравенство $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \ge f(X) + f(Y)$.

Справедлив следующий критерий супермодулярности, доказательство которого аналогично доказательству критерия субмодулярности функции [2].

Лемма 1. Функция множеств $f : 2^I \to R_+$ является супермодулярной тогда и только тогда, когда для любых множеств $A \subseteq B \subset I$ и любого элемента $x \notin B$ имеет место неравенство $\Delta_x(A) \le \Delta_x(B)$, где $\Delta_x(A) = f(A \cup \{x\}) - f(A)$.

Если $f(X)$ – неубывающая супермодулярная функция, то $\Delta_x(X) \ge 0$ для любых $X \subset I$, $x \notin X$. Для невозрастающей супермодулярной функции удобно рассматривать разности $\Delta_x^-(X) = f(X \setminus x) - f(X) \ge 0$, определенные для всех $X \subseteq I$, $x \in X$.

Из равенства $\Delta_x^-(X) = -\Delta_x(X \setminus x)$ и леммы 1 вытекает

Следствие 1. Функция множеств $f : 2^I \to R_+$ является супермодулярной тогда и только тогда, когда для любых множеств $A \subseteq B \subset I$ и любого элемента $x \in A$ имеет место неравенство $\Delta_x^-(A) \ge \Delta_x^-(B)$.

Сформулированный критерий позволяет ввести следующее обобщение понятия супермодулярной функции. Пусть $\boldsymbol{M} = (I, \mathcal{A})$ – матроид, где $\mathcal{A} \subseteq 2^I$ – семейство независимых множеств. Неубывающая функция множеств $f : \mathcal{A} \to R_+$ называется *супермодулярной на матроиде*, если для любых множеств $X, Y \in \mathcal{A}$, $X \subseteq Y$, и любого элемента $x \notin Y$ такого, что $Y \cup \{x\} \in \mathcal{A}$, имеет место неравенство $\Delta_x(X) \le \Delta_x(Y)$.

Аналогично, *супермодулярной функцией на коматроиде* $\boldsymbol{K} = (I, \mathcal{D})$ будем называть невозрастающую функцию множеств $f : \mathcal{D} \to R_+$, определенную на семействе $\mathcal{D} \subseteq 2^I$ всех зависимых множеств коматроида, удовлетворяющую условию: $\Delta_x^-(X) \ge \Delta_x^-(Y)$ для любых множеств $X, Y \in \mathcal{D}$, $X \subseteq Y$, и любого элемента $x \in X$ такого, что $X \setminus \{x\} \in \mathcal{D}$.

Примерами таких функций являются целевые функции задачи аппроксимации графа и задачи о p-медиане на минимум, о которых пойдет речь в пп. 3, 4. Обе задачи NP-трудны и являются частными случаями рассмотренных в следующем разделе задач минимизации супермодулярных функций на матроидах и коматроидах.

2. Оценки погрешности жадных алгоритмов

Нас будут интересовать следующие задачи: найти

$$\min \{f(X) : X \in \mathcal{B}\}, \tag{1}$$

$$\min \{g(X) : X \in \mathcal{C}\}, \tag{2}$$

где $\mathcal{B}$ – семейство всех баз некоторого матроида $\boldsymbol{M} = (I, \mathcal{A})$ ранга r, $f : \mathcal{A} \to R_+$ – неубывающая супермодулярная функция на матроиде, $f(\emptyset) = 0$, $\mathcal{C}$ – семейство всех циклов некоторого коматроида $\boldsymbol{K} = (I, \mathcal{D})$ обхвата p, а $g : \mathcal{D} \to R_+$ – невозрастающая супермодулярная функция на коматроиде, $g(I) = 0$.

Для приближенного решения задачи (1) будет применяться следующий алгоритм.

Алгоритм G^+ (*жадный алгоритм*).
Шаг 0. $X_0 \leftarrow \emptyset$, перейти на шаг 1.
Шаг i ($i \ge 1$). Выбрать такой $x_i \notin X_{i-1}$, что

$$f(X_{i-1} \cup \{x_i\}) = \min_{\substack{x \notin X_{i-1}, \\ X_{i-1} \cup \{x\} \in \mathcal{A}}} f(X_{i-1} \cup \{x\}).$$

$X_i \leftarrow X_{i-1} \cup \{x_i\}$, перейти на шаг $i+1$. Если такого $x_i \notin X_{i-1}$ нет, то $S_{G^+} \leftarrow X_{i-1}$.
Конец.

Для приближенного решения задачи (2) будем применять следующий "обратный" аналог жадного алгоритма.

Алгоритм G^- (*обратный жадный алгоритм*).
Шаг 0. $X_0 \leftarrow I$, перейти на шаг 1.
Шаг i ($i \ge 1$). Выбрать такой $x_i \in X_{i-1}$, что

$$g(X_{i-1} \setminus \{x_i\}) = \min_{\substack{x \in X_{i-1}, \\ X_{i-1} \setminus \{x\} \in \mathcal{D}}} g(X_{i-1} \setminus \{x\}).$$

$X_i \leftarrow X_{i-1} \setminus \{x_i\}$, перейти на шаг $i+1$. Если такого $x_i \in X_{i-1}$ нет, то $S_{G^-} \leftarrow X_{i-1}$.
Конец.

Заметим, что алгоритм G^+ всегда находит базу, а алгоритм G^- – цикл наследственной системы, т. е. множество S_{G^+} является допустимым решением задачи (1), а S_{G^-} – допустимым решением задачи (2).

Рассмотрим следующую характеристику неубывающей супермодулярной функции, зависящую от S_{G^+}:

$$c^+ = \max_{\substack{x \in I, \\ \Delta_x(S_{G^+} \setminus \{x\}) > 0}} \frac{\Delta_x(S_{G^+} \setminus \{x\}) - \Delta_x(\emptyset)}{\Delta_x(S_{G^+} \setminus \{x\})}.$$

Очевидно, $c^+ \in [0,1]$. Для $c^+ < 1$ положим $s^+ = c^+/(1-c^+)$.

Величины c^+ и s^+ характеризуют скорость возрастания неубывающей супермодулярной функции. Нетрудно показать, что $c^+ = 0$ тогда и только тогда, когда $f(X)$ – аддитивная функция.

Получены следующие апостериорные оценки погрешности жадного алгоритма для задачи (1).

Теорема 1. Пусть S_O — оптимальное решение задачи (1), а S_{G^+} — решение, найденное алгоритмом G^+. Тогда

$$(1-c^+)f(S_{G^+}) \le f(S_O), \quad f(S_{G^+}) \le (1+s^+)f(S_O). \tag{3}$$

Для невозрастающей супермодулярной функции введем величину

$$c^- = \max_{\substack{x \in I, \\ \Delta_x^-(S_{G^-} \cup \{x\}) > 0}} \frac{\Delta_x^-(S_{G^-} \cup \{x\}) - \Delta_x^-(I)}{\Delta_x^-(S_{G^-} \cup \{x\})}.$$

Очевидно, $c^- \in [0,1]$. Для $c^- < 1$ положим $s^- = c^-/(1-c^-)$.

Величины c^- и s^- характеризуют скорость убывания невозрастающей супермодулярной функции. Нетрудно показать, что $c^- = 0$ тогда и только тогда, когда $g(X)$ – модулярная функция (невозрастающий аналог аддитивной функции).

Теорема 2. Пусть S_O — оптимальное решение задачи (2), S_{G^-} — решение, построенное алгоритмом G^-. Тогда

$$(1-c^-)g(S_{G^-}) \le g(S_O), \quad g(S_{G^-}) \le (1+s^-)g(S_O). \tag{4}$$

3. Следствия для задачи о p-медиане на минимум

Частным случаем задачи (2) является известная задача о p-медиане на минимум:

$$\min\{g(X) : X \subseteq I, |X| = p\} \tag{5}$$

с целевой функцией

$$g(X) = \sum_{j \in J} \min_{i \in X} c_{ij}, \tag{6}$$

где $C = (c_{ij})$ — неотрицательная матрица размера $n \times m$ с множеством индексов I строк и множеством индексов J столбцов. Не ограничивая общности, можно считать, что для каждого $j \in J$ существует $i \in I$ такой, что $c_{ij} = 0$. В противном случае вычтем $\min\limits_{i \in I} c_{ij}$ из всех элементов каждого столбца $j \in J$. Таким образом, $g(I) = 0$.

Несложно проверить, что после доопределения

$$g(\emptyset) = \max_{\substack{X,Y \subseteq I, \\ X \cap Y = \emptyset}} \{g(X) + g(Y) - g(X \cup Y)\} \tag{7}$$

невозрастающая функция (6) становится супермодулярной. Таким образом, задачу (5) можно рассматривать как задачу (2) минимизации невозрастающей супермодулярной функции (6) на p-однородном коматроиде.

Как следствие теоремы 2 могут быть получены гарантированные оценки погрешности алгоритма G^- для задачи о p-медиане на минимум.

Теорема 3. Пусть S_O – оптимальное решение задачи о p-медиане на минимум, а S_{G^-} – решение, найденное алгоритмом G^-. Тогда имеют место оценки (4).

Кроме того, справедливы следующие верхние оценки величины s^- в терминах параметров матрицы C.

Предложение 1. Если супермодулярная функция множеств $g(X)$ задана формулами (6) и (7), то

$$s^- \leq \max_{i\in I} \frac{g(\emptyset) - \sum\limits_{j\in J} c_{ij}}{\sum\limits_{j\in J} \min\limits_{k\neq i} c_{kj}} - 1,$$

где $g(\emptyset) = \max\limits_{i,k\in I} \sum\limits_{j\in J} \max\,(c_{ij}, c_{kj})$.

Предложение 2. Если все ненулевые элементы $(n\times m)$-матрицы C принадлежат отрезку $[a, b]$, то $s^- \leq \frac{b}{a}m - 2$.

4. Задача аппроксимации графа

Будем рассматривать только *обыкновенные* графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Граф называется *M-графом*, если каждая его компонента связности является полным графом. Обозначим через $\mathcal{M}_k^1(V)$ класс всех M-графов на множестве V, имеющих не более k компонент связности, $2 \leq k \leq |V|$.

Если $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ – графы на одном и том же множестве вершин V, то *расстояние* $\rho(G_1, G_2)$ между ними определяется как

$$\rho(G_1, G_2) = |E_1 \setminus E_2| + |E_2 \setminus E_1|,$$

т. е. $\rho(G_1, G_2)$ – число несовпадающих рёбер в графах G_1 и G_2.

Рассмотрим следующий вариант задачи аппроксимации графа.

Задача $\mathbf{A_k^1}$. Дан граф $G = (V, E)$. Требуется найти такой граф $M_O \in \mathcal{M}_k^1(V)$, что $\rho(G, M_O) = \min\limits_{M\in\mathcal{M}_k^1(V)} \rho(G, M)$.

В работе [1] доказано, что задача $\mathbf{A_k^1}$ является NP-трудной для любого $k \geq 2$.

В настоящей работе предложена постановка задачи $\mathbf{A_k^1}$ как задачи минимизации неубывающей супермодулярной функции на матроиде и получена оценка погрешности алгоритма приближенного решения этой задачи.

Пусть $n \geq 3$. Для заданного n-вершинного графа $G = (V, E)$ определим множества $R_i = \{r_v^i : v \in V\}$, $i = 1, \ldots, k$, и положим $I = \bigcup\limits_{i=1}^{k} R_i$. Таким образом, каждой вершине графа G соответствуют k элементов наследственной системы и $|I| = kn$. Независимыми множествами будем считать подмножества I, в которых содержится не более одного элемента, соответствующего каждой вершине, т. е. множество $A \subseteq I$ независимо тогда и только тогда, когда $|A \cap \{r_v^1, \ldots, r_v^k\}| \leq 1$ для любой вершины

$v \in V$. Очевидно, что семейство $\mathcal{A}$ таких множеств удовлетворяет аксиоме наследственности.

Легко видеть, что $\boldsymbol{M} = (I, \mathcal{A})$ — матроид ранга n. Базами матроида являются множества мощности n, содержащие по одному элементу для каждой вершины, т. е. множества вида $\{x_v : v \in V\}$, где $x_v \in \{r_v^1, \dots, r_v^k\}$.

Для $A \in \mathcal{A}$ положим $V_A = \{v \in V : r_v^i \in A$ для некоторого $i\}$. Любому независимому множеству $A \in \mathcal{A}$ соответствует M-граф $M_A \in \mathcal{M}_k^1(V_A)$, i-я компонента связности которого порождена множеством вершин v таких, что $r_v^i \in A$. Тогда базам матроида $\boldsymbol{M} = (I, \mathcal{A})$ соответствуют M-графы из $\mathcal{M}_k^1(V)$, т. е. допустимые решения задачи $\mathbf{A_k^1}$.

Определим функцию f на семействе $\mathcal{A}$ независимых множеств матроида $\boldsymbol{M}$: для $A \in \mathcal{A}$ положим $f(A)$ равным расстоянию между M-графом M_A, соответствующим множеству A, и подграфом исходного графа G, порожденным множеством вершин V_A. Очевидно, что функция $f : \mathcal{A} \to R_+$ является неубывающей и удовлетворяет следующему условию: для любых множеств $A \subseteq B \in \mathcal{A}$ и любого элемента $x \notin B$ имеет место неравенство $f(A \cup \{x\}) - f(A) \leq f(B \cup \{x\}) - f(B)$, т. е. является супермодулярной на матроиде функцией.

Итак, $f : \mathcal{A} \to R_+$ — неубывающая супермодулярная на матроиде функция, и мы можем рассматривать задачу $\mathbf{A_k^1}$ как задачу (1). Для ее приближенного решения применяется жадный алгоритм G^+.

Для задачи $\mathbf{A_k^1}$ получен следующий результат.

Теорема 4. При любом фиксированном k расстояние от произвольного n-вершинного графа $G = (V, E)$ до M-графа $M \in \mathcal{M}_k^1(V)$, полученного с помощью жадного алгоритма, отличается от расстояния до оптимально аппроксимирующего M-графа $M_O \in \mathcal{M}_k^1(V)$ не более, чем в $n + 1$ раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.А., Ильев В.П., Кононов А.В., Талевнин А.С. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2006. – Т. 13, N 1. – С. 3-15.

2. Nemhauser G.L., Wolsey L.U., Fisher M.L. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions – I // Math. Programming. – 1978. – V. 14, N 13. – P. 265-294.

Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: iljev@math.omsu.omskreg.ru

Ильева Светлана Диадоровна,
ООО "Омсктелеком",
ул. 1-я Заводская, 23, Омск, 644040, Россия, тел. (3812) 24-69-03.
E-mail: iljeva@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ NP-ТРУДНЫХ ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ

А.В. Кельманов

Введение. Объект исследования работы — проблемы оптимизации в задачах анализа данных и распознавания образов. Предмет исследования — дискретные экстремальные задачи, к которым сводятся некоторые варианты проблемы поиска подмножеств «похожих» векторов во множестве векторов евклидова пространства, а также некоторые варианты проблемы помехоустойчивого off-line обнаружения повторяющегося фрагмента в числовой последовательности. Цель работы — обзор результатов по изучению сложности и исследованию алгоритмов решения этих задач. Данная работа дополняет сообщения [1–3].

1. Модели анализа данных. Рассмотренные ниже модели типичны для широкого спектра приложений, в которых необходимым элементом является компьютерная обработка (анализ) зашумленных структурированных данных в виде числовых или векторных последовательностей, включающих перемежающиеся информационно значимые фрагменты в одномерном случае или векторы в многомерном случае.

Пусть $x_n \in \mathbb{R}^q, n \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$, — последовательность векторов. Рассмотрим две возможные структуры этой последовательности.

Структура 1. Последовательность задается формулой

$$x_n = \begin{cases} w_1, \ n \in \mathcal{M}_1, \\ w_2, \ n \in \mathcal{M}_2, \\ \ldots, \ \ldots, \\ w_J, \ n \in \mathcal{M}_J, \\ 0, \ n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\cup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{N}$, причем $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset$, если $i \neq j$.

Структура 2. Последовательность обладает свойством

$$x_n = \begin{cases} w_1, \ n \in \mathcal{M}_1, \\ w_2, \ n \in \mathcal{M}_2, \\ \ldots, \ \ldots, \\ w_J, \ n \in \mathcal{M}_J, \end{cases} \tag{2}$$

где $\cup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j = \mathcal{N}$, причем, как и в структуре 1, $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset$, если $i \neq j$.

Для обеих структур положим $|\mathcal{M}_j| = M_j$, $j = 1, \ldots, J$; $M = \sum_{j=1}^{J} M_j$, $\{n_1, \ldots, n_M\} = \cup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j$. Вектор w_j будем интерпретировать как информационно значимый вектор, а M_j — как число его повторов в последовательности $x_n, n \in \mathcal{N}$. Доступной для анализа будем считать последовательность

$$y_n = x_n + e_n, \ n \in \mathcal{N}, \tag{3}$$

где e_n — вектор помехи (ошибки измерения), независимый от вектора x_n.

Заметим, что $x_n = x_n(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J, w_1, \ldots, w_J), n \in \mathcal{N}$. Положим

$$S(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J, w_1, \ldots, w_J) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \|y_n - x_n\|^2. \tag{4}$$

Модели анализа данных сформулируем в форме задач среднеквадратического приближения. Допустим сначала, что в отсутствие помехи данные имеют структуру 1. Сформулируем следующие задачи.

Задача 1. *Дано*: совокупность $\{y_1,\ldots,y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ и совокупность $\{w_1,\ldots,w_J\}$ векторов таких, что целевая функция (4) минимальна.

Эту задачу можно трактовать как поиск семейства непересекающихся подмножеств векторов, «похожих» в среднеквадратическом смысле.

Допустим, что в рамках структуры 1 компоненты набора $(n_1,\ldots,n_M)$, соответствующие номерам ненулевых векторов в формуле (1), связаны дополнительными ограничениями

$$1 \le T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N-1, \quad m = 2,\ldots,M, \tag{5}$$

где $T_{\min}$ и $T_{\max}$ — натуральные числа. Эти ограничения устанавливают допустимый интервал между двумя ближайшими номерами ненулевых векторов в последовательности (1).

Задача 2. *Дано*: последовательность $y_n \in \mathbb{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ и совокупность $\{w_1,\ldots,w_J\}$ векторов таких, что целевая функция (4) минимальна, при ограничениях (5) на элементы упорядоченного набора $(n_1,\ldots,n_M)$, которые образуют совокупность $\{n_1,\ldots,n_M\} = \cup_{j=1}^{J}\mathcal{M}_j$.

Эту задачу можно интерпретировать как оптимальное обнаружение по критерию минимума суммы квадратов уклонений ненулевых неизвестных информационно значимых векторов, повторяющихся и перемежающихся в ненаблюдаемой последовательности (1).

Предполагая, что незашумленные данные имеют структуру 2, сформулируем следующую задачу.

Задача 3. *Дано*: совокупность $\{y_1,\ldots,y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{N}$ на непустые подмножества $\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_J$ и совокупность $\{w_1,\ldots,w_J\}$ векторов таких, что целевая функция (4) минимальна.

Эта задача отличается от задачи 1 тем, что в ней требуется найти разбиение множества $\mathcal{N}$, а не совокупность непересекающихся подмножеств этого множества.

2. Редуцированные задачи. Легко убедиться, что во всех сформулированных задачах для любого допустимого семейства $\{\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_J\}$ подмножеств множества $\mathcal{N}$ минимум функционала (4) по переменным $w_1,\ldots,w_J$ доставляется векторами $\overline{w}_j = \sum_{n\in\mathcal{M}_j} y_n/|\mathcal{M}_j|$, $j = 1,\ldots,J$. В задачах 1 и 2 в силу формулы (1) этот минимум равен

$$S_{\min}(\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_J) = \sum_{n\in\mathcal{N}} \|y_n\|^2 - \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{|\mathcal{M}_j|} \|\sum_{n\in\mathcal{M}_j} y_n\|^2. \tag{6}$$

Для задачи 3, учитывая (2), имеем

$$S_{\min}(\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_J) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{n\in\mathcal{M}_j} \|y_n - \overline{w}_j\|^2. \tag{7}$$

Таким образом, для отыскания решений сформулированных задач необходимо решить задачи на минимум функций (6) и (7). К идентичным оптимизационным задачам приводит статистический подход к проблеме анализа данных, если считать, что вектор e_n в формуле (3) есть выборка из q-мерного нормального распределения с параметрами $(0, \sigma^2 I)$, где I — единичная матрица, а в модели анализа данных в качестве критерия решения использовать максимум функционала правдоподобия.

Первый член в правой части равенства (6) является константой. Поэтому из задачи 1 получаем следующие редуцированные оптимизационные задачи.

Задача J**-MSASVS-F** (максимум суммы средних значений квадратов длин сумм векторов из подмножеств фиксированной мощности). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральные числа $M_1, \ldots, M_J$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{|\mathcal{B}_j|} \| \sum_{y \in \mathcal{B}_j} y \|^2 \to \max, \tag{8}$$

при ограничениях $|\mathcal{B}_j| = M_j$, $j = 1, \ldots, J$, на мощности искомых подмножеств.

Задача J**-MSASVS-NF** (максимум суммы средних значений квадратов длин сумм векторов из подмножеств, мощности которых не фиксированы). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{Y}$ такое, что имеет место (8).

Обе задачи можно трактовать как поиск подмножеств векторов «похожих» в среднеквадратическом смысле. Отличие задач состоит в том, что в первой из них мощности искомых подмножеств являются частью входа задачи, а во второй эти мощности — оптимизируемые величины. Аналогичным образом формулируются еще две задачи, которые следуют из задачи 2 и ориентированы на анализ последовательностей при наличии ограничений (5).

Задача J**-MSASVSO-F**. *Дано*: последовательность $y_n \in \mathbb{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, и натуральные числа $M_1, \ldots, M_J$, $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{|\mathcal{M}_j|} \| \sum_{n \in \mathcal{M}_j} y_n \|^2 \to \max, \tag{9}$$

при ограничениях $|\mathcal{M}_j| = M_j$, $j = 1, \ldots, J$, на мощности искомых подмножеств и при дополнительных ограничениях (5) на элементы упорядоченного набора $(n_1, \ldots, n_M)$, которые образуют совокупность $\{n_1, \ldots, n_M\} = \cup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j$.

Задача J**-MSASVSO-NF**. *Дано*: последовательность $y_n \in \mathbb{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, и натуральные числа $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти*: семейство $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ такое, что имеет место (9), при ограничениях (5) на элементы упорядоченного набора $(n_1, \ldots, n_M)$, которые образуют совокупность $\{n_1, \ldots, n_M\} = \cup_{j=1}^{J} \mathcal{M}_j$.

Из задачи 3 и формулы (7) получаем хорошо известную задачу.

Задача MSSC. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число $J > 1$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества (кластеры) $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_J$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} \|y - \overline{w}_j\|^2 \to \min,$$

где $\overline{w}_j = \sum_{y \in \mathcal{C}_j} y / |\mathcal{C}_j|$, $j = 1, \ldots, J$, — центры кластеров.

Эта задача является классической задачей анализа данных и распознавания образов. Сформулируем два важных специальных случая этой задачи.

Задача J-MSSC0-F. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральные числа $M_1, \dots, M_J$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_J$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{J-1} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} \|y - \overline{w}_j\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{C}_J} \|y\|^2 \to \min, \tag{10}$$

где $\overline{w}_j = \sum_{y \in \mathcal{C}_j} y/|\mathcal{C}_j|$, $j = 1, \dots, J-1$, при ограничениях $|\mathcal{C}_j| = M_j, j = 1, \dots, J$, на мощности искомых подмножеств.

Задача J-MSSC0-NF. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$. *Найти*: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые подмножества $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_J$ такое, что имеет место (10).

Эти задачи можно трактовать как специальные случаи задачи MSSC, в которых центр одного из кластеров определять не требуется (считается, что центр этого кластера известен и равен нулю). В первой задаче предполагается, что мощности кластеров фиксированы, а во второй число кластеров и их мощности — оптимизируемые величины.

3. Известные факты о сложности задач и алгоритмах их решения. Прежде всего заметим, что задача MSSC в силу давности постановки и широкой известности наиболее изучена в алгоритмическом плане. Имеется множество публикаций, ориентированных на построение эффективных алгоритмов с оценками точности для ее решения. Однако, лишь недавно в [4] дано корректное доказательство NP-трудности этой задачи для случая, когда $J = 2$. Все ранее опубликованные доказательства труднорешаемости этой задачи содержали ошибки [5]. Другие задачи, сформулированные в предыдущем параграфе, относятся к числу слабо изученных задач. Рассмотрим современное состояние исследований по их решению.

Алгоритмическая сложность. Относительно сложности задач поиска подмножеств векторов и специальных случаев задачи кластерного анализа получены следующие результаты. Статус NP-трудности задачи 1-MSASVS-F был установлен в [6, 7]. Из этого результата следует, что задача J-MSASVS-F при $J > 1$ также NP-трудна, как обобщение задачи 1-MSASVS-F. NP-трудность задачи 1-MSASVS-NF доказана в [8, 9]. Этот результат позволил установить труднорешаемость задачи J-MSASVS-NF при $J > 1$ в случае, когда число J является частью входа задачи. Позже в [10] была установлена труднорешаемость задачи J-MSASVS-NF для случая, когда J не является частью входа. В этой же работе было доказано, что задачи J-MSSC0-F и J-MSSC0-NF также NP-трудны.

О сложности задач анализа последовательностей с ограничением (5) на порядок выбора векторов известно следующее. Статус NP-трудности доказан [6, 7] лишь для задачи J-MSASVSO-F. Статус сложности задачи J-MSASVSO-NF пока не установлен. Скорее всего, она NP-трудна, как и задача J-MSASVS-NF.

Алгоритмы. Какие-либо алгоритмы с доказуемыми оценками точности для решения задач J-MSASVS-F и J-MSASVS-NF поиска подмножеств векторов, задач J-MSASVSO-F и J-MSASVSO-NF поиска подпоследовательностей векторов в случае, когда $J > 1$, на сегодняшний день неизвестны. То же самое можно сказать про задачи J-MSSC0-F и J-MSSC0-NF, которые имеют смысл лишь при $J > 1$.

К числу задач, для которых удалось построить алгоритмы с доказуемыми оценками точности, относятся простейшие задачи 1-MSASVS-F, 1-MSASVS-NF и 1-MSASVSO-F, в которых требуется найти лишь одно ($J = 1$) подмножество «похожих» векторов или один повторяющийся вектор в последовательности.

В [7] обоснованы приближенные асимптотически точные алгоритмы решения задач 1-MSASVS-F и 1-MSASVSO-F, имеющие временную сложность $\mathcal{O}[Nq^2(2l+1)^{q-1}]$ и $\mathcal{O}[Nq(q+M)(2l+1)^{q-1}]$ соответственно, где l — параметр алгоритма. Алгоритмы находят решение, относительная погрешность которого не превышает $(q-1)/(4l^2)$.

В [6] предложен приближенный алгоритм решения задачи 1-MSASVSO-F. Его временная сложность есть величина $\mathcal{O}[M(T_{\max}-T_{\min}+1)N]$. К сожалению, для этого относительно «быстрого» алгоритма, хорошо зарекомендовавшего себя в численных экспериментах, гарантированная оценка точности пока не установлена.

Для решения задачи 1-MSASVS-NF в [10] предложен приближенный асимптотически точный алгоритм. Трудоемкость этого алгоритма есть величина $\mathcal{O}[Nq(q+\log N)(2l+1)^{q-1}]$, где l — параметр алгоритма, а относительная погрешность не более $(q-1)/(4l^2)$.

В [11] доказано, что задачи 1-MSASVS-F и 1-MSASVS-NF разрешимы за время $\mathcal{O}(q^2N^{2q})$. Тем самым показано, что при фиксированной размерности q пространства эти задачи могут быть точно решены за полиномиальное время.

Для вариантов задач 1-MSASVS-F и 1-MSASVSO-F с целочисленными координатами векторов в [12] обоснованы точные псевдополиномиальные алгоритмы. Трудоемкость этих алгоритмов есть величина $\mathcal{O}[NqM^2(2b)^{q-1}]$, где b — максимальная по абсолютной величине координата векторов из заданного множества.

Заключение. К рассмотренным NP-трудным задачам сводятся простейшие проблемы из большого семейства (насчитывающего, по крайней мере, несколько сотен элементов [13]) проблем помехоустойчивого off-line анализа и распознавания структурированных последовательностей, включающих повторяющиеся, чередующиеся и перемежающиеся информационно значимые векторы (фрагменты) в качестве структурных элементов. Очевидно, что эти труднорешаемые задачи являются частными случаями для многих еще не изученных экстремальных задач, к которым сводятся проблемы анализа данных и распознавания образов, имеющих более сложную структуру над информационно значимыми векторами. Поэтому приведенные результаты могут служить в качестве базовых (при использовании известной [14] техники полиномиальной сводимости) для доказательства NP-трудности других более сложных проблем анализа структурированных данных и распознавания образов из упомянутого семейства.

Остается заметить, что для большинства из рассмотренных экстремальных задач какие-либо алгоритмы с оценками точности на сегодняшний день неизвестны. Высокая с практической точки зрения трудоемкость существующих приближенных алгоритмов решения некоторых из рассмотренных оптимизационных задач обуславливает продолжение исследований в направлении поиска новых алгоритмических решений, а также в направлении выделения подклассов задач, для которых возможно построение алгоритмов, имеющих меньшую временную сложность.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032, 07-07-00022 и грантом АВЦП Рособразования 2.1.1/3235.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В. Полиномиально разрешимые и NP-трудные варианты задачи оптимального обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента // Материалы Росс. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций». – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2007. – `http://math.nsc.ru/conference/door07/DOOR_abstracts.pdf`. – С. 46-50.
2. Кельманов А.В. О некоторых полиномиально разрешимых и NP-трудных задачах анализа и распознавания последовательностей с квазипериодической структурой // Сб. докл. 13-й Всеросс. конф. «Математические методы распознавания образов» (ММРО-13). – М.: МАКС Пресс, 2007. – С. 261-264.
3. Kel'manov A.V. Off-line Detection of a Quasi-Periodically Recurring Fragment in a Numerical Sequence // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. – 2008. – Suppl. 2. – P. S84-S92.
4. Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-Hardness of Euclidean Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2008-33. – 2008.
5. Aloise D., Hansen P. On the Complexity of Minimum Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2007-50. – 2007.
6. Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2006. – Т. 9, N 1(25). – С. 55-74.
7. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия 2. – 2007. – Т. 14, N 1. – С. 32-42.
8. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности одного из вариантов задачи выбора подмножества «похожих» векторов // Доклады РАН. – 2008. – Т. 421, N 5. – С. 590-592.
9. Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, N 5. – С. 25-40.
10. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // ЖВМиМФ. – 2009. (принята в печать).
11. Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А. О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножеств векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, N 6. – С. 11-19.
12. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Рыков И.А. Задача выбора подмножества векторов с целочисленными координатами в евклидовом пространстве с максимальной нормой суммы // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, N 4. – С. 31-43.
13. `http://math.nsc.ru/~serge/qpsl/`
14. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. – Freeman, San Francisco, CA, 1979.

Кельманов Александр Васильевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-79, факс (383) 332-25-98.
E-mail: kelm@math.nsc.ru

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ АЛГОРИТМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРНЫХ РАЗБИЕНИЙ

А.А. Колоколов, Л.А. Заозерская

В докладе содержится обзор методов построения оценок числа итераций алгоритмов целочисленного программирования (ЦП), основанных на использовании свойств релаксационных многогранников. Приводятся оценки числа итераций разного типа для алгоритмов отсечения, ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг), перебора L-классов. Значительное внимание уделяется методу регулярных разбиений, который позволил получить многие из указанных оценок. В частности, с помощью этого подхода и результатов из [13] найдены верхние оценки среднего числа итераций рассматриваемых алгоритмов при решении задач об упаковке множества и рюкзаке.

1. Предварительные сведения

1.1. В целочисленном программировании при построении оценок числа итераций алгоритмов во многих случаях используется лексикографическая задача:

$$\text{найти} \quad z^* = \operatorname{lexmax}(\Omega \cap Z^n), \tag{1}$$

где $\Omega \neq \emptyset$ – выпуклое, замкнутое, ограниченное сверху множество в пространстве R^n, т.е. существует вектор $d \in R^n$ такой, что $x \leq d$ для всех $x \in \Omega$. Множество Ω называется релаксационным множеством задачи. В алгоритмах отсечения и ряде других методов решения задач ЦП, основанных на аппарате непрерывной оптимизации, в процессе решения задачи (1) из Ω должны быть исключены все точки множества

$$\Omega_* = \{x \in \Omega \mid x \succ z \text{ для всех } z \in \Omega \cap Z^n\},$$

которое называется *дробным накрытием* задачи. Здесь $\succ$ – знак лексикографического порядка. Выделение этого множества связано с тем, что исследуемые алгоритмы ЦП можно рассматривать как определенные способы "снятия" дробного накрытия.

1.2. Опишем в основных чертах идею метода регулярных разбиений. Для анализа и решения задач ЦП вводится разбиение F пространства R^n, которое индуцирует разбиение релаксационного множества Ω и обладает следующими свойствами:

а) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс разбиения, остальные классы состоят только из нецелочисленных точек и называются *дробными*;

б) если $X \subset R^n$ – ограниченное множество, то фактор-множество X/F – конечное;

в) для любого X и произвольного $z \in Z^n$ имеет место $(X + z)/F = (X/F) + z$.

Элементы из X/F называются F-классами, а множество Ω_*/F – F-*накрытием* задачи (1). Разбиение, удовлетворяющее а) – в), называется *регулярным.*

В терминах таких разбиений измеряется "объем" дробного накрытия задачи ЦП, изучается строение релаксационных множеств, описываются классы отсечений, определяется их глубина, разрабатываются и сравниваются алгоритмы, анализируются последовательности приближений, строятся оценки числа итераций и отсечений, проводятся экспериментальные исследования алгоритмов и тестовых задач.

1.3. Важную роль при построении оценок числа итераций играет понятие отделимости векторов. Будем говорить, что $x,\ y \in R^n$ отделимы, если имеется $z \in Z^n$

такая, что $x \succeq z \succeq y$ (точку z назовем отделяющей). Значительное число результатов получено на основе *L-разбиения* [5-7], которое является регулярным и определяется следующим образом. Каждая точка из Z^n образует отдельный *L-класс*, т.е. элемент разбиения. Точки $x, y \in R^n$ ($x \succ y$ и $x, y \notin Z^n$) принадлежат одному *дробному* L-классу, если не существует отделящая их $z \in Z^n$.

Пусть $X \subset R^n$ и $X_0 = X \cap Z^n$. Фактор-множество X/L называется *L-структурой* X, а его мощность обозначается через $|X/L|$. Для ограниченного множества X можно записать

$$X/L = \{V_1, ..., V_r\}, \text{ при этом } V_i \succ V_{i+1}, \quad i = 1, ..., r-1.$$

Здесь $V_i \succ V_{i+1}$ означает, что для любых $x \in V_i,\ y \in V_{i+1}$ выполнено $x \succ y$.

Подмножество $Q = \{V_k, V_{k+1}, ..., V_l\}$ дробных классов из X/L называется *L-комплексом*, если не существует $z \in X \cap Z^n$, такой, что $V_k \succ z \succ V_l$. Пусть $\Psi(X) = \max\{|Q| \ :\ Q \in C(X)\}$, где $C(X)$ – совокупность всех L-комплексов, порождаемых X. Выпуклое множество $X \subset R^n$ имеет *альтернирующую* L-структуру, если $\Psi(X) \leq 1$, а лексикографически максимальный и минимальный элементы множества X/L являются целочисленными (при условии, что они существуют).

Установлено, что альтернирующей L-структурой обладают параллелепипеды, симплексы, слои и некоторые другие многогранники, релаксационные множества ряда известных задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП), в частности, задач об упаковке и покрытии множеств, задачи стандартизации, задачи максимальной выполнимости логической формулы [5].

Исследование L-структуры задачи о рюкзаке позволило получить оценку $\Psi(X) \leq n$. Кроме того, имеются семейства задач ЦЛП с более мощными L-комплексами, в том числе экспоненциальными (от числа переменных).

1.4. К регулярным разбиениям пространства R^n относятся *кубические* разбиения, тесно связанные с "округлениями" нецелочисленных точек [5]. Пусть $B^n = \{x \in R^n \mid 0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1, ..., n\}$, $B_0^n = B^n \cap Z^n$, $\delta \in B_0^n$. Округлением вектора $x \in R^n$ в соответствии с δ назовем вектор $z \in Z^n$ такой, что $z_j = \lfloor x_j \rfloor$, если $\delta_j = 0$, и $z_j = \lceil x_i \rceil$, иначе, $j = 1, ..., n$. Далее его будем обозначать через $\delta(x)$.

Разбиение, порождаемое $\delta \in B_0^n$, определяется следующим образом. Каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс. Точки $x, y \notin Z^n$ принадлежат одному дробному классу разбиения, если $\delta(x) = \delta(y)$. Этот класс разбиений был использован при построении оценок числа итераций для алгоритмов ветвей и границ. С помощью кубических разбиений удобно ввести более мелкое *каноническое* разбиение K, которое также оказывается полезным при исследовании алгоритмов [5].

2. Методы получения оценок числа итераций

2.1. При построении оценок числа итераций для двойственных дробных алгоритмов отсечения [7, 17], например, первого алгоритма Гомори [21], и алгоритмов перебора L-классов [5] исследуются множества Ω_*/L и Ω/L . В терминах мощностей этих множеств получены так называемые "структурные" оценки для указанных алгоритмов, которые легли в основу построения оценок числа итераций через параметры задач ЦП. В качестве общего подхода к оцениванию величины $|\Omega_*/L|$ применялось погружение Ω_* в различные множества с последующей оценкой числа целочисленных точек в них, например, параллелепипеды, симплексы, слои и другие [5–7].

Предположим, что дробное накрытие задачи (1) содержится в ограниченном множестве X. Тогда

1) $|\Omega_*/L| \le \Psi(X)(|X_0|+1)$;

2) если X имеет альтернирующую L-структуру и $X_0 \ne \emptyset$, то $|\Omega_*/L| \le |X_0| - 1$;

3) если $A \ge 0$, $b \ge 0$ и $X = \{x \in R^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$, то $|\Omega_*/L| \le n|X_0|$.

Перейдем к описанию результатов по верхним оценкам мощности L-накрытия и числа итераций алгоритмов решения задачи ЦЛП:

$$f(x) = (c, x) \to \max \tag{2}$$

при условиях

$$Ax \le b,\ x \ge 0, \tag{3}$$

$$x \in\ Z^n, \tag{4}$$

где $A = (a_{ij})$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$; $c = (c_1, ..., c_n)$, $b = (b_1, ..., b_m)^T$, $x = (x_1, ..., x_n)^T$. Все исходные данные задачи предполагаются рациональными, а в ряде случаев – целочисленными.

Пусть $M \ne \emptyset$ – множество, определяемое системой (3), $x' = (x_0, x_1, ..., x_n)$ и $M' = \{x' \in R^{n+1} \mid x_0 = (c, x),\ x \in M\}$. Тогда лексикографическая задача (1), соответствующая (2)–(4), имеет вид: найти $z^* = \mathrm{lexmax}(M' \cap Z^{n+1})$.

Рассмотрим параллелепипед

$$\tilde{P} = \{x' \in R^{n+1} \mid \nu \le x_0 \le \mu,\ a_j \le x_j \le a'_j, j = 1, .., n\}.$$

Здесь $a_j, a'_j \in Z$, $\mu \ge \max\{(c, x) \mid x \in M\}$, а $\nu \le \min\{(c, x) \mid x \in M\}$, если $M_0 = \emptyset$, либо $\nu \le (c, x^*)$, где x^* – оптимальное решение задачи (2)–(4). Имеет место (см., например, [7])

Теорема 1. *Если в задаче (2)-(4) дробное накрытие M'_* содержится в $\tilde{P}$, то*

$$|M'_*/L| \le 1 + (\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil + 1) \prod_{j=1}^{n} (a'_j - a_j + 1). \tag{5}$$

Отметим, что во многих случаях величина $\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil$ легко оценивается сверху через исходные параметры задачи. Имеются задачи булева программирования (БП), у которых мощность L-накрытий превышает 2^n.

Приведем пример погружения для многомерной задачи о рюкзаке. Дробное накрытие этой задачи содержится в многограннике

$$S' = \{x' \in R^{n+1} \mid \nu \le x_0 \le \mu,\ \sum_{j=1}^{n} x_j \le b',\ x_j \ge 0,\ j = 1, ..., n\}, \quad b' = \sum_{j=1}^{m} b_i.$$

С использованием альтернируемости множества S'/L доказана

Теорема 2. *Для L-накрытия многомерной задачи о рюкзаке справедлива оценка*

$$|M'_*/L| \le (\lfloor \mu \rfloor - \lceil \nu \rceil + 1)(1 + n)^{b'}. \tag{6}$$

В случае одномерной задачи о рюкзаке со специальным порядком переменных получена верхняя оценка, которая не зависит от правой части [11]. С использованием (6) построены верхние оценки мощности L-накрытий для задач об упаковке множества.

2.2. Верхние оценки другого типа получены для задач БП на основе связи между L-комплексами и множествами нецелочисленных вершин релаксационных многогранников [5]. Пусть $\Omega \subset B^n$ – релаксационный многогранник для задачи (1).

L-класс из Ω/L называется вершинным, если он содержит некоторую вершину многогранника Ω. Установлено, что $|\Omega_*/L| \leq 2v(\Omega_*)$, где $v(\Omega_*)$ – число таких классов в Ω_*/L. Таким образом, мощные L-накрытия могут возникать лишь при большом числе нецелочисленных вершин, принадлежащих Ω_*.

2.3. Оценки мощности L-накрытий были использованы для построения оценок числа итераций ряда алгоритмов отсечения и перебора L-классов. Приведем некоторые из них. Через $I_D(\Omega)$ обозначим число итераций двойственного дробного процесса отсечения D, выполняемых при решении задачи (1). Отметим, что процесс D является обобщением первого алгоритма Гомори для рассматриваемой задачи. Правильное отсечение называется L-регулярным, если оно вместе с оптимальным нецелочисленным решением текущей непрерывной задачи исключает и содержащий его L-класс.

Теорема 3. *Для задачи (1) и процесса D с L-регулярными отсечениями имеет место оценка*
$$I_D(\Omega) \leq |\Omega_*/L|.$$

Отметим, что в первом алгоритме Гомори при определенных правилах построения используемые отсечения являются L-регулярными.

Нижние оценки числа итераций получены для двойственных дробных алгоритмов [5] с использованием понятия глубины отсечения, т.е. числа исключаемых им дробных L-классов из L-накрытия задачи ЦП. Обозначим через $H_D(\Omega)$ верхнюю оценку глубины отсечений процесса D при решении задачи (1).

Теорема 4. *Для задачи (1) и процесса D выполняется неравенство*
$$I_D(\Omega) \geq \frac{1}{H_D(\Omega)}|\Omega_*/L|.$$

Для вполне регулярных отсечений [2, 5] доказано, что $H_D(\Omega) = n$.

Указанные выше оценки для мощности L-накрытий задач и теоремы 3, 4 позволили получить широкое многообразие оценок числа итераций для алгоритмов отсечения. Для алгоритма перебора L-классов (LCE) [5, 18] было установлено, что число итераций при решении (2)–(4) не превосходит $|M/L|$. Аналогичные оценочные результаты справедливы и для других регулярных разбиений [5].

2.4. Первые верхние оценки числа итераций для алгоритмов отсечения были получены на основе анализа лексикографически монотонных последовательностей [9]. Применение этого подхода к первому алгоритму Гомори дало "параллелепипедную" оценку вида (5). С помощью свойства отделимости векторов был построен более широкий класс оценок [10]. Позднее подобные оценки были получены в [22]. Для полностью целочисленного алгоритма Гомори этот подход дал оценку числа итераций в терминах одного лексикографического процесса [9].

В [1, 20] построены примеры "трудных" задач для первого алгоритма Гомори и для некоторых других алгоритмов.

2.5. Пусть S_B – последовательность приближений, порождаемая алгоритмом ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг) [21]. Для кубического разбиения, соответствующего $\delta \in B_0^n$, любой дробный класс из M/δ содержит не более n элементов S_B [5], откуда вытекает оценка $|S_B| \leq |M_0| + n|M_f/\delta|$, где $M_f = M \setminus M_0$. В [1, 12, 14, 16, 19] построены семейства "трудных" задач для этих алгоритмов.

Вопрос об оценках числа итераций для полностью целочисленных алгоритмов отсечения (прямых и двойственных) остается малоисследованым. Для этих алгоритмов также получены семейства "трудных" задач [8, 15, 16].

3. Верхние оценки среднего числа итераций

В [13] рассмотрен класс задач об упаковке множества (SPP), в котором элементы матрицы A являются независимыми случайными величинами, причем $P\{a_{ij} = 1\} = p$ и параметры задачи удовлетворяют условию $mp^2 \geq \ln n$. Данный класс задач обозначим через $\mathcal{P}(n, m, p)$. Там же показано, что алгоритм динамического программирования (ДП) является полиномиальным в среднем для $\mathcal{P}(n, m, p)$, а именно, $\mathbf{E}T_{DP} = O(n^2 m)$, где T_{DP} – число операций алгоритма ДП и $\mathbf{E}$ – математическое ожидание случайной величины.

Для указанного класса задач на основе свойства альтернируемости M/L и результатов из [13] показано, что $\mathbf{E}|M/L| \leq 4n + 1$. Отсюда следуют утверждения.

Теорема 5. *Для задач SPP из класса $\mathcal{P}(n, m, p)$ среднее число итераций алгоритма LCE с начальным рекордом $\rho_0 \geq \max_{j=1,\ldots,n} c_j$ не превосходит $3n + 1$.*

Теорема 6. *Для невзвешенных задач SPP из класса $\mathcal{P}(n, m, p)$ среднее число отсечений первого алгоритма Гомори не превосходит $3n^2 - 2n - 1$.*

В [3] для модифицированного варианта первого алгоритма Гомори получена полиномиальная верхняя оценка среднего числа итераций в случае взвешенных задач из $\mathcal{P}(n, m, p)$. Для этих же задач с помощью кубических разбиений получена полиномиальная верхняя оценка среднего числа итераций алгоритма ветвей и границ.

Используя оценку среднего числа допустимых решений для некоторого класса задач о рюкзаке с булевыми переменными из [13], а также особенности L-структуры многогранника M, в [4] получены аналогичные верхние оценки. В дальнейшем представляется перспективным применение предложенного подхода к анализу процессов решения других задач ЦЛП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П. Исследование некоторых алгоритмов целочисленного программирования с использованием L-разбиений и унимодулярных преобразований: Препринт. – Омск: ОмГУ, 2009.
2. Заблоцкая О.А., Колоколов А.А. Вполне регулярные отсечения в булевом программировании // Управляемые системы. – Новосибирск, 1983. – Вып. 23. – С. 55-63.
3. Заозерская Л.А., Колоколов А.А. О среднем числе итераций некоторых алгоритмов для решения задачи об упаковке множества // Материалы XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения" – Иркутск, 2008. – Т. 1. – С. 388-395.
4. Заозерская Л.А., Колоколов А.А. Оценки среднего числа итераций для некоторых алгоритмов решения задачи о рюкзаке // Электронный сборник материалов 8-ой международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем" – М.: МГУ, 2009. – С. 75-79.
5. Колоколов А.А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сибирский журнал исследования операций. – 1994. – Т. 1, N 2. – С. 18-39.
6. Колоколов А.А. О лексикографической структуре некоторых выпуклых многогранных множеств // 5-ая Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики. Тезисы докладов. – Новосибирск, 1980. – С. 77-79.
7. Колоколов А.А. Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации // Управляемые системы. – Новосибирск, 1981. – Вып. 21. – С. 18-25.

8. Колоколов А.А. К оценке числа итераций для прямых алгоритмов отсечения в целочисленном линейном программировании // Математический анализ экономических моделей. – Новосибирск: ИЭиОПП СО АН СССР, 1971. – Ч. I. – С. 137-164.
9. Колоколов А.А. О длине лексикографически монотонных последовательностей // Оптимизация территориальных и отраслевых систем, методы решения экономических задач. – Новосибирск, 1973. – Ч. III. – С. 93-99.
10. Колоколов А.А. О числе отсекающих плоскостей в первом алгоритме Гомори // Проблемы анализа дискретной информации. – Новосибирск, 1975. – Ч. 1. – С. 84-96.
11. Колоколов А.А., Цепкова Е.В. Исследование задачи о рюкзаке на основе L-разбиения // Кибернетика. – 1991. – N 2. – С. 38-43.
12. Колпаков Р. М., Посыпкин М.А. Асимптотическая оценка сложности метода ветвей и границ с ветвлением по дробной переменной для задачи о ранце // Дискретный анализ и исследование операций – 2008. – Т. 15, N 1. – С. 58-81.
13. Кузюрин Н.Н. Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании // Сибирский журнал исследования операций. – 1994. – Т. 1, N 3. – С. 38-48.
14. Сайко Л.А. Исследование мощности L-накрытий некоторых задач о покрытии// Дискретная оптимизация и анализ сложных систем. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. – С. 76-97.
15. Сайко Л.А. О числе итераций прямых алгоритмов отсечения // Дискретная оптимизация и численные методы решения прикладных задач. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986. – С. 86-88.
16. Финкельштейн Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. – М.: Наука, 1976.
17. Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. – М.: Физматлит, 1995.
18. Devyaterikova M.V., Kolokolov A.A. On the stability of some integer programming algorithms // Operations Research Letters. – 2006. – V. 34. – P. 149-154.
19. Jeroslow R.G. Trivial integer programs unsolvable by branch-and-bound // Mathematical Programming. – 1974. – V. 6, N 1. – P. 105-109.
20. Jeroslow R., Kortanek K. On an algorithm of Gomory // SIAM Journal Applied Mathematics. – 1971. – V. 21, N 1. – P. 55-60.
21. Nemhauser G.L., Wolsey L.A. Integer and combinatorial optimization. – A Wiley-Interscience Publication: John Wiley & Sons, inc., 1999.
22. Nourie F.J., Venta E.R. An upper bound on the number of cuts needed in Gomory's method of integer forms//Operations Research Letters. –1981/82. –V. 1, N 4. –P. 129-133.

Колоколов Александр Александрович, Заозерская Лидия Анатольевна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, zaozer@ofim.oscsbras.ru

ЗАДАЧА ОБ (r,p)-ЦЕНТРОИДЕ

Ю.А. Кочетов

Область конкурентных задач размещения производства обязана своим рождением пионерской работе Хотеллинга [9]. В ней исследуются эгоистические стратегии поведения двух игроков, стремящихся захватить как можно большую долю рынка. Они выбирают места размещения предприятий и цены на их продукцию, предполагая, что клиенты располагаются на линии (береговой линии, шоссе и т.п.). Со временем появились более богатые модели, интересные как с точки зрения экономики и теории игр, так и для методов оптимизации и исследования операций. С обзором таких моделей можно познакомиться в [7].

Задачу о центроиде впервые исследовал Хакими [8]. Рассмотрим конечные множества $I = \{1,\dots,m\}$ и $J = \{1,\dots,n\}$ возможных мест размещения предприятий и мест расположения клиентов. Матрица $(g_{ij}), i \in I, j \in J$, будет задавать расстояния от клиентов до предприятий. Величины w_j определяют доход игрока при обслуживании им j-го клиента. Первый игрок, назовем его Лидер, открывает свои p предприятий первым. У него имеется C_m^p возможностей, среди которых он выбирает какую-нибудь одну (игра в чистых стратегиях). Вслед за Лидером второй игрок, назовем его Конкурент, из оставшихся $m-p$ предприятий выбирает r своих. Как только игроки выбрали свои предприятия можно подсчитать цену игры. Каждый клиент из $(p+r)$ открытых предприятий выбирает ближайшее предприятие в качестве своего поставщика. Если ближайших предприятий несколько и среди них есть предприятие Лидера, то клиент отдает предпочтение ему. Таким образом, множество клиентов разбивается на два подмножества: клиенты Лидера и клиенты Конкурента, определяющие их доходы. Задача состоит в выборе для Лидера таких p предприятий, чтобы при наилучшем ходе Конкурента получить максимальный доход.

Наряду с указанными дискретными постановками рассматриваются и *непрерывные* постановки, где множество I заменяется на двухмерную евклидову плоскость [6]. Множество J остается конечным. Каждый его элемент представляется точкой на плоскости. Важным частным случаем задачи, как в дискретной так и в непрерывной постановке является задача на графах. Клиенты представляются вершинами графа. Игроки могут открывать предприятия либо в вершинах (дискретный случай), либо в любой точке на ребрах (непрерывный случай). Качественное отличие этих задач состоит, например, в том, что их сложность отличается даже на графах в виде цепи. В дискретном случае она полиномиально разрешима. В непрерывном случае — NP-трудна [13].

Особое место занимает случай $r = p$. Он тесно связан с теорией голосования [8, 12] и имеет богатую историю. Получить больше половины рынка означает для игрока (партии) победу на выборах или одобрение своего проекта в парламенте. Оптимальное решение задачи соответствует концепции Симпсона (Simpson solution). Если это решение гарантирует Лидеру больше половины рынка, то говорят о решении Кондорсе (Condorset solution). Установлено, что задача поиска решений Симпсона (Кондорсе) принадлежит классу $\sum_2^P$ и является полной в этом классе [10]. Фактически это означает, что задача о центроиде является более сложной, чем любая задача из класса NP, и для ее решения может потребоваться больше усилий, чем для NP-полных задач.

1. Математическая постановка

Приведем точную математическую постановку дискретной задачи об (r, p)-центроиде. Введем следующие переменные:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если Лидер открывает предприятие } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если Конкурент открывает предприятие } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается Лидером,} \\ 0 & \text{если клиент } j \text{ обслуживается Конкурентом.} \end{cases}$$

При заданном векторе $x_i \in \{0, 1\}, i \in I$ определим множество

$$I_j(x) = \Big\{ i \in I \mid g_{ij} < \min_{l \in I}(g_{l_j} \mid x_l = 1) \Big\}, \quad j \in J.$$

Это множество задает пункты размещения предприятий, позволяющие Конкуренту *захватить* j-го клиента. С использованием введенных обозначений дискретная задача об (r, p)-центроиде может быть представлена как задача двухуровневого программирования [4]:

$$\max_x \sum_{j \in J} w_j u_j^*(x)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} x_i = p,$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I,$$

где $u^*(x)$ и $y^*(x)$ — оптимальное решение задачи Конкурента:

$$\max_{y,u} \sum_{j \in J} w_j (1 - u_j)$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in I} y_i = r,$$

$$1 - u_j \leq \sum_{i \in I_j(x)} y_i, \quad j \in J,$$

$$y_i + x_i \leq 1, \quad i \in I,$$

$$y_i, u_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J.$$

Так как сумма целевых функций Лидера и Конкурента является константой, клиент обслуживается либо Лидером, либо Конкурентом, то задачу можно представить как задачу о максимине для некоторой целевой функции, зависящей от переменных x и y. Пользуясь этим свойством в [12] для случая $p = r$ предложен точный метод частичного перебора, позволяющий решать задачи при $n \leq 50$, $p, r \leq 5$. В [11] исследуется частный случай задачи для $r = 1$. Исходная модель представляется в виде целочисленного линейного программирования, что позволяет находить точное решение коммерческим программным обеспечением. Известно [8], что случай $r = 1$

является NP-трудной задачей, также как и решение задачи Конкурента при заданном решении Лидера.

Сложностной статус задачи на графах представлен в Таблице 1. Под связкой цепей понимается граф, являющийся деревом, где только одна вершина имеет степень больше чем 2. Через D обозначена максимальная длина ребра графа, $W = \sum_{j \in J} w_j$.

Таблица 1. Сложность задачи на графах [13]

Задача	Дискретная	Непрерывная
(r,p)-центроид	$O(pn^4)$ на цепях NP-трудная на связке цепей (spider) $\sum_2^P$-полная на произвольных графах	NP-трудная на цепях
$(1,p)$-центроид	$O(n^2(\log n)^2 \log W)$ на деревьях NP-трудная на графах с ограниченной путевой шириной	$O(n^3 \log W \log D)$ на деревьях
$(1,1)$-центроид	$O(n^3)$ на произвольных графах	$O(n^4 m^2 \log mn \log W)$ на произвольных графах

2. Нижние оценки оптимума

Так как задача о центроиде является полной в классе $\sum_2^P$, то построение полиномиальных алгоритмов с гарантированной оценкой точности и тем более FPTAS вряд ли возможно в общем случае. Для произвольных графов аппроксимируемость с погрешностью $n^{1-\varepsilon}$ влечет P=NP [10]. В связи с этим наибольший интерес представляют эвристики и, в частности, метаэвристики, которые в ассимптотике позволяют находить точное решение задачи. В [5] исследовалось поведение алгоритма поиска с запретами, где для оценки поведения Конкурента применялась жадная стратегия. На примерах с малыми значениями $p, r \leq 3, n \leq 70$, когда полным перебором можно найти точное решение, такой подход часто позволяет находить оптимум. Однако при бо́льших значениях p, r жадная эвристика не находит оптимального решения Конкурента и ценность такого подхода становится сомнительной.

В [6] исследовалась так называемая *альтернирующая* эвристика. Ее смысл состоит в следующем. Пусть Лидер выбрал решение x^0 и Конкурент нашел на него ответ y^0. При $p = r$ Лидер может положить $x^1 = y^0$ в надежде забрать у Конкурента наиболее прибыльный вариант ответа. Для x^1 Конкурент находит ответ y^1, и Лидер снова делает тот же трюк. Такая стратегия, конечно, приводит к циклу, который иногда содержит более тысячи решений [14]. Лучшее из них предъявляется в качестве ответа. Заметим, что такой подход требует многократного решения задачи Конкурента. Она является NP-трудной. Однако исходная задача имеет более высокую сложность. Поэтому такой подход можно считать оправданным. На тестовых примерах размерности $p = r = 10, n = 100$, он показывает хорошие результаты [14].

В [4] отмечено, что игнорируя Конкурента и решая классическую задачу о p-медиане, Лидер получает неплохое приближенное решение задачи. Фактически, Лидер стремится приблизить свои предприятия к клиентам, и Конкуренту становится трудно его отсечь. В [3] эта стратегия улучшается за счет запрета больших расстояний в матрице (g_{ij}). В итоге такой подход не уступает альтернирующей эвристике. Он может использоваться как стартовое решение для методов локального поиска, которые как и в случае классической p-медианы, быстро находят оптимальное решение задачи. На случайно порождаемых примерах на евклидовой плоскости, $r = p \leq 10, n = m \leq 100$ оптимум находится, как правило, менее чем за n итераций. Основная проблема, например, для вероятностного поиска с запретами, состоит в просмотре окрестности. Вычисление целевой функции для каждого элемента окрестности требует решения задачи Конкурента. В [4] отмечается, что переход к линейной релаксации в задаче Конкурента фактически не сказывается на эффективности поиска с запретами. В результате просмотр окрестности становится полиномиальной процедурой, что позволяет сократить трудоемкость одного шага алгоритма. Дальнейшее ускорение достигается за счет рандомизации окрестности и переходу к Лагранжевым релаксациям [2].

3. Точный метод

Представим исходную задачу в терминах целочисленного линейного программирования с экспоненциальным числом переменных и ограничений. Обозначим через $\mathcal{F}$ непустое семейство решений Конкурента. Будем предполагать, что Конкурент выбирает решение, ограничиваясь только семейством $\mathcal{F}$. Для $y \in \mathcal{F}$ положим

$$I_j(y) = \Big\{ i \in I \mid g_{ij} \leq \min_{l \in I} g_{lj} \mid y_l = 1 \Big\}, \quad j \in J.$$

Это множество показывает места размещения предприятий, позволяющие Лидеру *удержать* клиента j, если Конкурент использует решение y. Введем новые переменные:

$W \geq 0$ — суммарный доход Лидера,

$$u_{jy} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается Лидером, а Конкурент} \\ & \quad \text{использует решение } y, \\ 0, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается Конкурентом, и Конкурент} \\ & \text{использует решение } y. \end{cases}$$

Для данного семейства $\mathcal{F}$ задача Лидера может быть представлена следующим образом [4]:

$$\max W$$

при ограничениях:

$$\sum_{j \in J} w_j u_{jy} \geq W, \quad y \in \mathcal{F},$$

$$u_{jy} \leq \sum_{i \in I_j(y)} x_i, \quad j \in J, y \in \mathcal{F},$$

$$\sum_{i \in I} x_i = p,$$

$$x_i, u_{jy} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J, y \in \mathcal{F}.$$

Целевая функция $W(\mathcal{F})$ определяет суммарный доход Лидера. Первое ограничение гарантирует наилучший ответ Конкурента из семейства $\mathcal{F}$ на любой ход Лидера.

Второе ограничение определяет раздел рынка между Лидером и Конкурентом. Если семейство $\mathcal{F}$ содержит все возможные решения Конкурента, то оптимальное решение данной задачи дает оптимальное решение исходной задачи.

Заметим, что замена 0–1 переменных u_{jy} на непрерывные переменные $0 \leq u_{jy} \leq 1$ не меняет оптимального решения задачи. Таким образом, остаётся только одна группа 0–1 переменных. Такие задачи линейного частично–целочисленного программирования можно решать точно коммерческим программным обеспечением.

Пусть семейство $\mathcal{F}$ содержит все возможные решения Конкурента и для этого семейства удалось точно решить сформулированную задачу. Интуитивно ясно, что многие из элементов семейства $\mathcal{F}$ будут порождать несущественные ограничения. Семейство можно сузить без изменения оптимума. Вычисление такого подсемейства представляется сложной проблемой. Одним из путей ее решения, а заодно и точным решением исходной задачи может служить следующий итеративный процесс.

Пусть $\mathcal{F}$ — непустое семейство решений Конкурента и $x(\mathcal{F})$ — оптимальное решение задачи Лидера при данном семействе. Тогда величина $W(\mathcal{F})$ задает верхнюю оценку оптимума исходной задачи двухуровневого программирования, а оптимальное решение $y(\mathcal{F})$ задачи Конкурента для решения $x(\mathcal{F})$ определяет нижнюю оценку оптимума. Обозначим эту нижнюю оценку через $LB(\mathcal{F})$. Поиск оптимума и требуемого подсемейства можно получить следующим методом:

<u>Точный метод</u>

1. Выбрать начальное семейство $\mathcal{F}$.
2. Найти $W(\mathcal{F})$ и $x(\mathcal{F})$.
3. Решить задачу Конкурента и вычислить $LB(\mathcal{F})$.
4. Если $W(\mathcal{F}) = LB(\mathcal{F})$, то STOP.
5. Добавить $y(\mathcal{F})$ в семейство $\mathcal{F}$ и вернуться на шаг 2.

Из конечности множества допустимых решений задачи Конкурента следует конечность метода. Единственная возможность не получить точное решение состоит в зацикливании, когда добавление на шаге 5 решения $y(\mathcal{F})$ к семейству $\mathcal{F}$ не меняет само семейство, решение $y(\mathcal{F})$ уже принадлежало семейству. Но тогда $W(\mathcal{F})$ не может быть больше $LB(\mathcal{F})$, как следует из первой группы ограничений задачи поиска $W(\mathcal{F})$. Значит, $LB(\mathcal{F}) = W(\mathcal{F})$ и метод останавливается, получив оптимум $W^* = W(\mathcal{F})$.

На шаге 2 требуется вычислить $W(\mathcal{F})$, что при большом семействе может потребовать значительных вычислительных усилий. Если $n \leq 30$, то итерации проходят быстро, семейство оказывается небольшим и удается найти точное решение. При больших размерностях требуется модификация метода. В [1] предлагается сначала найти метаэвристиками оптимум W^*, ввести дополнительное ограничение $W \geq W^* + 1$, и заменить оптимизационную задачу на задачу поиска допустимого решения. Такая модификация позволяет точно решать задачи при $p = r \leq 5, n = m \leq 100$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08–07–00037) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.В. Точный и приближенные алгоритмы для конкурентной задачи об (r, p)-центроиде // Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: материалы конференции (см. данный выпуск).

2. Давыдов И.А. Вероятностный поиск с запретами для задачи об (r, p)-центроиде // Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: материалы конференции (см. данный выпуск).

3. Кочетов Ю.А., Кочетова Н.А. Стратегия коротких медиан для задачи об (r, p)-центроиде // Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: материалы конференции (см. данный выпуск).

4. Alekseeva E., Kochetova N., Kochetov Y., Plyasunov A. A hybrid memetic algorithm for the competitive p-median problem // Proceedings of INCOM 2009, Moscow, June 3-5, 2009. (in press)

5. Benati S., Laporte G. Tabu search algorithms for the $(r|X_p)$-medianoid and $(r|p)$-centroid problems // Location Science. – 1994. – Vol. 2, N 2. – P. 193-204.

6. Bhadury J., Eiselt H.A., Jaramillo J.H. An alternating heuristic for medianoid and centroid problems in the plane // Computers and Oper. Res. – 2003. – Vol. 30. – P. 553-565.

7. Eiselt H.A., Laporte G., Thisse J.F. Competitive location models: a framework and bibliography // Transportation Science. – 1993. – Vol. 27. – P. 44-54.

8. Hakimi S.L. Locations with spatial interactions: competitive locations and games // P. B. Mirchandani, R. L. Francis (Eds.) Discrete Location Theory. – Wiley & Sons, 1990. – P. 439-478.

9. Hotelling H. Stability in competition // Economic J. – 1929. – Vol. 39. – P. 41-57.

10. Noltermeier H., Spoerhose J., Wirth H.C. Muliple voting location and single voting location on trees // European J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 181. – P. 654-667.

11. Plastria F., Vanhaverbeke L. Discrete models for competitive location with foresight // Computers and Oper. Res. – 2008. – Vol. 35, N 3. – P. 683-700.

12. Rodriguez C.M.C., Perez J.A.M. Multiple voting location problems // European J. Oper. Res. – 2008. – Vol. 191, N 2. – P. 437-453.

13. Spoerhose J., Wirth H.C. (r, p)-Centroid problems on paths and trees. – Tech. Report 441, Inst. Comp. Science, University of Würzburg, 2008.

14. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Competitive/p_med_comp_eng.html.

Кочетов Юрий Андреевич,
Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383) 363-46-90, факс (8-383) 333-25-98.
E-mail: jkochet@math.nsc.ru

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ДВУХМЕРНЫХ КОНТЕЙНЕРОВ: КРАТКИЙ ОБЗОР И ПРИЛОЖЕНИЯ

Э.А. Мухачева

Принято рассматривать следующую задачу упаковки (Packing Problem, **PP**): имеются малые элементы, их необходимо разместить без взаимного перекрытия внутри больших объектов так, чтобы заданная целевая функция достигла оптимума. В категории "задач раскроя и упаковки" содержится множество прикладных проблем, которые изучаются с давних пор. В приложениях ее чаще называют задачей размещения (Allocation Problem, AP). Проблема размещения контейнеров принадлежит классу «задач раскроя и упаковки» (Cutting and Packing Problem, CPP), в котором содержится много теоретически не решенных проблем и интересных приложений. Большая часть таких задач являются NP-трудными комбинаторными проблемами, и для них не известны точные методы решения полиномиальной сложности. Здесь рассматриваются задачи негильотинного и гильотинного размещения прямоугольных предметов в ограниченной или неограниченной области. Для приближенного решения задач AP используют алгоритмы локального поиска, сводящиеся к применению метаэвристик с декодированием упаковки на каждой итерации. В качестве основной будем рассматривать задачу упаковки прямоугольников в полосу (Strip Packing Problem, 2DSPP). Один из размеров полосы задан и равен W, а другой является переменным. Требуется найти ортогональное размещение прямоугольников в полосу минимальной длины L. Нас будут интересовать способы кодирования упаковки и алгоритмы декодирования упаковки, заданной кодом.

Прямая схема кодирования. Зададим положение каждого прямоугольника P_i, $i = \overline{1,m}$ вектором (x_i, y_i) с минимальными координатами. Последовательность векторов представляет прямую схему кодирования упаковки. Область решений такой кодировочной схемы — бесконечное множество. Поиск подмножества $\{x, y\}$ без взаимного перекрытия прямоугольников представляет нетривиальную проблему. Однако, если прямая схема кодирования обеспечивает неперекрытие прямоугольников, то восстановить упаковку по ней не представляет труда.

Кодирование перестановкой прямоугольников. Наиболее популярную схему кодирования представляет список $\pi = \{1(\pi), 2(\pi), \ldots, i(\pi), \ldots, m(\pi)\}$, $\{i\}$ – номер прямоугольника, занимающего в π позицию i. С помощью того или иного алгоритма размещения (декодера) вычисляют координаты (x_i, y_i) прямоугольника и строят эскиз упаковки. Её длина зависит от перестановки π и от используемого декодера. Каждому списку π соответствует несколько различных упаковок.

Кодирование парой последовательностей. Известна схема кодирования, названная парой последовательностей (Sequence Pair, SP). Для представления решения используется пара перестановок σ_+ и σ_- из m прямоугольников. А именно, устанавливают относительные положения для каждой пары i и j прямоугольников: если i располагается перед j в обеих перестановках, следует разместить i левее j. Если i располагается перед j в σ_+ и после j в σ_-, то i помещаем выше j. Например, для пары последовательностей $\sigma_+ = (6, 3, 1, 4, 5, 2)$ и $\sigma_- = (1, 2, 3, 4, 6, 5)$, имеем: прямоугольник P_1 расположен перед P_4 в обеих перестановках, следовательно, P_1 левее P_4; прямоугольник P_4 располагается перед P_2 в σ_+ и после P_2 в σ_-, и, следовательно, P_4 выше, чем P_2 и так далее. Дальнейшее развитие этого метода приведено в диссертации S. Imahori [15].

Кодирование блок-структурами. Пусть имеется прямоугольная упаковка (Rectangular Packing, RP). Проведем пунктиром через правые стороны прямоугольников вертикальные линии. Они разбивают RP на r вертикальных блоков одной и той же ширины W и различной длины χ_j. Пусть длина RP равна L. Проведем теперь через верхние стороны прямоугольников горизонтальные линии. Тогда RP разобьется на горизонтальные блоки одной и той же длины L и различной ширины η_j, причем $\sum\limits_j n_j \leq W$. Так мы получаем две блок-структуры (Block Structure, BS), вертикальную и горизонтальную.

Например, приведенной выше паре последовательностей σ_+ и σ_- отвечают блок-структуры:

$$\begin{aligned} S &= \{(6,3,1)\chi_1, (6,1)\chi_2, (6,4,2)\chi_3, (5,2)\chi_4\}; \\ \tilde{S} &= \{(1,2)\eta_1, (1,4,5)\eta_2, (3,4,5)\eta_3, (3,5)\eta_4, (6,5)\eta_5, (6)\eta_6\}. \end{aligned}$$

Применяя алгоритм-декодер к коду, получают схему упаковки. В Европе наибольшую популярность получил декодер нижний-левый (Bottom-Left, BL). Основная стратегия BL состоит в упаковке следующего элемента из перестановки π в самую нижнюю возможную позицию, выравнивая по левому краю. Компьютерная реализация алгоритма BL сложности $O(m^2)$ была предложена B. Chazelle [13].

1. Блочная технология (Block Technology, BT)

Базовый блочный декодер. Базовым блочным декодером является эвристический алгоритм “конструирования блоков” (Block Design, BD), разработанный в рамках нового генетического блочного алгоритма [4]. Декодер преобразует перестановку π в блок-код. В качестве начального блока принимается полоса бесконечной длины. По мере упаковки прямоугольников формируются и модифицируются вертикальные блоки. Алгоритм BD, просматривая уже построенные блоки и их фрагменты, находит и заполняет очередным прямоугольником из π самую левую нижнюю свободную позицию. Авторами было замечено, что упаковки, полученные декодерами BD и BL, идентичны. Однако BL проигрывает BD в удобстве представления информации.

Усовершенствованный блочный декодер (Improved BD, IBD). Декодер IBD использует эвристические приемы, направленные на увеличение свободных зон: *сравнение* возможных потерь площади выше и ниже прямоугольника; *сдвиг* прямоугольника к ближайшему краю относительно средней линии полосы.

Декодер замещения (Substitution, Sub). Декодер отличается от BD тем, что свободные области замещаются не одним, а сразу несколькими возможными прямоугольниками из приоритетного списка π. Вычислительная сложность алгоритма $O(m \log m)$. С его помощью часто достигается лучшее решение.

Плавающий блочный декодер (Floating Block Decoder, FBD). Пусть имеется прямоугольная упаковка **RP** длины L в полосу ширины W и представлена ее вертикальная блок-структура S. Для нее $\sum_{\nu=1}^{r} \chi_\nu = L$ Каждому блоку ν поставлен в соответствие список S_ν номеров прямоугольников, пересекающих ν-ый блок, и его длина χ_ν. Нетрудно видеть, что x-координаты прямоугольников можно вычислить по формулам

$$x_{i(\nu)} = \sum_{j=1}^{\nu-1} \chi_j, \quad i(\nu) \in S_\nu^-, \ \nu = 1, 2, \dots ,$$

где S_ν^- — множество начатых в блоке ν прямоугольников. Что касается y-координаты, то она вычисляется аналогично из горизонтальной блок-структуры или с помощью детерминированных методов в рамках применяемых декодеров. В предлагаемой модификации горизонтальная блок-структура отсутствует и нет четкого закрепления y-координаты за прямоугольником. Текущая и окончательная y-координата прямоугольника могут различаться. **FBD** пытается разместить прямоугольник, следуя стратегии *"нижний-левый"*. Декодер FBD показывает высокие результаты [8].

Последовательное уточнение оценок (Sequential Value Correction, SVC). Дальнейшее развитие блочной технологии шло с применением метаэвристики, сочетающей SVC с процессом динамического перебора заготовок [5, 12]. Результаты, полученные с помощью этого алгоритма, превосходят известные нам другие эвристические методы и вполне сопоставимы с последними экспериментами на основе алгоритма GRASP [11].

Λ-окрестность допустимой упаковки RP. С 2DSPP связана следующая задача одномерного раскроя (One Dimensional Cutting Stock Problem, 1DCSP). Положим $Z = W$ — длина одномерного контейнера; $\lambda = w$ — вектор длин предметов; $\beta = l$ — вектор требуемого количества предметов (ассортиментный вектор). Требуется минимизировать количество затраченных контейнеров для размещения в них предметов. Рассмотрим задачу **1DCS** с дополнительными ограничениями:

1° В контейнер можно укладывать только различные предметы, *разнородность*;

2° Если не все предметы длины λ_i входят в контейнер, то оставшиеся размещаются в следующих за ним контейнерах, *продолженность*.

Задачу 1DCS с ограничениями 1° и 2° называют *прямоугольно-ориентированной* (Rectangular Oriented Stock Problem, ROCSP), а ее допустимое решение — прямоугольно ориентированным линейным раскроем (Rectangular Oriented Linear Cutting, ROLC) [6]. Функцией цели в задаче ROCSP является количество Λ затраченных контейнеров. Если при решении задачи ROCSP множества предметов $\{w, l\}$ с очередностью размещения, заданной списком π, применяется алгоритм "следующий подходящий" (Next Fit, NF), прямоугольно ориентированный линейный раскрой запишем как $ROLC_{NF}((\lambda, \beta), \pi)$.

Определение 1. *ROLC и ROLC' называются эквивалентными, если они различаются только перестановкой начальных элементов внутри контейнеров.*

Определение 2. *Перестановка элементов в списке π, отвечающем ROLC, называется пассивной, если применение NF к полученному списку π' приведет к эквивалентному раскрою ROLC'.*

Пусть имеется ортогональная упаковка p, отвечающий ей список $\pi(p)$ и прямоугольно ориентированный линейный раскрой $ROLC_{NF}((\lambda, \beta), \pi)$ длины Λ. Тогда построение соседнего с p решения состоит из выполнения следующих процедур:

Λ1 *Построение последовательности π', эквивалентной π*: случайный выбор блока и пары элементов в нем для их пассивной перестановки.

Λ2 *Конструирование соседнего решения*: при входных данных $(W; m; w; l)$ применяем алгоритм NF к списку π', получаем $p' = RP_{NF}((w, l), \pi')$ длины $L' \geq \Lambda$ и его блок-структуру.

Повторяя процесс построения соседних решений, получаем окрестность ортогональной упаковки p, которую будем именовать Λ-окрестностью и обозначать $\Lambda(p)$.

Λ-окрестность и локальная нижняя граница $\Lambda(p)$ были предложены А.С. Филипповой (Мухачевой) [2]. Алгоритм поиска $\Lambda(p)$ с изменением значений функции цели при решении 2DSPP развит и реализован М.А. Месягутовым [3].

Глобальная граница упаковки RP. Для оценки эффективности решения недостаточно локальной границы. Обычно для расчета глобального значения используется граница, получение которой базируется на линейном программировании. В.М. Картак предложил ее уточнение с применением горизонтальной блок-структуры. Результаты численного эксперимента показали ее превосходство в 35 классах из 50 по сравнению с традиционной границей [3].

Точные алгоритмы на базе BT. Блочная технология оказалась плодотворной и в процессе создания точного алгоритма. В.М. Картак предложил и реализовал точный матричный метод с использованием вертикальной и горизонтальной блок-структур [7]. Метод успешно применяется для решения 2DSPP с $m < 20$ различными предметами. Его аналог разработан французскими учеными [14]. Они независимо использовали ROLC, называя ее смежной задачей линейного раскроя.

2. Технология ступеней (Step Technology, ST).

Технология ступеней берет свое начало от уровневых алгоритмов, предложенных Lody, Martello и Vigo [17]. Уровневые алгоритмы выбирают пакуемые элементы согласно простой стратегии: “следующий подходящий” (Next Fit, NF), “первый подходящий” (First Fit, FF). Новый элемент упаковывается с выравниванием по левому и нижнему краю. Через правую сторону прямоугольника максимальной длины проводят вертикальную линию. Область оказывается разбитой на уровни прямоугольной формы, содержащие целиком *лестничные структуры*. Однако при применении ST неизбежными оказываются потери за счет введения уровней большой длины. Поэтому применяются дополняющие их алгоритмы. Технология удобна для проектирования гильотинного размещения и раскроя. Вместе с тем, ST обладает свойствами, которые позволяют использовать матэвристики. Лестничные структуры успешно используют в составе точного алгоритма [16]. Рассмотрим одно из приложений ST.

Размещение крупногабаритных грузов на площадях с препятствиями. Отсеки самолетов или палубы судов трудно себе представить строго прямоугольной формы. Кроме того, в них бывает установлено различного вида оборудование. Его удается интерпретировать как сформированные уровни, подбирая для них смежные лестничные структуры. Что касается боковых пустот, то они заполняются мелкими предметами.

3. Мультиметодная технология (Multi Method Technology, MMT).

Суть MMT состоит в использовании подхода комбинирования эвристик к решению задач дискретной оптимизации, предложенного И.П. Норенковым [10]. Задача разбивается на множество подзадач, последовательное рассмотрение которых дает решение исходной задачи. Для решения подзадач формулируется набор альтернативных элементарных эвристик. Задача сводится к поиску и использованию рациональной последовательности эвристик, применяемых в подзадачах. Перебор решений осуществляется с помощью эволюционного алгоритма. Главная особенность заключается в том, что аллелями служат не значения проектных параметров, а эвристики, используемые для определения этих значений. В схеме размещения определяется самая нижняя левая свободная область. Далее применяется к ней один из способов укладки. При этом выбирается прямоугольник из списка π с лучшим показателем замещения. После размещения детали она исключается из списка π и больше не рассматривается. Реализация предложенных Ю.И. Валиахметовой в статье [1] методов *дискриминации* и *форсирования* эвристик позволяет значительно улучшить результативность алгоритмов. Несмотря на то, что каждая простая эвристика осуществляет полный перебор по всем заготовкам, время расчета оказалось близким с временными затратами других алгоритмов на тех же наборах задач. Результаты экспериментов подтверждают эффективность ММТ. Приведем одно из приложений ММТ.

Задача размещения контейнеров в транспортных средствах (ТС). Эта задача рассматривалась в [9] с учетом среды транспортной логистики. Там был предложен для ее решения метод комбинирования эвристик. Предположим, что некоторое предприятие путем организации регулярных рейсов осуществляет поставки в Россию крупногабаритных грузов промышленного назначения (станки, оборудование) со склада, расположенного в Европе. Очередной рейс заключается в последовательном прохождении ТС пунктов-потребителей для доставки товаров, последним пунктом является склад разгрузки. Необходимо составить заказ на доставку рейсом, максимизирующим прибыль, которую получит предприятие от его реализации. Работа модуля расчета маршрута будет заключаться в решении задачи коммивояжера, т.е. определении порядка прохождения пунктов отгрузки, и в подсчете затрат, пропорциональных пробегу. В качестве основного звена схемы будем рассматривать *модуль размещения*. Предположим, что каждому грузу соответствует прямоугольный контейнер, имеющий длину, ширину и высоту. При этом возможны повороты контейнеров только в плоскости основания. Это позволяет представлять контейнеры в виде их двумерных проекций на основание грузового отсека в виде прямоугольной области, а всю задачу можно свести к двумерной задаче упаковки контейнеров 2DBP. Необходимо найти карту размещения контейнеров внутри ТС при выполнении *комфортности* разгрузки. Под комфортностью понимается учет порядка разгрузки ТС по маршруту его следования. То есть контейнеры нужно загрузить таким образом, чтобы не приходилось лишний раз их передвигать и менять местами при очередной частичной разгрузке. Мультиметодный эволюционный алгоритм оказался наиболее подходящим среди различных эвристик для решения этой задачи.

Таким образом, приведенные технологии предназначены для локального поиска оптимальных упаковок, они с успехом применяются при разработке точных методов, для расчета нижних границ и при решении прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валиахметова Ю.И., Филиппова А.С. Мультиметодный генетический алгоритм для решения задач ортогональной упаковки // Информационные технологии, 2007. – N 12 (136). – С. 50-57.

2. Житников В.П., Филиппова А.С. Задача прямоугольной упаковки в полубесконечную полосу: поиск решения в окрестности локальной нижней границы // Информационные технологии, 2007. – N 5. – С.55-61.

3. Картак В.М., Месягутов М.А., Мухачева Э.А., Филиппова А.С. Локальный поиск ортогональных упаковок в окрестностях с нижними границами // Автоматика и телемеханика. – 2009. – N 6.

4. Мухачева Э.А., Мухачева А.С., Чиглинцев А.В. Генетический алгоритм блочной структуры в задачах двумерной упаковки // Информационные технологии. – 1999. – N 11. — С. 13-18.

5. Мухачева Э.А., Мухачева А.С., Белов Г.Н. Метод последовательного уточнения оценок: алгоритм и численный эксперимент для задачи одномерного раскроя // Информационные технологии. -– 2000. – N 2. -– С. 13-18.
6. Мухачева Э.А., Мухачева А.С. Задача прямоугольной упаковки: методы локального поиска оптимума на базе блочных структур // — Автоматика и телемеханика. – 2004. – N 2. – С. 101-112.
7. Мухачева А.С., Валеева А.Ф., Картак В.М. Задачи двумерной упаковки в контейнеры: новые подходы к разработке методов локального поиска оптимума. – М.: Изд-во МАИ, 2004.
8. Мухачева Э.А., Назаров Д.А. Филиппова А.С. Проектирование прямоугольных упаковок с использованием декодеров блочной структуры // Автоматика и телемеханика. – 2006. – N 6. – С. 161-173.
9. Мухачева Э.А., Бухарбаева Л.Я., Филиппов Д.В., Карипов У.А. Оптимизационные проблемы транспортной логистики: оперативное размещение контейнеров при транспортировке грузов // Информационные технологии. – 2008. – N 7. – С. 17-22.
10. Норенков И.П.. Эвристики и их комбинации в генетических методах дискретной оптимизации // Информационные технологии. – 1999. – N 1. – С. 2-7.
11. Alvares-Valdes R. and all. Reactive GRASP for the strip packing problem // Comput. Oper. Res. – 2008. – Vol. 35(4). – P. 1065-1083.
12. Belov G., G. Scheithauer, E. A. Mukhacheva. One-dimensional heuristics adapted for two-dimensional rectangular strip packing // Eur. J. Oper. Res. – 2008. – Vol. 59. – P. 823-832.
13. Chazelle B. The bottom-left bin packing heuristic: An efficient implementation // IEEE Trans. on Comput. – 1983. – N 2. – P. 697-707.
14. Clautiaux F., Carlir J. and Moukrim A. A new exact method for the two-dimensional orthogonal packing // Eur. J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 183(3). – P. 1196-1211.
15. Imahori S. Studies on Local Search Algorithms for Cutting and Packing Problems. – Kyoto, Japan: Dep. Appl. Math. Physics Graduate School Inform, 2004.
16. Kenmochi M., Imamichi T., Nonobe K. Yagiura M. Nagamochi H. Exact algorithms for the two-dimensional strip packing problem with and without rotations // European Journal of Operational Research. – 2009. – Vol. 198(1). – P. 73-83
17. Lodi A., Martello S., Vigo D. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems Algorithms // INFORMS J. Comput. 11 (1999) - P. 345-357.

Мухачева Элита Александровна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 272-54-53.
E-mail: elitamuh@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

В.К. Попков

В настоящее время имеется значительное число публикаций по проблеме оптимизации и проектирования транспортных систем мегаполисов. Доклад посвящен вопросам применения теории нестационарных S-гиперсетей [1] для решения задач анализа и синтеза городских транспортных систем. Как известно S-гиперсеть является обобщением иерархических гиперсетей [2], в которых каждая вершина x представляет собой гиперсеть с множеством вершин определяемых инцидентными ей ребрами (X-гиперсеть). Структура X-гиперсети определяется связями различных вторичных сетей исходной иерархической гиперсети.

Доклад состоит из пяти разделов, в которых последовательно излагаются основные задачи анализа и синтеза различных подсистем городских транспортных сетей, а также методы их решения. Содержание доклада:

1. Структура транспортных магистралей.
   - Информационная модель транспортной сети города.
   - Подробная классификация транспортных сетей (ТС)
   - Описание математических моделей структур ТС.
   - Верификация математических моделей с эмпирическими данными по транспортным системам.
   - Формализация баз данных по уличной сети и транспортных магистралей города.
2. Транспортные потоки и их моделирование [3].
   - Описание видов и типов транспортных средств и технологий их движения.
   - Математические модели потоков основных транспортных единиц внутри города.
   - Постановка задач анализа транспортных потоков.
   - Задачи распределения (проектирования) различных городских транспортных подсистем.
   - Классификация, моделирование и оптимизация транспортных развязок.
3. Модели передвижения по городу пассажиров и товаров.
   - Математические модели пассажиро-потоков на городском транспорте.
   - Задачи анализа и оптимизации маршрутов для пассажиров на городском и личном транспорте.
   - Математические модели грузопотоков и их оптимизация.
   - Задачи организации транспортных потоков для обеспечения событийных переездов.
4. Управление транспортными системами.
   - Задачи управления потоками транспортных средств [4].

- Алгоритмы маршрутизации транспортных единиц.
- Постановка задач и методы управления потоками посредством светофоров и другими сигнальными средствами.
- Задача оптимального управления городскими транспортными системами.
- О мониторинге движения транспорта и пешеходов [5].
- Микросотовая сеть для задач управления движением транспортных единиц.

5. Математическая модель задачи размещения пунктов обслуживания транспортных средств и населения.
   - О задачах размещения бензозаправок и СТО.
   - О гаражах и других местах хранения транспортных единиц. Оптимальное размещение.
   - Задачи оптимизации размещения остановок, временных стоянок транспортных единиц.
   - Размещение мест обслуживания населения с использованием городского транспорта и другие задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попков Г.В. Применение теории гиперсетей в задачах оптимизации систем сетевой структуры // Труды ИВМ и МГ СО РАН, серия "Информатика". – Новосибирск, 2007. – Т. 7. – С. 87-92.
2. Попков В.К. Математические модели связности. – Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2006.
3. Иносэ Х., Хамада Т. Управление дорожным движением. – Москва: Транспорт, 1983.
4. Chudak F., Dos Santos Eleuterio V. The traffic equilibrium problem. – 2006.
5. Еремеев А.В., Заозерская Л.А., Колоколов А.А. Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2000. – Т. 7, N 2. – С. 22-46.

Попков Владимир Константинович,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 330-96-43, факс (383) 330-96-43.
E-mail: popkov@sscc.ru

О ПРИМЕНЕНИИ ДВОЙСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В КЛАССИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ВНУТРЕННИХ ШТРАФОВ

Л.Д. Попов

Необходимым условием сходимости метода штрафных функций, как внешних, так и внутренних (или барьерных) является неограниченный рост штрафного параметра, что приводит к известным вычислительным трудностям [1–3]. В данной работе предложены оригинальные конструкции барьерных функций, содержащие внутри себя, наряду со штрафным параметром, двойственные переменные, отвечающие за специфическое смещение ограничений исходной задачи подобно тому, как это делается в известном методе множителей [4] для внешней квадратичной функции штрафа. Как и в методе множителей, алгоритм настройки параметров смещения опирается на теорию двойственности. При этом необходимость неограниченного роста штрафного параметра отпадает.

1. Новые барьерные конструкции

Рассмотрим задачу выпуклого программирования:

$$\bar{\gamma} = \inf_{x \in X} f_0(x), \qquad \text{где} \;\; X = \{\, x \in \mathrm{R}^n : \; f_i(x) \le 0 \;\; (i = 1, \dots, m) \,\}; \tag{1}$$

здесь R^n — евклидово пространство (n-мерное) и функции $f_i : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ выпуклы и дифференцируемы, $i = 0, 1, \dots, m$.

Предположим, что задача (1) разрешима и удовлетворяет условию Слейтера. Предлагаемые модификации барьерных функций базируются на следующих двух конструкциях:

$$\Phi_0(x, u) = f_0(x) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} (u_i - f_i(x))^{-1}$$

и

$$\Psi_0(x, u) = f_0(x) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \ln(u_i - f_i(x)).$$

Наряду с постоянным штрафным коэффициентом $\tau > 0$ эти конструкции включают в себя вектор параметров $u = [u_1, \dots, u_m] \ge 0$. Формально их можно рассматривать как обычные барьерные функции для задачи (1) со специальным образом ослабленными ограничениями

$$\bar{\gamma}(u) = \inf_{x \in X(u)} f_0(x), \qquad \text{где} \;\; X(u) = \{\, x \in \mathrm{R}^n : \; f_i(x) \le u_i \;\; (i = 1, \dots, m) \,\}; \tag{2}$$

при этом вектор $u = [u_1, \dots, u_m]$ интерпретируется как вектор «смещения» правых частей ограничений исходной задачи.

При сделанных предположениях задача (2) также разрешима и регулярна, в силу чего [1] для всех неотрицательных $u \ge 0$ существуют такие $x(u)$ и $z(u)$, что

$$\Phi_0(x(u), u) = \min_x \Phi_0(x, u), \qquad \Psi_0(z(u), u) = \min_x \Psi_0(x, u).$$

Здесь и в дальнейшем минимизация идет по внутренним точкам области $X(u)$.

Дополним приведенные выше барьерные функции не зависящими от x слагаемыми:

$$\Phi(x, u) = \Phi_0(x, u) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} u_i^{-1} = f_0(x) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x)}{u_i(u_i - f_i(x))}$$

и

$$\Psi(x,u) = \Psi_0(x,u) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \ln(u_i).$$

Оказывается, верно

Утверждение 1. $\quad \bar{\gamma} = \sup\limits_{u\geq 0}\min\limits_{x} \Phi(x,u) = \sup\limits_{u\geq 0}\min\limits_{x} \Psi(x,u).$

Поясним первое равенство. Для этого сделаем в первой барьерной функции замену двойственных переменных $y_i = 1/(\tau u_i^2)$ и рассмотрим получившийся модифицированный Лагранжиан

$$\mathcal{L}(x,y) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i f_i(x)}{1-\sqrt{\tau y_i} f_i(x)} \ (= \Phi(x,u)).$$

В силу вышеизложенного по крайней мере для всех $y = [y_1,\ldots,y_m] > 0$ (но не только) существуют такие $x(y)$, что

$$\mathcal{L}(x(y),y) = \min_x \mathcal{L}(x,y) > -\infty.$$

При этом выполняется критерий оптимальности

$$\nabla_x \mathcal{L}(x,y)|_{x=x(y)} = \nabla f_0(x(y)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i \nabla f_i(x(y))}{[\,1-\sqrt{\tau\, y_i}\, f_i(x(y))\,]^2} = 0.$$

В частности, в силу соотношений Куна—Таккера для произвольного оптимального вектора $\bar{x}$ задачи (1) и отвечающего ему вектора множителей Лагранжа $\bar{y}$ имеем равенство

$$\nabla_x \mathcal{L}(\bar{x},\bar{y}) = \nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\bar{y}_i \nabla f_i(\bar{x})}{[\,1-\sqrt{\tau\, \bar{y}_i}\, f_i(\bar{x})\,]^2} = 0,$$

в силу чего $\bar{\gamma} = f_0(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x},\bar{y}) = \min\limits_x \mathcal{L}(x,\bar{y})$ и уже с учетом монотонности обратной функции

$$\bar{\mu}(y) = \min_x \mathcal{L}(x,y) \leq \mathcal{L}(\bar{x},y) = f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i f_i(\bar{x})}{1-\sqrt{\tau y_i} f_i(\bar{x})} \leq f_0(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x},\bar{y}) = \bar{\gamma}.$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Таким образом, наша центральная идея состоит в том, что решение исходной задачи (1) можно осуществить как путем поиска максимина

$$\bar{\gamma} = \sup_{u>0}\min_x \Phi(x,u),$$

т. е. точной верхней грани значений функции

$$\mu(u) = \min_x \Phi(x,u) = \min_x \Phi_0(x,u) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} u_i^{-1},$$

так и путем поиска максимина

$$\bar{\gamma} = \sup_{u>0}\min_x \Psi(x,u),$$

т. е. точной верхней грани значений функции

$$\nu(u) = \min_x \Psi(x,u) = \min_x \Psi_0(x,u) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m u_i^{-1},$$

Отметим, что перед нами задачи поиска максимина со связанными переменными.

2. Настройка двойственных переменных

Процедура настройки параметров смещения имеет итеративный характер, т. е. состоит из серии однотипных шагов (итераций). Пусть $u^0 = [u_1^0, \ldots, u_m^0] > 0$ — произвольный вектор начального смещения, t — номер итерации, принимающий последовательные значения $t = 0, 1, 2, \ldots$. Итерация с номером t начинается с того, что по текущему приближению двойственных переменных u^t ищется вектор прямых переменных x_t такой, что

$$\Upsilon(x_t, u^t) = \min_x \Upsilon(x, u^t), \tag{3}$$

где $\Upsilon(x,u)$ — одна из новых барьерных функций — $\Phi_0(x,u)$ или $\Psi_0(x,u)$. После того, как точка минимума барьерной функции найдена, компоненты текущего вектора смещения переопределяются по формуле

$$u_i^{t+1} = u_i^t - f_i(x_t) \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

Затем номер итерации увеличивается на 1 и все перечисленные операции повторяются вновь. Процесс можно прервать при достижении приемлемой точности результата.

Разберем предлагаемую схему для случая $\Upsilon = \Phi_0(x,u)$. Заметим, что условия (3) подразумевают равенства

$$\nabla_x \Phi_0(x_t, u^t) = \nabla f_0(x_t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m \frac{\nabla f_i(x_t)}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} = 0.$$

Последние, в силу выпуклости всех входящих в задачу функций и с учетом простого неравенства $1/w - 1/w_0 \geq -(w - w_0)/w_0^2$, которому функция $\phi(w) = 1/w$ удовлетворяет в силу своей выпуклости (при $w > 0$), позволяют выписать последовательность оценок:

$$\Phi_0(x,u) - \Phi_0(x_t,u^t) = f_0(x) - f_0(x_t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{u_i - f_i(x)} - \frac{1}{u_i^t - f_i(x_t)}\right] \geq$$

$$\geq \; f_0(x) - f_0(x_t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m \frac{f_i(x) - f_i(x_t) + u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} \;\geq$$

$$\geq \; \langle \nabla f_0(x_t), x - x_t\rangle \;+\; \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m \frac{\langle \nabla f_i(x_t), x - x_t\rangle}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} \;+\; \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m \frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} \;=$$

$$= \langle \nabla_x \Phi_0(x_t, u^t), x - x_t\rangle \;+\; \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m \frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} \;=\; \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^m \frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}\;;$$

здесь $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — символ скалярного произведения в R^n.

Таким образом, можно сформулировать

Утверждение 2. Для всех $u = [u_1, \dots, u_m] > 0$ верно

$$\mu(u) \geq \mu(u^t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{u_i^t} - \frac{1}{u_i}\right) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}.$$

Подберем теперь такое u, чтобы выше сумма двух последних слагаемых

$$\Delta(t,u) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{u_i^t} - \frac{1}{u_i}\right) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}\,,$$

была как можно больше. Поскольку эта сумма является строго вогнутой функцией аргумента u, то достаточно приравнять к нулю ее частные производные

$$\frac{\partial\Delta(t,u)}{\partial u_j} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{u_i^2} - \frac{1}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}\right) = 0 \qquad (i = 1, \dots, m)$$

и решить полученную систему уравнений. Очевидное решение этой системы

$$u_i = u_i^t - f_i(x_t) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

и предлагается выше взять в качестве обновленного вектора смещений u_i^{t+1}. Подчеркнем, что значения его компонент автоматически положительны и, если $u^{t+1} \neq u^t$, то

$$\Delta(t, u^{t+1}) = \max_u \Delta(t,u) > \Delta(t, u^t) = 0,$$

так что заведомо будет верно неравенство

$$\mu(u^{t+1}) > \mu(u^t).$$

Повторяя этот процесс многократно, получаем монотонно растущую последовательность значений функции $\mu(\,\cdot\,)$, при некоторых предположениях сходящуюся к оптимальному значению $\bar{\gamma}$.

3. Условия сходимости и вычислительный эксперимент

Пусть $\bar{x}$ — единственное решение задачи (1) и $I_0 = \{i : f_i(\bar{x}) = 0\}$ — множество индексов ее активных ограничений. Будем считать, что задача (1) сильно регулярна, т. е. $|\,I_0\,| = n$, причем векторы $\{\nabla f_i(\bar{x})\ (i \in I_0)\,\}$ линейно независимы и $\bar{y}_i > 0$ при всех $i \in I_0$ (условия строгой дополняющей нежесткости). Как известно [5], условие сильной регулярности задачи (1) автоматически обеспечивает и существование для нее точки Слейтера, и единственность решения $\bar{x}$ прямой задачи (1), и существование и единственность решения $\bar{y}$ двойственной к ней задачи.

Имеет место

Утверждение 3. Пусть задача (1) разрешима и сильно регулярна. Тогда при всех достаточно больших $\tau > 0$ и достаточно малых начальных векторах смещения $u^0 > 0$ процесс (3)–(4) порождает последовательности $\{x_t\}$ и $\{u^t\}$ со свойствами

$$\lim_{t\to\infty}\|x_t - \bar{x}\| = 0, \qquad \lim_{t\to\infty}\|y^t - \bar{y}\| = 0,$$

где $y^t = [y_1^t, \ldots, y_m^t]$ — вектор с компонентами $y_i^t = 1/(\tau(u_i^t)^2)$ для первой барьерной функции и $y_i^t = 1/(\tau(u_i^t))$ — для второй.

В заключение отметим, что предварительные численные эксперименты на задачах линейного программирования средней размерности показали весьма обнадеживающие результаты [6, 7].

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00399 и грантом ведущих научных школ НШ-2081.2008.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиакко А., Мак–Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972.
2. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1976.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
4. Rockafellar R.T. The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1973. – Vol. 12, N 5. – P. 555-562.
5. Эльстер К.-Х., Рейнгард Р., Шойбле М., Донат Г. Введение в нелинейное программирование. / Пер. с нем. под ред. И.И. Еремина. – М.: Наука, 1985.
6. Попов Л.Д. Об одной модификации метода барьерных логарифмических функций в линейном и выпуклом программировании // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2008. – Том 14, N 2. – С. 103-114.
7. Попов Л.Д. Схемы включения двойственных переменных в обратные барьерные функции задач линейного и выпуклого программирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Том 15, N 2. – С. 93-105.

Попов Леонид Денисович,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (3433) 75-34-23, факс (3433) 74-25-81.
E-mail: popld@imm.uran.ru

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

В.В. Сервах

В работе представлены некоторые модели планирования производственных инвестиционных проектов при следующих условиях:

- Основная цель реализации проектов – получение прибыли.
- Инвестиционные проекты носят долгосрочный или среднесрочный характер, и большинство ресурсов может быть трансформировано в финансовый ресурс, который является складируемым.
- Поступления от реализации проекта и прибыль являются случайными величинами.
- Получаемый доход реинвестируется.
- Имеется возможность использования кредитов.

Проект задается множеством работ $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ и частичным порядком их выполнения E. В момент времени t имеется капитал $K(t)$. Кроме того, предполагается возможность получения кредита с выплатой процентов по годовой ставке r. Каждая работа $j \in V$ характеризуется длительностью $p_j \in Z^+$ и потребностью в капитале $r_j(\tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots, p_j$. Через $c_j(\tau)$ обозначим объем поступлений от работы j в момент времени τ. Значение $c_j(\tau)$ случайная величина с известным распределением. Предполагается, что каждая работа выполняется непрерывно.

Пусть s_j - время начала выполнения работы j. Необходимо построить расписание выполнения работ проекта $S = \{s_j\}$ и определить размеры кредитных заимствований, при которых чистая приведенная прибыль максимальна, а возможный риск невыполнения проекта – минимален.

Задача максимизации прибыли является NP-трудной в сильном смысле даже в случае, когда проект выполняется без кредитов и получаемая прибыль не реинвестируется [1]. При этих условиях в задаче максимизируется математическое ожидание чистой приведенной прибыли (NPV). В настоящей работе исследуются различные постановки задач с учетом реинвестирования получаемой прибыли и возможности использования кредитов. Так как поступления $c_j(\tau)$ являются случайными величинами, то приходится учитывать не только прибыль, но и возможные риски. Предложены различные подходы к оценке рисков проекта. Описано, каким образом рассчитываются кредиты при заданном расписании выполнения работ. Рассмотрены методы снижения рисков за счет диверсификации вложений и синергетический эффект при совместном выполнении проектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О сложности задачи календарного планирования проектов // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2008. – Т. 8, Вып. 3. – С. 105-111.

Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: svv_usa@rambler.ru

НОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.С. Стрекаловский

1. Введение

В последние два-три десятилетия внимание специалистов по экстремальным задачам все чаще обращается к невыпуклым задачам оптимизации, в которых может существовать достаточно большое число локальных решений и стационарных (критических, скажем, в смысле условий Ферма и Лагранжа) точек, весьма далеких даже по значению целевой функции от глобального решения, так необходимого, с практической точки зрения. Выпуклые же задачи, как известно [1], обладают тем свойством, что каждое локальное решение оказывается и глобальным.

При этом на практике выпуклые задачи встречаются крайне редко, хотя в учебниках примеров выпуклых задач предостаточно. К тому же, в прикладных задачах невыпуклые структуры чаще всего присутствуют в скрытой форме. Как следствие, специалисты не всегда обращают внимание на их присутствие и природу возникновения, как, например, в задачах иерархической оптимизации и оптимального управления нелинейными системами. А без знания структуры невыпуклости трудно рассчитывать на успех. Заметим, что довольно часто невыпуклые структуры порождены выпуклыми (дополнение выпуклого множества, максимизация выпуклой функции и т.п.).

С другой стороны, прикладники часто не задумываются о корректности прямого применения классических методов оптимизации в невыпуклых задачах, а численные результаты интерпретируются лишь с содержательной стороны, забывая о том, что все классические методы оптимизации (ньютоновские, сопряженных градиентов, допустимых направлений, последовательной квадратичной аппроксимации, барьерные и т.д.) сходятся к глобальному решению только в выпуклых задачах.

В невыпуклых же задачах прямое применение стандартных методов может иметь непредсказуемые последствия [1], а порою и уводить от искомого решения.

2. Классификация

На современном этапе достаточно широким для рассмотрения представляется класс d.c. функций $DC(I\!R^n)$, представимых в виде разности двух выпуклых функций

$$f(x) = g(x) - h(x),\ x \in I\!R^n,\ g, h \in CONV(I\!R^n). \tag{1}$$

Этот класс обладает несколькими замечательными свойствами.

a) Множество $DC(I\!R^n)$ порождено хорошо изученным классом — конусом выпуклых функций и является линейным пространством.

b) $DC(I\!R^n)$ включает в себя хорошо известные классы, такие как дважды дифференцируемые функции, степенные полиномы, функции И.И. Еремина и т.д. и т.п.

c) Произвольная непрерывная функция на компакте $K \subset I\!R^n$ может быть сколь угодно точно приближена (в топологии равномерной сходимости) функцией из $DC(K)$ [2]. Как следствие, любая непрерывная задача оптимизации на компакте может быть аппроксимирована задачей оптимизации с d.c. функциями. Заметим только, что, если f является d.c. функцией, то существует бесконечное число d.c. представлений типа (1), например, в виде разности сильно выпуклых функций, что, как показывает опыт, весьма выгодно с вычислительной точки зрения [2].

3. Локальный поиск

В отличие от известных процедур типа "ветвей и границ", отсечений и т.д. , "позабывших" , как известно, современные методы выпуклой оптимизации, мы настаиваем на непременном, но "непрямом" использовании этих методов в глобальной оптимизации [2]. Так, например, для задачи d.c. минимизации

$$(\mathcal{P}) \qquad f(x) = g(x) - h(x) \downarrow \min, \; x \in D \subset I\!R^n, \tag{2}$$

где $g,\ h,\ D$ — выпуклы, базовым элементом, "кирпичом" является, на наш взгляд, решение (линеаризованной в текущей точке $x^s \in D$) выпуклой задачи

$$(\mathcal{PL}_s) \qquad g(x) - \langle \nabla h(x^s), x\rangle \downarrow \min \; x \in D. \tag{3}$$

В зависимости от выбора метода решения этой задачи ("кирпича"), глобальный поиск (все здание) может оказаться удачным или нет: "устойчивым" к выбору начального приближения или получать в лучшем случае просто допустимую точку.

Сам же локальный поиск (Local Search Procedure, LSP) может состоять, например, из последовательного (как в методе простой итерации) решения задач $(\mathcal{PL}_s)$ – (3). Зная $x^s \in D$, находим $x^{s+1} \in D$ как приближенное решение $(\mathcal{PL}_s)$. Удивительно, что процесс в этом случае сходится (по функции $f = g - h$) [2] к решению линеаризованной задачи

$$(\mathcal{PL}_*) \qquad g(x) - \langle \nabla h(x_*), x\rangle \downarrow \min \; x \in D,$$

(x_* — критическая точка относительно метода локального поиска). При дополнительных предположениях сильно выпуклого разложения $f = g - h$, можно обеспечить сходимость $x^s \to x_*$.

На небольших размерностях ($n \leq 7 - 10$) довольно часто этот метод доставляет глобальное решение, что добавляет трудностей в построении хороших ("плохих") начальных приближений для тестирования глобального поиска.

4. Глобальный поиск

Прежде всего обратим внимание на то, что начальное приближение x^0 в локальном поиске (LS) не обязательно должно быть допустимым, однако остальные итерации $x^1,\ x^2, \ldots, x^s, \ldots$ допустимы по построению.

Общая процедура глобального поиска состоит из двух частей:

a) локального поиска;

b) процедуры выхода из критической точки, основанной на условиях глобальной оптимальности (УГО, GOC)[2], с последующим включением локального поиска.

Все дело в том, что УГО обладает так называемым алгоритмическим (конструктивным) свойством, позволяющим в случае нарушения этих УГО строить допустимую точку, лучшую, чем исследуемая.

Действительно, например, для задачи $(\mathcal{P})$ – (2) УГО имеют следующий вид [2]:

$$z \in Sol(\mathcal{P}) \Rightarrow \; \forall (y, \beta) \in I\!R^n \times I\!R :$$

$$h(y) = \beta - \zeta, \; \zeta := f(z), \tag{4}$$

$$g(x) - \beta \geq \langle \nabla h(y), x - y\rangle \; \forall x \in D. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что если при некоторых $(\hat{y}, \beta)$ из (4) и $\hat{x} \in D$ (5) нарушено:

$$g(\hat{x}) < \beta + \langle \nabla h(\hat{y}), \hat{x} - \hat{y} \rangle,$$

то из выпуклости h вытекает

$$f(\hat{x}) = g(\hat{x}) - h(\hat{x}) < h(\hat{y}) + \zeta - h(\hat{y}) = f(z)$$

или $f(\hat{x}) < f(z)$. Так что $\hat{x} \in D$ "лучше" , чем z. Поэтому, перебирая в (4) "параметры возмущения" (y, β) и решая линеаризованные задачи (см. (5))

$$g(x) - \langle \nabla h(y), x \rangle \downarrow \min, \ x \in D \tag{6}$$

(где y не обязательно допустима (!!!)), получаем целое семейство начальных точек $x(y, \beta)$ для LSP. При этом на каждом уровне ζ не обязательно перебирать все (y, β) — достаточно получить нарушение (5) только для одной пары $(\hat{y}, \beta)$. После этого нужно переходить на новый уровень $z^{k+1} := \hat{x}, \ \zeta_{k+1} := f(z^{k+1})$, и начинать все сначала.

Широкое поле вычислительных экспериментов подтвердило неожиданно высокую эффективность предложенного подхода в особенности для задач высокой размерности даже в случае программных реализаций, проведенных студентами и аспирантами [3, 5-7].

5. Прикладные задачи

5.1. Биматричные игры и билинейное программирование

Биматричные игры (БМИ) являются инструментом математического моделирования конфликтов двух сторон, имеющих различные интересы и конечное множество стратегий.

Разработан новый метод поиска ситуаций равновесия по Нэшу в БМИ, основанный на вариационном подходе, заключающемся (в свою очередь) в сведении задачи поиска равновесия Нэша к некоторой билинейной задаче математического программирования [3]. Для решения последней успешно применена теория глобального поиска, позволившая решить задачи высокой размерности (до 1000×1000).

Параллельная программная версия алгоритма глобального поиска позволила получить почти линейное ускорение (в 5-6 раз на 8 процессорах)[8].

Разработанная методика решения БМИ затем была обобщена на общие задачи билинейного программирования и успешно реализована в качестве программного комплекса, эффективность которого продемонстрирована численным экспериментом [3].

5.2. Иерархические задачи оптимизации

Иерархические задачи оптимизации возникают в приложениях (экономических, технических, управленческих и т.д. и т.п.) и характеризуются определенной самостоятельностью нижних уровней. При этом на каждом из уровней могут присутствовать не только оптимизация, но и поиски равновесий. Чаще всего, переменные разных уровней обычно связаны посредством целевых функций и/или допустимых множеств, например,

$$f(x,y) \downarrow \min_x,$$

$$(x,y) \in X \stackrel{\triangle}{=} \{(x,y) | f_i(x,y) \le 0, i = 1, \ldots, p\}$$

$$y \in Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} Arg \min_y \{g(x,y) | y \in Y(x)\},$$

$$Y(x) = \{y \in I\!R^n | Ax + By \le b\}.$$

Для простых классов подобных задач (линейно-линейных и квадратично-линейных) разработан вариационный подход, выявляющий скрытую невыпуклость, с последующим применением соответствующих методов локального и глобального поиска. Численные эксперименты доказали высокую сравнительную эффективность предложенных процедур.

5.3. Линейная задача дополнительности

Подобным же подходом была решена известная задача дополнительности: найти (x, w), такие что $Mx + q = w$, $\langle x, w \rangle = 0$, $x \ge 0$, $w \ge 0$, $x, w \in I\!R^n$, где M не обязательно знакоопределенная матрица. К подобным задачам сводятся многие прикладные задачи, например, задача рыночного равновесия, задача об оптимальном постоянном капитале и т.д.

Результаты тестирования алгоритма глобального поиска демонстрируют эффективность предложенной методики на достаточно широком поле тестовых примеров со знаконеопределенной матрицей M высокой размерности до 400.

5.4. Задачи финансовой и медицинской диагностики

Подобные задачи весьма распространены в приложениях и часто трактуются как задачи обобщенной отделимости [7]. Например, если два множества точек $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ характеризуются матрицами $\mathcal{A} = [a^1, \ldots, a^M]$, $B = [b^1, \ldots, b^N]$, $a^j, b^j \in I\!R^n$, то задачу о полиэдральной отделимости можно свести к минимизации невыпуклой недифференцируемой функции ошибки

$$F(V, \Gamma) = F_1(V, \Gamma) + F_2(V, \Gamma), \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1(V,\Gamma) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \max\{0, \max_{1 \le p \le P} (\langle a^i, v^p \rangle - \gamma_p + 1)\}, \\ F_2(V,\Gamma) &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \max\{0; \min_{1 \le p \le P} (-\langle b^j, v^p \rangle + \gamma_p + 1)\}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Обобщение теории глобального поиска на негладкий случай позволило разработать программный комплекс по решению негладких задач d.c. минимизации, доказавший свою эффективность на серии тестовых примеров высокой размерности из литературы.

6. Оптимальное управление (ОУ)

С учетом вышесказанного, локальный поиск в достаточно общей задаче невыпуклого оптимального управления:

$$(\mathcal{P}1): \qquad J(u) \downarrow \min_u, \ u \in \mathcal{U}, \tag{9}$$

$$J(u) = g_1(x(t_1)) - h_1(x(t_1)) + \int_T [g(x(t),t) - h(x(t),t) + f(u(t),t)]dt, \tag{10}$$

$$\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L^r_\infty(T) \mid u(t) \in U \subset I\!R^r \ \forall t \in T\},$$

функции $g_1(x), h_1(x)$ и $x \to g(x,t), h(x,t), t \in T$ выпуклы и дифференцируемы, над, скажем, линейной системой управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(u(t),t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{11}$$

представляется достаточно очевидным [4,5]. Необходимо на каждой итерации решать выпуклую (линеаризованную) задачу ОУ:

$$I_s(u) \downarrow \min_u, \ u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{12}$$

$$I_s(u) := g_1(x(t_1)) - \langle \nabla h_1(x^s(t_1)), x(t_1)\rangle + \int_T [g(x(t),t) - \langle \nabla h(x^s(t),t), x(t)\rangle + f(u(t),t)]dt.$$

Для задачи (9)−(11) доказаны УГО, на основе которых разработаны и процедуры глобального поиска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации – М.: Факториал-пресс, 2002.
2. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003.
3. Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Биматричные игры и билинейное программирование. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2007.
4. Стрекаловский А.С. Задачи оптимального управления с терминальными функционалами, представимыми в виде разности двух выпуклых функций // ЖВМ и МФ. – 2007. – Т. 47, N 11. – С. 1865-1879.
5. Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. Глобальный поиск в задаче оптимального управления с целевым терминальным функционалом, представленным разностью двух выпуклых функций // ЖВМ и МФ. – 2008. – Т. 48, N 7. – С. 1187-1201.
6. Strekalovsky A.S., Orlov A.V. A new approach to nonconvex optimization // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8, N 2. – С. 11-27.
7. Васильев И.Л., Климентова К.Б., Орлов А.В. Параллельный глобальный поиск равновесных ситуаций в биматричных играх // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8, N 2 – С. 84-94.

Стрекаловский Александр Сергеевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 45-30-31, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: strekal@icc.ru

РАВНОВЕСНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И МЕТОДЫ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

О.В. Хамисов

В докладе исследуется задача равновесного программирования в постановке А.С. Антипина [1, 2].

Пусть Ω - некоторое множество из R^n, задана функция $\Phi(v, w)$, определенная на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$. Зафиксируем $v \in \Omega$ и рассмотрим задачу математического программирования

$$\Phi(v, w) \to \min, \tag{1}$$

$$w \in \Omega. \tag{2}$$

Обозначим через $W(v)$ множество (возможно, пустое) оптимальных решений задачи (1)-(2):

$$W(v) = \mathrm{Argmin}\{\Phi(v, w) : w \in \Omega\}.$$

Решение задачи (1)-(2) определяет точечно-множественное (или многозначное) отображение $v \to W(v)$. Поскольку множество $W(v)$ есть множество точек минимума задачи (1)-(2), такое отображение называют экстремальным.

Задача равновесного программирования формулируется следующим образом: *найти неподвижную точку точечно-множественного отображения $v \to W(v)$ или установить, что такой точки не существует.*

Другими словами, требуется найти вектор $v^* \in \Omega$ такой, что

$$v^* \in W(v^*), \tag{3}$$

или доказать, что в множестве Ω такой точки не существует. Возвращаясь к обозначениям (1)-(2), задачу равновесного программирования можно переписать следующим образом: найти $v^* \in \Omega$:

$$v^* \in \mathrm{Argmin}\{\Phi(v^*, w) : w \in \Omega\}. \tag{4}$$

Основываясь на теореме Какутани, можно определить стандартные условия, при которых задача равновесного программирования имеет решение.

Предположение S1. Ω - *выпуклое компактное множество.*

Предположение S2. *Функция $\Phi(v, w)$ непрерывна и квазивыпукла по w при каждом v.*

Предположение S3. *Функция $\Phi(v, w)$ непрерывна на диагонали квадрата $\Omega \times \Omega$ (т.е. $\Phi(v, v)$ есть непрерывная на Ω функция).*

При выполнении этих условий в силу теоремы Какутани существует неподвижная точка экстремального отображения (3) и задача равновесного программирования (4) имеет решение.

Во многих случаях, имеющих прикладной интерес, выше приведенные условия не выполняются и гарантировать существование равновесного решения нельзя. В докладе предлагается методика решения задачи (4) без учета условий S1-S3. Данная методика основана на понятии нормализованной функции, введенной в [4].

Введем функцию

$$\Psi(v, w) = \Phi(v, w) - \Phi(v, v), \tag{5}$$

тогда задачу (4) можно переопределить следующим образом: найти вектор $v^* \in \Omega$ такой, что

$$\Psi(v^*, w) \geq 0 \; \forall w \in \Omega. \tag{6}$$

Тогда задачу равновесного программирования можно переформулировать следующим образом. Требуется найти оптимальное решение задачи математического программирования

$$\Theta(v) \to \max, \tag{7}$$

$$v \in \Omega, \tag{8}$$

где $\Theta(v)$ есть функция оптимального значения (иногда ее еще называют функцией параметрического оптимума) задачи параметрической оптимизации

$$\Psi(v, w) \to \min, \tag{9}$$

$$w \in \Omega, \tag{10}$$

т.е.

$$\Theta(v) = \inf\{\Psi(v, w) : w \in \Omega\}. \tag{11}$$

Таким образом, задача равновесного программирования сводится к задаче оптимизации (11), но в отличие от последней, целевая функция в (9),(10) задана неявно.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет верхнюю и нижнюю опорные функции в точке $y \in X$, если существуют функции $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, непрерывные по x и удовлетворяющие условиям*

1. $\varphi(x, y) \le f(x) \le \psi(x, y) \ \ \forall x \in X,$

2. $\varphi(y, y) = f(y) = \psi(y, y).$

Функцию $\psi(x, y)$ будем называть верхней опорной функцией функции $f(x)$ в точке y, а функцию $\varphi(x, y)$ - нижней опорной функцией функции $f(x)$ в точке y.

В том случае, когда $f(x)$ имеет верхнюю и нижнюю опорные функции в любой точке множества X, будем говорить, что функция $f(x)$ имеет верхнюю и нижнюю опорные функции на множестве X. Из Определения 1 следует, что функция $f(x)$, имеющая верхнюю и нижнюю опорные функции на X, представима в виде

$$f(x) = \max\{\varphi(x, y) : y \in X\} = \min\{\psi(x, y) : y \in X\}. \tag{12}$$

Представление целевой функции в виде нижней или верхней огибающей некоторого семейства вспомогательных функций (12) позволяет использовать свойства именно опорных функций, сама же целевая функция этими свойствами может и не обладать.

Перейдем теперь к решению задачи равновесного программирования. Будем предполагать, что функция $\Psi(v, w)$ непрерывна по w при каждом фиксированном v и множество Ω компактно. В силу сделанных предположений оптимальное решение задачи (11) всегда существует, а сама функция $\Theta(v)$ будет конечной полунепрерывной сверху функцией. Обозначим через Θ^* максимальное значение целевой функции, а через v^* – точку глобального максимума в задаче (7),(8). Если $\Theta^* = 0$, то v^* есть решение задачи равновесного программирования, если $\Theta^* < 0$, то задача равновесного программирования решения не имеет (случай $\Theta^* > 0$ невозможен).

Пусть задана произвольная точка $\overline{v} \in \Omega$. Обозначим через $\overline{w}$ глобальный минимум задачи

$$\Psi(\overline{v}, w) \to \min,$$

$$w \in \Omega.$$

Тогда

$$\Theta(\overline{v}) = \Psi(\overline{v}, \overline{w}), \tag{13}$$

и

$$\Theta(v) \leq \Psi(v, \overline{w}) \ \ \forall v \in \Omega. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $\Psi(v, \overline{w})$ - верхняя опорная в точке $\overline{v}$ функция функции $\Theta(v)$. Существование верхней опорной функции позволяет адаптировать к решению задачи (7),(8) методы глобальной оптимизации [5]. Поскольку в данном случае функция $\Theta(v)$ задана неявно, то построение верхней опорной функции в заданной точке связано с решением задачи вида (9),(10). В связи с этим процедура глобальной оптимизации имеет следующий вид.

EQUIGLOBAL: ПРОЦЕДУРА НАХОЖДЕНИЯ РАВНОВЕСНОГО РЕШЕНИЯ.

GE0. Задать стартовую точку $v^0 \in \Omega$. Установить $k = 0$.

GE1. Решить задачу

$$\Psi(v^k, w) \to \min, \tag{15}$$

$$w \in \Omega. \tag{16}$$

Пусть w^k - глобальный минимум задачи (15),(16). Если $\Psi(v^k, w^k) = 0$, то стоп: v^k есть точка равновесия.

GE3. Решить задачу

$$\min_{0 \leq j \leq k} \{\Psi(v, w^j)\} \to \max, \tag{17}$$

$$v \in \Omega. \tag{18}$$

Пусть v^{k+1} - глобальный минимум задачи (17),(18), Ψ_k - соответствующее оптимальное значение, т.е. $\Psi_k = \min_{0 \leq j \leq k}\{\Psi(v^{k+1}, w^j)\}$. Если $\Psi_k < 0$, то стоп: точки равновесия не существует.

GE4. Установить $k = k + 1$ и перейти на шаг GE1.

Преимуществом данной процедуры является то, что она либо найдет равновесное решение, либо установит, что равновесного решения не существует.

В докладе исследуются вопросы сходимости процедуры EQUIGLOBAL к глобальному решению, приводится сравнение с алгоритмами, разработанными в [3]. Используются, также, нижние опорные функции для ускорения получения локального решения.

Рассматриваются тестовые примеры нахождение равновесия по Нэшу в задачах, не удовлетворяющих условиям S1-S3. На примере биматричной игры иллюстрируется применение нормализованной функции, с помощью которой задача нахождения равновесия в смешанных стратегиях для биматричной игры сводится к задаче минимизации вогнутой, неявно заданной функции на выпуклом многограннике.

В качестве приложения в докладе исследуются проблемы, связанные с моделированием рынка электроэнергии (energy only market). Рассматривается поведение энергокомпаний в рамках модели Курно с учетом возможного ввода новых мощностей. Показано, что равновесных по Нэшу решений может быть несколько. Проводится сравнение с рынком совершенной конкуренции, который моделируется в виде задачи обратной оптимизации. Приводятся результаты численных расчетов.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00306-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А.С. Равновесное программирование: проксимальные методы. // ЖВМ и МФ. – 1997. – Т. 37, N 11. – С. 1327-1339.
2. Антипин А.С. Равновесное программирование: методы градиентного типа // Автоматика и Телемеханика. – 1997. – N 8. – С. 125-137.
3. Антипин А.С. Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном программировании. – Москва: ВЦ РАН, 2002. – 131 с.
4. Nikaido H., Isoda K. A Note on Noncoopearative Convex Games // Pacific Journal of Mathematics. – 1955. – Vol. 5, suppl. I. – P. 807-815.
5. Зоркальцев В.И., Хамисов О.В. Равновесные модели в экономике и энергетике. – Новосибирск: Наука, 2006. – 221 с.

Хамисов Олег Валерьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 42-84-39, факс (3952) 42-67-96.
E-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С КОМИТЕТНОЙ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ ОТДЕЛИМОСТЬЮ

М.Ю. Хачай

Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC), рассмотрению модификаций которой посвящено настоящее сообщение, возникает на стадии обучения распознаванию образов в классе комитетных кусочно-линейных решающих правил. Фактически, задача MASC является одновременно частным случаем двух известных NP-трудных задач: задачи обучения простейшего персептрона и задачи оптимальной полиэдральной отделимости конечных множеств. Следуя традиционному подходу к анализу труднорешаемых комбинаторных задач, представляется актуальным изучение вычислительной и аппроксимационной сложности как задачи MASC в общем случае, так и ее отдельных подклассов, важных с точки зрения приложений.

Известно [1], что задача MASC NP-трудна и плохо аппроксимируема [2] в общем случае. Известно также, что задача остается труднорешаемой, будучи сформулированной в пространстве произвольной фиксированной размерности $n > 1$. Тем не менее, все известные доказательства труднорешаемости существенно опирались на рассмотрение специально сконструированных вырожденных случаев задачи. Естественно, возникает вопрос, сохранит ли задача MASC свойство труднорешаемости, если подобные частные случаи явно будут исключены из рассмотрения. Для этого достаточно потребовать, чтобы конечное подмножество n-мерного числового пространства, определяющее условие задачи MASC находилось в *общем положении*, т.е. каждое его подмножество из не более чем $n+1$ элемента являлось аффинно независимым.

До недавнего времени, поставленный выше вопрос оставался открытым. Кроме того, открытым оставался вопрос сокращения разрыва между известной [2] нижней оценкой порога $O(\log\log\log m)$ эффективной аппроксимируемости задачи и оценкой точности $O(m)$ лучшего известного [3] полиномиального приближенного алгоритма (здесь m — мощность конечного множества, определяющего условие задачи MASC). В данном сообщении приводятся ответы на оба вопроса. В частности,

1) показывается, что задача MASC, сформулированная в пространстве произвольной фиксированной размерности $n > 1$, остается NP-трудной даже при дополнительном ограничении общности положения разделяемых множеств;

2) предлагается новый полиномиальный приближенный алгоритм, обладающий при некотором естественном допущении точностью $O(\log m)$.

Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, и $\mathbb{N}$ — множества вещественных, рациональных, целых и натуральных чисел, соответственно. Пусть $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, и $\mathbb{Z}^n$ обозначают соответствующие n-мерные векторные пространства, а $\mathbb{N}_m = \{1,\ldots,m\}$. Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида $f(x) = c^T x - d$, где $c \in \mathbb{Q}^n$, $d \in \mathbb{Q}$, называется *аффинной функцией* (с рациональными коэффициентами).

Определение 1. Пусть $f_1,\ldots,f_q$ — аффинные функции, и A, B — конечные подмножества $\mathbb{R}^n$. Конечная последовательность $Q = (f_1,\ldots,f_q)$ называется *аффинным комитетом, разделяющим A и B*, если

$$|\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(a) > 0\}| > \frac{q}{2} \quad (a \in A), \quad |\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(b) < 0\}| > \frac{q}{2} \quad (b \in B).$$

Число q называется *числом элементов* комитета Q, а множества A и B — *разделимыми* этим комитетом.

Согласно критерию Мазурова [4], множества A и B разделимы аффинным комитетом тогда и только тогда, когда $A \cap B = \emptyset$. Тем не менее, по ряду причин, актуальной является задача поиска комитетов с наименьшим возможным (для заданных множеств) числом элементов называемых *минимальными комитетами*.

Задача 1 (Минимальный аффинный комитет (MASC))**.** Заданы конечные множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. Требуется найти аффинный комитет Q с минимальным числом элементов q, разделяющий множества A и B.

Задача MASC тесно связана с задачей обучения простейшего 2-слойного персептрона, первый слой которого состоит из q входных нейронов, а второй — из одного выходного (с номером $q+1$). Функция активации i-го нейрона имеет классический вид

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_i^T x - d_i > 0, \\ -1, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $c_i \in \mathbb{Q}^n$ и d_i — рациональное число. Таким образом, персептрон реализует решающее правило $F(x|\,(c_1, d_1), \ldots, (c_{q+1}, d_{q+1})) : \mathbb{R}^n \to \{-1, 1\}$, параметризованное парами (c_i, d_i). Правило F относит вектор x к первому или второму классу, если $F(x) = 1$ или $F(x) = -1$, соответственно.

Задавшись обучающей выборкой

$$(a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2}), \quad (a_i, b_j \in \mathbb{Q}^n), \tag{2}$$

составленной из прецедентов a_i первого и b_j второго класса, опишем процедуру обучения персептрона, состоящую в настройке параметров c_i и d_i, удовлетворяющих системе неравенств $F(a_i) > 0 \quad (i \in \mathbb{N}_{m_1}), \quad F(b_j) < 0 \quad (j \in \mathbb{N}_{m_2})$. Результирующий персептрон принято называть *корректным* на выборке (2). С описанной процедурой обучения связаны следующие комбинаторные задачи.

Задача 2 (Обучение персептрона)**.** Заданы натуральное число q и выборка (2). Существует ли персептрон, корректный на выборке (2), с не более чем q входными нейронами?

Задача 3 (Оптимальный корректный персептрон (OCP))**.** Задана выборка (2). Требуется построить корректный на выборке (2) персептрон с наименьшим числом элементов.

Известно [5], что первая из перечисленных задач NP-полна и остается такой при произвольном фиксированном $q \geqslant 2$, в то время как вторая NP-трудна [6]. Легко видеть, что задача MASC является частным случаем задачи OCP, в котором параметры выходного нейрона имеют вид $c_{q+1} = [1, \ldots, 1]^T$, $d_{q+1} = 0$, что соответствует голосованию по правилу простого большинства.

В вычислительной геометрии рассматриваются задачи, связанные с построением оптимальных кусочно-линейных поверхностей для линейно неразделимых множеств. Следуя работе [7], сопоставим гиперплоскости $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = d, c \neq 0\}$ предикат $\Pi[H] : \mathbb{R}^n \to \{true, false\}$ по правилу, аналогичному (1):

$$\Pi[H](x) = \begin{cases} true, & \text{если } c^T x > d, \\ false, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть заданы конечные множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и булевская функция $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Говорят, что гиперплоскости $H_1, \ldots, H_k$ разделяют множества A и B по правилу φ, если

$$\begin{aligned} \varphi(\Pi[H_1](a), \ldots, \Pi[H_k](a)) &= \mathit{true} \quad (a \in A), \\ \varphi(\Pi[H_1](b), \ldots, \Pi[H_k](b)) &= \mathit{false} \quad (b \in B). \end{aligned}$$

Задача 4 ((k-полиэдральная отделимость при заданной булевской функции))**.** Заданы $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$ и булевская функция $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Существуют ли гиперплоскости $H_1, \ldots, H_k$, разделяющие множества A и B по правилу φ?

Теорема 1 ([7])**.** *Задача 4 NP-полна и остается таковой при произвольном фиксированном $k \geqslant 2$.*

До последнего времени открытым оставался вопрос оценки вычислительной сложности задачи, сформулированной в пространствах фиксированной размерности. Ответ на него будет дан ниже в качестве следствия результатов данной работы.

Задача MASC является частным случае оптимизационной версии задачи 4, в котором функция φ монотонна и принимает значение *true* тогда и только тогда, когда большинство ее аргументов также принимают значение *true*.

Теорема 2 ([1])**.** *Задача MASC NP-трудна и остается таковой при дополнительном ограничении $A \cup B \subset \{x \in \{0, 1, 2\}^n : \|x\|_2 \leqslant 2\}$.*

Теорема 3 ([2])**.** *Задача MASC не принадлежит классу Apx, если $P \neq NP$. Если $NP \not\subset DTIME(2^{poly(\log n)})$, то существует константа $D > 0$ такая, что для задачи MASC не существует полиномиальных приближенных алгоритмов с точностью, лучшей $D \log\log\log m$.*

В [2] рассмотрен частный случай задачи MASC, сформулированной в пространстве фиксированной размерности.

Задача 5 (Минимальный аффинный разделяющий комитет в $\mathbb{Q}^n$ (MASC(n)))**.** Для фиксированного n заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. Требуется указать комитет Q с наименьшим числом элементов, разделяющий A и B.

Известно [4], что задача MASC(n) полиномиально разрешима при $n = 1$. Для произвольного $n > 1$ задача NP-трудна [2]. Доказательство труднорешаемости получено в качестве следствия труднорешаемости задачи PASC.

Задача 6 (Планарный разделяющий комитет (PASC))**.** Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$ и натуральное число t. Существует ли аффинный комитет Q с не более чем t элементами, разделяющий A и B?

Теорема 4 ([2])**.** *Задача PASC NP-полна в сильном смысле.*

Предыдущие результаты были получены при неявном допущении о возможной вырожденности множества $A \cup B$. Аналогичные результаты могут быть получены и без него.

Определение 2. Говорят, что множество $Z \subset \mathbb{R}^n$, $|Z| > n$, находится *в общем положении* если для каждого $Z' \subseteq Z$, $|Z'| = n+1$, справедливо равенство $\dim \operatorname{aff}(Z') = n$.

Задача 7 (Планарный аффинный разделяющий комитет для множеств в общем положении (PASC-GP))**.** Заданы натуральное число t и множества $A = \{a_1, \dots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$ так, что $A \cup B$ находится в общем положении. Существует ли аффинный комитет Q из не более чем t элементов, разделяющий множества A и B?

Теорема 5. *Задача PASC-GP NP-полна в сильном смысле. Задачи MASC-GP(n) и MASC-GP NP-трудны.*

Следствие 1. *Задача k-полиэдральная отделимость с заданной формулой, сформулированная в пространстве произвольной фиксированной размерности $n > 1$ — NP-полна в сильном смысле, даже при дополнительном условии общности положения разделяемых множеств.*

Следствие 2. *Задача OCP остается NP-трудной при дополнительных ограничениях:*
1) размерность исходного пространства признаков принимает произвольное фиксированное значение $n > 1$;
2) функция активации выходного нейрона определяется формулой

$$f_{q+1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } \sum_{i=1}^{n} x_i > 0, \\ -1, & \text{\textit{в противном случае}}; \end{cases}$$

3) множество элементов обучающей выборки (2) *находится в общем положении.*

Завершающая часть сообщения посвящена описанию нового приближенного алгоритма "Greedy Committee" решения задачи MASC-GP(n), а также обоснованию оценок его точности и вычислительной сложности.

Теорема 6. *Пусть множество $Z = A \cup B \subset \mathbb{Q}^n$, $|Z| = m$, определяет условие задачи MASC-GP(n). Сложность алгоритма "Greedy Committee" не превосходит $O\left(\binom{m}{n}^3 + \Theta m\right)$, где Θ — оценка сложности решения совместной системы из не более чем m линейных неравенств над $n+1$ переменной. Гарантированная оценка точности алгоритма в общем случае составляет $O(m/n)$.*

При некотором естественном допущении, оценка точности данного алгоритма может быть существенно улучшена (при неизменной временной сложности). Для произвольных подмножеств $A' \subset A$, $B' \subset B$, назовем $Z' = A' \cup B'$ аффинно разделимым подмножеством Z, если найдутся $c \in \mathbb{R}^n$ и $d \in \mathbb{R}$ такие, что

$$c^T a > d \ (a \in A') \text{ и } c^T b < d \ (b \in B'). \tag{3}$$

Введем следующие обозначения. Через $\mathfrak{S}(Z')$ обозначим множество пар (c, d), удовлетворяющих соотношению (3), а через $\mathfrak{M}(Z)$ — множество максимальных по включению аффинно разделимых подмножеств (множества Z).

Определение 3. Конечный граф $G_Z = (\mathfrak{M}(Z), E)$ такой, что для каждого $\{Z_1', Z_2'\} \subset \mathfrak{M}(Z)$, $\{Z_1', Z_2'\} \in E \iff Z_1' \cup Z_2' = Z$, называется *графом максимальных аффинно разделимых подмножеств* множества Z.

Допущение 1. Пусть для аффинно неразделимого множества $Z = A \cup B$ найдутся: число t и такие не обязательно различные вершины $Z'_0, Z'_1, \ldots, Z'_{2t} \in \mathfrak{M}(Z)$ графа G_Z, что

$$\{Z'_{2j-1}, Z'_{2j}\} \in E \quad (j \in \mathbb{N}_t),$$

и для произвольных $(c_i, d_i) \in \mathfrak{S}(Z'_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 2t$, последовательность

$$Q = (c_0^T x - d_0, c_1^T x - d_1, \ldots, c_{2t}^T x - d_{2t})$$

является минимальным аффинным комитетом, разделяющим множества A и B.

Теорема 7. *Пусть для множества $Z = A \cup B$ справедливо допущение 1. Результат работы алгоритма 'Greedy Committee' — аффинный комитет, разделяющий множества A и B, отличающийся по числу элементов от минимального не более чем в $O(\log m)$ раз.*

Работа поддержана Фондом Президента РФ, №№ НШ-2081.2008.1 и МД-370.2008.1 и РФФИ, №07-07-00168.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачай М.Ю. О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // ДАН. – 2006. – Т. 406, N 6. – С. 742-745.
2. Khachai M.Yu. Computational and approximational complexity of combinatorial problems related to the committee polyhedral separability of finite sets // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2008. – Vol. 18, N 2. – P. 237-242.
3. Хачай М.Ю. О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете. // Таврический вестник информатики и математики. – 2006. – N 1. – С. 34-43.
4. Мазуров Вл.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания образов // Кибернетика. – 1971. – N 3. – С. 140-146.
5. Blum A.L., and Rivest R.L. Training a 3-node neural network is NP-complete // Neural Networks. – 1992. – N 5. – P. 117-127.
6. Lin J.H., and Vitter J.S. Complexity results on learning by neural nets // Machine Learning. – 1991. – N 6. – P. 211-230.
7. Megiddo N. On the complexity of polyhedral separability // Discrete and Computational Geometry. – 1988. – N 3. – P. 325-337.

Хачай Михаил Юрьевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (343) 375-35-05, факс (343) 374-25-81.
E-mail: mkhachay@imm.uran.ru

СУПЕРМОДУЛЯРНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Владимир Р. Хачатуров, Роман В. Хачатуров, Рубен В. Хачатуров

1. Введение

Работа состоит из данного введения (раздел 1) и пяти основных разделов. В разделе 2 приведены основные понятия, определения и постановки задач оптимизации. В разделе 3 рассматриваются задачи минимизации супермодулярных функций на различных типах решеток: булевы решетки, решетки с относительным дополнением (решетки разбиения, решетки векторных подпространств, геометрические решетки), решетки - прямое произведение цепей, решетки кубов. Описаны ранее полученные теоретические результаты, на основе которых решались проблемы минимизации супермодулярных функций на этих решетках. Заметим, что позднее эти результаты были распространены и на дистрибутивные решетки. Раздел 4 посвящен разработке теории максимизации супермодулярных булевых функций на решетках и установлению связи между глобальным минимумом и максимумом супермодулярных функций для основных типов решеток.

В разделе 5 описывается новый тип решёток – решётка кубов. Приводятся конкретные примеры таких функций. Обсуждаются алгоритмы оптимизации и возможности постановки и решения новых классов задач на решётках кубов.

В разделе 6 рассматривается общий подход к оптимизации на решетках с использованием атомарных решеток. Предлагается отображать атомарные решетки на соответствующие булевы решетки большей размерности, а затем решать задачи оптимизации на этих булевых решетках. Если свойства супермодулярности функций, определенных на атомарных решетках, сохраняются на булевых решетках, то для оптимизации можно использовать все теоретические результаты разделов 3–5.

Большое значение имеет разработка различных эффективных алгоритмов для решения задач большой размерности для булевых решеток. Описаны комбинаторные алгоритмы автоматизированного представления гиперкубов (булеанов) большой размерности на плоскости в виде различных проекций и диаграмм с сохранением свойств булеана, как частично упорядоченного множества его вершин. Это дает нам широкие возможности для построения различных схем просмотра элементов атомарных решеток и визуализации процесса оптимизации. В конце этого раздела приводится экспериментальная оценка вычислительных алгоритмов. Несмотря на то, что большинство решенных прикладных задач относились к классу NP-трудных, вычислительные алгоритмы продемонстрировали высокую практическую эффективность разработанных методов (можно заметить аналогию с симплекс-методом).

Таким образом, полученные теоретические результаты и большое количество решенных задач оптимизации для решеток с конкретными различными видами супермодулярных функций позволяет рассматривать методы и алгоритмы решения задач оптимизации супермодулярных функций на решетках в качестве новой области математического программирования - супермодулярного программирования.

2. Основные понятия и определения. Постановки задач оптимизации. Обзор научных результатов в этой области

Основные понятия и определения вводятся, следуя терминологии, принятой в книгах Birkhoff G. и Gratzer G [1, 2].

Частично-упорядоченное множество $\langle A \leq \rangle$ называется решеткой, если для любых $a, b \in A$ существуют $\sup\{a, b\}$ и $\inf\{a, b\}$. Решетка называется конечной, если множество A конечно. В этой работе рассматриваются только конечные решетки.

Будем говорить, что в решетке $\langle A \leq \rangle$ элемент $a \in A$ покрывает элемент $b \in A (a \succ b)$ или b покрывается $a (b \prec a)$, если $a > b$ $(a \geq b$ и $a \neq b)$ и не существует такого $x \in A$, что $a > x > b$.

Подмножество $D(a) \subset A$, где $D(a) = \{x \in A | x \succ a \text{ or } x \prec a\}$, называется окрестностью $a \in A$.

Обозначим $\sup\{a, b\} = a \vee b$, $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ и будем называть $\vee$ объединением, а $\wedge$-пересечением. $\vee$ и $\wedge$ являются бинарными операциями на решетках, отображающими A^2 в A. Поэтому решетка $\langle A \leq \rangle$ может также обозначаться $\langle A; \vee, \wedge \rangle$.

Рассмотрим функцию $f(x)$, $x \in A$, заданную на решетке $\langle A; \vee, \wedge \rangle$. Элемент $c' \in A$ называется локальным минимумом функции $f(x)$ на решетке $\langle A; \vee, \wedge \rangle$, если $f(c') \leq f(x)$ для любых $x \in D(c')$. Элемент $c \in A$ называется глобальным минимумом, если $f(c) \leq f(x)$ для любых $x \in A$.

Функция $f(x)$ называется супермодулярной, если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее неравенство:

$$f(a) + f(b) - f(a \vee b) - f(a \wedge b) \leq 0. \tag{1}$$

Если это неравенство выполняется в обратную сторону, то такая функция называется субмодулярной. Особым случаем является модулярная функция, когда неравенство превращается в равенство.

Задачи оптимизации супермодулярных функций на произвольных решетках были впервые сформулированы и исследованы в [7].

Общая постановка задач оптимизации выглядит следующим образом.

Пусть $f(x)$ — супермодулярная функция. Необходимо найти её минимум, т.е. необходимо найти такое $c \in A$, что $f(c) = \min\limits_{x \in A} f(x)$, при условии (1).

Известно, что такие задачи относятся к классу NP-трудных задач.

В случае максимизации необходимо определить такой элемент $d \in A$, что $f(d) = \max\limits_{x \in A} f(x)$, при условии (1).

Проблема определения максимума функции $f(x)$ является двойственной к проблеме определения её минимума. Lovasz в работе [6] показал, что эта задача является полиномиально разрешимой, однако не известны практически эффективные алгоритмы, основанные на подходе Lovasz. Ниже приводятся полученные нами теоретические результаты, положенные в основу вычислительных алгоритмов, оказавшихся практически эффективными при решении большого числа конкретных задач.

3. Минимизация супермодулярных функций

В этом разделе приводятся основные теоремы и вытекающие из них правила отбраковки решений, являющихся заведомо не оптимальными. Эти теоремы доказаны на единой методической основе, существенно использующей свойства супермодулярности минимизируемых функций ([3–5, 7–10, 12–14]).

4. Максимизация супермодулярных функций

В этом разделе для всех рассматриваемых решеток доказано неравенство, определяющее связь между глобальным максимумом и глобальным минимумом супермодулярных функций (аналог теоремы двойственности). Например, для булевой решетки это неравенство выглядит так: $f(d) + f(c) \leq f(I) + f(\varnothing)$, где булева решетка есть $\langle B(I); \cup, \cap \rangle$, $B(I) = \{\omega \mid \omega \subseteq I\}$, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $f(c) = \min\limits_{\omega \in I} f(\omega)$, $f(d) = \max\limits_{\omega \in I} f(\omega)$.

Приводятся основные теоремы и вытекающие из них правила отбраковки неоптимальных решений [11, 13].

5. Решетка кубов

В этом разделе описывается новый тип решёток – решётка кубов. Приводится доказательство того, что число всех суб-кубов куба размерности m равно 3^m. Показано, что множество всех таких суб-кубов при соответствующем выборе для них операций объединения и пересечения образует решётку, названную решёткой кубов. Описывается алгоритм построения такой решётки, доказано, что решётка кубов является решёткой с относительным дополнением, что позволяет решать на ней задачи минимизации и максимизации супермодулярных функций. Обсуждаются алгоритмы оптимизации и возможности постановки и решения новых классов задач на решётках кубов [15].

6. Общий подход к оптимизации на решетках с использованием атомарных решеток

Для атомарных решеток предлагается общий подход, заключающийся в отображении их на булевые решетки, как правило, большей размерности, чем исходная атомарная [7]. Здесь возникает проблема оптимизации на булевых решетках большой размерности. Для этого разработан комплекс алгоритмов представления гиперкубов (булеанов) большой размерности в виде проекций и диаграмм на плоскости. При этом возможно построение таких проекций, при которых проецируемые вершины гиперкуба не накладываются друг на друга, что позволяет осуществлять визуализацию процессов оптимизации. Перечисленные методы и алгоритмы оптимизации нашли широкое применение для конкретных моделей в экономике и технике. Экспериментальная оценка эффективности вычислительных алгоритмов, полученная в результате решения большого числа задач, представима в виде

$$N \approx km^3, \quad \frac{1}{m^2} < k < m^2,$$

где m – число атомов соответствующей булевой решетки, k – коэффициент, зависящий от конкретных параметров задачи, N – число вычислений значений $f(x)$.

Следовательно $(m+1) \leq N < m^5$.

Так, во время решения большого числа задач с $m \approx 40 \div 50$ величина N имела порядок m^3, а для задач с $m \approx 90 \div 100$ величина N имела порядок m^5 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгофф А. Теория структур. – Москва: Изд-во иностранной литературы, 1952.
2. Гретцер Г. Общая теория решеток. – Москва: Изд-во “Мир”, 1981.
3. Черенин В.П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов. – Научно-методические материалы экономико-математического семинара Лаборатории экономико-математических методов АН СССР. — М.:, Гипромез, 1962. – Вып. 2.
4. Черенин В.П., Хачатуров В.Р. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о размещении производства // Сб. “Экон. мат. методы”. – М.: Наука, 1965. – N 2. – С. 279-290.
5. Хачатуров В.Р. Аппроксимационно-комбинаторный метод и некоторые его приложения // ЖВМ и МФ. – 1974. – Т. 14, N 6. – С. 90-111.
6. Lovasz L. Submodular functions and convexity // Proceedings of the XIth Symp. Math. Program. The State of the Art. – Springer-Verlag, 1983. – P. 235-257.
7. Хачатуров В.Р. Супермодулярные функции на решетках // Проблемы приклад. матем. и информатики. — М.: Наука, 1987. – С. 251-262.
8. Хачатуров В.Р., Шахазизян А.Л. Исследование свойств и минимизации супермодулярных функций на решетке, являющейся прямым произведением цепей. – М.: ВЦ АН СССР, 1986.
9. Хачатуров В.Р., Лорер В.Е. Исследование и минимизация супермодулярных функций на атомарных решетках. – М.: ВЦ АН СССР, 1987.
10. Хачатуров В.Р. Математические методы регионального программирования. – М.: Изд-во “Наука”, Главн. редакция физ.-мат. литер., 1989.
11. Хачатуров Р.В. Алгоритмы максимизации супермодулярных функций и их применение для оптимизации группирования областей в регионе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1999. – Т. 39, N 1. – С. 33-44.
12. Хачатуров В.Р., Монтлевич В.М. Минимизация супермодулярных функций на дистрибутивных решетках. – М.: ВЦ РАН, 1999.
13. Хачатуров В.Р., Веселовский В.Е., Злотов А.В., Калдыбаев С.У., Калиев Е.Ж., Коваленко А.Г., Монтлевич В.М., Сигал И.Х., Хачатуров Р.В. Комбинаторные модели и методы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. – М.: Наука, 2000.
14. Khachaturov Vladimir R., Khachaturov Roman V., Khachaturov Ruben V. Supermodular Programming on Lattices // Computer Sciences Journal of Moldova. – 2003. – Vol. 11, N 1(31). – P. 43-72.
15. Хачатуров В.Р., Хачатуров Рубен В. Решетка кубов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – Т. 47, N 1. – С. 45-51.

Хачатуров Владимир Рубенович, Хачатуров Рубен Владимирович,
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва, 119991, Россия,
тел. (499) 135-20-09, 162-50-20, факс 135-61-59.
E-mail: vladimir.khachaturov@rambler.ru

Хачатуров Роман Владимирович,
Центральный экономико-математический институт,
пр. Мира, 81 – 237, Москва, 129085, Россия, тел. (495) 687-24-59.

НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНКУРЕНТНОЙ ЭКОНОМИКИ

В.И. Шмырев

В докладе рассматривается дальнейшее развитие общего подхода [1] к построению конечных алгоритмов отыскания равновесных состояний в линейных моделях конкурентной экономики типа классической модели обмена и некоторых её обобщений. Традиционно состояние равновесия рассматривается как баланс спроса и предложения товаров, что приводит к проблеме отыскания нулей функции избыточного спроса. Подход [1] следует принципиально иному взгляду на равновесие как точку совмещения двух векторов: вектора цен, при котором выполняется финансовый баланс закупок товаров, но не учитываются предпочтения участников, с вектором цен, при котором закупки товаров произведены в соответствии с предпочтениями участников, но без учета балансов по товарам.

Применительно к модели обмена суть подхода состоит в следующем.

Линейность целевых функций участников модели порождает разбиение симплекса цен на многогранники, задающие зоны стабильного предпочтения товаров участниками по номенклатуре. Каждой такой зоне стабильного предпочтения можно сопоставить множество векторов цен, при которых возможен сбалансированный обмен товарами в соответствии с предпочтениями участников – зону сбалансированности, которая также является некоторым многогранником. В результате возникают два полиэдральных комплекса в двойственности и точечно-множественное отображение симплекса цен в себя. Вектор равновесных цен задается точкой пересечения отвечающих друг другу многогранников, т.е. неподвижной точкой возникшего отображения. Этот новый класс задач – задачи полиэдральной комплементарности – является естественным расширением класса задач линейной комплементарности [2]. Оказалось, что в рассматриваемых случаях возникающее точечно-множественное отбражение обладает особым свойством монотонности, характерным для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений задачи (матрицы класса P) [3].

Известно иное сведение задачи отыскания равновесия в линейной модели обмена к задаче линейной комплементарности [4]. Рассматриваемый подход следует принципиально иной схеме. Он позволил предложить конечные алгоритмы отыскания равновесия для линейной модели обмена как с фиксированными, так и с переменными бюджетами [5-7]. При этом в случае модели с фиксированными бюджетами возникающие точечно-множественные отображения оказываются потенциальными и обладают определенным свойством монотонности (логарифмическая монотонность). Вследствие этого для таких моделей вопрос об отыскании равновесия сводится к задаче выпуклой оптимизации [5, 7].

Разработанные алгоритмы можно рассматривать как процедуры симплексного типа для отыскания равновесных цен. На каждом шаге процесса анализируется одна из возможных схем прикрепления товаров к участникам модели подобно тому, как в симплекс-методе на каждом шаге фигурирует некоторое базисное множество, задающее структуру возможного решения.

Предложенная схема построения алгоритмов отыскания равновесия позволяет получить конечные алгоритмы и для более общих линейных модели – обобщенная модель обмена [8, 9], специальный класс моделей производства-обмена, включающий вариант модели Эрроу-Дебре [10], дробно-линейная модель обмена [11].

В докладе предполагается подробно остановиться на алгоритме для дробно-линейной модели обмена. В этой модели равновесие в классическом определении может и не существовать, и гарантировать можно лишь существование равновесных состояний в более общем смысле (free disposal-equilibrium). Применение описанного подхода в данном случае характеризуется рядом новых отличительных особенностей. В первую очередь это касается формирования комплекса зон предпочтительности, которые теперь не ограничиваются пределами симплекса цен. Для случая фиксированных бюджетов возникающее точечно-множественное отображение уже не обладает свойством потенциальности, как это имеет место для линейных моделей обмена. Но упомянутое свойство монотонности в возникающей задаче полиэдральной комплементарности сохраняется, что и позволяет обосновать предложенную процедуру.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4113.2008.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмырев В.И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 286, N 5. – С. 1062-1066.
2. Lemke C.E. Bimatrix equilibrium points and math. programming // J. Management Sci. – 1965. – V. 11, N 7. – P. 681-689.
3. Lemke C.E. A survey of complementarity theory // Variational inequalities and complementarity problems. – John Wiley and Sons, Ltd, 1980. – P. 213-239.
4. Eaves B.C. A finite algorithm for linear exchange model // J. Math. Econ. – 1976. – V. 3, N 2. – P. 197-204.
5. Shmyrev V.I. An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models // In "Russian contributions to game theory and equilibrium theory". – Springer-Verlag. Berlin Heidelberg 2006. – P. 217-235.
6. Шмырев В.И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, N 2. – С. 163-175.
7. Шмырев В.И. Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. Математики. – 2008. – Т. XI, N 34(2). – С. 139-154.
8. Шмырёв В.И. Обобщённая линейная модель обмена // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – Июль-декабрь, 2006. – Том 13, N 2. – С. 74-102.
9. Shmyrev V.I. A generalized linear exchange model // Journal of Applied and Indusnrial Mathematics. – 2008. – V. 2, N 1. – P. 125-142.
10. Шмырев В.И. Нахождение равновесия в одном классе моделей производства-обмена // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2003. – Т. 10, N 1. – С. 65-91.
11. Шмырев В.И. Дробно-линейная модель обмена. – Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2009. – Препринт № 220. – 24 с.

Шмырев Вадим Иванович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-32, факс (383) 333-25-98.
E-mail: shvi@math.nsc.ru

МАКСИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ СЕНСОРНОЙ СЕТИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЕНСОРОВ

Т.А. Алдын-оол, А.И. Ерзин

Пусть на связной области O достаточно большой площади случайно равномерно распределено множество сенсоров M с регулируемыми радиусами мониторинга. Зона мониторинга (покрытия) сенсора представляется в форме круга радиуса R с центром в месте расположения сенсора, и пусть каждый сенсор способен поддерживать покрытие такого круга в течение времени $l(R) = 1/R^a$, где $a > 0$. Назовем *Q-покрытием* области O такое подмножество *активных* сенсоров W, что вероятность покрытия каждой точки области хотя бы одним сенсором из W не менее заданной константы $Q \in (0, 1]$. Под *временем жизни* сенсорной сети (СС) будем понимать отрезок времени, в течение которого обеспечивается Q-покрытие области. Целью работы является максимизация времени жизни СС путем выбора совокупности Q-покрытий.

Пусть $C = \{C_1, \ldots, C_d\}$, где $C_k \subseteq O$ – конечное множество *узлов*, и расстояние между двумя различными узлами $j, l \in \bigcup_k C_k$ не менее 2δ, $\delta \geq 0$. Пусть $a_{jk} = 1$, если сенсор j принадлежит δ-окрестности $J_i^k = \{l \in M | d_{il} \leq \delta\}$ некоторого узла $i \in C_k$, и $a_{jk} = 0$ в противном случае, где d_{il} – расстояние между между узлом i и сенсором l. Обозначим через $P(C_k(R))$ вероятность покрытия каждой точки области O хотя бы одним кругом радиуса R с центром в месте расположения некоторого сенсора $j \in J_i^k$. Если взять в качестве активных сенсоры из каждого множества J_i^k, $i \in C_k$, то получим Q-покрытие W_k. Пусть переменная y_k соответствует времени жизни Q-покрытия W_k. Тогда задача максимизации времени жизни СС записывается следующим образом:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{d} y_k \to \max_{y_k \geq 0, R > 0, \delta \geq 0} \tag{1}$$

$$\sum\nolimits_{k=1}^{d} a_{jk} y_k \leq l(R), \; j \in M; \tag{2}$$

$$P(C_k(R)) \geq Q, \; k = 1, \ldots, d. \tag{3}$$

Задача (1)-(3) NP-трудна [1]. Предлагается приближенный алгоритм ее решения.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-07-91300-ИНД_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Максимизация времени функционирования беспроводных сенсорных сетей // Труды XIV Байкальской межд. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 363-369.

Алдын-оол Татьяна Андреевна, Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. 8-913-001-8460.
E-mail: aldynoolt@rambler.ru

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-82.
E-mail: adilerzin@gmail.com

ЧАСТИЧНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПИСАНИЯ

Д.М. Алекберли

Задачи оптимизации расписания рассмотрены в ряде работ, например, в [1–3]. В данном сообщении рассмотрена частичная декомпозиция задачи оптимизации учебного расписания для одного случая.

1. Обозначения. Пусть $L = \{1, ..., l\}$ и $N = \{1, ..., n\}$ — соответственно множества учителей и классов, t — продолжительность расписания в академических часах (в данном сообщении предполагается, что $t = 5$). Расписание учебных занятий представлена таблицей M $l \times t$ с элементами из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$, каждая строка которой содержит два элемента множества N, в каждом столбце ненулевые элементы попарно различны. Запись «$M_{i,k} = j$» рассматривается как урок учителя i в классе j в k-й академический час, если $j \in N$, в противном случае (если $j = 0$) — как информация об отсутствии у учителя i урока в k-й час.

Элемент таблицы $M_{i,k} = 0$ будем называть *окном*, если

$$\exists k_1, k_2 : \quad 1 \leq k_1 < k < k_2 \leq t; \quad M_{i,k_1}, M_{i,k_2} \in N.$$

Набор ненулевых элементов в строке i таблицы M обозначим через ω_i, а набор ненулевых элементов в столбце k — через h_k.

2. Формулировка задачи оптимизации расписания (для частного случая). Преобразовать таблицу M к таблице M_0 $l \times t$, обладающей свойствами: (1) элементы M_0 принадлежат множеству $\{0, 1, \ldots, n\}$; (2) M_0 не содержит окон; (3) набор ненулевых элементов в строке i таблицы M_0 равен ω_i для всех $i \in L$; (4) набор ненулевых элементов в столбце k таблицы M_0 равен h_k для всех $k \in \{1, \ldots, t\}$.

3. Результат. *Задача оптимизации расписания разрешима тогда и только тогда, когда семейство* $\Omega = \{\omega_i \,|\, i \in L\}$ *допускает разбиение на подсемейства* Ω_1 *и* Ω_2, *такие, что для каждого* $q \in \{1, 2\}$ *существует таблица* M_q $l_q \times 3$ (l_q — *число наборов в* Ω_q), *обладающая свойствами:* (1) *для каждого набора* $\omega \in \Omega_q$ *в* M_q *найдется строка, в которой набор ненулевых элементов равен* ω; (2) *второй элемент в каждой строке* M_q *отличен от нуля (отсутствие окон);* (3) *в каждом столбце* M_q *ненулевые элементы попарно различны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов С.В. Геометрические методы и эффективные алгоритмы в теории расписаний // Докт. дисс. – Новосибирск, 2000.

2. Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А. Теория расписаний. Многостадийные системы. – М.: Наука, 1989.

3. Even S., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems // SIAM Journal on Computing. – 1976. – Vol. 5. – P. 691-703.

Алекберли Джалал Маратович,
Дагестанский государственный университет,
ул. Шамиля, 18а – 53, Махачкала, 367026, Россия, тел. (8722) 64-97-96.
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

ТОЧНЫЙ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ КОНКУРЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ (r,p)-ЦЕНТРОИДЕ

Е.В. Алексеева

В работе рассматривается конкурентная задача о p-медиане, известная также, как задача о (r,p)-центроиде. Два лица принимающих решение, Лидер и Конкурент, по очереди открывают p и r предприятий соответственно и стремятся захватить наибольшую долю рынка. Известно, что задача принадлежит классу Σ_2^P и является полной в этом классе [3].

Для получения нижней оценки в работе предлагаются приближенные алгоритмы, основанные на процедуре поиска с запретами, генетическом алгоритме и использующие оптимальное решение задачи Конкурента [1, 2].

Для точного решения задачи разработан итерационный метод генерации столбцов. Рассматриваемая задача записывается как задача ЦЛП с экспоненциальным числом ограничений и переменных. Метод начинает свою работу с малым числом ограничений и переменных, на каждой итерации порождаются новые и добавляются в модель. Затем с помощью коммерческого программного обеспечения полученная задача решается точно. Число итераций такого подхода зависит от добавляемых ограничений и может оказаться большим. Чтобы ускорить процесс предлагается модифицированный метод. Для этого в модель добавляется ограничение снизу на долю Лидера. На каждой итерации модифицированного метода в полученной задаче ищется допустимое решение. Требуемая доля Лидера определяется метаэвристиками.

Вычислительные эксперименты проводились на тестовых примерах из электронной библиотеки http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/english.html. Для задач размерности 100 клиентов, 100 возможных пунктов размещения и $p = r = 5$ удалось точно решить задачу.

Работа поддержана грантом РФФИ (08–07–00037) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.В., Орлов А.В. Генетический алгоритм для конкурентной задачи о p-медиане // Труды международной XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Северобайкальск, 2008. – Т. 1. – С. 570-576.
2. Alekseeva E., Kochetova N., Kochetov Y., Plyasunov A. A Hybrid Memetic Algorithm for the Competitive p-Median Problem // INCOM 2009. – Moscow, 2009. (In press).
3. Spoerhose J., Wirth H.C. (r,p)-Centroid problems on paths and trees. Tech. Report 411. – Inst. Comp. Science, University of Würzburg, 2008.

Алексеева Екатерина Вячеславовна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: ekaterina2@math.nsc.ru

О НАДЕЖНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМ ПРИ ОДНОТИПНЫХ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

М.А. Алехина

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе B_3 из всех функций, зависящих не более чем от трех переменных. Схема реализует функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Входы всех элементов схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния типа 0 (1). Неисправности типа 0 на входах элементов характеризуются тем, что поступающий на вход элемента нуль не искажается, а единица – с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$ может превратится в нуль. Неисправности типа 1 на входах элементов определяются аналогично.

Далее считаем, что базисные элементы подвержены неисправностям типа 0 на входах элементов.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S равна $\max\{P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}$ схемы S.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf\limits_S P(S)$, где S – схема, реализующая $f(\tilde{x})$. Схему A, реализующую функцию f, назовем асимптотически оптимальной по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$.

Очевидно, что константы $0, 1$ и функции x_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) в базисе B_3 при неисправностях типа 0 на входах элементов можно реализовать абсолютно надежно.

Теорема 1. *При $\varepsilon \in (0, 1/10]$ любую булеву функцию можно реализовать такой схемой A над B_3, что $P(A) \leq \varepsilon^3 + 5\varepsilon^4$.*

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$, а f – любая функция, отличная от констант $0, 1$ и функций x_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$). Тогда любая схема S, реализующая f, имеет ненадежность $P(S) \geq \varepsilon^3$.*

Из теорем 1 и 2 следует, что в базисе B_3 асимптотически оптимальные по надежности схемы для всех функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, кроме $0, 1$ и x_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$), функционируют с ненадежностью, асимптотически равной ε^3 при $\varepsilon \to 0$.

Поскольку ненадежности двойственных схем равны [1], а базис B_3 двойственнен себе, полученные результаты справедливы при неисправностях типа 1 на входах элементов рассматриваемого базиса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алехина М.А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов. – Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2006.

Алехина Марина Анатольевна,
Пензенский государственный университет,
ул. Красная, 40, Пенза, 440026, Россия, тел. (8412) 36-80-68.
E-mail: alehina@pnzgu.ru

АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В.Л. Береснев, Д.С. Иваненко

Рассматривается модель конкурентной борьбы двух фирм, оказывающих услуги одного вида [1]. Каждая из фирм размещает на множестве возможных пунктов размещения свои предприятия так, чтобы получить максимальную прибыль. Предпочтения потребителей считаются известными. Задача рассматривается в двухуровневой постановке. Требуется отыскать решение, доставляющее максимум прибыли одной из фирм (Лидеру), при условии, что Лидер открывает предприятия первым, а другая фирма (Конкурент) максимизирует свою собственную прибыль, обладая информацией о принятом Лидером решении и размешает свои предприятия в пунктах, не занятых предприятиями Лидера.

Для отыскания приближенного решения задачи предлагаются два алгоритма локального поиска. Алгоритмы отличаются друг от друга способом порождения соседних решений для текущего приближенного решения. Поскольку требование оптимальности для решения задачи нижнего уровня является необходимым для допустимости решения двухуровневой задачи, то для порождения элементов окрестности текущего приближенного решения отыскивается точное решение задачи нижнего уровня (задачи Конкурента). Для этой цели используется метод ветвей и границ с оценкой линейного программирования, реализованный в [2].

Исследуется поведение алгоритмов в зависимости от правила выбора решения в окрестности для перехода к следующей итерации. Производится сравнение качества работы алгоритмов.

Работа поддержана АВЦП Рособразования, проект № 2.1.1/3235.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л. Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. – 2008. – Т. 15, N 4. – С. 3-24.
2. GNU Linear Programming Kit. (http://www.gnu.org/software/glpk/)

Береснев Владимир Леонидович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-28-92, факс (383) 333-25-98.
E-mail: beresnev@math.nsc.ru

Иваненко Дмитрий Сергеевич,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 330-32-44, факс (383) 330-32-55.
E-mail: ivanen@math.nsc.ru

РАЗМЕЩЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.К. Богушов, А.В. Панюков

Дано конечное множество объектов S, например, множество зарегистрированных сигналов от молниевых разрядов. Для каждого $s \in S$ определено множество мест его возможного размещения $L(s) \subseteq \mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ – метрическое пространство с метрикой ρ. Рассматривается специальная задача кластер-анализа: разместить объекты множества S в минимальном числе ячеек пространства $\mathbf{M}$ диаметром не более d_0, а также определить местоположение самих ячеек.

Алгоритм L0:
Вход: S, $\{L(s):\ s \in S\}$, $\mathbf{M}$, d_0.
Выход: $\{C_i:\ i = 1, 2, \ldots, |S|\}$ – множество ячеек;
$\{x(C_i):\ i = 1, 2, \ldots, |S|\}$ – центры ячеек;
$\{x(s):\ s \in S\}$ – точки размещения элементов.
Шаг 1. Построить граф $G(d_0) = (S, E(d_0))$, где

$$E(d_0) = \{[s,t]:\ s,t \in S,\ \rho\left(L(s), L(t)\right) \le d_0\}.$$

Шаг 2. Для каждой компоненты связности K графа G выполнить шаг 3.
Шаг 3. Если K полный граф, то все его вершины и только они относятся к одной ячейке, иначе выполнить процедуру **Декомпозиция-Композиция**.
Шаг 4. Определить центр каждой ячейки

$$x(C_i) = \arg\min_{x \in \mathbf{M}} \sum_{s \in C_i} \rho(x, L(s)).$$

Шаг 5. Найти размещение каждого объекта $s \in S$

$$x(s) = \arg \min_{i:\ s \in C_i} \min_{x \in L(s)} \rho(x, x(C_i)).$$

Конец алгоритма.
Процедура **Декомпозиция-Композиция** является рекурсивной и для каждой компоненты связности находит минимальное по мощности реберное покрытие полными подграфами. Все вершины каждого из этих подграфов и только они определяют отдельную ячейку.
Вычислительная сложность алгоритма не превосходит $O(|S|^2)$.

Богушов Александр Константинович,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. им. В.И. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел. (351) 267-90-39.
E-mail: abogushov@gmail.com

Панюков Анатолий Васильевич,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. им. В.И. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел. (351) 267-90-39.
E-mail: a_panyukov@mail.ru

НОВЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ 3-РАСКРАШИВАЕМОСТИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

О.В. Бородин, А.Н. Глебов

Две известные гипотезы о 3-раскрашиваемости плоских графов состоят в том, что любой плоский граф, не содержащий циклов длины 4 и 5, является 3-раскрашиваемым (гипотеза Стейнберга, 1976), и что существует такое число $d > 0$, что любой плоский граф с минимальным расстоянием между 3-циклами не менее d является 3-раскрашиваемым (гипотеза Хавела, 1970). В 2005 г. Бородин высказал предположение о том, что любой плоский граф, в котором 3-циклы не имеют общих ребер с циклами длины 4 и 5, является 3-раскрашиваемым (новосибирская гипотеза о 3-раскраске). Ясно, что новосибирская гипотеза усиливает гипотезу Стейнберга и не вводит жестких запретов на длины циклов в графе.

Нами получены следующие результаты, объединяющие черты трех указанных гипотез и позволяющие приблизиться к решению каждой их них. Во-первых, доказано, что любой плоский граф без 5-циклов, в котором любые два 3-цикла находятся на расстоянии, не меньшем 2, является 3-раскрашиваемым. Тем самым усилен аналогичный результат для расстояния 3, ранее полученный в [1] и, независимо, в [2]. Во-вторых, доказана 3-раскрашиваемость плоских графов, в которых 3-циклы не имеют общих ребер с циклами длины от 4 до 7, что усиливает ранее полученные результаты о том, что любой плоский граф, не содержащий циклов длины от 4 до 7, является 3-раскрашиваемым [3], и что плоские графы, в которых 3-циклы не имеют общих ребер циклами длины от 4 до 9, также 3-раскрашиваемы [4]. Наконец, доказано, что если в плоском графе 5-циклы не имеют общих ребер с 3-циклами, и любые два 3-цикла находятся на расстоянии, не меньшем 4, то такой граф 3-раскрашиваем.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00516 и 09-01-00244).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин О.В., Глебов А.Н. Достаточное условие 3-раскрашиваемости плоских графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2004. – Т. 11, N 1. – С. 13-29.
2. Xu B. A 3-color theorem on plane graph without 5-circuits. Acta Mathematica Sinica. – 2007. – Vol. 23, N 6. – P. 1059-1062.
3. Borodin O.V., Glebov A.N., Raspaud A., Salavatipour M. R. Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable // JCTB 93. – 2005. – P. 303-311.
4. Borodin O.V., Glebov A.N., Jensen T.R., Raspaud A. Planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 3 to 9 are 3-colorable // Сибирские электронные математические известия (http://semr.math.nsc.ru). – 2006. – Т. 3. – С. 428-440.

Бородин Олег Вениаминович, Глебов Алексей Николаевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383) 363-45-46, факс (8-383) 333-25-98.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru, angle@math.nsc.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ И КРУГОВ НА БАЗЕ АЛГОРИТМА МУРАВЬИНОЙ КОЛОНИИ

А.Ф. Валеева, Р.И. Файзрахманов

Рассматривается задача упаковки множества предметов $I = \{z_1, .., z_n, c_1, .., c_m\}$ в полубесконечную полосу ширины W. Каждый предмет является либо прямоугольником $z \in Z = \{z_1, .., z_n\}$ с длиной l_i и шириной w_i $(i = 1, ..., n)$, либо кругом $c \in C = \{c_1, .., c_m\}$ с радиусом r_j $(j = 1, ..., m)$. Требуется разместить все предметы таким образом, чтобы длина занятой части полосы была минимальной. Для решения этой задачи разработан алгоритм на базе алгоритма муравьиной колонии P-ACO [1], основными процедурами которого являются: выбор начального фрагмента решения (прямоугольника или круга); добавление фрагмента к частично построенному решению; формирование популяции из лучших решений итерации; обновление популяции. При этом при добавлении фрагмента к решению использовалась процедура ABLP *(Adapted Best Local Position)*, предложенная в [2] и примененная для задачи размещения кругов. В рассматриваемой задаче эта процедура расширена для размещения кругов и прямоугольников. Для анализа эффективности работы алгоритма был проведен численный эксперимент на различных классах задач, сгенерированных случайным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guntsch M., Middendorf M. Applying Population Based ACO to Dynamic Optimization Problems // Institute for Applied Computer Science and Formal Description Methods, University of Karlsruhe, Germany.
2. Hifi M., M'Hallah R. Approximate algorithms for constrained circular cutting problems // Computers and Operations Research. – 2004. – Vol. 31. – P. 675–694.

Валеева Аида Фаритовна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450077, Россия.
E-mail: aida_val2004@mail.ru

Файзрахманов Ришат Илшатович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450077, Россия, тел. 8-905-354-81-19.
E-mail: rishat_faiz@mail.ru

ЧИСЛЕННЫЙ ПОИСК ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ КЛИЕНТОВ

И.Л. Васильев, К.Б. Климентова

Пусть заданы $I = \{1, \dots, m\}$ — множество предприятий; $J = \{1, \dots, n\}$ — множество клиентов; $f_i \geq 0$, $i \in I$ — затраты на открытие предприятия i; $c_{ij} \geq 0$, $i \in I$, $j \in J$ — стоимость обслуживания j клиента из i предприятия. Кроме того, для каждой пары предприятий i_1 и i_2 и для каждого клиента j задано отношение порядка. Говорят, что предприятие i_1 хуже для клиента j, чем предприятие i_2 (обозначается $i_1 <_j i_2$), если клиент j из открытых предприятий i_1 и i_2 выберет предприятие i_2. Стоит задача открыть некоторое подмножество $Q \subseteq I$ предприятий и обслужить из них всех клиентов, минимизируя суммарные затраты на открытие предприятий и обслуживание клиентов, и учитывая при этом предпочтения клиентов.

Через $S(i, j)$ обозначим множество предприятий, которые лучше для клиента j, чем предприятие i, т.е. $S(i, j) = \{k \in I \ : \ i <_j k\}$. Тогда сформулированную задачу можно записать в виде следующей задачи комбинаторной оптимизации:

$$\min_{Q \subseteq I} \sum_{j \in J} c_{q_j j} + \sum_{i \in Q} f_i, \tag{1}$$

$$q_j \in Q \ : \ S(q_j, j) \cap Q = \emptyset, \quad j \in J. \tag{2}$$

Целевая функция (1) минимизирует затраты на открытие предприятий и обслуживание клиентов, а выбор элементов q_j, $j \in J$ по правилу (2) гарантирует, что клиенты будут обслужены наиболее предпочтительным для них предприятием из списка открытых предприятий Q.

Известно [1], что такую комбинаторную задачу (1)-(2) можно представить в виде задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Для многогранника, соответствующего такой задаче ЦЛП, в [2] было предложено семейство правильных неравенств. Данное семейство неравенств было использовано для поиска оптимального решения в исследуемой задаче методом ветвей и отсечений. Кроме того, для поиска верхних оценок оптимального решения был реализован метод имитации отжига. Проведенный вычислительный эксперимент на серии тестовых примеров из [1] подтвердил эффективность предложенного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cánovas L., García S., Labbé M., Marín A. A strengthened formulation for the simple plant location problem with order // Operations Research Letters. – 2007. – Vol. 35, N. 2. – P. 141-150.
2. Васильев И.Л., Климентова К.Б., Кочетов Ю.А. Новые нижние оценки для задачи размещения с предпочтениями клиентов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, N 6. (в печати).

Васильев Игорь Леонидович, Климентова Ксения Борисовна,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 644033, Россия,
тел. (3952) 45-31-06, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: vil@icc.ru, Xenia.Klimentova@icc.ru

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О p-МЕДИАНЕ В ПРИЛОЖЕНИИ К КЛАСТЕРНОМУ АНАЛИЗУ БОЛЬШИХ МАССИВОВ ДАННЫХ

И.Л. Васильев, А.В. Ушаков

Задача кластерного анализа может быть сформулирована в виде хорошо известной задачи комбинаторной оптимизации - задачи о p-медиане [1]. Рассмотрим множество объектов, каждый из которых характеризуется некоторым числовым вектором, и граф, в котором каждой вершине сопоставлен объект. Расстояние между вершинами графа (вес дуг) определяется схожестью соответствующих объектов. Под схожестью объектов понимается расстояние между соответствующими векторами, вычисленное по определенной метрике. Таким образом, чтобы разбить исходное множество на определенное количество кластеров (скажем, p), необходимо найти p медианных вершин графа, минимизирующих сумму весов дуг до остальных вершин.

Задачи, возникающие в приложении к кластерному анализу, относятся к типу так называемых метрических задач о p-медиане, т.е. задач, в которых для весов дуг графа выполняется неравенство треугольника. Для таких задач хорошо зарекомендовали себя методы решения, основанные на релаксации Лагранжа, которые обеспечивают нахождение как верхних, так и нижних оценок целевой функции. На основе идеи релаксации Лагранжа был разработан подход позволяющий решать примеры, содержащие десятки и сотни тысяч объектов, в то время как известны результаты только для примеров с несколькими тысячами объектов. Предложенный подход состоит из трех основных компонент:

– *Лагранжева генерация столбцов*, в которой субградиентый алгоритм выполняется только на подмножестве переменных. Это подмножество динамически изменяется в ходе работы алгоритма добавлением новых переменных в зависимости от текущих оценок Лагранжа.

– Для снижения размерности разработана методика *агрегирования* переменных, при которой сохраняется структура допустимых точек.

– Агрегированная задача решается с помощью *эвристики ядра*, в которой рассматривается задача, состоящая только из переменных с лучшими оценками Лагранжа.

Эффективность предложенного подхода проиллюстрирована сравнением с известными результатами. Также представлена и обсуждается параллелизация некоторых компонент метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Avella P., Sassano A., Vasil'ev I. Computational study of large-scale p-Median problems// Mathematical Programming. – 2007. – Vol. 109. – P. 89-114.

Васильев Игорь Леонидович, Ушаков Антон Владимирович,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 644033, Россия,
тел. (3952) 45-31-06, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: vil@icc.ru, anton.v.ushakov@gmail.com

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМАХ В БАЗИСЕ ИЗ ВСЕХ ДВУХВХОДОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.В. Васин

Пусть B_2 – множество всех булевых функций, зависящих от переменных x_1, x_2. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов (ФЭ) в базисе B_2. Предполагается, что все ФЭ независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Считаем, что схема из ненадежных ФЭ реализует булеву функцию $f(\tilde{x})$ ($\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}$ при отсутствии неисправностей на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a})$. Число $P(S) = \max\limits_{\tilde{a}} P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ назовем ненадежностью схемы S, где $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ – вероятность ошибки на выходе схемы S на входном наборе $\tilde{a}$. Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$, где $P_\varepsilon(f) = \inf\limits_S P(S)$, инфинум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(\tilde{x})$.

Теорема 1[1]. *В базисе B_2 при $\varepsilon \le 1/240$ любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \le 2\varepsilon + 27\varepsilon^2$.*

Очевидно, что функции x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) можно реализовать абсолютно надежно (не используя ни одного ФЭ), а функции $\bar{x}_i$, $x_i | x_j$, $x_i \downarrow x_j$, $x_i \sim x_j$, $x_i \to x_j$, $x_i \nrightarrow x_j$, $x_i \oplus x_j$, $x_i \& x_j$, $x_i \vee x_j$ и константы 0, 1 ($i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \ne j$) – схемами с ненадежностью ε (используя один базисный ФЭ для реализации каждой из указанных функций).

Пусть $K(n)$ – множество булевых функций, зависящих от переменных x_1, x_2, ...,x_n и отличных от функций 0, 1, x_i, $\bar{x}_i$, $x_i | x_j$, $x_i \downarrow x_j$, $x_i \sim x_j$, $x_i \to x_j$, $x_i \nrightarrow x_j$, $x_i \oplus x_j$, $x_i \& x_j$, $x_i \vee x_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \ne j$). Нетрудно проверить, что $|K(n)| = 2^{2^n} - 5n^2 + 3n - 2$.

Замечание 1. *Для реализации любой функции из класса $K(n)$ схемой в базисе B_2 требуется не менее двух элементов.*

Теорема 2[1]. *Пусть $\varepsilon \le 1/4$, функция $f(\tilde{x}) \in K(n)$, и пусть S – любая схема в базисе B_2, реализующая функцию f. Тогда $P(S) \ge 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$.*

Из теорем 1 и 2 следует, что в базисе B_2 асимптотически оптимальные по надежности схемы для почти всех функций (поскольку $\frac{|K(n)|}{2^{2^n}} \to 1$ с ростом n) функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алехина М.А., Васин А.В. О надежности схем в базисах, содержащих функции не более чем трех переменных // Ученые записки казанского государственного университета. Физико-математические науки (в печати).

Васин Алексей Валерьевич,
Пензенский государственный университет,
ул. Мира, 58, Пенза, 440039, Россия, тел. (8-950) 234-75-55.
E-mail: alvarvasin@mail.ru

СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ И ОПЕРАТОРЫ СЛАБОГО ЗАМЫКАНИЯ

М.Ю. Выплов, В.П. Ильев

Допустимыми множествами большого числа задач комбинаторной оптимизации являются наследственные системы и матроиды. Предложена характеризация наследственных систем в терминах замыкания.

Пара $H = (V, \mathcal{A})$, где V — непустое конечное множество, $\mathcal{A} \subseteq 2^V$ — непустое семейство его подмножеств, называется *наследственной системой* на V, если для всех $A, A' \subseteq V$ выполняется *аксиома наследственности*:

(A1) $A \in \mathcal{A}, A' \subseteq A \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$.

Наследственная система $M = (V, \mathcal{A})$ называется *матроидом* на V, если имеет место следующая *аксиома пополнения*:

(A2) $A, A' \in \mathcal{A}, |A'| = |A| + 1 \Rightarrow \exists a \in A' \setminus A : A \cup \{a\} \in \mathcal{A}$.

Хорошо известно эквивалентное определение матроида в терминах оператора замыкания [1]. Пусть V — непустое конечное множество. Отображение $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ множества 2^V в себя называется *оператором замыкания*, если для всех $X,\ Y \subseteq V$ выполняются следующие условия:

(φ1) $X \subseteq \overline{X}$; (φ2) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$; ($\varphi$3) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Для *оператора слабого замыкания* требуется выполнение только условий (φ1) и (φ2).

Непустое конечное множество V вместе с оператором замыкания $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ называется *матроидом*, если для всех $u, v \in V$ и $X \subseteq V$ выполняется *аксиома замены:*

(φ4) $v \notin \overline{X},\ v \in \overline{X \cup \{u\}} \Rightarrow u \in \overline{X \cup \{v\}}$.

В настоящей работе установлено взаимно однозначное соответствие между наследственными системами и операторами слабого замыкания, удовлетворяющими аксиоме замены (φ4) и следующей аксиоме:

($\varphi 3'$) $\forall X \subset V\ \forall u \in \overline{X} \setminus X\ \forall v \in \overline{X \cup \{u\}} \setminus (X \cup \{u\})\ \exists w \in X : v \in \overline{X \cup \{u\} \setminus \{w\}}$.

Заметим, что при этом $v \in \overline{\overline{X}} \setminus \overline{X}$.

Тем самым получено эквивалентное определение наследственной системы в терминах замыкания: непустое конечное множество V вместе с оператором слабого замыкания $X \xrightarrow{\varphi} \overline{X}$ называется *наследственной системой*, если имеют место свойства ($\varphi 3'$) и (φ4).

Аналогичный результат (характеризация в терминах оператора слабого замыкания) получен для более широкого класса систем множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982.

Выплов Михаил Юрьевич, Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: vyplov@omsu.ru, iljev@math.omsu.omskreg.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ

Э.Х. Гимади, А.В. Шахшнейдер

Задачи маршрутизации являются основными проблемами оптимизации. Простейшую модель задачи маршрутизации (k-ЗМ) можно сформулировать следующим образом [1]. Необходимо обслужить множество клиентов посредством транспортных средств. Множество клиентов представлено вершинами полного графа. Каждого клиента разрешается обслуживать только одному транспортному средству. Каждое транспортное средство начинает свой путь из выделенной вершины (депо), посещает (обслуживает) не более k клиентов и возвращается в депо. При этом минимизируется суммарная длина маршрутов всех транспортных средств. Задача k-ЗМ является NP-трудной при $k \geq 3$ [1].

В данной работе рассматривается также задача с несколькими депо (k-ЗМ с несколькими депо) в случае ограничения на возврат в депо, с которого начался маршрут, так и без данного ограничения.

Представлены приближённые алгоритмы решения задач. В ходе вероятностного анализа получены оценки относительных погрешностей и вероятностей несрабатывания алгоритмов в случае полного графа, в котором веса рёбер являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с равномерной функцией распределения. Получены условия асимптотической точности этих алгоритмов как в случае ориентированного, так и в случае неориентированного графов.

Теорема 1. *Модификации алгоритма "Иди в ближайший непройденный город" для решения задачи k-ЗМ с несколькими депо на случайных входных данных из области* $[a_n, b_n]$, *распределеных по равномерному закону, имеют оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания* $\varepsilon_n = O\left(\frac{b_n/a_n}{n/\ln n}\right)$; $\delta_n = O(n^{-1})$, *а также алгоритмы являются асимптотически точными при* $b_n/a_n = o(n/\ln n)$;

$$k \geq \sqrt{2n/d};\ d = \begin{cases} \text{константа}, & \text{при ограничении на возврат в депо;} \\ O(\ln n), & \text{при отсутствии данного ограничения.} \end{cases}$$

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00516 и 07-07-00222.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hassin R., Rubistein S. On the complexity of the k-customer vehicle problem // Operation Research. – 2005. – Vol. 33. – P. 71-76.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 333-21-89, факс (383) 333-25-98.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Шахшнейдер Анастасия Валерьевна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (3843) 339-75-81.
E-mail: smille@ngs.ru

ПУТЕВЫЕ И ЗВЕЗДНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

А.Н. Глебов, Д.Ж. Замбалаева

Звездным лесом называется такой лес, в котором каждая компонента связности является звездой. Нами доказано, что множество вершин любого плоского графа с обхватом не менее 7 можно разбить на два подмножества, каждое из которых порождает звездный лес. Очевидна связь этого результата с понятием так называемой путевой разбиваемости. Граф называется (a, b)-*разбиваемым* для целых положительных a, b, если существует такое разбиение множества его вершин $V = V_1 \cup V_2$, что в подграфе, порожденном подмножеством V_1, длина (число вершин) наибольшей простой цепи не превосходит a, а в подграфе, порожденном V_2, — не превосходит b. Заметим, что $(3, 3)$-разбиваемость графа равносильна его разбиваемости на два звездных леса (для графов без 3-циклов). Таким образом, приведенное выше утверждение равносильно тому, что любой плоский граф с обхватом не менее 7 является $(3, 3)$-разбиваемым.

Михоком [2] было показано, что для любых фиксированных значений параметров a, b существуют плоские графы, не являющиеся (a, b)-разбиваемыми. При этом во всех примерах графов, приводимых в [2], содержится большое число циклов длины 3. Поэтому представляет интерес вопрос о том, для какого наименьшего значения $g \geq 4$ существуют такие константы a, b, что любой плоский граф с обхватом не менее g является (a, b)-разбиваемым. Из сказанного выше следует, что $g \leq 7$.

Через $\tau(G)$ обозначим длину наибольшей простой цепи в графе G. Граф G называется τ-*разбиваемым*, если для любых натуральных a, b таких, что $a + b = \tau(G)$, граф G является (a, b)-разбиваемым. В [3] высказывалась гипотеза о том, что любой граф является τ-разбиваемым. В ряде работ ее справедливость была подтверждена для некоторых специальных классов графов. Вопрос о τ-разбиваемости планарных графов специально не исследовался. В [1] нами было доказано, что любой плоский граф с обхватом не менее 5 является τ-разбиваемым.

При доказательстве обеих теорем рассматривается раскраска вершин графа в два цвета, соответствующая его (a, b)-разбиению. Для этой раскраски используется техника сводимых конфигураций, основанная на применении формулы Эйлера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00673 и 09-01-00244).

ЛИТЕРАТУРА

1. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Путевые разбиения планарных графов // Сибирские электронные математические известия (http://semr.math.nsc.ru). – 2007. – Т. 4. – С. 450-459.
2. Mihok J. Graphs, hypergraphs and matroids. Zielon Gora: Higher College Engrg., 1985.
3. Broere I., Hajnal P., Mihok P., Semanisin G. Partition problems and kernels of graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory. – 1997. – V. 17, N 2. – P. 311–313.

Глебов Алексей Николаевич, Замбалаева Долгор Жамьяновна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 333-25-94, факс (8-383-2) 333-25-98.
E-mail: angle@math.nsc.ru, dolgor@ngs.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОИСК С ЗАПРЕТАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ (r, p)-ЦЕНТРОИДЕ

И.А. Давыдов

В работе рассматривается конкурентная задача об (r, p)-центроиде [1]. На входе заданы два конечных множества — множество клиентов и множество мест для размещения предприятий. Две фирмы — Лидер и Конкурент последовательно открывают p и r предприятий соответственно. Затем каждый клиент выбирает одно из открытых предприятий согласно своим предпочтениям. Каждая фирма стремится максимизировать свою долю рынка. Задача состоит в том, чтобы найти множество из p предприятий, позволяющее максимизировать долю рынка Лидера. Данная задача является Σ_2^p-полной [1].

Для решения задачи разработан эвристический алгоритм поиска с запретами [2]. Для эффективной работы алгоритма используются вероятностные окрестности. Верхняя оценка на значения целевой функции на допустимых решениях вычисляется на основе лагранжевых релаксаций. Решение релаксированной задачи находится методом субградиентной оптимизации. Рассмотрены различные модификации алгоритма, решающего релаксированную задачу. Алгоритм тестировался на численных примерах из электронной библиотеки «Дискретные задачи размещения»
(http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Competitive/p_med_comp.html).
Размерность примеров $n = 100$, $p = r = 10$. На данных примерах алгоритм находит наилучшие известные решения. Время работы алгоритма не превосходит 15 минут на PC Fujitsu-Siemens AmiloPro V2040 (1.6 Ghz).

ЛИТЕРАТУРА

1. Noltemeier H. et al. Multiple voting location and single voting location on trees problems // European J. Oper. Res. – 2007. – V. 181. – P. 654-667.
2. Гончаров Е.Н., Кочетов Ю.А. Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации // Дискретный анализ и исследование операций. – 2002. – Сер. 2. Т. 9, N 2. – С. 13-30.

Давыдов Иван Александрович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия,
E-mail: vann.davydov@gmail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОИСКА ВЕКТОРА В ВЕКТОРНОМ АЛФАВИТЕ

А.В. Долгушев, А.В. Кельманов

Рассматривается оптимизационная задача, к которой сводится один из вариантов проблемы помехоустойчивого распознавания последовательности векторов евклидова пространства как структурированной совокупности, которая содержит искомый квазипериодически повторяющийся ненулевой (информационно значимый) вектор из заданного алфавита векторов, перемежающийся с произвольными квазипериодическими вектор-вставками, «мешающими» распознаванию (принятию решения). Исследуемая редуцированная экстремальная задача является обобщением задачи, изученной в [1], и формулируется следующим образом.

Задача SVGVA (Searching for a Vector in a Given Vector Alphabet) — поиск вектора в заданном алфавите векторов, «похожего» в среднеквадратическом на вектор, повторяющийся в векторной последовательности и перемежающийся с неизвестными вектор-вставками.

Дано: последовательность векторов $Y_n \in \mathbb{R}^q$, $n = 1, \dots, N$, множество (алфавит) $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| = K$, векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральные числа M_1 и M_2. Найти: вектор $U \in \mathcal{A}$, непересекающиеся подмножества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ множества $\{1, \dots, N\}$, элементы которых образуют набор $(n_1, \dots, n_M)$ размерности $M = M_1 + M_2$, такие, что

$$2 \sum_{m \in \mathcal{M}_1} \langle Y_m, U \rangle + \sum_{m \in \mathcal{M}_2} \|Y_m\|^2 \to \max,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, $\| \cdot \|$ — норма вектора, при следующих ограничениях: $|\mathcal{M}_1| = M_1$, $|\mathcal{M}_2| = M_2$; $1 \le n_m - n_{m-1} \le N - 1$, $m = 2, \dots, M$.

В работе обоснован точный полиномиальный алгоритм решения задачи, временная сложность которого есть величина $O(\min\{M_1, M_2\} K (M_1 + M_2)^2 N^2)$.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032, 07-07-00022 и грантом АВЦП Рособразования 2.1.1/3235.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kel'manov A.V., Khamidullin S.A. Recognizing a Quasiperiodic Sequence Composed of a Given Number of Identical Subsequences // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2000. – Vol. 10, N 1. – P. 127-142.

Долгушев Алексей Владимирович, Кельманов Александр Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
Новосибиский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия,
факс (383) 332-25-98, тел. (383) 363-46-68, (383) 363-46-79,
E-mail: dolgushev@math.nsc.ru, kelm@math.nsc.ru

О ДВУХ ТИПАХ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ МОДУЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин

Пусть m – число критериев, n – число переменных, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subset \mathbf{Z}^n$, $1 < |X| < \infty$, C_i – i-я строка матрицы $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $i \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Под m-критериальной лексикографической целочисленной задачей минимизации модулей линейных функций

$$Z^m(C,X): \qquad \operatorname{lex}\min_{x\in X}(|C_1x|, |C_2x|, \ldots, |C_mx|)$$

будем понимать задачу нахождения лексикографического множества

$$L^m(C,X) = \{x \in X: \ \forall x' \in X \ \ (x \overline{\succ} x')\},$$

где $\overline{\succ}$ – отрицание бинарного лексикографического отношения $\succ$, задаваемого на множестве X формулой:

$$x \succ x' \iff \exists k \in N_m \ \ \Big(|C_kx| > |C_kx'| \ \ \& \ \ k = \min\{i \in N_m : |C_ix| \neq |C_ix'|\}\Big).$$

Задача $Z^m(C,X)$ называется устойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой матрицы $C' \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется включение $L^m(C + C', X) \subseteq L^m(C,X)$, и сильно устойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой матрицы $C' \in \Omega(\varepsilon)$ множество $L^m(C + C', X) \cap L^m(C,X)$ непусто. Здесь $\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m\times n}: ||C'|| < \varepsilon\}$, $||C'|| = \max\{|c'_{ij}|: \ (i,j) \in N_m \times N_n\}$ – множество возмущающих матриц.

Теорема. *Пусть*

$$\overline{L^m}(C,X) = X \setminus L^m(C,X) \neq \emptyset,$$

$$S^m(C,X) = \overline{L^m}(C,X) \cap \operatorname{Arg}\min\{|C_1x|: \ x \in X\},$$

$$V^m(C,X) = \{x \in S^m(C,X): \ \exists x' \in L^m(C,X) \ \exists p \in \mathbf{R} \quad (x' = px)\}.$$

Тогда для лексикографической целочисленной задачи минимизации модулей линейных функций $Z^m(C,X)$, $m \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) *задача $Z^m(C,X)$ устойчива,*

(ii) *задача $Z^m(C,X)$ сильно устойчива,*

(iii) $S^m(C,X) \neq \emptyset \ \Rightarrow \ S^m(C,X) = V^m(C,X)$.

Из теоремы, в частности, вытекают известные [1] необходимые и достаточные условия устойчивости и сильной устойчивости лексикографической булевой задачи $Z^m(C,X)$, $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В.А., Гуревский Е.Е. Булева задача последовательной минимизации модулей линейных функций и теоремы устойчивости // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – N 5. – С. 178-187.

Емеличев Владимир Алексеевич, Кузьмин Кирилл Геннадьевич,
Белорусский государственный университет,
пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, тел. (+37517) 209-50-49.
E-mail: emelichev@bsu.by, kuzminkg@mail.ru

МЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ, ОБОБЩАЮЩИМ ПАРЕТОВСКИЙ И СОВОКУПНО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ

Е.В. Емеличева, А.А. Платонов

Пусть $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $n \geq 1$, $m \geq 2$, $T \subseteq 2^{N_m}$, $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть на множестве траекторий T задана вектор-функция $f(t,A) = (f_1(t,A), f_2(t,A), \ldots, f_n(t,A))$ с линейными критериями

$$f_i(t, A) = \sum_{j\in t} a_{ij} \to \min_{t\in T},\ i \in N_n.$$

Пусть $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_s\}$ — разбиение множества критериев N_n на $s \geq 1$ непустых непересекающихся подмножеств (групп) $I_k, k \in N_s$. Для такого разбиения $\mathcal{I}$ введем множество $S^n(A, \mathcal{I})$ обобщенно-эффективных траекторий согласно формуле

$$S^n(A,\mathcal{I}) = \{t \in T : \exists k \in N_s\ \forall t' \in T\ (f_{I_k}(t, A) \underset{P}{\overline{\succ}} f_{I_k}(t', A))\},$$

где $\underset{P}{\succ}$ — бинарное отношение, задающее принцип оптимальности по Парето, $\underset{P}{\overline{\succ}}$ — отрицание отношения $\underset{P}{\succ}$, $f_{I_k}(t, A)$ — проекция вектора $f(t, A)$ на координатные оси пространства $\mathbf{R}^n$ с номерами группы I_k. Таким образом, $S^n(A, N_n)$ — множество Парето, а $S^n(A, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$ — множество совокупно-экстремальных [1] траекторий.

Итак, в данном контексте под параметризаций концепции оптимальности понимается введение такой характеристики бинарного отношения предпочтения траекторий, которая позволила на основе разбиения критериев на группы связать известные функции выбора (паретовскую и совокупно-экстремальную).

Получена следующая формула радиуса устойчивости $\rho^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ задачи $Z^n(A,\mathcal{I})$ поиска множества $S^n(A,\mathcal{I})$, т. е. того типа устойчивости задачи, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу в точке $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ многозначного оптимального отображения $S^n : \mathbf{R}^{n\times m} \to 2^{N_m}$:

$$\rho^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) = \min_{k\in N_s}\ \min_{t\in T\setminus S^n(A,\mathcal{I})}\ \max_{t'\in S^n(A,\mathcal{I})}\ \min_{i\in I_k} \frac{f_i(t, A) - f_i(t', A)}{|(t \cup t') \setminus (t \cap t')|}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шоломов Л.А., Логические методы исследования дискретных моделей выбора. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

Емеличева Елена Владимировна,
Белорусский национальный технический университет,
пр-т Независимости, 65, Минск, 220065, Беларусь.

Платонов Андрей Александрович,
Белорусский государственный университет,
пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь.
E-mail: plabian@gmail.com

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ДЕРЕВЬЯХ

Г.Г. Забудский, А.Ю. Лагздин

Классической задачей размещения взаимосвязанных объектов в дискретной постановке является квадратичная задача о назначениях (КЗН). В общем случае она является NP-трудной. Одним из направлений ее исследования является поиск полиномиально разрешимых случаев. Некоторые полиномиальные алгоритмы решения КЗН для специальных типов матриц и структур областей, в которые производится размещение, предложены в [1, 2].

В данной работе рассматриваются варианты КЗН в следующих постановках [2]. Структура связей между объектами задана с помощью неориентированного реберно взвешенного графа $L = (N, E)$. Область, в которой размещаются объекты, – это сеть $M = (V, U)$. Предполагается, что мощности множеств N и V равны. Размещением графа L на сети M называется взаимно однозначное отображение $\pi : N \to V$. Можно считать, что $N = V = \{1, \dots, m\}$, тогда π – это подстановка. Необходимо найти такие подстановки π_1^* и π_2^*, для которых

$$F_1(\pi_1^*) = \min_{\pi} \sum_{(n_i,n_j)\in E} w(n_i, n_j)\rho(\pi(n_i), \pi(n_j)),$$

$$F_2(\pi_2^*) = \min_{\pi} \max_{(n_i,n_j)\in E} w(n_i, n_j)\rho(\pi(n_i), \pi(n_j)),$$

где $\rho(\pi(n_i), \pi(n_j))$ – кратчайшее расстояние между вершинами $\pi(n_i)$ и $\pi(n_j)$ сети M, в которые размещены вершины n_i и n_j графа L; $w(n_i, n_j)$ – вес ребра $(n_i, n_j) \in E$.

Предложены полиномиальные алгоритмы решения сформулированных вариантов КЗН в случаях, когда L – невзвешенная цепь, а M – взвешенное дерево для критерия F_1 и невзвешенное дерево для критерия F_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко В.М. Обобщение условий сильной разрешимости квадратичной задачи о назначениях с матрицами анти-Монжа и Теплица // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, N 2. – С. 15–18.
2. Забудский Г.Г. О некоторых задачах размещения на графах // Труды XI Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск, 1998. – Т. 1. – С. 135–138.

Забудский Геннадий Григорьевич, Лагздин Артем Юрьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru, art.lagzdin@gmail.com

ПОСТРОЕНИЕ ГИБРИДНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА КОНКАТЕНАЦИЕЙ ПОДМАРШРУТОВ

А.Р. Заминова

Представлен обзор основных подходов к решению задачи коммивояжёра. Рассмотренные алгоритмы включают в себя как точные на примере алгоритма ветвей и границ, так и эволюционные эвристические алгоритмы, представленные генетическим алгоритмом и эволюционной стратегией (1+1)-ES. Для составления тестируемых модификаций эволюционных алгоритмов были использованы различные типы операторов мутации и кроссовера, осуществляющих перестановки вершин в искомом маршруте. Предлагается критерий выбора используемого для решения алгоритма в зависимости от размерности решаемой задачи, определяются наиболее эффективные операторы в построенных модификациях генетического алгоритма и эволюционной стратегии (1+1)-ES.

Рассмотрен подход Evolutionary Divide and Conquer (EDAC) к решению задачи коммивояжёра в геометрической постановке, используемый для решения задач с размерностью порядка нескольких тысяч городов. Основные концепции метода представлены в работе Christine L. Valenzuela и Antonia J. Jones [1]. Данный подход заключается в разбиении множества всех городов на геометрические подобласти такого размера, что для полученных подобластей становится возможным построение маршрутов приемлемой стоимости за приемлемое время. В сконструированном на основе EDAC гибридном алгоритме при построении маршрутов для подобластей рассматривались как точные, так и эвристические методы. Для этого к изначально предложенному в стратегии EDAC методу 2-opt, заключающемуся в перекомбинировании ребер, были добавлены для рассмотрения точный метод ветвей и границ и эволюционные методы, оперирующие вершинами маршрута, – генетический алгоритм и эволюционная стратегия (1+1)-ES. Производится сравнение эффективности выполнения гибридного алгоритма по времени поиска и точности получаемого решения с эффективностью других рассмотренных точных и эвристических методов для решения задачи коммивояжёра на тестовых примерах библиотеки TSPLIB [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Valenzuela C.L., Jones A.J. Evolutionary Divide and Conquer (I): a novel genetic approach to the TSP // published by Imperial College. – 1995.
2. http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/

Заминова Алина Рифкатовна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 273-77-35, факс (347) 273-77-35.
E-mail: alina-z@mail.ru

ЭВОЛЮЦИОННО-ФРАГМЕНТАРНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНОМ ПОКРЫТИИ

Т.В. Заховалко, А.С. Бондаренко, Н.К. Максишко

Рассматриваемая задача возникает при математическом моделировании в области рекламного и издательского бизнеса.

Постановка задачи: для заданного графа-решетки $G = (V, E)$, множества $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ типовых графов-решеток и A - группы симметрий необходимо из множества $X = \{x = (V_x, E_x)\}$ допустимых T - покрытий найти такое покрытие, на котором достигается экстремум функции $F(x) = \mu_A(x) = \frac{|E|}{|O_A(x)|}$, где $O_A(x)$ – орбита графа. Величина $\mu_A(x)$ является мерой симметричности графа $x = (V_x, E_x)$ относительно заданной группы симметрий A [1]. Необходимость постановки задачи возникла в связи с решением проблемы размещения рекламных объявлений на страницах печатного издания, а критерий симметрии связан с необходимостью создания как можно более привлекательного вида издания.

В [1] для решения задачи предложен эвристический алгоритм, построенный на идее фрагментарного подхода. В качестве элементарных фрагментов рассматриваются типовые подграфы. Однако предложенный метод имеет существенные недостатки.

В настоящей работе для поиска оптимального решения задачи использован эволюционно-фрагментарный алгоритм. В эволюционной модели в роли хромосом выступают упорядоченные последовательности элементарных фрагментов.

Проведено сравнение предлагаемого алгоритма с результатами работы метода случайного поиска. Результаты тестирования показали перспективность использования данного направления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заховалко Т.В. О задаче покрытия графа типовыми подграфами с заданной группой симметрии // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2005. – С. 87-95.

Заховалко Татьяна Викторовна, Бондаренко Александр Сергеевич,
Максишко Наталия Константиновна,
Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина, тел. +38 (061) 764-55-12.
E-mail: tvz_99@mail.ru, buenasdiaz@gmail.com, maxishko@ukr.net

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ МИНИМИЗАЦИИ СТРОГО КВАЗИВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

Н.Ю. Золотых, А.Ю. Чирков

Пусть D — выпуклое множество в $\mathbf{R}^d$. Функция $f: \ D \to \mathbf{R}$ называется *квазивыпуклой*, если для любых $x, y \in D$ и любого $\alpha \in \mathbf{R}$, такого, что $0 \le \alpha \le 1$, выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \max\{f(x),\ f(y)\}\,.$$

Хорошо известно, что f — квазивыпуклая тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ множество $\{x: \ f(x) \le \alpha\}$ выпукло. Выпуклая функция является квазивыпуклой. Обратное в общем случае не верно. Функция $f: \ D \to \mathbf{R}$ называется *строго квазивыпуклой*, если для любых $x, y \in D$ и любого $\alpha \in \mathbf{R}$, такого, что $0 < \alpha < 1$, имеет место

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \max\{f(x),\ f(y)\}\,.$$

Пусть $D = \{x = (x_1, \ldots, x_d): \ 0 \le x_j \le r-1 \ (j = 1, 2, \ldots, d)\}$, $X = D \cap \mathbf{Z}^d$. Предположим, что с каждой квазивыпуклой функцией f, заданной на D, связан оракул, по произвольной паре точек $x, y \in X$ позволяющий определить, выполнено или нет неравенство $f(x) \le f(y)$. Под *задачей минимизации* квазивыпуклой функции f будем понимать задачу нахождения ее точки минимума $\mathrm{argmin}_{x \in X} f(x)$ с помощью обращений к оракулу. Если точек минимума несколько, то достаточно найти одну из них.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгоритм минимизации квазивыпуклой функции, заданной на множестве D. Обозначим $\rho(\mathcal{A}, f)$ число обращений к оракулу при минимизации функции f алгоритмом $\mathcal{A}$. Под сложностью задачи минимизации квазивыпуклой функции будем понимать

$$\rho(d, r) = \min_{\mathcal{A}} \max_{f} \rho(\mathcal{A},\ f),$$

где максимум берется по всем квазивыпуклым функциям, заданным на D, а минимум — по всем алгоритмам минимизации таких функций. Аналогично вводится сложность $\tau(d, r)$ задачи минимизации строго квазивыпуклой функции.

Легко построить пример, показывающий, что $\rho(d, r) = |X|$. Таким образом, эффективных алгоритмов минимизации квазивыпуклых функций не существует. Из мощностных соображений легко выводится неравенство $\tau(d, r) \ge \log_2 |X| = d \log_2 r$. Авторами построена оценка $\tau(d, r) \ge 3^{d-1} \log_2(r-2)$. Близкие результаты получены для строго квазивыпуклых функций, заданных оракулом, для произвольной точки $x \in X$ возвращающим $f(x)$.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00545-а.

Золотых Николай Юрьевич, Чирков Александр Юрьевич,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (831) 465-78-81.
E-mail: Nikolai.Zolotykh@gmail.com, chir7@yandex.ru

3-ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ

С.Д. Ильева, В.П. Ильев

Рассматриваются *обыкновенные* графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Граф называется *M-графом*, если каждая его компонента связности есть полный граф. Обозначим через $\mathcal{M}_2^1(V)$ класс всех M-графов на множестве вершин V, имеющих не более двух компонент связности.

Расстояние $\rho(G_1, G_2)$ между графами $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ определяется как $|E_1 \triangle E_2|$, где $E_1 \triangle E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$, т. е. $\rho(G_1, G_2)$ – число несовпадающих рёбер в графах G_1 и G_2.

Рассмотрим следующий вариант задачи аппроксимации графа.

Задача $\mathbf{A_2^1}$. Дан граф $G = (V, E)$. Требуется найти такой граф $M_O \in \mathcal{M}_2^1(V)$, что $\rho(G, M_O) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}_2^1(V)} \rho(G, M)$.

В работе [1] доказано, что задача $\mathbf{A_2^1}$ является NP-трудной. Для приближенного решения задачи $\mathbf{A_2^1}$ будем применять следующий простой алгоритм.

Алгоритм А.

1. Для каждой вершины $v \in V$ определим M-граф $M_v \in \mathcal{M}_2^1(V)$ следующим образом: вершина v и все смежные с ней вершины графа G принадлежат одной компоненте связности графа M_v, а все несмежные с v вершины графа G – другой компоненте.

2. Среди всех графов M_v выберем такой граф M_A, что $\rho(G, M_A) = \min\limits_{v \in V} \rho(G, M_v)$.

Справедлива следующая оценка погрешности алгоритма А для задачи $\mathbf{A_2^1}$.

Теорема 1. Для любого n-вершинного графа G

$$\frac{\rho(G, M_A)}{\rho(G, M_O)} \leq 3.$$

Предложен также вариант алгоритма для задачи аппроксимации M-графами, имеющими ровно две компоненты связности, погрешность которого не превосходит константы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.А., Ильев В.П., Кононов А.В., Талевнин А.С. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2006. – Т. 13, N 1. – С. 3-15.

Ильева Светлана Диадоровна,
ООО “Омсктелеком”,
ул. 1-я Заводская, 23, Омск, 644040, Россия, тел. (3812) 24-69-03.
E-mail: iljeva@mail.ru

Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: iljev@math.omsu.omskreg.ru

НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ N-МЕРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

В.М. Картак

Задача упаковки N-мерных ортогональных параллелепипедов состоит в следующем: пусть для заданного натурального $N \geq 2$ известен вектор, задающий размеры полосы: $S = (S_1, S_2, \ldots, S_{N-1})$ и набор из m штук N-мерных векторов – размеров размещаемых параллелепипедов $R = (R_1, \ldots, R_m)$, где $R_i = (r_1^i, \ldots, r_N^i)$, $i = 1, \ldots, m$. Требуется найти P – упаковку параллелепипедов R в S так, чтобы длина занятой части полосы была минимальна.

Эта задача эквивалентна задаче построения набора из N бинарных матриц A^k размера $m \times m$ специального вида (матриц упаковки), сопоставляемых каждому $k = 1, \ldots, N$ [1]. Построение данного набора матриц может быть представлено как задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с псевдополиномиальным числом бинарных переменных.

В докладе использована непрерывная релаксация построенной задачи ЦЛП для получения нижней границы исходной задачи. Для улучшения полученного значения применена технология “probing” [2], которая в ряде случаев существенно улучшает значение нижней границы.

Вычислительный эксперимент, проведенный на тестовых примерах из библиотеки OR Library, показал преимущество данного подхода над ранее известными методами получения нижней границы для задачи прямоугольной упаковки.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-07-00495a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Картак В.М. Матричный алгоритм поиска оптимального решения для задачи упаковки прямоугольников в полубесконечную полосу // Информационные технологии. – 2008. – N 1. – С. 36-44.
2. Martin A. General mixed-integer programming: computational issues for branch-and-cut algorithms // In M. Junger and D. Naddef, editors, Computat. Comb. Optimization, LNCS. – 2001. – Vol. 2241. – P. 1–25.

Картак Вадим Михайлович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (3472) 73-79-67.
E-mail: kvmail@mail.ru

ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЕЗОТХОДНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ УПАКОВКИ НА БАЗЕ STEP-ТЕХНОЛОГИИ

В.М. Картак, М.А. Мухачева

Рассматривается задача безотходной ортогональной упаковки – *Perfect Packing Problem.* Она является отдельным случаем задачи упаковки в полубесконечную полосу – *2-Dimensional Strip Packing Problem.*

Step-технология заключается в том, что частичная упаковка множества прямоугольников представляется в виде лестницы (*Staircase Placement*) или нисходящей последовательности ступеней.

Точный алгоритм метода ветвей и границ на основе лестничной стратегии был предложен в [1]. Так же там рассматриваются новые отсечения, базирующиеся на динамическом программировании. Частичная упаковка в виде лестницы формирует горизонтальные и вертикальные боковые пустоты. Определение возможности заполнения пустот прямоугольниками (по каждой из размерностей), сводится к задаче о сумме подмножеств, которая может быть решена с помощью динамического программирования.

В докладе предлагается отсечение, основанное на линейном программировании. Для боковых пустот формируется *задача одномерного раскроя с различными длинами прутков* (1CSPM). Оптимальное значение целевой функции задачи 1CSPM представляет собой минимальное число прутков, которое необходимо для того, чтобы раскроить все предметы из полученного набора прутков. Указанное значение может быть использовано в качестве нижней границы для исходной задачи.

Приводятся результаты численного эксперимента и сравнение с алгоритмами других авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kenmochi M., Imamichi T., Nonobe K., Yagiura M., Nagamochi H. Exact algorithms for the two-dimensional Strip Packing Problem with and without rotations // European Journal of Operational Research. – 2009. – Vol. 198, N 1. – P. 73-83.

Картак Вадим Михайлович, Мухачёва Марина Андреевна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 273-79-67.
E-mail: kvmail@mail.ru, marina_twins@rambler.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОИСКА УПОРЯДОЧЕННОГО НАБОРА ВЕКТОРОВ

А.В. Кельманов, Л.В. Михайлова, С.А. Хамидуллин

Рассматривается дискретная экстремальная задача, к которой сводится один из вариантов проблемы помехоустойчивого распознавания упорядоченного набора векторов, элементы которого совпадают с компонентами повторяющегося упорядоченного набора, включающего квазипериодические фрагменты из незашумленной последовательности. В [1] показано, что в случае, когда помеха аддитивна и является гауссовской последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, максимально правдоподобное распознавание набора векторов сводится к решению следующей задачи.

Задача SVT (Searching for a Vector Tuple) — поиск упорядоченного векторного набора, «похожего» на повторяющиеся упорядоченные наборы квазипериодических фрагментов в числовой последовательности.

Дано: числовая последовательность $y_0, \dots, y_{N-1}$ и множество (словарь) W, $|W| = K$, упорядоченных наборов (слов) векторов из $\mathbb{R}^q$; размерность наборов в словаре не более $L_{\max}$. Найти: набор $(U_1, \dots, U_L) \in W$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{M} \{2\langle Y_{n_m}, U_{l(m,L)}\rangle - \|U_{l(m,L)}\|^2\} \to \max,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, $\| \cdot \|$ — норма вектора, $Y_i = (y_i, \dots, y_{i+q-1})$, $i = 0, \dots, N-q$, — вектор-фрагмент последовательности, $l(m, L) = (m-1) \bmod L+1$, при следующих ограничениях: $0 \le n_1 \le N-q$, $0 \le n_M \le N-q$, $q \le n_m - n_{m-1} \le N-q$, $m = 2, \dots, M$.

В [1] обоснован точный полиномиальный алгоритм решения этой задачи. В настоящей работе предложен более эффективный точный алгоритм, имеющий временную сложность $O(KL_{\max}N^2)$. Трудоемкость этого алгоритма в $(\lfloor (N-q)/q \rfloor + 1)/L_{\max}$ раз меньше по сравнению с известным аналогом.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032, 07-07-00022 и грантом АВЦП Рособразования 2.1.1/3235.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Алгоритм распознавания квазипериодической последовательности, включающей повторяющийся набор фрагментов // Тез. докл. 15-й междунар. конф. «Проблемы теоретической кибернетики». – Казань: Отечество, 2008. – С. 45.

Кельманов Александр Васильевич, Михайлова Людмила Викторовна,
Хамидуллин Сергей Асгадуллович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
факс (383) 332-25-98, тел. (383) 363-46-79, (383) 363-46-68, (383) 363-46-68.
E-mail: kelm@math.nsc.ru, mikh@math.nsc.ru, kham@math.nsc.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОИСКА НАБОРОВ ВЕКТОРОВ

А.В. Кельманов, С.М. Романченко

Рассматривается оптимизационная задача, к которой сводится один из вариантов проблемы помехоустойчивого off-line обнаружения в последовательности векторов евклидова пространства повторяющегося векторного набора, совпадающего с перестановками векторов из заданного упорядоченного набора. Исследуемая задача является обобщением задачи, изученной в [1], и формулируется следующим образом.

Задача SRVS (Searching for Repeated Vector Set) Дано: последовательность векторов $Y_n \in \mathbb{R}^q$, $n = 1, \ldots, N$, эталонный набор $(U_1, \ldots, U_L)$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число M. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M)$ элементов из множества $\{1, \ldots, N\}$ и набор L-элементных перестановок $(\pi_1, \ldots, \pi_J)$, где $J = \lceil \frac{M}{L} \rceil$, компонент эталонного набора векторов, доставляющие максимум целевой функции

$$G(n_1, \ldots, n_M, \pi_1, \ldots, \pi_J) = \sum_{m=1}^{M} g_{l(m|L)}(n_m),$$

в записи которой $l(m|L) = \pi_{\lceil \frac{m}{L} \rceil}((m-1) \bmod L + 1)$, где $\pi_i(j)$ — j-й элемент i-й перестановки $\pi_i = (\pi_i(1), \ldots, \pi_i(L))$, и $g_l(n) = 2\langle Y_n, U_l \rangle - \|U_l\|^2$, $n \in \{1, \ldots, N\}$, $l \in \{1, \ldots, L\}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, $\| \cdot \|$ — норма вектора, при ограничениях: $1 \leq n_m - n_{m-1} \leq N - 1, m = 2, \ldots, M$.

Для частного случая задачи, когда набор $(n_1, \ldots, n_M)$ фиксирован, в работе обоснован точный полиномиальный алгоритм решения, имеющий временную сложность $O(ML(L+q))$. В основе алгоритма лежит полиномиальное сведение этого случая к задаче о назначениях. Построенное сведение позволило обосновать точный эффективный алгоритм решения задачи в общем случае. Временная сложность этого алгоритма есть величина $O(qNL + J(N+L)^3 N^2)$.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032, 07-07-00022 и грантом АВЦП Рособразования 2.1.1/3235.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в квазипериодической последовательности повторяющегося набора эталонных фрагментов // Журн. выч. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, N 12. – С. 2247-2260.

Кельманов Александр Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
факс (383) 332-25-98, тел. (383) 363-46-79.
E-mail: kelm@math.nsc.ru

Романченко Семён Михайлович,
Новосибиский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (960) 785-14-67.
E-mail: semenr@bk.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

А.А. Колоколов, А.В. Куряченко

Задача размещения предприятий с ограничениями на объемы производства состоит в следующем. Имеется m пунктов возможного размещения предприятий и n клиентов. Для каждого пункта i известны стоимость размещения c_i и объем производства a_i, $i = \overline{1,m}$. Для каждого клиента j задана величина спроса b_j, $j = \overline{1,n}$. Известны затраты t_{ij} на транспортировку единицы продукции от i-го пункта производства к j-му клиенту, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Требуется разместить предприятия и прикрепить к ним клиентов так, чтобы минимизировать суммарные затраты. Модель целочисленного линейного программирования задачи имеет следующий вид:

$$F(z,x) = \sum_{i=1}^{m} c_i z_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1,n}; \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i z_i, \quad i = \overline{1,m}; \tag{3}$$

$$z_i \in \{0,1\},\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Под задачей размещения с интервальным спросом будем понимать семейство задач (1) — (4), у которых $b_j \in [\underline{b}_j, \overline{b}_j]$, $j = \overline{1,n}$. Решением интервальной задачи называется пара $\langle \widehat{z}, \widehat{x} \rangle$, допустимая для задачи со спросом $\underline{b}$ и со значением $F(\widehat{z}, \widehat{x})$ не больше, чем для любого решения задачи с величиной спроса $\overline{b}$.

В данной работе для решения интервальной задачи предложен алгоритм, основанный на методе декомпозиции Бендерса [1] и переборе L–классов [2], с учетом интервальности данных. Кроме того, проведен анализ устойчивости задачи при малых колебаниях спроса. В частности, показано, что множество оптимальных производственных планов задачи (1) — (4) при малом уменьшении спроса не расширяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benders J.F. Partitioning procedures for solving of mixed-variables programming problems // Numer. Math. – 1962. – Vol. 4, N. 3. – P. 238-252.

2. Колоколов А.А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сибирский журнал исследования операций. – 1994. – Т. 1, N 2. – С. 18-39.

Колоколов Александр Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

Куряченко Андрей Владимирович,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: AKuryachenko@gmail.com

АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ДВУХСТАДИЙНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

А.А. Колоколов, Т.В. Леванова, А.С. Федоренко

Рассматривается двухстадийная задача размещения, в которой имеются множества предприятий двух уровней: нижнего $L = \{1,...,k\}$ и верхнего $I = \{1,...,m\}$, выпускающих определенную продукцию, а также множество потребителей $J = \{1,...,n\}$. Далее $i \in I,\ j \in J,\ l \in L$. Заданы стоимости открытия предприятий d_i и c_l верхнего и нижнего уровней соответственно, связи между ними $g_{il} \in \{0,1\}$; t_{ij} – затраты на удовлетворение спроса потребителей предприятиями верхнего уровня. Для открытия предприятия верхнего уровня необходимо, чтобы действовали все связанные с ним предприятия нижнего уровня. Требуется найти набор предприятий, удовлетворяющих спрос всех потребителей с минимальными суммарными затратами.

Введем переменные: $z = (z_i),\ y = (y_l),\ X = (x_{ij})$. Полагаем $z_i = 1$, если предприятие i верхнего уровня открыто, иначе $z_i = 0$. Аналогично определяются переменные y_l для предприятий нижнего уровня. Кроме того, $x_{ij} = 1$, если предприятие i удовлетворяет спрос потребителя j, в противном случае $x_{ij} = 0$.

Модель целочисленного линейного программирования для этой задачи имеет вид:

$$F(z,y,X) = \sum_{i\in I} d_i z_i + \sum_{l\in L} c_l y_l + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} t_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1,\ j \in J, \qquad (2)$$

$$z_i \geq x_{ij},\ i \in I,\ j \in J, \qquad (3)$$

$$y_l \geq g_{il} z_i,\ i \in I,\ l \in L, \qquad (4)$$

$$x_{ij},\ y_l,\ z_i \in \{0,1\},\ i \in I,\ j \in J,\ l \in L. \qquad (5)$$

Условие (4) можно заменить следующими неравенствами [1]:

$$y_l \geq \sum_{i\in I} g_{il} x_{ij},\ j \in J,\ l \in L. \qquad (6)$$

В работе проводится анализ и сравнение моделей (1)–(5) и (1)–(3),(5),(6). Показывается, что релаксационные многогранники задач в общем случае различны, а множества их допустимых решений совпадают. Обсуждаются новые варианты алгоритмов, основанных на декомпозиции Бендерса, приводятся результаты вычислительного эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2005.

Колоколов Александр Александрович, Леванова Татьяна Валентиновна,
Федоренко Анатолий Сергевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, levanova@ofim.oscsbras.ru, fas.omsk@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ Z–АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.А. Колоколов, Т.Г. Орловская

Рассматривается задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП):

$$(c, x) \to \max,\ x \in (M \cap Z^n), \tag{1}$$

где $M = \{x \in R^n\ :\ Ax \leq b\}$, c — n-вектор, b — m-вектор, A — $(m \times n)$-матрица, $n \leq m$. Будем говорить, что задача (1) имеет вид, удобный для полного округления (назовем это свойством Q), если существует точка $x^0 \in M$ такая, что

$$\max_{x \in M} x_i = x_i^0,\ i = \overline{1, n},$$
$$\max_{x \in M}(c, x) = (c, x^0).$$

В работах Вотякова А.А. (см., например, [1]) предложен z-алгоритм решения задачи (1), каждая итерация которого состоит из следующих шагов:
1) приведение задачи с помощью унимодулярных преобразований к виду, удобному для полного округления;
2) построение и использование дополнительных линейных ограничений.

Положим $M_1 = M \cap \Big\{x_i \leq \lfloor x_i^0 \rfloor,\ i \in \overline{1, n}\Big\}$. Переход от множества M к M_1 назовем итерацией z-алгоритма для задачи, обладающей свойством Q.

Задачи, которые имеют вид, удобный для полного округления, и сохраняют его на каждой итерации получили название инвариантных относительно z-алгоритма [1]. В данной работе продолжаются исследования, проводившиеся ранее Колоколовым А.А. и Заозерской Л.А., изучается вопрос о регулярности z-алгоритма при решении указанных задач относительно кубических и других разбиений [2]. В частности, показано, что для некоторых кубических разбиений данный алгоритм обладает свойством регулярности. Кроме того, установлена достижимость оценки числа итераций, полученной в [1], и построен класс задач, на которых алгоритм является экспоненциальным от длины входа. Приведен подкласс матриц, порождающих задачи, обладающие свойством Q.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вотяков А.А. О задачах, инвариантных относительно z-округления // Экономика и математические методы. – 1971. – Т. 7, Вып. 2. – С. 259-264.
2. Колоколов А.А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сибирский журнал исследования операций. – 1994. – N 2. – С. 18-39.

Колоколов Александр Александрович, Орловская Татьяна Геннадьевна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, torlovskaya@gmail.com

РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПАКОВКЕ МНОЖЕСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ L-РАЗБИЕНИЯ

А.А. Колоколов, М.Ф. Рыбалка

Многие исследования в области дискретной оптимизации посвящены задаче об упаковке множества, имеющей широкий круг приложений. Задача заключается в следующем. Пусть дано множество $I = \{1, ..., m\}$ и семейство его подмножеств $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_n\}$. Упаковкой множества I называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств из $\mathcal{S}$. Требуется найти упаковку множества I максимальной мощности. Если известны веса подмножеств $c_j > 0$, $j = \overline{1,n}$, то задача состоит в отыскании упаковки множества наибольшего веса. Модель целочисленного линейного программирования для этой задачи имеет вид:

$$\max\{cx : Ax \leq e, x \in \{0,1\}^n\}. \tag{1}$$

Здесь $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $a_{ij} \in \{0,1\}$, причем $a_{ij} = 1$, если $i \in S_j$, иначе $a_{ij} = 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $e = (1, \ldots, 1)^T$; переменные задачи: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, где

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \text{ включается в упаковку} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \quad j = \overline{1,n}.$$

В данной работе проводится исследование задачи (1) на основе L-разбиения [1]. Построено семейство задач об упаковке множества с матрицами блочной структуры с использованием результатов из [2], найдены нижние оценки мощности их L-накрытий. Разработаны модификации алгоритма перебора L-классов для решения рассматриваемых задач с учетом их особенностей. С целью получения начального рекорда применялись жадные алгоритмы решения задач.

Указанные алгоритмы реализованы в среде MS Visual Studio 2005, на языке C++ с использованием библиотек MFC. Проведено их экспериментальное сравнение на задачах со случайными исходными данными. Полученные результаты показали перспективность предложенных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А. А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сибирский журнал исследования операций. – 1994. – Т. 1, N 2. – С. 18-39.

2. Сайко Л.А. Исследование мощности L-накрытий некоторых задач о покрытии // Дискретная оптимизация и анализ сложных систем. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. – С. 76-97.

Колоколов Александр Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

Рыбалка Мария Федоровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: rybalka_maria@mail.ru

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА С БУФЕРОМ

П.А. Кононова

Рассматривается следующая задача, возникающая в мультимедиа. Задан набор файлов, составляющих презентацию. Каждый из них должен быть сначала записан в буфер компьютера, а затем выполнен. После выполнения файл удаляется и освобождает занятое место. Задано время записи файла, его размер и время выполнения. Размер буфера ограничен. Необходимо составить порядок записи файлов и порядок их выполнения, при котором время окончания всей презентации будет минимальным.

Сформулированная задача является обобщением классической задачи Джонсона на двух машинах и NP–трудна в сильном смысле, так как задача упаковки в контейнеры является ее частным случаем. Для решения задачи разработан итерационный метод локального поиска с чередующимися окрестностями [1]. В качестве окрестностей используются окрестность *Shift* — ставим работу на новое место, *Swap* — меняем две работы местами, окрестность Лина-Кернигана — находим удачную последовательность сдвигов и парных замен работ.

Наряду с указанными окрестностями применяется следующая окрестность. Пусть x^* — лучшее найденное решение, d — радиус окрестности. Решение x называется соседним, если порядок выполнения работ в x отличается не более чем в d позициях от порядка в x^*, и значение целевой функции на решении x меньше, чем на x^*. Для поиска элементов окрестности формулируется вспомогательная задача целочисленного линейного программирования. Допустимое решение этой задачи ищется с помощью коммерческого пакета. Такие окрестности используются в [2] для нахождения точного решения. Предложенный метод локального поиска показал хорошие результаты. При большом буфере получаются простые примеры, легко решаемые пакетом CPLEX. При малом буфере, в который помещаются 2–3 работы, примеры оказываются сложными и требуют от пакета несколько дней расчетов. Для таких примеров метод локального поиска позволяет быстро найти точное решение или решение с малой относительной погрешностью (до 8 % относительно линейной релаксации). В численных экспериментах на случайно порожденных данных решение, найденное локальным поиском за 10 секунд расчетов, всегда оказывалось лучше решения, найденного пакетом за 30 минут.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-06-92000) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетов Ю., Младенович Н., Хансен П. Локальный поиск с чередующимися окрестностями // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2003. – Т. 10, N 1. – С. 11-43.

2. Fischetti M. and Lodi A. Local Branching // Mathematical Programming Ser. B. – 2003. – N 98. – P. 23-47.

Кононова Полина Александровна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия,
E-mail: polinusik@gorodok.net

О ВЛОЖЕНИИ ЦИКЛОВ В ГРАФ КЭЛИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННЫЙ ПРЕФИКС-РЕВЕРСАЛАМИ

Е.В. Константинова

Рассматривается граф Кэли $Sym_n(PR)$ симметрической группы Sym_n, порождающее множество $PR = \{r_i \in Sym_n, 1 < i \leq n\}$, $|PR| = n - 1$, которого представлено префикс-реверсалами r_i, действующими на перестановку $\pi = [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n], \pi_i = \pi(i)$, $1 \leq i \leq n$, справа и меняющими порядок элементов перестановки π внутри интервала $[1, i]$, $1 < i \leq n$, т.е. $[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i, \ldots \pi_n]r_i = [\pi_i, \ldots, \pi_2, \pi_1, \ldots \pi_n]$. В иностранной литературе данный граф называется *pancake graph*; он широко известен в связи с проблемой определения его диаметра. Граф $Sym_n(PR)$, $n \geq 3$, является связным вершинно–транзитивным $(n-1)$–регулярным графом порядка $n!$ без циклов длины $3, 4, 5$. Известно также, что граф содержит гамильтонов цикл [1], и все циклы длины l, где $6 \leq l \leq n! - 2$ и $l = n!$, вкладываются в него [2]. В настоящей работе приводится описание и подсчет всех циклов длины 6,7 и 8 в графе $Sym_n(PR)$. В частности, через каждую вершину графа проходит ровно один цикл длины шесть C_6, представленный в виде произведения реверсалов r_1 и r_2, как $r_1r_2r_1r_2r_1r_2$, и верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *В графе $Sym_n(PR)$, $n \geq 3$, содержится ровно $\frac{n!}{6}$ непересекающихся по вершинам и ребрам циклов длины шесть.*

Утверждение 2. *В графе $Sym_n(PR)$, $n \geq 4$, через каждую вершину проходит $7(n-3)$ циклов длины семь C_7 следующего вида:*
1) $r_kr_{k+1}r_{k+2}r_{k+1}r_{k+2}r_1r_{k+2}$; 2) $r_{k+1}r_kr_{k+2}r_1r_{k+2}r_{k+1}r_{k+2}$; 3) $r_{k+1}r_{k+2}r_1r_{k+2}r_kr_{k+1}r_{k+2}$; 4) $r_{k+1}r_{k+2}r_{k+1}r_kr_{k+2}r_1r_{k+2}$; 5) $r_kr_{k+2}r_1r_{k+2}r_{k+1}r_{k+2}r_{k+1}$; 6) $r_1r_{k+2}r_kr_{k+1}r_{k+2}r_{k+1}r_{k+2}$; 7) $r_1r_{k+2}r_{k+1}r_{k+2}r_{k+1}r_kr_{k+2}$, где $1 \leq k \leq n-3$.

Утверждение 3. *В графе $Sym_n(PR)$, $n \geq 4$, при $n = 4$ через каждую вершину в графе проходит 10 циклов C_8; при $n = 5$ имеем 43 цикла C_8; при $n \geq 6$ через каждую вершину в графе проходит $37n - 95$ циклов длины восемь.*

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00244-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaks S. A new algotithm for generation of permutations // BIT. – 1984. – Vol. 24. – P. 196-204.

2. Kanevsky A., Feng Chao. On the embedding of cycles in pancake graphs // Parallel Computing. – 1995. – Vol. 21. – P. 923-936.

Константинова Елена Валентиновна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-30, факс (383) 333-25-98.
E-mail: e_konsta@math.nsc.ru

СТРАТЕГИЯ КОРОТКИХ МЕДИАН ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ (r, p)-ЦЕНТРОИДЕ

Ю.А. Кочетов, Н.А. Кочетова

В дискретной задаче об (r, p)-центроиде заданы конечные множества клиентов и предприятий. Известна матрица (g_{ij}) расстояний между клиентами и предприятиями. Два игрока, Лидер и Конкурент, открывают свои предприятия, стараясь захватить как можно большую часть рынка. Лидер открывает p предприятий первым. Затем Конкурент открывает свои r предприятий. Каждый клиент из открытых $p+r$ предприятий выбирает ближайшее предприятие в качестве своего поставщика. Задача состоит в том, чтобы выбрать за Лидера p предприятий так, чтобы после наилучшего хода Конкурента получить максимальную долю рынка.

Известно [1], что игнорируя Конкурента и решая за Лидера классическую задачу о p-медиане, получаем достаточно хорошее приближенное решение задачи. У такого подхода есть очевидный недостаток: решая задачу о p-медиане, Лидер стремится обслужить всех клиентов, несмотря на то, что часть из них неизбежно окажется у Конкурента. Уйдут те клиенты, для которых предприятия Конкурента окажутся ближе предприятий Лидера. Новая стратегия последовательно запрещает использование элементов матрицы (g_{ij}), начиная с самых больших. На каждой итерации решается задача о p-медиане на незапрещенных элементах матрицы (g_{ij}) и наилучшее решение с учетом реакции Конкурента предъявляется в качестве ответа. Такой подход позволяет избавиться от наиболее удаленных клиентов (Камчатки) и еще ближе придвинуть предприятия к основной части клиентов. Приводятся результаты численных экспериментов на тестах из библиотеки *«Дискретные задачи размещения»* (http://math.nsc.ru/AP/benchmarks). Проводится сравнение с другими известными эвристиками [2] и точным решением задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08–07–00037) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.В., Кочетова Н.А. Верхние и нижние оценки для конкурентной задачи о p-медиане // Методы оптимизации и их приложения. Труды XIV Байкальской международной школы-семинара. – Иркутск, 2008. – Т. 1. – С. 563-569.
2. Bhadury J., Eiselt H.A., Jaramillo J.H. An alternating heuristic for medianoid and centroid problems in the plane // Computers & Operations Research. – 2003. – Vol. 30. – P. 553-565.

Кочетов Юрий Андреевич, Кочетова Нина Арнольдовна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383)363-46-90, факс (8-383) 333-25-98.
E-mail: jkochet@math.nsc.ru, nkochet@math.msc.ru

ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ МЕТРИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЕНИЙ

К.Г. Кузьмин, В.С. Емеличева

Пусть $\mathbf{R}^m$ – критериальное пространство, $\mathbf{R}^n$ – пространство решений, $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}$ – матрица со столбцами $C_j \in \mathbf{R}^n$, $j \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subset \mathbf{Z}^n$, $1 < |X| < \infty$. Под векторной (m-критериальной) задачей $Z^m(C)$ целочисленного линейного программирования (ЦЛП)

$$C^T x = ((C_1, x), (C_2, x), \ldots, (C_m, x))^T \to \min_{x\in X},$$

будем понимать задачу поиска множества Парето $P^m(C)$. В пространствах $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$ зададим произвольные, вообще говоря, отличные друг от друга нормы. Положим $\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{n\times m} : \|C'\| < \varepsilon\}$, $\|C'\| = \|(\|C'_1\|, \|C'_2\|, \ldots, \|C'_m\|)\|$. Здесь $\|\cdot\|$ – норма в соответствующем пространстве; $C'_j \in \mathbf{R}^n$, $j \in N_m$ – столбцы матрицы C'.

Радиусом устойчивости $\rho^m(C)$ задачи $Z^m(C)$ называется число $\sup\{\varepsilon > 0 :\ \forall C' \in \Omega(\varepsilon)\ (P^m(C + C') \subseteq P^m(C))\}$, если множество, по которому берется супремум, непусто. В противном случае радиус полагается равным нулю.

Хорошо известно (см., например, [1]), что $\rho^m(C) = 0$ тогда и только тогда, когда не совпадают множества Парето $P^m(C)$ и Слейтера $Sl^m(C) = \{x \in X :\ Sl^m(x, C) = \emptyset\}$, где $Sl^m(x, C) = \{x' \in X : \forall j \in N_m\ ((C_j, x - x') > 0)\}$. Кроме того, очевидно, что $\rho^m(C) = \infty$ при $X = P^m(C)$. Поэтому представляет интерес лишь случай, когда $P^m(C) = Sl^m(C) \neq X$.

Теорема. *Пусть $P^m(C) = Sl^m(C) \neq X$. Тогда при любой норме в пространстве решений $\mathbf{R}^n$ и всякой норме Гёльдера l_p, $1 \le p \le \infty$, в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ для радиуса устойчивости $\rho^m(C)$ векторной задачи ЦЛП $Z^m(C)$, $C \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $m \ge 1$, состоящей в поиске множества Парето $P^m(C)$, верны следующие оценки:*

$$0 < \varphi \le \rho^m(C) \le \psi \le \min\{\|C_j\| :\ j \in N_m\} \le \|(\|C_1\|, \|C_2\|, \ldots, \|C_m\|)\|_p,$$

где $\varphi = \min\limits_{x\in X\setminus P^m(C)} \max\limits_{x'\in P_x(C)} \min\limits_{j\in N_m} \frac{(C_j, x-x')}{\|x-x'\|^*}$, $\psi = \min\limits_{x\in X\setminus P^m(C)} \min\limits_{(j,k)\in N_m\times N_m} \max\limits_{x'\in P_x(C)} \frac{(C_j, x-x')}{(C_k, x-x')} \|C_k\|$. Здесь $\|\cdot\|^*$ — норма в сопряженном пространстве $(\mathbf{R}^n)^*$, $P_x(C) = P^m(C) \cap Sl^m(x, C)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. – Киев: Наукова думка, 2003. – С. 261.

Кузьмин Кирилл Геннадьевич,
Белорусский государственный университет,
пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, тел. (37517) 209-50-48.
E-mail: kuzminkg@mail.ru

Емеличева Валентина Сергеевна,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
ул. Петруся Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь, тел. (37517) 262-37-50.

О ДВУХ ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОДИНАКОВЫМИ ОБЪЕМАМИ ПРОИЗВОДСТВА

А.А. Курочкин

В работе исследованы два принципиально разных типа задач размещения с одинаковыми объемами производства. Для обеих задач построены полиномиальные алгоритмы решения.

Первая рассмотренная задача – задача размещения с одинаковыми объемами производства на случайных входных данных. Считаем, что транспортные расходы c_{ij} по доставке единицы продукции от пункта производства i в пункт потребления j – независимые случайные величины, равновероятно принимающие значения из целочисленного сегмента $[1, r]$. Также вводятся некоторые специальные ограничения на объемы спроса клиентов и число открываемых предприятий. Необходимо выбрать множество открываемых предприятий и определить план перевозок таким образом, чтобы удовлетворить спрос каждого клиента и минимизировать общие затраты на открытие предприятий и доставку продукта. В работе построен приближенный алгоритм решения задачи, имеющий трудоемкость $O(n \ln m)$ (m – число возможных пунктов производства, n – число клиентов). Вероятностный анализ алгоритма проведен с помощью неравенства Чебышева и техники теоремы Петрова, изложенной в [1]. Получены условия, при которых алгоритм является асимптотически точным.

Вторая рассмотренная задача – задача размещения с одинаковыми объемами производства на путевом графе. Считаем, что пункты спроса и возможные пункты производства находятся в вершинах некоторой цепи и значения c_{ij} задаются суммой длин ребер в пути между вершинами i и j в цепи. Данная задача исследовалась в [2], где был предложен точный алгоритм решения, имеющий трудоемкость $O(m^5n^2 + m^3n^3)$. В работе представлена более эффективная модификация алгоритма — точный алгоритм, имеющий на порядок меньшую трудоемкость как по числу пунктов потребления, так и по числу пунктов производства: $O(m^4n^2)$. Таким образом, при ограниченном числе пунктов производства алгоритм имеет квадратичную (относительно n) временную сложность.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 08-01-00516 и 09-01-00032).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. – М.: Наука, 1987.
2. Ageev A.A. A polynomial-time algorithm for the facility location problem with uniform hard capacities on path graphs // Proceedings: Discrete Optimization Methods. – Omsk-Irkutsk, 2004. – P. 28-32.

Курочкин Александр Александрович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-43-33, факс (383) 330-22-37.
E-mail: alkurochkin@ngs.ru

АЛГОРИТМЫ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОГО ПЕРЕБОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫПОЛНИМОСТИ

А.К. Кучин, А.В. Адельшин

Задачи с логическими ограничениями имеют широкое применение в различных областях, исследованию их сложности и разработке алгоритмов решения посвящено большое число работ. В данной работе рассматривается задача максимальной выполнимости (MAX SAT) логической формулы $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$, заданной в конъюнктивной нормальной форме. Скобки $C_1, \ldots, C_m$ имеют неотрицательные веса $c_1, \ldots, c_m$. Задача состоит в отыскании набора значений переменных, при котором суммарный вес выполненных скобок будет наибольшим.

В [1] описан алгоритм перебора L-классов (LCE) для решения задачи выполнимости (SAT), который за конечное число итераций либо находит набор значений переменных логической формулы F, при котором она становится истинной (выполняющий набор), либо определяет, что такого набора не существует. На его основе в [2] предложен алгоритм для решения MAX SAT, путем сведения её к конечной последовательности задач выполнимости. В данной работе предложены его модификации, в которых сокращено число решаемых задач выполнимости, что ведет к уменьшению времени решения.

Алгоритмы основаны на лексикографическом переборе векторов вида $Z^{(k)} = (Z_1^{(k)}, \ldots, Z_m^{(k)})$, $k \in \mathrm{N}$, с координатами из множества $\{0, 1, 2\}$. Каждому из них соответствует следующая задача: найти набор значений переменных, при котором скобки C_i $(Z_i^{(k)} = 1,\ i = 1, \ldots, m)$ становятся истинными, а скобки C_j $(Z_j^{(k)} = 0,\ j = 1, \ldots, m)$ — ложными. Одна итерация состоит в отыскании вектора $Z^{(k+1)}$, $Z^{(k)} \succ Z^{(k+1)}$, с учетом текущего рекордного значения целевой функции. При этом, соответствующая задача выполнимости решается алгоритмом LCE. Если выполняющий набор найден, то рекордное значение обновляется. В случае, когда очередного вектора не существует, алгоритм заканчивает свою работу. Лучшее из найденых решений является оптимальным.

Приводятся результаты вычислительного эксперимента, показывающие эффективность предложенных алгоритмов. Соответствующие тестовые примеры выбирались из специализированной электронной библиотеки SATLIB и доступны по адресу (http://www.cs.ubc.ca/~hoos/SATLIB/benchm.html).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А.А., Адельшин А.В., Ягофарова Д.И. Решение задачи выполнимости с использованием метода перебора L-классов // Информационные технологии. – 2009. – Т. 2. – С. 54-59.

2. Адельшин А.В., Кучин А.К. Решение взвешенной задачи максимальной выполнимости с использованием перебора L-классов // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 304-311.

Кучин Андрей Константинович, Адельшин Александр Владимирович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: dommoi@yandex.ru, adelshin@ofim.oscsbras.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СЛУЧАЙНОГО АДАПТИВНОГО ПОИСКА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ РЕШАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Г.С. Лбов, В.М. Неделько

Одними из наиболее широко используемых методов анализа данных являются логические методы построения решающих функций [1], разновидностью которых являются деревья решений. Задача построения дерева минимальной сложности, безошибочно классифицирующего заданную выборку, в общем случае является NP-полной задачей, поэтому на практике используются приближенные алгоритмы.

Задача построения оптимальной логической решающей функции является задачей многоэкстремальной оптимизации, для решения которой в 1965 г. предложен метод СПА [2]. Впоследствии появились генетические алгоритмы, которые используют иную реализацию идеи случайного поиска с адаптацией. Существует достаточно большое число работ, где развивается эволюционный (с использованием генетических алгоритмов) подход к поиску оптимального дерева решений [3].

В данной работе предлагается метод поиска оптимальной логической решающей функции в задачах анализа данных, являющийся модификацией метода случайного поиска с адаптацией (СПА). Метод использует энтропийную метрику [4] в пространстве логических решающих функций и осуществляет поиск решения в соответствии с адаптивно изменяемой вероятностной мерой.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 07-01-00331-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лбов Г.С., Котюков В.И., Манохин А.Н. Об одном алгоритме распознавания в пространстве разнотипных признаков // Выч. системы. – Новосибирск, 1973. – Вып. 55. – С. 97-107.
2. Лбов Г.С. Выбор эффективной системы зависимых признаков // Выч. системы. – Новосибирск, 1965. – Вып. 19. – С. 21-34.
3. Papagelis A. and Kalles D. Breeding Decision Trees Using Evolutionary Techniques // International Conference on Machine Learning. – Williamstown, Massachusetts, June-July 2001.
4. Lopez de Mantaras R. A distance-based attribute selection measure for decision tree induction // Machine Learning. – 1991. – Vol. 6 – P. 81-92.

Лбов Геннадий Сергеевич, Неделько Виктор Михайлович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-81, факс (383) 333-25-98.
E-mail: lbov@math.nsc.ru, nedelko@math.nsc.ru

АЛГОРИТМ МУРАВЬИНОЙ КОЛОНИИ ДЛЯ КОНКУРЕНТНОЙ ЗАДАЧИ О P-МЕДИАНЕ

Т.В. Леванова, О.В. Усько

Рассматривается конкурентная задача о p-медиане, в которой, в отличие от классических задач размещения, решение принимает не одно, а два лица: фирма–Лидер и фирма–Конкурент, преследующие собственные цели. Лидер и Конкурент последовательно открывают p^0 и p^1 предприятий соответственно. Затем каждый клиент выбирает для обслуживания одно из открытых предприятий, исходя из собственных предпочтений. Фирмы стараются максимизировать свою долю прибыли. Требуется определить, какие предприятия необходимо открыть Лидеру для получения им наибольшей прибыли. Указанная задача описывается с помощью модели двухуровневого программирования [1]. В ней верхний уровень соответствует задаче Лидера, а нижний – Конкурента. В такой постановке задача о p-медиане принадлежит классу $\sum_2^P$ и является более сложной, чем любая проблема класса NP [3].

Для решения конкурентной задачи о p-медиане предложен гибридный алгоритм, в котором для решения задачи Лидера разработан вариант алгоритма муравьиной колонии (МК). Ранее алгоритмы МК успешно применялись для решения задач дискретной оптимизации, в том числе для задач оптимального размещения предприятий [2]. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, проведенного на задачах библиотеки http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/. Разработанный алгоритм позволил получить известные рекорды при относительно небольшом времени счета [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.В., Кочетова Н.А. Верхние и нижние оценки для конкурентной задачи о p-медиане // Труды 14-й Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т.1. – Северобайкальск, 2008. – С. 563-569.
2. Колоколов А.А., Леванова Т.В., Лореш М.А. Алгоритмы муравьиной колонии для задач оптимального размещения предприятий // Омский научный вестник. – 2006. – N 4(38). – С. 62-67.
3. Hotelling H., Soerhose J., Wirth H.-C. Multiple voting location and single voting location on trees // European J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 181. – P. 654-667.

Леванова Татьяна Валентиновна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: levanova@ofim.oscsbras.ru

Усько Ольга Владиславовна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: olga.usko@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСТАДИЙНОЙ ЗАДАЧИ OPEN SHOP С ТРЕМЯ МАШИНАМИ

М.А. Лисицына, И.Д. Черных

Задача open shop была описана более 30 лет назад в [1]. Там же была показана ее полиномиальная разрешимость для случая двух машин и NP-трудность в случае трех и более машин. Поставлен вопрос о сложности задачи open shop с тремя машинами, в которой каждая работа имеет не более двух операций (*двухстадийная задача open shop*). Этот вопрос остается открытым до сих пор, и, возможно, является одной из наиболее актуальных открытых проблем, связанных с задачей open shop.

Известно несколько полиномиально разрешимых подклассов двухстадийной трехмашинной задачи open shop. Один из них описан в [2]: задача полиномиально разрешима, если одна из машин выполняет одну из операций каждой работы.

В нашей работе исследуется вопрос нахождения точного интервала локализации оптимумов рассматриваемой задачи относительно нижней оценки $\bar{C} = \{l_{\max}, d_{\max}\}$, где $l_{\max}$ — максимальная нагрузка машины, $d_{\max}$ — максимальная длина работы. Показано, что для любого примера I двухстадийной трехмашинной задачи open shop длина оптимального расписания лежит в интервале

$$C_{\max}(I) \in [\bar{C}, \frac{5}{4}\bar{C}],$$

причем границы интервала точны.

Показательно, что наихудший пример (на котором достигается верхняя граница интервала) относится также к полиномиально разрешимому подслучаю, описанному в [2]. Таким образом, в некотором смысле рассматриваемая задача не хуже полиномиально разрешимой задачи из [2], что дает основания надеяться на ее полиномиальную разрешимость.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00370.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gonzalez T., Sahni S. Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time // J.ACM. – 1976. – Vol. 23, N 4. – P. 665-679.
2. Drobouchevitch I.G., Strusevich V.A. A polynomial algorithm for the three-machine open shop with a bottleneck machine // Ann. Oper. Res. – 1999. – Vol. 92. – P. 185-214.

Лисицына Мария Александровна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: masya@list.ru

Черных Илья Дмитриевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-18.
E-mail: idchern@gmail.com

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАСПИСАНИЙ МАЛОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

А.М. Магомедов

Пусть $L = \{1, 2, \ldots, l\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $T = \{1, 2, \ldots, t\}$ – соответственно множества устройств, деталей и отведенных расписанию единиц времени. Каждому устройству i определен для обработки двухэлементный набор ω_i из элементов множества N (необязательно различных), на обработку каждого элемента отводится одна единица времени, отношение предшествования отсутствует; $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l\}$.

Под *расписанием* будем понимать таблицу M $l \times t$ с элементами из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$, удовлетворяющую условиям: 1) набор ненулевых элементов в каждой строке i равен ω_i, ненулевые элементы в каждой строке размещены в соседних ячейках; 2) ненулевые элементы в каждом столбце попарно различны.

Количество вхождений $j \in N$ в набор ω_i обозначим $rep_{w_i}j$. Аналогично, $rep_\Omega w_i$ — количество вхождений набора ω_i в семейство Ω; $rep_\Omega j = \sum_{i=1}^{l} rep_{\omega_i} j$, $N_t = \{j \in N : rep_\Omega j = t\}$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $rep_\Omega j \le t$ для всех $j \in N$.

Мультиграф $G(\Omega) = (V, E)$ назовем *ассоциированным* с семейством Ω, если $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, а количество ребер вида (v_i, v_j) в E равно $rep_\Omega(i, j)$.

Утверждение 1. Если $t = 3$, то

(1) расписание $l \times t$ для семейства Ω существует тогда и только тогда, когда Ω обладает трансверсалью;

(2) семейство Ω обладает трансверсалью тогда и только тогда, когда ни одна компонента ассоциированного мультиграфа $G(\Omega)$ не содержит более одного цикла;

(3) если семейство Ω обладает трансверсалью, то Ω обладает и трансверсалью, включающей множество N_t.

Утверждение 2. Пусть $t \in \{5, 7\}$. Тогда

(1) если расписание существует, то для произвольно выбранного нечетного $k \le t$ найдется расписание, множество ненулевых элементов k-го столбца которого входит в N_t;

(2) расписание существует тогда и только тогда, когда ассоциированный граф $G(\Omega)$ допускает разбиение на $(t-1)/2$ реберно-непересекающихся подграфов степени не более 3, ни одна компонента которых не содержит более одного цикла.

В [1] доказано, что для четного t при сформулированных выше предположениях расписание всегда существует. Для любого четного t можно указать семейство Ω, для которого не существует расписания, в котором набор ненулевых элементов столбца t входит в N_t.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-96504-`р_юг_а`.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магомедов А.М. Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя // Матем. заметки. – 2009. – Т. 85, Вып. 1. – С. 65-72.

Магомедов Абдулкарим Магомедович,
Дагестанский государственный университет,
ул. Шамиля, 18а – 53, Махачкала, 367026, Россия, тел. (8722) 64-97-96.
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

ПРЕДУСЛОВИЯ ПОСТРОЕНИЯ ФОНОВОГО РАСПИСАНИЯ

Т.А. Магомедов

Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ и $T = \{1, 2, ..., t\}$ — соответственно множества «специалистов», «заданий» и «рабочих часов» ($0 \notin Y$). Каждому специалисту x_i определено мультимножество

$$\omega_i = \{y_1^{k_{i1}}, ..., y_n^{k_{in}}\}, \quad \tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \le t,$$

где k_{ij} — заданная длительность обработки задания y_j специалистом x_i (возможно, с прерываниями через целое число часов).

Под расписанием будем понимать $(l \times t)$-таблицу R, в которой i-я строка содержит $t - \tau_i$ нулевых элементов и k_{ij} элементов $j \in Y$; элементы множества Y в каждом столбце попарно различны.

Пусть $\Delta \in \{=, \neq\}$. Будем говорить, что для расписания R выполнено свойство (Δ)-непрерывности, если $(R_{i,j_1} \ \Delta \ 0,\ R_{i,j_2} \ \Delta \ 0, j_1 < j_2) \Rightarrow (R_{i,j} \ \Delta \ 0,\ \forall j \in [j_1..j_2])$.

В [1] доказана NP-полнота задачи о $(\neq)$-непрерывности для одного класса задач. В [2] рассмотрена следующая задача, отличающаяся от случая $n = 1$ нашей задачи лишь способом достижения $(\neq)$-непрерывности: для заданной матрицы с элементами 0 и 1 спрашивается, можно ли перестановкой столбцов матрицы добиться свойства $(\neq)$-непрерывности; в [3] доказано, что задача разрешима за полиномиальное время.

В условиях экономического кризиса специалисты вынуждены работать и на «фоновом» предприятии. Будем говорить, что расписание R обеспечивает «предусловия» для *фонового* расписания, если R удовлетворяет как свойству $(\neq)$-непрерывности, так и свойству $(=)$-непрерывности. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $\lambda \le t/2$, $t \neq 0(\,mod\ \lambda)$, $\tau_i \in \{\lambda, t - \lambda, t\}$ для всех $x_i \in X$, $\sum_{i=1}^{l} k_{ij} = t$ для всех $y_j \in Y$. Если расписание существует, то найдется и такое расписание, которое обеспечивает предусловия для фонового расписания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магомедов А.М. О вычислительной сложности частного случая задачи построения расписания // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. междунар. науч.конф., часть 5. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2008. – С. 92.
2. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.
3. Fulkerson D.R., Gross D.A. Incidence matrices and interval graphs // Pacific J. Math. – 1965. – Vol. 15. – P. 835-855.

Магомедов Тагир Абдулкаримович,
Дагестанский государственный университет,
ул. Гаджиева, 43а, Махачкала, 367026, Россия, тел. (8722) 64-97-96.
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

ТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОЙ УПАКОВКИ С ПРОДОЛЖЕННЫМ ВЫБОРОМ ИДЕНТИЧНЫХ ПРЕДМЕТОВ

М.А. Месягутов, Э.А. Мухачева

Рассматривается задача одномерной упаковки контейнеров с продолженным выбором идентичных предметов (1-dimensional contiguous bin packing, 1CBP). Имеются прямоугольные предметы m типов заданной ширины w_i и потребностью b_i. Требуется затратить для их упаковки минимальное количество контейнеров длины W и обеспечить при этом неперекрытие предметов между собой; вместимость и разнородность предметов в одном прутке; упаковку одинаковых предметов в смежных контейнерах (продолженность выбора). Задача 1CBP имеет различные применения. Например, она используется как релаксация двухмерной задачи упаковки (2-dimensional strip packing, 2SP) [1]. Ранее она применялась в генетическом алгоритме при решении 2SP [2]. Для сокращения размерности задачи к исходному множеству предметов I применяется процедура *препроцессинга*, которая в некоторых случаях позволяет найти такое подмножество $I_* \subseteq I$, комбинация элементов которого обязательно появится в оптимальном решении.

Предлагается точный алгоритм для решения задачи 1CBP, который основан на алгоритме ветвей и границ. Для вычисления нижней границы рассматривается незанятая область "лестничной" структуры над уложенными предметами, как множество одномерных контейнеров различной длины. Тогда оставшиеся предметы размещаются в этих контейнерах. Формируется задача одномерного раскроя с различными типами прутков (cutting stock problem with multiple stock lengths, 1CSPM) и, в целях повышения производительности общего алгоритма, используется только её LP-релаксация. Последняя решается с помощью метода генерации столбцов при использовании схемы решения задачи "0-1 рюкзак".

Для сокращения перебора частично целочисленных решений применяются различные критерии доминантности и правила отсечения. Например, исключение горизонтальной и вертикальной симметрии, одинаковых предметов, отсечение по площади, проверка релаксации подзадачи на оптимальность. Также рассматриваются различные стратегии ветвлений. Вместе с классическими процедурами, такими как лучшая нижняя граница и поиск в глубину, применяется стратегия ветвления, основанная на линейном программировании. Предложенный алгоритм был использован в процессе расчета нижней границы для известных задач 2SP. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие эффективность метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Martello S., Monachi M. and Vigo D. An exact approach to the strip-packing problem // INFORMS Journal on Computing. – 2003. – Vol. 15, N 3. – P. 310-319.
2. Мухачёва Э.А., Мухачёва А.С., Чиглинцев А.В. Генетический алгоритм блочной структуры в задачах двумерной упаковки // Информационные технологии. – 1999. – N 11. – С. 13-18.

Месягутов Марат Артурович, Мухачева Элита Александровна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: mmesyagutov@gmail.com, elitamuh@mail.ru

АЛГОРИТМ ГИЛЬОТИННОГО РАЗМЕЩЕНИЯ КОНТЕЙНЕРОВ В ПОЛОСУ НА БАЗЕ STEP-ТЕХНОЛОГИИ

Э.А. Мухачева, А.Д. Павлов

Рассматривается NP-трудная задача гильотинного размещения контейнеров в полубесконечную полосу. Исходные данные задачи можно представить в виде вектора

$$< W; n; w; h >,$$

где W – ширина полосы, n – количество деталей, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, а w_i — ширина i-ой детали, h_i – высота i-ой детали. Для решения данной задачи применяется итерационный метод улучшения решения, полученного лестничным (step) алгоритмом. Также как и в классической схеме лестничного алгоритма, строится таблица возможных размещений деталей по высоте от 1 до ширины полосы, на базе которой определяется дерево решений.

Отличием данного метода является процедура заполнения пустот (ЗБП) в процессе формирования цепочки в дереве решений. Смысл процедуры заключается в попытке разместить свободные детали (еще не задействованные) в текущем уровне. Поиск вариантов размещения происходит путем сведения размещения уровня к совокупности одномерных размещений, т.е. уровень разделяется на N прутков – вертикальных прямоугольных областей с шириной 1 и высотой W. Считается, что деталь i может быть размещена в уровне, если существуют w_i последовательных пруктов с запасом, большим или равным h_i. Поиск непосредственного размещения деталей в уровне производится после получения всей цепочки и оценки решения.

Идея метода основана на том, что благодаря лестничному алгоритму можно получить плотное вертикальное размещение в уровнях, но при этом как правило остаются боковые пустоты, которые заполняются процедурой ЗБП. Разрабатываются и другие методы заполнения пустот. Алгоритмы являются альтернативными, их эффективность зависит от дополнительных технологических ограничений. Так, в [1] рассматривается задача размещения грузов, а данный алгоритм ориентирован на гильотинный раскрой. Проведен численный эксперимент по сравнению метода заполнения, а также с использованием других методов гильотинного размещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухачева Э.А., Хасанова Э.И. Алгоритм гильотинного размещения контейнеров на базе step-технологии. (см. данный сборник)

Мухачева Элита Александровна, Павлов Андрей Дмитриевич,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 272-54-53.
E-mail: elitamuh@mail.ru, Business.Andrey@gmail.com

АЛГОРИТМ ГИЛЬОТИННОГО РАЗМЕЩЕНИЯ КОНТЕЙНЕРОВ НА БАЗЕ STEP-ТЕХНОЛОГИИ

Э.А. Мухачева, Э.И. Хасанова

Рассматривается задача гильотинного размещения предметов в полубесконечную полосу (2-Dimensional Guillotine Strip Placing, 2DGSP).

Step-технология берет свое начало от работы [1]. Для решения поставленной задачи ими была предложена уровневая технология. В результате её применения на каждом уровне имеем частичное размещение деталей. При упорядочении элементов по невозрастанию длины оно может быть сведено к лестничной структуре (step-структуре). Step-технология открывает хорошую возможность применения алгоритма решения задачи “0-1 рюкзак” в режиме полного или частичного перебора. Для получения более эффективных размещений предлагается ввести процедуру заполнения боковых пустот.

При этом реализовано два подхода:

- Набор деталей сортируется на две группы, в соответствии с принятой стратегией выбираются детали первой группы для их step-размещения в полосе, в боковых пустотах размещаются детали второй группы;
- Сразу после формирования каждой step-структуры боковые пустоты заполняются подходящими деталями из общего списка.

В обоих случаях для выбора размещаемой детали используется процедура полного перебора.

Одним из возможных применений приведенной технологии являются задачи размещения крупногабаритных грузов на платформах транспортных средств. При этом зачастую возникает необходимость обхода препятствий. Здесь рассматривается вариант, когда препятствия имеют прямоугольную форму, а их длина и ширина соизмеримы с размерами размещаемых предметов. В этом случае препятствия могут быть включены в алгоритм как дополнительные детали с фиксированными координатами. Таким образом, получаемое на каждом этапе размещение является псевдолестничной структурой и может рассматриваться в рамках step-технологии.

Приведены результаты численного сравнения алгоритмов между собой и с другими алгоритмами гильотинного размещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lodi A., Martello S., Vigo D. Recent advances on two-dimensional bin packing problems // Discrete Applied Mathematics. – 2002. – Vol. 123. – P. 379-396.

Мухачева Элита Александровна, Хасанова Элина Ильдаровна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 272-54-53.
E-mail: elitamuh@mail.ru, xasel@mail.ru

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОГО ВАРИАНТА ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА

А.А. Навроцкая

Рассматриваются обыкновенные графы, то есть графы без петель и кратных ребер. Обыкновенный граф называется M-*графом*, если каждая его компонента связности есть полный граф. Обозначим через $\mathcal{M}_k^1(V)$ класс всех M-графов на множестве вершин V, имеющих не более k компонент связности. *Расстояние* между графами $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ определяется как $d(G_1, G_2) = |E_1 \setminus E_2| + |E_2 \setminus E_1|$.

Задача аппроксимации графа $\mathbf{A_k^1}$. Для произвольного графа $G = (V, E)$ найти такой M-граф $M^* \in \mathcal{M}_k^1(V)$, что $d(G, M^*) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}_k^1(V)} d(G, M)$.

В работе [1] доказано, что задача $\mathbf{A_k^1}$ является NP-трудной.

Рассмотрим некоторое семейство $\mathcal{G}_n$ n-вершинных графов. Графы семейства $\mathcal{G}_n$ назовем *неплотными,* если для любого графа $G = (V, E)$ этого семейства $|E| \le \alpha n^\beta$ для некоторых констант $\alpha > 0,\ 0 < \beta < 2$.

В работе предложен асимптотически точный алгоритм и полиномиальная приближенная схема решения задачи $\mathbf{A_k^1}$ на неплотных графах. В основе этого алгоритма лежит следующая идея локального улучшения допустимого решения: на каждой итерации ищется вершина, перемещение которой в другую компоненту приводит к уменьшению значения целевой функции; если такой вершины не найдено, алгоритм заканчивает работу, иначе переходит на следующую итерацию с новым допустимым решением.

Теорема. Для допустимого решения $M \in \mathcal{M}_k^1(V)$ задачи $\mathbf{A_k^1}$, найденного алгоритмом локального улучшения для произвольного неплотного графа $G \in \mathcal{G}_n$, справедлива оценка:

$$d(G, M) \le (1 + \chi(n))d(G, M^*),$$

где $\chi(n) = ((k-1)n + \alpha n^\beta(3k-2))/(n^2 - 2k\alpha n^\beta - kn) \to 0$ при $n \to \infty$, а $M^* \in \mathcal{M}_k^1(V)$ – оптимальное решение задачи $\mathbf{A_k^1}$.

Полиномиальная приближенная схема для задачи $\mathbf{A_k^1}$ на неплотных графах получается путем дополнения алгоритма локального улучшения процедурой поиска оптимального решения при ограниченных сверху значениях n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А.А., Ильев В.П., Кононов А.В., Талевнин А.С. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2006. – Т. 13, N 1. – С. 3-15.

Навроцкая Анна Александровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: nawrocki@yandex.ru

СОКРАЩЕНИЕ ДЕРЕВА ПОИСКА В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ПРИ РЕШЕНИИ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В ПОЛОСУ

Д.А. Назаров

Рассматривается двумерная задача упаковки в полосу (2SPP): требуется в полосу ширины W упаковать множество прямоугольных предметов заданной ширины w_i и высоты h_i, $i = \overline{1,n}$ так, чтобы прямоугольники не перекрывались между собой и не выходили за границы полосы. Необходимо найти допустимую прямоугольную упаковку с минимальной занятой высотой полосы.

Большинство точных методов решения 2SPP используют метод ветвей и границ. Суть метода заключается в обходе дерева поиска, начиная с корневой вершины, которая соответствует пустой полосе. При этом листья дерева соответствуют допустимым прямоугольным упаковкам, а промежуточные вершины – частичным упаковкам. В каждой вершине дерева определяется перспективность поиска в поддереве с корнем в данной вершине. В дереве поиска достаточно рассматривать не все частичные упаковки, а только так называемые „лестничные" частичные упаковки [1].

Во всех имеющихся точных методах решения 2SPP „лестничные" частичные упаковки генерируются таким образом, что одной и той частичной упаковке может соответствовать несколько вершин в дереве поиска. Предлагается новый способ генерации „лестничных" частичных упаковок и доказывается, что каждая „лестничная" частичная упаковка будет получена ровно один раз.

Также предлагается принцип *доминирования* одной „лестничной" частичной упаковки над другой, полученных из одного и того же множества прямоугольных предметов. Если P_1 доминирует над P_2, то значение целевой функции на листьях из поддерева с корнем в P_1, будет не хуже чем – с корнем в вершине P_2. Таким образом, вершину P_2 можно исключить из дерева поиска. Чтобы исключить сразу все неперспективные вершины, соответствующие частичным упаковкам с одним и тем же числом предметов m, достаточно: (i) получить все „лестничные" частичные упаковки, состоящие ровно из m предметов; (ii) для каждого множества полученных упаковок, состоящих из одного и того же набора предметов, исключить из дерева поиска вершины, соответствующие элементам, над которыми доминирует хотя бы один элемент из данного множества. Приведены результаты эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kenmochi M., Imamichi T., Nonobe K., Yagiura M., Nagamochi H. Exact algorithms for the two-dimensional strip packing problem with and without rotations // European Journal of Operational Research. – 2009. – Vol. 198, N 1. – P. 73-83.

Назаров Денис Анатольевич,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: denis.nsc@gmail.com

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

В.А. Перепелица, И.В. Козин, А.С. Бондаренко

Многие задачи теории расписаний могут быть сведены к поиску оптимальной перестановки. Для поиска приближенных решений задачи об оптимальных перестановках перспективным является подход, основанный на использовании эволюционных алгоритмов. Этот подход приводит к понятию эволюционной модели.

Предлагаемая модель состоит из следующих элементов: базовое множество перестановок X, на котором ищется оптимальное решение; оператор построения начальной популяции: оператор, который позволяет выделить на множестве X его подмножество $X_0 \subseteq X$; оператор кроссовера $K : X \times X \to X$, позволяющий по двум перестановкам-родителям построить новую перестановку-потомок из множества X; оператор мутации $M : X \to X$; критерий отбора - алгоритм, позволяющий сравнивать по качеству решения в рамках заданной популяции; оператор селекции, позволяющий выделять множество пар в популяции для выполнения кроссовера; оператор отбора, позволяющий строить новые популяции из множеств родителей и потомков; условие остановки, которое определяет условие остановки эволюции.

Для реализации эволюционных моделей использована программная система EVF-Tester, в которой рассматривались различные серии задач теории расписаний, в частности серия из 120 тестовых задач типа Flow Shop с критерием длины расписания из библиотеки OR-Library [1], и серия из двухсот случайных задач. Сравнение было проведено с такой эвристикой как NEH [2] и методом случайного поиска. Результаты тестирования показали значительное преимущество подхода, основанного на эволюционной модели, по сравнению с рассмотренными приближенными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beasley J.E. OR-library: distributing test problems by electronic mail // J. Oper. Res. Soc. – 1990. – Vol. 41, N 11. – P. 1069-1072.

2. Nawaz M., Enscore E.E., Ham I. A heuristic algorithm for the m-machine, n- job flow-shop sequencing problem // OMEGA. – 1983. – Vol. 11. – P. 91–95.

Перепелица Виталий Афанасьевич, Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина, тел. +38 (061) 764-55-12.
E-mail: ainc@ukrpost.net

Козин Игорь Викторович, Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина, тел. +38 (061) 764-55-12.
E-mail: ainc@ukrpost.net

Бондаренко Александр Сергеевич, Запорожский национальный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина, тел. +38 (061) 764-55-12.
E-mail: buenasdiaz@gmail.com

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ (r,p)-ЦЕНТРОИДЕ И ЗАДАЧИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

А.В. Плясунов

После основополагающих работ Бендерса, Данцига и Вольфа идея декомпозиции рассматривается как одна из фудаментальных концепций в области оптимизации [4]. На её основе разработаны алгоритмы решения многих интересных задач.

В работе рассматривается применение декомпозиции Бендерса для решения следующих задач двухуровневого программирования: задачи об (r,p)-центроиде [2] и задачи ценообразования [1]. На основе понятия проекции, введённого Джеффрионом [4], предлагаются соответствующие декомпозиционные алгоримы решения этих задач.

Один из примечательных моментов, связанных с исследованием и анализом алгоритмов в [2, 3], заключается в том, что точный алгоритм для решения сложной $\sum_2^P$-полной задачи об (r,p)-центроиде [2] можно получить с помощью подходящей проекции. Таким образом, результаты, полученные в [2, 3] для задачи об (r,p)-центроиде, позволяют надеяться на то, что алгоритмы, основанные на декомпозиции, окажутся полезными при решении и других комбинаторных задач двухуровневого программирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08–07–00037) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. Задача о выборе цен на продукцию при условии обязательного удовлетворения спроса // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2002. – Т. 9, N 2. – С. 31-40.
2. Кочетов Ю.А. Задача об (r,p)-центроиде // Всероссийская конференция “Проблемы оптимизации и экономические приложения”: материалы конференции (см. данный выпуск).
3. Alekseeva E., Kochetova N., Kochetov Y., Plyasunov A. A hybrid memetic algorithm for the competitive p-median problem // Proceedings of INCOM 2009. – Moscow, June 3-5, 2009 (in press).
4. Martin K.P. Large Scale Linear and Integer Optimization: A Unified Approach. – New York: Springer-Verlag, 1998.

Плясунов Александр Владимирович,
Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383) 363-46-87, факс (8-383) 333-25-98.
E-mail: apljas@math.nsc.ru

ОБ ИНЦИДЕНТОРНЫХ РАСКРАСКАХ МУЛЬТИГРАФОВ

А.В. Пяткин

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E. Если дуга $e \in E$ инцидентна вершине $v \in V$, то упорядоченная пара (v, e) называется *инцидентором*. Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Каждая дуга $e = uv$ имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор (u, e) и *конечный* инцидентор (v, e). Эти два инцидентора называются *сопряженными* по отношению друг к другу. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначим через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f : I \longrightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел (*цветов*). Для дуги $e = uv$ будем писать $f(e) = (a, b)$, если $f(u, e) = a$ и $f(v, e) = b$.

Задача раскраски инциденторов в самом общем виде формулируется так: раскрасить инциденторы данного мультиграфа в минимальное число цветов так, чтобы выполнялись заданные условия на цвета смежных и сопряжённых инциденторов.

Эта задача обобщает как вершинную, так и рёберную раскраски мультиграфа. Первая задача раскраски инциденторов была рассмотрена в [1].

В докладе делается обзор истории возникновения задач раскраски инциденторов, полученных результатов, а также связи задач инциденторной раскраски с задачами из других разделов дискретной математики.

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00370, 08-01-00516 и 07-07-00022.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пяткин А. В. Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 1995. – Т. 2, N 4. – С. 74–79.

Пяткин Артем Валерьевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-45-46.
E-mail: artem@math.nsc.ru

ЗАДАЧА ОТКРЫТОГО ТИПА С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ И РАЗРЕШЕНИЕМ ПРЕРЫВАНИЙ НА ДВУХВЕРШИННОЙ СЕТИ

А.В. Пяткин, И.Д. Черных

Задача открытого типа (известная также как задача open shop) с маршрутизацией рассматривалась в [1]. В этой постановке работы расположены в узлах транспортной сети, а машины, прежде чем выполнить операцию, должны доехать до соответствующего узла. Изначально все машины находятся в выделенной вершине, называемой *базой*, и должны туда вернуться после выполнения всех своих операций. Требуется построить допустимое расписание наименьшей возможной длины. В [1] показана NP-трудность этой задачи уже для случая с двумя машинами и двухвершинной сети.

В данной работе рассматривается задача open shop с маршрутизацией и разрешением прерываний. Получены следующие результаты:

- Для задачи open shop с маршрутизацией с двумя машинами на двухвершинной сети с разрешением прерываний построен алгоритм нахождения оптимального решения. Трудоемкость этого алгоритма составляет $O(n)$, при этом длина оптимального расписания совпадает с некоторой очевидной нижней оценкой оптимума и построенное расписание имеет не более одного прерывания.
- Задача open shop на двухвершинной сети с разрешением прерываний с нефиксированным числом машин является NP-трудной в сильном смысле.

Таким образом, для двухмашинной задачи разрешение одного прерывания делает её полиномиально разрешимой. Заметим, что в задаче open shop без маршрутизации разрешение прерываний также упрощает алгоритмическую сложность задачи: задача open shop является NP-трудной, начиная с трех машин, в то время как задача open shop с прерываниями полиномиально разрешима для нефиксированного числа машин [2]. С другой стороны, добавление даже тривиальной маршрутизации в задачу open shop с прерываниями с нефиксированным числом машин превращает задачу в NP-трудную.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00370.

ЛИТЕРАТУРА

1. Averbakh I., Berman O., Chernykh I. The Routing Open-Shop Problem on a Network: Complexity and Approximation // European J. Oper. Res. – 2006. – Vol. 173, N 2. – P. 531-539.
2. Gonzalez T., Sahni S. Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time // J. ACM. – 1976. – V. 23, N 4. – P. 665-679.

Пяткин Артём Валерьевич, Черных Илья Дмитриевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-18.
E-mail: artem@math.nsc.ru, idchern@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСПИСАНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

А.А. Романова

Рассмотрим задачу обработки партии идентичных деталей на производственной линии, состоящей из m различных машин. Обработка детали заключается в последовательном выполнении n операций. Операция j должна выполняться на машине с номером m_j непрерывно в течение p_j единиц времени, $j = 1, \ldots, n$. Машина не может выполнять более одной операции одновременно. Допускается многократное использование машины при обработке детали.

Важную роль в организации производства играют циклические расписания, в которых выполнение одних и тех же операций для двух последовательных деталей происходит через равные промежутки времени. Это время называется временем цикла. Естественным критерием построения циклического расписания является критерий минимизации времени цикла, обеспечивающий максимальную производительность линии. Данная задача полиномиально разрешима за линейное время.

Пусть технология производства требует, чтобы после завершения некоторой операции детали немедленно начала выполняться следующая операция этой детали. В работе исследуется задача построения циклического расписания с минимальным временем цикла при наличии запретов на простой между некоторыми последовательными операциями.

В [1] доказана сильная NP-трудность этой задачи, а в [2] показана полиномиальная разрешимость задачи при условии выполнения всех операций детали без простоев и построен алгоритм решения задачи в общем случае, являющийся псевдополиномиальным при фиксированном числе пар операций, между которыми разрешен простой. Однако при небольшом количестве запретов данный алгоритм экспоненциальный. С другой стороны, при полном отсутствии запретов задача полиномиально разрешима. В данной работе исследуется задача с малым числом запретов. Установлено, что при одном запрете задача остается полиномиально разрешимой за время $O(n)$. Но уже при двух запретах она NP-трудна. Предложен псевдополиномиальный алгоритм построения оптимального решения для случая двух запретов. Выделены полиномиально разрешимые случаи задачи при фиксированном числе запретов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романова А.А., Сервах В.В. Задача построения циклического расписания с дополнительными ограничениями // Материалы конференции "Дискретная оптимизация и исследование операций". – Новосибирск, 2007. – С. 135.
2. Романова А.А., Сервах В.В. Задача построения циклического расписания с минимальным временем цикла и дополнительными ограничениями // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 491-497.

Романова Анна Анатольевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55А, Омск, 644077, Россия, тел. (8-3812) 22-56-96.
E-mail: romanova_ann@bk.ru

О ЧИСЛЕ ИТЕРАЦИЙ НЕКОТОРЫХ ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Н.А. Рубанова

В работе исследуется ряд алгоритмов, основанных на декомпозиции Бендерса, для решения двух задач размещения предприятий, которые являются модификациями простейшей задачи размещения предприятий (ПЗР).

Первая из них, p-простейшая задача размещения, состоит в следующем. Дано n пунктов предполагаемого размещения предприятий и множество клиентов, каждый из которых должен быть обслужен одним из предприятий. Для предприятий известны затраты двух видов: на их открытие и на обслуживание любого из клиентов. Требуется открыть предприятия в p пунктах так, чтобы суммарные затраты на их размещение и обслуживание клиентов были минимальны.

Во второй рассматриваемой задаче кроме перечисленных условий требуется, чтобы к каждому из открытых предприятий был прикреплен хотя бы один клиент. Эта задача называется p-активной простейшей задачей размещения предприятий. Обе рассматриваемые задачи относятся к числу NP-трудных.

Для ПЗР и задачи о p-медиане ранее были предложены декомпозиционные алгоритмы с отсечениями Бендерса [3], а также проведены исследования по оценкам числа их итераций [1, 2].

В данной работе алгоритмы подобного типа применяются для решения описанных выше задач. Построены семейства p-простейших и р-активных простейших задач размещения предприятий, на основе которых установлено, что число итераций исследуемых алгоритмов может изменяться от 1 до C_n^p. Обсуждаются направления совершенствования рассматриваемых алгоритмов и применение к другим задачам размещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А.А., Косарев Н.А., Рубанова Н.А. Исследование отсечений Бендерса в декомпозиционных алгоритмах решения некоторых задач размещения // Омский научный вестник. – 2005. – N 2. – С. 76-80.
2. Колоколов А.А., Рубанова Н.А. Оценки числа итераций для некоторых декомпозиционных алгоритмов решения задач размещения предприятий // Омский научный вестник. – 2008. – N 3. – С. 5-8.
3. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наукова думка, 1988.

Рубанова Наталия Алексеевна,
Омский государственный университет путей сообщения,
пр. К. Маркса, 35, Омск, 644046, Россия, тел. (3812) 31-18-11.
E-mail: n_rub@rambler.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ МУЛЬТИПРОЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ НА СЛУЧАЙНЫХ ВХОДАХ

И.А. Рыков

Рассматривается мультипроектная постановка задачи календарного программирования с одним ограниченным ресурсом:

$$\begin{array}{rcll} \max\limits_{j\in\{1,\ldots n\}}(s_j+p_j) & \to & \min\limits_{s_j\in Z^+} & \\ s_i+p_i & \leq & s_j, & (i,j)\in E(G) \\ \sum\limits_{j\in A(S,t)} r_j & \leq & R, & t=1,2\ldots \end{array}$$

где $A(S,t)=\{j|s_j<t\leq s_j+p_j\}$ — множество работ, выполняемых в интервале времени $(t-1,t]$, а G — ориентированный ациклический граф на множестве работ, состоящий из m компонент связности (проектов).

На основании сходства данной задачи с задачей упаковки в полосу (с частичным порядком на множестве прямоугольников) [2] предлагается приближенный алгоритм, являющийся модификацией алгоритма Гимади, Залюбовского и Шарыгина для задачи упаковки в полосу [1].

Обоснованы условия асимптотической точности данного алгоритма на случайных входах.

Работа поддержана грантами РФФИ 08-01-00516, 07-07-00222.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Шарыгин П.И. Задача упаковки в полосу: асимптотически точный подход // Известия высших учебных заведений. – 1997. – N 12. – С. 37-49.
2. Рыков И.А. О сравнении задачи упаковки в полосу с одной задачей календарного планирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, N 4. – С. 57–73.

Рыков Иван Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-24, факс (383) 333-25-98.
E-mail: rykov@ngs.ru

АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

В.В. Сервах, А.В. Сергунов

Имеются денежные средства k_0 и n инвестиционных проектов. Для проекта i определены необходимые вложения $k_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Доходность ξ_i проекта i является случайной величиной с математическим ожиданием m_i. Задана матрица ковариаций V, в которой элемент $v_{ij} = cov\,(\xi_i, \xi_j)$ определяет зависимость проектов i и j между собой. Пусть $x_i = 1$, если проект i реализуется, и $x_i = 0$, иначе. Булевый вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется инвестиционным портфелем. Требуется сформировать портфель с максимальным математическим ожиданием и минимальной дисперсией прибыли при условии, что начальные вложения не превосходят k_0:

$$\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i \to max,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} v_{ij} x_i x_j \to min,\\ \sum\limits_{i=1}^{n} k_i x_i \le k_0,\\ x \in \{0,1\}^n.\end{array}$$

Решение этой задачи заключается в построении Парето-оптимального множества портфелей. Однако, его мощность может расти экспоненциально с ростом числа проектов. Учитывая дискретность функции, достаточно построить полное множество альтернатив (ПМА). В [1] показано, что с ростом n мощность ПМА растет линейно.

В настоящей работе доказано, что задача построения ПМА является NP-трудной в сильном смысле. В такой ситуации для решения задачи применяются либо приближенные алгоритмы, либо проводится более глубокое исследование свойств с целью выделения эффективно разрешимых случаев. На практике вариация прибыли проектов зависит от небольшого числа ключевых экономических факторов, а ковариации v_{ij} являются линейными комбинациями этих факторов. Показано, что если число факторов ограничено константой, то задача построения ПМА является псевдополиномиально разрешимой. На основе схемы динамического программирования разработан соответствующий алгоритм построения ПМА.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнеева М.В., Сервах В.В. Об одной дискретной задаче выбора инвестиционных проектов // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 5. – С. 308-316.

Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: svv_usa@rambler.ru

Сергунов Антон Владимирович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия.
E-mail: tosha@nepodarok.com

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С КРИТЕРИЕМ СРЕДНЕВЗВЕШЕННОГО ВРЕМЕНИ ЗАВЕРШЕНИЯ РАБОТ

В.В. Сервах, Т.А. Щербинина

Имеется проект, который состоит из множества взаимосвязанных работ $V = \{1, 2, \dots, N\}$. Взаимосвязь между работами задается отношениями вида $i \to j$, где работа j не может начаться до завершения работы i. Данная структура может быть представлена ориентированным ацикличным графом $G = (V, E)$, где V – множество вершин, а $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \to j\}$ – множество дуг. При выполнении работ используется один тип складируемого ресурса. На период планирования T в интервале времени $[t-1, t)$ имеется q_t единиц складируемого ресурса. Каждая работа $j \in V$ характеризуется длительностью $p_j \in Z^+$, значимостью (весом) w_j и потребностью $r_j(\tau)$ в ресурсе в момент времени τ, $\tau = 1, 2, \dots, p_j$. Прерывание выполнения работ не допускается. Пусть s_j – время начала выполнения работы $j \in V$. Необходимо построить такое расписание $S = \{s_j\}$ выполнения работ с учетом технологического порядка E и ограничений на ресурсы, при котором минимизируется средневзвешенное время завершения работ:

$$\sum_{j \in V} w_j (s_j + p_j) \to \min$$

$$\sum_{t'=1}^{t} \sum_{j \in N_{t'}} r_j(t' - s_j) \le \sum_{t'=1}^{t} q_{t'}, \quad t = 1, 2, \dots, T;$$

$$s_i + p_i \le s_j, \quad (i, j) \in E,$$

где $N_t = \{j \in V | s_j < t \le s_j + p_j\}$ – множество работ, выполняемых на интервале $[t-1, t)$.

В [2] доказана NP-трудность в сильном смысле рассматриваемой задачи, а в [1] показана NP-трудность задачи с независимыми работами единичной длительности. В настоящей работе предложен псевдополиномиальный алгоритм решения задачи календарного планирования с независимыми работами при условии, что горизонт планирования T ограничен некоторой заданной величиной. Трудоемкость алгоритма составляет $O(NT^2(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_{T-1} + 1))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О задаче календарного планирования проекта с различными критериями и складируемыми ресурсами // Материалы III Всероссийской конференции “Проблемы оптимизации и экономические приложения”. – Омск, 2006. – С. 125.

2. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О сложности задачи календарного планирования со складируемыми ресурсами // Материалы XIV Всероссийской конференции “Дискретная оптимизация и исследование операций”. – Владивосток, 2007. – С. 136.

Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия.

Щербинина Татьяна Александровна,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия.
E-mail: shcherbinina@bk.ru

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ФАСЕТНОСТИ ОПОРНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Р.Ю. Симанчёв, И.В. Уразова

В работе [1] были получены достаточные условия фасетности неравенств, опорных к выпуклой оболочке векторов инциденций множеств комбинаторно полного семейства. Эти условия заключаются в следующем.

Семейство подмножеств $\mathcal{H} \subseteq 2^E$ конечного множества E называется комбинаторно полным, если для любых $e_1, e_2 \in E$ найдется такое $H \in \mathcal{H}$, что $e_1 \in H$ и $e_2 \notin H$. Комбинаторно полным является, например, множество b-сочетаний полного графа. Пусть $c^T x \leq c_0$ – неравенство, опорное к $P(\mathcal{H}) \equiv conv\{x^H \in R^E \mid H \in \mathcal{H}\}$. Непустое множество $S \subset E$ называется $c\mathcal{H}$-множеством, если существуют такие $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, что $S = H_1 \triangle H_2$ и $c^T x^{H_1} = c^T x^{H_2} = c_0$. Элемент $e_0 \in E$ называется $c\mathcal{H}$-следствием некоторого множества $\tilde{E} \subset E$, если существует такая последовательность элементов $e_1, e_2, \ldots, e_t = e_0$, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ элемент e_i принадлежит некоторому $c\mathcal{H}$-множеству, лежащему в $\tilde{E} \cup \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$.

Пусть $affP(\mathcal{H}) = \{x \in R^E \mid A^T x = \alpha\}$.

Теорема. Для того, чтобы грань, порожденная опорным неравенством $c^T x \leq c_0$, являлась фасетой многогранника $P(\mathcal{H})$, достаточно существования такого $\tilde{E} \subset E$, что 1) $|\tilde{E}| = n + 1$, где n – коразмерность $P(\mathcal{H})$; 2) каждый $e \in E \backslash \tilde{E}$ является $c\mathcal{H}$-следствием множества $\tilde{E}$; 3) подматрица матрицы $(c \mid A)$, образованная строками $\tilde{E}$, имеет полный ранг.

В настоящей работе нами анонсируется алгоритм проверки фасетности неравенства, опорного к многограннику гамильтоновых циклов полного графа, основанный на этой теореме. Алгоритм протестирован на некоторых известных неравенствах: тривиальные, кликовые, гребневые неравенства (см. [2]). Кроме того, с использованием условий смежности вершин многогранника [3] получены новые отличные от ранговых неравенства, порождающие фасеты выпуклой оболочки гамильтоновых циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симанчев Р.Ю. Комбинаторные условия фасетности опорных неравенств // Вестник Омского университета. – 1997. – N 3. – С. 11-13.
2. Schreijver A. Combinatorial optimization. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. – Vol. 2.
3. Симанчев Р.Ю. Смежность вершин многогранника k-факторов // Математические структуры и моделирование. – 1998. – Вып. 2. – С. 39-50.

Симанчёв Руслан Юрьевич,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. 8-913-977-04-44.
E-mail: osiman@rambler.ru

Уразова Инна Владимировна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. 8-913-621-32-65.
E-mail: urazovainn@mail.ru

ПОСТРОЕНИЕ k-ОПТИМАЛЬНОГО ДЕРЕВА В РАМКАХ МОДЕЛИ ЭЛЬМОРА

И.И. Тахонов

Одним из ключевых показателей, влияющих на производительность СБИС, является время распространения сигнала по коммуникационным сетям схемы. При проектировании микросхем возникает задача построения корневого дерева, максимальное время распространения сигнала по которому минимально. Сформулируем задачу следующим образом.

Дан взвешенный граф $G = (V, E)$, каждому ребру (i, j) которого приписаны два неотрицательных числа: r_{ij} – "сопротивление" и c_{ij} – "емкость". Рассмотрим подмножество вершин $S = \{0, 1, \ldots, k\} \subseteq V$, где вершина 0 является источником , а вершины $S \setminus \{0\}$ – получателями сигнала (терминалами). Каждому терминалу j приписан вес c_j ("емкость"), а вершине-источнику – "сопротивление" r_0. Определим формулы Эльмора, которые используются для оценки времени распространения сигнала. Пусть T – некоторое связывающее вершины множества S дерево с корнем в вершине 0. Время прохождения сигнала по ребру (i, j) этого дерева определяется формулой

$$d_{ij} = d_{ij}(T) = r_{ij} \left(\frac{c_{ij}}{2} + C_j \right),$$

в которой через C_j обозначена суммарная емкость вершин и ребер поддерева с корнем в вершине j. Обозначим путь, соединяющий вершину k с корнем 0, через $P_k(T)$. Для вычисления времени распространения сигнала по этому пути используется соотношение

$$t_k = t_k(T) = r_0 C_0 + \sum_{(i,j) \in P_k(T)} d_{ij}.$$

В работе рассматривается задача поиска дерева с корнем в 0, связывающего вершины множества S, критическая (максимальная) задержка в котором минимальна, т.е. задача

$$\max_{i \in S} t_i(T) \to \min_T . \tag{1}$$

Задача (1) является NP-трудной и для ее решения в [1] предложен полиномиальный эвристический алгоритм МАД, для которого проведен апостериорный анализ. В данной работе осуществлен априорный анализ алгоритма МАД в частном случае. Показано, что в случае k терминалов относительная погрешность алгоритма (отношение значения целевой функции на решении, построенном алгоритмом МАД, к оптимальному значению функционала) не превосходит k.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерзин А.И., Кокурина С.Е., Комарова А.А. Построение деревьев Штейнера с учетом ресурсных и временных ограничений // Труды ИВМиМГ СО РАН. Сер. Информатика. – Новосибирск, 2006. – Вып. 6. – С. 63-72.

Тахонов Иван Иванович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.
E-mail: takhonov@gmail.com

О РОСТЕ КВАДРАТА РАНГОВЫХ МИНОРОВ БАЗИСНОЙ СИСТЕМЫ СТОЛБЦОВ МАТРИЦЫ ОГРАНИЧЕНИЙ ТРЕХИНДЕКСНОЙ ПЛАНАРНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Е.Б. Титова

Пусть $\mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbf{Q}^M$ – линейное пространство столбцов с компонентами из $\mathbf{Q}$, а $\mathbf{Z}^M$ – столбцы из $\mathbf{Q}^M$ с целочисленными компонентами.

Рассмотрим матрицу ограничений планарной трехиндексной транспортной задачи $T = T(3, n_1, n_2, n_3)$ (обозначения см., например, в [3]). Данная работа продолжает исследования роста квадрата миноров матрицы T, предложенные в [3] и рассмотренные для всей матрицы T [2] и для базисной системы ее строк [1].

Определим левое нуль-пространство $L = \{u \in \mathbf{Q}^M, uT = 0\}$ и левый модуль $L^{\mathbf{Z}} = L \cap \mathbf{Z}^M$ матрицы T, а $L_{\overline{\mathcal{B}}}$ будем называть базисом левого модуля $L^{\mathbf{Z}}$. Выделим в матрице T базисную систему столбцов $T^{\mathcal{B}}$. Очевидно, что $L_{\overline{\mathcal{B}}}T = 0 \Leftrightarrow L_{\overline{\mathcal{B}}}T^{\mathcal{B}} = 0$. Известно [3], что $|detT^{\mathcal{B}\top}T^{\mathcal{B}}| = |detL_{\overline{\mathcal{B}}}L_{\overline{\mathcal{B}}}^{\top}|$, где $A^{\top}$ - матрица, транспонированная к A.

Получен характеристический многочлен матрицы $L_{\overline{\mathcal{B}}}L_{\overline{\mathcal{B}}}^{\top}$:

$$|L_{\overline{\mathcal{B}}}L_{\overline{\mathcal{B}}}^{\top} - \lambda E| = (\lambda - (n_1+n_2))^{n_3-1}(\lambda - (n_1+n_3))^{n_2-1}(\lambda - (n_2+n_3))^{n_1-1}(\lambda - (n_1+n_2+n_3))^2.$$

Отсюда при $n_1 = n_2 = n_3 = n$ следует, что $\det L_{\overline{\mathcal{B}}}L_{\overline{\mathcal{B}}}^{\top} = 9 \cdot 2^{3(n-1)} \cdot n^{3n-1}$.

Обозначим среднее значение квадрата минора рангового порядка матрицы $T^{\mathcal{B}}$ через $\delta_{\mathcal{B}}(n) = det\ T^{\mathcal{B}\top}T^{\mathcal{B}} \Big/ \binom{M}{r}$.

Теорема. *При* $k = 3$ *и* $n \to \infty$ $\quad \delta_{\mathcal{B}} = \left(\frac{2}{e}\right)^{3n-1}(1 + o(1))$.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00545-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титова Е.Б. Асимптотика среднего значения квадрата минора базисной подматрицы матрицы ограничений многоиндексной транспортной задачи // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. Научное издание. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – N 11. – С. 215-216.
2. Титова Е.Б., Шевченко В.Н. Асимптотика среднего значения квадрата минора матрицы ограничений трехиндексной планарной транспортной задачи // Материалы III Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения". – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2006. – С. 127.
3. Шевченко В.Н. Многогранники многоиндексных транспортных задач: алгебраический подход // Материалы конференции "Дискретный анализ и исследование операций" (Новосибирск, 28 июня - 2 июля 2004). – Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2004. – С. 64-70.

Титова Елена Борисовна,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия.
E-mail: Helen_tit@rambler.ru

СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА P-МЕДИАНЫ ГИПЕРСЕТИ

Г.Ы. Токтошов

Сущность предлагаемого метода заключается в дискретизации рельефа местности сеткой, формируемой конечным множеством узлов, в результате которой получается граф вида $PS = (X, V; P)$, где $P : V \longrightarrow 2^X$. В каждой ветви $v_i \in V, i = 1, 2, ..., m$, и узле $x_j \in X, j = 1, 2, ..., n$, этой сетки будут отображены численные характеристики рельефа, которые переводят физическую область в расчетную сетку [1].

Значения сеточной функции, определенной в ветвях графа $PS = (X, V; P)$ можно записать в виде $y_{ij} = kf(x_{i-1,j-1}, x_{ij})$, где $x_{ij} = (x_j, y_i), i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$, – координаты точек пересечения сетки, k – коэффициент, зависящий от категории местности. Значение коэффициента k должно выбираться в каждом конкретном случае в зависимости от рельефа местности. Таким образом, значение сеточной функции – это длина ветви $v_i \in V, i = 1, 2, ..., m$, графа PS из узла $x_{i-1,j-1}$ в узел x_{ij}.

Поскольку любая сеть накладывается на земную поверхность (на расчетную сетку $PS = (X, V; P)$), предлагается модель гиперсети для оптимального размещения элементов инженерных сетей. Тем самым задача моделирования рельефа местности и задача оптимального размещения элементов инженерных сетей сводятся к задаче поиска p–медианы гиперсети. Подробное определение гиперсети можно найти в работе [2].

Пусть $X' = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ – подмножество множества узлов X графа PS, т.е. $X' \subseteq X$. Тогда задача поиска p–медианы гиперсети заключается в поиске такого подмножества X' множества узлов графа $PS = (X, V; P)$, для которого $\Pi(X') \to \min$, где $\Pi(X')$ – передаточное число множества X', и оптимальной реализации вторичной сети $WS = (X', R; W)$ в первичную $PS = (X, V; P)$, где $\forall r \in R, W : r \longrightarrow 2^{P(F(r))}$. Поиск p-медианы гиперсети в такой постановке может быть осуществлен известными методами теории графов [3] и теории гиперсетей [2,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокарев Д.И. Основы систем автоматизированного проектирования в сварке. – Воронеж, 2006.
2. Попков В.К. Математические модели связности. – Новосибирск, 2006.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
4. Буленко П.Г. Сложность задачи поиска p-медианы гиперсети и ее точное решение // Труды ИВМиМГ, Серия Информатика. – Новосибирск, 2005. – С. 16-20.

Токтошов Гулжигит Ысакович,
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск, 630102, Россия.
E-mail: tgitok@rambler.ru

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА СЕРДЮКОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ

С.А. Тычинин

Для симметрической задачи коммивояжера одним из лучших является алгоритм Сердюкова с оценкой точности 3/4 [1]. Данный алгоритм состоит из следующих шагов: 1) построение 2-фактора C и совершенного паросочетания M максимальных весов; 2) перемещение из каждого цикла $c \in C$ во множество M ребра, оставляющего M частичным туром; 3) дополнение C и M до гамильтоновых циклов T_1 и T_2 соответственно; 4) выбор из построенных гамильтоновых циклов T_1 и T_2 в качестве решения цикла, имеющего максимальный вес.

Из описания алгоритма следует возможность различных реализаций этого алгоритма, отлиличающихся способами дополнения текущих частичных туров до гамильтоновых циклов. В частности возможны стратегии "первый подходящий", жадный алгоритм и алгоритм дополнения подграфами [2].

Результатом проведенных исследований является следующая модификация алгоритма Сердюкова:

1) вычисляется не два, а пять гамильтоновых циклов;

2) один гамильтонов цикл вычисляется с помощью алгоритма дополнения подграфами [2];

3) два цикла получают перемещением ребер из C в M и последующим дополнением полученных частичных туров до гамильтоновых циклов T_1 и T_2 с помощью жадного алгоритма;

4) два дополнительных цикла получают перемещением ребер из C в M и последующим дополнением полученных частичных туров до гамильтоновых циклов T_1 и T_2 с помощью алгоритма дополнения подграфами [2].

Вычислительный эксперимент показал, что получаемые данным алгоритмом решения являются наиболее точными среди известных приближенных алгоритмов. Кроме того следует отметить, что наибольшую частоту нахождения наилучшего решения имеет алгоритм дополнения подграфами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Сердюков А.И. О некоторых результатах для задачи коммивояжера на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2002. – Т. 8, N 1. – С. 22-29.

2. Тычинин С.А. Алгоритм дополнения подграфами для решения задачи MAX TSP // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. – Екатеринбург: Научное издание, УрО РАН, 2007. – N 11. – С. 217-218.

Тычинин Сергей Александрович,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел. (351) 267-90-39, факс (351) 798-26-44.
E-mail: dettier@mail.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

И.В. Уразова

Рассматривается задача обслуживания частично упорядоченного множества требований, имеющих одинаковые длительности обслуживания, параллельными идентичными приборами [1]. На данный момент, согласно [2], принадлежность этой задачи классу P или NP не установлена. В работе [3] построена модель целочисленного линейного программирования для этой задачи. Было доказано, что целочисленные точки построенного полиэдра и только они являются расписаниями. Описан класс правильных неравенств относительно выпуклой оболочки расписаний, для которых доказаны необходимые условия опорности. Показано, что полученные неравенства могут служить отсечениями в соответствующих алгоритмах.

В данной работе рассматривается задача идентификации правильных неравенств из [3]. Показана сводимость задачи идентификации к задаче поиска максимального по весу пути в ациклическом вершинно-взвешенном орграфе. Проведен вычислительный эксперимент, в основе которого лежат полученные неравенства. В эксперименте рассмотрены случаи, когда количество параллельных идентичных приборов равно трем, четырем и пяти. Длительности обслуживания равны единице. К ограничениям задачи был добавлен весь класс неравенств, описанный в [3]. Рассмотрено четыре серии тестовых задач, а именно, три серии с количеством вершин, равным 10, 15 и 20 по 10 задач в каждой, и серия из 10 задач на деревьях с 20 вершинами. Каждая задача запускалась с разными целевыми функциями. В результате вычислительного эксперимента на всех сериях тестовых задач было получено целочисленное решение без включения дополнительных отсечений в ходе решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.
2. http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/reseach/OR/class
3. Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. Класс опорных неравенств для многогранника расписаний обслуживания единичных требований параллельными процессорами // Труды XIV Байкальской международной конференции “Методы оптимизации и их приложения”. Том 1. – Иркутск, 2008. – С. 530-536.

Уразова Инна Владимировна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: urazovainn@mail.ru

ФУНКЦИОНАЛЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПРОБЛЕМАМИ: ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, ГАМИЛЬТОНОВ ГРАФ И ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Р.Т. Файзуллин

В работе предложена конструкция, сводящая задачи ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ (ГРАФ) и ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ к проблеме поиска глобального экстремума для двух семейств функционалов специального вида.

Пронумеруем вершины графа последовательными простыми числами, образующими сверхвозрастающую последовательность (каждый член которой больше, чем сумма предыдущих) r_p, т.е. $r_1 = 3$ и $r_{p+1} = 2r_p + s_j$. Пусть Υ_i – множество вершин графа, соседних с вершиной под номером i, где i – это одно из чисел r_p.

В этом случае верна **теорема 1**:

Для заданного графа и любого $m \geq 2$:

1. глобальный минимум функционалов:

$$S_m(x_1, ., x_n) = \sum_{v=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \prod_{l,p \in \Upsilon_{i,i=r_v}} ((i+l+p-x_{j-1}-x_j-x_{j+1})^2+(mi+l+p-x_{j-1}-mx_j-x_{j+1})^2$$

$$D_m(x_1, ., x_n) = \sum_{v=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \prod_{l,p \in \Upsilon_{i,i=r_v}} ((i/lp - x_j/x_{j-1}x_{j+1})^2 + (i^m/lp - x_j^m/x_{j+1}x_{j-1})^2)$$

равный нулю, достигается тогда и только тогда, когда граф гамильтонов;

2. глобальный минимум достигается только на тех векторах, компоненты которых, рассматриваемые как натуральные числа, являются номерами какого-либо гамильтонова цикла в порядке его прохождения: $x_1, \ldots, x_n$.

Был предложен итерационный алгоритм нахождения стационарных точек функционалов S_m и проведены численные эксперименты на кластере Томского государственного университета, показавшие перспективность данного подхода в наиболее интересном случае, когда s мало.

Аналогичная **теорема 2** верна и для задачи ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ:

Пусть заданы два графа G_1 и G_2. В графе G_1 вершины и их окрестности пронумерованы с помощью сверхвозрастающей последовательности r_v, $v = 1, 2, \ldots, n$, в графе G_2 каждой вершине j, $j = 1, 2, \ldots, n$, приписан неизвестный вес x_j, и окрестности вершин графа G_2 индексированы числами $1, 2, \ldots, n$.

Тогда, если существует вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, на котором достигается глобальный минимум (равный нулю) функционала:

$$I_m(x_1, ., x_n) = \sum_{v=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} ((i/ \prod_{p \in \Upsilon_{i,i=r_v}} p - x_j/ \prod_{s \in \Upsilon_j} x_s)^2 + (i^m/ \prod_{p \in \Upsilon_{i,i=r_v}} p - x_j^m/ \prod_{s \in \Upsilon_j} x_s)^2),$$

то графы изоморфны, и компоненты вектора x задают изоморфизм $\phi : v \to j$, согласно соответствию $r_v = x_j$.

Файзуллин Рашит Тагирович,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. 8-983-111-27-29.
E-mail: r.t.faizullin@mail.ru

О ДИСКРЕТНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ДРЕВОВИДНОЙ СЕТИ

Д.В. Филимонов

Дана связная неориентированная древовидная сеть T. В каждой вершине $v_1, ..., v_m$ сети T расположен фиксированный объект. Требуется разместить в вершинах сети n объектов, обслуживающих фиксированные. В одной вершине можно размещать произвольное количество объектов. Пусть $I = \{1, ..., m\}$, $J = \{1, ..., n\}$. Обозначим через $d(v_i, v_s)$ длину кратчайшего пути между вершинами v_i и v_s в сети T, $i, s \in I$.

Пусть $w_{ij} > 0$ – удельная стоимость связи, $c_{ij} \geq 0$ – максимальное допустимое расстояние между фиксированным объектом i и размещаемым j, $i \in I$, $j \in J$. Пусть $u_{jk} > 0$ – удельная стоимость связи, $b_{jk} \geq 0$ – максимальное допустимое расстояние размещаемых объектов j и k между собой, $j, k \in J$.

Размещением объектов назовем однозначное отображение $\pi : J \to I$, объект j размещается в вершину $v_{\pi(j)}$. Сформулируем дискретную минимаксную задачу размещения следующим образом. Необходимо найти размещение объектов в вершинах сети T, минимизирующее максимальную стоимость связи между объектами и удовлетворяющее указанным ограничениям:

$$\max(\max_{j,k \in J} u_{jk} d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}), \max_{i \in I,\ j \in J} w_{ij} d(v_i, v_{\pi(j)})) \to \min_{\pi} \tag{1}$$

$$d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}) \leq b_{jk},\ j, k \in J, \tag{2}$$

$$d(v_i, v_{\pi(j)}) \leq c_{ij},\ i \in I,\ j \in J. \tag{3}$$

В работе [1] предложен алгоритм решения задачи (1)-(3), который осуществляет бинарный поиск оптимального значения целевой функции в упорядоченном по неубыванию множестве возможных значений:

$$\{0\} \cup \{w_{ij} d(v_i, v_l) :\ i, l \in I,\ j \in J\} \cup \{u_{jk} d(v_i, v_l) :\ j, k \in J,\ j < k,\ i, l \in I,\ i < l\}. \tag{4}$$

Проверка допустимости одного значения и поиск оптимума осуществляются с трудоемкостью $O(n(m+n))$ и $O(n(m+n)\log(nm))$, соответственно. Общая трудоемкость алгоритма [1] равна $O(m^2 n^2 \log(nm))$ – сложности сортировки (4).

В данной работе достигнуто улучшение трудоемкости алгоритма в случае $n < m$ за счет замены сортировки значений целевой функции вида $u_{jk} d(v_i, v_l)$ сортировкой множества значений $d(v_i, v_l)$. При поиске оптимума среди значений $u_{jk} d(v_i, v_l)$ для каждого последовательно рассматриваемого значения u_{jk} осуществляется бинарный поиск по множеству значений $d(v_i, v_l)$ с трудоемкостью $O(n^3(m+n)\log(m))$. С учетом сложности сортировки множества значений вида $w_{ij} d(v_i, v_l)$ получаем итоговую трудоемкость $O(\max(n^3(m+n), nm^2)\log(m))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забудский Г.Г., Филимонов Д.В. Решение дискретной минимаксной задачи размещения на сети // Изв. вузов. Математика. – 2004. – N 5. – С. 33-36.

Филимонов Дмитрий Валерьевич, Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: fdvmail@mail.ru

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОИСК РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ТРЕХМЕРНЫМ РАЗМЕЩЕНИЕМ ГРУЗОВ

А.С. Филиппова, Н.А. Гильманова, У.А. Карипов

Задача маршрутизации с трёхмерным размещением грузов (Three-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem, 3L-CVRP) совмещает в себе построение маршрутов и трёхмерную загрузку контейнеров, что делает её одной из сложнейших задач комбинаторной оптимизации [1]. Целью является поиск совокупности маршрутов, двигаясь по которым, транспортные средства (ТС) с заданной грузоподъёмностью и параметрами грузового отсека доставят множеству клиентов заказы, состоящие из наборов ящиков-параллелепипедов.

Для решения задачи предлагается эвристический алгоритм трехфазового поиска решения. Вводится норма загрузки – доля объёма ТС, которая может быть заполнена грузом. Первой фазой является зонирование -– разбиение множества клиентов на зоны, каждая из которых обслуживается одним ТС; данный шаг выполняется методами кластеризации с учётом того, чтобы суммарная масса заказов по зоне не превосходила грузоподъёмности ТС, а суммарный объём заказов – объёма грузового отсека ТС, умноженного на норму загрузки. Далее для каждой зоны выполняется вторая фаза алгоритма – маршрутизация, заключающаяся в поиске некоторого количества наименьших по стоимости обходов пунктов зоны путём точного или эвристического решения задачи коммивояжёра. Полученные обходы перебираются по очереди, начиная с наиболее дешёвого, до тех пор, пока для некоторого обхода не будет найдено допустимое размещение ящиков внутри ТС. Поиск схемы размещения ящиков является третьей фазой алгоритма; для решения задачи трёхмерной загрузки контейнеров авторами используется одноточечный мультиметодный эволюционный алгоритм (1+1)-MMEA [2]. Внешний поиск решений выполняется с помощью изменения нормы загрузки. Предложенный алгоритм позволяет получать рациональные решения задачи 3L-CVRP за приемлемое время, что подтверждается численными экспериментами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gendreau M., Iori M., Laporte G., Martello S. A tabu search algorithm for a routing and container loading problem // Transportation science. – 2006. – Vol. 40, N 3. – P. 342-350.

2. Мухачёва Э.А., Бухарбаева Л.Я., Карипов У.А., Филиппов Д.В. Оптимизационные проблемы транспортной логистики: оперативное размещение контейнеров // Информационные технологии. – 2008. – N 7. – С. 17-22.

Филиппова Анна Сергеевна, Гильманова Надежда Александровна,
Карипов Урал Айдарович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: annamuh@mail.ru, hopediesthelast@yahoo.com, uk-design@yandex.ru

ОБ ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАЗИСЕ $\{x_1\&x_2\&x_3, x_1\vee x_2\vee x_3,\ \bar{x}_1\}$

В.В. Чугунова

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисе $\{x_1\&x_2\&x_3, x_1\vee x_2\vee x_3,\ \bar{x}_1\}$. Считаем, что схема из функциональных элементов реализует булеву функцию $f(x_1, x_2,\ ..., x_n) = f(\tilde{x})$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Число входов функциональных элементов равно числу существенных переменных функций, приписанных этим элементам. Предполагаем, что каждый вход элемента схемы независимо от всех других входов элементов с вероятностью ε $(0<\varepsilon<1/2)$ подвержен инверсным неисправностям. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на вход элемента значение a, $(a\in\{0,1\})$ с вероятностью ε может превратиться в значение $\bar{a}$.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определим как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $1-P(S)$.

Обозначим $P_\varepsilon(f) = \inf P(S)$, где инфимум берем по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Схему A из ненадежных элементов, реализующую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, назовем асимптотически оптимальной по надежности, если $P(A)\sim P(f)$ при $\varepsilon\to 0$.

Справедливы теоремы 1 и 2, содержащие утверждения о верхней и нижней оценках ненадежности схем.

Теорема 1. При $\varepsilon\le 1/200$ любую булеву функцию $f(\tilde{x})$ в базисе $\{x_1\&x_2\&x_3, x_1\vee x_2\vee x_3,\ \bar{x}_1\}$ можно реализовать такой схемой C, ненадежность которой $P(C)\le 3\varepsilon+\varepsilon^2$.

Пусть $K(n)$ – множество булевых функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, содержащее функции $\bar{x}_i, x_i$ (где $i=\overline{1,n}$) и константы 0, 1.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon\le 1/10$, $f(\tilde{x})$ – булева функция, $f\notin K(n)$, и S – любая схема, реализующая f в базисе $\{x_1\&x_2\&x_3, x_1\vee x_2\vee x_3,\ \bar{x}_1\}$. Тогда $P(S)\ge 3\varepsilon-6\varepsilon^2$.

Таким образом, из теорем 1 и 2 следует, что в базисе $\{x_1\&x_2\&x_3, x_1\vee x_2\vee x_3,\ \bar{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах функциональных элементов почти все булевы функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (кроме констант 0, 1 и функций $\bar{x}_i, x_i$, $i=\overline{1,n}$) можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon\to 0$) равной 3ε, где ε – вероятность ошибки на каждом входе функционального элемента.

Чугунова Варвара Валерьевна,
Пензенский государственный университет,
ул. Красная, 40, Пенза, 440026, Россия, тел. (8412) 36-80-68.
E-mail: burchug@mail.ru

О ЛОКАЛЬНЫХ БЛОЧНЫХ ЭЛИМИНАЦИОННЫХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

О.А. Щербина

Использование локальной информации [1] при разработке методов декомпозиции для решения больших разреженных дискретных задач является весьма актуальной, причем упомянутые задачи принадлежат как области дискретной оптимизации (ДО), так и области искусственного интеллекта, баз данных, линейной алгебры.

В [2] предложен общий класс локальных элиминационных алгоритмов (ЛЭА) вычисления информации для решения дискретных разреженных задач, позволяющих осуществлять вычисление *глобальной информации* с помощью *локальных вычислений*, анализируя окрестности элементов задачи.

Процедура ЛЭА может быть использована для элиминации не только отдельных переменных (что целесообразно в случае большой разреженности матрицы ограничений), но и для элиминации множеств (блоков) переменных. Если задача ДО разбита на блоки, соответствующие подмножествам переменных, то блочная структура задачи ДО может быть описана с помощью структурного конденсированного графа, мета-вершины которого соответствуют блокам, а мета-ребра соответствуют смежным блокам. Такой конденсированный граф называется *фактор-графом*. Если структура фактор-графа оказывается проще структуры исходного графа (является, например, деревом), то соответствующая задача ДО может быть эффективно решена (при этом для решения локальных подзадач ДО, соответствующих блокам, могут быть использованы современные решатели).

Представляет интерес нахождение разбиения, состоящего из классов *неразличимых* переменных (две переменных называются *неразличимыми*, если они имеют совпадающие замкнутые окрестности), Это разбиение образует отношение эквивалентности, которое порождает разбиение на классы эквивалентных между собой элементов. Можно найти фактор-граф, соответствующий такому разбиению, который является более сжатым графовым представлением структуры разреженной задачи.

Рассматривается блочная элиминационная игра, блочное элиминационное дерево (ЭД) и построение соответствующей древовидной декомпозиции, используя ЭД.

Работа поддержана австрийским грантом FWF P20900.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев Ю.И. Избранные научные труды. – М.: Магистр, 1998.
2. Щербина О.А. Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, N 1. – С. 161–177.

Щербина Олег Александрович,
University of Vienna,
Nordbergstr. 15, Vienna, 1090, Austria, тел. (+431) 4277-50660, факс (+431) 4277-50670.
E-mail: oleg.shcherbina@univie.ac.at

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Т.О. Баянова

Рассматривается задача многокритериального принятия решений, представленная в [1]. Функция эффективности для оценивания альтернатив имеет вид

$$\varphi(\nu) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nu_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \geq i}}^{m} \alpha_{ij} \nu_i \nu_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k \geq j \geq i}}^{m} \alpha_{ijk} \nu_i \nu_j \nu_k. \tag{1}$$

Задача отыскания коэффициентов для (1) по сравнению с алгоритмом из [1], где оценочная функция представлена в виде полинома 2-го порядка, в вычислительном отношении существенно усложняется, поскольку требование монотонности φ по ν_j, т.е. неотрицательности производной по ν_j порождает нелинейные ограничения в задаче. Это значит, что вспомогательная задача превращается в задачу нелинейного программирования.

Для разрешимости задачи сузим класс рассматриваемых задач до таких, где выполняется условие выпуклости или вогнутости функции по каждому аргументу.

Показано, что экстремальная задача для оценочной функции в виде полинома 3-го порядка, удовлетворяющего условиям выпуклости функции по всем аргументам ν_j, сводится к задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned}
& I = \textstyle\sum_{d,l} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \geq i}}^{m} \alpha_{ij} c_i c_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k \geq j \geq i}}^{m} \alpha_{ijk} c_i c_j c_k) \to max \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \geq i}}^{m} \alpha_{ij} + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k \geq j \geq i}}^{m} \alpha_{ijk} = 1, \\
& 0 \leq m_{d,l} \leq \textstyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \geq i}}^{m} \alpha_{ij} c_i c_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k \geq j \geq i}}^{m} \alpha_{ijk} c_i c_j c_k \leq M_{d,l} \leq 1, \\
& \alpha_{ii} + (\delta^r, \alpha^i) \geq 0, \quad r = \overline{1, 2^m}, \ i = \overline{1, m},
\end{aligned}$$

где $c_i = \nu_i(x_d) - \nu_i(x_l)$, $c_{ij} = \nu_i(x_d)\nu_j(x_d) - \nu_i(x_l)\nu_j(x_l)$, $c_{ijk} = \nu_i(x_d)\nu_j(x_d)\nu_k(x_d) - \nu_i(x_l)\nu_j(x_l)\nu_k(x_l)$. Прикладные аспекты задачи рассмотрены в [2].

Работа поддержана грантом молодых ученых Республики Бурятия (2009).

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев С.Н., Селедкин А.П. Синтез функции эффективности в многокритериальных задачах принятия решений // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1980. – N 3. – С. 186-190.
2. Васильев С.Н., Батурин В.А., Баянова Т.О. Многокритериальное принятие решений, основанное на получении оценочной функции в виде полинома третьего порядка // Управление большими системами. – М.: ИПУ РАН, 2008. – Вып. 22. – С. 5-20.

Баянова Туяна Очировна,
Отдел региональных экономических исследований
при Президиуме Бурятского научного центра СО РАН,
ул. Сахьяновой, 8, Улан-Удэ, 670047, Россия, тел. (3012) 43-56-18.
E-mail: bayanova5@rambler.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФЕЙЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С УБЫВАЮЩИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А.С. Величко

В работе [1] аппарат итерационных процессов фейеровского типа с оператором проекции используется для разработки методов решения систем линейных уравнений (неравенств), соответствующих необходимым и достаточным условиям экстремума для задач линейного программирования. В данной работе рассматривается подход фейеровских итерационных последовательностей с убывающим возмущением [2,3] для разработки алгоритмов, в том числе параллельных, для решения выпуклых экстремальных задач с большим количеством линейных ограничений типа неравенств.

Для декомпозиции решения экстремальной задачи большой размерности $\min\limits_{x \in V} h(x)$, где $h(\cdot)$ – конечная выпуклая функция на множестве $V = \bigcap C_i$, рассматривается итерационная последовательность $x^{s+1} = \mathcal{F}(x^s + z^s), s = 0, 1, \ldots$, где $\mathcal{F}$ – фейеровский оператор, $z^s \to 0$ – убывающее при $s \to +\infty$ малое возмущение. Вектор z^s выбирается равным $-\lambda_s g^s$, где $\lambda_s \to 0$ – убывающие шаговые множители, g^s – градиент функции $h(\cdot)$ в точке x^s. В программной реализации параллельного алгоритма в качестве оператора $\mathcal{F}$ предлагается использовать выпуклую комбинацию проекций на отдельные множества C_i линейных ограничений типа неравенств.

Для решения задачи вычисления проекции используется алгоритм, разработанный в работе [4]. Численные эксперименты для последовательной версии алгоритма, реализованного на Octave, показывают линейную зависимость числа операций от количества ограничений задачи и близкую к полиномиальной оценку практической вычислительной сложности с показателем степени (по числу ограничений задачи) порядка 4. Параллельный алгоритм реализован с помощью пакета MPI Toolbox for Octave (http://atc.ugr.es/javier-bin/mpitb).

Работа поддержана грантами ДВО РАН 09-III-А-01-004, РФФИ 09-01-00042-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. – Екатеринбург: УрО РАН, 2005.
2. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, Вып. 12. – С. 2121-2128.
3. Нурминский Е.А. Фейеровские процессы с малыми возмущениями // Доклады АН. – 2008. – Т. 422, Вып. 5. – С. 601-605.
4. Нурминский Е.А. Проекция на внешне заданные полиэдры // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, Вып. 3. – С. 387-396.

Величко Андрей Сергеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (4232) 31-04-04, факс (4232) 31-04-52.
E-mail: vandre@dvo.ru

О СИМПЛИЦИАЛЬНО ПОЛИТОПИАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЯХ

Д.В. Груздев

Через $\Gamma_i(M)$ обозначим множество i-мерных граней d-мерного выпуклого многогранника (d-мерного политопа) $M \subset \mathrm{R}^d$, $i = -1, \ldots, d$. Тогда $\Gamma_{-1}(M) = \{\emptyset\}$ и $\Gamma_d(M) = \{M\}$. Положим $\Gamma(M) = \bigcup_{i=-1}^{d} \Gamma_i(M)$ и $\Gamma^{\partial}(M) = \bigcup_{i=-1}^{d-1} \Gamma_i(M)$. Через $\partial(M)$ обозначим границу политопа M. *Триангуляцией* d-мерной точечной конфигурации A (конечного множество точек из R^d, выпуклая оболочка $[A]$ которого d-мерна) называется такое множество $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ d-мерных симплексов $S_1, \ldots, S_t$ с вершинами из A, что $\bigcup_{j=1}^{t} S_j = [A]$ и пересечение любых двух симплексов из T является их общей гранью (возможно, пустой). Положим $\Gamma^{\partial}(T) = \{F \in \bigcup_{j=1}^{t} \Gamma(S_j) \ : \ F \subset \partial([A])\}$. *Триангуляцией* политопа M называется триангуляция точечной конфигурации $\Gamma_0(M)$ его вершин. Через $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ обозначим соответственно множество триангуляций симплициальных политопов, множество триангуляций политопов и множество триангуляций точечных конфигураций.

Триангуляцию $T \in \mathcal{T}_2$ назовем *симплициально политопиальной*, если для нее существует такой симплициальный политоп P, что симплициальные комплексы $\Gamma^{\partial}(T)$ и $\Gamma^{\partial}(P)$ изоморфны. Для $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$ через $WR(\mathcal{T})$, $Sh(\mathcal{T})$ и $SP(\mathcal{T})$ обозначим соответственно множества слаборегулярных (weakly regular) [2], разворачиваемых (shellable) [2] и симплициально политопиальных триангуляций из $\mathcal{T}$.

Известно [2], что $WR(\mathcal{T}_2) \subset Sh(\mathcal{T}_2)$. В [2] построена триангуляция из $Sh(\mathcal{T}_0) \backslash WR(\mathcal{T}_2)$, а в [1] построена триангуляция из $\mathcal{T}_0 \backslash Sh(\mathcal{T}_2)$, являющаяся модификацией известного примера Rudin триангуляции из $\mathcal{T}_2 \backslash Sh(\mathcal{T}_2)$. Из [1] также следует существование триангуляции из $(\mathcal{T}_1 \backslash SP(\mathcal{T}_2)) \cap (\mathcal{T}_1 \backslash Sh(\mathcal{T}_2))$.

Для $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathrm{R}^d$ положим $\mu(v) = (v_1, \ldots, v_d, 0) \in \mathrm{R}^{d+1}$, а для $M \subset \mathrm{R}^d$ положим $\mu(M) = \{\mu(w) \ : \ w \in M\}$. Для триангуляции T d-мерной точечной конфигурации положим $\eta(T) = \{[\mu(S), e_{d+1}] \ : \ S \in T\}$, где $e_{d+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathrm{R}^{d+1}$.

ЛЕММА. 1. $WR(\mathcal{T}_2) \subset SP(\mathcal{T}_2)$.

2. Если $T \in Sh(\mathcal{T}_0) \backslash WR(\mathcal{T}_2)$, то $\eta(T) \in (\mathcal{T}_1 \backslash SP(\mathcal{T}_2)) \cap (Sh(\mathcal{T}_1) \backslash WR(\mathcal{T}_2))$.

3. Если $T \in \mathcal{T}_0 \backslash Sh(\mathcal{T}_2)$, то $\eta(T) \in (\mathcal{T}_1 \backslash SP(\mathcal{T}_2)) \cap (\mathcal{T}_1 \backslash Sh(\mathcal{T}_2))$.

ТЕОРЕМА. $\emptyset \neq WR(\mathcal{T}) \subset Sh(\mathcal{T}) \cap SP(\mathcal{T}) \subset SP(\mathcal{T})$ при $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$;

$\emptyset \neq Sh(\mathcal{T}) \backslash SP(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T} \backslash SP(\mathcal{T})$ при $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 09-01-00545-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Connelly R., Henderson D. W. A convex 3-complex not simplicially isomorphic to a strictly convex complex // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1980. – Vol. 88. – P. 299-306.
2. Lee C. W. Regular triangulations of convex polytopes // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. – 1991. – Vol. 4. – P. 443-456.

Груздев Дмитрий Валентинович,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (831) 465-78-81.
E-mail: gruzdevdv@mail.ru

О ПРИМЕНЕНИИ БИЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ ВОГНУТОЙ МИНОРАНТЫ К ПОЛИНОМАМ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

А.Р. Ершов

В работе рассматривается метод построения вогнутой миноранты к липшицевой функции $f(\mathbf{x})$, явно заданной на координатном параллелепипеде

$$D = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1 \ldots, n\}$$

и представленной в виде полинома или дробно-рациональной функции. Под явно заданными функциями понимаются функции, заданные аналитически в виде формул вида $y = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ - вектор в пространстве R^n.

Известно, что полином или дробно-рациональную функцию $f(\mathbf{x})$ можно представить в виде некоторой композиции функций возведения в степень, умножения, деления, сложения и вычитания. В [1] были предложены методы построения вогнутой миноранты к $f(\mathbf{x})$.

В данной работе $f(\mathbf{x})$ аппроксимируется опорной билинейной функцией $f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$ [2], где z_1, z_2 – линейные функции от $\mathbf{x}$. Использование свойств выпуклых опорных функций к билинейной функции [3] и монотонность билинейной функции по z_1, z_2 позволяет улучшить построение миноранты к функции $\mathbf{x}$. Данный подход обобщается на случай функций, представимых в виде произведения и частного линейных, выпуклых и невыпуклых липшицевых функций.

Приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующие значительно лучшие характеристики по сравнению с изложенными в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов А.Р., Хамисов О.В. Автоматическая глобальная оптимизация // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара. – Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 235-244.
2. Konno H. Bilinear Programming: Part 1. An Algorithm for solving bilinear problems // Technical Report N 71-9, Operations Research House, Stanford University. – 1971.
3. Al-Khayyal F.A., Falk J.E. Jointly Constrained Biconvex Programming // Mathematics of Operations Research. – 1983. – Vol. 8, N 2. – P. 273-286.

Ершов Андрей Рудольфович,
Институт систем энергетики им. Л.М. Меленьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 644033, Россия,
тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: ayershov@acm.org

МЕТОД С ПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ НАПРАВЛЕНИЙ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУР АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ

И.Я. Заботин

Предлагается метод решения задачи псевдовыпуклого программирования, в котором подходящие направления задаются в виде линейной комбинации градиентов целевой функции и функций активных ограничений. Для решения вспомогательных задач поиска направлений используются разработанные процедуры аппроксимации их допустимых множеств многогранными множествами.

Решается задача $\min\limits_{x\in D} f_0(x)$, где $D=\{x\in R_n : f_j(x)\le 0, j\in J\}$, $f_0(x)$, $f_j(x)$, $j\in J$, – псевдовыпуклые непрерывно дифференцируемые в R_n функции, множество D удовлетворяет условию Слейтера. Предлагаемый метод заключается в следующем. Пусть построено приближение $x_k\in D$. При $\varepsilon_k\ge\varepsilon>0$ вычисляется $J_k=\{j\in J : -\varepsilon_k\le f_j(x_k)\}$, $I_k=\{i\in J_k\cup\{0\} : f_i'(x_k)\ne 0\}$, $c_i^k=\left\langle f_0'(x_k), f_i'(x_k)\right\rangle$, $i\in I_k$, и отыскиваются числа $\alpha_i(x_k)$, $i\in I_k$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i\in I_k} c_i^k\alpha_i(x_k)\le\sigma_k\min\{\sum_{i\in I_k} c_i^k\alpha_i \mid f_j(x_k+\sum_{i\in I_k}\alpha_i f_i'(x_k))\le 0, j\in J\}, \tag{1}$$

$0<\sigma\le\sigma_k\le 1$. Если $\sum\limits_{i\in I_k} c_i^k\alpha_i(x_k)=0$, то x_k – решение задачи. В противном случае полагается $s_k=\sum\limits_{i\in I_k}\alpha_i(x_k)f_i'(x_k)$ и вычисляется $x_{k+1}=x_k+\beta_k s_k\in D$, $\beta_k>0$.

Доказана сходимость метода при различных способах задания шагов β_k. Предложена модификация метода, позволяющая комбинировать его с любыми другими релаксационными методами, не исследуя дополнительно сходимость этих комбинированных алгоритмов.

В случае, когда (1) является задачей нелинейного программирования, для ее решения предлагаются итерационные процедуры, которые используют операцию погружения ее допустимого множества в некоторые многогранники и позволяют находить значения $\alpha_i(x_k)$ при $\sigma_k<1$ с помощью решения конечного числа задач линейного программирования. Если x_k является внутренней точкой D, то одна из этих процедур близка к методу отсечений В.П. Булатова.

Заботин Игорь Ярославич,
Казанский государственный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия, тел. (843) 231-54-53.
E-mail: Igor.Zabotin@ksu.ru , IYaZabotin@mail.ru

ЗАДАЧА КОРРЕКЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

А.В. Зыкина

Пусть $x \in X$, где X – непустое выпуклое множество в R^n, $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ – выпуклые скалярные функции на множестве X. Рассматривается задача нахождения $x \in R^n$ при условиях $f_1(x) \le 0, \ldots, f_m(x) \le 0$, $x \in X$, или, в векторном виде

$$F(x) \le 0, \quad x \in X. \tag{1}$$

При отсутствии решения задачи (1) классическая схема коррекции [1] состоит в последовательном решении двух задач:
– выбор оптимального (по некоторому критерию качества) параметра коррекции $y \in Y_\sigma$, $Y_\sigma \subseteq R^m$;
– решение аппроксимирующей задачи для системы неравенств (1) с полученным оптимальным параметром коррекции y^*.

Предлагается заменить решение этих двух задач решением следующей задачи: найти параметр $x^* \in X$, такой что

$$\Phi(x^*, x) \ge 0 \quad \forall\, x \in X. \tag{2}$$

Здесь $\Phi(x^*, x) = \langle y(x^*),\ F(x) - F(x^*)\rangle$, где $y(x^*)$ – решение параметрической нелинейной задачи дополнительности $\omega = P(y) - F(x)$, $\omega \ge 0$, $y \ge 0$, $y^T\omega = 0$ при значении параметра $x = x^*$.

Теорема. *Пусть непрерывное отображение P удовлетворяет условию сильной монотонности и $P(0) = 0$, функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, выпуклы и отображение F удовлетворяет условию Липшица на непустом выпуклом множестве X. Решение задачи (2) существует, если выполнено одно из следующих условий:*

1) множество X ограничено;

2) найдется непустое подмножество $Z \subseteq X$ такое, что для каждого $x \in X \backslash Z$ существует $z \in Z$, для которого выполняется неравенство $F(z) < F(x)$.

Предпочтительность постановки задачи коррекции системы неравенств (1) в виде (2) в том, что для решения задачи (2) возможно использование мощного вычислительного аппарата экстрапроксимальных и экстраградиентных методов. В простейшем случае выбора $P(y) = Ey$, где E – единичная матрица, задача (2) дает решение несовместной системы неравенств (1) по методу наименьших квадратов.

Работа поддержана целевой программой “Развитие научного потенциала высшей школы” (рег. номер 2.1.1/2763).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Скарин В.Д., Хачай М.Ю. Математические методы в экономике. – Екатеринбург: УрО РАН, 2000.

Зыкина Анна Владимировна,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-22-08.
E-mail: avzykina@mail.ru

ЭКСТРАПРОКСИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

А.В. Зыкина, О.Н. Канева

В классической задаче прогнозирования по минимуму дисперсии [1] требуется найти случайную величину $\zeta = \zeta(t_0)$, минимизирующую квадратичный функционал

$$\min_{\zeta \in Q(t_0)} \|\eta(t_0 + t_\pi) - \zeta(t_0)\|, \tag{1}$$

где область $Q(t_0)$ задается условием, исключающим возникновение систематических ошибок:

$$M\eta(t_0 + t_\pi) - M\zeta(t_0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\zeta(t_0)$– оценка упрежденного значения случайной величины $\eta(t_0 + t_\pi)$, характеризующей истинное значение интересующего нас процесса, t_0– текущий момент, t_π– интервал прогнозирования.

При постановке задачи о прогнозе случайных процессов исключение систематических ошибок экстраполяции не является обязательным требованием рационального прогнозирования, более того, в ряде случаев целесообразно расширить область определения задачи и заменить требование о нулевых систематических ошибках (2) ограничениями на их величину $y \neq 0$.

В этом случае задача (1), (2) рассматривается как задача параметрической оптимизации, для которой строится параметрическое семейство седловых функций и при классических условиях регулярности для построения равновесного решения предлагается итеративный процесс экстрапроксимального типа [2].

Работа поддержана целевой программой "Развитие научного потенциала высшей школы" (рег. номер 2.1.1/2763).

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. – М.: Советское радио, 1974.
2. Зыкина А.В. Обратная дополнительность в модели дефицита ресурсов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, N 11. – С. 1968-1978.

Зыкина Анна Владимировна, Канева Ольга Николаевна,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-22-08.
E-mail: avzykina@mail.ru, okaneva@yandex.ru

О СХЕМЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ С МОДИФИЦИРОВАННЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛУКОЭРЦИТИВНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ

Н.Н. Кушнирук, Р.В. Намм

Исследуется модельная задача с трением [1]. Отыскание приближенного решения модельной задачи с трением осложняется недифференцируемостью функционала энергии. Задача безусловной минимизации недифференцируемого функционала сводится к задаче условной минимизации дифференцируемого функционала. Для решения полученной полукоэрцитивной задачи применяется схема двойственности, основанная на модифицированном функционале Лагранжа.

Задача условной оптимизации имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{J}(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f\, v\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} g\,\gamma\, v\, d\Gamma \to \min, \\ v \in G = \{w \in W_2^1(\Omega) : \gamma\, w \le 0 \text{ на } \Gamma\}. \end{cases}$$

Модифицированный функционал Лагранжа для данной задачи записывается в виде [2]

$$M(v,l) = \tilde{J}(v) + \frac{1}{2r}\int\limits_{\Gamma} \left\{ \left[(l + r\,\gamma\, v)^+ \right]^2 - l^2 \right\} d\Gamma,$$

где $r > 0$ – $const$; $(l + r\,\gamma\, v)^+ = \max\{0, \; l + r\,\gamma\, v\}$.

Для отыскания седловой точки применяется метод Удзавы. Доказано, что последовательность, полученная по данному методу, сходится в $W_2^1(\Omega) \times L_2(\Gamma)$ к седловой точке при любом выборе начальной точки $l^0 \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ и любом фиксированном параметре $r > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979.
2. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. – М.: Наука, 1989.

Кушнирук Надежда Николаевна,
Амурский государственный университет,
Игнатьевское шоссе, 21, Благовещенск, 675027, Россия, тел. (4162) 39-46-55.
E-mail: knnamursu@mail.ru

Намм Роберт Викторович,
Тихоокеанский государственный университет,
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, 680035, Россия, тел. (4212) 37-52-03.
E-mail: namm@mail.khstu.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

А.А. Лемперт

При моделировании различных технологических процессов зачастую возникает необходимость описания динамических систем со сложной, в том числе сетевой структурой. Впервые подобные задачи рассматривались в работе [1], а для частного случая – задачи оптимального управления многоэтапными процессами – в [2] были предложены численные методы последовательного улучшения управления.

В настоящей работе представлены результаты исследования задачи оптимального управления с сетевой структурой в следующей постановке.

Пусть задан ориентированный конечный граф G. На каждой дуге $e = \{i, j\}$ состояние процесса $x^{ij}(t)$, где $t \in [\tau_i, \tau_j]$, описывается своей математической моделью в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с управлением. Начальные условия $x^{ij}(\tau_i)$ для системы ОДУ на каждой дуге $e = \{i, j\}$ зависят от состояния процесса на дугах, входящих в вершину i, и от набора параметров.

Требуется минимизировать функционал, зависящий от состояния процесса в концевых вершинах графа G.

Для решения данной задачи задачи применяется подход, базирующийся на достаточных условиях оптимальности В.Ф. Кротова, который ранее успешно применялся для классических задач оптимального управления [3].

Автором развиваются методы последовательных улучшений второго порядка, для их построения используются квадратичные аппроксимациях функции Кротова. Показано, что если исходный управляемый процесс не удовлетворяет условиям стационарности, то он улучшается предложенными алгоритмами.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00156-а и грантом Президента РФ НШ–1676.2008.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов А.Г., Расина И.В. Сложные процессы и достаточные условия относительной оптимальности // Управляемые системы. – Новосибирск, 1979. – N 18. – С. 39-46.
2. Батурин В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 2003. – Т. 8. – С. 103-108.
3. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. – Новосибирск: Наука, 1997.
4. Лемперт А.А., Батурин В.А. Методы слабого улучшения в задаче оптимального управления на сети операторов // Тр. Междунар. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке и образовании”. – Павлодар, 2006. – Т. 2. – С. 76-97.

Лемперт Анна Ананьевна,
Институт динамики систем и теории управлении СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 45-30-30.
E-mail: lempert@icc.ru

О ПОИСКЕ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ В КВАДРАТИЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧАХ

А.В. Малышев, А.С. Стрекаловский

Рассматривается задача поиска гарантированного решения квадратично-линейной двухуровневой задачи:

$$\left.\begin{array}{c}\sup\limits_{y}\{\langle c+Cx,x\rangle+\langle c_1-C_1y,y\rangle \mid y\in Y_*(x,\varepsilon)\}\downarrow\min\limits_{x},\ \ Ax\le a,\\ \text{где } Y_*(x,\varepsilon)\overset{\triangle}{=}\{y\in Y(x)\mid \langle d,y\rangle\le\inf\limits_{z}[\langle d,z\rangle\mid z\in Y(x)]+\varepsilon\},\end{array}\right\}\qquad(\mathcal{BP}(\varepsilon))$$

где $x\in I\!R^m, Y(x)=\{y\in I\!R^n \mid A_1x+B_1y\le b\}, A\in I\!R^{p\times m}, A_1\in I\!R^{q\times m}, B_1\in I\!R^{q\times n}$, $C=C^T>0, C_1=C_1^T>0$, а $Y_*(x,\varepsilon)$ — множество ε-решений задачи нижнего уровня.

Также рассматривается следующая двухуровневая задача в оптимистической постановке:

$$\left.\begin{array}{c}F(x,y)=\langle c+Cx,x\rangle+\langle c_1-C_1y,y\rangle\downarrow\min\limits_{x,y},\ \ x\in X,\\ y\in Y_{**}(x,\delta,\mu)\overset{\triangle}{=}\{y\in Y(x)\mid G(y,\mu)\le\inf\limits_{z}[G(z,\mu)\mid z\in Y(x)]+\delta\},\end{array}\right\}\qquad(\mathcal{BP}_o(\delta,\mu))$$

где $G(y,\mu)\overset{\triangle}{=}\langle d-\mu c_1+\mu C_1y,y\rangle$ — целевая функция нижнего уровня со штрафом, $\mu>0$ — штрафной множитель, а $\delta\ge0$ — точность решения задачи нижнего уровня.

Предположим, что множество $X=\{x\mid Ax\le a\}$ ограничено и множество $Y(x)$ ограничено для $\forall x\in X$, так что $\exists Y\subset I\!R^n: Y(x)\subseteq Y\ \ \forall x\in X,\ \ Y$ — компакт. В силу сделанных предположений имеем:

$$\exists F_-,F_+\in I\!R: F_-\le F(x,y)\le F_+\ \ \forall(x,y)\in X\times Y. \qquad (1)$$

Следующая теорема (см. также [1]) была доказана с использованием (1) и полунепрерывности снизу многозначного отображения $x\to Y_*(x,0)$ [2].

Теорема. Пусть выполнены предположения об ограниченности $X, Y(x)$ и последовательности τ_k,δ_k,μ_k таковы, что $\tau_k\downarrow0,\delta_k\downarrow0,\mu_k\downarrow0,\dfrac{\delta_k}{\mu_k}\downarrow0$. Тогда любая предельная точка последовательности (x^k,y^k) τ_k-решений задач $(\mathcal{BP}_o(\delta_k,\mu_k))$ является гарантированным решением двухуровневой задачи $(\mathcal{BP}(0))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Молодцов Д.А. О решении одного класса неантагонистических игр // ЖВМ и МФ. – 1976. – Т. 56, N 6. – С. 1469-1484.
2. Dempe S., Dutta J., Mordukhovich B.S. New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming // Optimization. – 2007. – Vol. 56, N 5. – P. 577-604.

Малышев Антон Валентинович, Стрекаловский Александр Сергеевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 42-71-00, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: anton@irk.ru, strekal@icc.ru

ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ОШИБКИ ПРИ КОМПЬЮТЕРНЫХ РАСЧЕТАХ

И.В. Мокрый, О.В. Хамисов, А.С. Цапах

Долгое время считалось, что основной причиной накопления погрешности при компьютерных расчётах является округление младшего разряда чисел при ограниченной разрядной сетке. Однако практика вычислений показывает, что округление (понимаемое в традиционном смысле) на самом деле вносит довольно незначительный вклад в накопление вычислительной ошибки. Основные же источники вычислительной ошибки существенно иные. В докладе рассматриваются два типа ошибок.

Ошибка первого типа. Одномоментная потеря старших разрядов, возникающая при вычитании “близких” чисел. Под “близкими” числами здесь имеются в виду числа, у которых совпадают порядки и при этом ещё совпадают несколько старших разрядов мантиссы. При вычитании таких чисел происходит обнуление нескольких старших разрядов, в результате чего возникает число с укороченной мантиссой, в которой часть разрядов заполнена нулями. После нормализации получаем число с ограниченным количеством значащих цифр в мантиссе – меньшим, чем у остальных чисел.

Ошибка второго типа. Несогласованность порядков при сложении, которая имеет место в тех случаях, когда разность порядков двух слагаемых превышает количество десятичных разрядов в машинном представлении числа. В этом случае меньшее слагаемое оказывается в буквальном смысле “за пределами” разрядной сетки, в которой располагается большее слагаемое, а значит и никаким образом не может повлиять на результат сложения. В частности, при многократном повторении такой ситуации накопленная “потенциальная сумма” неучтённых слагаемых может полностью исказить результат вычислений, постепенно накапливаясь от младших разрядов к старшим.

Важно отметить, что эти ошибки суть разные явления. В докладе предлагается технология, позволяющая идентифицировать возникновение указанных выше ошибок в вычислительных алгоритмах. Данная технология учитывает количество верных значащих цифр в мантиссе, связанных с ошибками первого типа, а также накопление “малых” сумм, связанных с ошибками второго типа. Возможности предлагаемой технологии иллюстрируются на примере анализа программ, написанных на языке PASCAL, с указанием точек в программе, в которых возникают вычислительные ошибки первого и второго типов. Приводятся результаты тестирования на алгоритмах линейного и квадратичного программирования.

Мокрый Игорь Владимирович, Хамисов Олег Валерьевич,
Цапах Александр Соломонович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64, 42-11-20, 42-35-34.
E-mail: ygr@isem.sei.irk.ru, khamisov@isem.sei.irk.ru, tsapakh@isem.sei.irk.ru

АЛГОРИТМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО И ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Е.А. Нурминский, Н.Б. Шамрай

Формализация широкого круга экономико-математических проблем, например, таких как поиск транспортного или финансового равновесия, прогнозирование миграционных, пассажирских или товарных потоков и др., приводит к задачам решения вариационных неравенств. На практике такие задачи имеют сложную структуру и большую размерность, поэтому трудно проверить выполнение условий сходимости существующих методов решения вариационных неравенств [1], да и само их применении представляется весьма проблематичным.

Применение принципов декомпозиции и параллелизации может помочь в построении универсальных методов решения вариационных неравенств большой размерности, не требующих сильных предположений о свойствах задачи. Одним из перспективных направлений для разработки подобных методов являются обобщения проективных алгоритмов, которые привлекают простотой своих итерационных схем и отсутствием требования гладкости к основным отображениям исходной задачи.

В работе предлагаются численные методы решения вариационных неравенств, основанные на идеях последовательного и параллельного проектирования на выпуклые замкнутые супермножества, пересечение которых дает допустимое множество исходной задачи [2]. Показана сходимость методов для вариационных неравенств с основным отображением, удовлетворяющим свойству локальной сильной аттрактантности. Общая схема доказательства сходимости опирается на теорию фейеровских процессов с малыми возмущениями [3]. В докладе будут представлены результаты численных экспериментов по установлению скорости сходимости разработанных методов.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-90413-Укр_ф_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems (Volume II). – Springer, 2003.
2. Шамрай Н.Б. Метод последовательных проекций для решения вариационных неравенств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – на рецензии.
3. Нурминский Е.А. Проекция на внешне заданные полиэдры // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, Вып. 3. – С. 387-396.

Нурминский Евгений Алексеевич, Шамрай Наталья Борисовна,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел./факс (4232) 31-04-04.
E-mail: nurmi@dvo.ru, shamray@dvo.ru

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА В ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧАХ

А.В. Орлов

При решении невыпуклых задач оптимизации с помощью подхода, основанного на теории глобального поиска [1], одним из основных этапов является построение аппроксимации поверхности уровня выпуклой функции, задающей базовую невыпуклость в исследуемой задаче. При этом аппроксимация должна быть достаточно репрезентативной, чтобы можно было судить о том, является ли текущая точка, полученная с помощью алгоритма локального поиска, глобальным решением [1].

В настоящее время не разработано теоретически обоснованных методов построения репрезентативной аппроксимации для стандартных классов невыпуклых задач. На практике при численном счете эта проблема решается на основе накопленного ранее опыта построения аппроксимаций [1], поэтому разработка новых подходов к ее решению является актуальной задачей невыпуклой оптимизации.

В работе для невыпуклой задачи с билинейной структурой в целевой функции

$$\left.\begin{array}{c}\Phi(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} \dfrac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle + \dfrac{1}{2}\langle y, Dy\rangle + \langle d, y\rangle + \mu\langle v, b_1 - A_1x - B_1y\rangle \downarrow \min\limits_{x,y,v}, \\ (x,y,v) \in D \stackrel{\triangle}{=} \{(x,y,v) \in I\!R^{m+n+q} \mid Ax + By \le b, \quad A_1x + B_1y \le b_1, \\ D_1y + d_1 + xQ_1 + vB_1 = 0, \quad v \ge 0,\},\end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $c,\ x \in I\!R^m,\ \ d,\ d_1,\ y \in I\!R^n,\ \ b \in I\!R^p,\ \ b_1, v \in I\!R^q;\quad A,\ A_1,\ B,\ B_1,\ C = C^T \ge 0$, $D = D^T \ge 0,\ D_1 = D_1^T \ge 0,\ Q_1$ — матрицы соответствующего размера, $\mu > 0$ — параметр, которая возникает при решении квадратичных двухуровневых задач [2], разработан гибридный алгоритм глобального поиска.

Этот алгоритм с одной стороны, для построения аппроксимации поверхности уровня использует блоки генетических алгоритмов (селекция, кроссовер, мутация) [3], с другой — включает в себя специальные методы локального поиска, использующие билинейную структуру задачи $(\mathcal{P})$ [1, 4].

Работа поддержана грантами президента РФ МК-1497.2008.1 и НШ-1676.2008.1 и Фондом содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Биматричные игры и билинейное программирование. – М.: Физматлит, 2007.
2. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
3. Michalewicz Z. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. – New York: Springer-Verlag, 1994.
4. Орлов А.В. Численное решение задач билинейного программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, N 2. – С. 45–62.

Орлов Андрей Васильевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 45-30-82, факс. (3952) 51-16-16.
E-mail: anor@icc.ru

ПСЕВДОРЕШЕНИЯ
ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

А.В. Панюков, Т.В. Труфанова

Рассматривается интервальная система линейных неравенств [1] $\mathbf{A}x \le b$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{A} = \{[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] : \ i = 1, 2, \dots, m, \ j = 1, 2, \dots, n\}$. В качестве решения данной системы принимаются точки допустимого множества

$$S_{\mathbf{A}x\le b} = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = 1, 2, \dots, m, \ \text{при любых } a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] \right\}.$$

Если $S_{\mathbf{A}x\le b} = \emptyset$, то в качестве решения предлагается рассматривать множество допустимых точек системы неравенств с модифицированной правой частью $\tilde{b}(z) = b + z|b|$, $z \ge 0$, $|b| = (|b_1|, |b_2|, \dots, |b_m|)^T$.

Пусть $z^* = \inf\{z : \ S_{\mathbf{A}x\le\tilde{b}(z)} \ne \emptyset\}$. По аналогии с [2] псевдорешением исходной системы будем называть точки допустимого множества $S_{\mathbf{A}x\le\tilde{b}(z^*)}$.

Корректность введенного определения подтверждает

Теорема 1. *Для любой системы интервальных неравенств* $\mathbf{A}x \le b$ *при всех* $z \ge 1$ *множество* $S_{\mathbf{A}x\le\tilde{b}(z)} \ne \emptyset$.

Способ нахождения псевдорешения системы неравенств $\mathbf{A}x \le b$ дает

Теорема 2. *Существует решение* (x^{+*}, x^{-*}, z^*) *задачи линейного программирования*

$$\begin{gathered} z \to \min_{(x^+,\, x^-,\, z)} \\ \sum_{j=1}^{n} (\overline{a}_{ij}x_j^+ - \underline{a}_{ij}x_j^-) \le b_i + z|b_i|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j^+ \ge 0, \ x_j^- \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ z \ge 0, \end{gathered}$$

при этом $x^* = x^{+*} + x^{-*}$ *является псевдорешением системы* $\mathbf{A}x \le b$.

Таким образом, введенное в работе понятие "псевдорешение" интервальной системы линейных неравенств является вполне конструктивным и позволяет давать приемлемые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fiedler M., Nedoma J., Ramik J., Ron J., Zimmermann K. Linear optimization problems with inexact data. – New York: Springer, 2006. – P. 210.
2. Иванов В.К. О линейных некорректных задачах // ДАН СССР. – 1962. – Т. 145, N 2. – С. 270-272.

Панюков Анатолий Васильевич, Труфанова Татьяна Викторовна,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел./факс (351) 267-90-39.
E-mail: a_panyukov@mail.ru, tteu448@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Е.Г. Петрова

Рассмотрим линейную двухуровневую задачу в оптимистической постановке [1]:

$$\left.\begin{array}{c} F(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \langle c,x\rangle + \langle d,y\rangle \downarrow \min\limits_{x,y}, \\ (x,y)\in X \stackrel{\triangle}{=} \{x\in I\!R^m \mid Ax\le b\}, \\ y\in Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{Arg}\min\limits_{y}\left\{\langle d^1,y\rangle \mid y\in Y(x) \stackrel{\triangle}{=} \{y\in I\!R^n \mid A_1x+B_1y\le b^1\}\right\} \end{array}\right\} (\mathcal{BP})$$

где $A,\ A_1,\ B_1$ — матрицы размерности $(p\times m)$, $(q\times m)$, $(q\times n)$ соответственно, а $c\in I\!R^m$, $d,d^1\in I\!R^n$, $b\in I\!R^p$, $b^1\in I\!R^q$ — заданные векторы.

Известно [1], что, применяя теорию двойственности для задачи нижнего уровня, можно свести задачу $(\mathcal{P})$ к следующей невыпуклой задаче [2]:

$$\left.\begin{array}{c} \langle c,x\rangle + \langle d,y\rangle \downarrow \min\limits_{x,y,v}, \\ (x,y,v)\in S \stackrel{\triangle}{=} \{Ax\le b,\ \ A_1x+B_1y\le b^1,\ \ vB_1=-d^1,\ \ v\ge 0\}, \\ \langle d^1,y\rangle = \langle A_1x-b^1,v\rangle. \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

В работе предложен специальный метод локального поиска (СМЛП) для рассматриваемой задачи, состоящий в решении двойственной задачи к задаче нижнего уровня в $(\mathcal{BP})$ и задачи $(\mathcal{P})$ с фиксированным допустимым вектором. Доказано, что СМЛП позволяет найти критическую точку. Процедура глобального поиска в задаче $(\mathcal{P})$ строится в соответствии с теорией для задач с d.c. ограничениями [4]. Проведен обширный вычислительный эксперимент на задачах с большим количеством локальных экстремумов [3]. Решены задачи до размерности $m+n=1000$ с количеством ограничений 2500.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dempe S. Foundations of bilevel programming. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
2. Bard J.F. Practical bilevel optimization. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
3. Calamai P., Vicente L. Generating linear and linear-quadratic bilevel programming problems // SIAM Journal on Scientific Computing archive. – 1993. – Vol. 14, N 4. – P. 770-782.
4. Стрекаловский А.С. Об экстремальных задачах с d.c. ограничениями // ЖВММФ. – 2001. – Т. 41, N 12. – С. 1833-1843.

Петрова Елена Геннадьевна,
Интитут динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 644033, Россия, тел. (3952) 45-30-82.
E-mail: nekolyap@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Д. Скарин

В качестве исходной рассматривается несобственная задача выпуклого программирования 1-го рода [1]:

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x : f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — определенные на $\mathbb{R}^n$ выпуклые функции $(i = 0, 1, \ldots, m)$. При этом считается $X = \emptyset$, $\Lambda \ne \emptyset$, $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \inf\limits_x \{L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))\} > -\infty\}$.

Для (1) строится аппроксимирующая задача

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar\xi}\}, \tag{2}$$

где $X_\xi = \{x : f(x) \le \xi\}$, $\bar\xi = \arg\min\{\|\xi\| : X_\xi \ne \emptyset\}$.

Работа посвящена исследованию связей между (2) и задачей отыскания

$$\inf_x F(x, \lambda, r), \tag{3}$$

где функция $F(x, \lambda, r)$ может иметь одно из двух представлений:

$F_1(x, \lambda, r) = L(x, \lambda) + r \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^2}(x)$; $\quad F_2(x, \lambda, r) = f_0(x) + (\lambda, f^+(x)) + r \sum\limits_{i=1}^m f_i^{+^2}(x)$, $r > 0$.

На функции $F_i(x, \lambda, r)$ можно смотреть как на определенные модификации функций Лагранжа для задачи (1), а также как на некоторые варианты штрафных функций.

Отдельные результаты о связи между задачами (2) и (3) с $F = F_1$ излагались в [2]. Приведем пример использования функции $F_2(x, \lambda, r)$.

Теорема. *Пусть функция Лагранжа для задачи* (2) $L_{\bar\xi}(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \bar\xi\,)$ *имеет седловую точку* $[\tilde x, \tilde\lambda]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, *задача* (3) *с* $F = F_2$ *разрешима в некоторой точке* $x(\lambda, r)$. *Справедливы оценки*:

$$\|f^+(x(\lambda, r)) - \bar\xi\,\| \le \frac{\|\lambda - \tilde\lambda\|}{r}, \qquad |f_0(x(\lambda, r)) - f_0(\tilde x)| \le C(\lambda)\,\frac{\|\lambda - \tilde\lambda\|}{r},$$

где $C(\lambda) = \max\{\|\lambda\|, \|\tilde\lambda\|\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00399) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2081.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. – М.: Наука, 1983.

2. Скарин В.Д. Расширенная штрафная функция и оптимальная коррекция несобственных задач выпуклого программирования // Методы оптимизации и их приложения (тр. междунар. конф.). – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 1. – С. 203-209.

Скарин Владимир Дмитриевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (343) 375-34-23, факс (343) 374-25-81.
E-mail: skavd@imm.uran.ru

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ВАЖНОСТИ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

К.С. Сорокин

В докладе рассматривается вопрос о связи коэффициентов в свертках критериев в задачах многокритериальной оптимизации (или коэффициентов важности, как их нередко называют) и результирующих значений критериев эффективности. Вводится функция свертки общего вида $F : \operatorname{comp}\mathbb{R}^n \times \mathcal{A}^n \to \mathbb{R}^n$, эта функция по компактному множеству значений критериев эффективности $X \subset \mathbb{R}^n$ и вектору коэффициентов $\alpha \in \mathcal{A}^n = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T | \ \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}$ «возвращает» точку $x_\alpha \in X$.

На функцию F накладываются следующие три условия:

1. $\forall X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}^n$, $\exists x_\alpha \in S(X) : x_\alpha = F(X, \alpha)$ *(достаточность)*

2. $\forall X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$, $\forall x \in S(X)$, $\exists \alpha_x \in \mathcal{A}^n : x = F(X, \alpha_x)$ *(необходимость)*

3. $\forall X \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n$, $\forall i \in N, i \leqslant n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}^n : \alpha_i \geqslant \beta_i \Rightarrow F_i(X, \alpha) \geqslant F_i(X, \beta)$ *(монотонность)*

На «содержательном уровне» первое и второе условия означают, что перебирая все возможные $\alpha \in \mathcal{A}^n$ можно найти все максимальные по Слейтеру точки из X и только их, а третье задает соответствие между набором коэффициентов α и тем $x_\alpha \in X$, что соответствует этому набору, фактически обосновывая само название «коэффициенты важности» — если лицо, принимающее решение, при переходе от одного набора коэффициентов к другому не уменьшает $i-$ую компоненту набора коэффициентов, то значение $i-$ой компоненты критерия не может уменьшиться.

Например, функция $F(X, \alpha)$ для свертки Карлина (линейной) в предположении, что максимум каждый раз достигается только на одном $x \in X$, будет иметь вид $F_l(X, \alpha) = \operatorname*{argmax}_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, и удовлетворять только условию 1; соответственно, для свертки Гермейера (предполагается, что максимум каждый раз достигается только на одном $x \in X$): $F_g(X, \alpha) = \operatorname*{argmax}_{x \in X} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\alpha_i x_i\}$, в этом случае уже будут выполняться условия 1 и 2 при стандартном предположении положительности компонент всех возможных $x \in X$). Тем не менее, ни одна из сверток условию 3 не удовлетворяет.

В докладе обсуждается и доказывается следующая основная теорема.

Теорема. *Если $n = 2$, то существует функция F, удовлетворяющая условиям 1–3 (и можно построить ее явный вид). Если $n \geqslant 3$, то такой функции не существует.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
2. Подиновский В.В. Количественная важность критериев // Автоматика и телемеханика. – 2000. – N 5. – С. 110–123.
3. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. – М.: Физматлит, 2002.

Сорокин Константин Сергеевич,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, Москва, 119991, Россия, тел. (916) 915-56-32.
E-mail: CSorokin@cs.msu.su

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗАРЯДА В ДНК

А.С. Стрекаловский, В.А. Макаров

Рассматривается задача минимизации функционала полной энергии в модели переноса заряда в молекуле ДНК [2]:

$$\left.\begin{array}{c} F(x) = \langle x, Hx \rangle - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\,(x_i)^4 \downarrow \min\limits_x, \\ x \in X \overset{\triangle}{=} \{x \in I\!R^n \mid \varphi(x) = 0\}\,, \end{array}\right\} \qquad (P)$$

где H — трехдиагональная матрица размера $(n \times n)$ с неотрицательными компонентами, $k_i > 0\ \ i = 1, \dots n$, а $\varphi(x) \overset{\triangle}{=} \langle x,\ x \rangle - 1$.

Применяя к исходной задаче метод штрафов [3], получаем следующую задачу, равносильную исходной:

$$F_\mu(x) = \langle x, Hx \rangle - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i\,(x_i)^4 + \mu\varphi^2(x) \downarrow \min_x, \quad x \in I\!R^n. \qquad (P_\mu)$$

Нетрудно видеть, что целевая функция задачи (P_μ) является d.c. функцией [1], т.е. представима в виде разности двух выпуклых функций:

$$F_\mu\,(x, y) = g_\mu\,(x, y) - f_\mu\,(x, y)\,,$$

где

$$g_\mu(x) = \langle x, H_1 x \rangle + \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^2, \ \ f_\mu(x) = \langle x, H_2 x \rangle + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i\,(x_i)^4 + 2\mu(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - \mu.$$

Для решения задачи (P_μ) используется стратегия глобального поиска, основанная на условиях глобальной оптимальности [1]. Основными этапами глобального поиска являются локальный поиск и процедура выхода из стационарной (критической) точки. Проведен численный эксперимент, подтвердивший эффективность разработанных алгоритмов для данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003.
2. Лахно В.Д., Устинина М.Н. Компьютеры и суперкомпьютеры в биологии. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.

Стрекаловский Александр Сергеевич, Макаров Владимир Александрович,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 427100, факс (3952) 511616.
E-mail: strekal@icc.ru, shtrasser@gmail.com

О ПОИСКЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.С. Стрекаловский, М.В. Янулевич

Рассматривается следующая задача минимизации функционала:

$$J(u) = F(x(t_1)) + \int\limits_T [F^0(x(t),t) + f(u(t),t)]\,dt \downarrow \min_u, \qquad (\mathcal{P})$$

над линейной по состоянию системой обыкновенных дифференциальных уравнений на классе измеримых и ограниченных управлений, где $T = [t_0, t_1]$ и в дополнение к обычным предположениям для задачи оптимального управления (ОУ) функции $F(\cdot)$ и $F^0(\cdot, t)$, $t \in T$ представимы в виде разности выпуклых функций (см. [1,2]).

Для задачи $(\mathcal{P})$ доказаны новые необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности (УГО), позволяющие в случае их нарушения улучшать процессы по значению целевого функционала. На основе УГО строится алгоритм глобального поиска (АГП), включающий в себя процедуры: 1) поиска процесса, удовлетворяющего принципу максимума Понтрягина (локальный поиск), и 2) выхода из этого процесса. Исследован вопрос о сходимости алгоритмов локального и глобального поисков.

Для проверки эффективности работы АГП было проведено его численное тестирование на линейно-квадратичных задачах ОУ, которые генерировались с применением специальной методики, с целью создания наихудших условий для работы алгоритма. Результаты тестирования свидетельствуют об эффективности работы АГП на рассматриваемом классе задач.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект НШ–1676.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрекаловский А.С. Задачи оптимального управления с терминальными функционалами, представимыми в виде разности двух выпуклых функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2007. – Т. 47, N 11. – С. 1865-1879.
2. Стрекаловский А.С., Янулевич М.В. Глобальный поиск в задаче оптимального управления с целевым терминальным функционалом, представленным разностью двух выпуклых функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, N 7. – С. 1187-1201.

Стрекаловский Александр Сергеевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (3952) 45-30-82, факс (3952) 51-16-16.
E-mail: strekal@icc.ru

Янулевич Максим Викторович,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 45-30-82.
E-mail: massimo@newmail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ CES-ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ИНДЕКСОВ ЦЕН

Н.И. Айзенберг

В докладе обсуждается возможность моделирования функции полезности потребителя через линейно однородную функцию с постоянной эластичностью замещения (CES функцию). В этом случае для вектора товаров $Q = (Q_1, ..., Q_n)$ и соответствующего ему вектора цен $P = (P_1, ..., P_n)$ функция затрат имеет вид

$$V(u, P) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)}, \tag{1}$$

где $u > 0$ – некоторый достигнутый уровень функции полезности $u(Q_1, ..., Q_n)$, $\sigma \geq 0$, $\sigma \neq 1$ – эластичность замены одного товара другим, $\alpha_i > 0$, $i = 1, ..., n$ – весовые коэффициенты, зависящие от объемов и цен на i-й товар. Основная задача потребителя – минимизировать затраты при заданных ценах на уровне полезности u. Можно показать, что при определённых условиях на весовые коэффициенты индекс цен, соответствующий функциональной форме (1), представим в виде обобщенного среднего

$$I_p^{01} = \left(\sum_i \gamma_i^{01}\left(\frac{P_i^1}{P_i^0}\right)^{\rho}\right)^{1/\rho}, \tag{2}$$

где γ_i^{01} – весовой коэффициент, определяемый через α_i, $\sum\limits_i \gamma_i^{01} = 1$,$P_i^1$ и P_i^0, $\rho = 1 - \sigma$ – параметр среднего. Формула (2) в отдельных случаях при различных весовых коэффициентах γ_i^{01} и эластичностях замены σ совпадает с известными формулами, применяемыми в статистике. В частности с индексами Ласпейреса, Пааше, Фишера, Сато-Вартиа и др. Кроме того, построение её не требует информации об объёмах, которую зачастую сложно получить оперативно. Еще один положительный момент использования этой формулы – в отличие, например, от индекса Ласпейреса – отсутствие систематической ошибки вследствие неучёта эффекта замещения между периодами.

Проблемой применения для вычисления индексов цен (2) является необходимость оценки параметра σ. Это возможно выполнить только приближёнными методами через сопоставление гипотетического индекса обобщенного среднего, рассчитанного с разными эластичностями замены, и значений индексов, вычисленных привычными способами, например индексов Фишера, Уолша.

В докладе делается попытка такой оценки на нескольких базах начальных данных, в т.ч. фондовых рынков. Исследуется эластичность замены товаров в условиях разной интенсивности инфляции.

Работа поддержана грантом РГНФ №09-02-00278а.

Айзенберг Наталья Ильинична,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64
E-mail: zen@isem.sei.irk.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СРАВНЕНИЮ СХЕМ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ

С.М. Анцыз, С.С. Ильина, В.А. Латышева

В [1] при изучении двухуровневой линейно-программной модели было показано, что введение прогрессивного налога на прибыль позволяет уменьшить ставки налога для отдельных групп налогоплательщиков. В [2] исследована иерархическая модель государство-инвестор-производство, базирующаяся на модифицированной модели Рамсея: $Y(t) = C(t)+I(t)+N(t) = (1-\chi)[(1-s(t))Y(t)+s(t)Y(t)]+\chi Y(t), 0 \leq s(t) \leq 1$, где выпуск $Y(t) = F(K(t))$ делится на потребление C, инвестиции I и налог N, s – доля инвестиций, χ – ставка налога, K – капитал. Установлено, что оптимальная для государства величина ставки налога (при значениях параметров, удовлетворяющих некоторым условиям) в модели с прогрессивным налогом ($\chi = \chi_2 Y$) оказывается меньше, чем в модели с плоской шкалой налогообложения ($\chi = \chi_1 = const$).

В настоящей работе изучаются модели с производственной функцией $F(K) = aK^b$ при ограничениях $a \geq 0; 0 \leq b \leq 1$ в предположении, что в ограничениях на рост капитала: $\dot{K}(t) = (1-\chi)sF(K(t)) - \mu K(t)\ K(0) = K_0 > 0;\ K(T) \geq K_T > 0$, где T – заданный промежуток времени, доля амортизации является функцией от объема капитала: $\mu = \alpha K^{\beta}(t); (\beta \leq 0)$. Найдена зависимость параметров s и χ от значений величин a, b, α, β и T для обеих схем налогообложения. Это позволяет формализовать условия, при которых та или иная схема предпочтительней.

Далее рассматривается возможность аппроксимации произвольной неоклассической функции $\varphi(K)$ функцией вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i K^b$. Данная аппроксимация позволит распространить результаты, справедливые для функции вида aK^b, на любую неоклассическую производственную функцию.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-06-00363, грантом РГНФ № 09-02-00337 и грантом Президента РФ № НШ-4113.2008.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анцыз С.М., Высоцкая Т.В. Двухуровневые модели оптимизации экологического налогообложения // Препринт № 166. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006.
2. Трубачева А.Е. О независимости верхнего уровня управления от формы налогообложения // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2006. – Т. IX, N 3(27). – С. 139-147.

Анцыз Сергей Матвеевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел.(383) 363-46-04, факс (383) 333-25-98.
E-mail: antzys@math.nsc.ru

Ильина Софья Сергеевна, Латышева Виктория Александровна,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. 8-913-468-15-07, 8-923-225-98-41.

МАКСИМИЗАЦИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКЛАМНЫХ ЗАТРАТ

И.А. Быкадоров

В [1] рассмотрена задача оптимального управления, моделирующая динамику рекламной деятельности фирмы с целью максимизации ее эффективности. Предполагается, что предпринимаемые фирмой рекламные усилия (управление модели), способствуют увеличению ее гудвила [4], который, в свою очередь, положительно влияет на процесс продажи. Целью является максимизация *индекса эффективности* фирмы, который вычисляется как отношение между доходом и затратами фирмы. Модель формулируется как задача дробного оптимального управления [5], для ее решения используется параметрический подход [3].

В докладе приводятся обобщения и модификации модели из [1]. В частности,

- уровень продаж рассматривается явно, в качестве фазовой переменной;
- изучается случай нескольких видов рекламы.

Кроме того, предлагается другой параметрический подход к решению задачи, не использующий идеи [3]. При этом оказывается возможным более эффективно проверять выполнение условия общности положения, а также использовать результаты [2] о типе оптимальных управлений и о точном числе переключений в релейном оптимальном управлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект 09-02-00337) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4113.2008.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Moretti E. Dinkelbach Approach to Solving a Class of Fractional Optimal Control Problems // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2009. – Vol. 142, N 2. – 12 p. (DOI: 10.1007/s10957-009-9540-05. Published online 05 March 2009. Forthcoming in May 2009.)
2. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E. Minimization of communication expenditure for seasonal products // RAIRO Operations Research. – 2002. – Vol. 36, N 2. – P. 109-127.
3. Dinkelbach W. On nonlinear fractional programming // Management Science. – 1967. – Vol. 13. – P. 492-498.
4. Nerlove M., Arrow K. J. Optimal advertising policy under dynamic conditions // Economica. – 1962. – Vol. 29. – P. 129-142.
5. Stancu-Minasian I.M. Fractional programming theory, methods and applications. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

Быкадоров Игорь Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-09, факс (383) 333-25-98.
E-mail: bykad@math.nsc.ru

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАРКЕТИНГА В СТРУКТУРЕ “ПРОИЗВОДИТЕЛЬ - ПОСРЕДНИК - ПОТРЕБИТЕЛЬ”

И.А. Быкадоров

Исследуется нелинейная динамическая модель ценообразования в структуре “производитель – посредник – потребитель” : производитель привлекает посредника, предоставляя ему товар с *торговым дисконтом*; часть торгового дисконта, *pass-through*, используется посредником для снижения розничной цены товара.

В [1, 3] рассматривался оптимизационный вариант модели, в котором производитель максимизирует прибыль при постоянном pass-through.

В [2] изучался равновесный вариант: целевыми функционалами являются прибыли производителя и посредника.

В докладе развиваются результаты [1 – 3]. В частности, для различных вариантов изменения дисконтных политик:

- изучены свойства монотонности и (обобщенной) вогнутости целевых функционалов (рассматриваемых как функции от уровней торгового дисконта и pass-through);
- найдены условия существования равновесий по Нэшу и Штакельбергу;
- выявлены комбинации параметров (индикаторы), знак которых однозначно указывает, когда производителю и посреднику выгодно бороться за право быть лидером или ведомым (при “штакельберговском” взаимодействии);
- описаны ситуации, когда возможен пересмотр соглашения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект 09-02-00337) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4113.2008.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E. Optimal control of trade discount in a vertical distributional channel // Rendiconti per gli Studi Economici Quantitativi. – 2005. – Vol. 15, N 1. – P. 121-129.
2. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E. Trade discount policies in the differential games framework: preliminary results // Universita’ di Venezia, Dipartimento di Matematica Applicata, 2005. – report n.130/2005. – 27 p.
3. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S. The role of retailer’s performance in optimal wholesale price discount policies // European Journal of Operational Research. – 2009. – Vol. 194, N 2. – P. 538-550.

Быкадоров Игорь Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 363-46-09, факс (383) 333-25-98.
E-mail: bykad@math.nsc.ru

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

А.С. Величко

При прогнозировании развития отдельных регионов или страны в целом с использованием межотраслевых моделей Леонтьева в условиях неполноты статистических данных возникает задача получения наиболее вероятных оценок матрицы технологических коэффициентов. В случае известной отраслевой структуры валовой добавленной стоимости и конечного спроса в рамках подхода энтропийного моделирования [3] данный прогноз для региона j может быть получен в результате решения оптимизационной задачи [4]

$$-\sum_{r,p} a_j^{rp} \ln(a_j^{rp}/\alpha_j^{rp}) \to \max_{a_j^{rp}},$$

$$x_j^r = \sum_p a_j^{rp} x_j^p + y_j^r, x_j^p = \sum_r a_j^{rp} x_j^p + w_j^p, a_j^{rp} \geq \varepsilon > 0,$$

где a_j^{rp} – прогнозируемые коэффициенты прямых затрат для пары отраслей r, p, α_j^{rp} – известные значения коэффициентов за некоторый базовый год, y_j^r – конечный спрос на продукты отраслей, w_j^p – добавленная стоимость отраслей. Целевая функция задачи отражает меру неопределенности при реализации набора a_j^{rp} в условиях априорной информации о реализациях значений коэффициентов α_j^{rp}.

В данной работе указанная методика была применена для российской экономики в целом с использованием данных Росстата. Точность прогнозирования определялась путем сравнения полученных оценок с фактическими данными таблиц "затраты-выпуск", публикуемых Росстатом с 3-х летней задержкой.

С учетом интервальности значений вектора отраслевой структуры добавленной стоимости и вектора конечного спроса для исходной задачи использован подход универсальных решений [1]. Похожая постановка задачи рассматривалась М.М. Албеговым в работе [2].

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН №26.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. – М.: Наука, 2006.
2. Краткосрочное прогнозирование в условиях неполной информации / Под ред. Албегова М.М. – М.: УРСС, 2001.
3. Попков Ю.С., Посохин М.В., Гутнов А.В., Шмульян Б.Л. Системный анализ и проблемы развития городов. – М.: Наука, 1983.
4. Golan A., Judge G., Robinson S. Recovering information from incomplete or partial multisectoral data // Rev. Econ. Stat. – 1994. – Vol. 76, N. 3. – P. 541-549.

Величко Андрей Сергеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (4232) 31-04-04, факс (4232) 31-04-52.
E-mail: vandre@dvo.ru

НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РИСКОВ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Д.В. Давыдов, А.В. Джигимон

Одной из важных проблем формализации принятия решений в условиях неполной информации является определение, измерение и оптимизация рисков выбора тех или иных решений. Большинство работ в данной области так или иначе связано с вероятностной трактовкой в отношении неопределенных параметров модели [2]. Вместе с тем, можно выделить класс неопределенности интервального типа, в условиях которой известны лишь границы параметров, но не их распределения внутри границ.

В данном докладе обсуждаются определения и свойства различных мер риска в условиях интервальной неопределенности. В зависимости от трактовки мера риска оценивается интегрально для всех допустимых альтернатив, либо как функция, сопоставляющая величину риска каждой допустимой альтернативе. В частных случаях предлагается перейти к описанию риска в пространстве критериев. Рассматриваемые функции риска требуют нахождения меры множества рисковых исходов и достаточно сложны с вычислительной точки зрения. С целью упрощения используются внутренние неулучшаемые аппроксимации [1] простыми множествами (кубом, параллелепипедом, эллипсоидом), что приводит к построению верхней оценки функции риска. Приводятся алгоритмы и численные примеры построения функций риска на реальных экономических данных.

Работа поддержана грантом ДВО РАН № 09-III-В-01-019.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т., Стегостенко Ю.Б. Формирование оптимального портфеля ценных бумаг // Дальневосточный математический сборник. – Владивосток: "Дальнаука", 1997. – Вып. 3. – С. 77-85.
2. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. – М.: Финансы и статистика, 1999.

Давыдов Денис Витальевич,
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, каб. 307, Владивосток, 690041, Россия, тел. (4232) 31-19-17.
E-mail: ddavydov_77@yahoo.com

Джигимон Анна Валерьевна,
Дальневосточный государственный университет,
ул. Октябрьская, 27, каб. 344, Владивосток, 690600, Россия, тел. (4232) 45-56-97.
E-mail: anna.dz@list.ru

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ

Н.П. Дементьев

В анализе моделей динамики важную роль играют стационарные решения. Однако стационарные решения существуют лишь в моделях с постоянными во времени технологическими параметрами. Нами описано несколько классов динамических моделей с переменными параметрами, в которых можно выделить особые решения, сохраняющие некоторые свойства стационарных решений (равномерную ограниченность, например). Ниже в качестве примера приводится простейший из таких классов.

Рассмотрим динамическую систему из n уравнений

$$x_{t+1} = f(a_t, x_t), \qquad t = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

в которой заданы вектор-функция $f = (f_1, ..., f_n)$ и последовательность m-мерных технологических параметров $a_t \in R^m$.

Пусть для некоторого набора $a^* \in R^m$ уравнение $x = f(a^*, x)$ имеет решение x^*. Тогда $x_t \equiv x^*$ — стационарное решение системы (1) при $a_t \equiv a^*$.

Рассмотрим теперь систему (1) с параметрами a_t, которые переменны во времени, но близки к a^* (т.е. лежат в некоторой малой окрестности a^*). Предположим, что модули всех собственных матриц Якоби $\partial f/\partial x$ в точке x^* не равны единице (т.е. x^* — гиперболическая точка). Тогда в системе (1) с дважды дифференцируемой функцией f существует решение x_t^*, лежащее в малой окрестности стационарного решения x^*. Доказательство опирается на теорему о неявных функциях в банаховых пространствах.

Работа поддержана Программой фундаментальных исследований Президиума РАН по экономическим проблемам современного технологического прогресса.

Дементьев Николай Павлович,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 330-35-36.
E-mail: dement@ieie.nsc.ru

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОЙ СИТУАЦИИ В КОНЕЧНОЙ ИГРЕ С ОБОБЩЕННОЙ КОНЦЕПЦИЕЙ РАВНОВЕСИЯ («ОТ ПАРЕТО ДО НЭША») В МЕТРИКЕ ГЁЛЬДЕРА

В.А. Емеличев, О.В. Карелкина

Рассмотрим конечную коалиционную игру в нормальной форме с параметрической концепцией равновесия. Пусть $X_i \subset \mathbf{R}$ – конечное множество стратегий игрока $i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, $f_i(x) = C_i x$ – функция выигрыша игрока i, определенная на множестве ситуаций $X = \prod_{i \in N_n} X_i$, C_i – i-я строка матрицы $C \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $x_i \in X_i$.

Для всякого непустого подмножества (коалиции игроков) $I \subseteq N_n$ введем на множестве ситуаций X бинарное отношение $\Omega(I)$ по правилу:

$$x\ \Omega(I)\ x' \Leftrightarrow \begin{cases} C_I x \underset{P}{\prec} C_I x' \ \&\ x_{N_n \setminus I} = x'_{N_n \setminus I}, & \text{если } I \neq N_n, \\ Cx \underset{P}{\prec} Cx', & \text{если } I = N_n. \end{cases}$$

Здесь $\underset{P}{\prec}$ – бинарное отношение оптимальности по Парето в пространстве $\mathbf{R}^{|I|}$, C_I – подматрица матрицы C, состоящая из строк с номерами коалиции I, $x_J = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq N_n$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Пусть $I_1, I_2, \dots, I_s$ – разбиение игроков N_n на s непересекающихся коалиций. Под $(I_1, I_2, \dots, I_s)$-оптимальной (или, иначе, обобщенно-оптимальной) ситуацией будем понимать любой элемент множества

$$Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_s) = \{x \in X\ :\ \forall r \in N_s\ \ \forall x' \in X\ (x\ \overline{\Omega(I_r)}\ x')\ \},$$

где $\overline{\Omega(I_r)}$– отрицание бинарного отношения $\Omega(I_r)$. Тем самым, при $s = 1$ $Q^n(C, N_n)$ – множество Парето, а любая ситуация $x \in Q^n(C, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$ (при $s = n$) является ситуацией равновесия по Нэшу (или равновесной). Под радиусом устойчивости $(I_1, I_2, \dots, I_s)$-оптимальной ситуации x^0 игры с матрицей C будем понимать предельный уровень возмущений элементов матрицы C в пространстве $\mathbf{R}^{n \times n}$ с метрикой Гёльдера l_p, сохраняющих указанную оптимальность x^0. Получена следующая формула радиуса устойчивости ситуации $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in Q^n(C, I_1, I_2, \dots, I_s)$, справедливая при любых $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq s \leq n$, $n \geq 2$:

$$\rho_p^n(x^0, C, I_1, I_2, \dots, I_s) = \min_{r \in N_s} \min_{z \in X_{I_r} \setminus \{x^0_{I_r}\}} \frac{||[C^r(x^0_{I_r} - z)]^+||_p}{||x_{I_r} - z||_q},$$

где $X_I = \prod_{j \in I} X_j$, $1/p + 1/q = 1$, знак " + " означает положительную срезку вектора, C^r – квадратная матрица, состоящая из элементов матрицы С, находящихся на пересечении строк и столбцов с номерами из I_r.

Емеличев Владимир Алексеевич, Карелкина Ольга Владимировна,
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, тел. (+37517) 262-37-50.
E-mail: emelichev@bsu.by, olga.karelkina@gmail.com

РАВНОВЕСИЕ НЭША ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПЛАНОВ

В.И. Зоркальцев, М.А. Киселева

В докладе рассматривается проблема согласования производственных планов нескольких предприятий в случае, когда удельные затраты отдельных технологий данного предприятия зависят от интенсивности использования этой технологии другими предприятиями. Каждое предприятие стремится выбрать такой план интенсивностей использования технологии из допустимых, который имел бы минимальные затраты. Поскольку издержки каждого предприятия зависят от интенсивностей использования тех же технологий другими предприятиями, то рассматриваемая проблема представляется в виде набора взаимосвязанных задач оптимизации.

Естественно предположить, что если какое-либо предприятие имеет возможность улучшить свой план за счет изменения только выбираемых этим предприятием параметров (при неизменных интенсивностях использования технологии другими предприятиями), то оно осуществит эту возможность. Поэтому интерес представляет определение равновесных по Нэшу планов предприятий, т.е. ситуации, когда ни у одного из предприятий нет указанной возможности улучшения своего плана. Для случая, когда ограничения в моделях предприятий линейные, а удельные затраты на технологические способы являются линейными возрастающими функциями от суммарных интенсивностей использования данной технологии всеми предприятиями, доказано, что проблема поиска набора равновесных по Нэшу планов предприятий сводится к задаче выпуклого квадратичного программирования. Это, в случае совместности ограничений каждого из предприятий, доказывает существование и единственность равновесия Нэша, а также дает конструктивный путь его нахождения. Для полученной задачи квадратичного программирования дается экономическая интерпретация.

Исследуемая проблема может рассматриваться в качестве модели согласования производственных планов участников экономических отношений, в качестве которых могут выступать фирмы, предприятия, их подразделения или частные лица. Общим ресурсом может быть совместно используемый природный ресурс, транспортная инфраструктура (трубопроводы, линии электропередач, железнодорожный транспорт, системы теплоснабжения), особый вид техники или рабочая сила данной квалификации.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-02-00278а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Равновесие Нэша в транспортной модели с квадратичными затратами // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2008. – Т. 15, N 3. – С. 31-42.

Зоркальцев Валерий Иванович, Киселева Марина Александровна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64.
E-mail: zork@isem.sei.irk.ru, marinee@mail.ru

РАВНОВЕСНЫЕ МОДЕЛИ РЫНКА ГОРОДСКИХ ПАССАЖИРСКИХ ПЕРЕВОЗОК

М.Е. Корягин

Организация перемещения населения города является важной социально - экономической проблемой. Основной стратегией пассажира является выбор между способами перемещений [2] (например, легковой автомобиль или ГПТ) и маршрутами. Стратегия муниципальные органов власти состоит в определении правил работы операторов пассажирского транспорта. Таким образом, существует три участника рынка городских пассажирских перевозок (пассажиры, транспортные операторы, муниципальные органы власти) с различными целями и стратегиями, поэтому необходимо построить набор математических моделей, описывающих рынок городских пассажирских перевозок на основе теории игр.

Особое значение имеет доказательство существования равновесия Нэша. В [1, 2] для двух моделей доказано существование равновесия в случае конкуренции транспортных операторов за пассажиропотоки. Рассмотрим постановку задачи при условии функционирования двух видов пассажирского транспорта и двух категорий населения. Пусть μ_0 – интенсивность движения муниципального транспорта, а μ_1 – частного маршрутного пассажирского транспорта. Учитывая то, что льготные категории населения предпочитают муниципальный транспорт, то $T_0(\mu_0)$ – суммарная стоимость потерянного льготными категориями населения времени при перемещении, а $T_1(\mu_0, \mu_1)$ – суммарная стоимость потерянного времени пассажиров, не имеющих льгот. Обозначим через $C_0(\mu_0)$ затраты муниципального транспорта, а через $C_1(\mu_1)$ – частного транспорта.

Стратегией транспортных операторов является интенсивность его движения, а критерием – прибыль H_1. Для муниципальных властей необходимо снизить потери населения при перемещении, но с другой стороны важно сокращать транспортные расходы. Стратегией является в первую очередь интенсивность движения муниципального транспорта, а критерием – суммарные потери транспорта и населения

$$F = T_0(\mu_0) + T_1(\mu_0, \mu_1) + C_0(\mu_0) + C_1(\mu_1).$$

Таким образом, игра имеет вид $\Gamma \langle 2, \mu_0, \mu_1, -F, H_1 \rangle$. В предположении, что поток транспорта простейший, игра имеет ситуацию равновесия Нэша, при этом количество частных транспортных операторов может быть любым [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Корягин М.Е. Конкуренция транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2006. – N 3. – С. 143-152.
2. Корягин М.Е. Конкуренция потоков общественного транспорта // Автоматика и телемеханика. – 2008. – N 8. – С. 120-130.

Корягин Марк Евгеньевич,
Кузбасский государственный технический университет,
ул. Весенняя, 28, Кемерово, 650000, Россия, тел. (3842) 36-63-47, факс (3842) 36-16-87.
E-mail: kme.ap@kuzstu.ru

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ КРЕДИТНЫХ РИСКОВ КОРПОРАТИВНОГО КЛИЕНТА

А.Ю. Кудряшова

Управлению кредитными рисками в финансовых учреждениях в период экономического кризиса уделяется повышенное внимание. Во избежание потерь, связанных с резким ухудшением качества кредитного портфеля, банки все более ответственно и взвешенно подходят к оценке кредитных рисков. Качество этой оценки зависит от выбора методики, своевременного реагирования на изменение финансового состояния клиента, а также от анализа качества произведенных расчетов и коррекции полученных результатов в зависимости от проявленной заемщиками кредитной дисциплины. Предложенная в докладе модель реализует не только возможность непосредственного анализа кредитного риска в отношении корпоративного клиента, но и возможность корректировки исходных данных модели в соответствии с накопленной информацией о кредитной истории проанализированных заемщиков.

Целесообразность данного подхода связана с тем, что выявление фактов завышения оценок, выставленных клиенту в результате анализа, при нарушении заемщиком кредитной дисциплины говорит о некотором несоответствии уровня значимости, присвоенного тому или иному показателю, его действительному влиянию на качество исполнения заемщиком своих обязательств. Таким образом, первоначальная модель оценки кредитных рисков подвергается изменению в соответствии с результатами мониторинга качества выполнения заемщиком своих обязательств перед банком.

В качестве математического аппарата для корректировки исходных параметров модели использован нейросетевой подход. В докладе предложен и реализован алгоритм обучения нейронной сети с учителем, где в качестве обучающих выборок используется накопленная база данных по предприятиям, входящим в кредитный портфель финансовой организации. Для тестирования и демонстрации работы предложенной модели в среде визуального программирования C++ Builder 6.0 разработано приложение с графическим интерфейсом.

В дальнейшем предполагается разработка процедуры своеобразного "стресс-тестирования", позволяющего получать более оперативные данные о текущем состоянии клиента путем определения для конкретного заемщика критических значений основных показателей финансовой деятельности, при пересечении которых вероятность дефолта существенно возрастает или приближается к 100%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудряшова А.Ю. Особенности оценки кредитных рисков при кредитовании юридических лиц // Формирование стратегии инновационного развития экономических систем – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 722 с.
2. Короткий С.А. Нейронные сети: основные положения //
http://lii.newmail.ru/NN/ KOROTKY/N1/kor_nn1.htm

Кудряшова Анастасия Юрьевна,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. В.И. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел./факс (351) 267-90-39.
E-mail: risk8597@mail.ru

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

О.В. Медведко

В [1] предложена модель планирования, в которой при заданной норме риска определяются максимальная прибыль и оптимальная номенклатура выпуска в условиях динамической экономики при неопределенности цен на товары.

Пусть X_t – векторы объемов выпуска продукции в момент времени t $(t = 1, .., T)$, Y_t^1, Y_t^2 – векторы величин переменных затрат и затрат на оборудование, ξ_t и $C_t^{1,2}$ – векторы цен продуктов и ресурсов соответственно; при этом ξ_t – независимые случайные величины. Линейные технологические и финансовые ограничения, связывающие детерминированные переменные между собой и с величинами A_t (гарантированными прибылями), описывают выпуклый многогранник $\mathbf{X}$. Возникает задача динамического стохастического программирования:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{T} A_t \to \max \\ X_t, Y_t, A_t \in \mathbf{X}, \\ P(\xi_t X_t - (C_t^1 Y_t^1 + C_t^2 Y_t^2) - Z_t \geq A_t) \geq 1 - \alpha_0, \end{cases}$$

где константы α_0 (норма риска) и Z_t (постоянные затраты) определены заранее.

Алгоритмы решения задач оптимального планирования производства в условиях стохастики требуют, зачастую, знания функции распределения исходных параметров (см. [2, 3]). На практике, как правило, имеются лишь массивы статистических данных случайных величин, что усложняет применение известных методов.

Предлагается новый итерационный метод, который позволяет решать проблему и в случае, когда отсутствует информация о функции распределения. Метод основывается на аппроксимации левой части вероятностных неравенств в исходной задаче методом Монте-Карло и редукции к целочисленным задачам линейного программирования. Для решения последних используется модификация метода Бендерса. Численная апробация на реальных данных показала работоспособность предложенного подхода.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-06-00363 и Советом по грантам при Президенте РФ для поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-4113.2008.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведко О.В. Диверсификация производственной программы и задачи стохастического программирования // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – Т. 5. – С. 189-194.
2. Юдин Д.Б. Математически методы управления в условиях неполной информации. – М.: Сов. Радио, 1974.
3. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. – М.: Наука, 1979.

Медведко Олег Викторович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383)363-46-04, факс (383)363-25-98.
E-mail: a.medvedko@ngs.ru

РЕКУРРЕНТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛЬНЫЕ МАРЬЯЖИ

Д.В. Мусатов, А.В. Савватеев, К.И. Сонин, И.А. Хованская

Концепция равновесия является центральной в теории игр. Однако, в различных её разделах, прежде всего в кооперативной и некооперативной теории игр, равновесие определяется по-разному. Мы обобщаем все определения: пусть экономическая система характеризуется множеством состояний S и (многозначной) функцией допустимых переходов $\Psi\colon S \rightrightarrows S$. Равновесными назовём такие состояния s, для которых $\Psi(s) = \varnothing$, т.е. из которых нельзя никуда перейти. Однако, такой концепции может быть недостаточно: система может оставаться стабильной не потому, что изменения невозможны, а из-за того, что новое состояние будет неравновесным и потому непредсказуемым для инициатора изменений. *Рекуррентно устойчивыми* назовём состояния, из которых нельзя допустимыми переходами перейти в другие рекуррентно устойчивые.

Если система переходов "фундирована", то предыдущая фраза становится определением. В противном случае *системой* устойчивых состояний назовём такое множество $\mathcal{S}$, что $s \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \Psi(s) \cap S = \varnothing$, иначе говоря $S = \mathcal{S} \sqcup \Psi^{-1}(\mathcal{S})$. Такая система тоже может не существовать, например если допустимые переходы образуют цикл нечётной длины. Однако, система устойчивых состояний всегда существует для игры двух лиц, где состояния суть профили стратегий, а переходы — изменение одним игроком стратегии, приносящее ему выигрыш. Мы доказываем, что такие системы взаимно однозначно соответствуют стабильным марьяжам при некоторых предпочтениях, построенных по исходной игре. Согласно известным теоремам, стабильные марьяжи всегда существуют и, более того, образуют полную решётку.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00709-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roth A.E., Sotomayor M.A.O. Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis. – Cambridge University Press, 1992.

Мусатов Даниил Владимирович, Савватеев Алексей Владимирович,
Сонин Константин Исаакович,
Российская экономическая школа,
Нахимовский пр-т, 47, Москва, 117418, Россия, тел. (903) 128-87-48;
тел. (495) 129-17-00, доб. 136, факс (495) 129-37-22;
тел. (495) 925–50–02, доб. 225, факс (495) 925–50–03.
E-mail: musatych@gmail.com, hibiny@mail.ru, ksonin@gmail.com

Хованская Ирина Аскольдовна,
Государственный университет – Высшая школа экономики,
Покровский бульвар, 11ж, комн. 807, Москва, 109028, Россия,
тел. (495) 772-95-90 доб. 2323.
E-mail: i_khovanskaya@yahoo.com

“ДУЭЛЬ” ТРЕХ И НЕСКОЛЬКИХ ЛИЦ

А.В. Савватеев, Д.Г. Ильинский

В работе [1] рассмотрена следующая игра “Дуэль трёх лиц (the truel)”. Трое стоят в вершинах правильного треугольника и несколько раз одновременно стреляют друг в друга, выбирая себе жертву. Игра заканчивается либо с последним патроном, либо когда в живых осталось не более одного игрока. Показано, что при достаточно общих предположениях наибольшие шансы на выживание имеет самый неточный стрелок.

Мы обобщаем данную ситуацию на несколько игроков, отклоняясь от пространственной интерпретации происходящего, а также вводя возможность “пропускать ход” и предполагая неограниченное количество патронов.

В игре трёх лиц показано, что стрельбы в воздух (т.е. пропуска хода) в равновесии никогда не будет наблюдаться, а в общей игре n лиц (the nuel) верен принцип однократного отклонения для стационарных равновесий. Из этого принципа мы выводим общий вид равновесий в игре n лиц с одинаковой меткостью игроков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kilgour D.M. The Simultaneous Truel // International Journal of Game Theory. – 1972. – Vol. 1, N 4. – P. 229-242.

Савватеев Алексей Владимирович,
Российская Экономическая Школа,
Центральный экономико-математический институт РАН,
Нахимовский пр-т, 47, комната 1721, Москва, 117418,
тел. (495) 129-1700, факс (495) 129-3722.
E-mail: hibiny@mail.ru, savvateev@nes.ru, savvateev@gmail.com

Ильинский Дмитрий Геннадиевич,
Центральный экономико-математический институт РАН,
Нахимовский пр-т, 47, Москва, 117418, тел. (495) 332-4606, факс (495) 129-3722.
E-mail: nograhol@gmail.com

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ИГРОКОВ В ДИСКРЕТНО-ВЫПУКЛОЙ ИГРЕ

Е.В. Ушакова

Вводится понятие дискретно-выпуклой матричной игры. Разработан процесс трансформации её в непрерывную выпуклую игру. Основным результатом является теорема о существовании оптимальных стратегий игроков в дискретно-выпуклой игре, а также о равенстве цены дискретно-выпуклой игры и цены соответствующей непрерывной игры. Определены оптимальные стратегии игроков.

Определение 1. Набор вещественных чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ называется *дискретно-выпуклым*, если любая кусочно-линейная функция f, для которой вершинами звеньев служат точки графика: $f(x_i) = a_i$, $i = 1, ..., k$, $x_1 < x_2 < ... < x_k$ является выпуклой.

Определение 2. Матричная игра с матрицей платежей (выигрышей первого игрока)$A = (a_{ij})$, называется *дискретно-выпуклой*, если любой набор (строка) $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ $(i = 1, \ldots, m)$ дискретно выпуклый.

Пусть задана игра с дискретно-выпуклой матрицей $A_{m\times n}$. Мы трансформируем её в непрерывную выпуклую игру при помощи следующих формул.

Введём переменные $\beta_1, \ldots, \beta_n : 0 \le \beta_1 \le \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1} \le \beta_2 \le \frac{2}{n-1}, \ldots \frac{n-2}{n-1} \le \beta_{n-1} \le 1$. Считаем, что переменная $0 \le \beta \le 1$ совпадает с β_t на соответствующем интервале $t = 1, \ldots, n-1$. Определяем кусочно-линейные функции $H(t, \beta_k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, $t = 0, \ldots, m-1$: $H(0, j) = a_{mj}, \ldots, H(i, j) = a_{m-ij}, \ldots, H(m-1, j) = a_{1,j}, j = 1, \ldots, n$, $H(t, \beta_k) = (1 - [(n-1)\beta_k - (k-1)])H(t, k) + [(n-1)\beta_k - (k-1)]H(t, k+1)$.

Далее определим непрерывную функцию $H(\alpha, \beta)$ на квадрате $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$. Определим переменные $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} : 0 \le \alpha_1 \le \frac{1}{m-1}, \frac{1}{m-1} \le \alpha_2 \le \frac{2}{m-1}, \ldots \frac{m-2}{m-1} \le \beta_{n-1} \le 1$. Считаем, что переменная $0 \le \alpha \le 1$ совпадает с α_p на соответствующем интервале $p = 1, \ldots, m-1$. Полагаем:

$$H(\alpha_p, \beta) = (1 - [(m-1)\alpha_p - (p-1)])H(p-1, \beta) + [(m-1)\alpha_p - (p-1)]H(p, \beta).$$

Полученная непрерывная на квадрате $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$ функция $H(\alpha, \beta)$, выпукла по β по построению. Тем самым дискретно-выпуклой игре можно сопоставить соответствующую непрерывную выпуклую игру на квадрате.

Теорема 3 (Основная теорема) Для дискретно-выпуклой игры существуют оптимальные стратегии игроков, каждая из которых является либо чистой, либо вероятностной комбинацией двух стратегий. При этом цена дискретно-выпуклой игры и цена соответствующей непрерывной выпуклой игры совпадают: $c_{d.c.} = c_c = c$.

Ушакова Евгения Валерьевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достовского,
пр. Мира, 55, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-97-61.
E-mail: evushakova@mail.ru

СПРОС НА РЫНКЕ ЗАВИСИТ ОТ "НИЖНЕЙ" ЦЕНЫ: ПРИЧИНЫ И ПОСЛЕДСТВИЯ

А.Ю. Филатов

В [1] была предложена модель олигополии с дифференцированным продуктом, в которой спрос зависит от "нижней" цены (цены в самой дешевой фирме). Обоснование сделанного предположения можно осуществить на основе теории пространственной экономики.

Пусть на рынке присутствуют 2 фирмы, расположенные в точках 0 и 1 линейного города. Несмотря на то, что они продают однородный продукт по различным ценам $p_1 < p_2$, у второй фирмы могут быть рационально действующие покупатели – люди, проживающие неподалеку. Действительно, покупатель оценивает не только стоимость покупки, но и транспортные издержки (в т.ч. затраты времени), необходимые для того, чтобы добраться до места продажи.

Если транспортные издержки пропорциональны расстоянию, то клиент, проживающий в точке $x \in [0; 1]$ и тратящий в денежном выражении сумму t на проезд через весь город (из точки 0 в точку 1), оценивает покупку в первой фирме в сумму $\hat{p}_1 = p_1 + tx$, а во второй фирме - в сумму $\hat{p}_2 = p_2 + t(1 - x)$. Если минимальная из этих величин не превышает тот максимум θ, который клиент готов заплатить за продукт, покупка осуществляется.

Отметим, что для людей с высокой оценокй продукта изменение цены в любой из фирм приводит лишь к возможной смене места покупки. В то же время для людей, оценивающих порог θ ниже, уменьшение цены может оказаться значимым фактором при принятии решения о покупке. При этом с большой вероятностью критическим окажется снижение цены именно в дешевой фирме. Данное предположение подтверждается, в частности, моделированием влияния на спрос изменения цен в каждой из фирм с помощью метода Монте-Карло.

В условиях предложенной модели можно изучать различные стратегии поведения олигополистов и получаемые при этом равновесные ситуации. Наиболее интересный качественный результат связан с существованием равновесия Нэша при несовпадающих ценах и объемах продаж одинаковых олигополистов.

В то же время, при сильной реакции потребителя на разницу цен максимизация прибыли ограничена так называемой "инверсией фирм ситуацией, когда одной из дорогих фирм может оказаться выгодно в одностороннем порядке занять место на дешевом ценовом сегменте.

Работа поддержана Интеграционным проектом СО РАН "Полиструктурные модели экономики: теория, методы прогнозы".

ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов А.Ю. Модель ценовой олигополии с несовершенной эластичностью спроса // "Теория и методы согласования решений": сб. научн. тр. – Новосибирск: Наука, 2009. – С. 130-145.

Филатов Александр Юрьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. 8-914-88-21-888.
E-mail: fial@irlan.ru, fial@isem.sei.irk.ru

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПОЛИТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ. ОБЗОР

А.Ю. Филатов

В последние 15-20 лет теоретико-игровые модели получили активное распространение в новых областях. В частности, они стали использоваться при моделировании социальных процессов. Среди подобных приложений можно выделить проблемы политической конкуренции.

Теория игр пытается ответить на ключевые вопросы: Кто победит на выборах? Сколько денег при этом потратит? Какие будут политические программы? Какая будет явка? При этом необходимо принимать во внимание действия избирателей, влияние средств массовой информации, стратегическое поведение кандидатов и групп влияния, а также систему голосования, бюджеты кандидатов и т.д.

В 1957 году Даунс предположил, что кандидаты формулируют политику для того, чтобы выиграть выборы, а не выигрывают выборы для того, чтобы формулировать политику, и на основе этого построил базовую модель политической конкуренции. Ее предпосылками является наличие двух кандидатов, однократно выбирающих позицию в одномерном политическом пространстве с целью победы на выборах, а также "честных" избирателей, имеющих однопиковые предпочтения и голосующих за наиболее близкую программу. Результатом модели оказывается победа кандидата, принявшего позицию медианного избирателя, и, как следствие, схождение политических платформ. В то же время на практике этого не наблюдается.

Среди основных причин можно перечислить следующие:

1. Поддержка кандидатом определенной идеологии.

2. Двухэтапные выборы, на которых кандидат сначала борется за выдвижение от партии и только потом за победу на выборах.

3. "Безразличие" и "отчуждение" – неучастие в голосовании части избирателей, если платформы кандидатов очень близки друг к другу или очень далеки от позиции избирателя.

4. Неоднопиковость или многомерная шкала предпочтений, при которой наличие равновесия является практически невероятным событием.

5. Изменяющаяся "валентность" кандидатов, то есть их способность привлекать электорат вне контекста политической платформы. В частности, валентность может определяться размерами издержек на избирательную кампанию, тем большими, чем ближе находятся платформы кандидатов.

В работе рассматриваются модели, реализующие описанные постановки, рассмотрен ряд численных примеров, намечены перспективы дальнейшего изучения моделей политической конкуренции, а также представлены результаты эмпирического исследования политических предпочтений россиян на основе опроса ВЦИОМ, осуществленного перед парламентскими выборами 2007 года.

Работа поддержана грантом РГНФ 09-02-00278а.

Филатов Александр Юрьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. 8-914-88-21-888.
E-mail: fial@irlan.ru, fial@isem.sei.irk.ru.

МОДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕНТНЫХ ОЦЕНОК

Н.В. Шестакова

Балансовые экономико-математические модели позволяют определять систему рентных оценок земли и цен на продукцию для реального, сложившегося размещения производства, предполагая, что оно рационально в общих чертах. При этом они обладают некоторыми свойствами линейно-программных оптимизационных моделей.

Модель представляет собой систему линейных уравнений-балансов для каждого рассматриваемого объекта и каждого продукта: выручка за продукцию в искомых ценах равна затратам на производство, включая нормальную прибыль, плюс рентные платежи в размере искомой рентной оценки за единицу площади [1].

Рента – избыточный доход, обязанный своим происхождением влиянию природных условий как на продуктивность земель, так и на производственные затраты. Свойства модели позволяют выделить долю ренты, связанную главным образом с различием в продуктивности земель.

Получаемые в результате решения рентные оценки v_k , где k – индекс объекта, имеют следующую структуру: $v_k = v_k^0 + t_k$. Первое слагаемое может принимать как положительные (платежи), так и отрицательные (дотации) значения и показывает необходимый размер перераспределения средств (в расчёте на единицу площади) для выравнивания экономических условий производства по объектам с точки зрения возмещения затрат и получения нормальной прибыли. В модели обеспечивается баланс платежей и дотаций.

Второе слагаемое строго положительно для всех объектов и зависит только от продуктивности земель и от задаваемой как внешний параметр суммарной ренты R для рассматриваемой системы объектов.

Разложение рентной оценки даёт возможность целенаправленно анализировать факторы, влияющие на её составляющие, в частности, с целью уменьшения внутрисистемного перераспределения средств. С ростом параметра R рентная оценка v_k возрастает только за счёт t_k, первое слагаемое при этом не изменяется. Это даёт возможность, во-первых, определять то значение R, при котором все оценки v_k становятся неотрицательными и, во-вторых, быстро находить новые решения при изменении параметра.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-06-00363, грантом РГНФ № 09-02-00337 и грантом Президента РФ № НШ-4113.2008.6

ЛИТЕРАТУРА

1. Булавский В.А., Вирченко М.И., Шестакова Н.В. Модель дифференциации рентных оценок // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2007. – Т. X, N 3 (31). – С. 29-36.

Шестакова Надежда Васильевна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090,
тел.(383) 363-46-05, факс (383) 333-25-98.
E-mail: nadine@math.nsc.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ С ЛОГИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА РЕЗИН

А.В. Адельшин, Е.Н. Жовнер

В данной работе рассматривается задача проектирования химического состава огнестойкой резины на основе смесей каучуков. При проектировании химического состава резин некоторые ограничения на включение различных химических элементов в состав смесей могут описываться с помощью логических условий и приводить к задачам выполнимости и максимальной выполнимости.

Пусть состав резины формируется из ингредиентов v_j, $j \in J, J = \{1, ..., n\}$. Каждому v_j соответствует логическая переменная x_j, принимающая значение *истина*, если v_j входит в состав резины, и *ложь* – в противном случае. Определим множество всех каучуков $Q \subset J$, соотношения масс которых однозначно определяют массы включенных в состав ингредиентов. Известны стоимости s_k, $k \in J$, и веса r_t, определяющие степень огнестойкости некоторых ингредиентов, $t \in J_1 \subseteq J$. Были установлены логические связи между ингредиентами, которые определили формулы C_i, $i \in I, I = \{1, ..., m\}$, являющиеся дизъюнкциями переменных x_j или их отрицаний. Часть этих формул C_i, $i \in I_1 \subset I$, соответствует условиям, которые должны быть обязательно выполнены ("жесткие" ограничения). Также даны веса d_i, $i \in I \backslash I_1$, характеризующие степень необходимости выполнения формул из $I \backslash I_1$ ("мягкие" ограничения). Задача заключается в поиске оптимального состава огнестойкой резины, удовлетворяющего логическим ограничениям. Целевыми функциями задачи являются суммарный вес выполненных формул C_i, $i \in I \backslash I_1$, и общий вес включенных в состав ингредиентов r_t, $t \in J_1$. Эти критерии максимизируются.

Задача была сведена к однокритериальной, в которой максимизируется сумма d_i, $i \in I \backslash I_1$. Для полученного оптимального решения этой задачи строится задача о нахождении соотношения масс каучуков, при котором суммарная стоимость состава минимальна. Полученные результаты сопоставимы с данными экспериментов, приведенными авторами работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фролова О.В., Жовнер Е.Н. Разработка модели задачи проектирования химического состава резин специального назначения // Юбилейная X межвузовская научно-практическая конференция аспирантов, студентов и молодых исследователей "Теоретические знания – в практические дела": сборник статей в трёх частях. – Омск: РосЗИТЛП, филиал в г. Омске, 2009. – Ч. 1. – С. 304-305.

Адельшин Александр Владимирович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: adelshin@ofim.oscsbras.ru

Жовнер Евгения Николаевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: miss_jane@rambler.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ В ТОРГОВЫХ КОМПЛЕКСАХ

Е.А. Бельц, А.А. Колоколов

В настоящее время в области дискретной оптимизации значительное внимание уделяется задачам размещения предприятий [2], которые имеют широкий круг приложений. В данной работе рассматривается задача оптимального размещения предприятий в торговых комплексах. Исследуются две постановки задачи (однокритериальная [1] и двухкритериальная), построены модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП), проведены экспериментальные расчеты.

Однокритериальная задача состоит в следующем. Дано множество пунктов возможного размещения и список типов предприятий. В каждом пункте можно разместить не более одного предприятия. Фирма располагает некоторым объемом средств на открытие предприятий и заранее определяет максимально возможное количество открываемых предприятий каждого типа. Известны начальные затраты на размещение предприятий в пунктах, а также текущие затраты на их содержание в месяц в каждом из рассматриваемых пунктов. Предприятия характеризуются занимаемой площадью. Пункты размещения предоставляют площадь и взимают арендную плату за нее. Для каждого пункта размещения и открытого в нем предприятия известна выручка и себестоимость реализуемой продукции за месяц. Требуется разместить предприятия в пунктах так, чтобы получить максимальную прибыль при выполнении указанных выше ограничений.

Двухкритериальная задача является развитием рассмотренной задачи, в ней добавляется критерий минимизации затрат. Кроме того, учитываются минимально допустимые расстояния между пунктами размещения.

Разработанная однокритериальная модель использована для решения задачи размещения предприятий фирмы, реализующей обувь, в торговых комплексах г. Омска. Вычислительные эксперименты, проведенные с помощью пакета прикладных программ ЦЛП, показали перспективность предложенного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельц Е.А. Решение одной задачи размещения предприятий // Сборник материалов X международной научно-практической конференции "Теоретические знания – в практические дела". Часть 2. – Омск, 2009. – С. 26-27.
2. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.

Бельц Елена Андреевна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: BelcElena@yandex.ru

Колоколов Александр Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РАСПИСАНИЯ МНОГОПРОДУКТОВОГО ПРОИЗВОДСТВА, ОСНОВАННЫЙ НА ДЕКОМПОЗИЦИОННОМ ПОДХОДЕ И ГЕНЕТИЧЕСКОМ АЛГОРИТМЕ

П.А. Борисовский, А.В. Еремеев

Предложен гибридный метод построения расписаний многопродуктового производства в среднесрочном периоде. В основе метода лежит комбинирование декомпозиционного подхода [2], генетического алгоритма [1] и эвристики жадного типа с использованием целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

В декомпозиционном подходе горизонт планирования разбивается на несколько краткосрочных периодов и решается задача верхнего уровня, в которой выбирается набор продуктов для включения в подзадачу нижнего уровня. На нижнем уровне строится расписание в соответствующем краткосрочном периоде. Для построения расписания используется модель ЦЛП [2], основанная на концепции точек событий. При решении задачи нижнего уровня предварительно формируется упрощенная подзадача эффективного использования наиболее дефицитных устройств, которая решается генетическим алгоритмом. Решение этой задачи используется затем в жадном алгоритме для составления окончательного расписания.

Перспективность метода подтверждена расчетами на задачах с реальными данными для производства, содержащего химические реакторы, складирующие и вспомогательные устройства (фильтры, погрузчики) с выпуском более ста различных продуктов на горизонте планирования до одного месяца. Использование генетического алгоритма и жадной эвристики позволило повысить качество решений и сократить на порядок время счета по сравнению с алгоритмом, предложенным в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисовский П.А. Генетический алгоритм для одной задачи составления производственного расписания с переналадками // Труды XIV Байкальской междунар. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск: ИсЭМ СО РАН, 2008. – Т. 4. – С. 166-173.
2. Shaik M.A., Floudas C.A., Kallrath J., Pitz H.-J. Production scheduling of a large-scale industrial continuous plant: short-term and medium-term scheduling // Computers & Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 33. – P. 670-686.

Борисовский Павел Александрович,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-20-48.
E-mail: borisovski@mail.ru

Еремеев Антон Валентинович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК ОРТОГОНАЛЬНЫХ УПАКОВОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАДАЧИ О (0–1)–РЮКЗАКЕ

Р.С. Валеев

Рассматривается задача ортогональной упаковки множества прямоугольных предметов $\{w, l\}$, где $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, в полосу ширины W полубесконечной длины (2 Dimensional Strip Packing). Для ее решения в [1] применялся метод динамического перебора на базе модифицированного псевдополиномиального алгоритма (MPA).

В данной работе предлагаются метаэвристики решения задачи о (0–1)–рюкзаке. При этом с использованием алгоритма для конструирования допустимых упаковок применяется алгоритм «следующий подходящий» с поиском лучших решений в Λ-окрестности, где Λ – локальная нижняя граница, и она совпадает с решением релаксации двухмерной задачи линейного раскроя с дополнительными ограничениями. Задача прямоугольно–ориентированного линейного раскроя решается на базе алгоритма для задачи о (0–1)–рюкзаке с учетом однородности и продолженности прямоугольников. При указанных данных применяется алгоритм «следующий подходящий» для конструирования прямоугольной упаковки. Пусть получена упаковка длины L. Возможны следующие два случая: а) $L = \Lambda$, т.е. локальная граница достигнута, осуществляется переход к другой окрестности; б) $L > \Lambda$, выполняется перестановка пассивных элементов в π. Для вновь полученного списка π' решается задача конструирования прямоугольной упаковки в полосу и т.д. Поиск лучшей упаковки в окрестности завершается при достижении Λ или после выполнения заданного количества итераций.

В работе также предлагается модификация алгоритма MPA для поиска гильотинных упаковок в полубесконечную полосу. Фомируется множество кортежей из номеров заданных прямоугольников, элементы которых упорядочиваются по возрастанию длин прямоугольников, образуя «лестничную» структуру. Для учета условия гильотинности после каждого размещенного кортежа проводится вертикальный сквозной рез, параллельный ширине W по правой стороне последнего прямоугольника, входящего в кортеж. Данный алгоритм применяется при размещении товаров различной номенклатуры на складе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухачева Э.А., Валеева А.Ф. Метод динамического перебора в задаче двухмерной упаковки // Информационные технологии. – 2000. – N 5. – С. 30-37.

Валеев Руслан Сагитович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия.
E-mail: ruslan_valeev@inbox.ru

РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА БАЗЕ МУЛЬТИМЕТОДНОЙ ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ

Ю.И. Валиахметова

Рассматриваются прикладные задачи ортогональной упаковки и размещения прямоугольно-ориентированных заготовок в полубесконечную полосу и в листы (контейнеры). Для их решения используется мультиметодная технология моделирования ортогональной упаковки [1]. В качестве базовой приведена абстрактная постановка оптимального размещения контейнеров в заданной прямоугольной области. В качестве прикладных рассматриваются две задачи: задача размещения прямоугольно-ориентированных предметов при изготовлении картонной тары и задача размещения прямоугольных контейнеров в транспортных средствах. Обе задачи сводятся к основной модели ортогонального размещения прямоугольников при дополнительных ограничениях.

Большинство известных на сегодняшний день технологий моделирования алгоритмов локального поиска, предназначенных для решения задач размещения, плохо приспособлены для решения поставленных задач. На эти ситуации хорошо ориентирована мультиметодная технология, которая базируется на методе комбинирования эвристик, предложенном И.П. Норенковым [2]. К набору простых эвристик, предложенному И.П. Норенковым, были добавлены несколько «жадных», группа «либеральных» эвристик, и стратегии их дискриминации и форсирования. Это позволило создать несколько мультиметодных декодеров, каждый из которых использует некоторое подмножество из всего множества простых эвристик. Таким образом, принципиальное отличие мультиметодных декодеров заключается в способе представления упаковки в процессе поиска лучшего решения – последовательностью применения эвристик. Эффективность мультиметодных алгоритмов подтверждена результатами обширного численного эксперимента на различных классах задач раскроя и упаковки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валиахметова Ю.И., Филиппова А.С. Мультиметодный генетический алгоритм для решения задач ортогональной упаковки // Информационные технологии. – 2007. – N 12 (136). – С. 50-57.
2. Норенков И.П., Косачевский О.Т. Генетические алгоритмы комбиринования эвристик в задачах дискретной оптимизации // Информационные технологии. – 1999. – N 2. – С. 2–7.

Валиахметова Юлия Ильясовна,
Башкирский государственный аграрный университет,
ул. Заводская, 8 – 91, Уфа, 450097, Россия, тел. (347) 228-99-36.
E-mail: julikas@inbox.ru

МОДЕЛИ СТРАТЕГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЕНЕРИРУЮЩИХ И СЕТЕВЫХ КОМПАНИЙ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

М.Ю. Васильев, А.Ю. Филатов

В результате реформирования электроэнергетики во многих странах произошел переход от вертикально интегрированной структуры отрасли, сочетавшей генерацию, передачу и распределение электроэнергии в рамках одной компании, к дезинтегрированной структуре, ключевым элементом которой является принцип отделения передающих и распределяющих сетей от генерации, сбыта и потребления электроэнергии.

В соответствии с этим принципом компания не может владеть и управлять генерирующими и передающими (или распределяющими) мощностями одновременно. Если компания владеет генерирующими и передающими активами, она должна либо предоставлять свободный доступ к своим сетям по регулируемым ценам, либо передать сети в управление специализированному субъекту (сетевая компания, системный оператор и т.д.), либо должна быть разделена на генерирующую и регулируемую сетевую компании.

В работе осуществляется исследование возможных последствий и побочных эффектов вертикальной дезинтеграции, в частности, влияния такого регулирования на цены на передачу и пропускные способности сетей.

Теоретически показано, что новая ЛЭП между электростанцией и потребителем, построенная и эксплуатирующаяся генерирующей компанией, владеющей этой электростанцией, всегда более прибыльна, чем аналогичная ЛЭП построенная и эксплуатирующаяся сетевой компанией. Причины - объединение прибыли от разных видов деятельности в рамках одной компании и представление заявок на продажу электроэнергии по ценам, не совпадающим с краткосрочными предельными издержками. Таким образом, генерирующие компании всегда имеют больше стимулов для развития сетей, чем специализированные сетевые компании.

Продемонстрировано также, что генерирующие (вертикально-интегрированные) компании заинтересованы в линиях с большими пропускными способностями, чем специализированные сетевые компании.

Регулирование электроэнергетики, при котором отсутствуют монопольные гарантии для существующих сетевых компаний, и генерирующие компании могут строить и эксплуатировать собственные ЛЭП, наиболее предпочтительно как с точки зрения пропускных способностей сетей, так и с точки зрения цен на передачу и объемов передачи электроэнергии.

Работа поддержана Интеграционным проектом СО РАН "Полиструктурные модели экономики: теория, методы прогнозы".

Васильев Михаил Юрьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. 8-902-176-32-26.
E-mail: mikhail-vasilyev@yandex.ru

Филатов Александр Юрьевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. 8-914-88-21-888.
E-mail: fial@irlan.ru, fial@isem.sei.irk.ru

О ЗАДАЧЕ РАСКРОЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ НАДУВНЫХ ОБЪЕКТОВ

М.А. Верхотуров, К.А. Кононенко

В работе рассматривается интегрированная постановка задачи раскроя плоского материала при изготовлении надувных объектов. Она формулируется следующим образом. Имеется замкнутая поверхность $\Omega \subset R^3$, некоторое положительное число δ – допуск аппроксимации, прямоугольная полоса Π заданной ширины b и неограниченной длины.

Требуется найти количество N и форму сегментов S_i, описываемых вектор-функциями $\bar{r}_i(u,v)$, таких, что они аппроксимируются развёртывающимися поверхностями S'_i, описываемыми $\bar{r}'_i(u,v)$, $\bar{r}_i(u,v) = \bar{r}'_i(u,v) + \bar{\delta}(u,v)$, где $\bar{\delta}(u,v)$ – вектор–функция уклонения, (u,v) – внутренние координаты точек поверхности. При этом P_i, являющиеся изометрическим конформным эквиареальным отображением S'_i на плоскость: $F : S'_i \to P_i$ (отображение F изоморфно, S'_i и P_i могут быть получены друг из друга изгибанием), требуется разместить в полосе Π: найти координаты (x_i, y_i) условного центра c_i каждого плоского объекта P_i в системе координат полосы Π, чтобы выполнялись условия: $P_i(x_i,y_i) \cap P_j(x_j,y_j) = \emptyset$, $P_i(x_i,y_i) \cap \Pi = P_i$, $\Phi(P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), \ldots, P_N(x_N,y_N)) \to \min$, где Φ – целевая функция (например, длина занятой части полосы). Угол поворота θ_i каждого объекта P_i считается известным и фиксированным и поэтому не учитывается.

Данная задача близка к описанной в [1], но для замкнутых поверхностей с внутренним давлением она сформулирована впервые. В докладе рассматриваются известные подходы, описанные в том числе в [1, 2], предлагается оптимальное сочетание методов, а также описывается метод Гаусса для упругих деформаций, разработанный на основе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фроловский В.Д., Фроловский Д.В. Моделирование и развертка сложных поверхностей. – Graphicon, 1998.
2. Matyka M., Ollila M. A Pressure Model for Soft Body Simulation. – Proc. of Sigrad, UMEA, 2003.

Верхотуров Михаил Александрович, Кононенко Кирилл Александрович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450077, Россия, тел. (347) 273-79-67.
E-mail: verhotur@vmk.ugatu.ac.ru, kononenko@list.ru

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ПУТИ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ПРИ РАСКРОЕ ЛИСТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ФИГУРНЫЕ ЗАГОТОВКИ НА БАЗЕ МЕТОДА «ПЧЕЛИНЫЙ РОЙ»

М.А. Верхотуров, А.Р. Тарасенко, П.Ю. Тарасенко

Рассматривается NP-трудная задача минимизации пути режущего инструмента при раскрое листовых материалов на фигурные заготовки. Задача формулируется следующим образом:

- дано n контуров для вырезания, а также информация о вложенности контуров – $L_1, \ldots, L_n$, где L_i — список контуров, непосредственно вложенных в контур i;
- точки врезки для контуров – $P_1, \ldots, P_n$, начальное и конечное положения режущего инструмента P_b, P_e.

Необходимо найти путь режущего инструмента $Path = (P_b, P_1^{'}, \ldots, P_n^{'}, P_e)$ такой, что:

- если $P_k^{'}$ и $P_l^{'}$ – точки врезки контуров i и j, где $i \in L_j$, то $k < l$;
- длина пути $Length(Path) = C_{P_bP_1^{'}} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{P_i^{'}P_{i+1}^{'}} + C_{P_n^{'}P_e} \rightarrow min$, где $C_{P_bP_1^{'}}$ – расстояние от P_b до точки врезки первого контура в пути, $C_{P_i^{'}P_{i+1}^{'}}$ – расстояние от точки врезки i-го контура до точки врезки $(i+1)$-го контура в пути, $C_{P_n^{'}P_e}$ – расстояние от точки врезки n-го контура в пути до P_e.

В докладе для решения задачи минимизации пути режущего инструмента при раскрое листовых материалов на фигурные заготовки применяется алгоритм «Пчелиный рой»[1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Pham D.T., Ghanbarzadeh A., Koc E., Otri S., Rahim S., Zaidi M. The Bees Algorithm. – Technical Note. – Manufacturing Engineering Centre, Cardiff University, UK, 2005.

Верхотуров Михаил Александрович,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. 8-927-303-35-92.
E-mail: verhotur@vmk.ugatu.ac.ru

Тарасенко Альфия Рифхатовна,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Загира Исмагилова, 10 – 76, Уфа, 450193, Россия, тел. 8-987-253-09-03.
E-mail: alphis@mail.ru

Тарасенко Павел Юрьевич,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Загира Исмагилова, 10 – 76, Уфа, 450193, Россия, тел. 8-987-253-09-04.
E-mail: rasmail@mail.ru

О ЗАДАЧЕ РЕСУРСНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОГРАММЫ ФОРМИРОВАНИЯ ВОСТОЧНО-СИБИРСКОГО НЕФТЕГАЗОВОГО КОМПЛЕКСА

Э.Х. Гимади, Е.Н. Гончаров, С.В. Севастьянов, В.Н. Харитонова

Рассматривается многономенклатурная динамическая задача сетевого планирования в условиях ограниченных ресурсов складируемого типа с учетом директивных сроков целевых событий и дисконтирования затрат. Предложенный алгоритм гарантирует нахождение оптимального расписания с минимальными суммарными дисконтированными затратами. Полученное расписание предлагается использовать в качестве оценочного (снизу) для приближенного решения задачи планирования программы Восточно-Сибирского нефтегазового комплекса.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 08-01-00516 и 07-07-00222), РГНФ (проект 06-02-00268), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 30.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х, Гончаров Е.Н., Пляскина Н.И., Харитонова В.Н. Метод решения задачи оптимизации ресурсно-календарного планирования для формирования программы Восточно-Сибирского нефтегазового комплекса // Труды Всероссийской конференции «Равновесные модели экономики и энергетики». – Иркутск-Северобайкальск, 2008. – С. 164-175.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-24.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Гончаров Евгений Николаевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-23.
E-mail: gon@math.nsc.ru

Севастьянов Сергей Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-18.
E-mail: seva@math.nsc.ru

Харитонова Виктория Никитична,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 330-13-67.
E-mail: kharit@ieie.nsc.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ ПЛАНИРОВАНИЯ НЕФТЕГАЗОВОГО КОМПЛЕКСА ВСНГК

Э.Х. Гимади, В.В. Залюбовский, И.А. Рыков, Н.И. Пляскина

В работе рассматривается задача оптимизации ресурсно-календарного планирования для формирования программы Восточно-Сибирского нефтегазового комплекса (ВСНГК) с учётом влияния непределённости и инновационных технологий. Представлен подход, использующий стохастическое сетевое планирование, содержащее в себе в качестве подзадачи традиционный (детерминированный) метод календарного планирования в условиях ограниченных ресурсов. Обсуждаются возможные приложения модели применительно к программе освоения ВСНГК.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 08-01-00516 и 07-07-00222), РГНФ (проект 06-02-00268), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 30.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Пляскина Н.И., Сокольская Т.И., Харитонова В.Н. Метод решения задачи оптимизации ресурсно-календарного планирования для формирования программы Восточно-Сибирского нефтегазового комплекса // Труды Всероссийской конференции "Равновесные модели экономики и энергетики". – Иркутск-Северобайкальск, 2008. – С. 176-184.

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-24.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Залюбовский Вячеслав Валерьевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-23.
E-mail: slava@math.nsc.ru

Рыков Иван Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-24.
E-mail: rykov@ngs.ru

Пляскина Нина Ильинична,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 330-28-26.
E-mail: pliaskina@ieie.nsc.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ КОМБИНАТОРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РАЗВИТИЯ ТОПЛИВНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА С ПОЗИЦИЙ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

А.В. Еделев

Актуальность исследований проблем обеспечения энергетической безопасности (ЭБ) в настоящее время весьма высока и определяется это значительным количеством угроз процессу нормального топливо- и энергоснабжения, таких как изношенность оборудования, социальная напряженность, высокая концентрация энергетических мощностей и т.д.

Комбинаторное моделирование [2, 3], являясь наглядной формой представления динамических дискретных ветвящихся альтернатив, позволяет проводить исследование множества вариантов развития топливно-энергетического комплекса (ТЭК) в виде направленного графа, вершины которого будут соответствовать состояниям ТЭК в опорные годы, а дуги – переходам из одного состояния в другое. Каждое состояние ТЭК оценивается на допустимость трехступенчатой системой ограничений:

1. Логические условия;
2. Балансовая экономико-математическая модель ТЭК России [4];
3. Оценка уровня ЭБ при помощи аппарата индикаторов ЭБ [1].

После оценки допустимости узлов и дуг производится поиск рациональных путей развития ТЭК с позиций обеспечения ЭБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бушуев В.В., Воропай Н.И., Мастепанов А.М., Шафраник Ю.К. и др. Энергетическая безопасность России. – Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 1998.
2. Зоркальцев В.И., Иванова Е.Н., Калинина А.А., Кузиванов В.И. и др. Тимано-печорский ТЭК: Стратегии развития и пути повышения эффективности. – Сыктывкар: КОМИ научный центр УрО АН СССР, 1991.
3. Ануфриев А.Ф., Вишерская Г.М., Зоркальцев В.И., Калинина А.А. и др. Региональный энергетический комплекс (особенности формирования, методы исследования) – Л.: Наука, 1988.
4. Зоркальцев В.И. Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения. – М.: Наука, 1988.

Еделев Алексей Владимирович
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-29-84.
E-mail: flower@isem.sei.irk.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ МНОГОПРОДУКТОВОГО ПРОИЗВОДСТВА

А.В. Еремеев, Ю.В. Коваленко

Рассматривается задача составления расписаний для многопродуктового производства. Требуется произвести d продуктов в объемах $V_1, \ldots, V_d$ с использованием m машин. Для продукта k указана одна или более технологий его производства. Пусть R_k – множество таких технологий, каждая из которых характеризуется набором одновременно занимаемых машин $S(r) \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $r \in R_k$ и объемом выпускаемой продукции в единицу времени a_r, $r \in R_k$. Для машины i заданы длительности переналадки p^i_{rj} с технологии r на технологию j. Определить длительность производства t^k_r каждого продукта k по всем технологиям и, если $t^k_r > 0$, указать момент начала использования технологии s^k_r таким образом, чтобы время окончания производства всех продуктов в заданных объемах было минимально.

Известно множество подходов к формулированию задач построения производственных расписаний в виде моделей частично целочисленного линейного программирования [1, 2]. Нами предложена модель частично целочисленного линейного программирования для рассматриваемой задачи, основанная на тех же принципах. Для данной модели разработаны генетический алгоритм с использованием жадных эвристик и генетический алгоритм с оптимальной рекомбинацией. Проведен эксперимент на случайных тестовых примерах, который показал существенное преимущество генетического алгоритма с оптимальной рекомбинацией по сравнению с непосредственным применением CPLEX и с генетическим алгоритмом с использованием жадных эвристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисовский П.А. Генетический алгоритм для одной задачи составления производственного расписания с переналадками // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2008. – Т. 4. – С. 166-173.
2. Ierapetritou M.G., Floudas C.A. Effective continuous-time formulation for shot-term scheduling: I. Multipurpose batch process // Ind. Eng. Chem. Res. – 1998. – Vol. 37. – P. 4341-4359.

Еремеев Антон Валентинович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

Коваленко Юлия Викторовна,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: juliakoval86@mail.ru

РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ ПО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

Л.А. Заозерская, В.А. Планкова

Одной из проблем тестирования, в том числе и компьютерного, является определение оптимальной структуры теста (ОСТ), обеспечивающего качественную проверку знаний минимальным числом заданий.

В [1, 2] развивается подход к формированию ОСТ с использованием моделей целочисленного линейного программирования (ЦЛП), в основе которых лежит задача о наименьшем покрытии множества. Согласно предложенной методике по учебному курсу формируются базовое и дополнительное множества основных понятий, свойств, утверждений. Разрабатывается набор возможных типовых заданий, каждое из которых проверяет некоторые элементы этих множеств. Построенные математические модели позволяют формировать оптимальные структуры тестов, обеспечивающих проверку знаний всех элементов базового и максимального числа элементов дополнительного множеств.

С использованием этого подхода ранее нами сформированы оптимальные структуры тестов по теме "Линейное программирование" учебного курса "Экономико-математические методы". Одна из них легла в основу разработанной компьютерной тестирующей системы, которая успешно использовалась при проведении зачета у студентов заочного отделения экономического факультета ОмГУ.

В данной работе представлена автоматизированная тестирующая система, усовершенствованная за счет включения в нее блока формирования ОСТ. В нем используется вариант алгоритма перебора L-классов для задачи булевого программирования, адаптированный к задаче ЦЛП формирования ОСТ [1]. Блок позволяет преподавателю формировать тесты в соответствии с текущими целями контроля, назначая элементы знаний, подлежащие обязательной проверке, т.е. базовое множество.

В докладе обсуждаются результаты и перспективы применения разработанной автоматизированной компьютерной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заозерская Л.А., Колоколов А.А., Планкова В.А. Разработка алгоритмов перебора L-классов для одной задачи компьютерного тестирования // Омский научный вестник. Серия: Приборы, машины технологии. – 2008. – N 1(64). – С. 12-14.
2. Заозерская Л.А., Планкова В.А. Применение моделей дискретной оптимизации для разработки автоматизированной системы контроля знаний // Вестник НГУ. Серия: Информационные техологии. – 2008. – Т. 6, Вып. 1. – С. 47-52.

Заозерская Лидия Анатольевна, Планкова Валентина Александровна
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: zaozer@ofim.oscsbras.ru, plankova@ofim.oscsbras.ru

СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПРОДАЖ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

И.Н. Кандоба

Представляются результаты математического моделирования микроэкономических процессов на локальных автономных товарных рынках. Моделью такого рынка является сеть взаимосвязанных пунктов реализации некоторого продукта. Рассматриваются математические модели, описывающие динамику потребительского спроса в сети. Эти модели отражают установленные при анализе статистических данных закономерности в процессах перераспределения объемов реализации продукта между пунктами при вариации значений доминирующих факторов, определяющих уровень спроса. Один из основных инструментариев, на основе которых строятся эти модели, является нелинейная функция спроса. Функция спроса определяется как функция цены продукта для каждого пункта и является его локальной характеристикой. Предлагаются ряд нелинейных конструкций, позволяющих описать взаимодействие пунктов сети в терминах эластичностей связей. Структура этих конструкций отражает естественную реакцию потребителей на изменение условий реализации продукта.

В предположении, что цена продукта является одним из основных факторов, определяющих уровень потребительского спроса в пунктах его реализации, формулируются оптимизационные задачи формирования ценовой политики субъекта рынка на краткосрочную перспективу. Содержательный смысл этих задач ценообразования заключается в следующем. При выполнении указанного предположения субъект рынка может использовать цены на продукт в контролируемых им пунктах в качестве управляющего параметра для достижения ряда своих целей в конкурентной борьбе с другими хозяйствующими субъектами на рынке. Такие цели могут обуславливаться задачами, связанными либо с достижением перераспределения сфер влияния на рынке, либо со стремлением удержать свои позиции на нем при ужесточении конкуренции.

Приводятся результаты численного моделирования с использованием реальных данных. Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00523.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kandoba I., Uspenskii A. Mathematical simulation of an autonomous network of retail outlets at a local market. – Interim Report, IR-01-000. – IIASA, Laxenburg, Austria, 2001.

2. Кандоба И.Н. Численный алгоритм решения одной векторной задачи ценообразования // Известия уральского государственного экономического университета. – 2004. – N 8. – С. 75-81.

3. Кандоба И.Н. Формирование финансовой политики фирмы на краткосрочную перспективу // Известия уральского государственного экономического университета. – 2006. – N 1 (13). – С. 53-66.

Кандоба Игорь Николаевич,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219 (ГСП-384), Россия,
тел. (343) 375-34-64, факс (343) 374-25-81.
E-mail: kandoba@imm.uran.ru

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ LGAP

О.Н. Канева, С.Б. Огородников

В ходе работ над системой формирования портфелей ценных бумаг [1] использовался алгоритм прогнозирования LGAP, описанный в [2].

Алгоритм [2] позволяет при прогнозировании учитывать значения сразу нескольких временных рядов и в качестве результата прогнозирования позволяет получать выборку значений, которая затем может использоваться для восстановления плотности вероятности прогнозируемого курса. При прогнозировании использовались данные о ценах закрытия дневных торгов по акциям котировального листа А1 ММВБ.

Одним из ограничений алгоритма [2] представляется невозможность учитывать всю информацию об изменениях курсов акций (цены открытия и закрытия, волатильность, объёмы торгов, номер дня недели, значения технических индикаторов), поскольку данная информация является разнородной.

В данной работе предлагается модификация этого алгоритма, позволяющая совместно прогнозировать временные ряды, представляющие полезную для прогнозирования, но разнородную информацию. Для этого в указанные выше процедуры алгоритма вносятся изменения, позволяющие учесть разнородность данных: разница соответствующих значений в узлах штаммов взвешивается в соответствии с коэффициентами, назначенными каждому столбцу. Это позволит не только вставлять в таблицу разнородные данные, компенсируя разницы в абсолютных величинах, но и указывать относительную важность используемых для прогнозирования данных. В дальнейшем планируется использовать и более сложные процедуры для определения компетентности изоморфных штаммов – учёт конца недели или предпраздничных дней, учёт сезонных колебаний, учёт или неучёт значений технических индикаторов.

Работа поддержана целевой программой "Развитие научного потенциала высшей школы" (рег. номер 2.1.1/2763) и грантом РФФИ 09-01-00213.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыкина А.В. Двухэтапная задача стохастического программирования для формирования портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. – 2008. – Т. 44, N 3. – С. 111-116.
2. Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.

Канева Ольга Николаевна, Огородников Сергей Борисович,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-20-84.
E-mail: OKaneva@yandex.ru, osb@sibes.omsk.ru

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ХАБОВ

Н.А. Косарев

Рассматривается задача размещения p хабов в следующей постановке. Имеется множество узлов сети $I = \{1, \dots, m\}$, между которыми должна быть осуществлена транспортировка однородной продукции. Поставки осуществляются не напрямую из пункта отправления в пункт назначения, а через выделенные крупные центры – хабы, имеющие неограниченную пропускную способность. Каждый пункт прикреплен к одному из хабов. Известны объем W_{ij} необходимых перевозок и стоимость C_{ij} транспортировки единицы товара для каждой пары пунктов i и j $(i, j \in I)$. Величины χ, α, δ – дисконтные коэффициенты для перевозок вида "пункт отправления $\to$ хаб", "хаб $\to$ хаб", "хаб $\to$ пункт назначения" соответственно. Соответственно, перевозка продукции из пункта i в пункт j при условии, что i подключен к хабу k, а j – к хабу l, осуществляется по маршруту $i \to k \to l \to j$, а ее стоимость равна $W_{ij}(\chi C_{ik} + \alpha C_{kl} + \delta C_{lj})$. Требуется выбрать p пунктов, в которых будут размещены хабы, а для каждого из оставшихся $m-p$ узлов определить прикрепление к одному из хабов таким образом,чтобы минимизировать суммарные затраты на транспортировку продукции. В англоязычной литературе данная задача известна как *uncapacitated single allocation p-hub median problem* (USApHMP).

В приведенной постановке даже определение оптимального прикрепления клиентов к уже открытым хабам является $\mathcal{NP}$-трудной задачей [2]. В этой связи возрастает важность разработки алгоритмов приближенного решения USApHMP. В работе [1] предложен генетический алгоритм для указанной задачи. В нашем докладе рассматривается генетический алгоритм в сочетании с различными эвристическими процедурами, в том числе локальным поиском и рекомбинацией генов родительских особей при выполнении операции кроссинговера. Проведен вычислительный эксперимент на известных сериях тестовых задач. На ряде задач полученные результаты превосходят аналогичные показатели известных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kratica J., Stanimirovic Z., Tosic D., Filipovic V. Two genetic algorithms for solving the uncapacitated single allocation p-hub median problem // European J. Oper. Res. – 2007. – Vol. 182, N 1. – P. 15-28.
2. Love R.F., Moris J.G., Wesolowsky G. Facility location: Models and methods. – North-Holland, New York, 1988.

Косарев Николай Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: nkosarev@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕСТОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Л.В. Ларина

В настоящее время развивается подход к формированию компьютерных тестирующих систем, основанный на применении моделей и методов дискретной оптимизации, проходит апробацию тестирующая система по курсу “ Экономико-математические методы” [1, 2]. В данной работе продолжается исследование указанного подхода при изучении дисциплины “Информатика” на юридическом факультете ОмГУ. Приводятся математические модели и результаты вычислительного эксперимента для разделов “MS Excel” и “MS Word”.

Дадим постановку задачи. Пусть n – число вопросов, на основе которых формируется тест, m – число элементов знаний рассматриваемой нами дисциплины. Требуется выбрать α вопросов, имеющих максимальную суммарную оценку и проверяющих все элементы знаний не менее определенного числа раз. Для решения этой задачи используется следующая математическая модель:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \alpha,$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Здесь $a_{ij} = 1$, если вопрос j проверяет элемент знаний i, c_j – оценка важности j-го вопроса, b_i – “кратность” проверки элемента знаний i, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Результаты расчетов показали практическую значимость используемого подхода. В частности, число включаемых в тест вопросов удалось сократить по сравнению с существующей практикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заозерская Л.А., Планкова В.А. Применение моделей дискретной оптимизации для разработки автоматизированной системы контроля знаний // Вестник НГУ. Серия: Информационные техологии. – 2008. – Т. 6, Вып. 1. – С. 47-52.

2. Колоколов А.А., Ларина Л.В. Формирование проверочных тестов по информатике с использованием дискретной оптимизации // Материалы XIX Международной конференции “Применение новых технологий в образовании” Троицк: МОО фонд новых технологий в образовании “Байтик”. – 2008. – С. 326-327.

Ларина Любовь Викторовна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: larina@omsu.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА И РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ МОЛОЧНОГО КОМБИНАТА

А.С. Ласунов

В работе рассматривается проблема оптимизации выпуска молочной продукции на основании заявок потребителей. Целью работы является классификация потребителей по степени влияния их заказов на условную прибыль комбината. В работе используются ежемесячные данные о выпуске и реализации продукции калачинского молочного комбината за 2004–2007 гг. Алгоритм анализа потребителей включает нескольких этапов: 1) нахождение наиболее существенных факторов, характеризующих работу молочного комбината, 2) построение наиболее подходящей модели, описывающей выборочные данные, 3) классификация потребителей.

На первом этапе анализа были сформированы пять объясняющих переменных: MR – молоко, независимо от фасовки (тыс. руб.); KR – кефир, независимо от фасовки (тыс. руб.); TR – десерты (тыс. руб.); BR – масло (тыс. кг); CR – сухое молоко (тыс. кг)). Кроме того, была сформирована зависимая переменная Z (затраты на производство), которая аддитивно включает следующие статьи затрат: коммунальные услуги (тыс. руб.), материалы на технологические цели (тыс. руб.), транспортные услуги (тыс. руб.), закуп сырья (тыс. руб.).

На втором этапе были построены модели нелинейной регрессии:

$$Z_1(t) = \exp(b_1\, t + \varepsilon_1(t))\,(c_0 + c_1\, MR(t) + c_2\, KR(t) + c_3\, TR(t)), \tag{1}$$

$$Z_2(t) = \exp(d_1\, t + \varepsilon_2(t))\,(r_0 + r_1\, BR(t) + r_2\, CR(t)), \tag{2}$$

где $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ – случайные составляющие, удовлетворяющие предположениям метода наименьших квадратов. Уравнения (1) и (2) описывают затраты комбината на выпуск и реализацию соответственно цельномолочной и маслосливочной продукции. Переменные $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ являются аддитивными составляющими общих затрат на выпуск и реализацию молочной продукции комбината.

Заключительный этап анализа посвящен изучению индекса φ, описывающего влияние потребителей на условную прибыль молочного комбината. Индекс φ_i отражает заинтересованность молочного комбината в i–ом потребителе: этот индекс указывает на условную прибыль молочного комбината от всех заявок без учета заявки конкретного i–го потребителя (с учетом продажи цельномолочной продукции, масла, сухого молока и затрат на производство этой продукции). Снижение φ_i относительно уровня 100 % определяет степень заинтересованности комбината в i-ом потребителе.

Результаты расчетов значений φ_i позволяют установить пороговые значения объемов заявок, используемых для классификации потребителей, и принимать решения о реализации имеющихся заявок или их перераспределении.

Ласунов Александр Сергеевич,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: lasunov@rambler.ru

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ШКОЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ

Т.С. Лугуев

Пусть расписание R уроков l учителей в n классах представлено таблицей M $l \times t$ с элементами из множества $\{0, 1, \ldots, n\}$: если $j \neq 0$, то равенство «$M_{i,k} = j$» интерпретируется как урок учителя i в классе j в k-й академический час, при $j = 0$ — как отсутствие у учителя i урока в k-й час. Известно, что количество уроков каждого учителя равно двум.

К неизменным характеристикам расписания отнесем следующие: (а) параметры l, n и t; (б) нагрузки учителей, ω_i — набор номеров классов, в которых учитель i проводит уроки (количество вхождений номера класса j в набор ω_i равно количеству уроков учителя i в классе j, временнáя последовательность проведения уроков считается безразличной); (в) каждый столбец содержит $(l - n)$ нулевых элементов и точно один раз каждое из чисел $1, \ldots, n$, другими словами, в каждом классе проводятся все уроки от 1 до t включительно; (г) запрещается одновременное проведение уроков двумя учителями в одном классе (одновременное проведение уроков одним учителем в двух классах исключается табличной формой представления расписания).

Задача оптимизации расписания: с сохранением неизменных характеристик преобразовать R к виду, где в каждой строке оба ненулевых элемента размещены в соседних ячейках.

Построим регулярный степени t мультиграф $G(R)$ с числом вершин n следующим образом: выполним перебор наборов ω_i, соединяя каждый раз ребром вершины, номера которых составляют очередной набор ω_i.

Задачу оптимизации расписания можно переформулировать следующим образом. Требуется раскрасить *полу-ребра* мультиграфа (полу-ребро — пара вида «ребро-инцидентная вершина», в терминологии [1] — «инцидентор») в цвета $1, \ldots, t$ таким образом, что: (1) для каждой вершины цвета инцидентных полу-ребер различны; (2) цвета полу-ребер каждого ребра различаются на единицу.

Из результатов [2] следует, что для существования требуемой раскраски необходимо и достаточно условие четности t.

Если характеристику (в) заменить на условие различия ненулевых элементов в каждом столбце, то имеет место следующее утверждение.

Утверждение. При $t = 5$ проверка существования раскраски для $G(R)$ осуществима за полиномиальное время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987.
2. Магомедов А.М. Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя // Матем. заметки. – 2009. – Т. 85, Вып. 1. – С. 65-72.

Лугуев Тимур Садыкович,
Дагестанский государственный университет,
ул. Шамиля, 18а - 53, Махачкала, 367026, Россия, тел. (8722) 64-97-96.
E-mail: magomedtagir1@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Д.А. Лютаев

Одним из основных способов моделирования дорожных сетей является поиск сетевого равновесия по Вардропу [1], когда каждый водитель имеет полную информацию о функции стоимости проезда по всем существующим маршрутам от источника к стоку и стремится минимизировать свою индивидуальную стоимость проезда.

В реальности выбор водителями маршрута осуществляется в условиях неполной информации и содержит в себе существенный элемент случайности. Для ее учета была предложена модель *стохастического равновесия* [2], основная идея которого состоит в том, что различают *фактическую* и *ожидаемую* пользователем цены одного и того же маршрута, а условие равновесия формулируется следующим образом: распределение называется равновесным, если ни один из участников движения *не предполагает*, что может улучшить свою индивидуальную стоимость поездки, меняя маршрут движения [2]. Это условие можно выразить в виде следующей системы уравнений:

$$f_{rs}^k = q_{rs} P_{rs}^k \qquad \forall s,\ r,\ k,$$

где rs - пара вершин источник-сток, q_{rs} - объем корреспонденции из вершины r в вершину s, k - некоторый маршрут из вершины r в вершину s, f_{rs}^k - часть корреспонденции q_{rs}, использующая маршрут k, $P_{rs}^k = P_{rs}^k(C_{rs}^k)$ - вероятность выбора маршрута k корреспонденцией rs, зависящая от случайной величины C_{rs}^k - ожидаемой представителями корреспонденции rs стоимости маршрута k .

Используя прием, предложенный в [3], были проведены эксперименты по расчету стохастического равновесия, которые показали, что в случае асимметричного распределения случайной величины C_{rs}^k могут возникать ситуации, являющиеся стохастическим аналогом "парадокса Брайесса", когда более привлекательным с точки зрения пользователей является маршрут, имеющий в среднем большую стоимость.

Работа поддержана грантом РФФИ 97-01-00771.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. – 2003. – N. 11. – С. 3-46.
2. Sheffi Y.U. transportation networks: equilibrium analysis with mathematical programming methods. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs N.J., 1984.
3. Henry X.L., Xiaozheng H., Bingsheng H. Method of successive weighted averages (MSWA) and self-regulated averaging schemes for solving stochastic user equilibrium problem // Transportation Research Board 86th Annual Meeting, 2007.

Лютаев Дмитрий Анатольевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (4232) 31-04-04, факс (4232) 31-04-52.
E-mail: luta@dvo.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Т.И. Маджара

В практике численного исследования задач оптимального управления (ЗОУ) с использованием современных программных комплексов нередки случаи возникновения в процессе счета разного рода нештатных ситуаций, выход из которых требует от пользователя высокой математической и программистской квалификации.

Рассматривается ЗОУ в классической постановке, которая: а) имеет решение; б) в последовательности улучшающих управлений, генерируемых программным комплексом, существует элемент, использование которого в последующих процедурах вычислительного метода приводит к аварийному завершению работы. Причинами этому могут быть, например, нарушение “условий роста” [1] в управляемой системе. Подходами, хорошо зарекомендовавшими себя при решении данного класса задач, можно назвать методы продолжения по параметру [2], расширяющие исходную задачу до параметрического семейства. Выбор последовательности значений параметра, при которых соответствующие задачи оптимального управления из параметрического семейства решались бы комплексом в штатном режиме, зачастую, основывается лишь на интуитивных представлениях вычислителя-эксперта.

В работе предлагается вычислительная технология, расширяющая традиционную архитектуру построения программных комплексов для решения ЗОУ до двухуровневой иерархии. Верхний (управляющий) уровень в контексте рассматриваемого класса задач обеспечивает: 1. Построение и численное исследование аппроксимирующего параметрического семейства. 2. Управление технологическими этапами решения ЗОУ. 3. Интерфейс взаимодействия с пользователем. Нижний (исполнительный) уровень реализуется вычислительным комплексом для решения ЗОУ, построенным по традиционной схеме и управляется верхним уровнем. Управляющий уровень реализован в виде экспертной системы, основанной на правилах. Помимо традиционного “консультационного” режима она имеет возможность сама управлять ходом решения, тем самым существенно повышая степень автоматизации существующих программных комплексов для решения ЗОУ.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-07-00267-а и РГНФ 09-02-00650.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985.

2. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. – М.: Мир, 1991.

Маджара Тарас Игоревич,
Институт динамики систем и теории управлении СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 45-31-00.
E-mail: taras@icc.ru

ПОИСКОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ПСЕВДОБУЛЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ ДАННЫХ

И.С. Масич

В работе рассматривается метод классификации данных, основанный на комбинаторике и оптимизации. В основе подхода лежит метод, называемый Логическим Анализом Данных (Logical Analysis of Data — LAD), который успешно использовался для решения ряда задач из различных областей [1]. Основная идея метода заключается в совместном использовании действий по «дифференцированию» и «интегрированию», производимых на области пространства R^n, содержащей заданные «положительные» и «отрицательные» наблюдения. На шаге «дифференцирования» определяется семейство малых подмножеств, обладающих характерными положительными или отрицательными чертами. На шаге «интегрирования» формируемые определенным образом объединения этих подмножеств рассматриваются как аппроксимации областей пространства R^n, содержащие положительные и, соответственно, отрицательные наблюдения.

Отличительной особенностью LAD является то, что вместо того, чтобы просто ответить на вопрос, является новое наблюдение положительным или отрицательным, он строит аппроксимацию области пространства R^n, содержащей положительные наблюдения, и области, содержащей отрицательные наблюдения.

Рассмотренный метод классификации данных, основанный на методологии LAD, состоит из этапов, на каждом из которых требуется решение серии задач условной псевдобулевой оптимизации. Критерий и ограничения в задачах заданы псевдобулевыми функциями, характеризующимися наличием свойств унимодальности и монотонности, что выделяет их в особенный класс задач, в которых допустимое множество является связным. Разработанные поисковые алгоритмы, основанные на поиске граничных точек допустимой области [2, 3], эффективно решают задачи рассматриваемого класса, повышая тем самым эффективность всего метода классификации данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hammer P.L., Bonates T. Logical Analysis of Data: From Combinatorial Optimization to Medical Applications. – RUTCOR Research Report 10-2005. – 2005.
2. Antamoshkin A.N., Masich I.S. Heuristic search algorithms for monotone pseudo-boolean function conditional optimization // Engineering & Automation problems. – 2006. – Vol. 5, N 1. – P. 55-61.
3. Antamoshkin A.N., Masich I.S. Pseudo-Boolean optimization in case of unconnected feasible sets // Models and Algorithms for Global Optimization. – Series: Springer Optimization and Its Applications, Vol. 4, edited by A. Törn, J. Žilinskas. – Springer, 2007, XVI. – P. 111-122.

Масич Игорь Сергеевич,
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева,
пр. Красноярский рабочий, 31, Красноярск, 660014, Россия, тел. (391) 291-91-41.
E-mail: i-masich@yandex.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В ВУЗЕ ПОСРЕДСТВОМ ВВЕДЕНИЯ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ СИСТЕМЫ ОБУЧЕНИЯ

И.П. Медведева, Е.В. Таирова

Модульно-рейтинговая система обучения строится на компетентностной основе для системы профессионального образования. Квалификационный стандарт по специальности состоит из набора модулей функциональных компетенций:

$$V_b = (V_{b_1}, V_{b_2}, ..., V_{b_n}),$$

где V_b - базовые требования к квалификации выпускника, $V_{b_1}, V_{b_2}, ..., V_{b_n}$ - базовые требования к знаниям, умениям и навыкам обучаемого, содержащиеся в отдельных модулях функциональных компетенций, n - число модулей функциональных компетенций в данном квалификационном стандарте.

Каждому модулю функциональных компетенций должен соответствовать модуль учебной программы. Сам процесс обучения и оценки знаний студентов переводится на модульно-рейтинговую основу:

$$V = (V_1, V_2, ..., V_n),$$

где V - достигнутый уровень качества трудового потенциала выпускника, $V_1, V_2, ..., V_n$ - достигнутый уровень профессиональной компетенции и знаний на основе соответствующего модуля функциональных компетенций, n - число модулей обучения, совпадающее с числом модулей функциональных компетенций.

Базовые требования V_b и достигнутый уровень качества V выражаются в числовых оценках.

При таком подходе целью управления качеством процесса обучения становится минимизация отклонения достигнутого уровня трудового потенциала выпускника от заданных базовых квалификационных требований путем максимального приближения достигнутых результатов обучения по каждому модулю учебной программы к требованиям соответствующих модулей функциональных компетенций, то есть

$$\max_i (V_{b_i} - V_i) \to min,$$

при выполнении ряда ограничений по отдельным параметрам каждого модуля. Переменными оптимизационной модели являются количество (по каждому модулю) видов промежуточного контроля знаний, например: количество тестов, контрольных работ, индивидуальных домашних заданий и т.п.

В докладе рассматривается данная постановка задачи применительно к четырем модулям учебной программы по дисциплине "Математика". Приводится сравнительный анализ результатов обучения в двух группах: экспериментальной (модульно-рейтинговая система) и обычной. Уровень профессиональных компетенций в экспериментальной группе оказался вдвое выше, чем в обычной.

Медведева Ирина Петровна, Таирова Елена Викторовна,
Иркутский государственный университет путей сообщения,
ул. Чернышевского, 15, Иркутск, 664074, Россия, тел. 8-902-515-81-71.
E-mail: Rudvik47@rambler.ru, Tairova_L@mail.ru

ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ С КУСОЧНО-ЗАДАННЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ И НЕДОСТАТКОМ ИЛИ ИЗБЫТКОМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ГЕНЕРАЦИИ

Д.С. Медвежонков

Рассматривается математическая модель транспортной системы, в которой однородный продукт передается по транспортным ветвям из пунктов производства в пункты потребления. Издержки на передачу представлены кусочно-заданной нелинейной функцией. Суммарный объем предельно допустимой генерации в узлах-источниках может быть не равен суммарному объему потребности в узлах-потребителях.

Модель в виде задачи оптимизации, описывает оптимальное по суммарным издержкам на транспорт распределение потоков по ветвям и выбор таких объемов генерации и потребления в узлах, при которых наилучшим образом покрываются потребности. Модель имеет применение при анализе живучести транспортных составляющих единой системы газо-, нефте- и нефтепродуктоснабжения.

Пусть n – число ветвей. Исходная задача оптимизации имеет вид:

$$sum_{j=1}^{n}(\tilde{F}_j(x_j) + s_j x_j) + \sum_{i \in I_{cons}} h_i(\bar{b}_i - b_i) \to min$$

$$Ax = b, x \geq \underline{x}, \quad \underline{b_i} \leq b_i \leq 0, \quad i \in I_{src}, \quad 0 \leq b_i \leq \bar{b_i}, \quad i \in I_{cons}.$$

Здесь x_j – объем потока по ветви j, A – матрица инциденций узлов и ветвей, I_{src} – множество индексов узлов-источников, I_{cons} – множество индексов узлов-потребителей, $|b_i|$ – объем генерации, если $i \in I_{src}$, или объем потребления, если $i \in I_{cons}$, s_j – коэффициент, h_j – коэффициент штрафа за недопоставку в узел i, $\tilde{F}_j(x_j)$ – кусочно-заданная нелинейная функция-составляющая издержек на передачу. Если $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$, то $\tilde{F}_j(x_j) = 0$. Если $x > \bar{x}$, то $\tilde{F}_j(x_j) = F_j(x_j - \bar{x}_j)$, где $F_j(\chi)$ – функция из Z – множества непрерывно дифференцируемых функций вещественного аргумента, равных нулю в нуле, производные которых монотонно возрастают и равны нулю в нуле.

К исходной строится двойственная задача, зависящая от переменных y, η, u, η^b, v^b:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\Phi}_j(y_j) - \sum_{j=1}^{n} \underline{x}_j \eta_j - \sum_{i \in I_{src}} \underline{b}_i \eta_i^b + \sum_{i \in I_{cons}} \bar{b}_i v_i^b \to min$$

$$y_j + s_j - [A^T u]_j - \eta_j = 0, \quad \eta_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n$$

$$u_i - \eta_i^b \leq 0, \quad \eta_i^b \geq 0, \quad i \in I_{src}, \quad u_i - h_i + v_i^b \geq 0, \quad v_i^b \geq 0, \quad i \in I_{cons}.$$

Здесь функция $\tilde{\Phi}_j(y_j)$ принадлежит множеству Z и является преобразованием Лежандра функции $\tilde{F}_j(x_j)$. Эта задача позволяет взглянуть на модель с точки зрения двойственных переменных: вектора узловых цен u, вектора переменных предельных издержек y, вектора тарифных вычетов η.

На языке программирования C++ реализован алгоритм внутренних точек для решения исходной задачи. Алгоритм апробирован на ряде примеров с размером сети от 10 узлов × 15 ветвей до 200 узлов × 240 ветвей.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00306-а.

Медвежонков Дмитрий Сергеевич,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64.
E-mail: dmitry@isem.sei.irk.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ РАЗВОЗКИ

Г.А. Омарова

На сегодняшний день по-прежнему актуальны задачи транспортной логистики, такие как оптимизация и организация рациональных грузопотоков, их обработки, обеспечение повышения эффективности таких потоков, снижение непроизводительных издержек и затрат. В докладе рассматривается задача поиска оптимального маршрута перевозок.

Имеется сеть дорог, на которой отмечены узлы: перекрестки, пункты обслуживания (магазины) и некоторые участки дорог. Известно место расположения склада. Требуется определить замкнутый маршрут объезда всех магазинов, который начинается с точки размещения склада и имеет миинимальную длину.

Математическая постановка задачи состоит в следующем.

Дан граф $G = (V, E)$ – планарный, связный, без петель, заданный матрицей достижимости A. Множество вершин $V = \{v_1, ..., v_n\}$ соответствует множеству узлам, а $V_k \subseteq V$ – подмножеству вершин, через которые должен проходить искомый маршрут. Пара вершин соединена в G ребром, если существует участок дороги в сети, непосредственно соединяющий соответствующие узлы. Кроме того, указана вершина v_0 – начальная вершина маршрута, соответствующая складу. Требуется найти кратчайший замкнутый путь, включающий вершину v_0 и все вершины множества V_k.

Решение задачи проводится в два этапа. Сначала от графа G переходим к полному графу G_{k+1} на множестве вершин $V_k \bigcup \{v_0\}$, в котором вес ребра – это длина кратчайшего пути от вершины v_i до вершины v_j в графе G. Затем решается задача поиска гамильтого цикла минимального веса в графе G_{k+1}.

Данная задача является NP-трудной, но при небольшом значении параметра k временные затраты приемлемы. Некоторые приемы (декомпозиция графа и специальный анализ исходных данных) позволит существенно снизить перебор вариантов.

Цель работы – создание системы, которая будет определять маршруты движения транспорта по улицам города. Система включает базу данных по кратчайшим путям между выделенными вершинами. Это позволит с минимальными затратами по времени пересчитывать пути для каждого обхода выделенных вершин, а также задавать путь и изменять существующие.

Омарова Гульзира Алимовна,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383) 330-96-43, факс (383) 330-96-43.
E-mail: gulzira@rav.sscc.ru

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ФОРМИРОВАНИЮ СЛОЖНЫХ ИЗДЕЛИЙ

Т.М. Орлова, А.А. Чернова

При проектировании сложных изделий представляется перспективным подход, основанный на использовании задач дискретной оптимизации с логическими ограничениями [2]. Применение данного подхода обусловлено тем, что при конструировании изделий необходимо учитывать приоритетные сочетания элементов и условия нежелательности комбинаций некоторых из них.

Рассматриваемые постановки являются обобщениями известной задачи максимальной выполнимости логической формулы. Логические ограничения могут быть *жесткими* и *мягкими*. Первые соответствуют задаче выполнимости логической формулы, а вторые — задаче максимальной выполнимости логической формулы. В математические модели включаются также ограничения на ресурсы и требования специалиста. Задача состоит в нахождении набора составляющих проектируемого изделия, максимизирующего сумму весов мягких логических формул при выполнении указанных жестких логических, ресурсных и других ограничений.

На основе указанного подхода построены модели целочисленного программирования для получения точных и приближенных решений задачи, создан программный комплекс, предназначенный для решения задач проектирования сложных изделий.

В данной работе в качестве сложных изделий рассматриваются женские жакеты. Для этого ассортимента одежды с учетом информации из современных журналов, материалов из Интернета и других источников [1] сформирована библиотека элементов и логические ограничения. С помощью программного комплекса проведен вычислительный эксперимент с реальными исходными данными, подтверждающий эффективность применения развиваемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Г.М. Композиция костюма // Учеб. пособие для студ. высш. учеб.завед. – Издательский центр “Академия”, 2004.

2. Колоколов А.А., Ярош А.В., Орлова Т.М. Приближенное решение задачи эскизного проектирования одежды с использованием моделей целочисленного программирования // III Всероссийская конференция “Проблемы оптимизации и экономические приложения”: Материалы конференции. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2006. – С. 179.

Орлова Татьяна Михайловна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: orlova-tanya@gmail.com

Чернова Александра Александровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.

НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РАСКРОЙНЫХ ПЛАНОВ

Т.А. Панюкова

Задачи раскроя-упаковки принято рассматривать в двух постановках: "оптимальное размещение деталей заданной формы и заданных размеров" и "оптимальный ход режущего инструмента при заданном размещении деталей на плоскости". На практике часто необходимо выполнять негильотинный прямоугольный раскрой. В автоматизированной системе технологической подготовки процессов раскроя листового материала математической моделью раскройного плана является плоский граф. Целью моделирования является определение такой кратчайшей траектории режущего инструмента, чтобы отрезанная от листа часть не требовала дополнительных разрезаний. Формально множество таких траекторий может быть определено как покрытие с упорядоченным охватыванием для плоского графа [1]. Пусть для некоторого набора прямоугольных деталей известно несколько оптимальных упаковок. Требуется найти множество упаковок, для которых покрытие цепями с упорядоченным охватыванием было бы оптимальным.

Рассмотрим возможные критерии оптимальности.

1. *Количество дополнительных построений.* Задача их минимизации тривиальна. В данном случае необходимо рассмотреть все имеющиеся упаковки и выбрать те, для которых в соответствующем им плоском графе число вершин нечетной степени будет минимально, и построить покрытия цепями с упорядоченным охватыванием. Такая задача решается за линейное время.

2. *Суммарная длина маршрута.* Эта задача также может быть решена за линейное время еще на этапе кодирования графа.

3. *Длина дополнительных построений.* Эта задача не так тривиальна. В частности, алгоритм для задачи китайского почтальона в этом случае не подходит, т.к. при построении маршрута порядок обхода определяет и уровень вложенности каждой вершины. С целью уменьшения длины маршрута можно рекомендовать идти в ближайшую вершину с максимальным уровнем вложенности (жадный алгоритм). Вычислительный эксперимент показывает, что построенное таким образом решение имеет меньшую длину, нежели решение, найденное с помощью алгоритма [2], где последовательность выбиралась лексикографически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Panyukova T. Cover with ordered enclosing for flat graphs // Electronic Notes in Discrete Mathematics. – 2007. – N 28. – P. 17-24.

2. Мухачева Э.А., Панюкова Т.А. Проблема рационального использования промышленных материалов: оптимизация обратного хода раскроя // Обратные задачи в приложениях. Сборник статей научно-практической конференции. – Бирск: БирГСПА, 2008. – С. 270-276.

Панюкова Татьяна Анатольевна,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел. (351) 267-90-39, факс (351) 267-90-39.
E-mail: kwark@mail.ru

ТАРИФЫ НА УСЛУГИ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ

А.В. Панюков, Е.В. Шмиголь

Отрасль услуг связи по темпу роста является одним из лидеров российской экономики. Поэтому остро встает вопрос обоснованности тарифов на данную связь. Существуют несколько работ в данной области.

В работе [1] предложен метод нахождения оптимальных цен на услуги мобильной связи, в основе которого лежит принцип переговоров между потребителем данных услуг и фирмой, их предоставляющей. Процесс переговоров представляет собой рекуррентную игру Штакельберга, в которой первым игроком, предлагающим цену (лидером), является потребитель. На каждом этапе переговоров оператор (последователь) определяет свои цены, основываясь на выборе абонента. Результатом являются оптимальные цены, устраивающие и потребителя и оператора.

В работе [2] тщательно исследован вопрос установления оптимальных цен на сотовую связь в зависимости от суммы платежей между операторами связи (стоимости интерконнекта). Для анализа использовались двойные тарифы, то есть те, которые состоят из фиксированного обязательного платежа (абонентской платы) и суммы, зависящей от активности абонента и цены за минуту разговора.

Наиболее эффективной ценовой политикой фирмы является ценовая диверсификация, ориентированная на покупателя и максимизирующая рентабельность продаж. Будем рассматривать тарифный план как комплексную услугу, созданную для определенной группы потребителей. В докладе предлагается при диверсификации цен на тарифные планы использовать равновесные цены на услуги мобильной связи, найденные по модели Неймана (A, B), в которой матрица A содержит затраты оператора на оказание услуг по каждому тарифному плану, матрица B содержит доходы от услуг в соответствующих тарифных планах. Устойчивые алгоритмы нахождения равновесия в модели Неймана известны [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen H., Pau L. Individual tariffs for Mobile Services: Theoretical Framework and a Computational Case in Mobile Music. – Erasmus Research Institute of Management, 2007.
2. Gans J.S., King S.P. Mobile Network Competition, Customer Ignorance and Fixed-to-Mobile Call Prices // Information Economics and Policy. – 2000. – Vol. 12. – P. 301-327.
3. Латипова А.Т., Панюков А.В. Оптимизация бюджета продаж // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия “Рынок: Теория и практика”. – Челябинск: ЮУрГУ, 2006. – Вып. 4, N 15 (170). – С. 116-120.

Панюков Анатолий Васильевич, Шмиголь Екатерина Владимировна,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел./факс (351)267-90-39.
E-mail: a_panyukov@mail.ru, tteu448@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК, УЧИТЫВАЮЩЕГО КВАДРАТИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ, ДЛЯ ОЦЕНКИ ДЕФИЦИТА МОЩНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.М. Пержабинский

Рассматривается электроэнергетическая система, из m узлов и n связей между ними. Задана располагаемая мощность $\bar{x}_i$, максимальная нагрузка $\bar{y}_i$ в $i-$ом узле, $i = 1, \dots, m$, пропускная способность $j-$ой линии электропередач $\bar{z}_j$ и коэффициент потерь мощности на $j-$ой связи α_j, $j = 1, \dots, n$. Переменными исходной задачи являются: x_i- используемая мощность в узле i, y_i- нагрузка в $i-$ом узле, z_j-поток мощности по связи j, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Требуется найти

$$\sum_{i=1}^{m} (\bar{y}_i - y_i) \to \min, \tag{1}$$

учитывая балансовые ограничения

$$x_i - y_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} z_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\max\{0,\, t_{ij} z_j\}\right)^2 \geq 0,\ i = 1,\ \dots,\ m \tag{2}$$

и линейные двусторонние ограничения-неравенства на переменные

$$0 \leq y_i \leq \bar{y}_i,\ 0 \leq x_i \leq \bar{x}_i,\ \underline{z}_j \leq z_j \leq \bar{z}_j,\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Здесь $t_{ij}-$ элементы матрицы связи размера $m \times n$, которые принимают следующие значения: -1 (если узел $i-$ начало связи j), 1 (если узел $i-$ конец связи j), 0 (если узел i не прилегает к связи j), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Задача (1)-(3) является задачей выпуклого программирования [1], поэтому для ее решения справедливо применение метода внутренних точек, учитывающего квадратичные аппроксимации [2]. Данный алгоритм основывается на итеративной линеаризации и методе внутренних точек при решении линеаризованной задачи. В целях сокращения погрешностей линеаризации предлагается использовать квадратичные аппроксимации функций. Тем самым учитывается структура задачи, что позволяет уменьшить объем вычислений. В докладе представлен алгоритм и результаты экспериментального исследования.

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00306а, ИГУ, грант № 111-02-000/8-01.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоркальцев В.И., Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М. Модели оценки дефицита мощности электроэнергетических систем // Препринт. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2000. – С. 17-22.
2. Пержабинский С.М. Алгоритм внутренних точек, использующий квадратичные аппроксимации // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – ИрГУПС, 2008. – N 3(19). – С. 97-101.

Пержабинский Сергей Михайлович,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-97-64.
E-mail: sergey_per85@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В САПР ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Е.Ю. Печаткина

В процессе автоматизированного проектирования этапов подготовки производства на предприятиях легкой промышленности возникает ряд задач оптимизации, которые необходимо решать с применением математического аппарата [1, 2].

Существует множество факторов, влияющих на изготовление швейного изделия (производственные, конструктивные, технологические и другие). Им отвечает набор критериев, характеризующих изготовление изделия в целом. На начальном этапе запуска изделия в производство необходимо определить технологичность изделия по факторам, т.е. найти оптимальное значение затрат всех видов работ при проектировании и производстве для заданных показателей качества, объемов выпуска и условий выполнения работ.

Анализ опыта создания, внедрения и эксплуатации САПР легкой промышленности показал, что применение системного подхода к формализации информационного поля приводит к интеграции потоков информации. Разработанные требования предполагают применение многокритериальной оптимизации с целью выбора оптимальной модели для запуска в производство.

В данной работе изучается задача многокритериальной оптимизации, связанная с выбором моделей мужского костюма из некоторого множества M. Каждая модель оценивается с помощью критериев $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$. Задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} &F(x) \to \min \\ &x \in M. \end{aligned}$$

Поиск решений задачи ведется среди Парето-оптимальных точек множества M.

Применение многокритериальной оптимизации позволяет выбрать модели костюма и методы обработки их сборочных единиц, в наибольшей степени отвечающие условиям производства и оценкам специалистов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Партыка Т.Л., Попов И.И. Математические методы. – М.: ИНФРА-М, 2007.
2. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учеб. пособие для ВУЗов. – М.: Дрофа, 2006.

Печаткина Елена Юрьевна,
Южно-Уральский государственный университет,
ул. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел (351) 907-06-05.
E-mail: Pechatkina_@inbox.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСВОЕНИЯ РЕСУРСОВ ГАЗОДОБЫВАЮЩЕГО РАЙОНА

Н.И. Пляскина

Прогнозирование разработки газодобывающего района на длительную перспективу – сложный процесс, требующий учета стохастической природы многих геолого-промысловых факторов и экономических параметров. В этих условиях наиболее адекватным методом моделирования разработки группы месторождений является имитационное моделирование, позволяющее учесть особенности условий природопользования и механизма рыночного управления. Нами выделено две последовательных стадии прогноза, для каждой приведены экономико-математические модели. Первая стадия – формирование вариантов разработки месторождений. Используется имитационная модель, которая является генератором вариантов разработки месторождения с учетом особенностей недропользования, ограниченности и неопределенности запасов и дебитов скважин. По каждому варианту определяются годовые объемы добычи углеводородов и потребляемых ресурсов, а также интегральные затраты в целом по варианту. Данная модель является ядром предлагаемой системы прогнозирования. Вторая стадия – оценка и выбор эффективного варианта разработки группы месторождений на основе использования методов анализа инвестиционных проектов. Выбор наилучшего варианта проводится по показателям чистого дисконтированного дохода (ЧДД), внутренней нормы доходности (ВНД) и срока окупаемости инвестиций (Т), которые позволяют оценить влияние экономических факторов (конъюнктуры мирового рынка углеводородов, налоговой системы, ставки банковского процента, темпов инфляции и других). Формирование эффективного варианта разработки группы месторождений достигается путем проведения одного или нескольких циклов расчетов по указанным моделям. Вводится функционал, равный отношению ЧДД проекта к объёму газа, добытому за время реализации проекта. При прочих равных условиях возникает динамическая задача с дискретным временем максимизации значения удельной прибыли. Метод решения задачи выбора эффективного варианта представляет собой организацию полного перебора возможных вариантов. Построенный алгоритм был реализован на персональном компьютере с помощью интегрированного в Microsoft Excel языка программирования Visual Basic Access. Апробация предлагаемого подхода проведена на примере разработки группы газовых месторождений полуострова Ямал. В результате расчетов построены эффективные варианты разработки группы месторождений, характеризующиеся динамикой добычи, денежными потоками, ЧДД, ВНД и Т, значениями объёмов добычи по каждому месторождению, коэффициентами извлечения газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пляскина Н.И. Прогнозирование комплексного освоения углеводородных ресурсов перспективных районов: теоретические и методологические аспекты. – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2006.

Пляскина Нина Ильинична, ИЭОПП СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090,
тел/факс (383) 330-28-26, (383) 330-25-80.
E-mail: pliaskina@hotmail.com, pliaskina@ieie.nsc.ru

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

А.Н. Романовская

Рассматриваются нелинейные задачи математического программирования специального вида, возникающие в моделях оптимизации банковской деятельности и функционирования предприятия - ритейлера. Целевой функцией каждой модели служит прибыль банка (предприятия), которая выражается как разница между доходами и затратами объекта. Целевая функция может быть записана следующим образом: $\sum c_i x_i + y \sum x_j - \sum \widetilde{c_k} \widetilde{x_k} - \widetilde{y} \sum \widetilde{x_m}$, где c_i – известный доход от продажи единицы товара (услуги и т.п.) вида i, x_i – искомое число единиц проданного товара i, y – искомый доход от продажи единицы товара из специальной группы, $\widetilde{c_k}$ – заданные затраты на единицу вида k, $\widetilde{x_k}$ – искомое число единиц затрат вида k, $\widetilde{y}$ – изменяемые затраты на единицу товара из специальной группы. Возникает несколько задач в зависимости от набора ограничений на ресурсы, затраты, доходы объекта. Среди ограничений присутствует одно нелинейное ограничение специального вида: $(y - \alpha_i)x_i \leq 0$, где α_i – заданная величина.

Для каждой задачи был построен алгоритм решения, доказана теорема о сходимости алгоритма за число шагов меньшее, чем дают известные методы решения задач нелинейного программирования. Приведены теоремы об условиях устойчивости оптимального решения в зависимости от исходных данных.

Проведены численные эксперименты по данным предприятия - ритейлера, специализирующегося на продаже книг. Множество всех книг было разбито на подмножества согласно принадлежности к одной тематике (например, учебная литература, художественная литература и т.д.) и к одной ценовой группе. Построены модели оптимизации прибыли предприятия для каждой из восьми тематик. Эксперимент показал, что полученное оптимальное распределение цен существенно, более, чем на 5%, увеличивает выручку по продаже книг конкретной тематики.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-06-00363 и грантом президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-4113.2008.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анцыз С.М., Орозбеков Н.А. Об одном подходе к построению математических моделей для оптимизации банковской деятельности. – Препринт. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2004. – N 147.
2. Романовская А.Н. Об одной модели оптимизации деятельности банка // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11, N 4(36). – С. 136-150.

Романовская Анастасия Николаевна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-04.
E-mail: nastyar@ngs.ru

ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ ЗАКАЗОВ ДЛЯ СЕТИ АПТЕК РЕГИОНА

В.С. Сигаев

В данной работе рассматривается задача размещения заказов среди поставщиков фармацевтической продукции для обслуживания сети аптек региона. Основной критерий - минимизация количества заказанного и непривезенного товара:

$$\varphi^* = \min\Big\{\sum_{a\in A}\sum_{t\in T}(Q_{at} - \sum_{p\in P} x_{pat}) \mid ((x_{pat}), (d_{pa})) \in \Omega\Big\},$$

где T – множество типов продукции, P – множество поставщиков, A – множество аптек, Q_{at} – потребности аптеки a в продукции t. Переменными являются $x_{pat} \in Z_+$ – количество продукции t, направляемое от поставщика p аптеке a и d_{pa}, которая равна 1, если поставщик p поставляет потребителю a продукцию, и 0, иначе. $\Omega = \{((x_{pat}), (d_{pa}))\}$ – множество допустимых решений, определяемое следующими ограничениями:

$$\sum_{p\in P} x_{pat} \le Q_{at}, a \in A, t \in T; \qquad \sum_{\acute{a}\in A}\sum_{t\in T} c_{pt} f_{\acute{a}r} x_{p\acute{a}t} \ge V_{rpa} d_{pa}, p \in P, r \in R, a \in A;$$

$$\sum_{a\in A} x_{pat} \le b_{pt}, p \in P, t \in T; \qquad g_{pr} x_{pat} \le Q_{at} d_{pa}, a \in A, p \in P, t \in T, r \in R;$$

$$x_{pat} \in Z_+, d_{pa} \in \{0, 1\}, a \in A, p \in P, t \in T,$$

где R – множество маршрутов ($R = \{r_1, \dots, r_{|R|}\}$, $r_i \subset A$, $i = 1, 2, \dots, |R|$), f_{ar} равна 1, если $a \in r$, и 0, иначе, R_p – множество маршрутов поставщика p, $R_p \subset R$, g_{pr} равна 1, если $r \in R_p$, и 0 иначе, b_{pt} – запас продукции t у поставщика p, V_{rpa} – минимальная суммарная стоимость заказа аптек в маршруте r, достаточная для поездки в аптеку a. Маршруты у одного поставщика не имеют общих аптек, $r \bigcap \acute{r} = \emptyset$, $r \in R_p$, $\acute{r} \in R_p$, $r \ne \acute{r}$.
Второстепенным критерием является минимизация стоимости закупки товара:

$$\psi^* = \min\Big\{\sum_{a\in A}\sum_{t\in T}\sum_{p\in P} c_{pt} x_{pat} \mid \sum_{a\in A}\sum_{t\in T}(Q_{at} - \sum_{p\in P} x_{pat}) = \varphi^*, ((x_{pat}), (d_{pa})) \in \Omega\Big\},$$

где c_{pt} - стоимость продукции t у поставщика p.
Третьим по значимости критерием является минимизация количества поставщиков, обслуживающих каждую аптеку:

$$\min\Big\{\max_{a\in A}(\sum_{p\in P} d_{pa}) \mid \sum_{a\in A}\sum_{t\in T}(Q_{at} - \sum_{p\in P} x_{pat}) = \varphi^*, \sum_{a\in A}\sum_{t\in T}\sum_{p\in P} c_{pt} x_{pat} = \psi^*, ((x_{pat}), (d_{pa})) \in \Omega\Big\}.$$

Доказана NP-трудность данной задачи. Предложены генетический алгоритм и эвристика локального поиска. Приводится сравнение качества приближенных решений полученных этими методами. На основании результатов данной работы разработано программное обеспечение, прошедшее этап внедрения в Омской области и показавшее свою эффективность.

Сигаев Вячеслав Сергеевич,
ООО “ИТСК”,
пр. Губкина, 1, Омск, 644040, Россия, тел. (3812) 270-370, факс (3812) 270-370.
E-mail: sigvs@mail.ru

ПРОБЛЕМА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ МНОГОВЕТОЧНОГО НЕФТЕПРОВОДА С УЧЕТОМ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

О.В. Чепурной, Р.Т. Файзуллин

Проблема экономии электроэнергии при транспортировке нефтепродуктов является одной из важнейших и интереснейших задач, стоящих как перед исследователями, так и непосредственно перед производственниками. Очевидно, что такая сложная проблема и должна решаться в тесном взаимодействии науки и производства.

В настоящей работе изложен многолетний опыт разработки, внедрения и опытной эксплуатации программно-аппаратного комплекса поиска оптимальных технологических режимов работы нефтепроводов ОАО "Транссибнефть".

Предложен алгоритм оптимизации, учитывающий ограничения по давлению, осуществлена привязка программной реализации алгоритма к существующей системе диспетчерского контроля и управления, рассмотрено взаимодействие комплекса и различных служб: коммерческого отдела, отдела главного технолога, отдела главного диспетчера.

Показано, как опыт эксплуатации позволяет учесть и уточнить технические характеристики многочисленных устройств и агрегатов, составляющих сложную техническую систему, каковой и является функционирующий нефтепровод.

Чепурной Олег Вячеславович,
ОАО "Транссибнефть",
ул. Красный путь, 111/1, Омск, 644050, Россия,
тел. (83812) 65-35-02, факс (83812) 65-98-46.

Файзуллин Рашит Тагирович,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. 8-983-111-27-29.
E-mail: r.t.faizullin@mail.ru

ОБ УПРАВЛЕНИИ РЕГИОНАЛЬНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ НА ОСНОВЕ ПРОГРАММНО-ЦЕЛЕВОГО ПОДХОДА

М.А. Юдина

Одним из широко используемых методов государственного управления является реализация целевых программ в ключевых сферах экономики. В данной работе проанализированы существующие методические подходы к формированию целевых программ и предложен ряд инструментов для обеспечения эффективности программно-целевого управления в цикличных условиях развития экономики.

На 2009 год в Омской области приняты к реализации 16 федеральных целевых программ с общим объемом финансирования в размере 2168,2 млн.руб. Общее количество принятых к исполнению в 2009 году областных программ уменьшено с 26 до 22, совокупный объем ассигнований областного бюджета предусмотрен в размере 5621,85 млн.руб, что составляет 54% от суммы, установленной Законами Омской области по соответствующим программам (www.omskportal.ru). Резкое сокращение объемов финансирования программ вызвано последствиями глобального финансово-экономического кризиса. При разработке программ в 2005-2006 годах такие форс-мажорные сценарные условия не были предусмотрены. Как правило, прогнозные значения целевых индикаторов и других показателей основывались на выполнении плана соответствующих мероприятий и стабильном финансировании.

Совокупность реализуемых на территории области программ образует сложную систему. Резкое изменение параметров отдельных программ без учета межотраслевых взаимосвязей может негативно сказаться на эффективности не только отдельной программы, но и произвести мультипликативный отрицательный эффект на совокупность в целом. Для повышения эффективности управленческих решений по корректировке программ необходимо решить следующие задачи.

Во-первых, на этапе диагностики рисков реализации программы целесообразно определять так называемый "пороговый" вариант программы - тот минимальный комплекс мероприятий и соответствующего объема финансирования, который будет иметь положительную общественную эффективность. Выявленные значения пороговых параметров дадут объективную базу для принятия управленческих решений: если фактическое финансирование не достигает порогового значения, то данную программу эффективнее законсервировать, а средства направить на поддержку других программ. Во-вторых, каждая целевая программа должна быть представлена в нескольких вариантах (допустим, "пороговом", среднем, оптимальном, максимальном), соответствующих разным значениям базовых факторов. В-третьих, необходимо разработать критерии и инструменты поиска оптимального с точки зрения совокупной для региона общественной эффективности набора вариантов целевых программ.

В решении данных задач, по нашему мнению, весьма перспективным представляется использование методов дискретной и многокритериальной оптимизации, межотраслевого баланса. В условиях финансово-экономического кризиса применение программно-целевого подхода особенно актуально, так как позволяет решать задачи концентрации ограниченных ресурсов.

Юдина Марина Александровна,
Омский государственный университет путей сообщения,
пр. К. Маркса, 35, Омск, 644042, Россия, тел. (3812) 31-06-63.
E-mail: myum@inbox.ru

О КОМПЬЮТЕРНОМ ТЕСТИРОВАНИИ ЗНАНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВОПРОСОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

А.В. Ярош

В настоящее время для контроля знаний студентов достаточно широко используется тестирование. Особенно перспективным направлением в данной области представляется использование компьютерных технологий, которое позволяет повысить объективность и надежность получаемых результатов, обеспечить единство требований, сократить временные затраты и т. д.

При создании систем компьютерного тестирования одной из важнейших является проблема разработки тестов, поскольку их качество существенно влияет на оценку знаний студентов. Для решения этой проблемы в работах [1–3] развивается подход к оптимизации тестовых заданий, основанный на применении математических моделей и методов. Эти модели относятся к области дискретной оптимизации и представляют собой задачи о покрытии множества или их обобщения. В [1, 2] описаны соответствующие модели целочисленного линейного программирования и результаты их практического применения при разработке тестов по дисциплине «Экономико-математические методы» для студентов экономических специальностей вузов, а в [3] – по дисциплине «Информатика» для студентов юридического факультета ОмГУ.

В работе изучаются возможности использования данного подхода при компьютерном тестировании знаний студентов по дисциплинам, связанным с проектированием информационных систем, в условиях учебного процесса Омского филиала МФПА. Особое внимание уделяется вопросам освоения программных средств, предназначенных для моделирования и оптимизации бизнес-процессов. Анализ показал, что на основе рассматриваемого подхода могут быть созданы системы автоматизированного тестирования по дисциплинам указанного профиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заозерская Л.А., Колоколов А.А., Планкова В.А. Разработка алгоритмов перебора L-классов для одной задачи компьютерного тестирования // Омский научный вестник. – Омск, 2008. – N 1 (64) – С. 12-14.
2. Заозерская Л.А., Планкова В.А. Применение моделей дискретной оптимизации для разработки автоматизированной системы контроля знаний // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. – 2008. – Т. 6, Вып. 1. – С. 47-52.
3. Колоколов А.А., Ларина Л.В. Формирование проверочных тестов по информатике с использованием дискретной оптимизации // Материалы XIX Международной конференции «Применение новых технологий в образовании», Троицк: МОО фонд новых технологий в образовании «Байтик», 2008. – С. 326-327.

Ярош Александра Викторовна,
Омский филиал НОУ ВПО «Московская финансово-промышленная академия»,
пр. К. Маркса, 18, корп. 10, Омск, 644001, Россия, тел. (3812) 37-30-48.

СПИСОК АВТОРОВ

СОДЕРЖАНИЕ

IV Всероссийская конференция

Проблемы оптимизации и экономические приложения

Омск, 29 июня – 4 июля 2009

Материалы конференции

Издание подготовлено к печати

в «Полиграфическом центре КАН»

644050, г.Омск, пр. Мира, 11А, тел. (3812) 65-23-73

Лицензия ПЛД № 58-47 от 21.04.97 г.

Подписано в печать 25.06.2009.

ОП. Формат 60х84 1/8. Печ. л. 31,75 . Заказ № 579.

Тираж 230 экз.

Отпечатано в ООО «Издательство Наследие. Диалог Сибирь»

Лицензия ЛР 071680 от 04.06.98 г.