Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
КСА инновационная группа

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Материалы Международной конференции,
посвященной 90-летию академика Р.В. Гамкрелидзе,
Москва, 1–2 июня 2017 г.

MATHEMATICAL THEORY OF OPTIMAL CONTROL

Materials of the International Conference
dedicated to the 90th birthday
of Academician R.V. Gamkrelidze,
Moscow, June 1–2, 2017

Москва 2017

УДК 517.9
ББК 22.16
М34

М43 Математическая теория оптимального управления: Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию академика Р.В. Гамкрелидзе, Москва, 1–2 июня 2017 г. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2017. — 159 с.
ISBN 978-5-98419-074-9

Ответственный редактор К.О. Бесов

Конференция проводится при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-20149)

ISBN 978-5-98419-074-9

СОДЕРЖАНИЕ • CONTENTS

Optimal control and symplectic geometry

A. A. Agrachev

SISSA, Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

agrachev@sissa.it

Symplectic approach to the optimal control was originally inspired by the Hamiltonian form of the Pontryagin Maximum Principle but it provides a unifying language and efficient calculations' tools for high-order optimality conditions as well. In particular, symplectic interpretation of the space of Jacobi fields of the classical calculus of variations is the so called "Jacobi curve" in the Lagrange Grassmannian. This notion was generalized to certain types of singular and bang–bang extremals in our works with Prof. Gamkrelidze many years ago. Unfortunately, our theory did not work without a priori assumptions on the extremal while the Pontryagin Maximum Principle does work.

In this talk I am going to present a recent development of this old theory obtained together with my student Ivan Beschastnyi. We give an effective geometrically meaningful construction of the Jacobi curve that can be applied to all kinds of Pontryagin extremals, with regular, singular, bang–bang, chattering, etc., segments. The construction implies both pointwise necessary optimality conditions (Legendre, Goh, ...) and conjugate points-type conditions and provides a simple formula for the Morse index of the extremal.

К теории управляемости и оптимального быстродействия нелинейных систем (To the theory of controllability and time-optimal control for nonlinear systems)*

С. А. Айсагалиев (S. A. Aisagaliev), А. А. Кабидолданова (A. A. Kabidoldanova)

НИИ математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

serikbai.aisagaliev@kaznu.kz, kabasem@mail.ru

Рассматривается управляемый процесс, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)f(x,u,t), \qquad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subset \mathbb{R}^{2n} \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t), \qquad G(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma(t) \le F(x,t) \le \delta(t),\ t \in I\}, \tag{3}$$

интегральных ограничений

$$\begin{aligned} &g_j(x,u,x(t_0),x(t_1)) \le c_j, \qquad j = \overline{1,m_1}, \\ &g_j(x,u,x(t_0),x(t_1)) = c_j, \qquad j = \overline{m_1+1,m_2}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$g_j(x,u,x(t_0),x(t_1)) = \int_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),u(t),x(t_0),x(t_1))\,dt, \qquad j = \overline{1,m_2}, \tag{5}$$

а также ограничений на значения управления

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I,\mathbb{R}^m) \mid u(t) \in V(t) \subset \mathbb{R}^m \text{ при п.в. } t \in I\}. \tag{6}$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с кусочно непрерывными элементами порядков $n\times n$, $n\times k$ соответственно, вектор-функция $f(x,u,t)$ непрерывна

*Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (грант №0758/ГФ4).

по совокупности переменных при всех $(x,u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times I$, удовлетворяет условиям

$$|f(x,u,t) - f(y,u,t)| \le l(t)|x-y| \qquad \forall (x,u,t),(y,u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times I,$$
$$|f(x,u,t)| \le c_0(|x| + |u|^2) + c_1(t), \qquad t \in I,$$

где $l(t) > 0$, $l(t) \in L_1(I,\mathbb{R}^1)$, $c_0 = \mathrm{const} > 0$, $c_1(t) \ge 0$, $c_1(t) \in L_2(I,\mathbb{R}^1)$. Функция $F(x,t) = (F_1(x,t),\dots,F_s(x,t))$ непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I$, функция

$$f_0(x,u,x_0,x_1,t) = (f_{01}(x,u,x_0,x_1,t),\dots,f_{0m_2}(x,u,x_0,x_1,t))$$

непрерывна по совокупности переменных при всех $(x,u,x_0,x_1,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times I$, удовлетворяет условиям

$$|f_0(x,u,x_0,x_1,t) - f_0(y,u,x_0,x_1,t)| \le l_1(t)|x-y|$$
$$\forall (x,u,x_0,x_1,t),(y,u,x_0,x_1,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times I,$$
$$|f_0(x,u,x_0,x_1,t)| \le c_2(|x| + |u|^2) + c_3(t), \qquad t \in I,$$

где $l_1(t) > 0$, $l_1(t) \in L_1(I,\mathbb{R}^1)$, $c_2 = \mathrm{const} > 0$, $c_3(t) \ge 0$, $c_3(t) \in L_1(I,\mathbb{R}^1)$. Полагаем, что S_0, S_1 – заданные выпуклые замкнутые множества, определяющие ограничения на начальное и конечное состояния системы. Векторы $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_s(t))$, $\delta(t) = (\delta_1(t),\dots,\delta_s(t))$, $t \in I$, являются заданными функциями с непрерывными элементами, величины c_j, $j = \overline{1,m_2}$, — заданные постоянные, множество $V(t) \subset \mathbb{R}^m$ выпукло.

В частности, если $A(t) \equiv 0$, $t \in I$, $B(t) = I_n$, I_n — единичная матрица порядка $n \times n$, то уравнение (1) имеет вид $\dot{x} = f(x,u,t)$.

Определение 1. Процесс, описываемый дифференциальным уравнением (1), называется *управляемым*, если существует управление $u(t) \in U$, которое переводит траекторию системы (1) из точки $x_0 \in S_0$ в точку $x_1 \in S_1$ при фиксированных t_0, t_1, $t_1 > t_0$, и условиях (2)–(6).

Определение 2. Тройка $(u(t),x_0,x_1) \in U \times S_0 \times S_1$ называется *допустимой*, если решение $x(t;t_0,x_0,x_1,u)$, $t \in I$, дифференциального уравнения (1) удовлетворяет условиям (2)–(6). Множество всех допустимых троек обозначим через Σ, т.е. $(u(t),x_0,x_1) \in \Sigma \subset U \times S_0 \times S_1$.

Таким образом, процесс, описываемый дифференциальным уравнением (1), является управляемым, если множество Σ непусто. Следовательно, для решения задачи управляемости необходимо доказать, что множество Σ непусто, и найти тройку $(u_*(t),x_0^*,x_1^*) \in \Sigma$.

Ставятся следующие задачи.

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия управляемости для процесса, описываемого дифференциальным уравнением (1), при условиях (2)–(6).

Иными словами, найти необходимые и достаточные условия того, что множество Σ непусто.

Задача 2. Пусть $\Sigma \neq \varnothing$. Найти тройку $(u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in \Sigma$, т.е. найти управление $u_*(t) \in U \subset L_2(I, \mathbb{R}^m)$, которое переводит траекторию системы (1), исходящую из точки $x_0^* = x(t_0) \in S_0$ в момент времени t_0, в точку $x_1^* = x(t_1) \in S_1$, $t_1 > t_0$, при этом решение $x(t) = x(t; t_0, x_0^*, x_1^*, u_*)$, $x_0^* \in S_0$, $x_1^* \in S_1$, дифференциального уравнения (1) находится на множестве $G(t) \subset \mathbb{R}^n$, а также вдоль решения системы (1) выполнены интегральные ограничения (4), (5).

Решению отдельных проблем управляемости линейных систем посвящены работы [1–7]. Следует отметить, что в указанных работах исследованы частные случаи общей задачи управляемости и быстродействия динамических систем без фазовых и интегральных ограничений. Актуальными и нерешенными проблемами управляемости и оптимального быстродействия являются: нахождение необходимого и достаточного условия разрешимости общей задачи управляемости и быстродействия; создание конструктивного метода построения ее решения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение описанных задач 1, 2 для нелинейных динамических систем при наличии краевых условии в виде выпуклых и замкнутых множеств и с фазовыми и интегральными ограничениями, а также ограничениями на значения управления удалось получить путем построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Показано, что краевые задачи управляемости обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями могут быть сведены к начальным задачам оптимального управления. Решение задачи оптимального быстродействия может быть получено на основе решения общей задачи управляемости. Данная работа является продолжением научных исследований, изложенных в [7–12].

Список литературы

1. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Труды IV Конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. АН СССР. 1961. Т. 2. С. 521–547.

2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
4. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
5. *Ли Э.В., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
6. *Айсагалиев С.А.* Краевые задачи оптимального управления. Алматы: Казак унив., 1999.
7. *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. Алматы: Казак унив., 2002.
8. *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. 1991. Т. 27, №9. С. 1475–1486.
9. *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Мат. журн. 2005. Т. 5, №4. С. 17–34.
10. *Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями // Диф. уравнения и процессы управления. 2010. №1. С. 30–55.
11. *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, №1. С. 20–37.
12. *Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с ограничениями // Мат. журн. 2013. Т. 13, №2. С. 5–30.

Об основных осцилляционных свойствах дробных дифференциальных уравнений (On main oscillational properties of fractional differential equations)

Т. С. Алероев (T. S. Aleroev)

Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

aleroev@mail.ru

Под символом $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ будем подразумевать оператор дробного интегрирования (в смысле Римана–Лиувилля) при $\alpha < 0$ и дробного дифференцирования (в смысле Римана–Лиувилля) [1] при $\alpha > 0$.

Пусть $\{\gamma_k\}_0^2$ — некоторое множество действительных чисел, удовлетворяющих условию $0 < \gamma_j < 1$ $(0 \leqslant j \leqslant 2)$. Введем обозначения

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1, \qquad \mu_k = \sigma_k + 1 = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2)$$

и предположим, что

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j - 1 = \sigma_2 = \mu_2 - 1 > 0.$$

Следуя М.М. Джрбашяну [1], рассмотрим интегро-дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x), \qquad D^{(\sigma_1)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

$$D^{(\sigma_2)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}} \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

впервые введенные М.М. Джрбашяном при исследовании уравнения

$$L(u; \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, q(x)) = D^{(\sigma_2)} u(x) - (\lambda + q(x)) u(x) = 0, \tag{1}$$

которое является одним из базовых уравнений при моделировании нелокальных физических процессов в среде с фрактальной геометрией. Одной из основных проблем при моделировании таких процессов с помощью уравнений дробного порядка является вопрос об идентификации параметров этого уравнения. И в первую очередь это относится к порядку дробного дифференциального уравнения и его образующих γ_0, γ_1, γ_2. В работах [2, 3] эти проблемы достаточно успешно решены по результатам натурных измерений в тесном сочетании с физической природой изучаемого процесса. Этот подход применен в данной работе для вывода дробного дифференциального уравнения, моделирующего колебание фрактального осциллятора.

В [5] при изучении спектра оператора

$$L(u;1,1,1-\alpha,0) = D^{(\beta)}u = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^2}{dx^2}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}u''(t)\,dt \qquad (2)$$

$$(\beta = 2-\alpha)$$

(оператор $D^{(\sigma_2)}$ переходит в оператор $D^{(\beta)}$ при $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 1-\alpha$) для уравнения

$$u'' + \lambda\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}u = 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad (3)$$

была рассмотрена задача

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \qquad (4)$$

Большой интерес к оператору $D^{(\beta)}$ начали проявлять после работы Ф. Майнарди [4]. В этой работе исследуется уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\int_0^x \frac{u''(\tau)}{(t-\tau)^{\gamma-1}}\,d\tau + \omega^\gamma u(t) = 0 \qquad (5)$$

где $\omega = \mathrm{const} > 0$ и $1 < \gamma < 2$, которое Майнарди назвал дробным осцилляционным уравнением.

Безусловно, дробное осцилляционное уравнение, или уравнение дробного осциллятора (как уравнение, описывающее колебание соответствующей физической системы), должно обладать хотя бы некоторыми основными осцилляционными свойствами. Установлению соответствующих осцилляционных свойств (что в последствии позволяет правильно выбрать дробное дифференциальное уравнение, моделирующее колебание фрактального осциллятора) посвящена данная работа. Имеет место

Теорема 1. *Если*

$$0 < \alpha < \left(\frac{32\pi^2}{9} + \frac{2}{3}\right)^{-1},$$

то первое собственное число задачи (3), (4) *положительное и простое, а также основной тон не имеет узлов. При* $\alpha > 2/3$ *все собственные значения задачи* (3), (4) *комплексные.*

Следствие 1. *Задача* (3), (4) *обладает основными осцилляционными свойствами только при достаточно малых* α.

Теорема 2. *Первое собственное число* λ_1 *задачи*

$$L(u;1,1-\alpha,1,0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u'(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}}\, d\tau + \lambda u(x) = 0, \tag{6}$$

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0 \tag{7}$$

положительное, простое и удовлетворяет условию

$$0 < \lambda_1 < \frac{\Gamma(2+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)},$$

а также основной тон не имеет узлов при всех $0 < \alpha < 1$.

Сделаем одно очень важное замечание: у операторов $L(u;1,1-\alpha,1,0)$ и $L(u;1,1,1-\alpha,0)$ одинаковые порядки, но разные образующие γ_0, γ_1, γ_2 этого порядка.

Заключение. Доказанные теоремы убедительно показывают

а) какое из этих двух уравнений — (3) или (6) — естественно называть дробным осцилляционным уравнением;

б) как сильно влияют образующие порядка γ_0, γ_1, γ_2 на спектральную структуру оператора $L(u;\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,q(x))$;

в) как учет природы процесса помогает в идентификации образующих $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2$ порядка оператора.

Список литературы

1. *Джрбашян М.М.* Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма–Лиувилля дробного порядка // Изв. Акад. наук Армянской ССР. Сер. мат. 1970. Т. 5, №2. С. 71–96.
2. *Ерохин С.В.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния вязкоупругих тел с использованием методов дробного исчисления: Дис. ... канд. тех. наук. Пенза, 2016.
3. *Aleroev T.S., Aleroeva H.T., Huang J.F., Nie N.M., Tang Y.F., Zhang S.Y.* Features of inflow of a liquid to a chink in the cracked deformable layer // IJMSSC. 2010. V. 1, N 3. P. 333–347.

4. *Mainardi F.* Fractional relaxation–oscillation and fractional difusion–wave phenomena // Chaos, Solutions and Fractals. 1996. V. 7, N 9. P. 1461–1477.
5. *Алероев Т.С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными: Дис. … докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2000.

Выборки из оператора наилучшего и почти наилучшего приближения (Selections from the best and near-best approximation operator)*

А. Р. Алимов (A. R. Alimov)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

alexey.alimov-msu@.yandex.ru

Ниже X — линейное нормированное пространство, $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ — соответственно открытый и замкнутый шар с центром x и радиусом r. Для множества $M \subset X$ через $P_M x$, $x \in X$, мы обозначаем оператор метрической проекции на M. Для подмножества $\varnothing \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ такая, что $y \in P_M\big((1-\lambda)y+\lambda x\big)$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности. Солнечность имеет важные приложения в задачах геометрической оптики и имеет связь с уравнениями Гамильтона–Якоби даже в конечномерном случае (см. [1, § 1]).

Если Q обозначает некоторое свойство (например, "связность"), мы будем говорить, что замкнутое множество M обладает свойством

B-Q, если $M \cap B(x,r)$ обладает свойством Q или пусто $\forall\, x \in X$, $r > 0$;

$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x,r)$ обладает свойством Q или пусто $\forall\, x \in X$, $r > 0$.

Теорема 1. *Пусть M — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в банаховом пространстве размерности не более 3. Тогда M — солнце, B-стягиваемо, B-ретракт и на M существует непрерывная выборка из метрической проекции.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00295).

Множество в теореме 1 не обязано быть P-выпуклым. Соответственно утверждение теоремы 1 не может быть получено из классической теоремы Майкла о селекциях.

Хорошо известно, что оператор наилучшего приближения обладает недостаточной устойчивостью даже при приближении чебышёвскими подпространствами, не говоря уже о нелинейных множествах. Для исправления такой ситуации был предложен способ повышения устойчивости приближения за счет сопоставления подходящим образом приближаемому элементу одного из его почти наилучших приближений. Так появилось понятие ε-выборки (ε-селекции).

Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi\colon X \to M$ называют *мультипликативной* (*аддитивной*) *ε-выборкой*, если для всех $x \in X$

$$\|x - \varphi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\rho(x, M) \quad (\text{соответственно } \|x - \varphi(x)\| \leqslant \rho(x, M) + \varepsilon).$$

Теорема 2. *Пусть M — замкнутое множество с полунепрерывной снизу метрической проекцией в конечномерном банаховом пространстве. Тогда M является солнцем, $\mathring{B}$-бесконечно связно, $\mathring{B}$-стягиваемо, $\mathring{B}$-ретракт и на M для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная аддитивная (мультипликативная) ε-выборка.*

Список литературы

1. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, № 1. С. 3–84.

Множество разреза в субримановой задаче на группе Энгеля (Cut locus in sub-Riemannian problem on the Engel group)

А. А. Ардентов (A. A. Ardentov), Ю. Л. Сачков (Yu. L. Sachkov)

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

aaa@pereslavl.ru, yusachkov@gmail.com

Группа Энгеля G есть нильпотентная 4-мерная группа Ли, связная и односвязная, имеющая алгебру Ли $L = \mathrm{span}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ с таблицей умножения

$$[X_1, X_2] = X_3, \qquad [X_1, X_3] = X_4, \qquad [X_2, X_3] = [X_1, X_4] = [X_2, X_4] = 0.$$

Исследуется субриманова структура на группе G, заданная левоинвариантным ортонормированным репером X_1, X_2. Эта структура задает нильпотентную аппроксимацию субримановой структуры общего положения ранга 2 в 4-мерном пространстве вблизи точки общего положения.

В некоторых координатах (x, y, z, v) на группе $G \cong \mathbb{R}^4$ нильпотентная субриманова задача ставится следующим образом:

$$\dot{x} = u_1, \qquad \dot{y} = u_2, \qquad \dot{z} = -u_1 \frac{y}{2} + u_2 \frac{x}{2}, \qquad \dot{v} = u_2 \frac{x^2 + y^2}{2},$$

$$q = (x, y, z, v) \in \mathbb{R}^4, \qquad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$q(0) = q_0 = (0, 0, 0, 0), \quad q(t_1) = (x_1, y_1, z_1, v_1),$$

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\, dt \to \min .$$

Ранее была получена параметризация геодезических в этой задаче функциями Якоби и доказано, что геодезические теряют глобальную оптимальность в неподвижных точках дискретных симметрий задачи [1, 2].

Одним из важных объектов субримановой геометрии является множество разреза Cut_{q_0} — геометрическое место точек, в которых теряют глобальную оптимальность геодезические, выходящие из фиксированной начальной точки q_0.

Теорема. *В субримановой задаче на группе Энгеля замыкание множества разреза* $\mathrm{cl}(\mathrm{Cut}_{q_0})$ *есть стратифицированное многообразие, содержащееся в подмножестве* $\{q \in \mathbb{R}^4 \mid xz = 0\}$.

Многообразие $\mathrm{cl}(\mathrm{Cut}_{q_0})$ *содержит* 6 *трехмерных стратов,* 12 *двумерных стратов,* 4 *одномерных страта и* 1 *нульмерный страт.*

Двумерные страты состоят из точек разреза, являющихся сопряженными точками. Одномерные страты разбиваются на две пары: два страта первой пары суть анормальные траектории (не содержащие точек разреза), а два страта второй пары образованы точками разреза, в каждую из которых приходит однопараметрическое семейство оптимальных геодезических.

Множество разреза Cut_{q_0} *получается из своего замыкания удалением двух одномерных стратов (анормальных траекторий) и нульмерного страта (начальной точки* q_0*).*

Список литературы

1. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
2. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Cut time in sub-Riemannian problem on Engel group // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2015. V. 21, N 1. P. 958–988.

Накрывающие отображения в метрических пространствах и точки совпадения (Covering Mappings in Metric Spaces and Coincidence Points)*

А. В. Арутюнов (A. V. Arutyunov)

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

arutun@orc.ru

Рассмотрены замкнутые накрывающие отображения, действующие из одного полного метрического пространства в другое метрическое пространство (вообще говоря, неполное). Доказано, что для любого отображения, действующего в тех же метрических пространствах и удовлетворяющего условию Липшица с константой Липшица, меньшей чем константа накрывания, существует точка, в которой значения этих отображений равны. Для многозначных отображений при аналогичных предположениях доказано существование точки совпадения отображений, т.е. точки, в которой образы этих многозначных отображений пересекаются. Указанные результаты обобщают как принцип сжимающих отображений, так и теорему о накрывании.

Список литературы

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // ДАН. 2007. Т. 416, №2. С. 151–155.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01168).

Циклическая динамика и оптимальные положения равновесия в управляемой модели бизнес-цикла Н. Калдора (Cyclic dynamics and optimal steady states in the controlled Kaldor model)

А. С. Асеев (A. S. Aseev)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

anton.ser.as@gmail.com

Рассмотрим следующую модифицированную модель бизнес-цикла Н. Калдора [1–3]:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \alpha\big[I(Y(t), K(t)) - S(Y(t))\big], \\ \dot{K}(t) = I(Y(t), K(t)) - \delta K(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $Y(t)$ и $K(t)$ — величины национального дохода и основных фондов (капитала) в момент $t \geq 0$, $\alpha > 0$ — поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ — норма амортизации основных фондов. Будем считать, что функции инвестиций $I(Y, K)$, $Y \geq 0$, $K \geq 0$, и сбережений $S(Y)$, $Y \geq 0$, имеют следующий вид:

$$I(Y, K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K & \text{при } \ K \leq I(Y)/\beta, \\ 0 & \text{при } \ K > I(Y)/\beta, \end{cases} \qquad S(Y) = \gamma Y, \tag{2}$$

где $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$ и $I\colon [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ — такая положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, что $I(0) = I_0 > 0$, $\lim_{Y\to\infty} I(Y) = I_\infty < \infty$, $I'(Y) > 0$ и существует такое $Y_1 > 0$, что $I''(Y) > 0$, если $Y < Y_1$, и $I''(Y) < 0$, если $Y > Y_1$.

При функциях инвестиций $I(Y, K)$ и сбережений $S(Y)$, заданных условиями (2), система (1) отличается от оригинальной модели Калдора [2].

Доказательство следующего результата см. в [4].

Теорема 1. *Для любых* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и* $0 < \gamma < 1$ *прямоугольник* $\widetilde{G} = \{(Y, K)\colon 0 \leq Y \leq \widetilde{Y},\ 0 \leq K \leq I_\infty/\beta\}$, *где* $\widetilde{Y}$ *— любое число, не* *меньшее чем максимальный корень уравнения* $\gamma Y = I(Y)$, *является инвариантным относительно системы* (1). *Кроме того, для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая замкнутая непрерывная кривая без самопересечений* Γ_ε, *лежащая в прямоугольнике* $\widetilde{G}$ *и отстоящая от его границы не более чем на* ε, *что на кривой* Γ_ε *векторное поле системы* (1) *направлено строго внутрь ограниченного этой кривой множества.*

В общем случае система (1) может иметь от одного до трех положений равновесия, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. При определенном подборе функций $I(Y, K)$ и $S(Y)$ система (1) может демонстрировать циклическую динамику (см. [1–4]), что можно интерпретировать как возникающие в экономике циклы экономического подъема с последующими спадами (т.е. кризисами).

Введем в модифицированную модель Калдора (1) новую функцию сбережений $S(Y, u) = \gamma(1 - u)Y$, $u \in [0, 1]$. Управляющий параметр $u \in [0, 1]$ характеризует увеличение потребления на величину $\gamma u Y$.

Используя новую функцию сбережений, приходим к следующей *управляемой модели Калдора*:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \alpha\big[I(Y(t)) - \beta K(t) - \gamma(1 - u(t))Y(t)\big], \\ \dot{K}(t) = I(Y(t)) - (\beta + \delta)K(t). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь управление $u\colon [0, \infty) \mapsto [0, 1]$ — произвольная измеримая функция.

Выясним, при каких значениях $Y > 0$ существует такая обратная связь $u(Y)$, что при ее подстановке вместо $u(t)$ в системе (3) имеются положения равновесия. Приравняв к нулю оба уравнения системы (3), получаем $u(Y) = 1 - \delta I(Y)/((\beta + \delta)\gamma Y)$. Допустимое управление должно удовлетворять ограничению $u(Y) \in [0, 1]$. Следовательно, для любого $\widehat{Y} > 0$, удовлетворяющего неравенству $Y \geqslant \delta I(Y)/((\beta + \delta)\gamma)$, соответствующее управление $u(t) \equiv u(\widehat{Y})$ реализует состояние равновесия $(\widehat{Y}, \widehat{K})$, где $\widehat{K} = K(\widehat{Y}) = I(\widehat{Y})/(\beta + \delta)$, в управляемой модели Калдора.

Стоимость реализации управления $u \in [0, 1]$ будем моделировать при помощи квадратичной функции $\varphi(Y, u) = \omega(\gamma u Y)^2/2$, $\omega > 0$ (см. [5]), а в качестве функции мгновенной полезности $\Phi(Y, u)$ будем рассматривать величину национального дохода с учетом стоимости реализации соответствующей стимулирующей политики, т.е. положим $\Phi(Y, u) = Y - \varphi(Y, u)$.

Для нахождения оптимального стационарного режима $(Y_*, K_*, u(Y_*))$, максимизирующего величину $\Phi(Y, u(Y))$ в управляемой модели Калдора, необходимо решить следующую задачу (Q):

$$\Phi(Y,u(Y)) = Y - \varphi(Y,u(Y)) \to \max, \qquad Y \geqslant \frac{\delta I(Y)}{(\beta+\delta)\gamma}.$$

Теорема 2. *Для любых допустимых значений параметров управляемой модели Калдора существует решение Y_* задачи (Q). Это решение Y_* является корнем уравнения $\frac{d}{dY}\Phi(Y,u(Y)) = 0$. Решение Y_* больше максимального корня Y_2 уравнения $Y = \delta I(Y)/((\beta+\delta)\gamma)$. Если $Y_1 \leq Y_2$, где Y_1 — корень уравнения $I''(Y) = 0$, то данное решение Y_* единственно.*

Для численного моделирования положим $\omega = 1$ и будем использовать значения параметров и логистическую функцию инвестиций $I(Y)$ из [6]. Именно, положим $\alpha = 2.2$, $\beta = 0.6$, $\delta = 0.5$, $\gamma = 0.5$ и

$$I(Y) = \frac{1}{a + e^{-b(Y-c)}} + d, \qquad a = 1, \quad b = 4.2, \quad c = 1, \quad d = 0.6. \tag{4}$$

Отметим, что при выбранных значениях параметров в неуправляемой модели Калдора существует предельных цикл (см. [4, 6]).

Для нахождения оптимального стационарного режима $(Y_*, K_*, u(Y_*))$, решая численно уравнение $\frac{d}{dY}\Phi(Y,u(Y)) = 0$, найдем его единственный корень $Y_* = 5.454545561$ и соответствующие значения

$$K_* = K(Y_*) = 1.454545448, \qquad u(Y_*) = 0.733333397$$

и $\Phi(Y_*, u(Y_*)) = 3.4545449$. Для определения типа положения равновесия (Y_*, K_*) рассмотрим соответствующую матрицу Якоби

$$J(Y_*,K_*) = \begin{pmatrix} \alpha(I'(Y_*) - \gamma(1-u(Y_*))) & -\alpha\beta \\ I'(Y_*) & -\beta-\delta \end{pmatrix}.$$

Подставив выбранную функцию инвестиций $I(Y)$, получаем

$$J(Y_*,K_*) = \begin{pmatrix} \alpha\left(\dfrac{be^{(-b(Y_*-c))}}{(a+e^{(-b(Y_*-c))})^2} - \gamma(1-u(Y_*))\right) & -\alpha\beta \\ \dfrac{be^{(-b(Y_*-c))}}{(a+e^{(-b(Y_*-c))})^2} & -\beta-\delta \end{pmatrix}.$$

Подставив значения параметров, находим

$$J(Y_*,K_*) = \begin{pmatrix} -0.2933332572 & -1.32 \\ 0.3147705942\cdot 10^{-7} & -1.1 \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение $\det(J(Y_*, K_*) - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица, находим собственные значения $\lambda_1 = -0.2933333087$, $\lambda_2 = -1.099999948$. Следовательно, найденное положение равновесия — устойчивый узел.

Таким образом, при выбранных значениях параметров и функции инвестиций $I(Y)$ (см. (4)) в системе (3) существует единственный оптимальный стационарный режим $(Y_*, K_*, u(Y_*))$. Отметим, что найденное оптимальное положение равновесия (Y_*, K_*) устойчиво, а соответствующее ему значение мгновенной полезности $\Phi(Y_*, u(Y_*))$ больше, чем при неуправляемом циклическом движении.

Список литературы

1. *Chang W.W., Smyth D.J.* The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined // Rev. Econ. Stud. 1971. V. 38, N 1. P. 37–44.
2. *Kaldor N.* A model of trade cycle // Econ. J. 1940. V. 50, N 197. P. 78–92.
3. *Lorenz H.-W.* Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. New York: Springer, 1993.
4. *Асеев А.С.* Существование периодической траектории в модифицированной модели Калдора // Молодой ученый. 2017. №1. С. 103–108.
5. *Weitzman M.J.* Income, wealth, and the maximum principle, London: Harvard Univ. Press, 2003.
6. *Рязанова Т.В.* Стохастические аттракторы и индуцированные шумом явления в моделях экономической динамики: Отчет о научно-исследовательской работе. Екатеринбург: УрФУ, 2013.

The unified maximum principle for a class of infinite-horizon optimal control problems arising in economics

Sergey M. Aseev

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

aseev@mi.ras.ru

The following problem (P) arises in many fields of economics (see [1]):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U(t).$$

Here $x(t) \in \mathbb{R}^n$ and $u(t) \in \mathbb{R}^m$ are values of the state and the control vectors at time $t \geq 0$, respectively, $x_0 \in G$ where G is an open convex set in $\mathbb{R}^n$, and $U\colon [0, \infty) \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ is a multivalued mapping with nonempty values.

Assume that for a.e. $t \in [0, \infty)$ the derivatives $f_x(t, x, u)$ and $f_x^0(t, x, u)$ exist for all $(x, u) \in G \times \mathbb{R}^m$, and the functions $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$, and $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ are Lebesgue–Borel (LB) measurable in (t, u) for every $x \in G$ and continuous in x for almost every $t \in [0, \infty)$ and every $u \in \mathbb{R}^m$. The multivalued mapping $U(\cdot)$ is also assumed to be LB-measurable, i.e., the set $\operatorname{gr} U(\cdot) = \{(t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \colon u \in U(t)\}$ is an LB-measurable subset in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^m$.

By definition, $(x(\cdot), u(\cdot))$ is an *admissible pair* in problem (P) if $u(\cdot)$ is a Lebesgue measurable function satisfying $u(t) \in U(t)$ for all $t \geq 0$, $x(\cdot)$ is the (Carathéodory) trajectory corresponding to $u(\cdot)$ on $[0, \infty)$ in G, and the function $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ is locally integrable on $[0, \infty)$. An admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is *weakly overtaking optimal* in problem (P) (see [4]) if for any other admissible pair $(x(\cdot), u(\cdot))$ the following inequality holds:

$$\limsup_{T \to \infty} \int_0^T \big[f^0(t, x_*(\cdot), u_*(\cdot)) - f^0(t, x(t), u(t))\big]\, dt \geq 0.$$

Notice that in the general case the concept of weak overtaking optimality does not assume that the improper integral $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ converges (i.e., $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) < \infty$ is finite).

The following regularity and growth conditions on an admissible pair $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ are essential for establishing the normal form versions of the maximum principle with explicitly specified adjoint variable (see [3]):

(A1) *There exists a continuous function* $\gamma\colon [0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ *and a locally integrable function* $\varphi\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ *such that* $\{x\colon \|x - x_*(t)\| \le \gamma(t)\} \subset G$ *for all* $t \in [0,\infty)$ *and*

$$\max_{\{x\colon \|x-x_*(t)\|\le\gamma(t)\}} \Big\{ \|f_x(t,x,u_*(t))\| + \|f_x^0(t,x,u_*(t))\| \Big\} \overset{\text{a.e.}}{\le} \varphi(t).$$

(A2) *There exists a number* $\beta > 0$ *and a nonnegative integrable function* $\lambda\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ *such that for all* $\zeta \in G$ *satisfying the inequality* $\|\zeta - x_0\| < \beta$, *the initial value problem* $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u_*(t))$, $x(0) = \zeta$ *has a solution* $x(\zeta;\cdot)$ *on* $[0,\infty)$ *in* G *and*

$$\max_{x\in[x(\zeta;t),x_*(t)]} \big|\langle f_x^0(t,x,u_*(t)), x(\zeta;t) - x_*(t)\rangle\big| \overset{\text{a.e.}}{\le} \|\zeta - x_0\|\lambda(t).$$

If $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is an admissible pair satisfying conditions (A1) and (A2), then the fundamental matrix solution $Z_*(\cdot)$ of the linear system

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t,x_*(t),u_*(t))]^* z(t), \qquad t \ge 0,$$

with initial condition $Z_*(0) = I$ where I is the identity matrix is well defined on $[0,\infty)$.

Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be an admissible pair that satisfies (A1) and (A2), and assume that $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ is finite. Then due to (A1) and (A2) without loss of generality one can assume that there is a neighborhood $\Omega \subset [0,\infty) \times G$ of the set $\operatorname{gr} x_*(\cdot) = \{(t, x_*(t))\colon t \ge 0\}$, such that for all $(t,\zeta) \in \Omega$ there is a solution $x(\zeta,t;\cdot)$ of the Cauchy problem

$$\dot{x}(s) = f(s,x(s),u_*(s)), \qquad x(t) = \zeta$$

on $[0,\infty)$ in G, and for all $(t,\zeta) \in \Omega$ the integral

$$W(t,\zeta) = \int_t^\infty f^0(s, x(\zeta,t;s), u_*(s))\, ds$$

converges. Notice that the meaning of $W(t,\zeta)$ is the conditional value of the capital stock ζ at time t under a given investment plan $u_*(\cdot)$ (see [2]).

Define the normal form Hamilton–Pontryagin function $\mathcal{H}\colon [0,\infty) \times G \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ for problem (P) in the usual way:

$$\mathcal{H}(t,x,u,\psi) = f^0(t,x,u) + \langle f(t,x,u), \psi\rangle, \quad t \ge 0,\ x \in G,\ u \in \mathbb{R}^m,\ \psi \in \mathbb{R}^n.$$

The following result unifies the normal form version of the Pontryagin maximum principle for problem (P) developed in [3] with the Hamilton–Jacobi–Bellman equation without any a priori regularity assumptions on the value function (see [2] for details).

Theorem 1. *Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ be a weakly overtaking optimal admissible pair in problem (P) such that $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)$ is finite, and conditions* (A1) *and* (A2) *hold. Then*

(i) *the partial (Fréchet) derivative $W_x(t, x_*(t))$ exists for all $t \geq 0$, and*

$$W_x(t, x_*(t)) = Z_*(t) \int_t^{\infty} Z_*^{-1}(s) f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0.$$

Moreover, the vector function $t \mapsto \psi(t) = W_x(t, x_*(t))$, $t \geq 0$, is locally absolutely continuous and satisfies the core relations of the normal form maximum principle for problem (P):

$$\dot{\psi}(t) \overset{\text{a.e.}}{=} -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)),$$

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{a.e.}}{=} \sup_{u \in U(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t));$$

(ii) *the partial derivative $W_t(t, x_*(t))$ exists for a.e. $t \geq 0$, and*

$$W_t(t, x_*(t)) + \sup_{u \in U(t)} \Big\{ \langle W_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u) \rangle + f^0(t, x_*(t), u) \Big\} \overset{\text{a.e.}}{=} 0.$$

Substantially, assertion (i) of Theorem 1 is a reformulation of the version of the maximum principle for infinite-horizon problems developed in [3] in economic terms of the function $W(\cdot, \cdot)$ under the additional assumption of convergence of $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$. However, assertion (ii) is a complementary fact. In particular, this assertion allows one to link the adjoint variable $\psi(\cdot)$ that appears in Theorem 1 with Michel's transversality condition in infinite horizon optimal problems [5].

Corollary. *Assume that the assumptions of Theorem 1 are fulfilled and problem (P) is autonomous with exponential discounting, i.e., $f(t, x, u) \equiv f(x, u)$, $f^0(t, x, u) \equiv e^{-\rho t} g(x, u)$ and $U(t) \equiv U$ for all $t \geq 0$, $x \in G$, $u \in \mathbb{R}^m$, where $\rho \in \mathbb{R}^1$ is not necessarily positive. Then the following stationarity condition holds:*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{a.e.}}{=} \rho \int_t^{\infty} e^{-\rho s} g(x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0.$$

References

1. *Acemoglu D.* Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
2. *Aseev S.M.* Adjoint variables and intertemporal prices in infinite-horizon optimal control problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 290. P. 223–237.
3. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291, Suppl. 1. P. S22–S39.
4. *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite horizon optimal control: Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.
5. *Michel P.* On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. V. 50. P. 975–985.

Локальная управляемость и оптимальность (Local controllability and optimality)

Е. Р. Аваков (E. R. Avakov), Г. Г. Магарил-Ильяев (G. G. Magaril-Il'yaev)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

eramag@mail.ru, magaril@mech.math.msu.su

Доклад посвящен взаимосвязям между условиями локальной оптимальности управляемой динамической системы относительно данного процесса и необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядков для этого процесса.

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \qquad u(t) \in U \quad \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, U — непустое подмножество $\mathbb{R}^m$, $x(\cdot) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ и $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$.

Положим $\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)\colon\ u(t) \in U \text{ для п.в. } t \in [t_0, t_1]\}$.

Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u = u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим через $x(\cdot, x_0, u)$ решение дифференциального уравнения (1) такое, что $x(t_0, x_0, u) = x_0$.

Пусть V, V_1 — открытые множества в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, а V_2 — открытое множество в $L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)$. Введем следующие множества:

$$R(x_0,t_1)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, u\in\mathcal{U}\colon x(t_1,x_0,u)=x\},$$
$$R(x_0,t_1,V)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, u\in\mathcal{U}\colon x(\cdot,x_0,u)\in V,\ x(t_1,x_0,u)=x\},$$
$$R(x_0,t_1,V_1,V_2)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, u\in\mathcal{U}\cap V_2\colon x(\cdot,x_0,u)\in V_1,\ x(t_1,x_0,u)=x\}.$$

Будем называть их соответственно множеством *достижимости*, множеством *локальной достижимости* и множеством *слабой локальной достижимости.*

Если $u=u(\cdot)\in\mathcal{U}$ и $x(\cdot)=x(\cdot,x_0,u)$, то пару $(x(\cdot),u(\cdot))$ будем называть процессом (с началом в точке x_0) для системы (1).

Окрестности точек $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ обозначаем соответственно $V(x)$ и $V(u)$.

Определение. Будем говорить, что динамическая система (1) *локально управляема* (*слабо локально управляема*) относительно процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, если $\widehat{x}(t_1)\in\operatorname{int}R(x_0,t_1,V(\widehat{x}))$ для любой окрестности $V(\widehat{x})$ $(\widehat{x}(t_1)\in\operatorname{int}R(x_0,t_1,V_1(\widehat{x}),V_2(\widehat{u}))$ для любых окрестностей $V_1(\widehat{x})$ и $V_2(\widehat{u})$).

В противном случае пару $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ будем называть *локальным* (*слабым локальным*) *оптимальным процессом* для системы (1).

Мотивировать вторую часть определения и тем самым установить связь между управляемостью и оптимальностью можно следующими простыми соображениями. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)\,dt\to\min,\\ \dot{x}=\varphi(t,x,u),\qquad u(t)\in U,\\ x(t_0)=x_0,\qquad x(t_1)=x_1. \end{gathered}\tag{2}$$

Обычным образом определяются сильный и слабый (в случае открытого множества U) локальные минимумы в этой задаче.

Сопоставим данной задаче следующую динамическую систему:

$$\dot{\overline{x}}=\overline{\varphi}(t,\overline{x},u),\qquad u(t)\in U,\tag{3}$$

где $\overline{x}=(x_0,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$ и $\overline{\varphi}(t,\overline{x},u)=(f(t,x,u),\varphi(t,x,u))$. Положим $\overline{x}_0=(0,x_0)$.

Справедливость следующего утверждения почти очевидна.

Предложение. *Если* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ *— сильный (слабый) локальный минимум в задаче* (2), *то пара* $(\widehat{\overline{x}}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, *где* $\widehat{\overline{x}}(\cdot)=(\widehat{x}_0(\cdot),\widehat{x}(\cdot))$, *является локальным (слабо локальным) оптимальным процессом для динамической системы* (3).

Положим $H(t,x,u,p(\cdot))=\langle p(t),\varphi(t,x,u)\rangle$, где $p(\cdot)\colon[t_0,t_1]\to(\mathbb{R}^n)^*$. Для краткости пишем $\widehat{\varphi}_x(t)=\varphi_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))$, $\widehat{\varphi}_u(t)=\varphi_u(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))$ и $w=(x,u)$.

Пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ — процесс для системы (1). Для каждой пары $q(\cdot)=(h(\cdot),v(\cdot))\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)$ рассмотрим следующую систему соотношений относительно переменной $p(\cdot)\in AC([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)$:

$$-\dot{p}(t)=p(t)\,\widehat{\varphi}_x(t), \tag{4}$$

$$H_u(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t))=0 \qquad \text{для п.в. } t\in[t_0,t_1], \tag{5}$$

$$\max_{u\in U}H(t,\widehat{x}(t),u,p(t))=H(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t)) \qquad \text{для п.в. } t\in[t_0,t_1], \tag{6}$$

$$Q(p(\cdot))[q(\cdot),q(\cdot)]=-\int_{t_0}^{t_1}H_{ww}(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t))[q(t),q(t)]\,dt\ge 0 \tag{7}$$

в предположении, что соответствующие производные существуют и что U — открытое множество в соотношениях (5) и (7).

Обозначим через $\Lambda(\widehat{x},\widehat{u})$, $\Lambda_m(\widehat{x},\widehat{u})$ и $\Lambda(\widehat{x},\widehat{u},q)$ множества ненулевых функций $p(\cdot)$, удовлетворяющих условиям (4), (5), условиям (4), (6) и условиям (4), (6), (7) соответственно.

Теорема 1. *Если* $\Lambda(\widehat{x},\widehat{u})=\varnothing$, *то динамическая система* (1) *слабо локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Теорема 2. *Если* $\Lambda_m(\widehat{x},\widehat{u})=\varnothing$, *то динамическая система* (1) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Оба результата можно считать известными. Первый (но в других терминах) содержится в [1]. Второй можно извлечь из принципа максимума для системы (1), полученного в [2]. Из этих теорем в силу определения и предложения следуют соответственно классические уравнения Эйлера–Лагранжа и принцип максимума Понтрягина для задачи (2).

Нас интересует ситуация, когда не выполнены условия теоремы 1 и/или теоремы 2. Введем пространство

$$K(\widehat{x},\widehat{u})=\bigl\{q=q(\cdot)=(h(\cdot),v(\cdot))\in AC([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)\colon \\ \dot{h}(t)=\widehat{\varphi}_x(t)h(t)+\widehat{\varphi}_u(t)v(t),\ h(t_0)=h(t_1)=0\bigr\}.$$

Теорема 3. *Если существует такое* $q \in K(\widehat{x}, \widehat{u})$, *что* $\Lambda(\widehat{x}, \widehat{u}, q) = \varnothing$, *то система* (1) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$.

Отсюда в силу определения и предложения получаем необходимые условия сильного минимума второго порядка для задачи (2). Ранее они были получены в [3], но в случае, когда $\widehat{u}(\cdot)$ — кусочно непрерывная функция.

Развивая определение анормальности, данное Блиссом в [4], скажем, что динамическая система (1) относительно процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ имеет *порядок анормальности* $k \in \mathbb{N}$, если размерность линейной оболочки выпуклого конуса $\Lambda_m(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ равна k.

Назовем процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *особым*, если конус $\Lambda_m(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \cup \{0\}$ не является острым.

Следующее утверждение, которое сразу следует из теоремы 3, удобно для приложений.

Следствие. *Пусть динамическая система* (1) *относительно неособого процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *имеет порядок анормальности* 1 *и* $p(\cdot) \in \Lambda_m(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$. *Тогда если найдется элемент* $q \in K(\widehat{x}, \widehat{u})$ *такой, что* $Q(p(\cdot))[q, q] < 0$, *то система* (1) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = u^2 - x_1^2, \qquad u(t) \in \mathbb{R} \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].$$

Легко проверить, что $\Lambda_m(0,0) = \{p(\cdot) = (0, \alpha)\colon \alpha \le 0\}$ и $Q(p(\cdot))[q, q] = -2\alpha \int_0^T (\dot{h}_1^2(t) - h_1^2(t))\, dt$ для любого $q = ((h_1(\cdot), h_2(\cdot)), v(\cdot))$. Таким образом, данная система относительно неособого процесса $(0, 0)$ имеет порядок анормальности 1 и в случае, если $T > \pi$, она согласно следствию локальна управляема относительно данного процесса.

Список литературы

1. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
2. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
3. *Osmolovskii N.P., Maurer H.* Applications to regular and bang-bang control second-order necessary and sufficient optimality conditions in calculus of variations and optimal control. Philadelphia, PA: SIAM, 2012.
4. *Блисс Дж.* Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.

Об оптимальном стартовом управлении движением жидкости Кельвина–Фойгта (On optimal starting control of flows of Kelvin–Voigt fluids)*

Е. С. Барановский (E. S. Baranovskii), М. А. Артемов (M. A. Artemov)

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

esbaranovskii@gmail.com, artemov_m_a@mail.ru

Рассмотрим задачу оптимального управления для уравнений, моделирующих динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости типа Кельвина–Фойгта [1, 2]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \nu\Delta\boldsymbol{v} - \varkappa\frac{\partial \Delta\boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{в } \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \qquad \text{в } \Omega\times(0,T), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad \text{на } \partial\Omega\times(0,T), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}(\cdot,0) = \boldsymbol{u} \qquad \text{в } \Omega, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}, \tag{5}$$

$$J(\boldsymbol{v},\nabla p,\boldsymbol{u}) = \lambda_1\|\boldsymbol{v}-\widetilde{\boldsymbol{v}}\|^2_{\boldsymbol{C}([0,T];\boldsymbol{H}^1(\Omega))} + \lambda_2\|\nabla p-\widetilde{\boldsymbol{g}}\|^2_{\boldsymbol{L}^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} + \\ + \lambda_3\|\boldsymbol{u}-\widetilde{\boldsymbol{u}}\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} \to \inf. \tag{6}$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ с границей $\partial\Omega\in C^2$, T — фиксированное положительное число, $\boldsymbol{v}$ — скорость течения жидкости, p — давление в жидкости, $\boldsymbol{f}$ — известное поле внешних сил, параметры $\nu>0$ и $\varkappa>0$ характеризуют соответственно вязкие и упругие свойства жидкости, $\boldsymbol{u}$ — параметр управления, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ — заданное множество допустимых управлений, J — целевой функционал, $\widetilde{\boldsymbol{v}}$, $\widetilde{\boldsymbol{g}}$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ — заданные вектор-функции, λ_i, $i=1,2,3,$ — параметры функционала J,

$$0\le\lambda_i\le 1, \qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1.$$

*Работа первого автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 16-31-00182-мол_а).

Замечание 1. В предельном случае, когда $\varkappa = 0$, уравнения (1), (2) переходят в хорошо известные уравнения Навье–Стокса, описывающие движение ньютоновской жидкости.

Будем использовать стандартные обозначения $\boldsymbol{H}^k(\Omega) = \boldsymbol{W}^{k,2}(\Omega)$ для пространств Соболева вектор-функций, определенных на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$. Через $\boldsymbol{D}(\Omega)$ обозначим множество гладких вектор-функций с носителем, содержимся в Ω. Замыкание $\boldsymbol{D}(\Omega)$ в $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ обозначим через $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. Введем также пространство

$$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \colon\ \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\}.$$

Предположим, что

$$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}([0,T]; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \qquad \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}} \subset [\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)], \tag{7}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{C}([0,T]; \boldsymbol{H}^1(\Omega)), \qquad \widetilde{\boldsymbol{g}} \in \boldsymbol{L}^2(0,T; \boldsymbol{L}^2(\Omega)), \qquad \widetilde{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega). \tag{8}$$

Определение 1. Будем говорить, что $(\boldsymbol{v}, p, \boldsymbol{u})$ — *допустимая тройка* задачи (1)–(6), если

$$\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^1([0,T]; \boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)), \qquad p \in \boldsymbol{C}([0,T]; H^1(\Omega)/\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$$

и выполнены равенства

$$\boldsymbol{v}'(t) + (\boldsymbol{v}(t) \cdot \nabla)\boldsymbol{v}(t) - \nu\Delta\boldsymbol{v}(t) - \varkappa\Delta\boldsymbol{v}'(t) + \nabla p(t) = \boldsymbol{f}(t), \qquad t \in [0,T],$$

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{u}.$$

Множество допустимых троек задачи (1)–(6) обозначим через $\boldsymbol{M}$.

Определение 2. *Решением* задачи оптимизации (1)–(6) назовем тройку $(\boldsymbol{v}_*, p_*, \boldsymbol{u}_*) \in \boldsymbol{M}$ такую, что

$$J(\boldsymbol{v}_*, p_*, \boldsymbol{u}_*) = \inf_{(\boldsymbol{v},\, p,\, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{M}} J(\boldsymbol{v}, p, \boldsymbol{u}).$$

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (7), (8) *и множество* $\boldsymbol{U}_{\mathrm{ad}}$ *ограничено и секвенциально слабо замкнуто в пространстве* $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{H}^2(\Omega)$. *Тогда задача* (1)–(6) *имеет по крайней мере одно решение.*

Замечание 2. Изучение системы (1), (2) и различных ее модификаций началось с серии статей А.П. Осколкова [1–4] и было продолжено в работах ряда российских [5–9] и зарубежных [10–12] авторов. Следует также отметить, что в статье [13] рассмотрена задача оптимального управления для уравнений, моделирующих плоскопараллельную динамику вязкоупругих жидкостей Кельвина–Фойгта. В диссертации [14] получены результаты о разрешимости задачи управления посредством внешних сил $\boldsymbol{f}$ для модели (1), (2) в слабой постановке при условиях пристенного скольжения. Оптимальное управление и устойчивость решений линеаризованного одномерного уравнения (1) на геометрическом графе исследуются в [15].

Список литературы

1. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 98–136.
2. *Осколков А.П.* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина–Фойгта // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 191–202.
3. *Oskolkov A.P.* A nonstationary quasilinear system with a small parameter, regularizing a system of Navier-Stokes equations // J. Sov. Math. 1976. V. 6. P. 51–57.
4. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН. 1988. Т. 179. С. 126–164.
5. *Свиридюк Г.А.* Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1988. № 1. С. 74–79.
6. *Свиридюк Г.А.* Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62–70.
7. *Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г.* О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 442–450.
8. *Артемов М.А., Барановский Е.С.* Граничные задачи для уравнений движения полимерных жидкостей с нелинейным условием проскальзывания вдоль твердых стенок // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 14–24.
9. *Барановский Е.С.* Вторая начально-краевая задача для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56, № 7. С. 1371–1379.
10. *Dou Y., Yang X., Qin Y.* Remarks on uniform attractors for the 3D non-autonomous Navier–Stokes–Voight equations // Boundary Value Problems. 2011. V. 2011(49). P. 1–11.
11. *Damazio P.D., Manholi P., Silvestre A.L.* L^q-theory of the Kelvin–Voigt equations in bounded domains // J. Diff. Equat. 2016. V. 260. P. 8242–8260.
12. *Garcia-Luengo J., Marin-Rubio P., Real J.* Pullback attractors for three-dimensional non-autonomous Navier–Stokes–Voigt equations // Nonlinearity. 2012. V. 25. P. 905–930.

13. *Свиридюк Г.А., Плеханова М.В.* Задача оптимального управления для уравнения Осколкова // Диф. уравнения. 2002. Т. 38, № 7. С. 997–998.
14. *Кузьмин М.Ю.* О краевых задачах некоторых моделей гидродинамики с условиями проскальзывания на границе: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2007.
15. *Sagadeeva M.A., Sviridyuk G.A.* The nonautonomous linear Oskolkov model on a geometrical graph: the stability of solutions and the optimal control // Semigroups of operators—theory and applications: Proc. Int. Conf., Bedlewo, Poland, 2013. Heidelberg: Springer, 2015. P. 257–271.

On an existence theorem for infinite-horizon optimal control problems

K. O. Besov

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

kbesov@mi.ras.ru

One of the most general and well-known results on the existence of solutions to infinite-horizon optimal control problems was proved by Balder [1] for the problem

$$I(x,u) := \int_0^\infty f_0(t,x(t),u(t))\,dt \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in \mathbb{R}_+ := [0,+\infty), \tag{2}$$

$$x(t) \in A(t), \qquad u(t) \in U(t,x(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

where

(i) $A\colon \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ is a set-valued map with $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^n)$-measurable[1] graph $\mathcal{A}$;

(ii) $U\colon \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ is a set-valued map with $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{n+m})$-measurable graph $\mathcal{U}$;

(iii) the functions $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ and $f_0\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ are $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{n+m})$-measurable.[2]

[1] That is, lying in the σ-algebra generated in $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ by the Cartesian products of Lebesgue measurable subsets in $\mathbb{R}_+$ and Borel subsets in $\mathbb{R}^n$.

[2] That is, the preimages of Borel sets are $(\mathcal{L}\times\mathcal{B}^{n+m})$-measurable.

The set Ω of *admissible pairs* (x,u) consists by definition of pairs of vector functions x, u such that $x \in \mathrm{AC}^n_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $u\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ is a Lebesgue measurable function and conditions (2) and (3) hold.

The integral in (1) is understood in [1] in the following sense:

$$\int_0^\infty g(t)\,dt := \int_0^\infty g^+(t)\,dt - \int_0^\infty g^-(t)\,dt, \qquad g^\pm := \max\{\pm g, 0\}, \quad (4)$$

with the convention that $(+\infty) - (+\infty) = +\infty$. Thus, the value of the functional (4) (equal to a finite number or $\pm\infty$) is defined for any admissible pair.

Under certain conditions, Balder proved the existence of an optimal solution to problem (1)–(3). Almost all of those conditions are local in time (i.e., they must hold only at each separate instant of time or on each finite time interval) and ensure the existence of solutions to similar problems on finite time intervals. The only condition that regulates the behavior of the system at infinity is as follows:

(iv) the set of functions $F^-_{0,\alpha} := \{f_0^-(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \mid (x,u) \in \Omega,\ I(x,u) \le \alpha\}$ is (nonempty and) strongly uniformly integrable on $\mathbb{R}_+$, i.e.,

$$\inf_{h \in L_1(\mathbb{R}_+)} \sup_{g \in F^-_{0,\alpha}} \int_{C_{g,h}} |g(t)|\,dt = 0, \qquad C_{g,h} := \{t \in \mathbb{R}_+ \mid |g(t)| > h(t)\}.$$

At the same time, in many optimal economic growth problems it seems more natural to define the value of the objective functional not in the sense of (4) but rather in the limit sense

$$J(x,u) := \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))\,dt \quad (5)$$

provided that the limit exists. In this case problem (1)–(3) is replaced by the problem

$$J(x,u) \to \min \quad (6)$$

subject to conditions (2) and (3).

It is clear that if the value of the functional $I(x,u)$ is finite for an admissible pair (x,u), then $J(x,u) = I(x,u)$.

As noticed in [3], for problem (6), (2), (3) instead of condition (iv) one can consider the weaker[3] condition

(v) $\underline{\lim}_{T\to+\infty} \inf_{T'>T} \inf_{(x,u)\in\Omega} \int_T^{T'} f_0(t, x(t), u(t))\,dt \ge 0$.

[3]It is in fact weaker only for $\alpha = +\infty$.

Unfortunately, in [3] a significantly narrower class of optimal control problems was considered, while for the general case only a scheme was outlined (without statement of particular results that can be obtained by following this scheme).

We show that Balder's theorem indeed remains valid in almost full generality for problem (6), (2), (3) with condition (iv) relaxed to condition (v). However, we still need a local version of condition (iv), namely,

(iv′) for every $T > 0$, the set of functions $F_0^{T,-} := \{f_0^-(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))|_{[0,T]} \mid (x, u) \in \Omega\}$ is uniformly integrable on $[0, T]$.

Note that under condition (iv′), condition (v) is equivalent to each of the following conditions:

(v′) there is a continuous function $\omega\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ such that $\omega(T, T') \to 0$ as $T, T' \to \infty$ and

$$\inf_{(x,u)\in\Omega} \int_T^{T'} f_0(t, x(t), u(t))\, dt \geq -\omega(T, T') \qquad \forall T, T'\colon\ T' > T \geq 0;$$

(v″) there is a continuous function $\widetilde{\omega}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that $\widetilde{\omega}(T) \to 0$ as $T \to \infty$ and

$$\inf_{T'>T} \inf_{(x,u)\in\Omega} \int_T^{T'} f_0(t, x(t), u(t))\, dt \geq -\widetilde{\omega}(T) \qquad \forall T \geq 0.$$

Note also that one of the important corollaries to conditions (iv′) and (v) is that the value of the functional $J(x, u)$ is defined for every admissible pair $(x, u) \in \Omega$ and is equal to either a finite number or $+\infty$.

In our proof, we do not follow the scheme proposed in [3] but rather show that the result can be derived from those of Balder himself in a fairly simple way. For more details see [2].

References

1. *Balder E.J.* An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 95. P. 195–213.
2. *Besov K.O.* On Balder's existence theorem for infinite-horizon optimal control problems // arXiv: 1705.00888 [math.OC].
3. *Dmitruk A.V., Kuz'kina N.V.* Existence theorem in the optimal control problem on an infinite time interval // Math. Notes. 2005. V. 78. P. 466–480; 2006. V. 80. P. 309.

Метод программных итераций и множество позиционного поглощения в дифференциальной игре сближения–уклонения (The programmed iterations method and the set of positional absorption in a guidance–evasion differential game)*

А. Г. Ченцов (A. G. Chentsov)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

chentsov@imm.uran.ru

Рассматривается один из методов решения дифференциальной игры (ДИ) сближения–уклонения для системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \qquad u \in P, \quad v \in Q; \tag{1}$$

здесь $t \in T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ $(t_0 < \vartheta_0)$, P и Q — непустые компакты в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, вектор-функция

$$f\colon\ T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n \tag{2}$$

непрерывна по совокупности переменных. Предполагаются заданными множества M и N: $M \subset T \times \mathbb{R}^n$ и $N \subset T \times \mathbb{R}^n$; M — целевое множество для игрока I, формирующего $u(t) \in P$, а N определяет фазовые ограничения (ФО) в виде сечений

$$N\langle t\rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in N\}, \qquad t \in T;$$

игрок II формирует $v(t) \in Q$ и заинтересован в осуществлении уклонения (попадание на M допускается только после нарушения ФО). Пара (M, N) определяет ДИ сближения–уклонения, для которой справедлива [1, 2] фундаментальная терема об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина в предположении замкнутости M и N, а также при традиционных условиях на систему (1), включающих в себя требование локальной липшицевости f (2) по фазовой переменной. Данная теорема

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00649).

распространена [3] А.В. Кряжимским на случай, когда система (1) удовлетворяет условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности решений. Два этих условия полагаем выполненными.

Через $\mathcal{F}$ обозначаем семейство всех замкнутых подмножеств (п/м) $T \times \mathbb{R}^n$, а через $\mathfrak{F}$ — семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, имеющих замкнутые (в $\mathbb{R}^n$) сечения гиперплоскостями $t = \mathrm{const}$, $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}$. Следуя [4, 5], определяем при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ оператор программного поглощения $\mathbf{A}[M]$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ — семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$; если, кроме того, $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то конструируем итерационную последовательность $(W_k(M,N))_{k \in \mathbb{N}_0}$, где $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N}$, определяемую условиями

$$\big(W_0(M,N) \triangleq N\big) \,\&\, \big(W_s(M,N) = \mathbf{A}[M](W_{s-1}(M,N)) \ \forall s \in \mathbb{N}\big);$$

через $W(M,N)$ обозначаем пересечение всех множеств $W_l(M,N)$, $l \in \mathbb{N}_0$.

Основное свойство процедуры. Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $W(M,N)$ есть неподвижная точка оператора $\mathbf{A}[M]$, причем

$$\big(L = \mathbf{A}[M](L)\big) \;\Rightarrow\; \big(L \subset W(M,N)\big) \qquad \forall L \in \mathcal{P}(N).$$

Наконец, $W(M,N)$ есть множество успешной разрешимости задачи (M,N)-сближения в классе (многозначных обобщенных) квазистратегий. Если $(t_*, x_*) \in W(M,N)$, то разрешающая задачу (M,N)-сближения квазистратегия может быть определена как правило реагирования на обобщенные управления игрока II (уклониста), основанное на принципе программного $(M, W(M,N))$-сближения; данная квазистратегия (квазипрограмма [4, 5]) является наибольшей в поточечной упорядоченности по включению среди всех квазистратегий (игрока I), гарантирующих (M,N)-сближение из позиции (t_*, x_*).

Установлено свойство зависимости $(M,N) \mapsto W(M,N)$, имеющее смысл непрерывности сверху фрагментов предельных множеств (множеств позиционного поглощения), отвечающих компактным подпространствам пространства позиций. Приведен пример, показывающий, что “обычной” непрерывностью упомянутая зависимость не обладает.

Рассматривается модификация итерационной процедуры [5], отвечающая применению оператора стабильности (неподвижные точки для данного оператора — стабильные мосты в смысле Н.Н. Красовского), и обсуждается ее применение для решения задачи уклонения с ограничением на число переключений формируемого управления (в [6] указаны примеры, для которых итерационная процедура допускает эффективную реализацию). Оператор стабильности отвечает [4, § 11] идее решения игровых задач программного управления, в которых игрок II может формировать только постоянные обычные управления $v \in Q$, на которые игрок I может реагировать скользящими режимами. Множества успешной разрешимости задачи сближения в упомянутых условиях определяют значение соответствующего оператора стабильности; целевое множество M при этом фиксируется и мы получаем отображение $\mathbb{A}[M]$, действующее в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. При $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ реализуется последовательность $(\mathcal{W}_k(M, N))_{k \in \mathbb{N}_0}$,

$$\big(\mathcal{W}_0(M, N) \triangleq N\big) \ \& \ \big(\mathcal{W}_k(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_{k-1}(M, N)) \ \forall k \in \mathbb{N}\big).$$

При $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ в виде пересечения всех множеств $(\mathcal{W}_k(M, N))_{k \in \mathbb{N}_0}$ имеем [4, § 11] $W(M, N)$. Если же в этих условиях $s \in \mathbb{N}$, то $N \setminus \mathcal{W}_s(M, N)$ определяет [7, § 5] множество успешной разрешимости задачи уклонения с ограничениями в виде неравенства $k \leqslant s$ на число k переключений формируемого управления (при формировании моментов коррекции используются неупреждающие мультифункционалы на пространстве траекторий системы (1)).

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Альтернатива для игровой задачи сближения // ПММ. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Кряжимский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения–уклонения // ДАН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
4. *Ченцов А.Г.* Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. 103 с. Деп. в ВИНИТИ 04.06.79, № 1933-79,
5. *Ченцов А.Г.*. Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321.
6. *Дятлов В.П., Ченцов А.Г.* Об одном классе линейных дифференциальных игр с ограниченным числом коррекций // Управление и оценивание в динамических системах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 9–16.
7. *Ченцов А.Г.* О задаче управления с ограниченным числом переключений. Свердловск: УПИ им. С.М. Кирова, 1987. 44 с. Деп. в ВИНИТИ, № 4942-В87.

Optimization of stationary solutions in population dynamics*

Alexey Davydov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; NITU "MISIS", Moscow, Russia; Vladimir State University, Vladimir, Russia

davydov@vlsu.ru

In many examples, population dynamics under a given stationary exploitation mode converges to some stationary state. This effect could be observed even in the simplest case of logistic model [1]. But for models with more complicated dynamics, for example, for those that take into account some population structure or a nonlinear law for the appearance of new generation, or else some other natural processes in population dynamics, such a convergence could be non-obvious and needs justification (see, e.g., [2, 3]).

We consider integro-differential nonlinear models for the dynamics of an exploited population that are advanced generalizations of the McKendrick–von Foerster model [4]. For these models we prove the existence of a nontrivial stationary solution for a given (also stationary) exploitation mode and show the existence of such a mode which provides the maximum profit over all admissible modes on some of the respective stationary solutions [5, 6]. The illustrating numerical examples are also presented.

References

1. *Arnold V.I.* "Hard" and "Soft" Mathematical Models. Moscow: MCCME, 2004 (in Russian).
2. *Calsina A., Saldana J.* Asymptotic behaviour of a model of hierarchically structured population dynamics // J. Math. Biol. 1997. V. 35. P. 967–987.
3. *Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.V.* Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst. 2015, V. 21, N 3. P. 475–494. DOI:10.1007/s10883-015-9271-x.
4. *Murray J.D.* Mathematical Biology: An Introduction. 3rd ed. New York: Springer, 2002. (Interdiscip. Appl. Math.; V. 17.)
5. *Panesh A.A., Platov A.S.,* Optimization of size-structured population with interacting species // J. Math. Sci. 2013. V. 188, N 3. P. 293–298.

*The work is supported in part by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.638.2016/FPM) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-08075a).

6. *Davydov A.A., Nassar A.F.* On the uniqueness of a positive stationary state in the dynamics of a population with asymmetric competition // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291. P. 78–86.

О двух подходах к необходимым условиям в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями (On two approaches to necessary conditions in state-constrained optimal control problems)*

А. В. Дмитрук (A. V. Dmitruk), И. А. Самыловский (I. A. Samylovskiy)

ЦЭМИ РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

dmitruk@member.ams.org, ivan.samylovskiy@cs.msu.ru

В докладе показано, что в определенных классах задач на основе подхода Р.В. Гамкрелидзе [1], состоящего в дифференцировании фазового ограничения вдоль отрезка выхода на фазовую границу, можно получить условия стационарности в форме Дубовицкого–Милютина [2], включая условия знакоопределенности множителя при фазовом ограничении и скачков сопряженной переменной в точках посадки на фазу.

Рассматривается следующий базовый класс задач:

$$\textbf{A:}\quad \begin{cases} \dot z = f(z,x,u), \quad J_A = J(z(0),z(T),x(0),x(T)) \to \min, \\ \dot x = g(z,x,u), \quad \varphi_s(u(t)) \leqslant 0, \quad s = 1,\ldots,\nu, \quad x(t) \geqslant 0, \end{cases}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$ — фазовые переменные, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление.

Исследуется процесс $w^0 = (z^0, x^0, u^0)$ такой, что траектория $x^0(t)$ выходит на фазовую границу на некотором отрезке $[t_1^0, t_2^0] \subset [0,T]$, т.е. $x^0(t) > 0$ на $[0,t_1^0)$, $x^0(t) = 0$ на $[t_1^0,t_2^0]$ и $x^0(t) > 0$ на $(t_2^0,T]$. Кроме того, пусть u^0 непрерывна на $\Delta_1 = [0,t_1^0]$, $\Delta_3 = [t_2^0,T]$ и липшицева на $\Delta_2 = [t_1^0,t_2^0]$, причем $\varphi_s(u^0(t)) < 0$ на Δ_2 для всех s и посадка траектории на фазовую границу и сход с нее происходят с ненулевой производной.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00585).

Нас интересуют условия, при которых данный процесс доставляет так называемый расширенный слабый минимум в задаче A (т.е. слабый минимум, допускающий также вариации точек разрыва управления).

Аналогично [3] вводится новое время $\tau \in [0,1]$, а переменная t на каждом отрезке Δ_i рассматривается как новая фазовая переменная $t_i(\tau)$, подчиненная уравнению $\frac{dt_i}{d\tau} = \rho_i(\tau)$, где функции $\rho_i(\tau) > 0$ суть новые, дополнительные управления, $i = 1,2,3$. На отрезке $[0,1]$ вводятся фазовые переменные $r_i(\tau) = z(t_i(\tau))$, $y_i(\tau) = x(t_i(\tau))$ и управление $v_i(\tau) = u(t_i(\tau))$. Таким образом, переменные исходной задачи "размножаются" путем их сужения на отрезки Δ_i и записываются как функции от нового времени.

Вместо фазового ограничения $y_2(\tau) \geqslant 0$ рассматривается пара из концевого и смешанного ограничений $y_2(0) \geqslant 0$, $g(r_2, y_2, v_2) \equiv 0$. В итоге приходим к следующей задаче на отрезке времени $\tau \in [0,1]$:

$$
\mathbf{B:}\quad \begin{cases}
\dfrac{dr_i}{d\tau} = \rho_i f(r_i, y_i, v_i), \quad r_1(1) - r_2(0) = 0, \quad r_2(1) - r_3(0) = 0, \\[2mm]
\dfrac{dy_i}{d\tau} = \rho_i g(r_i, y_i, v_i), \quad y_1(1) - y_2(0) = 0, \quad y_2(1) - y_3(0) = 0, \\[2mm]
\dfrac{dt_i}{d\tau} = \rho_i, \quad t_1(0) = t_1(1) - t_2(0) = t_2(1) - t_3(0) = t_3(1) - T = 0, \\[2mm]
g(r_2, y_2, v_2) \equiv 0, \quad \varphi_s(v_1(\tau)) \leqslant 0, \quad \varphi_s(v_3(\tau)) \leqslant 0, \\[2mm]
J_B = J(r_1(0), r_3(1), y_1(0), y_3(1)) \to \min .
\end{cases}
$$

Отметим, что здесь y_2 варьируется лишь как константа. Для задачи B формулируются условия стационарности, которые переписываются в терминах исходной задачи A с участием некоторой меры, сосредоточенной на Δ_2, что соответствует первому этапу варьирования. Знакоопределенность плотности и скачков этой меры получается на втором этапе с помощью вариаций, сосредоточенных на Δ_2. Для этого устанавливается справедливость соотношений

$$
J'(w^0)\,\overline{w}(T) + J'(w^0)\,\overline{w}(0) = \sum_{i=1,2} \Delta\mu(t_i^0)\,\overline{x}(t_i^0) + \int_{\Delta_2} \dot{\mu}\,\overline{x}\,dt \geqslant 0, \qquad (1)
$$

где тройка $\overline{w}(t) = (\overline{z}(t), \overline{x}(t), \overline{u}(t))$ удовлетворяет на $[0,T]$ системе уравнений в вариациях $\dot{\overline{z}} = f'_w \overline{w}$, $\dot{\overline{x}} = g'_w \overline{w}$ вдоль процесса $w^0(t)$, и показывается, что неравенство (1) справедливо для любой заданной на Δ_2 липшицевой функции $\overline{x}(t) = \varkappa(t) \geqslant 0$. С помощью вариаций $\overline{x}(t)$, сосредоточенных внутри отрезка Δ_2 и в окрестностях его концов t_1^0, t_2^0, производится второй этап варьирования, в результате которого доказывается неотрицательность плотности меры $\dot{\mu} \geqslant 0$ и скачков меры $\Delta\mu(t^0_{1,2}) \geqslant 0$ соответственно.

Тем самым, путем такого "двухэтапного варьирования" получена полная система условий стационарности в форме Дубовицкого–Милютина, т.е. показано [4], что для данного допустимого процесса найдутся липшицева функция $\psi_z(t)$, константа c, функции $\widetilde{\psi}_x(t)$, $\mu(t)$, липшицевые на отрезках Δ_i, $i = 1, 2, 3$, с возможными разрывами в точках t^0_1, t^0_2, и измеримая ограниченная функция $h(t) \geqslant 0$, порождающие расширенную функцию Понтрягина $\overline{H} = \psi_z f(z, x, u) + \widetilde{\psi}_x g(z, x, u) + \dot{\mu}x - h\varphi(u)$, так что при этом выполнены условия дополняющей нежесткости $d\mu(t)x^0(t) = 0$, $h(t)\varphi(u^0(t)) = 0$, сопряженные уравнения

$$\begin{cases} \dot{\psi}_z = -\psi_z f'_z(z^0, x^0, u^0) - \widetilde{\psi}_x g'_z(z^0, x^0, u^0), \\ \dot{\widetilde{\psi}}_x = -\psi_z f'_x(z^0, x^0, u^0) - \widetilde{\psi}_x g'_x(z^0, x^0, u^0) - \dot{\mu}, \end{cases}$$

условия трансверсальности

$$\begin{cases} \psi_z(0) = J'_{z(0)}, \quad \psi_z(T) = -J'_{z(T)}, \\ \psi_x(0) = J'_{x(0)}, \quad \psi_x(T) = -J'_{z(T)}, \end{cases}$$

стационарности по управлению $\overline{H}'_u(z^0(t), x^0(t), u^0(t)) = 0$, закон сохранения энергии $H(z^0(t), x^0(t), u^0(t)) = c$, условия скачка сопряженной переменной $-\Delta\widetilde{\psi}_x(t^0_i) = \Delta\mu(t^0_i) \geqslant 0$, $i = 1, 2$, и условия неотрицательности плотности меры $\dot{\mu}(t) \geqslant 0$ почти всюду на Δ_2.

Если траектория стационарна, но не доставляет расширенный слабый минимум, то сопряженная переменная может иметь отрицательные скачки. В работе [4] приводится пример задачи

$$\begin{cases} \dot{z} = \Big(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\Big)u^4 + \Big(\dfrac{3\varepsilon}{2} - 1\Big)u^2, \quad u^2 - 1 \leqslant 0, \quad \dot{x} = u, \\ J = z(0) - z(3) + \varepsilon(x(0) + x(3)) \to \min, \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

в которой для траектории $x^0 = (1 - t, 0, t - 2)$ на $\Delta_1 = [0, 1]$, $\Delta_2 = [1, 2]$, $\Delta_3 = [2, 3]$, порожденной управлением $u^0 = (-1, 0, 1)$ на Δ_1, Δ_2, Δ_3, сопряженная переменная имеет скачки $-\varepsilon < 0$ в точках 1, 2.

Полученные результаты переносятся и на более общую задачу

$$\textbf{C:} \quad \begin{cases} \dot{y} = f(y, u), \quad J_C := J(y(0), y(T)) \to \min, \\ \varphi(u(t)) \leqslant 0, \quad \Phi(y(t)) \geqslant 0, \end{cases}$$

в которой скалярное фазовое ограничение относится ко всей совокупности фазовых переменных [4], а также на задачу с терминальными ограничениями типа равенства и неравенства.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМиМФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.
3. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.* The hybrid maximum principle is a consequence of Pontryagin maximum principle // Syst. Control Lett. 2008. V. 57, N. 11.
4. *Dmitruk A.V., Samylovskiy I.A.* On the relation between two approaches to necessary optimality conditions in problems with state constraints // JOTA. 2017. DOI: 10.1007/s10957-017-1089-0.

On systematization of the problems of estimating convex compact sets by the balls

Sergey Dudov

Saratov State University, Saratov, Russia

DudovSI@info.sgu.ru

Let D be a fixed convex compact set in $\mathbb{R}^p$ and $n(x)$ be a norm on $\mathbb{R}^p$. We use the following notation: $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$,

$$R(x, D) = \max_{y \in D} n(x - y), \qquad \rho(x, D) = \min_{y \in D} n(x - y),$$

$$P(x, D) = \rho(x, D) - \rho(x, \Omega).$$

Many problems of estimating and approximating a convex compact set D by balls have the form [1–3]

$$f(x) \equiv F(R(x, D), P(x, D)) \to \min_{x \in S}. \tag{1}$$

The solutions of some problems (1) can be obtained by solving the following problem:

$$\varphi(x, r) \equiv h(D, Bn(x, r)) \to \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \tag{2}$$

where

$$Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p \colon n(x-y) \le r\},$$

$$h(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b),\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\Big\}.$$

Notation: $C_f = \operatorname{Arg\,min}_{x\in S} f(x)$, $C_\varphi(r) = \operatorname{Arg\,min}_{x\in\mathbb{R}^p} \varphi(x,r)$.

Theorem. *Let $S = \mathbb{R}^p$ or $S = D$, the function $F(t_1,t_2)$ be nondecreasing with respect to each variable and be increasing with respect to at least one of them. If $x^* \in C_f$ then $x^* \in C_\varphi(r)$ for $r = (R(x,D) - P(x,D))/2$.*

We find the ranges of r for which the solutions of problem (2) give the solutions of the following problems:

- outer and inner estimation of the set D by a ball ($F(t_1,t_2) = t_1$ and $F(t_1,t_2) = t_2$, $S = \mathbb{R}^p$);
- uniform estimation of the set D by balls in the Hausdorff metric [3] ($F(t_1,t_2) = t_1 + t_2$, $S = \mathbb{R}^p$);
- estimation of the boundary of the set D by spherical layer of the least width and volume ($F(t_1,t_2) = t_1 + t_2$ and $F(t_1,t_2) = t_1^p - |t_2|^p$, $S = D$);
- asphericity of the set D [4] ($F(t_1,t_2) = -t_1/t_2$, $S = D$).

Solution properties of problem (2) were obtained in [5, 6] (necessary and sufficient conditions for the solution, conditions for the solution uniqueness and stability, variational properties).

References

1. *Bonnesen T., Fenchel W.* Teorie der konvexen Körper. Springer-Verlag, 1974.
2. *Dudov S.I.* Systematization of problems on ball estimates of a convex compactum // Sb. Math. 2015. V. 206, N 9. P. 1260–1280.
3. *Nikol'skii M.S., Silin D.B.* On the best approximation of a convex compact set by elements of addial // Proc. Steklov Inst. Math. 1995. V. 211. P. 306–321.
4. *Dudov S.I., Meshcheryakova E.A.* On asphericity of convex body // Russ. Math. (Izv. Vuzov). 2015. V. 59, N 2. P. 36–47.
5. *Dudov S.I., Osiptsev M.A.* Uniform estimation of a convex body by a fixed-radius ball // J. Optim. Theory Appl. 2016. V. 171, N 2. P. 465–480.
6. *Dudov S.I., Osiptsev M.A.* Stability of best approximation of a convex body by a ball of fixed radius // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56, N 4. P. 525–540.

О классификации и симметриях трехмерных аффинных управляемых систем (On classification and symmetries of three-dimensional affine control systems)

В. И. Елкин (V. I. Elkin)

Вычислительный центр Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

vl.elkin2015@yandex.ru

Рассматриваются нелинейные управляемые системы, которые линейны по управлению,

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(y)u, \qquad y \in M \subset \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Здесь M — область, f_0, f_1 — гладкие векторные поля, которые линейно независимы в каждой точке $y \in M$.

Система (1) эквивалентна системе

$$\dot{x} = g_0(x) + g_1(x)v, \qquad x \in L \subset \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

если существует такой диффеоморфизм (замена координат) $\psi\colon M \to L$, что, как только $y(t)$ — фазовая траектория системы (1), $x(t) = \psi(y(t))$ — фазовая траектория системы (2), и наоборот, как только $x(t)$ — фазовая траектория системы (2), $y(t) = \psi^{-1}(x(t))$ — фазовая траектория системы (1). Нетрудно убедиться в том, что (по крайней мере локально) такой замене фазовых переменных сопутствует замена управлений вида $v = \lambda_0(y) + \lambda(y)u$.

Существенные свойства управляемых систем, такие как оптимальность решений, управляемость, сохраняются при переходе к эквивалентной системе. Естественно попытаться решить ту или иную задачу управления для эквивалентной системы более простого вида, а затем “перенести” полученное решение на исходную систему. Поэтому важной является задача классификации, которая заключается в следующем. Приведенное понятие эквивалентности определяет отношение эквивалентности на совокупности систем (1). Задача классификации заключается в описании классов эквивалентности. В широком смысле она включает в себя, например, следующие подзадачи: нахождение критериев эквивалентности двух систем; построение диффеоморфизмов, осуществляющих эквивалентность; построение канонических форм, т.е. представителей классов эквивалентности (по возможности наиболее простого вида).

В [1] приведена некоторая классификация рассматриваемых систем, согласно которой система (1) (при определенных условиях регулярности) локально эквивалентна одной из систем

$$\begin{cases} \dot x^1 = 0, \\ \dot x^2 = 1, \\ \dot x^3 = v, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot x^1 = 0, \\ \dot x^2 = x^3, \\ \dot x^3 = v, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot x^1 = 1, \\ \dot x^2 = x^3, \\ \dot x^3 = v, \end{cases} \begin{cases} \dot x^1 = x^2, \\ \dot x^2 = x^3, \\ \dot x^3 = v, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dot x^1 = 1 + x^3 v, \\ \dot x^2 = v, \\ \dot x^3 = H(x) v, \end{cases} \tag{4}$$

где $H(x)$ — некоторая функция, причем $\partial H/\partial x^1 \neq 0$. Системы (3), (4) попарно не эквивалентны, что определяется некоторым конечным числом целочисленных инвариантов. Однако среди систем вида (4) при различных конкретных функциях H существуют эквивалентные и неэквивалентные системы (т.е. этих инвариантов не хватает для полной классификации). Проблема эквивалентности систем с разными функциями H сводится к вопросу о совместности некоторых систем дифференциальных уравнений, которые относятся к типу систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью [2; 3, с. 155]. При исследовании совместности таких систем выделяется класс управляемых систем, который характеризуется некоторыми вещественными инвариантами. Системы, образующие этот класс, называются C-системами. Определяются они следующим образом. Введем два дифференциальных оператора

$$I_1(H) = 2\left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)_x - \left(\frac{H_{xx}}{H_x}\right)^2,$$

$$I_2(H) = \frac{1}{\sqrt{|H_x|}}\left(2H_z - \frac{1}{H_x}\left(zH_{xx} + H_{xy} + HH_{xz}\right)\right).$$

Функции, получающиеся в результате действия операторов, обозначим через $I_1(H)(x, y, z)$ и $I_2(H)(x, y, z)$. Управляемая система вида (4) называется C-системой, если

$$I_1(H)(x, y, z) = \text{const}, \qquad I_2(H)(x, y, z) = \text{const}.$$

Классы эквивалентности C-систем определены следующим образом: каждой паре чисел (C_1, C_2) при $C_2 \geqslant 0$ соответствуют два класса эквивалентных управляемых C-систем. В класс $(C_1, C_2)^+$ входят C-системы вида (4), где функция H удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} I_1(H)(x,y,z) = C_1, \\ I_2(H)(x,y,z) = \pm C_2, \end{cases} \qquad C_2 \geqslant 0,$$

и условию $H_x > 0$, а в класс $(C_1, C_2)^-$ входят C-системы вида (4), где функция H удовлетворяет той же системе дифференциальных уравнений и условию $H_x < 0$. Для C-систем числа C_1 и C_2 являются инвариантами. Классы $(C_1, C_2)^+$ и $(C_1, C_2)^-$ при $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$ пусты. Приведем некоторые канонические формы для остальных классов:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \dfrac{\sqrt{C_1}}{2} z^2 \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{C_1}}{2} x\right) u \end{cases} \qquad \text{для класса } (C_1, 0)^+, \quad C_1 > 0;$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(x + \dfrac{C_2}{2} z\right) u \end{cases} \qquad \text{для класса } (0, C_2)^+, \quad C_2 \geqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(-x + \dfrac{C_2}{2} z\right) u \end{cases} \qquad \text{для класса } (0, C_2)^-, \quad C_2 \geqslant 0;$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(e^{x\sqrt{-C_1}} + \dfrac{\sqrt{-C_1}}{4} z^2\right) u \end{cases} \qquad \text{для класса } (C_1, 0)^+, \quad C_1 < 0;$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + zu, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{z} = \left(-e^{x\sqrt{-C_1}} + \dfrac{\sqrt{-C_1}}{4} z^2\right) u \end{cases} \qquad \text{для класса } (C_1, 0)^-, \quad C_1 < 0.$$

Приведенные результаты по классификации связаны с существованием некоторых групп симметрий систем (1). Диффеоморфизм $\varphi\colon M \to M$ называется симметрией системы (1), если он переводит фазовые траектории в фазовые траектории. Векторные поля ξ, порождающие (локальные) симметрии, удовлетворяют условию

$$[f_j, \xi] = \nu_j(y) f_1, \qquad j = 0, 1,$$

где $\nu_j(y)$ — некоторые функции, а квадратные скобки обозначают коммутатор векторных полей. Совокупность векторных полей, удовлетворяющих этому условию, образует алгебру Ли.

Оказывается, что для систем (3) эта алгебра бесконечномерна. Для систем (4) алгебра конечномерна, причем ее размерность не выше 3. Для C-систем эта размерность равна 3.

Список литературы

1. *Елкин В.И.* О классификации аффинных управляемых систем с фазовым пространством размерности $n < 4$ // ДАН СССР. 1988. Т. 302, № 1. С. 18–20.
2. *Елкин В.И.* Общее решение уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // Диф. уравнения. 1985. Т. 21, № 8. С. 1389–1398.
3. *Елкин В.И.* Основы геометрической теории нелинейных управляемых систем. М.: Физматлит, 2014.

Nonlocal stabilization of a solution to the Helmholtz system by feedback control

Andrei Fursikov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

fursikov@gmail.com

In the 2000s the theory of stabilization for a solution to the Navier–Stokes system (NSS) near a steady-state solution by feedback control was constructed by a number of authors (see [1] and the references therein). In this talk some results connected with non-local stabilization for 3D Navier–Stokes type systems by feedback control that have been recently obtained by the author and L.S. Shatina will be discussed. We begin with the case when a steady-state solution is equal to zero (and, hence, the external force on the right-hand side of the NSS is zero as well) and boundary conditions are periodic. Although in this case in virtue of the energy estimate the solution $v(t,x)$ of the NSS satisfies $\|v(t,\cdot)\|_{L_2} \to 0$ as $t \to 0$ even when the control equals zero, the feedback stabilization problem is meaningful. The point is that v here is a weak solution and uniqueness in the class of weak solutions for the 3D NSS is not proved. But stabilization by feedback control can be applied to the dynamical system only, when uniqueness of solutions takes place. In other words, we should solve a stabilization problem in the class of strong solutions of the 3D NSS, i.e., for solutions $v(t,x) \in V^{1,2} := L_2(\mathbb{R}_+; V^2) \cap H^1(\mathbb{R}_+; V^0)$ where $V^k = \{v(x) \in (H^k(\mathbb{T}^3))^3 \colon \operatorname{div} v = 0, \int_{\mathbb{T}^3} v(x)dx = 0\}$, H^k is the Sobolev space, and $\mathbb{T}^3$ is the 3D torus. Recall that existence of a strong solution of the boundary value problem for the 3D NSS with an arbitrary initial condition $v_0 \in V^1$ has not been proved yet: proving this is just the content of the millennium problem.

Instead of the 3D NSS that describes the velocity vector field $v(t,x)$ of a viscous incompressible fluid flow, it will be more convenient for us to consider the 3D Helmholtz system describing its vorticity $\omega(t,x) = \operatorname{curl} v(t,x)$:

$$\partial_t \omega(t,x) - \Delta\omega + (v,\nabla)\omega - (\omega,\nabla)v = \sum_{j=1}^{N} \delta(t-t_j)u_j(x), \quad \operatorname{div}\omega = 0, \quad (1)$$

$$\omega(t,x)|_{t=0} = \omega_0(x), \qquad (2)$$

where δ is Dirac δ-function, $t_j \geq 0$, $u_j(x) \in V^0$, and $\operatorname{supp} u_j \subset U \subset \mathbb{T}^3$ where U does not depend on j. Since the operator curl: $V^k \to V^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, realizes an isomorphism of the function spaces, the velocity vector field v in (1) is uniquely defined by ω. Moreover, applying the operator curl^{-1} to (1), (2), we can rewrite this problem in terms of the NSS.

The stabilization problem we study here is formulated as follows:

Given $\omega_0 \in V^0$ *and* $U \subset \mathbb{T}^3$, *find* $t_j \geq 0$, $u_j(x) \in V^0$, $\operatorname{supp} u_j \subset U$, *and* $N \in \mathbb{N}$ *such that the solution* $\omega(t,x)$ *of* (1), (2) *satisfies the inequality*

$$\|\omega(t,\cdot)\|_{V^0} \leq c(\|\omega_0\|_{V^0})e^{-t} \qquad (3)$$

(here and everywhere below $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{V^0}$).

Observe that the nonlinear term in equation (1) can be written as follows:

$$(v,\nabla)\omega - (\omega,\nabla)v = \Phi(\omega)\omega + B_\tau(\omega), \qquad (4)$$

where

$$\Phi(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{T}^3} (\omega(x), \nabla) \operatorname{curl}^{-1} \omega(x) \cdot \omega(x)\, dx}{\int_{\mathbb{T}^3} |\omega(x)|^2\, dx} \quad \text{for } \omega \neq 0, \qquad \Phi(0) = 0, \tag{5}$$

and $B_\tau(\omega)$ satisfies

$$\int_{\mathbb{T}^3} B_\tau(\omega(x)) \cdot \omega(x)\, dx = 0 \qquad \forall \omega \in V^1. \tag{6}$$

First we delete the term B_τ in (1) and consider the so called Normal Parabolic System (NPS):

$$\partial_t \omega(t,x) - \Delta\omega - \Phi(\omega)\omega = 0, \qquad \operatorname{div} \omega = 0. \tag{7}$$

For the solution $\omega(t,x;\omega_0)$ of the NPS (7), (2) the following explicit formula is true (see [2]):

$$\omega(t,x;\omega_0) = \frac{S(t,x;\omega_0)}{1 - \int_0^t \Phi(S(\tau,x;\omega_0))\, d\tau}, \tag{8}$$

where $S(t,x;\omega_0)$ is the solution of the following 3D Stokes system:

$$\partial_t S(t,x) - \Delta S = 0, \quad S(t,x)|_{t=0} = \omega_0(x), \qquad \operatorname{div} \omega_0 = 0. \tag{9}$$

Formula (8) allows to get a lot of important information on the NPS (7), (2). In particular we can study the structure the corresponding dynamical system in the phase space V^0.

Let $M_- := \{\omega_0 \in V^0 \colon$ solution $\omega(t,x;\omega_0)$ of (7), (2) satisfies (3)$\}$.

Proposition 1 [2]. *For each $\omega_0 \in V^0 \setminus M_-$ there exists $0 < t_0 \le \infty$ such that the solution of (7), (2) satisfies $\|\omega(t,\cdot;\omega_0)\| \to \infty$ as $t \uparrow t_0$.*

Let us consider the stabilization problem for the solution of the NPS by the start control: Given $U \subset \mathbb{T}^3$ and $\omega_0 \in V^0$, find a start control $u \subset V^1$: $\operatorname{supp} u \subset U$, such that the solution of the NPS (7) with the initial condition

$$\omega(t,x)|_{t=0} = \omega_0(x) + u(x) \tag{10}$$

satisfies inequality (3).

Note that by the definition of M_- and Proposition 1, the stabilization problem (7), (10) is meaningful only if $\omega_0 \subset V^0 \setminus M_-$. Besides, it is easy to see that the problem with an arbitrary set U can be reduced to the special case

$$U = U_b = \big\{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{T}^3 \colon\ x_j \in [-\pi/b, \pi/b],\ j = 1,2,3\big\}, \tag{11}$$

where $b \in \mathbb{T}^3$ is big enough. The key step in the solution of the stabilization problem (7), (10) is the following

Theorem 1 [3]**.** *For each $b \in \mathbb{N}$ there exists $u_0 \in V^1$:* $\operatorname{supp} u_0 \subset U_b$, $\|u_0\|_{V^0} = 1$, *and $\beta > 0$ such that*

$$\int_{\mathbb{T}^3} \Phi(S(t,x;u_0)\,dx \geq 2\beta e^{-18t} \qquad \forall t \geq 0. \tag{12}$$

In fact, u_0 is defined by an explicit formula. Let $K_r \in V^0$ be the cone with the top at the origin such that $\|u_0 - v\|_{V^0} = r \ \forall v \in K_r \cap \Sigma$ where $\Sigma = \{v \in V^0 \colon \|v\|_{V^0} = 1\}$.

Proposition 2. 1. *There exists $r > 0$ such that for each $v \in K_r$*

$$\int_{\mathbb{T}^3} \Phi(S(t,x;v)\,dx \geq \beta e^{-18t} \qquad \forall t \geq 0, \tag{13}$$

where β is the magnitude from (12)*.*

2. *$K := -K_r \subset M_-$.*

Theorem 2. *For each $\omega_0 \in V^0 \setminus M_-$ there exists $\lambda > 0$ such that $\omega_0 - \lambda u_0 \in K \subset M_-$. Hence, the control $u = -\lambda u_0$ stabilizes the solution of problem* (7), (10)*. Moreover, the solution of* (7), (10) *with $\omega_0 + u = \omega_0 - \lambda u_0 := v$ satisfies the inequality*

$$\|\omega(t,\cdot;v)\| \leq \frac{\|v\|e^{-t}}{1 + \frac{\beta}{16}\|v\|(1 - e^{-16t})}. \tag{14}$$

Let move on to the stabilization problem for the Helmholtz system (1). Recall that the term $\delta(t - t_j)u_j(x)$ is equivalent to the "initial condition" $\omega(t,x)|_{t=t_j} = \omega(t_j,x) + u_j(x)$. We take $t_1 = 0$, $u_1 = \omega_0 - \lambda u_0$ and begin to solve (1). Then in virtue of (6) the solution $\omega(t,x)$ will satisfy inequality (14) while it belongs to the interior of K. We take the moment when it reaches ∂K as t_2. We choose $u_2(x)$ such that $\omega(t_2,\cdot) + u_2$ belongs to the interior of K and is "close enough" to the line $\{\mu u_0,\, \mu \in \mathbb{R}_-\}$ and $\|\omega(t_2,\cdot) + u_2\| < \|\omega(t_2,\cdot)\|$. We continue the process in the same way to find (t_j, u_j), $j = 3, 4, \ldots$.

Theorem 3. *It is possible to choose (t_j, u_j), $j = 1, \ldots, N < \infty$, as explained above with $u_j \in V^1$ and* $\operatorname{supp} u_j$ *lying in* (11)*, such that the control on the right-hand side of* (1) *stabilizes the solution of problem* (1), (2)*, i.e., satisfies inequality* (3)*.*

References

1. *Fursikov A.V., Gorshkov A.V.* Certain questions of feedback stabilization for Navier–Stokes equations // Evol. Equat. Control Theory. 2012. V. 1, N 1. P. 109–140.
2. *Fursikov A.V.* On the normal-type parabolic system corresponding to the three-dimensional Helmholtz system // Advances in Mathematical Analysis of Partial Differential Equations: Proc. St. Petersburg Math. Soc. V. XV. Providence. RI: Amer. Math. Soc., 2014. P. 99–118. (AMS Transl. Ser. 2; V. 232).
3. *Fursikov A.V., Shatina L.S.* Nonlocal stabilization of the normal equation connected with Helmholtz system by starting control // arXiv: 1609.08679v2 [math.OC].

Квадратичный функционал в вариационном исчислении (Quadratic functional in the calculus of variations)

Э. М. Галеев (É. M. Galeev)

Московский государственный университет, Москва, Россия

galeevem@mail.ru

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления с квадратичным функционалом

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} (A\dot{x}^2 + 2C\dot{x}x + Bx^2)\, dt \to \min; \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \ (P)$$

где $A(\cdot), C(\cdot) \in C^1([t_0, t_1])$, $B(\cdot) \in C([t_0, t_1])$. Имеем

$$J'(x)[h] = 2\int_{t_0}^{t_1} (A\dot{x}\dot{h} + Cx\dot{h} + C\dot{x}h + Bxh)\, dt,$$

$$J''(x)[h, h] = J''[h, h] = 2\int_{t_0}^{t_1} (A\dot{h}^2 + 2C\dot{h}h + Bh^2)\, dt.$$

Для квадратичного функционала уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}(A\dot{x} + Cx) + C\dot{x} + Bx = 0$$

совпадает с уравнением Якоби. После дифференцирования по t уравнение Эйлера–Якоби переписывается в следующем виде:

$$A\ddot{x} + \dot{A}\dot{x} + (\dot{C} - B)x = 0. \tag{1}$$

Приведем теорему для дифференциального уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) $A(t) > 0$ *для любого* $t \in [t_0, t_1]$ *и уравнение имеет решение* $h(\cdot)$ *с граничными условиями* $h(t_0) = h(t_1) = 0$ *и не имеет нулей в интервале* (t_0, t_1). *Тогда решение уравнения* (1) *с граничными условиями* $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ *существует тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$A(t_1)\dot{h}(t_1)x_1 = A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0. \tag{2}$$

Доказательство. Выпишем определитель Вронского для двух линейно независимых решений уравнения (1) $h(\cdot)$ и $x(\cdot)$:

$$w(t) = \begin{vmatrix} h(t) & x(t) \\ \dot{h}(t) & \dot{x}(t) \end{vmatrix} = h(t)\dot{x}(t) - \dot{h}(t)x(t).$$

Нетрудно проверить, что определитель Вронского удовлетворяет линейному однородному уравнению I порядка

$$A\dot{w} + \dot{A}w = 0 \iff Aw = \mathrm{const},$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} &A(t_0)w(t_0) = A(t_1)w(t_1) \iff \\ &\quad A(t_0)\big(h(t_0)\dot{x}(t_0) - \dot{h}(t_0)x(t_0)\big) = A(t_1)\big(h(t_1)\dot{x}(t_1) - \dot{h}(t_1)x(t_1)\big) \\ &\qquad\qquad\qquad \iff A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0 = A(t_1)\dot{h}(t_1)x_1. \end{aligned}$$

Если известно решение $h(\cdot)$ дифференциального уравнения (1), то второе линейно независимое решение можно выписать непосредственно:

$$\begin{aligned} &Aw = \mathrm{const} \iff A(h\dot{x} - \dot{h}x) = -A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0 \iff \\ &\quad \frac{h\dot{x} - \dot{h}x}{h^2} = -\frac{A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0}{Ah^2} \iff \left(\frac{x}{h}\right)^{\cdot} = -\frac{A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0}{Ah^2} \\ &\qquad\qquad \iff x(t) = -h(t)\int_{t_0}^{t} \frac{A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0}{A(\tau)h^2(\tau)}\,d\tau + Ch(t). \end{aligned}$$

Если перейти к пределу в последнем равенстве при $t \to t_0$ и при $t \to t_1$, то получим $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0/(A(t_1)\dot{h}(t_1))$. $\square$

Предложение. *Если в квадратичной задаче (P) функция $h(\cdot)$ с граничными условиями $h(t_0) = h(t_1) = 0$ удовлетворяет уравнению Якоби, то $J''[h,h] = 2J(h) = 0$.*

Предложение доказывается интегрированием по частям функционала J.

Теорема 2. *Пусть $A, C \in C^1([t_0,t_1])$, $B \in C([t_0,t_1])$, выполнено усиленное условие Лежандра. Тогда*

а) *если выполнено усиленное условие Якоби, то допустимая экстремаль существует, единственна и доставляет абсолютный минимум*;

б) *если не выполнено условие Якоби, то значение задачи* $S_{\text{absmin}} = -\infty$;

в) *если выполнено условие Якоби, но не выполнено усиленное условие Якоби и выполнено условие* (2), *то допустимая экстремаль существует (их будет даже бесконечное множество) и все они доставляют абсолютный минимум*;

г) *если выполнено условие Якоби, но не выполнено усиленное условие Якоби и не выполнено условие* (2), *то допустимая экстремаль не существует и значение задачи* $S_{\text{absmin}} = -\infty$.

Доказательство. Пункты а) и б) доказаны в [1].

Пункт в) доказывается переходом к пределу от отрезка $[t_0, t_1 - \varepsilon]$ к отрезку $[t_0,t_1]$. А для отрезка $[t_0, t_1-\varepsilon]$ применим пункт а).

г) Возьмем произвольную допустимую функцию $\widetilde{x}$, например линейную функцию, проходящую через точки (t_0,x_0) и (t_1,x_1). Обозначим через h решение уравнения Якоби, для которого $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Оно существует, поскольку выполнено условие Якоби, но не выполнено усиленное условие Якоби. По предложению $J''[h,h] = 0$.

Поскольку для квадратичного функционала

$$J(\widetilde{x}+h) = J(\widetilde{x}) + J'(\widetilde{x})[h] + \frac{1}{2}J''[h,h] \overset{J''[h,h]=0}{=} J(\widetilde{x}) + J'(\widetilde{x})[h],$$

то

$$J(\widetilde{x}+h) - J(\widetilde{x}) = J'(\widetilde{x})[h] = 2\int_{t_0}^{t_1} \big(A\dot{\widetilde{x}}\dot{h} + C\dot{\widetilde{x}}h + C\widetilde{x}\dot{h} + B\widetilde{x}h\big)\,dt =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t_1} \big((A\dot{h} + Ch)\dot{\widetilde{x}} + C\widetilde{x}\dot{h} + B\widetilde{x}h\big)\,dt =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t_1} \big(A\dot{h} + Ch\big)\,d\widetilde{x} + 2\int_{t_0}^{t_1} \big(C\dot{h} + Bh\big)\widetilde{x}\,dt =$$

$$= 2(A\dot{h} + Ch)\widetilde{x}\Big|_{t_0}^{t_1} + 2\int_{t_0}^{t_1} \Big(-\frac{d}{dt}(A\dot{h} + Ch) + C\dot{h} + Bh\Big)\widetilde{x}\,dt =$$
$$= 2\big(A(t_1)\dot{h}(t_1)x_1 - A(t_0)\dot{h}(t_0)x_0\big) = 2G.$$

После интегрирования по частям интеграл равен нулю, поскольку выражение в скобках под знаком интеграла обращается в нуль, так как функция h удовлетворяет уравнению Эйлера–Якоби. При переходе использовали также, что $h(t_1) = h(t_0) = 0$, $\widetilde{x}(t_1) = x_1$, $\widetilde{x}(t_0) = x_0$.

Следовательно, $J(\widetilde{x} + \lambda h) = J(\widetilde{x}) + 2\lambda G$. Так как допустимая экстремаль не существует, то по теореме 1 $G \neq 0$. Поэтому $J(\widetilde{x} + \lambda h) \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$ или $-\infty$, т.е. $S_{\mathrm{absmin}} = -\infty$. $\square$

Теорема 2 в квадратично-линейном случае содержится в [2].

Список литературы

1. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. М.: УРСС, 2000.
2. *Галеев Э.М.* Методы оптимизации. Баку.: Изд-во фил. МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Баку, 2016.

On Hamiltonians induced from Fuchsian system and their applications

Gia Giorgadze

Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

gia.giorgadze@tsu.ge

Consider a system of linear ordinary differential equations of the form

$$(z\mathbb{I} - B)\dot{X} = AX, \tag{1}$$

where X is a complex-valued (n-column) vector function of a complex variable z, dot denotes differentiation with respect to z, A and B are constant matrices of size $n \times n$, and $\mathbb{I} = I_n$ is the identity matrix of the same size.

System (1) is called a system in Okubo normal form if the matrix B is diagonal. Certain physically interesting Schrödinger equations can be rewritten as Fuchsian systems of Okubo form. It is known that every accessory parameter free system of differential equations of Okubo normal form is rigid and has an integral representation of solutions; therefore, such systems are used to describe real physical processes (see [1]).

Consider a Schrödinger equation of the form

$$i\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = H(t)\Psi(t) \tag{2}$$

with time dependent Hamiltonian $H(t) = (H_{ij}(t))$, $i, j = 1, \dots, N$, where

$$H_{11} = \varepsilon(t),\ H_{12} = V_2,\ H_{13} = V_3,\ \dots,\ H_{1N} = V_N,$$

$$H_{21} = V_2,\ H_{31} = V_3,\ \dots,\ H_{N1} = V_N, \text{ and } H_{ij} = 0 \text{ otherwise.}$$

Here $\Psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_N(t))$ is a wave function, V_j, $j = 2, \dots, n$, are constants, and the time dependent part ε has the form $\varepsilon(t) = E_1 \tanh(t/T)$ with constant E_1 and T.

Theorem 1 [2]**.** *Equation* (2) *is reducible to an N-dimensional Fuchsian system of Okubo type*

$$(zI_N - B)\frac{d\Phi(z)}{dz} = A\Phi(z)$$

with $B = \operatorname{diag}(i, -i, \dots, -i)$.

Remark 1. Hamiltonians of the above type appear in the theory of non-adiabatic transition. There are also Hamiltonians of other types which permit Fuchsian reduction. Reversing the argument used in the proof, one can obtain Schrödinger realizations for certain systems of Okubo type. In this way one can construct Schrödinger equations with prescribed qualitative properties of solutions.

In the two-dimensional case (i.e., for $N = 2$) this result can be generalized by permitting Hamiltonians of more general form. Namely, consider a Schrödinger equation with two-component phase function

$$i\frac{\partial f(t)}{\partial t} = H(t)f(t), \tag{3}$$

where $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ and time dependent Hamiltonian $H(t)$ has the form

$$H(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) & V(t) \\ V(t) & -\varepsilon(t) \end{pmatrix}.$$

Here

$$\varepsilon(t) = \frac{E_0T + E_1Ty}{1 + y^2}\frac{dy}{dt}, \qquad V(t) = \frac{V_0T}{\sqrt{1 + y^2}}\frac{dy}{dt}$$

with some monotonically increasing differentiable function $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying $y(t) \to \pm\infty$ as $t \to \pm\infty$.

Theorem 2. *Equation* (3) *is reducible to a system of two hypergeometric equations of the form*

$$z(z-1)\frac{d^2g}{dz^2} + (\gamma - (1+\alpha+\beta))\frac{dg}{dz} - \alpha\beta g(z) = 0$$

with appropriate constants α, β, *and* γ.

Since a single Fuchsian equation can always be rewritten as a system of Okubo type, this theorem provides a reduction of equation (3) to a system of Okubo type. For generalized hypergeometric equations, explicit formulae for the coefficients of a resulting system of Okubo type are given in following example.

Example. Consider the Gauss' hypergeometric equation written as

$$\left[(\delta+\alpha_1)(\delta+\alpha_2) - \frac{1}{z}\delta(\delta+\beta_1-1)\right]u = 0,$$

where $\delta = z\frac{d}{dz}$. Introduce a vector function $X(z)$ by $X_1(z) = u(z)$ and $X_2(z) = (\delta+\beta_1-1)X_1(z)$. Then it can be verified that $X(z)$ satisfies a system of Okubo type with $B = \mathrm{diag}(0,1)$, $A = (a_{ij})$, where $a_{11} = 1-\beta_1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -(\alpha_1-\beta_1+1)(\alpha_2-\beta_1+1)$, and $a_{22} = -(1-\beta_1)-(\alpha_1+\alpha_2)$.

Thus Schrödinger equations with potentials as above can be written in Okubo form with explicitly known coefficient matrices, which enables one to compute the monodromy and asymptotics of solutions.

Remark 2. Theorem 2 is applicable to a number of physically interesting equations. In particular, taking $y(t) = \sinh(t/T)$, we obtain $\varepsilon(t) = E_0 \operatorname{sech}(t/T) + E_1 \tanh(t/T)$, $V(t) = V_0$, where E_0, E_1, T, and V_0 are real constants. This Hamiltonian was used for analytic calculation of non-adiabatic transition probabilities from monodromy of differential equations.

References

1. *Suzko A., Giorgadze G.* Exactly solvable time-dependent models in quantum mechanics and their applications // Phys. Part. Nuclei. 2008. V. 39, N 4. P. 578–596.
2. *Giorgadze G., Khimshiashvili G.* On Schrödinger equations of Okubo type // J. Dyn. Control Syst. 2004. V. 10, N 2. P. 171–186.

Задача управления квадрокоптером при наличии помех (The problem of controlling the quadrocopter in the presence of interference)*

В. П. Горьков (V. P. Gor'kov), Н. Л. Григоренко (N. L. Grigorenko), А. Е. Румянцев (A. E. Rumyantsev)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

v-p-gorkov@yandex.ru, grigor@cs.msu.su, rumiantcev@yandex.ru

Рассматривается движение вектора (x, y, z, θ, ϕ) при воздействии вектора управляющих параметров $u = (u_1, u_2, u_3)$ и вектора помехи $v = (v_1, v_2, v_3)$, подчиняющееся уравнениям [1, 2]

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -u_1(t)v_1(t)\sin\theta(t), \quad \ddot{\theta}(t) = u_2(t)v_2(t), \\ m\ddot{y}(t) = u_1(t)v_1(t)\cos\theta(t)\sin\phi(t), \quad \ddot{\phi}(t) = u_3(t)v_3(t), \\ m\ddot{z}(t) = u_1(t)v_1(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t) - mg, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $v_i(t) \in [\sigma_i, 1]$, $0 < \sigma_i \le 1$, $i = 1, 2, 3$, — параметр помехи, измеримая по Лебегу функция, $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ — управляющие параметры, измеримые по Лебегу функции, $0 \le u_1 \le \rho_1$, $|u_j| \le \rho_j$, $j = 2, 3$, где m, g, σ_i, ρ_j — положительные константы. Заданы начальное положение системы (1): $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\phi(0) = \phi_0$,

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0, \tag{2}$$

и конечное положение: $x(T) = 0$, $y(T) = 0$, $z(T) = z_T$, $\theta(T) = 0$,

$$\phi(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad \dot{y}(T) = 0, \quad \dot{z}(T) = 0, \quad \dot{\theta}(T) = 0, \quad \dot{\phi}(T) = 0, \tag{3}$$

где T — конечный нефиксированный момент времени. Соотношения (1)–(3) определяют дифференциальную игру управляющего игрока, распоряжающегося выбором управлений u_i, $i = 0, 1, 2$, при наличии вектора помехи $v = (v_1, v_2, v_3)$ [2, 3]. Целью управляющего игрока является приведение фазового вектора системы в ℓ-окрестность конечного положения (3) при любой допустимой помехе. Для достижения своей цели

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-11-539).

управляющий игрок располагает информацией об уравнениях игры (1), краевых условиях (2), (3) и в каждый момент времени t информацией о функциях $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, $\theta(s)$, $\varphi(s)$, $s \in [0,t]$, и их производных.

Задача терминального управления при наличии помехи состоит в нахождении для краевых условий (2), (3) параметров T, ρ_j, σ_j, $j = 1,2,3$, $\ell > 0$, для которых существует управление $u = (u_1, u_2, u_3)$ в классе позиционных управлений [2], переводящее систему (1) из положения (2) в ℓ-окрестность конечного положения (3) за время T при любой допустимой реализации помехи, и построении такого управления u.

Рассмотрим вспомогательную управляемую систему

$$\begin{cases} m\ddot{w}_1(t) = -\alpha_1(t)\sin w_4(t), \quad \ddot{w}_4(t) = \alpha_2(t), \\ m\ddot{w}_2(t) = \alpha_1(t)\cos w_4(t)\sin w_5(t), \quad \ddot{w}_5(t) = \alpha_3(t), \\ m\ddot{w}_3(t) = \alpha_1(t)\cos w_4(t)\cos w_5(t) - mg, \end{cases} \tag{4}$$

где $w_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1,\ldots,5$, $t \in [0,T]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — управляющие параметры, измеримые по Лебегу функции t, $0 \le \alpha_1 \le \rho_1\sigma_1$, $|\alpha_i| \le \rho_i\sigma_i$, $i = 2,3$, где положительные константы σ_j, ρ_j, $j = 1,2,3$, определены ранее. Положим $w = (w_1, \dot{w}_1, \ldots, w_5, \dot{w}_5)$, $w(0) = (w_1(0), \dot{w}_1(0), \ldots, w_5(0), \dot{w}_5(0)) = (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}(0), z_0, \dot{z}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0)$, $w(T) = (w_1(T), \dot{w}_1(T), \ldots, w_5(T), \dot{w}_5(T)) = (0,0,0,0,z_T,0,0,0,0,0)$. Выберем α_1, α_2, α_3 в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{r_1 + mg}{\cos\sigma_{l_1}(w_4)\cos\sigma_{l_1}(w_5)}, \\ \alpha_2 &= -\sigma_{\beta_1}\Big(\dot{w}_4 + \sigma_{\beta_2}\Big(w_4 + \dot{w}_4 + \\ &\quad + \sigma_{\beta_3}\Big(2w_4 + \dot{w}_4 - \frac{\dot{w}_1}{g} + \sigma_{\beta_4}\Big(3w_4 + \dot{w}_4 - \frac{\dot{w}_1}{g} - \frac{w_1}{g}\Big)\Big)\Big)\Big), \\ \alpha_3 &= -\sigma_{\gamma_1}\Big(\dot{w}_5 + \sigma_{\gamma_2}\Big(w_5 + \dot{w}_5 + \\ &\quad + \sigma_{\gamma_3}\Big(2w_5 + \dot{w}_5 + \frac{\dot{w}_2}{g} + \sigma_{\gamma_4}\Big(3w_5 + \dot{w}_5 + \frac{\dot{w}_2}{g} + \frac{w_2}{g}\Big)\Big)\Big)\Big), \end{aligned}$$

где $r_1 = -a_{z_1}\dot{w}_3 - a_{z_2}(w_3 - z_T)$, a_{z_1}, a_{z_2} — положительные константы,

$$\sigma_\eta(\xi) = \begin{cases} -\eta, & \text{если } \xi < -\eta, \\ \xi, & \text{если } -\eta \le \xi \le \eta, \\ \eta, & \text{если } \xi > \eta. \end{cases}$$

Лемма. *Управления* α_i, $i = 1, 2, 3$, *гарантируют приведение фазового вектора системы* (4) *в окрестность целевой точки* (3) *из начального положения* (2), *если выполнены следующие соотношения*: $\rho_1\sigma_1 > 4(2|z'(0)| + |z'(0) + 2z(0)|)$, $\rho_2\sigma_2 > \beta_1$, $\beta_1/2 > \beta_2$, $\beta_2/2 > \beta_3$, $\beta_3/2 > \beta_4$, $\rho_3\sigma_3 > \gamma_1$, $\gamma_1/2 > \gamma_2$, $\gamma_2/2 > \gamma_3$, $\gamma_3/2 > \gamma_4$, $\ell_1 = 1/2$.

Запишем систему (1) в форме уравнений, разрешенных относительно производных:

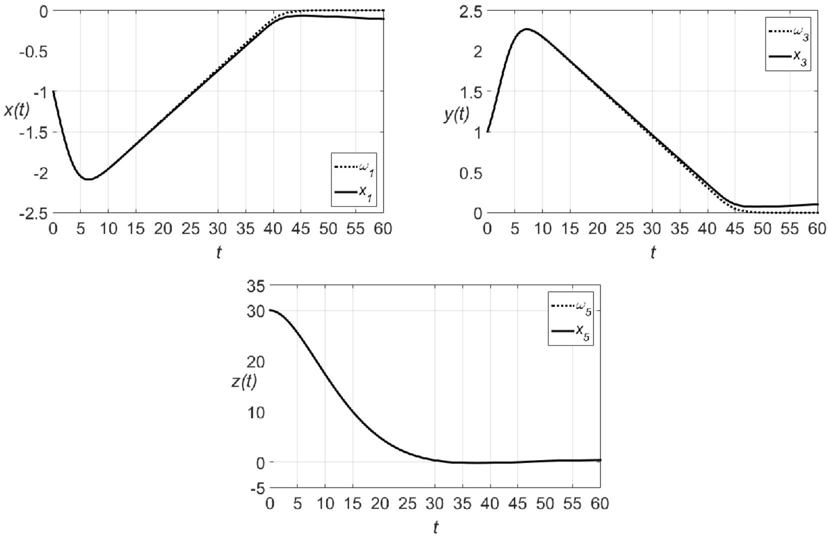
$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \quad m\dot{x_2} = -u_1 v_1 \sin(\theta_1), \\ \dot{y_1} = y_2, \quad m\dot{y_2} = u_1 v_1 \cos(\theta_1)\sin(\phi_1), \\ \dot{z_1} = z_2, \quad m\dot{z_2} = u_1 v_1 \cos(\theta_1)\cos(\phi_1) - mg, \\ \dot{\theta_1} = \theta_2, \quad \dot{\theta_2} = u_2 v_2. \\ \dot{\phi_1} = \phi_2, \quad \dot{\phi_2} = u_3 v_3. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $\eta = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$, $f(t, \eta, u, v)$ — правая часть системы уравнений (5), $u = (u_1, u_2, u_3)$, $V = \{v = (v_1, v_2, v_3)\colon v_i \in [\sigma_i, 1]\}$, $U = \{u = (u_1, u_2, u_3)\colon u_1 \in [0, \rho_1],\ |u_j| \le \rho_j,\ j = 2, 3\}$. Для системы (5) выполнено условие седловой точки в маленькой игре [2, 4]. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N$, где для всех i выполнено условие $\tau_{i+1} - \tau_i \le \delta$ при достаточно малом δ. Для построения позиционного управления в игровой задаче (1) воспользуемся методом управления со вспомогательной системой [2, 4], где в качестве вспомогательной системы будет выступать система (4). Управление u в системе (5) выберем постоянным для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ по схеме экстремального прицеливания [2] из условия

$$\max_{v\in V}\big\langle(\eta(\tau_i) - w(\tau_i)), f\big(\tau_i, \eta(\tau_i), u^{(i)}, v\big)\big\rangle = \\ = \min_{u\in U}\max_{v\in V}\big\langle(\eta(\tau_i) - w(\tau_i)), f(\tau_i, \eta(\tau_i), u, v)\big\rangle, \tag{6}$$

а в управление помехи v подставим реализовавшуюся в этот момент помеху. Согласно лемме 2.8.1 из [4, с. 103] в момент прихода траектории $w(t)$ (4) в ℓ-окрестность конечной позиции фазовый вектор $\eta(t)$ системы (5) окажется в $(\ell+\varepsilon)$-окрестности целевой точки, где ε — малая положительная величина.

Теорема. *При выполнении соотношений на параметры процесса* (1), *приведенных в лемме, существуют позиционное управление* $\bar{u}(t, \eta(t))$ *и момент времени* $T > 0$ *такие, что применение управления* u, *выбранного из условия* (6), *гарантирует приведение траектории*



системы (5) *из положения* (2) *в* ℓ*-окрестность точки* (3) *в момент* T *при любой допустимой помехе.*

На рисунке приведены результаты численного расчета траекторий системы (1) для краевых условий $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = -0.3$, $x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0.2$, $y(T) = 0$, $\dot{y}(T) = 0$, $z(0) = 30$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(T) = 0.5$, $\dot{z}(T) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(T) = 0$, $\dot{\theta}(T) = 0$, $\phi(0) = 0.1$, $\dot{\phi}(0) = 0.1$, $\phi(T) = 0$, $\dot{\phi}(T) = 0$, параметров $\rho_2 = 0.6$, $\rho_3 = 0.6$, $\ell = 0.1$, $\rho_1 = 1.35$, $\sigma_i = 0.82$, $i = 1, 2, 3$, $T = 60$. Параметры помехи соответствуют функции $v_i(t) = \cos(\xi_i(t))$, $i = 1, 2, 3$, $|\xi_i(t)| \le 0.57$.

Список литературы

1. *Castillo P., Lozano R., Dzul A.E.* Modelling and control of mini-flying machines. London: Springer, 2005.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Осипов Ю.С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН. 2006. Т. 61, №4. С. 25–76.
4. *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

Mordukhovich subdifferential and well-posedness

Grigorii Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

g.e.ivanov@mail.ru

In the present paper we continue the research started in [1] and [2]. Let X and P be Banach spaces and $h\colon X \times P \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a lower semicontinuous function. Consider the problem

$$\mathcal{P}_h\colon \quad \text{minimize } h(x,p) \text{ over } x \in X$$

with parameter $p \in P$. The *optimal value* of $\mathcal{P}_h$ at $p \in P$ is $h_{\inf}(p) = \inf_{x\in X} h(x,p)$ and $x \in X$ is called a *solution* of $\mathcal{P}_h$ at $p \in P$ if $h(x,p) = h_{\inf}(p) \in \mathbb{R}$. A sequence $\{x_k\} \subset X$ is called *minimizing* for $\mathcal{P}_h$ at $p \in P$ if $\lim_{k\to\infty} h(x_k,p) = h_{\inf}(p)$.

Let $\mathcal{P}_h$ admit at $p_0 \in P$ a unique solution x_0. Define the function $\Delta_{h,p_0}\colon P \to [0,+\infty)$ as

$$\Delta_{h,p_0}(p) = \inf_{\{x_k\} \text{ is a minimizing sequence for } \mathcal{P}_h \text{ at } p} \ \liminf_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|, \qquad p \in P.$$

The problem $\mathcal{P}_h$ is called *approximately well-posed* (AWP) at $p_0 \in P$ if it admits a unique solution at p_0, $h_{\inf}(p)$ is finite for p in some neighborhood of p_0 and

$$\lim_{p\to p_0} \Delta_{h,p_0}(p) = 0.$$

If, in addition, there exists a constant $L > 0$ such that $\Delta_{h,p_0}(p) \le L\|p-p_0\|$ for all p in some neighborhood of p_0, then the problem $\mathcal{P}_h$ is called *Lipschitz approximately well-posed* (LAWP) at p_0 with constant L.

We elaborate some subdifferential calculus of the optimal value (marginal) function $h_{\inf}(\cdot)$ provided that $\mathcal{P}_h$ is AWP or LAWP. Then we state some sufficient conditions for $\mathcal{P}_h$ to be AWP and LAWP.

Given a function $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and $\varepsilon \ge 0$, the *Fréchet ε-subdifferential* of f at $x_0 \in \operatorname{dom} f := \{x \in X\colon f(x) \in \mathbb{R}\}$ is

$$\partial^{F,\varepsilon} f(x_0) = \big\{x^* \in X^*\colon \forall \eta > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in B_\delta(x_0)$$
$$\langle x^*, x - x_0\rangle \le f(x) - f(x_0) + (\varepsilon + \eta)\|x - x_0\|\big\},$$

where $B_\delta(x_0) = \{x \in X \colon \|x - x_0\| < \delta\}$. If $\varepsilon = 0$, then $\partial^F f := \partial^{F,\varepsilon} f$ is called the *Fréchet subdifferential*.

The *Mordukhovich limiting subdifferential* $\partial^L f(x_0)$ at $x_0 \in \operatorname{dom} f$ is the set of $x^* \in X^*$ such that there exist $\varepsilon_k \downarrow 0$, $x_k \to x_0$ with $f(x_k) \to f(x_0)$, and $x_k^* \to x^*$ weakly star and $x_k^* \in \partial^{F,\varepsilon_k} f(x_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$.

We use $\partial^{F,\varepsilon} h(x,p)$ and $\partial^L h(x,p)$ to denote respectively the Fréchet ε-subdifferential and the limiting subdifferential of h at $(x,p) \in \operatorname{dom} h$ with respect to the norm $\|(x,p)\| = \|x\| + \|p\|$ in $X \times P$. We denote by $\partial_x^{F,\varepsilon} h(x,p)$ the Fréchet ε-subdifferential of the function $h(\cdot,p)$ at the point x. We shall use $\partial_x^L h(x,p)$ to denote the set of $x^* \in X^*$ such that there exist $\varepsilon_k \downarrow 0$, $(x_k,p_k) \to (x_0,p_0)$ with $h(x_k,p_k) \to h(x,p)$, and $x_k^* \to x^*$ weakly star and $x_k^* \in \partial_x^{F,\varepsilon_k} h(x_k,p_k)$ for all $k \in \mathbb{N}$. Similarly we define $\partial_p^{F,\varepsilon} h(x,p)$ and $\partial_p^L h(x,p)$.

A function $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is called *lower regular* at a point $x \in \operatorname{dom} f$ (see [3]) whenever $\partial^L f(x) = \partial^F f(x)$.

Theorem 1. *Let $x_0 \in X$ be a solution of $\mathcal{P}_h$ at $p_0 \in P$. Then for all $\varepsilon \geq 0$*

$$\{0\} \times \partial^{F,\varepsilon} h_{\inf}(p_0) \subset \partial^{F,\varepsilon} h(x_0,p_0) \subset \partial_x^{F,\varepsilon} h(x_0,p_0) \times \partial_p^{F,\varepsilon} h(x_0,p_0).$$

If, in addition, $\mathcal{P}_h$ is AWP at p_0, then

$$\{0\} \times \partial^L h_{\inf}(p_0) \subset \partial^L h(x_0,p_0) \subset \partial_x^L h(x_0,p_0) \times \partial_p^L h(x_0,p_0).$$

Theorem 1 correlates with the results of Thibault [5, Proposition 3.1] and those of Ngai, Luc and Théra [6, Theorem 2.5].

The next theorem provides sufficient conditions for $\mathcal{P}_h$ to be LAWP (and consequently AWP).

Theorem 2. *Let $x_0 \in X$, $p_0 \in P$ and $\lambda > 0$, $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$ be such that for all p in some neighborhood of p_0 and for all $x \in X$*

$$h(x,p) \geq h(x_0,p_0) + \lambda\|x - x_0\| - \mu\|p - p_0\|,$$

$$h(x_0,p) \leq h(x_0,p_0) + \gamma\|p - p_0\|.$$

Then $\mathcal{P}_h$ admits a unique solution x_0 at p_0 and $\mathcal{P}_h$ is LAWP at p_0 with constant $L = (\mu + \gamma)/\lambda$.

The rest of the paper is devoted to the infimal convolution problem.

The Moreau-type *infimal convolution* of two functions $f, g \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ is

$$(f \boxplus g)(p) = \inf_{x \in X} \big(f(x) + g(p - x)\big), \qquad p \in X.$$

The *infimal convolution problem* $\mathcal{P}_{f,g}$ at a point $p \in X$ is the problem $\mathcal{P}_h$ with

$$h(x,p) = f(x) + g(p-x), \qquad x,p \in X.$$

From now on we assume that functions f and g are lower semicontinuous, which guarantees lower semicontinuity of $h(x,p) = f(x) + g(p-x)$.

Theorem 3. *Let $x_0 \in X$ be a solution of $\mathcal{P}_{f,g}$ at $p_0 \in X$. Then for all $\varepsilon \geq 0$*

$$\partial^{F,\varepsilon}(f \boxplus g)(p_0) \subset \big(\partial^{F,\varepsilon} f(x_0)\big) \cap \big(\partial^{F,\varepsilon} g(p_0 - x_0)\big).$$

If, in addition, $\mathcal{P}_{f,g}$ is AWP at p_0, then

$$\partial^{L}(f \boxplus g)(p_0) \subset \big(\partial^{L} f(x_0)\big) \cap \big(\partial^{L} g(p_0 - x_0)\big).$$

If, in addition, f is continuously differentiable in some neighborhood of x_0 or g is continuously differentiable in some neighborhood of $p_0 - x_0$, then the latter two inclusions are equalities.

Theorem 4. *Suppose that $x_0 \in X$ is the solution of $\mathcal{P}_{f,g}$ at $p_0 \in X$ and the problem $\mathcal{P}_{f,g}$ is LAWP at p_0 with constant L. Then for all $\varepsilon \geq 0$*

$$\big(\partial^{F,\varepsilon} f(x_0)\big) \cap \big(\partial^{F,\varepsilon} g(p_0 - x_0)\big) \subset \partial^{F,(2L+1)\varepsilon}(f \boxplus g)(p_0).$$

If, in addition, f and g are lower regular at points x_0 and $p_0 - x_0$ respectively, then $f \boxplus g$ is lower regular at p_0.

Theorem 5. *Suppose that $x_0, z_0 \in X$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta > 0$, $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ and $g \colon X \to \mathbb{R}$ are such that for all $x, z \in X$*

$$f(x) - f(x_0) \geq \alpha \|x - x_0\|, \tag{1}$$

$$g(z) - g(z_0) \geq \beta \|z - z_0\|, \tag{2}$$

$$g(z) - g(z_0) \leq \gamma \|z - z_0\|. \tag{3}$$

Then $\mathcal{P}_{f,g}$ admits a unique solution x_0 at $p_0 = x_0 + z_0$ and $\mathcal{P}_{f,g}$ is LAWP at p_0 with constant $L = (|\beta| + \gamma)/(\alpha + \beta)$.

If, in addition, f and g are lower regular at points x_0 and z_0 respectively, then $f \boxplus g$ is lower regular at p_0.

Theorems 3–5 improve Theorem 5.5 in [4], Theorems 3.1, 3.2 in [1] and Theorems 3.1, 4.2 in [2].

References

1. *Ivanov G.E., Thibault L.* Infimal convolution and optimal time control problem. I: Fréchet and proximal subdifferentials // Set-Valued Var. Anal. 2017. DOI:10.1007/s11228-016-0398-z.
2. *Ivanov G.E., Thibault L.* Infimal convolution and optimal time control problem. II: Limiting subdifferential // Set-Valued Var. Anal. 2017. To appear.
3. *Mordukhovich B.S.* Approximation Methods in Problems of Optimization and Control. New York: J. Wiley & Sons, 2005.
4. *Nam N.M., Cuong D.V.* Generalized differentiation and characterizations for differentiability of infimal convolutions // Set-Valued Var. Anal. 2015. V. 23. P. 333–353.
5. *Thibault L.* On subdifferentials of optimal value functions // SIAM J. Control Optim. 1991. V. 29, N 5. P. 1019–1036.
6. *Van Ngai H., The Luc D., Théra M.* Extensions of Fréchet ε-subdifferential calculus and applications // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 268, N 1. P. 266–290.

Построение множества разрешимости в дифференциальных играх с простыми движениями (Construction of the solvability set for differential games with simple motion)*

Л. В. Камнева (L. V. Kamneva), В. С. Пацко (V. S. Patsko)

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

kamneva@imm.uran.ru, patsko@imm.uran.ru

Пусть движение управляемой системы на плоскости описывается динамикой простых движений [1]:

$$\dot{x} = u + v, \qquad u \in P, \quad v \in Q, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \vartheta > 0.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-07909) и программы Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления”.

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, каждое из множеств P и Q — выпуклый замкнутый многоугольник или отрезок. Для заданного многоугольника $M \subset \mathbb{R}^2$ первый игрок стремится гарантировать включение $x(\vartheta) \in M$ при начальном условии $x(0) = x_0$, второй игрок — выполнение условия $x(\vartheta) \notin M$.

Формирование позиционной стратегии каждого из игроков может строиться на основе подмножества пространства игры $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$, в котором этот игрок способен удерживать траекторию системы при любых действиях противника. Такие множества называются *u- и v-стабильными мостами* [2] для первого и второго игроков соответственно. Стабильные мосты близки по смыслу к множествам уровня функции цены и множествам выживаемости.

Символом W_0 обозначим максимальный (по включению) u-стабильный мост, $W_0(0)$ — его сечение для $t = 0$. Множество $W_0(0)$ будем называть *множеством разрешимости* для первого игрока. Ставится задача разработки алгоритма, сопоставляющего множеству $M = W_0(\vartheta)$ множество разрешимости $W_0(0)$ и не требующего какого-либо дополнительного разбиения промежутка $[0, \vartheta]$.

Для выпуклого терминального множества M известна [3] явная формула, описывающая сечения $W_0(t)$ максимального u-стабильного моста:

$$W_0(t) = \big(M + (-(\vartheta - t)P)\big) \overset{*}{-} (\vartheta - t)Q =: T_{\vartheta - t}(M), \qquad t \in [0, \vartheta]. \quad (1)$$

Здесь используются операции алгебраической суммы и геометрической разности (разности Минковского) [4].

Авторы обобщают один из возможных алгоритмов построения множества $W_0(0)$ по формуле (1) для выпуклого множества M на случай невыпуклого терминального множества M. Основные этапы алгоритма состоят в следующем.

А. Пусть M — невыпуклый n-угольник, ребра которого перенумерованы от 1 до n в порядке положительного обхода границы множества M, т.е. множество остается слева при обходе границы.

Множеству M поставим в соответствие упорядоченный набор полуплоскостей $\widetilde{\mathcal{M}}_1 = \{\widetilde{\Pi}_i\}_{i=1}^n$. Полуплоскость $\widetilde{\Pi}_i$ определим как полуплоскость, содержащую ребро многоугольника M с номером i, вектор внешней нормали к которой является внешней нормалью к множеству M в точках i-го ребра. Будем рассматривать набор $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ полуплоскостей как циклический. Заметим, что любая пара последовательных полуплоскостей в наборе $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ соответствует либо вершине выпуклости, либо вершине вогнутости границы многоугольника M.

Б. Правую часть равенства (1) будем рассматривать как определение оператора T_τ, действующего на множество M при $\tau = \vartheta - t$.

Пусть Π_η — полуплоскость в $\mathbb{R}^2$ с единичным вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$. Тогда непосредственно из определения оператора T_τ имеем

$$T_\tau(\Pi_\eta) = \Pi_\eta - \tau\big(u_0(\eta) + v_0(\eta)\big), \qquad \tau > 0,$$

где

$$u_0(\eta) \in \operatorname{Arg}\min_{u\in P}\langle u, \eta\rangle, \qquad v_0(\eta) \in \operatorname{Arg}\max_{v\in Q}\langle v, \eta\rangle.$$

Для произвольной полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ множество

$$\big\{(t,x)\colon\ t \in [0,\vartheta],\ x \in \partial T_{\vartheta-t}(\Pi)\big\}$$

является плоским в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{t, x\}$. Здесь символ ∂ обозначает границу множества. Следовательно, любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ соответствует единственное полупространство $\mathcal{T}_\vartheta(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, t-сечение которого для любого $t \in [0,\vartheta]$ совпадает с множеством $T_{\vartheta-t}(\Pi)$.

В. Выпуклый многоугольник M представим в виде

$$M = \bigcap\big\{\Pi_\eta[M]\colon\ \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P)\big\}, \tag{2}$$

где $\Pi_\eta[M]$ — опорная к множеству M полуплоскость с вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$; $\mathcal{N}(M)$ и $\mathcal{N}(-P)$ — множества единичных внешних нормалей к ребрам многоугольников M и $-P$ соответственно. Если P — отрезок, то $\mathcal{N}(-P) = \mathcal{N}(P) = \{\nu, -\nu\}$, где вектор ν ортогонален P.

Заметим, что полуплоскости $\Pi_\eta[M]$, соответствующие нормалям $\eta \in \mathcal{N}(-P)$, являются *несущественными* для пересечения (2), т.е. могут быть удалены из правой части (2) без изменения результата пересечения. Однако такие полупространства участвуют, вообще говоря, в построении максимального u-стабильного моста W_0. Поэтому мы включаем их в описание многоугольника M.

Для выпуклого многоугольника M и $t \in [0,\vartheta]$ справедливо равенство (см., например, [5])

$$W_0(t) = T_{\vartheta-t}(M) = \bigcap\big\{T_{\vartheta-t}(\Pi_\eta[M])\colon\ \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P)\big\}. \tag{3}$$

В случае, если выпуклым является множество $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$, изменяя роли игроков, приходим к ситуации выпуклого терминального множества и формуле для $W_0(t)$, аналогичной (3).

Г. В общем случае упорядоченному списку $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ полуплоскостей соответствует упорядоченный список полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = \{\mathcal{T}_\vartheta(\widetilde{\Pi}_i)\}_{i=1}^n$ в трехмерном пространстве времени и фазовых координат. Будем говорить о выпуклости или вогнутости произвольной пары последовательных полупространств в наборе $\widetilde{\mathcal{L}}_1$, если соответствующая пара полуплоскостей из множества $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ относится к вершине выпуклости или вогнутости многоугольника M.

Сформируем из набора $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ расширенный набор $\mathcal{L}_1$ полупространств, вставляя между каждой выпуклой (вогнутой) парой последовательных полупространств $L_a, L_b \in \widetilde{\mathcal{L}}_1$ выпуклый (вогнутый) набор $I_\vartheta(L_a, L_b)$ *дополнительных полупространств*, построенных на основе внешних нормалей к множеству $-P$ (множеству $-Q$). Дополнительные полупространства соответствуют в обобщенном смысле существенным полуплоскостям $\Pi_\eta[M]$ из правой части (2) с нормалями $\eta \in \mathcal{N}(-P)$.

Д. Для каждого полупространства $L \in \mathcal{L}_1$ вычисляется значение обратного времени $\mu(L; \mathcal{L}_1, \vartheta) \in (0, +\infty]$ (вес), через которое полупространство L становится несущественным относительно его соседей в списке $\mathcal{L}_1$. Удалив из списка $\mathcal{L}_1$ полупространства с минимальным значением веса и пересчитав вес тех полупространств, у которых появились новые соседи, получаем новый список $\mathcal{L}_2$. Продолжая далее конечную рекурсивную обработку списка полупространств $\mathcal{L}_2$, в итоге находим список полупространств, сечения которых в момент $t = 0$ являются существенными для формирования множества $W_0(0)$.

Просчитано несколько иллюстративных примеров.

Список литературы

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. №2. С. 54–63.
4. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры. II // ДАН СССР. 1967. Т. 175, №4. С. 764–766.
5. *Kamneva L.V., Patsko V.S.* Maximal stable bridge in game with simple motions in the plane // Advances in dynamic and evolutionary games. Theory, applications, and numerical methods. Basel: Birkhäuser/Springer, 2016. P. 139–163. (Ann. ISDG; V. 14).

Задача оптимального управления для математической модели псориаза (An optimal control problem for a mathematical model of psoriasis)

Е. Н. Хайлов (E. N. Khailov), Э. В. Григорьева (E. V. Grigorieva)

Московский государственный университет, Москва, Россия
Техасский женский университет, Дентон, США

khailov@cs.msu.su, egrigorieva@twu.edu

Рассмотрим на заданном отрезке времени $[0,T]$ следующую нелинейную управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{l}(t) = \sigma - \delta l(t)m(t) - \gamma_1 u(t)l(t)k(t) - \mu l(t), \\ \dot{k}(t) = (\beta+\delta)l(t)m(t) + \gamma_2 u(t)l(t)k(t) - \lambda k(t), \\ \dot{m}(t) = \rho - \beta l(t)m(t) - \nu m(t), \\ l(0) = l_0,\ k(0) = k_0,\ m(0) = m_0;\ l_0, m_0, k_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

которая описывает взаимодействие различных видов клеток человеческого организма при медикаментозной терапии псориаза [1]. Здесь $l(t)$, $k(t)$, $m(t)$ — фазовые переменные системы (1); l_0, k_0, m_0 — их начальные условия; σ, ρ, δ, μ, β, λ, ν, γ_1, γ_2 — заданные положительные константы; $u(t)$ — управление, подчиняющееся ограничениям

$$0 < u_{\min} \le u(t) \le 1. \tag{2}$$

Для системы (1) множество допустимых управлений $D(T)$ образуют всевозможные измеримые по Лебегу функции $u(t)$, которые при почти всех $t \in [0,T]$ удовлетворяют неравенствам (2).

Введем область

$$\Omega = \big\{(l,m,k)\colon\ l > 0,\ m > 0,\ k > 0,\ l+m+k < M\big\},$$

где M — положительная константа, зависящая от параметров σ, ρ, γ_1, γ_2, T системы (1) и ее начальных условий l_0, k_0, m_0. Тогда ограниченность, положительность и продолжимость решений системы (1) устанавливаются следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть справедливо включение* $(l_0, k_0, m_0) \in \Omega$. *Тогда для любого допустимого управления* $u(t)$ *отвечающие ему решения* $l(t)$, $k(t)$, $m(t)$ *системы* (1) *определены на всем отрезке* $[0, T]$ *и удовлетворяют включению* $(l(t), k(t), m(t)) \in \Omega$ *при всех* $t \in (0, T]$.

Опираясь на результаты из [1], мы считаем, что в дальнейших рассуждениях выполнены неравенства $\gamma_1 \geq \gamma_2$, $\lambda > \mu$, $\lambda > \nu$.

Для системы (1) на множестве допустимых управлений $D(T)$ рассмотрим задачу минимизации следующего функционала:

$$J(u) = k(T) + \xi \int_0^T (1 - u(t))k(t)\, dt, \tag{3}$$

где ξ — положительный весовой коэффициент. По нашему мнению, функционал (3), ранее использованный в [2], более подходит рассматриваемому заболеванию, чем функционал, применявшийся в [1].

Существование в задаче (1), (3) оптимального управления $u_*(t)$ и отвечающих ему оптимальных решений $l_*(t)$, $m_*(t)$, $k_*(t)$ вытекает из леммы 1 и [3, гл. 4, теорема 4]. Для их анализа мы применим принцип максимума Понтрягина [4]. Тогда для управления $u_*(t)$ и отвечающих ему решений $l_*(t)$, $m_*(t)$, $k_*(t)$ существует такая вектор-функция $\psi_*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t))$, что

(i) $\psi_*(t)$ является нетривиальным решением сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1^*(t) = -u_*(t)k_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)) + \\ \qquad\qquad + m_*(t)(\delta\psi_1^*(t) - (\beta + \delta)\psi_2^*(t) + \beta\psi_3^*(t)) + \mu\psi_1^*(t), \\ \dot{\psi}_2^*(t) = -u_*(t)l_*(t)(\gamma_2\psi_2^*(t) - \gamma_1\psi_1^*(t)) + \lambda\psi_2^*(t) + \xi(1 - u_*(t)), \\ \dot{\psi}_3^*(t) = l_*(t)(\delta\psi_1^*(t) - (\beta + \delta)\psi_2^*(t) + \beta\psi_3^*(t)) + \nu\psi_3^*(t), \\ \psi_1^*(T) = 0, \quad \psi_2^*(T) = -1, \quad \psi_3^*(T) = 0; \end{cases} \tag{4}$$

(ii) управление $u_*(t)$ максимизирует гамильтониан

$$H(l_*(t), k_*(t), m_*(t), u, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \psi_3^*(t))$$

$$\big(H(l, m, k, u, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = (\sigma - \delta lm - \gamma_1 ulk - \mu l)\psi_1$$
$$+ ((\beta + \delta)lm + \gamma_2 ulk - \lambda k)\psi_2 + (\rho - \beta lm - \nu m)\psi_3 - \xi(1 - u)k\big)$$

по переменной $u \in [u_{\min}, 1]$ для почти всех $t \in [0, T]$, а значит, оно удовлетворяет следующему соотношению:

$$u_*(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad L(t) > 0, \\ \forall u \in [u_{\min}, 1], & \text{если} \quad L(t) = 0, \\ u_{\min}, & \text{если} \quad L(t) < 0, \end{cases} \tag{5}$$

где функция $L(t) = \gamma_2 \psi_2^*(t) - \gamma_1 \psi_1^*(t) + \xi l_*^{-1}(t)$ является функцией переключений, которая описывает с помощью формулы (5) поведение управления $u_*(t)$.

Теперь введем положительную константу $\alpha = \gamma_2^{-1}(\beta\gamma_1 + \delta(\gamma_1 - \gamma_2))$ и следующие функции:

$$\begin{aligned} a(t) &= (\alpha+\delta)m_*(t) + u_*(t)\big(\gamma_1 k_*(t) - \gamma_2 l_*(t)\big) + \lambda, \\ b(t) &= u_*(t)k_*(t)\big(\alpha m_*(t) + (\lambda-\mu)\big) + \\ &\qquad + (\alpha+\delta)\gamma_1^{-1} m_*(t)\big(\alpha m_*(t) - \beta l_*(t) + (\lambda-\mu)\big), \\ c(t) &= m_*^{-1}(t)\big(\alpha m_*^2(t) + (\lambda-\mu)m_*(t) - \rho\big), \\ d(t) &= m_*^{-1}(t)\big(\alpha(\lambda-\nu)m_*^2(t) + \lambda(\lambda-\mu)m_*(t) - \rho(\lambda-\mu)\big). \end{aligned}$$

Также, определим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} G(t) &= -m_*(t)(\beta\psi_3^*(t) - \alpha\psi_1^*(t)) + (\lambda-\mu)\psi_1^*(t) + \\ &\qquad + \xi\gamma_1^{-1} l_*^{-2}(t)\big(\gamma_2 l_*^2(t) - \big(\alpha m_*(t) + (\lambda-\mu)\big)l_*(t) - \sigma\big). \end{aligned}$$

Тогда, используя уравнения систем (1) и (4), мы получим систему дифференциальных уравнений для функций $L(t)$ и $G(t)$:

$$\begin{cases} \dot L(t) = a(t)L(t) + \gamma_1 G(t), \\ \dot G(t) = -b(t)L(t) - c(t)G(t) + d(t)\psi_1^*(t) + \\ \qquad + \xi\Big\{-2\sigma u_*(t) l_*^{-2}(t)k_*(t) - \gamma_1^{-1} l_*^{-3}(t)m_*(t) \times \\ \qquad \times \Big[l_*(t)\big((\beta\delta - \alpha\gamma_2)l_*^2(t) + \alpha(\lambda-\nu)l_*(t) + 2\sigma\delta\big)m_*^2(t) - \\ \qquad - \big(\gamma_2(\lambda-\mu)l_*^3(t) - \lambda(\lambda-\mu)l_*^2(t) - 2\sigma\mu l_*(t) + 2\sigma^2\big)m_*(t) + \\ \qquad + \rho l_*(t)\big(\gamma_2 l_*^2(t) - (\lambda-\mu)l_*(t) - \sigma\big)\Big]\Big\}. \end{cases} \tag{6}$$

Изучим возможность обращения функции переключений $L(t)$ в нуль на интервале, что соответствует возможному существованию в задаче (1), (3) особого режима [5]. Предполагая, что $L(t) = 0$ на интервале Δ, из первого уравнения системы (6) находим, что $G(t) = 0$ при всех $t \in \Delta$. Тогда анализ второго уравнения этой системы показывает, что на интервале Δ необходимое условие оптимальности особого режима (условие Келли) не выполнено. Это означает, что оптимальное управление $u_*(t)$ является релейной функцией. Если рассмотреть задачу максимизации функционала (3), то, повторяя все рассуждения, мы видим, что система (6) изменится, но незначительно. Именно, во втором ее уравнении перед выражением в фигурных скобках будет стоять знак минус. Поэтому в случае возможного существования в рассматриваемой задаче особого режима соответствующее необходимое условие оптимальности будет выполнено в усиленной форме. Тогда, следуя рассуждениям из [6], можно говорить о небольшом числе переключений оптимального управления $u_*(t)$. Этот факт подтверждается проведенными численными расчетами, которые будут представлены в нашем докладе.

Список литературы

1. *Roy P.K., Datta A.* Impact of cytokine release in psoriasis: a control based mathematical approach// J. Nonlinear Evol. Equat. Appl. 2013. V. 2013, N 3. P. 23–42.
2. *Castilho C.* Optimal control of an epidemic through educational compaigns // Electron. J. Diff. Equat. 2006. V. 2006, N 125. P. 1–11.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
5. *Зеликин М.И., Борисов В.Ф.* Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики // Совр. математика и ее прил. 2003. Т. 11. С. 3–161.
6. *Schättler H., Ledzewicz U.* Optimal control for mathematical models of cancer therapies: An application of geometric methods. New York: Springer, 2015.

TOPOLOGICAL ASPECTS OF STABLE QUADRATIC MAPPINGS

Giorgi Khimshiashvili

Ilia State University, Tbilisi, Georgia

giorgi.khimshiashvili@iliauni.edu.ge

Various topological problems concerned with quadratic mappings between real vector spaces play an important role in non-linear analysis, optimization theory and theory of integrable systems, to name only a few topics (see, e.g., [1, 3]). In particular, several fruitful ideas and results in this direction have been presented in a well-known paper of A. Agrachev and R.V. Gamkrelidze [3], which led to a number of further important developments partially summarized in the recent papers [1, 4].

In this talk, we present a number of recent results in the spirit of the approach suggested in [3] that have been obtained using our results on topological invariants of real polynomial mappings [8, 9]. The leading idea was to elaborate upon certain known results in the natural and practically important context of stable quadratic mappings. For our purposes, it is convenient to use the notion of stability in the sense of singularity theory, i.e., with respect to the right–left (RL) equivalence in the C^∞-category [5]. Along these lines, we discuss topological invariants of two classes of quadratic mappings: stable quadratic endomorphisms and proper homogeneous quadratic mappings with fibres of positive dimension. In the latter case we assume that the restrictions of such mappings onto the unit sphere S^{n-1} in the source space $\mathbb{R}^n$ are stable in the above sense. Our approach is based on several classical tools of topology and singularity theory [1, 5] combined with the results of recent papers [4, 9, 11]. The first main result is concerned with stable quadratic endomorphisms. Recall that in this case the mapping degree $\operatorname{Deg} F$ is defined and its absolute value (absolute degree) is an invariant of RL-equivalence.

Theorem 1. *The topological degree of a stable quadratic endomorphism F of $\mathbb{R}^n$ is equal to the topological degree of its homogeneous part. Moreover, $\operatorname{Deg} F$ vanishes for odd n and does not exceed $\frac{(3k-1)!}{k!(2k-1)!}$ for even dimension $n = 2k$.*

Let now $F = (f_1, \dots f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ be a homogeneous quadratic mapping which is non-degenerate, i.e., has an isolated zero at the origin. In this case, certain topological information can be obtained by considering the origin O_n as an isolated singular point of the mapping F. It is well known and easy to verify that the components of such a mapping form a system of parameters in the local ring of the origin. In other words, in this case the origin is an isolated singular point of complete intersection [5]. Thus its Milnor number at the origin is defined and one can calculate it using the results of [10].

Theorem 2. *The Milnor number of the non-degenerate homogeneous quadratic mapping* $F = (f_1, \dots f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n > m$, *is equal to* $\sum_{p=0}^{m-1} (-1)^p 2^p \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

This result has some immediate topological corollaries.

Corollary 1. *The mapping F is not stable with respect to RL-equivalence.*

Indeed, the value of the Milnor number given above is always greater than $2n$, which according to well-known results of J. Mather is the maximal possible value of the Milnor number of an RL-stable singularity for these dimensions. Having in mind applications to the numerical range mapping of square matrix discussed in the sequel, we present a special case of this result concerned with mappings into the plane.

Corollary 2. *The Milnor number of a homogeneous quadratic mapping of $\mathbb{R}^n$ into the plane is equal to $2n - 1$.*

Since a homogeneous quadratic mapping is not stable, it is natural to wonder if its restriction to the unit sphere in the source space can be stable in some cases. Simple examples show that this is not always so, but it turns out that generically this is the case.

Proposition 1. *For a generic proper homogeneous quadratic mapping, its restriction F_s to the unit sphere is RL-stable.*

In this case, using results of [4, 11, 9] one can obtain an estimate for the Euler characteristics of the projectivized fibres of F defined as the fibres of F_s.

Theorem 3. *The absolute value of the Euler characteristic of projectivized fibres of a stable quadratic mapping F does not exceed* $\frac{(4n+3)!}{(3n+3)!n!}$.

As a concrete application of our approach, we present some results about numerical range mappings of complex matrices [6]. Let A be a complex $n \times n$ matrix and $W_A\colon S^{2n-1} \to \mathbb{C}$ be its numerical range mapping. This mapping is a classical object of study in linear algebra. In particular, the famous Hausdorff–Toeplitz theorem states that its image is convex [6]. It is also known that its discriminant consists of $n-1$ closed curves inside the convex domain $\operatorname{im} W$ [7]. However, not much seems to be known about the topology of its fibres. We clarify the latter issue for $n=2$ and $n=3$. Namely, the results presented above combined with results from [4, 11] yield the following conclusions.

Proposition 2. *For $n=2$, any regular fibre of W_A is diffeomorphic to the circle and any regular fibre of V consists of a single point. Any singular reduced fibre of W_A is homeomorphic to the wedge of two circles.*

For $n=3$, we can describe the topology of regular fibres.

Proposition 3. *For $n=3$, the regular fibres of W_A are diffeomorphic to the three-torus or the unit tangent bundle of the 2-sphere.*

For general n, we only have partial results.

Proposition 4. *For any $n \geq 2$, there exist matrices whose regular fibres are diffeomorphic to the torus T^{n-1} or the unit tangent bundle of the $(n-2)$-dimensional sphere.*

Such examples can be found in [7]. At the same time we have not found an example of matrix A for which the fibres of W_A have diffeomorphic type different from the ones given above. This gives certain evidence to the conjecture a short discussion of which will be given in conclusion.

Conjecture. *For an $n \times n$ complex matrix A, all regular fibres of the numerical range mapping W_A are diffeomorphic either to T^{n-2} or to the unit tangent bundle of the $(n-3)$-dimensional sphere.*

References

1. *Agrachev A.* Topology of quadratic maps and Hessians of smooth maps // J. Sov. Math. 1990. V. 49, N 3. P. 990–1013.
2. *Agrachev A.* Quadratic cohomology // Arnold Math. J. 2015. V. 1, N 1. P. 37–58.
3. *Agrachev A., Gamkrelidze R.* Quadratic mappings and smooth vector-functions. Euler characteristics of level sets // J. Sov. Math. 1991. V. 55, N 1.
4. *Agrachev A., Lerario A.* Systems of quadratic inequalities // Proc. Lond. Math. Soc. 2012. V. 105, N 4. P. 622–660.
5. *Arnol'd V., Varchenko A., Gusein-Zade S.* Singularities of Differentiable Mappings. Moscow, 2005 (in Russian).
6. *Gustafson K.E., Rao D.K.M.* Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices. New York: Springer, 1997.

7. *Jonckheere E., Ahmad F., Gutkin E.,* Differential topology of numerical range // Lin. Algebra Appl. 1998. V. 279, N 1–3. P. 227–254.
8. *Khimshiashvili G.* On the local degree of smooth mapping // Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe. 1977. V. 85, N 2. P. 309–312.
9. *Khimshiashvili G.* Algebraic formulae for topological invariants // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2001. V. 125. P. 1–121.
10. *Le Dung Trang.* Calculation of the Milnor number of isolated singularity of complete intersection // Funct. Anal. Appl. 1974. V. 8, N1. P. 127–131.
11. *Lopez de Medrano S.* Topology of the intersections of quadrics in $\mathbb{R}^n$ // Lect. Notes Math. 1989. V. 1370. P. 280–292.

Обобщенная задача Чаплыгина. Конструктивное описание оптимального решения (Generalized Chaplygin's problem. Constructive description of optimal solution)

Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev), С. Н. Аввакумов (S. N. Avvakumov)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, asn@cs.msu.su

Изучается модификация задачи Чаплыгина о наибольшей площади облета [4, 5]. В рассматриваемой задаче двумерный управляемый объект с простым движением и областью управления в форме гладкого плоского выпуклого компакта с внутренней точкой 0 должен описать замкнутую кривую, охватывающую плоскую область наибольшей площади. В начальный и конечный моменты времени направления скорости движения совпадают и заданы. Для решения задачи привлекается принцип максимума Понтрягина. Описана процедура построения оптимального управления в программной форме. Указан оптимальный закон управления в форме синтеза (обратной связи). В теоретическом анализе используется аппарат опорных и дистанционных функций. Оптимальная траектория может быть получена из полярной кривой области управления с помощью простейших линейных преобразований: умножение на положительное число, поворот на прямой угол и параллельный перенос. Выполнена серия численных экспериментов. В классической задаче Чаплыгина [4] областью управления U является круг, для которого $0 \in \operatorname{int} U$.

Рассматривается двумерная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in U; \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ x(0) = x(T) = a \in \mathbb{R}^2, \quad \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0); \\ L[u] = \displaystyle\int_0^T (A^*, u)\, dt \to \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ — фазовая переменная, $\mathbb{R}^2$ — фазовая плоскость;

$u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ — управление, $u \in U$ — геометрическое ограничение на управление;

$U \in \Gamma(\mathbb{R}^2)$ — область управления — плоский гладкий выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{int} U$;

$a \in \mathbb{R}^2$ — заданное начальное состояние управляемого объекта, совпадающее с конечным состоянием $x(T)$;

$T > 0$ — подлежащая определению длительность процесса управления (однократный обход замкнутой траектории $x = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$);

$q(\alpha) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right)$ — единичный вектор;

$\alpha_0 \in [0, 2\pi)$ — заданный угол, характеризующий направление начальной (и, как можно показать, конечной) скорости объекта;

$A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ — матрица, $A^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A \cdot A^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;

$L[u]$ — максимизируемый функционал — удвоенная площадь области, ограниченной замкнутой кривой $x = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$; с ростом времени t движение точки $x(t)$ происходит в положительном направлении (против часовой стрелки).

Опорная функция $c(\psi) = \max_{u \in U} (u, \psi)$ множества U и его дистанционная функция играют важную техническую роль при решении задачи (1). Предполагается, что $c(\psi) > 0$ $\forall \psi \neq 0$, градиент $c'(\psi)$ и гессиан $c''(\psi)$ определены и непрерывны при всех $\psi \neq 0$, $\operatorname{rang} c''(\psi) = 1$ при $\psi \neq 0$.

Для решения задачи (1) привлекается принцип максимума Понтрягина [1]. При изучении краевой задачи принципа максимума [1–3]

$$\begin{cases} \dot{x} = c'(A^* x + \psi), \quad x|_{t=0} = x|_{t=T} = a, \quad \dot{x}(0)/\|\dot{x}(0)\| = q(\alpha_0), \\ \dot{\psi} = A^* c'(A^* x + \psi) \end{cases}$$

используется теорема о градиенте опорной функции, векторный первый интеграл $A^*x - \psi = \text{const}$.

Важная роль отводится анализу двумерной гамильтоновой системы [3]

$$\dot{p} = A^*c'(p), \quad p|_{t=0} = p^0; \qquad p, p^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Решение этой системы допускает определенное описание в аналитической форме [11]. При этом используются обобщенные полярные координаты, порождаемые парой множеств U и $\widetilde{U} = \{q \in \mathbb{R}^2 \colon c(q) \leqslant 1\}$. Подробное исследование гамильтоновой системы (2) с гамильтонианом $c(p)$ содержится в статье [11]. В статьях [12, 13] подробно излагается решение задачи (1) и изучен ряд конкретных примеров выбора множества U, приведены результаты численных экспериментов. В случае негладкой области управления U (например, U — прямоугольник, треугольник) опорная функция этого множества может быть сглажена с участием малого параметра сглаживания [6, 2, 14]. Техника применения опорных функций при численном решении и построении точных решений некоторых задач оптимального управления размерности $n \geqslant 2$ описана в [7–10]. Отметим, что в [14] содержится описание опыта работы с опорными функциями, рассмотрены процедуры сглаживания выпуклых компактов, построения геометрической разности, рассмотрено большое количество примеров, решение которых сопровождается геометрическими иллюстрациями (18 примеров, 67 рисунков); указанные вопросы представляют методический интерес и тесно связаны с тематикой этого доклада.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.* Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. М: МАКС Пресс, 2007. 270 с.
3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1961.
4. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостехиздат, 1938.
5. *Kiselev Yu.N.* Generalized Chaplygin's problem // Proc. Tenth Crimean Autumn Math. Sch. 2000. V. 10. P. 160–163.
6. *Аввакумов С.Н.* Гладкая аппроксимация выпуклых компактов // Тр. ИММ УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 184–200.

7. *Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н.* Некоторые алгоритмы оптимального управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, №2. С. 3–17.
8. *Киселев Ю.Н.* Системы управления с интегральным инвариантом // Диф. уравнения. 1996. Т. 32, №4. С. 477–483.
9. *Киселев Ю.Н.* Построение точных решений для нелинейной задачи быстродействия специального вида // Фунд. прикл. математика. 1997. Т. 3, №3. С. 847–868.
10. *Киселев Ю.Н.* Методы решения гладкой линейной задачи быстродействия // Труды МИАН. 1988. Т. 185. С. 106–115.
11. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н.* Построение в аналитической форме решения задачи Коши для одной двумерной гамильтоновой системы // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, №4. С. 131–141.
12. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н.* Обобщенная задача Чаплыгина: теоретический анализ и численные эксперименты // Прикладная математика и информатика: Тр. ф-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2014. №46. С. 5–45.
13. *Kiselev Y.N., Avvakumov S.N.* Generalized Chaplygin Problem: Theoretical Analysis and Numerical Experiments // Comput. Math. Model. 2015. V. 26, N 3. P. 299–335.
14. *Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н.* Опорные функции некоторых специальных множеств, конструктивные процедуры сглаживания, геометрическая разность // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. ф-та ВМК МГУ / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. М.: МАКС Пресс, 2005. Т. 1. С. 24–110.

Построение особого луча в многомерной экономической модели с различными коэффициентами амортизации (The singular ray construction in a multidimensional economic model with different amortization coefficients)*

Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev),
М. В. Орлов (M. V. Orlov), С. М. Орлов (S. M. Orlov)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su, sergey.orlov@cs.msu.su

Рассмотрим нелинейную n-мерную задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{u_i}{\varepsilon_i} F(x) - \mu_i x_i, \qquad x_i(0) = x_{i0} > 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n \geqslant 2, \\ J \equiv \displaystyle\int_0^T e^{-\nu t} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} u_i\right) F(x)\, dt \to \max_{u(\cdot)}, \\ x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}, \\ u = (u_1, \ldots, u_n)^\top \in U = \left\{u \in \mathbb{R}^n \colon\ u_i \geqslant 0,\ i = \overline{1, n},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i \leqslant 1\right\}, \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{1}$$

где x — вектор положительных фазовых переменных, u — вектор переменных управления, подчиненных геометрическому ограничению $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^n$, где область управления U является n-мерным симплексом, $x^0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})^\top \in \mathbb{R}^n_+$ — начальное состояние управляемого объекта, μ_i, $i = 1, \ldots, n$, — положительные коэффициенты амортизации, $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования, $T > 0$ — заданная длительность процесса управления. В дифференциальных уравнениях управляемого движения задачи (1) участвует функция $F(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$,

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-00177-мол_а).

$x \in \mathbb{R}^n_+$, — производственная функция Кобба–Дугласа, в которой положительные коэффициенты эластичности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ удовлетворяют условию $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 1$. Фазовые переменные характеризуют уровни развития соответствующих секторов экономики, а функционал — интегральный объем потребления на отрезке времени $[0, T]$ с учетом дисконтирования. Данная работа примыкает к статьям [1, 2].

Применение принципа максимума к задаче (1) позволяет описать возможные особые режимы, среди которых наибольший интерес представляет особый луч, вдоль которого выполняются соотношения

$$\frac{F(x)}{x_1} - \mu_1 = \frac{F(x)}{x_2} - \mu_2 = \ldots = \frac{F(x)}{x_n} - \mu_n. \tag{2}$$

Учитывая формулу $F(x)/x_i = (F(x)/x_1)(x_1/x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{F(x)}{x_1} = \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{\varepsilon_2} \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^{\varepsilon_3} \cdots \left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)^{\varepsilon_n}, \\ \dfrac{F(x)}{x_2} = \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{\varepsilon_2 - 1} \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^{\varepsilon_3} \cdots \left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)^{\varepsilon_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{F(x)}{x_n} = \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{\varepsilon_2} \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^{\varepsilon_3} \cdots \left(\dfrac{x_n}{x_1}\right)^{\varepsilon_n - 1}. \end{cases} \tag{3}$$

Положим

$$z_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad z_3 = \frac{x_3}{x_1}, \quad \ldots, \quad z_n = \frac{x_n}{x_1}. \tag{4}$$

Из соотношений (2), (3) получаем систему уравнений для нахождения неизвестных положительных величин (4):

$$\begin{cases} z_3^{\varepsilon_3} z_4^{\varepsilon_4} \ldots z_n^{\varepsilon_n} \left(z_2^{\varepsilon_2} - z_2^{-(1-\varepsilon_2)}\right) = \mu_1 - \mu_2 \equiv \Delta_2, \\ z_2^{\varepsilon_2} z_4^{\varepsilon_4} \ldots z_n^{\varepsilon_n} \left(z_3^{\varepsilon_3} - z_3^{-(1-\varepsilon_3)}\right) = \mu_1 - \mu_3 \equiv \Delta_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_2^{\varepsilon_2} z_3^{\varepsilon_3} \ldots z_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \left(z_n^{\varepsilon_n} - z_n^{-(1-\varepsilon_n)}\right) = \mu_1 - \mu_n \equiv \Delta_n. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема. *При любых $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ система уравнений (5) имеет единственное положительное решение $z = (z_2, \ldots, z_n)^\top$:*

$$z = z^* \equiv z^*(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \mu_1, \ldots, \mu_n), \qquad z_i^* > 0, \quad i = 2, \ldots, n,$$

причем

$$z_i^* = 1 \qquad \textit{при } \Delta_i = 0, \tag{6}$$

$$z_i^* > 1 \qquad \textit{при } \Delta_i > 0, \tag{7}$$

$$z_i^* \in (0,1) \qquad \textit{при } \Delta_i < 0. \tag{8}$$

Доказательство. Систему уравнений (5) удобно записать в виде

$$\begin{cases} w\,(1 - 1/z_2) = \Delta_2, \\ w\,(1 - 1/z_3) = \Delta_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w\,(1 - 1/z_n) = \Delta_n, \\ w = z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} > 0, \end{cases}$$

откуда очевидным образом вытекают соотношения (6)–(8). Кроме того,

$$w - \Delta_i = \frac{w}{z_i} \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{w}{w - \Delta_i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

т.е.

$$w = z_2^{\varepsilon_2} \dots z_n^{\varepsilon_n} = \frac{w^{\varepsilon_2}}{(w - \Delta_2)^{\varepsilon_2}} \dots \frac{w^{\varepsilon_n}}{(w - \Delta_n)^{\varepsilon_n}} = \frac{w^{\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}}{(w - \Delta_2)^{\varepsilon_2} \dots (w - \Delta_n)^{\varepsilon_n}},$$

или

$$w = \frac{w}{w^{\varepsilon_1}\,(w - \Delta_2)^{\varepsilon_2} \dots (w - \Delta_n)^{\varepsilon_n}},$$

откуда для нахождения w получаем скалярное уравнение

$$g(w) = 1, \tag{9}$$

где $g(w) = w^{\varepsilon_1}\,(w - \Delta_2)^{\varepsilon_2} \dots (w - \Delta_n)^{\varepsilon_n}$. Пусть $\Delta = \max\{\max_{2 \le i \le n} \Delta_i; 0\}$. Так как $w - \Delta_i = w/z_i > 0$, $i = 2, \dots, n$, то уравнение (9) имеет смысл рассматривать только на полупрямой $[\Delta, +\infty)$. Функция $g(w)$ обладает следующими свойствами:

$$g(\Delta) = 0; \quad g(w) > 0,\ w > \Delta; \quad g(+\infty) = +\infty; \quad g'(w) > 0,\ w > \Delta,$$

откуда следует существование единственного положительного корня $w = w^* > \Delta$ уравнения (9) на промежутке $[\Delta, +\infty)$, что эквивалентно существованию единственного решения системы уравнений (5): $z_i^* = w^*/(w^* - \Delta_i)$, $z_i^* > 0$, $i = 2, \dots, n$. Теорема доказана. $\square$

Эта теорема приводит к построению особого луча

$$L_{\text{sng}} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \colon\ x_1 = x_1,\ x_2 = z_1^*\,x_1,\ \dots,\ x_n = z_n^*\,x_1\},$$

который играет важную роль при конструктивном описании оптимального решения в двумерном случае (см. [1, 2]) и в многомерном при одинаковых коэффициентах амортизации (статья принята к печати).

Список литературы

1. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В.* Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации // Диф. уравнения. 2012. Т. 48, № 12. С. 1642–1657.
2. *Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М.* Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа при различных коэффициентах амортизации // Диф. уравнения. 2015. Т. 51, № 5. С. 671–687.

Задача дискретного оптимального управления в модели лесопользования (Discrete optimal control problem of forest management)*

А. А. Красовский (A. A. Krasovskii), А. С. Платов (A. S. Platov)

Международный институт прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

krasov@iiasa.ac.at, platovmm@mail.ru

В рассматриваемой математической модели управляющий лесом в каждый момент времени принимает решение о рубке деревьев определенного типа (породы) и возраста (возрастной группы) с целью максимизации прибыли. При планировании лесозаготовки управляющий

*Работа первого автора выполнена при поддержке научной программы “Future Forests” Шведского фонда стратегического исследования окружающей среды, а также программы “Tropical Futures Initiative (TFI)” Международного института прикладного системного анализа (IIASA). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-08075а).

ориентируется на ценовые прогнозы и учитывает экономические затраты. В работе для решения дискретно-временной задачи оптимального управления, возникающей в модели, применяется принцип максимума Л.С. Понтрягина [1, 2]. Для достаточно общей постановки задачи обосновано условие оптимальности, отвечающее управлению релейного типа [3]. Решение получено в конструктивном виде, без больших вычислительных затрат, сопутствующих задачам высокой размерности.

С позиций лесоведения рассматриваемая постановка задачи может быть классифицирована как динамическая породно-возрастная модель. Пусть каждый тип индивидуальных древостоев расположен в ячейке с номером i, $i = 1, \ldots, N$. На практике ячейка соответствует некоторому обособленному участку леса с древостоем одной породы. Деревья в каждой ячейке разбиты по возрасту $a \in [0, A]$. Обозначим символом $x_i(a,t)$ площадь деревьев в ячейке i возрастной группы a в момент времени $t \in [0,T]$. В модели рассматривается дискретное время. Шаг по времени Δt и шаг по возрастным группам Δa задаются соотношениями

$$a_{j+1} = a_j + \Delta a, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t, \quad j = 1, \ldots, M-1, \quad k = 1, \ldots, K-1,$$

где M — количество возрастных групп, K — количество временных отрезков, $\Delta t = \Delta a$. Для каждого типа деревьев имеется фактор, переводящий их в биомассу (древесину) в зависимости от возраста. Обозначим его символом $\beta_i(a_j) \geq 0$. Символом $u_i(a_j, t_k) \in [0,1]$ обозначим управляющее воздействие, т.е. долю леса типа i возраста a_j, которая вырубается в момент времени t_k.

Удобно представить переменные в векторной форме:

$$\boldsymbol{x}_i(t_k) := \big(x_i(a_1,t_k), \ldots, x_i(a_M,t_k)\big)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{u}_i(t_k) := \big(u_i(a_1,t_k), \ldots, u_i(a_M,t_k)\big)^{\mathrm{T}}.$$

Динамика древостоя задана выражением

$$\boldsymbol{x}_i(t_{k+1}) = (\mathbf{L} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{Dg}(\boldsymbol{u}_i(t_k))) \cdot \boldsymbol{x}_i(t_k), \tag{1}$$

где матрицы $\mathbf{L}, \mathbf{M} \in \mathrm{Mat}_{M\times M}$ определены следующим образом:

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{Dg}$ преобразует вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$ в матрицу

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{y}) := \mathbf{diag}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Интерпретация динамики такова: площадь леса, оставшегося после вырубки в возрастной группе a_j в период времени t_k, в следующий временной период t_{k+1} переходит в возрастную группу a_{j+1}; в последней возрастной группе площадь аккумулируется; все вырубленные площади засаживаются — лесовосстановительные мероприятия обязательны.

Древесина, заготовленная в момент времени t_k, вычисляется так:

$$H(t_k) := \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Dg}(\boldsymbol{u}_i(t_k)) \cdot \boldsymbol{x}_i(t_k).$$

Множество допустимых управлений задано следующим образом:

$$\mathbf{U}(t_k) := \big\{\{u\}_i^j(t_k) \in \mathrm{Mat}_{M\times N} \;\big|\; 0 \le u_i^j(t_k) \le 1\big\}.$$

Отметим, что по смыслу задачи в каждый момент времени все компоненты вектора $\boldsymbol{x}_i(t_k)$ суть неотрицательные числа.

Функция экономических затрат состоит из следующих слагаемых: C^L — рубка, C^E — доставка, C^P — посадка. Суммарная стоимость управляющих воздействий $\boldsymbol{u}$ задана выражением

$$C(\boldsymbol{u}, t_k) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \big[C_i^L(a_j) + C_i^E(a_j) + C_i^P(a_j)\big] x_i(a_j, t_k) u_i(a_j, t_k).$$

При известной динамике цен на древесину $p(t_k)$ прибыль вычисляется по формуле

$$\Pi(t_k) := p(t_k)H(t_k) - C(\boldsymbol{u}, t_k). \tag{2}$$

Задача оптимального управления. Заданы динамика древостоя $\boldsymbol{x}_i(t_{k+1})$ (1), начальное распределение $\boldsymbol{x}_i(t_1)$, факторы биомассы $\boldsymbol{\beta}_i$ и функция прибыли $\Pi(t_k)$ (2). Требуется среди допустимых управлений $\boldsymbol{u}_i(t_k)$ найти оптимальное управление $\hat{\boldsymbol{u}}_i(t_k)$, максимизирующее чистый дисконтированный доход:

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \left\{ J := \sum_{k=1}^{K} \rho_k \Pi(t_k) \right\}, \tag{3}$$

где ρ_k — фактор дисконтирования. Согласно условиям принципа максимума Понтрягина [2] оптимальное управление $\hat{\boldsymbol{u}}_i$ в каждый момент времени $k := t_k$ максимизирует каждую компоненту вектора-строки:

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}\Big\{\big(\rho_k(p(k)\cdot\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}-\mathbf{C}_i^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\cdot\mathbf{M}\big)\cdot\mathbf{Dg}(\hat{\boldsymbol{x}}_i(k))\cdot\mathbf{Dg}(\boldsymbol{u}_i(k))\Big\}. \quad (4)$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)$ — решение сопряженного уравнения,

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}_i(k)=\rho_k\big(p(k)\cdot\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}-\mathbf{C}_i^{\mathrm{T}}\big)\cdot\mathbf{Dg}(\hat{\boldsymbol{u}}_i(k))+\\ \qquad\qquad +\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\cdot\big(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}+\mathbf{Dg}(\hat{\boldsymbol{u}}_i(k))\cdot\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\big),\\ \boldsymbol{\lambda}(K+1)=0,\end{cases} \quad (5)$$

при этом динамика $\hat{\boldsymbol{x}}_i(k)$ определяется уравнением (1) и $\hat{\boldsymbol{x}}_i(1) := \boldsymbol{x}_i(1)$.

Важно отметить, что условие (4) не позволяет явно определить компоненту вектора $\hat{\boldsymbol{u}}_i(k)$ в случае, когда перед ней стоит множитель, равный нулю. При решении прикладных задач *типичной* является ситуация отсутствия нулевых значений в векторе

$$\big(\rho_k(p(k)\cdot\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}-\mathbf{C}_i^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\cdot\mathbf{M}\big)$$

для релейных управлений. Справедливо следующее утверждение [3].

Теорема. *В типичной ситуации решение* $(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{x}})$ *задачи* (1), (3) *может быть получено из условий* (5),

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}\Big\{\big(\rho_k(p(k)\cdot\boldsymbol{\beta}_i^{\mathrm{T}}-\mathbf{C}_i^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\cdot\mathbf{M}\big)\cdot\mathbf{Dg}(\boldsymbol{u}_i(k))\Big\}. \quad (6)$$

Условия (5), (6) позволяют однозначно определить оптимальное управление $\hat{\boldsymbol{u}}$. Эти условия лежат в основе алгоритма, реализованного в среде программирования Python. Результаты компьютерного моделирования подтверждают эффективность предложенного подхода.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1969.
2. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
3. *Красовский А.А., Платов А.С.* Билинейная задача оптимального управления дискретной рубкой леса // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 188–194.

Модель разработки исчерпаемого ресурса (Model of exhaustible resource extraction)

А. В. Кулевский (A. V. Kulevskii)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kulevskyav@cs.msu.su

Работа посвящена экономической теме: моделированию оптимальных объемов добычи исчерпаемых (невозобновляемых) ресурсов. Таковыми называют природные ресурсы, сформированные в окружающей среде в течение многих лет, восстановление которых невозможно или идет несравнимо медленнее потребления. Примерами таких ресурсов служат ископаемое топливо и сырье для него (нефть, уголь, газ) и минеральные ресурсы (руды металлов, драгоценные камни). Чем больше ресурсов добыто сейчас, тем меньше доступно в будущем, ведь общее их количество почти неизменно. Процесс добычи изучается изолированно, без учета иной деятельности. Модель изложена в [1, п. 10.1].

1. Описание модели. В задаче используются следующие обозначения:

$R(t) \geq 0$ — общий текущий (не добытый) запас исчерпаемого ресурса;

$R_0 > 0$ — количество ресурса в начальный момент времени $t = 0$;

$E(t)$ — количество ресурса, добываемое в единицу времени;

$p(t) > 0$ — рыночная цена единицы добытого ресурса;

$r > 0$ — коэффициент дисконтирования;

$C(t) \geq 0$ — затраты на добычу (себестоимость) единицы ресурса.

В модели фирма (отрасль) добывает и продает добытый ресурс как свой единственный продукт. Интенсивность добычи ресурса E — внутреннее управление. Освоение новых месторождений считается невозможным, поэтому процесс добычи описывается простой детерминированной моделью с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{R}(t) = -E(t), \qquad R(0) = R_0.$$

Фирма выбирает стратегию добычи $E(t)$ с целью максимизировать свою общую дисконтированную прибыль на конечном горизонте планирования $[0,T]$, $T < +\infty$. Именно целевая функция имеет вид

$$J(E,T) = \int_0^T e^{-rt}\big[p(t)E(t) - C\big(E(t),R(t)\big)\big]\,dt \to \max_{T,E(\cdot)},$$

где общая себестоимость единицы ресурса $C(E,R)$ зависит от интенсивности добычи и запаса ресурса. Конкретный вид $C(E,R)$ может быть различным, при этом неотрицательная функция $C(E,R)$ непрерывна и выполнены условия $\frac{\partial C}{\partial E} \geq 0$, $\frac{\partial C}{\partial R} \leq 0$, по которым себестоимость, вообще говоря, возрастает как в процессе добычи, так и с ростом интенсивности. Поведение рыночной цены единицы добытого ресурса $p(t)$ считается наперед известным и не зависящим от деятельности рассматриваемой фирмы. $R(t)$ — фазовая переменная задачи. Стратегия добычи $E(t)$, $t \in [0,T]$, является управляющим параметром задачи, удовлетворяющим ограничениям $0 \leq E(t) \leq E_{\max}$. Заданное максимальное значение интенсивности добычи $E_{\max} > 0$ определяется техническими и финансовыми ограничениями. Момент окончания процесса разработки месторождения $T > 0$ может быть как наперед заданным (что соответствует максимизации прибыли к конкретному сроку), так и произвольным (фирма стремится получить в принципе максимальную отдачу от месторождения).

Получаем задачу оптимального управления: найти оптимальную интенсивность добычи $E^*(t)$ (управление) и оптимальный момент завершения процесса разработки T^*(при нефиксированном T), соответствующие оптимальное изменение запаса ресурса $R^*(t)$ (траектория) и максимальный размер прибыли $J^* = J(E^*,T^*)$ (функционал).

2. Линейная модель без затрат на добычу. Рассматривается модель при $C(E,R) = 0$:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -E(t), \quad R(0) = R_0, \\ R(t) \geq 0, \quad t \in [0,T], \\ E(t) \in U = [0, E_{\max}], \quad t \in [0,T], \\ J(E,T) = \displaystyle\int_0^T e^{-rt} p(t)E(t)\,dt \to \max_{T,E(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $R_0 > 0$, $r > 0$, $E_{\max} > 0$ — заданные константы. Управление $E(\cdot)$ измеримо, $E(\cdot) \in L^2[0,T]$. Момент $T > 0$ рассматриваем как фиксированным, так и нефиксированным. Функция $p(t) > 0$ задана. Сформулируем основные результаты для задачи (1).

Теорема 1. *В задаче* (1) *при любой функции* $p(\cdot) \in L^2[0,T]$ *и при любом фиксированном* $T > 0$ *существует оптимальное управление.*

Лемма 1. *Равенство* $R(T) = 0$ *— необходимое условие окончания оптимального процесса при нефиксированном* $T > 0$.

Лемма 2. *При свободном* $T > 0$ *и постоянной* $p(t) \equiv p_0 > 0$ *оптимальное решение задачи* (1) *имеет вид*

$$T^* \geq \hat{T}, \qquad \hat{T} = \frac{R_0}{E_{\max}},$$

$$E^*(t) = \begin{cases} E_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in (\hat{T}, T^*], \end{cases} \qquad R^*(t) = \begin{cases} R_0 - tE_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in [\hat{T}, T^*], \end{cases}$$

$$J^* = J(E^*, T^*) = \frac{p_0 E_{\max}}{r}\bigl(1 - e^{-r\hat{T}}\bigr).$$

Лемма 3. *Если произведение* $e^{-rt}p(t)$ *строго монотонно убывает, функция* $p(t)$ *дифференцируема и* T *свободное, то оптимальное решение задачи* (1) *имеет вид*

$$T^* \geq \hat{T}, \qquad \hat{T} = \frac{R_0}{E_{\max}},$$

$$E^*(t) = \begin{cases} E_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in (\hat{T}, T^*], \end{cases} \qquad R^*(t) = \begin{cases} R_0 - tE_{\max}, & t \in [0, \hat{T}], \\ 0, & t \in [\hat{T}, T^*], \end{cases}$$

$$J^* = J(E^*, T^*) = E_{\max} \int_0^{\hat{T}} e^{-rt} p(t)\, dt.$$

Замечание. По смыслу задачи (1) в леммах 2, 3 можно считать $T^* = \hat{T}$.

3. Модель с затратами на добычу, не зависящими от ресурса. Здесь затраты на добычу вида $C(E, R) = C(E)$ не зависят от R:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = -E(t), \quad R(0) = R_0, \\ R(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \\ E(t) \in U = [0, E_{\max}], \quad t \in [0, T], \\ J(E) = \displaystyle\int_0^T e^{-rt}\bigl[p(t)E(t) - C(E(t))\bigr]\, dt \to \max_{E(\cdot)}. \end{cases} \tag{2}$$

Параметры $E(\cdot)$, R_0, r, $E_{\max}$, $p(t)$ полностью аналогичны параметрам задачи (1). Функция $C(E)$ непрерывна на U, момент $T > 0$ фиксирован. Сформулируем основные результаты для задачи (2).

Теорема 2. *Если функция $C(E)$ непрерывна и выпукла на U, то в задаче* (2) *для любой функции $p(\cdot) \in L^2[0,T]$ существует оптимальное управление.*

Теорема 3. *В задаче* (2) *для произвольной функции $p(\cdot) \in L^2[0,T]$ и квадратичной функции $C(E) = c_0 + c_1E + c_2E^2$, где $c_0 \geq 0$, $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$, оптимальное управление существует и единственно.*

Список литературы

1. *Hritonenko N., Yatsenko Y.* Mathematical modeling in economics, ecology and the environment. New York: Springer, 2013.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
3. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
5. *Дмитрук А.В.* Лекции по математической теории оптимального управления. М., 2010.

Optimal control of systems with evolving dynamics

Yuri S. Ledyaev

Western Michigan University, Kalamazoo, USA

ledyaev@wmich.edu

This talk is dedicated to a new class of problems of optimal control systems under uncertainty. We start with problems of optimal control of systems in which uncertainty is modeled in terms of some scenarios of evolution of system's dynamics.

It is assumed that the set of such possible scenarios is finite and it is known along with probabilities of realization of such scenarios. We consider the problem of design of optimal control procedure which minimizes the mathematical expectation of the cost functional.

The significant difficulty in study of such problems lies in the fact that scenarios can bifurcate at some moments which requires the use of feedback control or of some non-anticipating strategy concept.

We demonstrate how to derive optimality condition for such optimal non-anticipating strategy in the form of some non-standard maximum principle.

The main component of this maximum principle is a new form of adjoint system which is significantly different from the classical one in Pontryagin maximum principle.

Of course, the use of non-anticipating strategies as control procedures is not very practical in applications and feedback control is preferable. The another new aspect of this work is the use of the new maximum principle and an adjoint system of equations for a design of optimal feedback control.

Certainly, such optimal feedback controls are discontinuous functions of a state vector. Important aspect of an implementation of discontinuous feedback control is its robustness properties with respect to small measurement errors of state vector and small perturbations of the dynamics. We discuss this aspect of an implementation of optimal discontinuous feedback to demonstrate its robustness.

Optimal solutions in a neighborhood of a singular extremal for a problem with two-dimensional control*

Lev Lokutsievskiy, Larisa Manita, Mariya Ronzhina

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

lion.lokut@gmail.com, lmanita@hse.ru, maryaronzhina@gmail.com

We consider an optimal control problem that is affine in two-dimensional bounded control. We study a behavior of solutions in a neighborhood of a singular extremal. Optimal singular solutions and solutions with accumulations of control switchings (chattering solutions) are very typical for control-

*This research was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research under grant no. 17-01-00805.

affine problems. Singular solutions for a single-input control problem with bounded control is well studied. It was proved that in the case of the general position there exists at least one parametric family of chattering solutions if the Hamiltonian system dimension is no less than 7 [1, 2]. Singular solutions for problems with multidimensional control have been studied much less.

In the present work we consider an optimal control problem that is affine in two-dimensional bounded control. Let

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \qquad \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{1}$$

be the Hamiltonian system corresponding to the problem with

$$H = H_0(x,\psi) + u^1 H_1(x,\psi) + u^2 H_2(x,\psi) \tag{2}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$, $u = (u^1, u^2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, and U is some ellipse. The functions H_i $(i = 0, 1, 2)$ are assumed to be smooth. The optimal control function $\hat{u}(t)$ satisfies the maximum condition

$$\hat{u} = \arg\max_{u \in U} H(x, \psi, u). \tag{3}$$

Definition. A point $(x^0, \psi^0) \in \mathbb{R}^{2n}$ is called a *singular point of second order* if the following conditions are satisfied at (x^0, ψ^0):

1) The functions

$$H_i, \quad (\operatorname{ad} H_k)H_i, \quad (\operatorname{ad} H_l)(\operatorname{ad} H_k)H_i,$$
$$(\operatorname{ad} H_j)(\operatorname{ad} H_l)(\operatorname{ad} H_k)H_i, \qquad i = 1, 2, \quad j, k, l = 0, 1, 2,$$

vanish at the point (x^0, ψ^0). The set of the differentials of these functions at (x^0, ψ^0) has constant rank.

2) The bilinear form

$$B_{ij} = \operatorname{ad} H_i (\operatorname{ad} H_0)^3 H_j \big|_{(x^0, \psi^0)}, \qquad i, j = 1, 2,$$

has rank 2 and is symmetric and negative definite.

3) All other commutators of the fifth order from the functions H_j $(j = 0, 1, 2)$, which are independent of the aforementioned ones, vanish at the point (x^0, ψ^0).

Consider the following model problem:

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \|x(t)\|^2 \, dt \to \inf, \\ \ddot{x} = u, \qquad \|u(t)\| \le 1, \qquad x(0) = x^0, \qquad \dot{x}(0) = y^0. \end{gathered} \tag{4}$$

Here $x, y, u \in \mathbb{R}^2$ and $\|\cdot\|$ means the standard Euclidean norm of $\mathbb{R}^2$. This problem can be considered as the Fuller problem with two-dimensional control.

It is known [2, 3] that $(x(t), \dot{x}(t)) = 0$ is a unique singular solution for the problem (4). For any point (x^0, y^0) we have the following:

(i) a unique optimal solution hits the origin in finite time $T(x^0, y^0)$ and the optimal control function $\hat{u}(t)$ does not have a limit as $t \to T(x^0, y^0) - 0$;

(ii) if x^0 and y^0 are parallel then optimal trajectories are chattering trajectories;

(iii) there exists a one-parameter family of optimal solutions that represent logarithmic spirals; they approach the origin in finite time with countable number of rotations.

Let (x^0, ψ^0) be a singular point of the second order of the control Hamiltonian system (1)–(3). We prove that in the neighborhood of (x^0, ψ^0) the behavior of optimal solutions for (1)–(3) is determined by optimal solutions of (4). Using the technique developed in [4], we show that for the problem under consideration there exists optimal spiral-similar solution which attains the singular point in finite time making a countable number of rotations.

References

1. *Kupka I.* Fuller's phenomena // Perspectives in control theory Boston: Birkhäuser, 1990. P. 129–142. (Prog. Syst. Control Theory; V. 2).
2. *Zelikin M.I, Borisov V.F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. Boston: Birkhäuser, 1994.
3. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Geometry of neighborhoods of singular trajectories in problems with multidimensional control // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 277. P. 67–83.
4. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Typicality of chaotic fractal behavior of integral vortices in Hamiltonian systems with discontinuous right hand side // J. Math. Sci. 2017. V. 221, N 1. P. 1–136.

Управление полным током и положением границы плазмы в установках TOKAMAK (Plasma current and boundary position control in TOKAMAK)*

А. А. Лукьяница (A. A. Luk'yanitsa)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

luk@ic.msu.su

Управление эволюцией плазмы является одной из важнейших проблем термоядерного синтеза. В качестве системы, описывающей эволюцию плазмы в установках TOKAMAK, нами использовалась самосогласованная модель, реализованная численным кодом SCoPE [1]. Для управления границей плазмы нужно правильно подобрать токи в катушках полоидального магнитного поля, а для управления полным током — ток в соленоиде. Задача управления описывается следующим разностным уравнением

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \\ x_0 = x_{\mathrm{init}}, \end{cases} \tag{1}$$

которое получается путем линеаризации уравнений эволюции равновесия плазмы относительно вектора x_t, компонентами которого являются отклонения величины тока и положения границы от требуемых. Здесь A и B — квадратные матрицы размером соответственно $n \times n$ и $m \times m$, $x_t \in \mathbb{R}^n$ — вектор набора контролируемых переменных, а $u_t \in \mathbb{R}^m$ — управление. Для управления системой, описываемой (1), хорошо зарекомендовал себя контроллер LQR (Linear–Quadratic Regulator) [2], который позволяет построить последовательность векторов управления u_t на основе минимизации следующего функционала:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N} \left(x_t^{\mathrm{T}} Q x_t + u_t^{\mathrm{T}} R u_t \right),$$

где $Q = qI$ и $R = rI$ — диагональные матрицы, а N — число шагов управления. На каждом относительно малом промежутке времени мо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 43 и № 17.

дель плазмы можно считать квазистационарной и свести поиск управления к поиску матрицы усиления K:

$$u_t = -Kx_t,$$

где

$$K = (R + B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA,$$

а матрица P получается из решения дискретного алгебраического уравнения Риккати

$$P = Q + A^{\mathrm{T}}PA - A^{\mathrm{T}}PB(R + B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA.$$

При длительной продолжительности разряда погрешность от замены уравнений эволюции равновесия линеаризованными уравнениями (1) может привести к нарушению устойчивости разряда. Для снижения этого эффекта нами был предложен метод адаптивной подстройки коэффициентов системы (1) в процессе управления, суть которого заключается в следующем. Пусть к шагу по времени M нами было построено управление $u_1, \ldots, u_M$, по которому был получен набор управляемых параметров $x_1, \ldots, x_M$. Для более точного определения коэффициентов уравнения (1), которые мы обозначим через $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$, воспользуемся методом наименьших квадратов, введя следующий квадратичный функционал:

$$\Psi(\widehat{A}, \widehat{B}) = \sum_{m=1}^{M} \left(\widehat{A}x_{m-1} + \widehat{B}u_{m-1} - x_m\right)^2. \tag{2}$$

Продифференцировав (2) по $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ и приравняв производные к нулю, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C\widehat{A} + D\widehat{B} = V, \\ D\widehat{A} + G\widehat{B} = W, \end{cases} \tag{3}$$

которая может быть легко разрешена относительно $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ методом исключения Гаусса. Здесь были введены следующие обозначения:

$$C = \sum_{m=1}^{M} x_{m-1}^2, \qquad D = \sum_{m=1}^{M} u_{m-1}x_{m-1}, \qquad G = \sum_{m=1}^{M} u_{m-1}^2,$$

$$V = \sum_{m=1}^{M} x_{m-1}x_m, \qquad W = \sum_{m=1}^{M} u_{m-1}x_m.$$

Теперь при вычислении очередных управлений вместо матриц A и B используются линейные комбинации $\alpha A + (1-\alpha)\widehat{A}$ и $\alpha B + (1-\alpha)\widehat{B}$. Для параметра α, как правило, использовалось значение $\alpha = 0.5$.

Предложенный метод позволил получать решение даже в тех случаях, с которыми не справлялись подпрограммы из обычно применяемой для этих целей библиотеки SLICOT, основанной на известных библиотеках численных алгоритмов BLAS и LAPACK. С помощью разработанного метода были построены оптимальные управления для ТОКАМАКов с параметрами установок MAST, Т-15 и строящегося международного реактора-токамака ITER. В частности, для установки Т-15 время удержания плазмы превысило в полтора раза время, достигаемое путем управления с помощью градиентного метода.

Список литературы

1. *Зайцев Ф.С.* Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. М.: МАКС Пресс, 2011.
2. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear optimal control systems. New York: Wiley-Intersci., 1972.

Задача терминального управления в системе с ограничением на фазовые переменные (The problem of terminal control in a system with restriction on phase variables)*

Л. Н. Лукьянова (L. N. Luk'yanova)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

lln@cs.msu.su

В работе рассматривается управляемая система [1–4]

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = u, \qquad x, u \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \qquad x(T) = x_T \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00539).

и фазовыми ограничениями

$$\|x(t) - b_k\| > l, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где $x, u, b_k \in \mathbb{R}^n$, $b_k \neq x_0$, $b_k \neq x_T$, $b_k \neq b_j$, $k \neq j$, $u(t)$ — параметр управления, $\|u\| \leq \rho$. Изучается вопрос существования ограниченного по норме управления, для которого соответствующая траектория уравнения (1) удовлетворяет краевым условиям (2) с фазовым ограничением (3), и получение оценки снизу для расстояния от траектории до точек фазового ограничения. Для заданных краевых условий (2) приводятся результаты вычисления приближенного значения управления

$$u^*(t) = \underset{\|u^*(t)\| \leq \rho}{\arg\max} \Big\{ \min_{k=1,\ldots,m} \min_{t \in [0,T]} \|x(t) - b_k\| \Big\} \tag{4}$$

для тестовых значений краевых условий (2) и фазовых ограничений (3).

Предлагаемый подход к решению задачи (1)–(3) состоит в выборе управления $u(t)$ системы (1) в виде

$$u(t) = \tilde{u}(t) + v(t), \tag{5}$$

где

$$\tilde{u}(t) = \frac{(1 - e^{-a(T-t)})a}{T - 2\frac{1-e^{-aT}}{a} + \frac{1-e^{-2aT}}{2a}} \left[x_T - x_0 - \frac{1 - e^{-aT}}{a} \dot{x}_0 \right], \tag{6}$$

$$v(t) = 2(T + t(2aT - 6) - 3at^2)\xi, \tag{7}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| \leq \sigma$, σ — положительная константа. Выполнение краевых условий для траектории уравнения (1) при управлении (4), (5) проверяется непосредственной подстановкой.

При $t \in [0, T]$ и управлении (5)–(7) траектория (1) имеет вид

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 \Big(\frac{1 - e^{-at}}{a} \Big) + G(T) \frac{t - 2\frac{1-e^{-at}}{a} + \frac{1-e^{-2at}}{2a}}{T - 2\frac{1-e^{-aT}}{a} + \frac{1-e^{-2aT}}{2a}} + t^2(T-t)\xi, \tag{8}$$

где

$$G(T) = x_T - x_0 - \frac{1 - e^{-aT}}{a} \dot{x}_0.$$

Обозначим через $\varphi_k(t)$ разность первых трех слагаемых правой части выражения (8) и b_k. Обоснование существования вектора ξ, $\|\xi\| \leq \sigma$, для которого при всех $i = 1, \ldots, m$ выполнено (3), и алгоритм нахождения такого вектора содержатся в следующей лемме [1, 2].

Лемма 1. *Пусть* Σ *— конечномерное линейное семейство функций, рассматриваемых и аналитических на отрезке* $I = [0, T]$; W *— n-мерное векторное евклидово пространство с фиксированной в нем ортогональной системой координат;* $w = (w^1, \ldots, w^n) \in W$; e_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n$, *— единичный вектор оси* w^i; Γ *— куб, определяемый неравенствами*

$$|w^i| \leq d, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad d > 0.$$

Тогда существует такое положительное число γ, *что для любого вектора* $\varphi_k(t) = (\varphi_k^1(t), \ldots, \varphi_k^n(t))$, *компоненты которого принадлежат* Σ, *найдется такой куб* $\Gamma' \subset \Gamma$ *со стороной* 2γ, *что вектор* $(v(t) - b_k) \in W$, *задаваемый равенствами*

$$v^i(t) - b_k^i = \varphi_k^i(t) - \alpha^i t^2 (T - t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

при

$$t \in I, \qquad \alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \Gamma', \qquad k = 1, \ldots, m,$$

удовлетворяет условию

$$\|v(t) - b_k\| \geq \gamma t^2 (T - t).$$

Приведем оценку снизу для расстояния от траектории до препятствий [1, 2].

Лемма 2. *Управление* (5), *выбранное для задачи* (1), (3) *с параметром* ξ *согласно лемме* 1, *гарантирует следующую оценку снизу для расстояния* $\|x(t) - b_i\|$:

$$\min_{i=1,\ldots,m} \|x(t) - b_i\| \geq l(t) = \begin{cases} l_1, & t \in [0, t_1], \\ \gamma t^2 (T - t), & t \in [t_1, T - t_2], \\ l_2, & t \in [T - t_2, T], \end{cases}$$

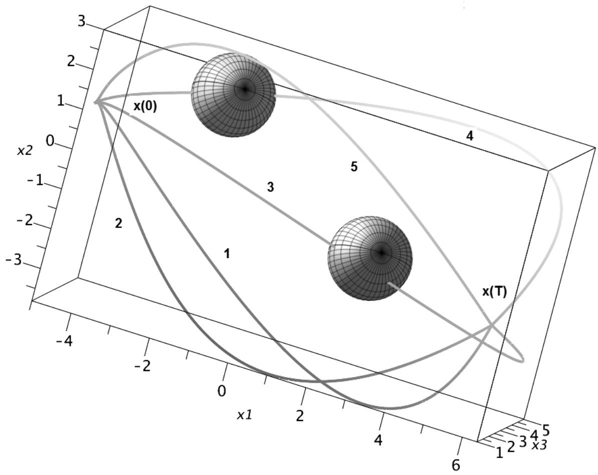
где

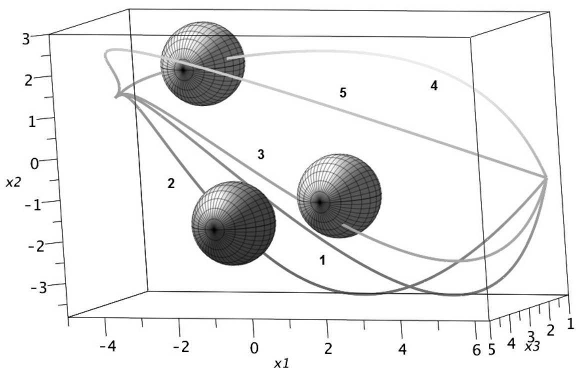
$$t_1 = \min_{i=1,\ldots,m} \|x_0 - b_i\| \frac{1}{3(\|\dot{x}_0\| + \frac{\rho}{\alpha})}, \quad t_2 = \min_{i=1,\ldots,m} \|x_T - b_i\| \frac{1}{3(\|\dot{x}_T\| + \frac{\rho}{\alpha})},$$

$$l_1 = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{\|x_0 - b_i\|}{6}, \qquad l_2 = \min_{i=1,\ldots,m} \frac{\|x_T - b_i\|}{6}.$$

Положим

$$\rho_1(T) = \frac{a(\|x_T\| + \|x_0\|) + \|\dot{x}_0\|}{T - \frac{3}{2a}}, \qquad \sigma_1(T) = 2T(5 + aT)\sigma.$$





Предположение. $\rho > \sigma_1(T) + \rho_1(T)$.

Оценка снизу для расстояния от траектории до векторов b_k, $k = 1, \ldots$ $\ldots, m$, приведенная в лемме 2, является гарантированной при любых допустимых b_k, $k = 1, \ldots, m$. Вычисления управления (4) и соответствующих траекторий по алгоритму нахождения вектора ξ леммы 1 показывают, что траектории могут иметь существенно большее уклонение от b_k, $k = 1, \ldots, m$, чем оценка леммы 2.

Приведем результаты вычисления траекторий задачи (1)–(3) при управлении (5). На рисунках показаны траектории системы (1) для $x \in \mathbb{R}^3$, $a_1 = (-2, 2, 3)$, $a_2 = (2, -1, 4)$, $a_3 = (-2, -2, 2)$, $x(0) = (-5, 1, 2)$, $x(T) = (6, -1, 1)$, $T = 3$, $a = 2$, $\dot{x}(0) = (1, 1, -1)$, $\dot{x}(T) = (0, -1, 1)$. Левый соответствует $m = 2$, правый $m = 3$. Показаны траектории, отвечающие векторам $\xi_1 = (\cos(8\pi/5), \sin(8\pi/5), 0)$, $\xi_2 = (\cos(7\pi/5), \sin(7\pi/5), 0)$, $\xi_3 = (\cos(9\pi/5, \sin(9\pi/5), \sin(2\pi/5))$, $\xi_4 = (\cos(\pi/5, \sin(\pi/5), \sin(2\pi/5))$, $\xi_5 = (\cos(4\pi/5, \sin(4\pi/5), \sin(3\pi/5))$. При ξ_3, ξ_4, ξ_2 траектории пересекают единичные окрестности точек a_1, a_2, a_3. Векторы ξ_1, ξ_5 выбраны по алгоритму леммы 1. Шары единичного радиуса на рисунках приведены для иллюстрации расстояния от траектории до точек a_1, a_2, a_3.

Автор благодарит профессора М.С. Никольского за обсуждение работы.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Диф. уравнения. 1971. Т. 7, № 3. С. 436–445.
2. *Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю.* Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Тр. МИАН. 1977. Т. 143. С. 105–128.
3. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
4. *Кумков С.С., Пацко В.С., Ле Менекс С.* Два слабых преследователя в игре против одного убегающего // Автоматика и телемеханика. 2014. № 10. С. 73–96.

Parallel Fair–Taylor algorithm for dynamic general equilibrium models

Nikolai Melnikov, Arseniy Gruzdev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

melnikov@cs.msu.su, gruzdev@cs.msu.su

Dynamic computable general equilibrium (CGE) models are widely used for estimating the effects of demographic and technological changes on energy use and carbon dioxide (CO_2) emissions (see, e.g., [1]). The equilibrium

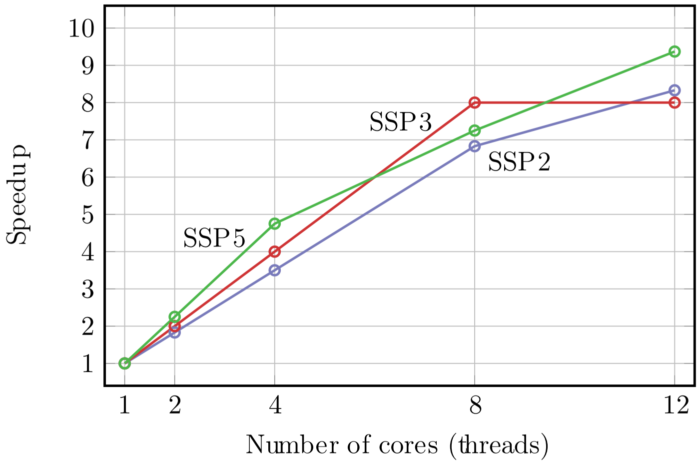


Figure 1. Speedup of the model runs for different SSPs.

is described in the framework of the Arrow–Debreu theory, which leads to a systems of nonlinear equations.

The solution to the dynamic general equilibrium model is described by a large-scale system of nonlinear equations. The Krylov methods (see, e.g., [2]) become increasingly more popular than the stationary iterative method of the Gauss–Seidel type [3].

In [4], we suggested a parallel version of the Gauss–Seidel method that uses the block structure of the nonlinear system, which describes a dynamic general equilibrium model. We implemented the parallel algorithm in the one-region model and showed that its computation time is comparable to the Krylov methods.

To demonstrate the effectiveness of the parallel algorithm, we use the PET model calibrated to reproduce major outcomes for the socioeconomic scenarios from the Shared Socioeconomic Pathways (SSP) database (see, e.g., [6]). The PET model is a forward-looking CGE model with tree types of agents: consumers, producers, and government. Consumers maximize their lifetime utility function taking prices as given. Producers maximize profits supported by the prices. Government redistributes capital through taxes and transfers. International trade is described by the Armington model [5]. Prices are determined by the markets clearing conditions for production factors, intermediate and final goods. The first-order optimality conditions for the agents and supply-equals-demand conditions for markets

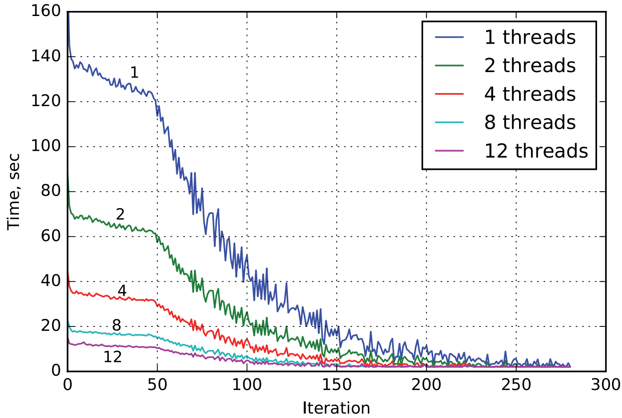


Figure 2. Timing for iterations.

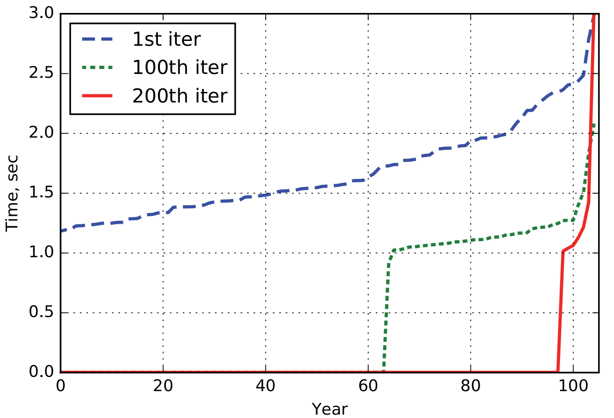


Figure 3. Timing of year-blocks.

form a system of nonlinear equations that determines the general equilibrium. The algorithm for calculating the equilibrium has been implemented using OpenMP and tested at the Lomonosov supercomputer [7].

To study strong scalability of the parallel algorithm, we need to increase the computing power while keeping the total problem size constant. This is achieved by running the model with the same initial approximations and same set of numerical parameters (for each SSP) with increasing number of threads. Figure 1 shows that the speedup of the parallel algorithm grows almost linearly as the number of threads grows from 1 to 12 (for calculations with more threads, see [8]).

Figure 2 shows that, for the number of threads from about one to ten, there is a visible monotone decreases in timing of the iteration as the algorithm converges. This effect can be explained if we look at the timings of different year-blocks of the inner loop (Fig. 3).

References

1. *Melnikov N.B., O'Neill B.C., Dalton M.G., van Ruijven B.J.* Downscaling heterogeneous household outcomes in dynamic CGE models for energy-economic analysis // Energy Econ. 2017 (in press).
2. *Kelley C.T.* Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations. SIAM, 1995.
3. *Fair R.C., Taylor J.B.* Solution and maximum likelihood estimation of dynamic nonlinear rational expectations models // Econometrica. 1983. V. 51, N 4. P. 1169–1185.
4. *Melnikov N.B., Gruzdev A.P., Dalton M.G., O'Neill B.C.* Parallel algorithm for solving large-scale dynamic general equilibrium models // Russian Supercomputing Days, Moscow, 2015. P. 84–95.
5. *Armington P.* A theory of demand for products distinguished by place of production // IMF Staff Papers. 1969. V. 16. P. 170–201.
6. *Ren X., Weitzel M., O'Neill B.C., Lawrence P., Meiyappan P., Levis S., Balistreri E.J., Dalton M.* Avoided economic impacts of climate change on agriculture: integrating a land surface model (CLM) with a global economic model (iPETS) // Climatic Change. 2016. DOI:10.1007/s10584-016-1791-1.
7. *Sadovnichy V.A., Tikhonravov A.V., Voevodin Vl.V., Opanasenko V.U.* "Lomonosov": Supercomputing at Moscow State University // Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale. Chapman & Hall/CRC Comput. Sci. 2013. P. 283–307.
8. *Melnikov N.B., Gruzdev A.P., Dalton M.G., O'Neill B.C.* Parallel algorithm for calculating general equilibrium in multiregion economic growth models // Ural Math. J. 2016. V. 2, N 2. P. 45–57.

Некоторые оптимизационные задачи управления пучками траекторий. Теоремы существования оптимального управления (Some optimal control problems for pencils of trajectories. Existence theorems for optimal control)

М. С. Никольский (M. S. Nikolskii), Е. А. Беляевских (E. A. Belyaevskikh)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

mni@mi.ras.ru, belchiki@mail.ru

В монографии [1] и других работах изучаются задачи управления пучками траекторий управляемого объекта следующего типа.

В евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается движение управляемого объекта вида (ср. [2])

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $u \in U$, U — непустой компакт из евклидова пространства $\mathbb{R}^r$ $(r \geq 1)$. В качестве допустимых управлений рассматриваются измеримые по Лебегу функции $u = u(t) \in U$, $t \geq 0$. Нелинейная функция $f(x,u)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по компонентам вектора x на $\mathbb{R}^n \times U$. Предполагается также, что на $\mathbb{R}^n \times U$ выполняется неравенство

$$\langle x, f(x,u)\rangle \leq c(1 + |x|^2),$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов, символ $|\cdot|$ означает длину вектора, c — неотрицательная константа. Относительно начального состояния $x(0) = x_0$ предполагается, что $x_0 \in M_0$, где M_0 — непустой компакт из $\mathbb{R}^n$.

Множество допустимых управлений на рассматриваемом далее отрезке $[0,T]$ ($T > 0$ — константа) обозначим через $\mathcal{U}$. Паре $x_0, u(\cdot)$, где $x_0 \in M_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, можно сопоставить абсолютно непрерывное решение $x(t, x_0, u(\cdot))$ уравнения (1) на $\Delta = [0,T]$. При данном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ множество функций на Δ

$$\mathcal{M}(u(\cdot)) = \bigcup_{x_0 \in M_0} x(\cdot, x_0, u(\cdot))$$

образует пучок траекторий управляемого объекта (1). На множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, можно рассматривать различные оптимизационные задачи. Такого рода задачи интересны, например, если начальное состояние x_0 управляемого объекта (1) известно неточно, но известно, что $x \in M_0$, где M_0 — заданное множество из $\mathbb{R}^n$.

В монографии [1] рассмотрены некоторые задачи управления пучками траекторий, связанные с задачами управления пучками заряженных частиц. Такие задачи представляют интерес, например, при проектировании ускорителей заряженных частиц.

Здесь мы остановимся на одной из оптимизационных задач, рассмотренных в [1]. На множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, рассмотрим минимизируемый интегральный функционал вида

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T \int_{M_{t,u(\cdot)}} \phi(t, y)\, dy\, dt, \tag{2}$$

где $\phi(t, y)$ — непрерывная функция на $\Delta \times \mathbb{R}^n$,

$$M_{t,u(\cdot)} = \bigcup_{x_0 \in M_0} x(t, x_0, u(\cdot)),$$

$t \in \Delta$. В (2) сначала выполняется интегрирование в смысле Лебега по $y \in M_{t,u(\cdot)}$, а потом интегрирование в смысле Лебега по $t \in \Delta$. Предполагается, что мера Лебега компакта M_0 положительна.

В настоящей работе получены достаточные условия, при которых существует оптимальное управление в рассматриваемой оптимизационной задаче на минимум функционала $I(u(\cdot))$ (см. (2) на множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Эти достаточные условия, помимо уже сделанных предположений, состоят в том, что векторная функция $f(x, u)$ в (1) имеет специальный вид

$$f(x, u) = g(x) + B(x)u, \tag{3}$$

где векторная функция $g(x)$ и матричная функция $B(x)$ размерности $n \times r$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$, а U — выпуклый компакт.

В порядке обобщения можно рассмотреть минимизируемый функционал вида (ср. [2])

$$I_1(u(\cdot)) = I(u(\cdot)) + I_2(u(\cdot)),$$

где

$$I_2(u(\cdot)) = \int_{M_{T,u(\cdot)}} h(y)\,dy,$$

причем функция $h(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и интеграл понимается в смысле Лебега.

Для задачи минимизации функционала $I_1(u(\cdot))$ на множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, существование оптимального управления гарантируется при тех же условиях относительно $f(x,u)$, $\phi(t,y)$, о которых было сказано выше (см. (3)), и условии выпуклости компакта U.

Отметим, что при доказательстве теорем мы используем некоторые результаты из [3].

Список литературы

1. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969
3. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.

Синтез оптимального управления в задаче химиотерапии злокачественных опухолей (Optimal feedback in a mathematical model of chemotherapy of malignant tumours)*

Н. Г. Новоселова (N. G. Novoselova)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

n.g.novoselova@gmail.com

В работе изучается математическая модель химиотерапии злокачественных опухолей для немонотонной функции терапии, описывающей степень эффективности воздействия химиотерапевтического средства на клетки. На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] описано

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00074).

поведение экстремалей в задаче оптимальной химиотерапии. Построена оптимальная позиционная стратегия [2] для рассматриваемой модели терапии.

Введем следующие обозначения: m — число злокачественных клеток; h — количество химиотерапевтического средства (лекарства), способного убивать клетки опухоли; $f(h)$ — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли; $u(t)$ — количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени (управление).

Процесс взаимодействия клеток опухоли и химиотерапевтического средства описывается следующей известной моделью [3], где время изменяется в пределах $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = -mf(h), \quad m(t_0) = m_0 \\ \dfrac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), \quad h(t_0) = h_0, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где T — фиксированный конечный момент времени,

$$t_0 \in [0, T], \qquad 0 < m_0 < M, \qquad 0 \leq h_0 \leq L,$$

M — максимальное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью, L — максимальное количество химиотерапевтического средства в организме — предельный допустимый порог интоксикации.

Предполагается, что количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени, ограничено:

$$0 \leq u(t) \leq Q. \tag{2}$$

Рассмотрим немонотонную непрерывно дифференцируемую функцию терапии $f(h)$ такую, что ее производная $f'(h) = \frac{df(h)}{dh}$ имеет три различных действительных корня

$$0 < h_1 < h_2 < h_3 \leq L, \qquad f'(h_i) = 0.$$

Предполагаем, что функция терапии $f(h)$ обладает следующими свойствами:

A1. Если $h < h_1$, то $f'(h) > 0$, а если $h > h_3$, то $f'(h) < 0$.

A2. $0 < \alpha h_i < Q,\ i = 1, 2, 3;$

A3. $f(h_1) = f(h_3)$.

Рассмотрим в качестве допустимых управлений измеримые функции $u(\cdot)\colon [t_0, T] \mapsto [0, Q]$. Нетрудно увидеть, что при сделанных предположениях решения системы (1) продолжимы до момента времени T.

Задача оптимальной терапии состоит в построении допустимого управления, минимизирующего терминальную функцию платы:

$$\sigma(m, h) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \to \min_{u(\cdot)}, \tag{3}$$

где $m(\cdot) = m(\cdot; t_0, m_0, h_0, u(\cdot))$ — решение системы (1) с начальными условиями (t_0, m_0, h_0), выработанное под воздействием допустимого управления $u(t)$.

Пусть в рассматриваемой задаче (1)–(3) выполняются условия A1, A2, A3. Рассмотрим случай, когда функция $f'(h)$ удовлетворяет условию

$$\{f'(h) < 0,\, h \in (h_1, h_2)\} \cup \{f'(h) > 0,\, h \in (h_2, h_3)\}. \tag{4}$$

В других возможных случаях исследуемая задача построения оптимального синтеза сводится к задаче с одним или двумя корнями для функции $f'(h)$, которая была решена в работе [3].

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $h(t_0) = h_0 \geq h_3$. *Если* $h_0 e^{-\alpha(T - t_0)} \geq h_3$, *то управление* $u^0(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, T]$, *является оптимальным; если* $h_0 e^{-\alpha(T-t_0)} < h_3$, *то оптимальным управлением является*

$$u^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_1], \quad h(t_1) = h_3, \\ \alpha h_3, & t \in [t_1, T]. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть* $h(t_0) = h_0 \leq h_1$. *Если* $R(t_0, h_0) \leq h_1$, *где*

$$R(t_0, h_0) = e^{-\alpha(T-t_0)} \left(h_0 + Q \int_{t_0}^{T} e^{\alpha(\tau - t_0)} d\tau \right),$$

то управление $u_Q(t) \equiv Q$, $t \in [t_0, T]$, *является оптимальным; если* $R(t_0, h_0) > h_1$, *то оптимальное управление имеет вид*

$$u_Q(t) = \begin{cases} Q, & t \in [t_0, t_2], \quad h(t_2) = h_1, \\ \alpha h_1, & t \in [t_2, T]. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 3. *Пусть* $h(t_0) = h_0\colon h_1 < h_0 < h_3$. *Тогда в области* $\Gamma = (h_1, h_3) \times [t_0, T]$ *оптимальное управление* $u^0(t, h)$ *имеет вид*

$$u^0(t, h) = \begin{cases} 0, & h_1 < h < x(t), \\ Q, & x(t) < h < h_3, \end{cases} \tag{7}$$

где $x(t)$ *— линия Ранкина–Гюгонио* [4]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) - Q\frac{s_2(t)}{s_2(t) - s_1(t)}, \qquad t \in [0, T], \quad x(T) = h_2,$$

$$s_1(t) = \xi_1[f(\xi_2) - f(x(t))], \qquad s_2(t) = \left(\xi_2 - \frac{Q}{\alpha}\right)[f(\xi_1) - f(x(t))],$$

$$\xi_1 = \xi_1(t) = x(t)e^{-\alpha(t_1^* - t)}, \qquad t_1^* = \min(t_1, T) \geq t,$$

$$\xi_1(t_1) = h_1, \qquad h_1 \leq \xi_1(T) < h_2;$$

$$\xi_2 = \xi_2(t) = x(t)e^{-\alpha(t_2^* - t)} - \frac{Q}{\alpha}(e^{-\alpha(t_2^* - t)} - 1), \qquad t_2^* = \min(t_2, T) \geq t,$$

$$\xi_2(t_2) = h_3, \qquad h_2 < \xi_2(T) \leq h_3.$$

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1961.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974.
3. *Братусь А.С., Чумерина Е.С.* Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48, №6. С. 946–966.
4. *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013.

Применение регулярности двойного преобразования Лапласа к общим свойствам интегральных преобразований Фурье (Application of regularity of the double Laplace transform to the general properties of the integral Fourier transform)

А. В. Павлов (A. V. Pavlov)

Кафедра высшей математики (МТУ) МИРЭА, Москва, Россия

login11@umail.ru

Рассматривается новый класс функций, двойное преобразование Лапласа от которых аналитично в открытой окрестности нуля [1–3] (теорема 1).

Содержанием следствия 1 является возможность аналитически продолжить преобразование Лапласа четным или нечетным образом с правой на левую часть плоскости для некоторого естественного класса функций [1–3]. Данное следствие приводит к новому классу преобразований Лапласа, четных или нечетных во всей комплексной плоскости.

Из теоремы 1 вытекает взаимная перестановочность косинус- и синус-преобразований Фурье с точностью до знака, что приводит или к равенству нулю оператора потенциала Ньютона, или к его тождественности в разных ситуациях.

Приводится парадоксальный факт о регулярности и однолистности двойного преобразования Лапласа в открытой окрестности нуля. Из данного факта вытекает, что преобразование Лапласа в виде $R_+^{-\infty}(z)$ сохраняет обыкновенное свойство четности: преобразование Лапласа четно при нечетной внутренней функции и нечетно при четной, что приводит [1, 2] к очевидному исчезновению действительной части преобразования Лапласа на мнимой оси.

Теорема 1. *Пусть функция $S_0(-z)$ регулярна в некоторой области $G(S)$, содержащей открытую окрестность нуля $\{z\colon |z| < b\} \subset$ $\subset G(S)$, $b > 0$. Из непрерывности функции $S_0(t)$ при всех $t \in [0, \infty)$ и условия $|S_0(p)| \cdot |p|^2 < c = \mathrm{const}$, $|p| \to +\infty$, $c < \infty$, следует, что функции $R_+^0(z) = R_+(z)$, $R_+^d(z) = \int_0^\infty e^{zt}\,dt \int_d^\infty e^{itx} S_0(x-a)\,dx$, $LLS_0(x-a)(\cdot)(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,dt \int_0^\infty e^{-tx} S_0(x-a)\,dx$ регулярны в открытой окрестности нуля $z\colon |z| < 2a$ при любом $a\colon 0 < 3a < b$.*

Доказательство. Первое слагаемое $L(p)$ в интеграле [3, 5]

$$\int_0^\infty e^{pt}\,dt \int_{-\infty}^{-a} e^{txi} S_0(x)\,dx =$$
$$= \int_0^\infty e^{pt}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{txi} S_0(x)\,dx - \int_0^\infty e^{pt}\,dt \int_{-a}^{\infty} e^{txi} S_0(x)\,dx$$

регулярно в области регулярности функции $S_0(-p)$, содержащей в себе по условию теоремы открытую окрестность нуля $|p| < b$, $b > 3a$. Второе слагаемое равно $-\int_0^\infty e^{(p-ai)t}\,dt \int_0^\infty e^{txi} S_0(x-a)\,dx$; исходный интеграл

$$\int_0^\infty e^{pt}\,dt \int_{-\infty}^{-a} e^{txi} S_0(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-a} \left[-\frac{S_0(x)}{p+ix}\right] dx, \qquad \operatorname{Re} p < 0,$$

регулярен при всех p: $\operatorname{Im} p \in (-a, +\infty)$, $a > 0$.

Остается заметить, что область совместной регулярности двух исходных функций включает в себя открытую окрестность нуля. (Данная регулярность является общеизвестным фактом и проверена, например, в работах [3, 4, 6].) $\square$

Следствие 1. *Очевидным следствием теоремы* 1 (*в ее условиях*) *и легко проверяемого равенства* $L(-z) = [R_+(-z) \pm R_+(z)]$, $|z| < 2a$, $a > 0$, *является четность или нечетность данного преобразования Лапласа при соответственно нечетной или четной* $S_0(x-a) = S_1(x)$ (*любая функция* $S_1(x)$, *очевидно, представима в виде некоторой сдвинутой функции* $S_0(x-a)$ *при любом* a); *функция* $L(p)$ *совпадает с первым слагаемым выражения доказательства теоремы* 1.

Список литературы

1. *Pavlov A.V.* A new inversion formula for Laplace transforms and the notion of evenness // Univers. J. Appl. Math. 2014. V. 2, N 3. P. 148–152. DOI: 10.13189/ujam.2014.020305.
2. *Pavlov A.V.* The new inversion of Laplace transform // J. Math. Syst. Sci. 2014. N 4. P. 197–201.
3. *Павлов А.В.* Достоверное прогнозирование функций, представимых в виде преобразований Лапласа или Фурье // Вестн. МГТУ МИРЭА. 2014. Т. 3, №2. С. 78–85.
4. *Pavlov A.V.* The disciplines of service with priority for the short requirements and identical service: Publ. FGBOU VPO MGTUMIREA (MIREA). Moscow, 2014. 119 pp. http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/300386.
5. *Павлов А.В.* Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа // Мат. заметки. 2011. Т. 90, №5. С. 792–796.

6. *Pavlov A.V.* About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier // Issues of analysis (Petrozavodsk). 2016. V 23, N 1. P. 21–30.

Calculation of subdifferentials for semiregular functions*

Evgenii Polovinkin

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

polovinkin.es@mipt.ru

In the study of non-smooth continuous functions $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ at a local minimum at some point $x_0 \in X$ the necessary extremum condition takes the form of inclusion $0 \in \partial_{\mathrm{C}} f(x_0)$, where $\partial_{\mathrm{C}} f(x_0)$ is the Clarke subdifferential [1, 2]. In more complicated problems of mathematical control theory sometimes it is necessary to calculate subdifferentials of Clarke's type [2, 3]. However, the calculation of these subdifferentials for non-smooth and non-convex functions is not a very simple task. In this paper we obtain fairly simple formulas for the calculation of various directional derivatives, and consequently subdifferentials, including the Clarke subdifferential for a class of nonsmooth semiregular functions that contains functions representable as the difference of two locally Lipschitz continuous convex functions.

Let X be real Banach spaces. We denote by $B_r(x_0)$ the open ball of radius $r > 0$ with the centre x_0 in the space X. As usual, the classical directional derivative of a function $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ at the point x_0 in the direction $u \in X$ is defined by the following expression:

$$f'(x_0, u) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)).$$

For a locally Lipschitz continuous function $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}^1$ at the point x_0 in the direction $u \in X$ let us consider M-derivatives $D_M^+ f(x_0)(u)$, where $M \in \{\mathrm{U}, \mathrm{L}, \mathrm{C}, \mathrm{AL}, \mathrm{MP}\}$, with U standing for "upper" [4–6], L for "lower" [4, 5, 7], C for "Clarke" [1, 2, 4], AL for "asymptotic lower" [4, 7], and MP for "Michel–Penot" [8, 4].

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00259a).

The M-subdifferential of a function $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}^1$ at the point $x_0 \in \operatorname{dom} f$ (for any $M \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$) is the subset of the dual space X^* defined by the formula

$$\partial^+_M f(x_0) \doteq \bigl\{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \le D^+_M f(x_0)(x)\ \forall\, x \in X\bigr\}.$$

Definition 1. For a continuous function $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ which has finite classical directional derivatives at the point $x_0 \in X$, we define functions g and φ by the formulas

$$g(x) := f(x_0) + f'(x_0, x - x_0), \qquad \varphi(x) := f(x) - g(x); \tag{1}$$

that is, the function f in the neighborhood $B_r(x_0)$ of the point x_0 is represented as a sum of its quasilinear part g and a remainder φ.

It is obvious that the functions g and φ at the point x_0 have classical directional derivatives and, moreover,

$$g'(x_0, u) = f'(x_0, u), \qquad \varphi'(x_0, u) = 0 \qquad \forall u \in X.$$

Hence for all $u \in X$ the following inequalities hold:

$$D^+_{\mathrm{C}} f(x_0)(u) \ge D^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{AL}} g(x_0)(u) = D^+_{\mathrm{C}} g(x_0)(u) \ge f'(x_0, u),$$
$$D^+_{\mathrm{MP}} \varphi(x_0)(u) = 0,$$

from which, in particular, the inequality $0 \le D^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0)(u)$ follows for all $u \in X$, which is equivalent to the inclusion $0 \in \partial^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0)$.

Definition 2. A continuous function $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ is called *semiregular at the point* $x_0 \in X$ if it has finite classical directional derivatives along any vector at the point x_0, the corresponding function φ defined by (1) is Lipschitz continuous in some neighborhood of the point x_0 and the equality $\partial^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0) = \{0\}$ holds, that is, $D^+_{\mathrm{C}} \varphi(x_0)(u) = 0$ for all $u \in X$.

Here are some subclasses of semiregular functions:

1. Any positively homogeneous Lipschitz continuous function is semiregular at the point $0 \in X$, as $\varphi(u) = 0$.

2. A function which has finite directional derivatives along any vector at the point x_0 and for which the corresponding function φ from (1) is convex and bounded in some neighborhood of the point x_0 is semiregular.

3. A convex function f is semiregular at the point x_0 if the equalities $f'(x_0, u) + f'(x_0, -u) = 0$ hold for all $u \in X$. In particular, every convex

function f that is Gateaux differentiable at the point x_0 is semiregular at this point.

4. For a non-convex function $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ to be semiregular at the point x_0, it is sufficient that it is strictly differentiable at the point $x_0 \in X$.

At the same time a non-convex differentiable function may not be semiregular. For example, a function $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ of the form $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ and $f(0) = 0$ is differentiable, but it is not semiregular at zero. Here $f'(0,u) = 0$, $\varphi(x) = f(x)$ and $D^+_{\mathrm{C}}\varphi(0)(u) = |u|$ for all $u \in \mathbb{R}^1$.

We also show that not every Lipschitz continuous function which is Clarke regular at some point is semiregular at this point.

Theorem 1. *Let $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ be a semiregular function at the point x_0. Then all M-derivatives of the function f coincide, that is, $\forall M \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$*

$$D^+_M f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)\bigr) \qquad \forall u \in X,$$

which is equivalent to the coincidence of all subdifferentials $\partial^+_{\mathrm{C}} f(x_0) = \partial^+_{\mathrm{MP}} f(x_0) = \partial^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)$.

Theorem 2. *Let a function $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ be a difference of two convex functions f_1 and f_2 that are semiregular at the point x_0, that is, $f = f_1 - f_2$. Then all M-derivatives of the function f coincide, that is, $\forall M \in \{\mathrm{C}, \mathrm{MP}, \mathrm{AL}\}$*

$$D^+_M f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\bigl(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)\bigr) \qquad \forall u \in X,$$

which is equivalent to the coincidence of all subdifferentials $\partial^+_{\mathrm{C}} f(x_0) = \partial^+_{\mathrm{MP}} f(x_0) = \partial^+_{\mathrm{AL}} f(x_0)$.

A complete description of the results obtained in the report is presented in [9], where examples of computing the subdifferentials for the difference of two convex functions are also given and an example of a convex function that is not semiregular at some points is demonstrated.

References

1. *Clarke F.H.* Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 205. P. 247–262.
2. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis. New York: Wiley-Interscience, 1983.
3. *Polovinkin E.S.* Differential inclusions with measurable-pseudo-Lipschitz right-hand side // Proc. Steklov Inst. Math. 2013. V. 283. P. 116–135.

4. *Polovinkin E.S.* Set-Valued Analysis and Differential Inclusions. Moscow: Fizmatlit, 2014 (in Russian).
5. *Demyanov V.F., Rubinov A.M.* Nonsmooth Analysis and Quasidifferential Calculus. Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).
6. *Aubin J.-P.* Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions // Adv. Math. Suppl. Stud. 1981. V. 7A. P. 159–229.
7. *Aubin J.-P., Frankovska H.* Set-Valued Analysis. Boston: Birkhäuser, 1990.
8. *Michel P., Penot J.-P.* Calcul sous-différentiel pour les fonctions lipschitziennes et non-lipschitziennes // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1984. V. 298. P. 269–272.
9. *Polovinkin E.S.* Calculation of subdifferentials for the difference of two convex functions // J. Convex Anal. 2017. V. 24, N 1. P. 286–303.

О задаче быстродействия для волнового уравнения с управлениями из шара (On time-optimal problem for the wave equation with controls from a ball)

М. М. Потапов (M. M. Potapov)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

michaelpotapov@hotmail.com

Рассматривается управляемый процесс, динамика которого описывается функцией $y = y(t,x)$, являющейся решением следующей начально-краевой задачи для волнового уравнения:

$$y_{tt} = y_{xx} - q(x)y, \qquad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$

$$y|_{x=0} = u_0(t), \qquad y|_{x=l} = u_1(t), \qquad 0 < t < T,$$

$$y|_{t=0} = 0, \qquad y_t|_{t=0} = 0, \qquad 0 < x < l.$$

Значения $T > 0$, $l > 0$ и коэффициент $q(x) \in C[0,l]$, $q(x) \geq 0$, предполагаются заданными. Граничные управления $u = (u_0(t), u_1(t))$ выбираются из пространства Соболева $H = H^1(\mathring{0},T) \times H^1(\mathring{0},T)$ и не должны выходить за пределы шара заданного радиуса $R > 0$:

$$u \in B_R = \{u \in H \mid \|u\|_H \leq R\}.$$

Целью управления является перевод системы в заданное состояние $f^0(x) \in H^1(0,l)$ с заданной скоростью $f^1(x) \in L^2(0,l)$, причем сделать это требуется за наименьшее время. В задаче быстродействия для любой наперед заданной целевой пары $f = \big(f^0(x), f^1(x)\big) \in F = H^1(0,l) \times \times L^2(0,l)$ ищется наименьшее время достижимости $T_\star = T_\star(f)$ цели f:

$$T_\star = \inf_{T>0} T, \qquad y(T,x) = f^0(x), \quad y_t(T,x) = f^1(x), \quad 0 < x < l,$$

а также и некоторое допустимое управление $u_\star \in B_R$, под действием которого цель f достигается за оптимальное время $T_\star$.

В данной работе предложен численный алгоритм, который по приближенным данным $\widetilde{f} \in F$, $\|\widetilde{f} - f\|_F \le \delta$, и соответствующему уровню погрешности $\delta > 0$ вырабатывает приближенные решения $\widetilde{T}_\star > 0$ и $\widetilde{u}_\star \in H$ задачи быстродействия, обладающие сходимостью

$$|\widetilde{T}_\star - T_\star| \to 0, \qquad \|\widetilde{u}_\star - u_\star\|_H \to 0$$

к ее точным решениям при $\delta \to 0$ и асимптотическом уточнении параметров конечномерной аппроксимации, которая используется при вычислении фазовой траектории $y(t,x)$. Предлагаемый здесь метод и его теоретическое обоснование представляют собой непосредственное развитие результатов работы [1], полученных для аналогичной задачи, в которой ограничения на управления отсутствовали, т.е. $R = \infty$. Как известно [1, 2], в рассматриваемых здесь функциональных классах при $R = \infty$ для любой цели $f \in F$ соответствующее значение $T_\star(f)$ времени быстродействия является докритическим: $T_\star(f) \le T_{\text{c}} = l$, а если оно оказывается в точности критическим: $T_\star(f) = T_{\text{c}} = l$, то оптимальное по быстродействию управление $u_\star(f)$ не обязательно существует. В нашем случае, когда значение $R > 0$ конечно, время быстродействия $T_\star(f)$ может оказаться и сверхкритическим: $T_\star(f) > T_{\text{c}} = l$, но независимо от его значения оптимальное по времени управление $u_\star$ обязательно существует, единственно и для сверхкритических значений $T_\star(f) > T_{\text{c}} = l$ времени быстродействия оно обязательно находится на границе шара: $\|u_\star\|_H = R$. Это свойство, названное *свойством насыщения нормы*, было отмечено в недавней работе [3], в которой алгоритмические и вычислительные аспекты проблемы быстродействия не затрагивались.

Процедура приближенного решения задачи быстродействия без ограничений из [1] является в нашем алгоритме одним из модулей, а основной итерационный процесс поиска времени быстродействия основан на следующем его представлении:

$$T_\star(f) = \inf_{T>0} : \quad \inf_{u \in B_R} \|A_T u - f\|_F = 0, \tag{1}$$

где $A_T \colon H \to F$, $A_T u = (y(T,\cdot), y_t(T,\cdot))$, — оператор управления. Чтобы практически распознавать, равна или не равна нулю нижняя грань невязки в условии (1), используется возможность замены в этом условии нормы $\|\cdot\|_F$ на более слабую норму $\|\cdot\|_G$ в некотором гильбертовом пространстве G, в которое имеющееся пространство F вкладывается компактно. Одним из возможных таких вариантов является, например, $G = C[0,l] \times H^{-1}(0,l)$.

Список литературы

1. *Иванов Д.А., Потапов М.М.* Приближенное решение задачи быстродействия для волнового уравнения с граничными управлениями // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 112–127.
2. *Потапов М.М., Иванов Д.А.* Задачи двустороннего граничного управления для волнового уравнения на докритических промежутках в классах сильных обобщенных решений // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. №4. С. 192–202.
3. *Lohéac J., Zuazua E.* Norm saturating property of time optimal controls for wave-type equations // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49, N 8. P. 37–42.

An anthropomorphic sub-Riemannian model for image reconstruction and pattern recognition

Dario Prandi, Jean-Paul Gauthier

LSIS, Université de Toulon, France

dario.prn@gmail.com, gauthier@univ-tln.fr

In his beautiful book Jean Petitot proposes a sub-Riemannian model for the primary visual cortex of mammals. This model is neurophysiologically justified. Further developments of this theory lead to efficient algorithms for image reconstruction, based upon the consideration of an associated hypoelliptic diffusion. The sub-Riemannian model of Petitot (or certain of its improvements) is a left-invariant structure over the group SE(2) of rototranslations of the plane. Here, we propose a semi-discrete version of this theory, leading to a left-invariant structure over the group $\mathrm{SE}(2;N)$, restricting to a finite number of rotations. This apparently very simple group is in fact quite atypical: it is maximally almost periodic, which leads to much simpler harmonic analysis compared to $\mathrm{SE}(2)$. Based upon this semi-discrete model, we improve on the image-reconstruction algorithms and we develop a pattern-recognition theory that leads also to very efficient algorithms in practice.

Численные методы решения одной задачи оптимального управления (Numerical methods for the solution of an optimal control problem)

С. П. Самсонов (S. P. Samsonov)

Московский государственный университет, Москва, Россия

samsonov@cs.msu.su

Работа посвящена рассмотрению численных методов решения линейных задач оптимального управления. Использование линейности управляемой системы позволяет построить эффективно работающие численные алгоритмы. Разработке численных методов для линейных задач оптимального управления посвящен целый ряд работ. Следует, однако, заметить, что в большинстве опубликованных работ исследуется только сходимость методов и задается какой-то критерий остановки вычислений, который обеспечивает "близость" вычисляемых величин к искомым, но не гарантирует заданной точности. Обычно используемые численные алгоритмы требуют численного решения некоторых задач из теории дифференциальных уравнений, линейной алгебры и т.д. Однако вычислительные погрешности решения этих вспомогательных задач могут оказаться весьма значительными, поэтому большой интерес представляют такие численные методы, для которых удается получить оценку точности вычислений с учетом вычислительных погрешностей.

Данный доклад как раз и посвящен численным методам, решающим линейные задачи оптимального управления с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей [1].

Список литературы

1. *Самсонов С.П.* Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Проблемы динамического управления. 2009. Вып. 4. С. 156–158.

Simultaneous control of ensembles of nonlinear control systems

Andrey Sarychev

Dip. di Matematica e Informatica U.Dini, University of Florence, Italy

asarychev@unifi.it

Over the last decade there is a growing interest with regard to the *control of ensembles (parameterized families) of nonlinear control systems*

$$\dot{x}^\theta = f^\theta(x^\theta, u), \qquad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^\nu, \tag{1}$$

by a single θ-independent control $u(\cdot)$. Such problem arises for example, when one seeks for a control, which may compensate a dispersion of parameters.

One of notable examples is the Bloch model in NMR spectroscopy, seen as a bilinear control system in $SO(3)$ with a parameter subject to dispersion. Partial controllability results for this model have been obtained by N. Khaneja and S. Li, who also suggested applying the Campbell–Hausdorff formula for "generating higher order Lie brackets ... which carry higher order powers of the dispersion parameters."

An alternative problem setting amounts to *finding for a control system $\dot{x} = f(x,u)$ a "simultaneous control" $u(t)$ which (approximately) drives an ensemble of points $x(\theta)$, $\theta \in \Theta$, to a target $z(\theta)$.* In our presentation we opt for L_p-approximate controllability: $\int_\Theta \|x(T;\theta) - z(\theta)\|^p \, d\theta < \epsilon^p$.

In a recent publication [1] with A. Agrachev and Yu. Baryshnikov we aimed at introducing a Lie algebraic ("geometric control") approach to the controllability of (1).

We started with finite ensembles (finite Θ), to which Lie rank criteria of *exact controllability* can be applied after proper modification. We proved that the property of global controllability for a finite ensemble of control-linear systems is generic and, as an example, established global controllability by means of a single scalar control for a finite ensemble of rigid bodies with generic inertial parameters.

For *continual* ensembles (1) achieving exact controllability would require, in general, infinite-dimensional set of control parameters. Instead we fix the dimension of control and study L_1-approximate controllability.

In the setting we first considered a model example of "controlling the holonomy" for an ensemble of 2-distributions in $\mathbb{R}^3$, where we get necessary and sufficient conditions for approximate controllability. We proceed then to a general ensemble of r-distributions (control-linear systems) on a manifold, for which we formulate sufficient approximate controllability criteria in terms of the Lie algebraic span. This is a version of the Rashevsky–Chow theorem for control-linear ensembles.

In what regards the "simultaneous control" of ensembles of points $x(\theta)$, the controllability criteria are similar in spirit to the previously mentioned results, but the formulations and the proofs differ. We establish genericity of the property of exact global controllability for *finite point ensembles*, and advance with a formulation of a version of the Rashevsky–Chow theorem for continual point ensembles.

References

1. *Agrachev A., Baryshnikov Yu., Sarychev A.* Ensemble controllability by Lie algebraic methods // ESAIM COCV. 2016. V. 22. P. 921–938.

Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия (Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a two-dimensional manifold)*

М. В. Шамолин (M. V. Shamolin)

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Во многих задачах динамики возникают механические системы с пространствами положений — двумерными многообразиями. Фазовыми пространствами таких систем естественным образом становятся касательные расслоения к ним. Так, например, изучение пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке среды приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1]. В данном случае динамические системы обладают переменной диссипацией и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [1, 2]. Известен также класс задач о движении точки по двумерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательных расслоениях к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией [1, 3] и обобщают ранее рассмотренные.

Уравнения геодезических и их первые интегралы. Как известно, в случае двумерного риманова многообразия M^2 с координатами (α,β) и аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$ уравнения геодезических линий на касательном расслоении $T_*M^2\{\dot\alpha,\dot\beta;\alpha,\beta\}$ примут следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot\alpha+\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+2\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta+\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0,$$

$$\ddot\beta+\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2+2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta+\Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2=0.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00848-а).

Рассмотрим замену координат касательного пространства $\dot\alpha = R_1 z_1 + R_2 z_2$, $\dot\beta = R_3 z_1 + R_4 z_2$, которую можно обратить: $z_1 = T_1\dot\alpha + T_2\dot\beta$, $z_2 = T_3\dot\alpha + T_4\dot\beta$, при этом R_k, T_k, $k = 1, \ldots, 4$, — функции от α, β. Назовем эти уравнения *новыми кинематическими соотношениями*. Справедливы тождества

$$\dot z_1 = \dot\alpha^2\{T_{1\alpha} - T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_2\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{1\beta} + T_{2\alpha} - 2T_1\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} + \\ + \dot\beta^2\{T_{2\beta} - T_1\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_2\Gamma^\beta_{\beta\beta}\},$$

$$\dot z_2 = \dot\alpha^2\{T_{3\alpha} - T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} - T_4\Gamma^\beta_{\alpha\alpha}\} + \dot\alpha\dot\beta\{T_{3\beta} + T_{4\alpha} - 2T_3\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - 2T_4\Gamma^\beta_{\alpha\beta}\} + \\ + \dot\beta^2\{T_{4\beta} - T_3\Gamma^\alpha_{\beta\beta} - T_4\Gamma^\beta_{\beta\beta}\},$$

где $T_{k\alpha} = \partial T_k/\partial\alpha$, $T_{k\beta} = \partial T_k/\partial\beta$, $k = 1, \ldots, 4$.

Рассмотрим достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде: $\dot\alpha = -z_2$, $\dot\beta = z_1 f(\alpha)$, где $f(\alpha)$ — гладкая функция. Если выполнены свойства $\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\beta_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) \equiv \Gamma^\beta_{\beta\beta}(\alpha,\beta) \equiv 0$, то система, эквивалентная уравнениям геодезических, может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_2, \\ \dot z_2 = \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot\beta = z_1 f(\alpha). \end{cases} \tag{1}$$

Предложение 1. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) f^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{2}$$

то система (1) *имеет аналитический первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \mathrm{const}\,. \tag{3}$$

Предложение 2. *Если функция* $\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)$ *является функцией лишь* α:

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha), \tag{4}$$

то система (1) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_2(z_1;\alpha) = z_1\Phi_0(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}, \tag{5}$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(b)\,db\right\}.$$

Если выполнено свойство (4) и функция $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)$ также является функцией лишь α: $\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha)$, то в системе (1) появляется независимая подсистема третьего порядка, состоящая из первых трех уравнений (уравнение на $\dot\beta$ отделяется). В частности, если выполнены свойства (2), (4), то такая независимая подсистема появляется.

Предложение 3. *Если выполнены условия* (2), (4), *то система* (1) *имеет первый интеграл следующего вида*:

$$\Phi_3(z_2,z_1;\alpha,\beta) = \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2 f(a)}{\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(a) - C_2^2}}\,da = C_3 = \mathrm{const}, \tag{6}$$

где после взятия интеграла (6) *вместо постоянных* C_1, C_2 *нужно подставить левые части равенств* (3), (5) *соответственно.*

Динамика на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с диссипацией. Несколько модифицируем систему (1), получив систему с диссипацией. Наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует коэффициент $bg(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (7). Добавляется также потенциальное поле сил в виде коэффициента $F(\alpha)$ во втором уравнении системы (7). Рассматриваемая система на касательном расслоении $T_*M^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = -z_2 + bg(\alpha), \\ \dot z_2 = F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)f^2(\alpha)z_1^2, \\ \dot z_1 = \left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_1 z_2, \\ \dot\beta = z_1 f(\alpha). \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - bg'(\alpha)\dot\alpha + F(\alpha) + \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \\ \ddot\beta - bg(\alpha)f(\alpha)\dot\beta + 2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию системы (7) при выполнении свойств (2), (4).

Теорема. *Пусть для некоторых* $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ *выполняются равенства*

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|g(\alpha)|, \qquad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{g^2(\alpha)}{2}.$$

Тогда система (7) *обладает тремя независимыми трансцендентными первыми интегралами* (*см. также* [3, 4]).

Список литературы

1. *Шамолин М.В.* Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007.
2. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16, №4. С. 3–229.
3. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНИТИ, 2013. Т. 125. С. 4–254. (Итоги науки и техники).
4. *Шамолин М.В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20, №4. С. 3–231.

Псевдогиперболические уравнения с разрывными коэффициентами четвертого порядка (Fourth-order pseudohyperbolic equations with discontinuous coefficients)

Г. Д. Шукюрова (G. D. Shukurova)

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

shukurova-gulnara@rambler.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. В цилиндре $Q_T = (0, T) \times \Omega$ рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt} - a(t)\Delta u_{tt} + b(t)\Delta^2 u = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} D^{\alpha} f_{\alpha}(t, x), \qquad (t, x) \in Q_T, \qquad (1)$$

$$u(t,x) = \Delta u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T] \times \Gamma, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $u_0(x)$, $u_1(x)$, $a(t)$, $b(t)$, и $f_\alpha(t,x)$, $|\alpha| \leqslant 2$, — заданные функции.

Введем обозначения

$$\widehat{W}_2^m = \Big\{u\colon\ u \in W_2^m(\Omega),\ \Delta^i u(x) = 0,\ x \in \Gamma,\ i = 0,1,\ldots,\Big(\frac{m}{2}\Big)\Big\},$$

где $m = 0,1,\ldots$, $\left(\frac{m}{2}\right) = l-1$, если $m = 2l$, и $\left(\frac{m}{2}\right) = l$, если $m = 2l+1$;

$$\widehat{W}_2^s = \big[\widehat{W}_2^m, \widehat{W}_2^{m+1}\big]_{1-\alpha}, \qquad \widehat{W}_2^{-s} = (W_2^s)',$$

где $[\widehat{W}_2^m, \widehat{W}_2^{m+1}]_{1-\alpha}$ — интерполяционное пространство порядка $1-\alpha$ между $\widehat{W}_2^m$, $\widehat{W}_2^{m+1}$, $\alpha = s - m$, $m \leqslant s \leqslant m+1$ (см. [1]);

$$W_2^1\big(0,T;\widehat{W}_2^{1+s},\widehat{W}_2^s\big) = \big\{u\colon\ u \in L_2\big(0,T;\widehat{W}_2^{1+s}\big),\ u_t \in L_2\big(0,T;\widehat{W}^s\big)\big\}$$

(см. [1]). Через $\mathrm{BV}[0,T]$ обозначим совокупность определенных на $[0,T]$ функций, имеющих ограниченную вариацию.

Функция $u(\cdot) \in W_2^1(0,T;\widehat{W}_2^{1+s},\widehat{W}_2^s)$ называется s-слабым решением задачи (1)–(3), если при любых $v \in W_2^1(0,T;\widehat{W}_2^{1+s},\widehat{W}_2^s)$, $v(T) = 0$, выполняется тождество

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (u'(\tau), v'(\tau))\,d\tau - \int_0^T a(\tau)(\nabla u'(\tau), \nabla v'(\tau))\,d\tau +{}\\
+\int_0^T b(\tau)(\Delta u(\tau), \Delta v(\tau))\,d\tau - (u'(0), v(0)) - (\nabla u'(0), \nabla v'(0)) ={}\\
= \sum_{|\alpha|\leqslant 2} \int_0^T (D^\alpha f_\alpha(\tau,\cdot), v(\tau))\,d\tau,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Используя теорию полугрупп, доказывается, что если

$$a(\cdot), b(\cdot) \in \mathrm{Lip}[0,T], \tag{6}$$

$$a(t) \geqslant a_0 > 0, \qquad b(t) \geqslant b_0 > 0, \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$f_\alpha(\cdot) \in \widehat{W}_2^{|\alpha|+s-2}, \qquad |\alpha| \leqslant 2, \tag{8}$$

$$u_0(\cdot) \in \widehat{W}_2^{1+s}, \qquad u_1 \in \widehat{W}_2^s, \tag{9}$$

то задача (1)–(3) имеет единственное s-слабое решение $u(t,x)$ и $u(\cdot) \in$ $\in C([0,T],\widehat{W}_2^{1+s}) \cap C^1([0,T],\widehat{W}_2^s)$. Как и для гиперболических уравнений, возникает аналогичный вопрос, можно ли отказаться от липшицевой непрерывности функций $a(t)$ и $b(t)$, т.е. от условия (6) (см. [2, 3]). Здесь доказана следующая

Теорема. *Пусть выполнены условия* (7)–(9) *и*

$$a(\cdot), b(\cdot) \in \mathrm{BV}[0,T]. \tag{10}$$

Тогда задача (1)–(3) *имеет единственное s-слабое решение* $u(\cdot) \in$ $\in W_2^1(0,T;\widehat{W}_2^{1+s},\widehat{W}_2^s)$.

Список литературы

1. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи. М.: Мир, 1971.
2. *Colombini F., De Giorge E., Spagnolo S.* Existence et unicité des solutions des équations hyperboliques du second ordre à coefficients ne dependant que du temps // C. R. Acad. Sci. Paris A. 1978. V. 286. P. 1045–1048.
3. *De Simon L., Torelli G.* Linear second order differential equations with discontinuous coefficients in Hilbert spaces // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. Ser. IV. 1974. V. 1. P. 131–154.

On one ill-posed problem of package guidance*

Nikita Strelkovskii

International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

strelkon@iiasa.ac.at

The method of program packages is a tool for solution of the guaranteed positional control problems with incomplete information on the initial state of the system. In this talk the application of the method to a linear dynamical system with a linear observed system is considered. An example for which the corresponding problem turns out to be ill-posed is presented.

Let us consider a linear dynamic controlled system described by an ordinary differential equation

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + c(t), \qquad t_0 \le t \le \vartheta. \tag{1}$$

*The work was supported by the Russian Science Foundation under grant 14-11-00539.

An open-loop control (program) $u(\cdot)$ is a measurable function on $[t_0, \vartheta]$, $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^r$, where P is a convex compact set. The initial state of the system may be not known a priori: $x(t_0) = x_0 \in X_0 \subset \mathbb{R}^n$, where X_0 is a finite known set. The terminal condition $x(\vartheta) \in M \subset \mathbb{R}^n$, where M is a closed and convex set, should hold.

A linear signal $y(t) = Q(t)x(t)$, where $Q(\cdot)$ is left piecewise continuous matrix-function, $Q(t) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, is observed by the controlling side.

The problem of positional guidance is formulated as follows: based on a given arbitrary $\varepsilon > 0$, choose a closed-loop control strategy with memory such that, whatever the system's initial state $x_0 \in X_0$, the motion $x(\cdot)$ corresponding to the chosen closed-loop strategy and starting at time t_0 from the state x_0 reaches the state $x(\vartheta)$ belonging to the ε-neighbourhood of the target set M at time ϑ.

Definition 1. A homogeneous signal corresponding to an admissible initial state $x_0 \in X_0$ is a function $g(\cdot)$ such that

$$g_{x_0}(t) = Q(t)F(t, t_0)x_0, \qquad t \in [t_0, \vartheta], \quad x_0 \in X_0,$$

where $F(t, s)$, $t, s \in [t_0, \vartheta]$, is the fundamental matrix of the homogeneous system $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ corresponding to (1).

The set of all admissible initial states $x_0 \in X_0$ corresponding to the homogeneous signal $g(\cdot) \in G$ till time point $\tau \in [t_0, \vartheta]$ is given by

$$X_0(\tau|g(\cdot)) = \bigl\{x_0 \in X_0\colon\ g(\cdot)|_{[t_0,\tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0,\tau]}\bigr\}.$$

Definition 2. Two arbitrary homogeneous signals $g'(\cdot)$ and $g''(\cdot)$ are initially compatible if

$$\lim_{\zeta\to+0}\bigl(g'(t_0+\zeta) - g''(t_0+\zeta)\bigr) = 0.$$

Definition 3. A program package is an open-loop control family $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ satisfying the non-anticipatory condition: for any homogeneous signal $g(\cdot)$, any time point $\tau \in (t_0, \vartheta]$ and any admissible initial states $x_0', x_0'' \in X_0(\tau|g(\cdot))$, the equality $u_{x_0'}(t) = u_{x_0''}(t)$ holds for almost all $t \in [t_0, \tau]$. The program package $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ is guiding if for all $x_0 \in X_0$ it holds that $x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot)) \in M$.

Definition 4. The package guidance problem is solvable if a guiding program package exists.

It was proven that the problem of positional guidance is solvable if and only if the problem of package guidance is solvable [1]; the solvability criterion of the latter and the constructive conditions for identifying the elements of the guiding program package were formulated in [2, 3].

Let us show that the package guidance problem is ill-posed. For this purpose let us consider the following example.

Example 1. Let us consider an arbitrary linear dynamic system (1) and the observed signal $y(t) = Q(t)x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, where $Q(t) = (0\ 1)$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Let us assume that the program package guidance problem is solvable for the set $X_0 = \{x_0', x_0''\}$, where $x_0' = \left(\begin{smallmatrix} x_{01}' \\ \delta \end{smallmatrix}\right)$ and $x_0'' = \left(\begin{smallmatrix} x_{01}'' \\ -\delta \end{smallmatrix}\right)$, $\delta > 0$. It is clear that the uniform signals $g_{x_0'}(t) = \delta$, $t \in [t_0, \vartheta]$, and $g_{x_0''} = -\delta$, $t \in [t_0, \vartheta]$, are not initially compatible for any $\delta > 0$; thus, the initial states x_0' and x_0'' belong to different clusters of the cluster position $\mathcal{X}_0(t_0)$ (for the definition of the cluster position, see, e.g., [2]). But if $\delta = 0$, then $g_{x_0'} = g_{x_0''} = 0$, $t \in [t_0, \vartheta]$, and it is impossible to distinguish the initial states x_0' and x_0'', so the solution of the package guidance problem (i.e., the solvability criterion) does not depend continuously on $\delta \to 0$.

One of the possible regularization methods is foreseen in a guidance of the whole δ-vicinity of any initial state $x_0 \in X_0$ for a relatively small $\delta > 0$. The obtained program package will depend on δ; thus, it does not correspond to the original program package; however, taking into account the approximate nature of the initial (positional guidance) problem statement, one can use the methods suggested in [4] to construct the resulting positional strategy satisfying the requirement of ε-guidance.

References

1. *Kryazhimskiy A.V., Osipov Y.S.* Idealized program packages and problems of positional control with incomplete information // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. V. 268, Suppl. 1. P. 155–174.
2. *Kryazhimskii A.V., Strelkovskii N.V.* An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information: Linear control systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291, Suppl. 1. P. 113–127.
3. *Strelkovskii N.V.* Constructing a strategy for the guaranteed positioning guidance of a linear controlled system with incomplete data // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2015. V. 39, N 3. P. 126–134.
4. *Surkov P.G.* On the guidance problem with incomplete information for a linear controlled system with time delay // Problems of Dynamic Control: Collection of scientific papers of the VMK Faculty, MSU / ed. by Y.S. Osipov. Moscow: MAKS Press, 2016. P. 94–108.

Гамильтоновы системы в решении краевых задач с фазовыми ограничениями для уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана (Hamiltonian systems in solutions of boundary problems with state constraints for Hamilton–Jacobi–Bellman equations)*

Н. Н. Субботина (N. N. Subbotina)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

subb@uran.ru

Как известно, многие практические задачи приводят к необходимости рассмотрения уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби–Беллмана в подобластях фазового пространства, определяемых заданными фазовыми ограничениями [1]. При этом, как правило, решение понимается в обобщенном смысле. Оно известно на начальном многообразии, представляющем собой часть границы рассматриваемой подобласти, и требуется определить его внутри области фазовых ограничений и на оставшейся части границы. Основным инструментом в конструировании решений таких задач являются обобщения метода Коши, опирающегося на “фазовые и сопряженные характеристики” задачи, т.е. на решения гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями на границе заданных фазовых ограничений. Существенную роль в этих построениях играют вспомогательные задачи управления нелинейными системами в классе обобщенных управлений [2] и необходимое условие оптимальности — принцип максимума Л.С. Понтрягина [3].

В докладе представлены исследования краевой задачи с фазовыми ограничениями для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, возникающей в молекулярной биологии для модели Кроу–Кимуры генетической эволюции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

где гамильтониан $H(\cdot)$ имеет вид

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00074).

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}. \qquad (2)$$

Функция $f(\cdot)$ в (2) задана и называется фитнесом. Уравнение (1) рассматривается в полосе $\Pi = \{(t,x)\colon t \geq 0,\ -1 \leq x \leq 1\}$. Задано начальное условие

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [-1,1]. \qquad (3)$$

В современной теории уравнений Гамильтона–Якоби известны две эквивалентные концепции обобщенного решения: минимаксного [4] и вязкостного [5], опирающиеся на аппарат и методы негладкого анализа. Однако понятие минимаксного решения не вводилось для задач с фазовыми ограничениями. Вязкостные решения были определены и для задач с фазовыми ограничениями, но они вводились в предположении коэрцитивности гамильтониана, а в данной задаче гамильтониан некоэрцитивен при $x = \pm 1$.

Поэтому введено следующее оригинальное определение непрерывного решения рассматриваемой задачи, где $\Pi = (0,\infty) \times (-1,1)$.

Определение 1. Непрерывная функция $u(\cdot)\colon \overline{\Pi} \to R$ называется обобщенным решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальному условию (3) и справедливы следующие соотношения:

$$a + H(x,s) \leq 0 \qquad \forall\,(a,s) \in D^{+}u(t,x), \quad \forall\,(t,x) \in \Pi, \qquad (4)$$

$$a + H(x,s) \geq 0 \qquad \forall\,(a,s) \in D^{-}u(t,x), \quad \forall\,(t,x) \in \Pi, \qquad (5)$$

$$a + H(x,s) \geq 0, \qquad \forall\,(a,s) \in D^{-}u(t,x) \cap \partial u(t,x), \quad \forall\,(t,x) \in \Gamma_T. \qquad (6)$$

Здесь $\Gamma_T = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x = 1\} \cup \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x = -1\}$,

$$D^{-}u(t,x) = \left\{(a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \liminf_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\ (\tau,y)\in\overline{\Pi}}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right\},$$

$$D^{+}u(t,x) = \left\{(a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\ (\tau,y)\in\overline{\Pi}}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right\},$$

$$\partial u(t,x) = \mathrm{co}\Big\{ (a,s) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t}, \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x}\right),$$
$$(t_i,x_i)\to(t,x) \ \text{при} \ i\to\infty, \ (t_i,x_i)\in\overline{\Pi}\cap\mathrm{Dif}(u)\Big\},$$

символом $\mathrm{Dif}(u)$ обозначено множество всех точек дифференцируемости функции $u(\cdot)\in C(\overline{\Pi})$, символ co обозначает выпуклую оболочку.

Характеристическая (гамильтонова) система для задачи (1)–(3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p},\\ \dot{p} &= -H_x(x,p) = f'(x) + \frac{e^{2p}-e^{-2p}}{2},\\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p) = p\dot{x} + q \end{aligned} \tag{7}$$

с начальными условиями

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \qquad y\in[-1,1]. \tag{8}$$

На базе решений гамильтоновой системы получены достаточные условия существования обобщенного решения и предложен алгоритм его построения, аналогичный конструкции из работы [6], где обобщенное решение строится в компактной области.

Предложение. *Пусть в рассматриваемой задаче* (1)–(3) *выполняются следующие условия*:

- *функции* $f(\cdot)$, $u_0(\cdot)$ *непрерывно дифференцируемы*;
- *для решений* $x(t,y)$ *гамильтоновой системы* (7), (8) *справедливы при всех* $t\geq 0$ *соотношения*
$$x(t,+1)\geq x(t,y)\geq x(t,-1) \qquad \forall\, y\in[-1,+1];$$
- $u_0'(+1)<0, \ u_0'(-1)>0$;
- *производная* $f'(\cdot)=\partial f(\cdot)/\partial x\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ *определена, непрерывна, монотонно не возрастает и удовлетворяет неравенствам*
$$2f'(1)+e^{2u_0'(1)} < e^{-2u_0'(1)}, \qquad -2f'(-1)+e^{-2u_0'(-1)} < e^{2u_0'(-1)}.$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (1)–(3) *в неограниченной полосе* $\overline{\Pi}$, *причем в подобласти*

$$G_0 = \{(t,x)\colon\ t\geq 0, \ x\in[x(t,-1),x(t,+1)]\}$$

это решение имеет вид

$$u(t,x) = \max_{x(t,y)=x} \left[\int_0^t \big(p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)) \big)\, d\tau + u_0(y) \right], \quad (9)$$

где $x(\tau) = x(\tau, y)$, $p(\tau) = p(\tau, y)$ *— решения системы* (7), (8).

Обсуждаются связи построенного обобщенного решения с минимаксным и вязкостным. Приведены иллюстрационные примеры.

Список литературы

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
2. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
4. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.
5. *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.L.* Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Amer. Math. Sos. 1990. V. 318, N 2. P. 643–683.
6. *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 220–235.

Непрерывные выборки в задачах минимизации (Continuous selections in minimum problems)*

И. Г. Царьков (I. G. Tsar'kov)

МГУ, Москва, Россия

tsar@mech.math.msu.su

В работе изучаются задачи существования непрерывных выборок в задачах точной и приближенной минимизации возмущенного однородного выпуклого функционала (а также функционалов более общего вида) на некотором подмножестве M банахова пространства. Устанавли-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00295-а).

ваются достаточные и необходимые условия существования таких выборок в зависимости от структурных свойств множества M, а также от наличия критерия характеризации экстремалей.

Напомним, что отображение $F\colon X \to 2^Y$ метрических пространств X и Y называется полунепрерывным снизу, если значения F непусты и для любого замкнутого подмножества $A \subset Y$ множество $\{x \in X \mid F(x) \subset A\}$ замкнуто.

Для следующей теоремы мы изучим случай непрерывного выпуклого однородного коэрцитивного функционала $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ на конечномерном линейном нормированном пространстве, для которого множество $\{x \in X \mid f(x) \leqslant 1\}$ представляет собой многогранник (т.е. график f представляет собой многогранный конус). Утверждение теоремы будет вытекать из условия устойчивости выпуклой оболочки множества экстремалей $\mathcal{E}_f(x) := \{z \in M \mid f(z-x) = \inf_{y\in M} f(y-x)\}$.

Теорема 1. *Пусть X — конечномерное линейное нормированное пространство, $M \subset X$ — такое замкнутое множество, что отображение $F(x) := \overline{\operatorname{conv}}\,\mathcal{E}_f(x)$ полунепрерывно снизу на всем пространстве X. Тогда существует непрерывное однозначное отображение $\varphi\colon X \to M$, для которого $f(\varphi(x)-x) = \inf_{y\in M} f(y-x)$, $x \in X$. И множество экстремалей $\mathcal{E}_f(x)$ (для каждой точки $x \in X$) является стягиваемым множеством.*

Отсюда вытекает характеризационное свойство экстремалей, представляющее собой некоторый вариант теоремы об очистке.

Следствие 1. *В условиях теоремы множество M является множеством Колмогорова, т.е. для всех $x \in X\setminus M$ точка $y_0 \in M$ является экстремалью для $x \in X$ тогда и только тогда, когда для всех $y \in M$*

$$\min_{x^*\in\partial f(y_0-x)} x^*(y-y_0) \leqslant 0.$$

Определение 1. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ — выпуклый непрерывный однородный функционал на банаховом пространстве X, $\varnothing \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in \mathcal{E}_f(x) \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in \mathcal{E}_f((1-\lambda)y+\lambda x)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (это геометрически означает, что из точки y исходит луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является экстремалью для x из M).

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $\mathcal{E}_f(x) \neq \varnothing$ и каждая точка $y \in \mathcal{E}_f(x)$ является точкой светимости. Если все точки из $X \setminus M$ являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество M называют *солнцем* (*строгим солнцем*) *относительно* f.

Отметим, что точка $x \in X$ называется точкой существования (экстремалей) для M, если $\mathcal{E}_f(x) \neq \varnothing$. В случае, когда это выполнено для всех точек $x \in X$, множество M называют множеством существования.

Отметим, что множество, являющееся строгим солнцем, является в точности множеством существования Колмогорова, т.е. все элементы наилучшего приближения могут быть охарактеризованы в форме критерия Колмогорова (см. [2]) и само множество является множеством существования. Солнце же является так называемым обобщенным множеством существования Колмогорова, т.е. его точки светимости могут быть охарактеризованы в форме критерия Колмогорова. Различные свойства солнц и связанные с ними задачи существования непрерывных выборок для случая $f(x) = \|x\|$ можно найти в работах [1–7]. Упомянем также, что свойство локальной солнечности вместе с единственностью определяет регулярные точки, которые играют важную роль в описании гладких решений уравнения эйконала (см. [8, 2]).

Теорема 2. *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ *— выпуклый непрерывный однородный функционал на банаховом пространстве* X, M *— такое строгое солнце (т.е. множество существования Колмогорова) относительно* f, *что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует отображение* $\varphi \in C(X, M)$, *для которого* $f(\varphi(x) - x) \leqslant (1+\varepsilon)\inf_{y\in M} f(y-x)$. *Тогда множество* $\{y \in M \mid f(y-x) \leqslant R\}$ *стягиваемо для всех* $x \in X$ *и* $R > \inf_{y\in M} f(y-x)$.

Теорема 3. *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}_+$ *— выпуклый непрерывный однородный функционал на банаховом пространстве* X, $M \subset X$ *— такое множество, что* $\{y \in M \mid f(y-x) \leqslant R\}$ *компактно для любых* $x \in X$ *и* $R > 0$, *и пусть для любого* $\varepsilon > 0$ *существует отображение* $\varphi \in C(X, M)$, *для которого* $f(\varphi(x) - x) \leqslant (1+\varepsilon)\inf_{y\in M} f(y-x)$ *(или* $f(\varphi(x)-x) \leqslant \inf_{y\in M} f(y-x)+\varepsilon$*). Тогда множество* M *является солнцем относительно* f, *т.е. обобщенным множеством Колмогорова.*

Заметим, что рассматриваемая в теоремах 1–3 задача минимизации возмущенных функционалов $f(y-x)$ может быть переформулирована следующим образом:

$$f(y) \to \inf \quad \text{на аддитивно возмущенном множестве } M_x := M + x.$$

Определение 2. Пусть (X, q) — полуметрическое пространство. Функция $\psi\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *полунепрерывной снизу*, если для всех точек $x_0 \in X$ верно неравенство $\varliminf_{x\to x_0} \psi(x) \geqslant \psi(x_0)$.

Теорема 4. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *— линейное полунормированное пространство,* $f\colon X\times X\to\mathbb{R}$ *— равномерно непрерывный на любом ограниченном множестве функционал (не обязательно неотрицательный) такой, что* $f(x,x)\equiv 0$, $M\subset X$ *— такое непустое множество, что* $\{y\in M \mid f(x,y)<r\}$ *либо пусто, либо бесконечно связно для всех* $x\in X$ *и* $r>0$*. Тогда для любой полунепрерывной снизу функции* $\psi\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$: $\inf_{y\in M} f(x,y)<\psi(x)$ $(x\in X)$ *существует отображение* $\varphi\in C(X,M)$: $f(x,\varphi(x))<\psi(x)$ $(x\in X)$.

Список литературы

1. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и другие геометрические свойства солнц и чебышевских множеств // Фунд. и прикл. математика. 2014. Т. 63, №4. С. 21–91.
2. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // УМН. 2016. Т. 71, №1. С. 3–84.
3. *Царьков И.Г.* Локальная и глобальная непрерывная ε-выборка // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80, №2. С. 165–184.
4. *Царьков И.Г.* Непрерывная ε-выборка // Мат. сб. 2016. Т. 207, №2. С. 123–142.
5. *Царьков И.Г.* Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Мат. заметки. 1990. Т. 48, №4. С. 122–131.
6. *Царьков И.Г.* Свойства множеств, обладающих устойчивой ε-выборкой // Мат. заметки. 2011. Т. 89, №4. С. 608–613.
7. *Алимов А.Р.* Монотонная линейная связность чебышевских множеств в пространстве $C(Q)$ // Мат. сб. 2006. Т. 197, №9. С. 3–18.
8. *Царьков И.Г.* Особые множества и их связь с особенностями решений уравнения эйконала // Тр. НИИСИ РАН. 2016. Т. 6, №2. С. 126–128.

Об обобщенных почти стробоскопических стратегиях в задаче преследования (On generalized almost stroboscopic strategies in the pursuit problem)*

М. Тухтасинов (M. Tukhtasinov)

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

mumin51@mail.ru

В данной работе рассмотрены конфликтно-игровые задачи преследования. При этом воздействия на объект управления игроков имеют характер импульсного или интегрального ограничения.

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Az + u - v, \qquad z \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

где $u, v \in \mathbb{R}^d$ — параметры управления преследующего и убегающего игроков соответственно, A — постоянная матрица порядка $d \times d$, U — непустое подмножество в $\mathbb{R}^d$, терминальное множество представляется бесконечным цилиндром вида $M^* = M^0 + M$, где M^0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^d$, M — непустое подмножество из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^d$ на L. Пусть $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без конечных точек сгущения.

Классом допустимых управлений преследователя является множество импульсных функций, которые выражаются дельта-функцией Дирака

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \qquad u_i \in U, \quad t \geq 0.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований РУз (грант ОТ-Ф4-33).

А множество всех измеримых функции $v(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|v(\vartheta)\|^2 \, d\vartheta \leq \sigma^2, \qquad i = 1, \ldots, \tag{2}$$

где σ — неотрицательное фиксированное число, определяет класс допустимых управлений убегающего игрока, который обозначим через $V[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Пусть определены отображения $F_i \colon V[\tau_{i-1}, \tau_i] \to U$, $i = 1, \ldots, m$, где $m \in N$.

Определение. Пусть $v_i(\cdot) \in V[\tau_{i-1}, \tau_i]$. Тогда следующее отображение F называем обобщенной почти стробоскопической стратегией:

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t), & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ v_2(t), & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \cdots & \cdots \\ v_m(t), & t \in [\tau_{m-1}, \tau_m], \end{cases}$$

$$Fv(\cdot)(t) = \begin{cases} \delta(t - \tau_1) F_1 v_1(\cdot), & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ \delta(t - \tau_2) F_2 v_2(\cdot), & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ \cdots & \cdots \\ \delta(t - \tau_m) F_m v_m(\cdot), & t \in [\tau_{m-1}, \tau_m]. \end{cases}$$

Рассматривается игра (1) при условии, что преследующий игрок применяет импульсное управление, убегающий имеет право применять измеримое управление $v(t)$, $t \geq 0$, с условием $v(\cdot) \in V[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, 2, \ldots$.

Замечание. В работах [1, 2] управление преследователя строилось в виде контруправления. Однако для определения момента τ_K переключения с одного закона на другой необходима была информация в момент t о всей предыстории управления убегающего. Поэтому в целом стратегию преследователя, реализующую окончание преследования, следует классифицировать как квазистратегию.

Пусть $v(t)$, $t \geq 0$, — допустимое управление убегающего игрока. Рассмотрим следующие множества:

$$W_i(m, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_m - \tau_i)A} U - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_m - r)A} v(r) \, dr,$$

$$W_i(m) = \bigcap_{v(\cdot) \in V[\tau_{i-1}, \tau_i]} W_i(m, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_m - \tau_i)A} U \underline{*} \, G_i(m; \tau_{i-1}, \tau_i),$$

где

$$G_i(m;\tau_{i-1},\tau_i)=\left\{x\in L\colon\ x=\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\pi e^{(\tau_m-r)A}v(r)\,dr,\ \ v(\cdot)\in V[\tau_{i-1},\tau_i]\right\},$$

а $X \underset{-}{*} Y=\{x\colon x+Y\subset X\}=\bigcap_{y\in Y}(X-y)$ означает геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y.

Лемма 1. *Множества $G_i(m;\tau_{i-1},\tau_i)$ являются выпуклыми компактными подмножествами подпространства L.*

Предположение. Множества $\operatorname{int}W_i(m)$ непусты при всех $i = 1,2,\ldots,m$.

Если справедливо предположение, то можно выбрать некоторый элемент $w_i(m)$ из каждого множества $\operatorname{int}W_i(m)$. Пусть $w=\{w_i(m)\}_{i=1}^m$, положим

$$\xi(m,z,w)=\pi e^{(\tau_m-\tau_0)A}z+\sum_{i=1}^m w_i(m).$$

При $i=1,\ldots,m$ определим следующие функционалы:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\alpha}_i(m,z,v(\cdot),w)=\\&\quad=\max\bigl\{\alpha\geq 0\colon \alpha\bigl[M-\xi(m,\,z,\,w)\bigr]\cap\bigl[W_i(m,v(\cdot))-w_i(m)\bigr]\neq\varnothing\bigr\}.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь при $0\in M-\xi(m,z,w)$ предполагается $\widetilde{\alpha}_1(m,z,v(\cdot),w)=1$, $\widetilde{\alpha}_i(m,z,v(\cdot),w)=0$, $i=2,\ldots,m$.

Лемма 2. *Пусть M, U — выпуклые компактные множества. Тогда при фиксированных m, z, w функционал $\widetilde{\alpha}_i(m,z,v(\cdot),w)$, $i\in\{1,\ldots,m\}$, из* (3) *слабо полунепрерывен на множестве $V[\tau_{i-1},\tau_i]$.*

Пусть

$$\min_{v(\cdot)\in V[\tau_{i-1},\tau_i]}\widetilde{\alpha}_i(m,z,v(\cdot),w)=\widetilde{\alpha}_i(m,z,w),\qquad i=1,\ldots,m.$$

Введем следующее обозначение:

$$k=k(m,z,w)=\min\left\{j\in\{1,2,\ldots,m\}\colon\ \sum_{i=1}^j\widetilde{\alpha}_i(m,z,w)\geq 1\right\}.$$

Если неравенство в фигурных скобках не выполнено ни при одном $j\in\{1,2,\ldots,m\}$, то положим $k=m+1$. Определим разрешающие функции [1, 2]

$$\alpha_i(m,z,w) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}_i(m,z,w), & i = 1,2,\ldots,k-1, \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \widetilde{\alpha}_i(m,z,w), & i = k, \\ 0, & i = k+1, k+2, \ldots, m. \end{cases}$$

Введем обозначение

$$N(z,w) = \min\left\{ m \in \mathbb{N}\colon \ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(m,z,w) = 1 \right\}.$$

Теорема. *Если для системы* (1) *выполнено предположение, множества* M, U *выпуклы и компактны,* $N(z,w) < \infty$ *для начального положения* $z = z^0$ *и некоторого набора* $w = \{w_i(m)\}$, $w_i(m) \in \operatorname{int} W_i(m)$, $i = 1, \ldots, m$, *то существует обобщенная почти стробоскопическая стратегия* F *преследователя такая, что при любом допустимом управлении* $v(\cdot)$ *убегающего игрока соответствующую траекторию* $z(t)$ *системы* (1) *можно вывести на терминальное множество* M^* *в момент времени* $t = \tau_{N(z^0,w)}$.

Список литературы

1. *Чикрий А.А., Матичин И.И.* Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, №1. С. 211–224.
2. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, №3. С. 273–282.

Регуляризованный экстраградиентный метод в многокритериальной задаче управления для волнового уравнения (Regularized extragradient method in a multicriteria control problem for the wave equation)*

Ф. П. Васильев (F. P. Vasil'ev),
М. М. Потапов (M. M. Potapov),
Л. А. Артемьева (L. A. Artem'eva)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

vasiliev.fp@gmail.com, michaelpotapov@hotmail.com,
artemieva.luda@gmail.com

Пусть управляемый процесс описывается следующей начально-краевой задачей для функции $y = y(t,x) = y(t,x;u)$ в прямоугольнике $Q = (0,T) \times (0,l)$:

$$\begin{gathered} y_{tt} = y_{xx}, \qquad (t,x) \in Q, \\ (-y_x + \sigma y)|_{x=0} = u(t), \qquad y|_{x=l} = 0, \qquad 0 < t < T, \\ y|_{t=0} = 0, \qquad y_t|_{t=0} = 0, \qquad 0 < x < l. \end{gathered} \tag{1}$$

Значения $T > 0, l > 0$ и $\sigma > 0$ предполагаются заданными, а присутствующие в левом граничном условии управления $u = u(t)$ выбираются из заданного выпуклого замкнутого множества U гильбертова пространства Лебега:

$$u \in U \subset L^2(0,T).$$

Как известно [1, 2], для каждого $u = u(t) \in L^2(0,T)$ задача (1) имеет единственное обобщенное решение $y(t,x) \in H^1(Q)$, удовлетворяющее условиям $y|_{t=0} = 0$, $y|_{x=l} = 0$ и интегральному тождеству

$$\iint_Q (-y_t\Phi_t + y_x\Phi_x)\,dx\,dt + \int_0^l y_t\Phi|_{t=T}\,dx + \int_0^T (\sigma y - u(t))\Phi|_{x=0}\,dt = 0$$

*Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00539).

для любой пробной функции $\Phi = \Phi(t, x) \in H^1(Q)$, $\Phi|_{x=l} = 0$. Это решение $y(t, x)$ обладает также и дополнительными свойствами регулярности (см., например, [3]):

$$y \in C(\overline{Q}), \qquad y(t, \cdot) \in C([0, T], H^1(0, \mathring{l})), \qquad y(\cdot, x) \in C([0, l], H^1(\mathring{0}, T)),$$
$$y_t(t, \cdot) \in C([0, T], L^2(0, l)), \qquad y_x(x, \cdot) \in C([0, l], L^2(0, T)).$$

Пусть для оценивания качества управлений $u \in U \subset L^2(0, T)$ используются $m \geq 2$ гладких и выпуклых функционалов $f^i(u)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и пусть требуется найти их минимум на U в смысле Слейтера [4]:

$$f(u) = \big(f^1(u), f^2(u), \ldots, f^m(u)\big) \to \text{S-min}, \qquad u \in U. \tag{2}$$

В зависимости от имеющихся целевых установок в качестве таких критериев можно выбрать подходящий комплект, например, из следующих интегральных квадратичных функционалов, отражающих физически осмысленные цели:

$$f^1(u) = \int_0^l (y(t_0, x; u) - y_1(x))^2\,dx, \quad f^2(u) = \int_0^l (y_x(t_0, x; u) - y_2'(x))^2\,dx,$$
$$f^3(u) = \int_0^T (y(t, x_0; u) - y_3(t))^2\,dt, \quad f^4(u) = \int_0^T (y_t(t, x_0; u) - y_4'(t))^2\,dt,$$
$$f^5(u) = \int_0^l (y_t(t_0, x; u) - y_5(x))^2\,dx, \quad f^6(u) = \int_0^T (y_x(t, x_0; u) - y_6(t))^2\,dt,$$
$$f^7(u) = \iint_Q (y(t, x; u) - y_7(t, x))^2\,dt\,dx.$$

Здесь точки $t_0 \in (0, T]$ и $x_0 \in [0, l]$ (их может быть и несколько) и функции $y_1(x), y_5(x) \in L^2(0, l)$, $y_2(x) \in H^1(0, \mathring{l})$, $y_4(t) \in H^1(\mathring{0}, T)$, $y_3(t), y_6(t) \in$ $\in L^2(0, T)$, $y_7(t, x) \in L^2(Q)$ предполагаются заданными.

В постановку задачи многокритериальной оптимизации (2) могут входить как квадратичные функционалы из приведенного набора $f^1(u)$, $f^2(u), \ldots, f^7(u)$, так и другие критерии, обладающие теми же свойствами выпуклости, дифференцируемости по Фреше на $L^2(0, T)$ и удовлетворяющие условию Липшица вместе со своими градиентами на любом выпуклом замкнутом и ограниченном множестве из $L^2(0, T)$. Для решения задачи (2) будем использовать предложенный нами в [5] экстраградиентный метод, который, в отличие от процедур градиентного типа из [6, 7], ориентирован на решение многокритериальных задач с *неточными данными* и в *бесконечномерных* гильбертовых пространствах. Заметим, что в [5] в качестве одного из возможных приложений была рассмотрена и задача многокритериальной оптимизации управляемого процесса, моделируемого параболическим уравнением. Для уточнения постановки многокритериальной задачи (2) и описания итерационного метода введем функцию-свертку

$$F(u,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^i f^i(u), \qquad u\in U, \quad \lambda\in\Lambda=\left\{\lambda\in E^m:\ \lambda\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda^i=1\right\},$$

и рассмотрим задачу минимизации этой функции на множестве U:

$$F(u,\lambda)\to\inf, \qquad u\in U. \tag{3}$$

Как известно [4], точка $u^*\in U$ будет точкой Слейтера функции $f(u)$ на множестве U тогда и только тогда, когда существует набор $\lambda\in\Lambda$ такой, что $u^*=u^*(\lambda)$ является решением задачи (3). Тем самым множество всех точек Слейтера векторного критерия $f(u)$ полностью исчерпывается элементами вида $u^*=u^*(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$.

При выборе множителя λ в (3) можно руководствоваться различными соображениями. Предположим, что априорная информация, позволяющая локализовать подобласть приоритетных значений λ, отсутствует. Тогда представляется целесообразным вместе с оптимальным элементом $u^*\in U$ искать и оптимальный набор множителей $\lambda^*\in\Lambda$, понимая их совместную оптимальность, например, в седловом смысле:

$$F(u^*,\lambda)\leqslant F(u^*,\lambda^*)\leqslant F(u,\lambda^*) \qquad \forall\, u\in U \quad \forall\,\lambda\in\Lambda.$$

Допустим, что вместо точных входных данных $f(u)$, $f'(u)$ нам известны некоторые их приближения $f_k(u)$, $f'_k(u)$, $k=0,1,\dots$, такие, что

$$\max\bigl\{\|f_k(u)-f(u)\|,\|f'_k(u)-f'(u)\|\bigr\}\leqslant\delta_k(1+\|u\|), \qquad u\in U,$$

а также известны и соответствующие уровни погрешностей $\delta_k>0$. Отметим, что от приближений $f_k(u)$ дифференцируемость не требуется и под $f'_k(u)$ понимаются приближения к точным производным $f'(u)$. Для построения устойчивых приближений к искомой седловой точке используется регуляризованный вариант экстраградиентного метода, центральное место в котором занимает функция Тихонова:

$$t_k(u,\lambda)=F_k(u,\lambda)+\frac{\alpha_k}{2}\bigl(\|u\|^2-\|\lambda\|^2\bigr), \qquad F_k(u,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^i f_k^i(u),$$

а также ее производные $\partial_\lambda t_k$ по λ и "производные" $\partial_u t_k$ по u:

$$\partial_u t_k(u,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i f_k^{i\,\prime}(u) + \alpha_k u, \qquad \partial_\lambda t_k(u,\lambda) = f_k(u) - \alpha_k \lambda,$$

где $\alpha_k > 0$ — параметр регуляризации.

Основная итерационная процедура имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{u}_k &= \pi_U\big(u_k - \beta_k\, \partial_u t_k(u_k,\lambda_k)\big), & \overline{\lambda}_k &= \pi_\Lambda\big(\lambda_k + \beta_k\, \partial_\lambda t_k(u_k,\lambda_k)\big), \\ u_{k+1} &= \pi_U\big(u_k - \beta_k\, \partial_u t_k(\overline{u}_k,\overline{\lambda_k})\big), & \lambda_{k+1} &= \pi_\Lambda\big(\lambda_k + \beta_k\, \partial_\lambda t_k(\overline{u}_k,\overline{\lambda}_k)\big), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\beta_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots,$ — шаги градиентного процесса, а π_U и π_Λ — операторы проектирования на множества U и Λ соответственно.

При сделанных предположениях доказывается, что процесс (4) формирует траекторию $z_k = (u_k, \lambda_k)$, не выходящую за пределы некоторого ограниченного множества в пространстве $L^2(0,T) \times E^m$, после чего на этом множестве удается оценить константы Липшица как самой функции-свертки, так и ее производных по переменным u и λ. Значения этих констант используются далее в формулировках требований к параметрам метода α_k, β_k и условий их согласования с уровнями погрешностей δ_k.

Главным результатом работы является установленное при выполнении упомянутых выше требований свойство сильной сходимости приближений (u_k, λ_k) к особой (единственной) седловой точке (u^*, λ^*) функции-свертки $F(u,\lambda)$ на множестве $U \times \Lambda$, имеющей среди других седловых точек *наименьшую* норму:

$$\|u_k - u^*\|_{L^2(0,T)} \to 0, \qquad |\lambda_k - \lambda^*|_{E^m} \to 0 \qquad \text{при} \;\; k \to \infty.$$

При этом первая предельная компонента u^* последовательности (u_k, λ_k) будет точкой Слейтера многокритериальной задачи (1), (2).

Список литературы

1. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978.
3. *Lasiecka I., Lions J.L., Triggiani R.* Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators // J. Math. Pures Appl. 1986. V. 65. P. 149–192.
4. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007.

5. *Васильев Ф.П., Потапов М.М., Артемьева Л.А.* Регуляризованный экстраградиентный метод в многокритериальных задачах управления с неточными данными // Диф. уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1555–1567.
6. *Fliege J., Svaiter B.F.* Steepest descent methods for multicriteria optimization // Math. Methods Oper. Res. 2000. V. 51. P. 479–494.
7. *Grana Drummond L.M., Iusem A.N.* A projected gradient method for vector optimization problems // Comput. Optim. Appl. 2004. V. 28. P. 5–29.

Analogue of Pontryagin's maximum principle for multiple integrals minimization problems

M. I. Zelikin

Moscow State University, Moscow, Russia

mzelikin@mtu-net.ru

Let $\mathfrak{N}$ be a domain on a smooth n-dimensional manifold. Let $\rho\colon \xi \to \mathfrak{N}$ be a ν-dimensional vector bundle over the base $\mathfrak{N}$; the fibre of this bundle over a point $t \in \mathfrak{N}$, i.e., the full preimage of the point t under the mapping ρ, is a ν-dimensional linear space. Local coordinates on $\mathfrak{N}$ will be denoted by $t = (t^1, \dots, t^n)$, and those on fibres, by $x = (x^1, \dots, x^\nu)$. The common convention on summation over repeated indices is used, with the Latin indices, related to coordinates on the base, running from 1 to n, and the Greek ones, related to coordinates on fibres, running from 1 to ν. Multi-indices will be denoted by capital letters. The symbol I means the whole set from 1 to n. Consider

$$\mathcal{F} = \int_V f\left(t, x, \frac{Dx}{Dt}\right) dt^I. \tag{1}$$

Let us denote by $J_1(\xi)$ the bundle of 1-jets over ξ, and let

$$q_i^\alpha := \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i} = g_i^\alpha(t, x) \tag{2}$$

be a section of $J_1(\xi)$.

Problem 1. Given $y(\cdot) \in C^1(\partial\mathfrak{N})$, find the strong minimum of the functional over C^1-manifolds $x(\cdot)\colon \mathfrak{N} \to \xi$ defined in $\mathfrak{N}$ subject to the boundary conditions $x(t)|_{\partial\mathfrak{N}} = y(t)$.

The natural necessary condition of minimum of the functional is the non-negativity of the second variation. Thorough investigation of the second variation for multiple integrals is due to A. Clebsch. He studied the Dirichlet functional

$$\delta^2\mathcal{F}=\int_V\left[\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}\right)\partial\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial t^j}\right)}\frac{\partial h^\alpha}{\partial t^i}\frac{\partial h^\beta}{\partial t^j}+2\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}\right)\partial x_\beta}\frac{\partial h^\alpha}{\partial t^i}h^\beta+\frac{\partial^2\hat{f}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}h^\alpha h^\beta\right]dt^I.$$

The hat over a function (say, $\hat{f}$) means that one substitutes the extremal $\hat{x}(t)$ into all its arguments.

By using ideas of many-dimensional Riccati techniques, Clebsch presupposed the existence of a solution to a partial differential Riccati-type equation. Now we know that it is the many-dimensional counterpart of the condition of absence of conjugate points. Using this solution, he transformed variables and reduced the functional to its principal part, that is, to the quadratic form of the converted first derivatives of the desired functions.

It seems that Clebsch believed that for multiple integrals there is a direct analogue of the necessary Legendre condition: The non-negativity of the second variation implies the non-negativity of the principal part of the quadratic form defined on all $n\times\nu$ matrices

$$q_i^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}.$$

Half a century after the work of Clebsch, J. Hadamard showed that it is not true. Hadamard proved the following necessary optimality condition:

Theorem 1 (Hadamard)**.** *Let the functional*

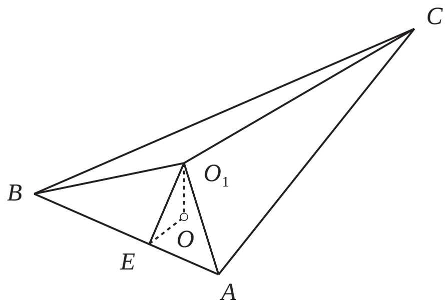
$$\delta^2\mathcal{F}=\int_V\left[a^{ij}_{\alpha\beta}(t)\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial t^j}+2c^i_{\alpha\beta}(t)\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}x^\beta+b_{\alpha\beta}(t)x^\alpha x^\beta\right]dt^I \tag{3}$$

be non-negative for $x(\cdot)$ satisfying the boundary condition

$$x|_{\partial V}=0.$$

Then for all values of $t\in V$, the quadratic form $a^{ij}_{\alpha\beta}(t)q_i^\alpha q_j^\beta$ takes non-negative values on all $n\times\nu$ matrices of the form $q_i^\alpha=\xi^\alpha\eta_i$ (that is, on all matrices of rank 1*).*

The theorem can be reformulated as follows: The biquadratic form $a^{ij}_{\alpha\beta}(t)\xi^\alpha\xi^\beta\eta_i\eta_j$ is non-negative for all $t\in V$ and $\xi\in\mathbb{R}^\nu$, $\eta\in(\mathbb{R}^n)^*$.



Scheme of the variation (δx).

The gap between the necessary and sufficient conditions was essentially diminished by Van Hove. In the late 1940s he proved that the natural amplification of the Hadamard–Legendre condition

$$\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}\right)\partial\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial t^j}\right)}\xi^\alpha\xi^\beta\eta^i\eta^j \geq \varepsilon|\xi|^2|\eta|^2 \tag{4}$$

is a locally sufficient condition of C^1-minimum. The term "locally sufficient" means that the domain of integration is sufficiently small.

We denote by $\mathcal{U}$ the set of matrices of rank 1.

The role of Pontryagin's function will be played by

$$H = -f + q^i_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}.$$

Theorem 2 (maximum principle)**.** *Suppose f is a smooth function. Suppose that $\hat{x}(\cdot)$ provides a strong minimum for the functional in Problem* 1*.*

Then there exists a solution to the conjugate system of variational equations such that Pontryagin's function H attains its maximum value on the set of slopes $\frac{Dx}{Dt}$ defined by the rank 1 *matrices $\mathcal{U}$:*

$$\max_{(\xi^\alpha\eta^i)\in\mathcal{U}}\left[-f\left(t,\hat{x},\frac{D\hat{x}}{Dt}+(\xi^\alpha\eta_i)\right)+\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{Dx}{Dt}\right)}(\xi^\alpha\eta_i)\right] = -\hat{f}+\frac{\partial \hat{f}}{\partial\left(\frac{Dx}{Dt}\right)}\left(\frac{D\hat{x}}{Dt}\right). \tag{5}$$

Here we can only demonstrate the scheme of the used variation (see the figure).

Example 1. As an example, consider a problem associated with elasticity theory.

It is required to minimize the functional

$$\int_{\mathfrak{N}} \left[a(z_1^2+z_4^2)+b(z_2^2+z_3^2)+2c\det z\right] dt^1\wedge dt^2. \tag{6}$$

Here

$$z_1=\frac{\partial x^1}{\partial t^1},\qquad z_2=\frac{\partial x^1}{\partial t^2},\qquad z_3=\frac{\partial x^2}{\partial t^1},\qquad z_4=\frac{\partial x^2}{\partial t^2}.$$

The term containing $\det z = z_1 z_4 - z_2 z_3$ defines the contraction–expansion degree of the material; the coefficient $2c$ is called the solid elasticity modulus. The coefficients a and b are connected with the Lame constants, that is, with the tensor of elasticity modulus. The slopes of the surface (variables z_i) serve as control variables.

The matrix of the quadratic form in the integrand is

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & c\\ 0 & b & -c & 0\\ 0 & -c & b & 0\\ c & 0 & 0 & a\end{pmatrix}.$$

The eigenvalues of the matrix are $\lambda_1 = a-c$, $\lambda_2 = a+c$, $\lambda_3 = b-c$, and $\lambda_4 = b+c$. Let, say, $a>b$. For $a>c>b$ one of the eigenvalues is negative. The quadratic form is non-convex. The maximum of Pontryagin's function

$$H=-\left\{a\left(\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right)^2+a\left(\frac{\partial x^1}{\partial t^4}\right)^2+b\left(\frac{\partial x^2}{\partial t^1}\right)^2+b\left(\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\right)^2\right.$$
$$\left.+2c\left(\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\frac{\partial x^2}{\partial t^4}-\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^1}\right)\right\}+q_\alpha^i\frac{\partial x^\alpha}{\partial t^i}$$

(which would be in line with the naive generalization of Pontryagin's maximum principle) is not attained on any extremal. Nevertheless, the restriction of this function to the level surface of the rank 1 matrices reduces H to a positive definite quadratic form.

Indeed, the first variation on extremals is zero. The variations of control $h=(h_1,h_2,h_3,h_4)$ that correspond to directions with the rank 1 matrices are equivalent to the degenerate matrices h. So, the main quadratic part of the expansion in h of the term $\det z$ on such variations (that is, $h_1h_4-h_2h_3$) equals zero. There remains a positive definite quadratic form, which ensures our maximum principle. To test sufficient conditions, one should appeal to the theory of fields of extremals.

Example 2. Consider the problem of minimizing the functional

$$\int_{\mathfrak{N}} \left[(z_1)^3 + (z_2)^3\right] dt^1 \wedge dt^2. \tag{7}$$

Here

$$z_1 = \frac{\partial x^1}{\partial t^1}, \qquad z_2 = \frac{\partial x^2}{\partial t^2}, \qquad V = \{t_1^2 + t_2^2 \leq 1\}.$$

The boundary conditions are $x_1|_V = \cos\varphi$ and $x_2|_V = \sin\varphi$.

The Euler equations have the form

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(3\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)^2\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t_2}\left(3\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\right)^2\right) = 0. \tag{8}$$

It is easy to see that the unique solution to the Euler equations satisfying the boundary conditions is $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$. The second variation at the extremal on the rank 1 matrices equals $6\xi_1^2\eta_1^2 + 6\xi_2^2\eta_2^2$. It is strictly positive, so the Hadamard–Legendre condition of the weak minimum is fulfilled. However, Pontryagin's function on the rank 1 matrices equals $-(\xi_1^3\eta_1^3 + \xi_2^3\eta_2^3) + 6(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)$. It reaches only a local maximum on the extremal $\{\xi_1\eta_1 = 1, \xi_2\eta_2 = 1\}$. The global maximum equals $+\infty$. By Theorem 2 we conclude that the minimum on the extremal is not strong.

Особые экстремали в обобщенной задаче Фуллера (Singular extremals in the generalised Fuller problem)

М. И. Зеликин (M. I. Zelikin),
Д. Д. Киселев (D. D. Kiselev),
Л. В. Локуциевский (L. V. Lokutsievskiy)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Всероссийская академия внешней торговли, Москва, Россия
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

mzelikin@mtu-net.ru, denmexmath@yandex.ru, lion.lokut@gmail.com

Рассмотрим обобщенную задачу Фуллера

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \langle x, Cx \rangle \, dt \to \min \tag{1}$$

на траекториях управляемой системы

$$x^{(n)} = u, \qquad |u| \leqslant 1, \quad x \in V, \quad u \in U = V,$$

$$x^{(k)}(0) = x_k^0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

где V — конечномерное евклидово пространство достаточно высокой размерности со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а C — некоторый невырожденный самосопряженный линейный оператор. Функция $x(t)$ считается абсолютно непрерывной вместе со своими $2n-1$ производными. Управление $u(t) \in L_1(0, +\infty)$.

Выпишем систему принципа максимума для задачи (1). Положим

$$x_1 = x, \quad x_1' = x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}' = x_n.$$

Тогда гамильтониан (функция Понтрягина) имеет вид ($p_1, \ldots, p_n$ — сопряженные переменные)

$$H = -\lambda_0 \langle Cx_1, x_1 \rangle + \langle p_1, x_2 \rangle + \ldots + \langle p_n, u \rangle.$$

Нетрудно показать, что $\lambda_0 \neq 0$. Положив $\lambda_0 = 1/2$, получаем

$$p_1' = Cx_1, \quad p_2' = -p_1, \quad \ldots, \quad p_n' = -p_{n-1} \qquad \text{и} \qquad u = \frac{p_n}{|p_n|}.$$

Вид этой системы сильно упростится, если ввести обозначения

$$z_k = (-1)^{n-k} p_{n-k+1} \qquad \text{и} \qquad z_{n+k} = Cx_k \qquad \text{при } k \leqslant n. \tag{2}$$

Тогда $x = C^{-1} z_{n+1}$ и

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = z_3, \quad \ldots, \quad z_{2n}' = Cu, \qquad u = (-1)^{n+1} \frac{z_1}{|z_1|}. \tag{3}$$

Определим $[n/2]$-элементное множество $B \subset \mathbb{R}$ решений системы

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \prod_{j=1}^{2n} (ix + j) = 0, \\ (-1)^{n-1} \operatorname{Re} \prod_{j=1}^{2n} (ix + j) > 0, \\ x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Рассмотрим любой набор двумерных плоскостей* $L_m \subseteq \subseteq V_{j_m}$, $m = 1, \ldots, N$, *где* V_{j_m} *— какие-то различные*[1] *собственные подпространства формы* C. *Если набор собственных значений* $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_N}$ *формы* C *удовлетворяет условию*[2]

$$\frac{P_n(i\alpha_{j_1})}{\lambda_{j_1}} = \frac{P_n(i\alpha_{j_2})}{\lambda_{j_2}} = \ldots = \frac{P_n(i\alpha_{j_N})}{\lambda_{j_N}} = \mu$$

для каких-то различных $\alpha_{j_m} \in B$, *то любая траектория вида*

$$z_1 = \sum_{m=1}^{N} b_m t^{2n} \exp\bigl\{\pm i\alpha_{j_m} \ln|t|\bigr\} y_m, \qquad u = \sum_{m=1}^{N} \exp\bigl\{\pm i\alpha_m \ln|t|\bigr\} y_m, \tag{5}$$

является оптимальной для задачи (1) *при любом выборе единичных векторов* $y_m \in L_m$ *и ненулевых чисел* $b_m \in \mathbb{R}$, *лишь бы* $\mu^2 \sum_{m=1}^{N} b_m^2 = 1$.

Отметим, что в решениях (5) управление движется по обмотке клиффордова тора $\mathbb{T}^N = (L_1 \times \ldots \times L_N) \cap \{|u| = 1\}$, проходит ее целиком[3] за конечное время и выходит на особый режим $x = u = 0$. Сама траектория

[1] Случай $N = 1$ не исключается. В этом случае подойдет любое собственное значение λ_j формы C, лишь бы $\dim V_j \geqslant 2$.

[2] Всюду ниже $P_n(x) = (x+1) \ldots (x+2n)$.

[3] Точнее ту ее половину, которая соответствует положительному направлению времени.

$x(t)$ представляет собой соответствующую обобщенную логарифмическую спираль, которая тоже проходится за конечное время. Более того, если значения $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_N}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то полученная обмотка тора $\mathbb{T}^N$ является всюду плотной.

Теорема 2. *Для любого натурального $n > 3$ хотя бы два элемента множества B линейно независимы над $\mathbb{Q}$. В частности, при любом натуральном $n > 3$ в задаче (1) можно построить решение, управление которого за конечное время пробегает половину всюду плотной обмотки двумерного тора, соответствующую положительному направлению времени.*

Всюду далее для простого $q > 3$ положим $x_q = 1+1/2+\ldots+1/(q-1)$.

Теорема 3. *Пусть $n = p+1$ для некоторого простого $p > 5$, причем числа $q = 2n+1$ и $r = 2n+7$ также просты, $x_q \not\equiv 0 \pmod{q^3}$, а 889 не является квадратом по модулю r. Тогда все элементы множества B линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Перечислим все натуральные $n \leqslant 600$, удовлетворяющие условиям теоремы 3: $n \in \{8, 18, 20, 30, 48, 270, 338, 410, 488, 558\}$.

Определим многочлен $f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени $n-1$ условием

$$x f_n(x^2) = \operatorname{Im} P_n(ix). \tag{6}$$

Теорема 4. *Если для почти всех простых p из арифметической прогрессии $\{26 + 69k \mid k \in \mathbb{N}\}$ многочлен $f_{p+1}(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$, то существует бесконечная последовательность натуральных n, для каждого элемента которой все числа из B линейно независимы над $\mathbb{Q}$. В частности, в указанных предположениях можно построить задачу оптимального управления, управление в которой пробегает за конечное время половину всюду плотной обмотки тора любой наперед заданной размерности.*

Если простое число $p \in \{26+69k \mid k \in \mathbb{N}\}$ таково, что число $2p+3$ также просто с условием $x_{2p+3} \not\equiv 0 \pmod{(2p+3)^3}$, причем p не представимо в виде $(r^{st}-1)/(r^s-1)$ ни для каких простого r и натуральных s, t, то рассуждения доказательства теоремы 4 позволяют показать линейную независимость над $\mathbb{Q}$ всех элементов множества B для $n = p+1$. Например, это так при $p \in \{1613, 34\,503\,269, 499\,989\,827\}$, как показывает следующий результат.

Теорема 5. *При $n \in \{1614, 34\,503\,270, 499\,989\,828\}$ все элементы множества B линейно независимы над $\mathbb{Q}$. В частности, для любого* *натурального $k \leqslant 249\,994\,914$ в задаче* (1) *с $n = 499\,989\,828$ существует решение, управление которого за конечное время пробегает половину всюду плотной обмотки k-мерного тора, соответствующую положительному направлению времени.*

Указанная в теореме 5 оценка на k является неулучшаемой на данный момент, так как неизвестно распределение простых чисел Вольстенхольма (см. [4]) на интервале $(10^9, +\infty)$.

Список литературы

1. *Зеликин М.И., Локуциевский Л.В., Хильдебранд Р.* Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 74–90.
2. *Зеликин М.И., Киселев Д.Д., Локуциевский Л.В.* Оптимальное управление и теория Галуа // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 11. С. 83–98.
3. *Киселев Д.Д.* О всюду плотной обмотке 2-мерного тора // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 4. С. 113–122.
4. *McIntosh R.J., Roettger E.L.* A search for Fibonacci–Wieferich and Wolstenholme primes // Math. Comput. 2007. V. 76. P. 2087–2094.

Альянс в игре трех участников (Alliance in a three-person game)

В. И. Жуковский (V. I. Zhukovskii)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

zhkvlad@yandex.ru

Рассматривается игра трех лиц при неопределенности

$$\Gamma = \left\langle \mathbb{N} = \{1, 2, 3\}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i\in\mathbb{N}} \right\rangle.$$

В Γ игрок i выбирает свою стратегию $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$, в результате образуется ситуация $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Независимо от действий игроков в Γ реализуется неопределенность $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$. На парах $(x, y) \in X \times Y$ определена функция выигрыша $f_i(x, y)$, значение $f_i(x, y)$ называется выигрышем игрока i. Коалиционные структуры Γ суть $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{1, 2, 3\}, K_i = \{\{i\}, \{-i\}\}$ (где $-i = \mathbb{N}\backslash i$). Цель игрока i — выбор стратегии x_i такой, чтобы выигрыш $f_i(x, y)$ стал возможно большим, причем для произвольного $y = y(x)\colon X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$.

Определим гарантию $f_i[x] = \min_{y \in Y^X} f_i(x,y)$ игрока i и игре Γ поставим в соответствие игру гарантий $\Gamma^{\mathrm{g}} = \langle \mathbb{N} = \{1,2,3\}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$.

Для ситуации $x^* \in X$ в игре Γ^{g} рассмотрим следующие условия:

- *условие индивидуальной рациональности* (УИР) (при обозначениях $x = (x_i, x_{-i})$, $X_{K_i} = \prod_{j\in K_i} X_j$):

$$f_i[x^*] \geqslant f_i^0 = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i}\in X_{-i}} f[x_i, x_{-i}] = \min_{x_{-i}} f[x_i^*, x_{-i}] \qquad (i \in \mathbb{N});$$

- *условие коллективной рациональности* (УКР): x^* максимально по Парето в задаче $\langle X, \{f_i[x]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$, т.е.

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x^*];$$

- *условие K_i-рациональности* (УK_iР):

$$\bigl\{f_i[x^*] \geqslant f_i[x_i^*, x_{-i}]\ \forall x_{-i} \in X_{-i}\bigr\} \wedge \bigl\{f[x^*] \geqslant f_i[x_i, x_{-i}^*]\ \forall x_i \in X_i\bigr\}.$$

Определение. Ситуацию $x^* \in X$ для игры Γ назовем *коалиционным равновесием* (КР), если для нее выполнены УИР, УКР и УK_iР ($i \in \mathbb{N}$).

С помощью гермейеровской свертки установлены достаточные условия существования КР и доказано его существование в смешанных стратегиях при привычных для математического программирования ограничениях (компактность X и Y, а также непрерывность функции выигрыша). Именно, введем гермейеровскую свертку

$$\varphi(x,z) = \max\Bigl\{ f_2[z_1,x_2,x_3] - f_2[z],\ f_3[z_1,x_2,x_3] - f_3[z],$$
$$f_1[x_1,z_2,x_3] - f_1[z],\ f_3[x_1,z_2,x_3] - f_3[z],$$
$$f_1[x_1,x_2,z_3] - f_1[z],\ f_2[x_1,x_2,z_3] - f_2[z],\ \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[x] - \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i[z]\Bigr\}.$$

Теорема 1. *Если удалось найти седловую точку $(x^0, z^*) \in X \times Z$ функции $\varphi(x,z)$, то z^* является КР игры Γ.*

Теорема 2. *Если*

$$f(x,y) \in C[X \times Y], \qquad X_i \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^n \quad (i \in \mathbb{N}), \qquad Y \in \operatorname{comp}\mathbb{R}^m,$$

то в игре Γ существует КР в смешанных стратегиях.

Список литературы

1. *Zhukovskiy V.I.* The vector-valued maximin. New York: Acad. Press, 1994.
2. *Жуковский В.И.* Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М.: УРСС, 2010.

О свойствах множества точек совпадения отображений метрических и нормированных пространств (On the properties of the coincidence point sets of mappings acting in metric and normed spaces)*

С. Е. Жуковский (S. E. Zhukovskiy)

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

s-e-zhuk@yandex.ru

Исследованы свойства множества точек совпадения двух отображений. Рассмотрены как однозначные, так и многозначные отображения. Для отображений метрических пространств получены оценки мощности множества точек совпадения. Для отображений, действующих из нормированных пространств в метрические, получены необходимые и достаточные условия существования более чем одной точки совпадения, достаточные условия существования не менее n точек совпадения, достаточные условия бесконечности множества точек совпадения. Для абстрактных включений в метрических и нормированных пространствах получены необходимые и достаточные условия существования более чем одного решения, достаточные условия существования не менее n решений, достаточные условия бесконечности множества решений. Полученные результаты представляют собой естественное продолжение исследования, начатого в работе [1].

Список литературы

1. *Арутюнов А.В., Гельман Б.Д.* О структуре множества точек совпадения // Мат. сб. 2015. Т 206, № 3. С. 35–56.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

Об изменении собственных значений оператора сдвига вдоль решений системы дифференциальных уравнений (On the variation of eigenvalues of the shift operator along solutions of a system of differential equations)

Н. Б. Журавлев (N. B. Zhuravlev), А. Н. Соколова (A. N. Sokolova)

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

zhuravlev1980@yandex.ru, san1slo@mail.ru

В данной работе получены условия, при выполнении которых собственные значения оператора $\mho_p$, осуществляющего сдвиг вдоль решений линеаризованного уравнения, зависят от величины сдвига p нелипшицевым образом. Рассматривается система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Предполагается наличие у этой системы периодического решения $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Соответствующее линеаризованное уравнение имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha_0 \cdot u + \alpha_1 \cdot v, \\ \dot{v} = -u. \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты системы $\alpha_0(t) = f'_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ и $\alpha_2(t) = f'_y(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ имеют период T, равный периоду решения $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Введем обозначения для элементов матрицы $\mho_p$ и ее собственных значений:

$$\mho_p = \begin{pmatrix} a(p) & b(p) \\ c(p) & d(p) \end{pmatrix}, \qquad \lambda_\pm(p) = \frac{a(p) + d(p) \pm \sqrt{D(p)}}{2},$$

где $D(p) = (a(p) - d(p))^2 + 4b(p)c(p)$.

Очевидно, зависимость $\lambda(\varepsilon)$ является непрерывной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором из $|p - T| < \delta$ следует $|\lambda_\pm(p) - \lambda_\pm(T)| < \varepsilon$.

Результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $f(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$. *Пусть система* (1) *имеет непериодическое решение. Пусть* $\int_0^T f'_x(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))\,dt = 0$.

Тогда не существует таких констант K *и* $\varepsilon_0 > 0$, *чтобы из* $|p - T| < \varepsilon_0$ *следовало* $|\lambda_\pm(p) - \lambda_\pm(T)| < K|p - T|$.

Для $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ и $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\sin t, \cos t)$ все условия данной теоремы выполнены.

Смысл наложенных условий заключается в том, что равенство нулю интеграла гарантирует кратность собственного значения 1 оператора $\mho_T$, которое соответствует решению $(\tilde{x}', \tilde{y}')$ системы (1). Наличие непериодического решения гарантирует, что геометрическая кратность этого собственного значения будет равна единице. Это приводит к тому, что производная $\lambda'(\varepsilon)$ оказывается неограниченной в окрестности нуля.

Подробное описание свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка известно давно [1]. Однако мотивом данной работы является проблема, связанная с отысканием мультипликаторов Флоке для периодических решений дифференциально-разностных уравнений [2, 3]: в случае, когда период исследуемого решения несоизмерим с запаздыванием в уравнении, нет общего метода отыскания собственных значений оператора монодромии.

Поскольку для обыкновенных уравнений указанная проблема отсутствует, авторы допускают, что полученный результат может являться новым. В любом случае он представляет актуальный интерес в свете нерешенной проблемы точности рациональной аппроксимации при исследовании мультипликаторов Флоке для периодических решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений [2, 3].

Список литературы

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
2. *Журавлев Н.Б.* Приближенное вычисление мультипликаторов Флоке для периодических решений дифференциально-разностных уравнений // Spectral and evolution problems. V. 22: Материалы Международной конференции КРОМШ22. Симферополь, 2012. С. 76–80.
3. *Skubachevskii A.L., Walther H.-O.* On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations // J. Dyn. Diff. Equat. 2006. V. 18, N 2. P. 257–355.

Научное издание

**Математическая теория оптимального управления:
Материалы Международной конференции,
посвященной 90-летию академика Р.В. Гамкрелидзе,
Москва, 1–2 июня 2017 г.**

Подписано к печати 18.05.2017
Тираж 100 экз.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, 8

ISBN 978-5-98419-074-9

9 785984 190749