

International Scientific Journal

SPECTRAL AND EVOLUTION PROBLEMS

Volume 21

Issue 1

Simferopol, 2011

UDC 517+515

International Scientific Journal

**Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Twenty First Crimean
Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 21, no. 1.** /Group of authors. –
Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University

It is addressed to teachers, scientists, senior and post-graduated students of
mathematical and physical specialities.

© Taurida National V.Vernadsky University, 2011.

Please visit our site in the Internet: www.kromsh.info

Поздравление

Оргкомитет Крымской осенней математической школы-симпозиума (КРОМШ) и постоянные участники КРОМШ поздравляют нашего коллегу, лектора, Учителя — наставника *Михаила Семеновича Аграновича* с 80-летием и желают здоровья, бодрости духа и дерзновенной математической мысли, как и в предыдущие годы. Ежегодные лекции и доброжелательное отношение профессора М.С. Аграновича к коллегам и молодым математикам в течение всех лет работы КРОМШ внесли огромный вклад в дело становления и достижения высокого уровня нашего международного симпозиума, а его участникам доставили счастье общения с замечательным человеком и учёным, чьи работы признаны во всем мире и во многих отношениях являются пионерскими.

Оргкомитет КРОМШ надеется, что проф. М.С. Агранович ещё долгие годы будет участником и лектором школы, и будет радовать нас своими математическими достижениями.

ОРГКОМИТЕТ КРОМШ

Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ

ОБ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается несколько проблем, связанных с выводом абстрактной формулы Грина. Во-первых, приводится вывод такой формулы для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Во-вторых, приводится вывод соответствующей абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Наконец, в-третьих, приводится вывод абстрактной формулы Грина для равномерно аккретивных полуторалинейных форм.

Частными случаями таких формул Грина являются, как известно, обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа и близкие к ним (скалярный случай), соответствующие обобщенные формулы Грина для векторных полей (теория упругости, гидродинамика), а также обобщенные формулы Грина для равномерно эллиптических уравнений и систем таких уравнений и др.

В работе рассматриваются примеры смешанных краевых задач, получаемых в произвольных ограниченных областях с липшицевой границей. Намечается программа дальнейших исследований, связанная с получением необходимых и достаточных условий разрешимости задач подобного рода.

Рассматриваются абстрактные краевые задачи, обобщающие классические краевые задачи Дирихле, Неймана и др., а также смешанные задачи. Приводятся примеры абстрактных спектральных краевых задач, находящих широкие приложения в конкретных проблемах прикладной математики. Приводятся также примеры абстрактных задач сопряжения.

Несколько слов об истории вопроса, связанного с выводом и получением абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Сначала автор этой статьи считал, что первый вариант абстрактной формулы Грина был выведен в монографии ([1], с. 119) и этот вывод принадлежит С.Г. Крейну. Однако позже выяснилось, что еще раньше один из вариантов такой формулы доказал Ж.-П. Обэн (см. главу 6 из [2], а также [3]). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [4] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [2] или [3]. Дальнейшее продвижение в этом направлении принадлежит автору данной статьи (см. [5] – [8]).

Отметим еще, что абстрактные формулы Грина для равномерно аккретивных форм выводятся здесь, по-видимому, впервые (см. теоремы 11 – 13). Новыми являются также и варианты абстрактных формул Грина для смешанных краевых задач (см. теоремы 7, 9).

Автор благодарит М.С. Аграновича за многолетние конструктивные обсуждения проблем, представленных в данной работе, и посвящает ее М.С. Аграновичу в связи с его 80-летием.

1. О ВЫВОДЕ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЫ ГРИНА ДЛЯ ТРОЙКИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В данном параграфе доказывается теорема о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, определенным образом связанных между собой. Далее рассматривается основной пример, приводящий

к обобщению классической первой формулы Грина для оператора Лапласа. Приводятся и другие примеры обобщенных формул Грина для некоторых задач математической физики.

1.1. Основная теорема. При выводе абстрактной формулы Грина важную роль играют понятия гильбертовой пары пространств и оснащения гильбертова пространства (см. например, [9], [10], а также [1]).

Пусть F и E – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_F$ и $(\cdot, \cdot)_E$ соответственно, причем $F \subset E$. Будем говорить, что F плотно вложено в E и обозначать этот факт символом $F \hookrightarrow E$, если F – плотное линейное подмножество в E и существует константа $a > 0$, такая, что

$$\|u\|_E \leq a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \quad (1)$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

Классическим примером гильбертовой пары пространств является пара $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – произвольная ограниченная область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, а нормы определены формулами

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |u(x)|^2 d\Omega, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) d\Omega. \quad (2)$$

По любой паре $(F; E)$ единственным образом определяется порождающий оператор A гильбертовой пары, который обладает следующими свойствами:

$$(u, Av)_E = (u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E, \quad \forall u \in F = \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad v \in \mathcal{D}(A) \subset F, \quad (3)$$

$$\mathcal{R}(A) = E.$$

Таким образом, как оператор, действующий в E , оператор A является положительно определенным (вообще говоря, неограниченным) самосопряженным оператором, причем $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$.

По оператору $A \gg 0$ можно ввести шкалу гильбертовых пространств E^α , $E^\alpha := \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, таким образом, чтобы

$$E = E^0, \quad F = E^{1/2}, \quad F^* = E^{-1/2}, \quad (4)$$

где F^* – совокупность линейных ограниченных функционалов на пространстве F . Тогда имеет место оснащение

$$E^{1/2} = F \hookrightarrow E = E^0 \hookrightarrow F^* = E^{-1/2} \quad (5)$$

пространства E , причем любой линейный функционал на F выражается через "скалярное произведение" в E , т.е.

$$l_v(u) := \langle u, v \rangle_E, \quad u \in F, \quad v \in F^*, \quad |\langle u, v \rangle_E| \leq \|u\|_F \cdot \|v\|_{F^*}. \quad (6)$$

Иными словами, пространства $F = E^{1/2}$ и $F^* = E^{-1/2}$ дуальны по форме пространства E , а билинейная форма $\langle u, v \rangle_E$ является расширением по непрерывности скалярного произведения $(u, v)_E$, $u \in F$, $v \in E$, на случай, когда $v \in F^*$.

В построенной шкале E^α оператор A ограниченно действует из E^α в $E^{\alpha-1}$. В частности, для оператора A гильбертовой пары $(F; E)$ далее понадобится формула

$$(u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = \langle u, Av \rangle_E, \quad \forall u, v \in F, \quad (7)$$

являющаяся расширением формулы (3) и также служащая определением порождающего оператора гильбертовой пары $(F; E)$.

Пусть теперь $\{E, (\cdot, \cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot, \cdot)_F\}$ и $\{G, (\cdot, \cdot)_G\}$ – сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1°.

$$F \hookrightarrow E, \quad \|u\|_E \leq a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \quad (8)$$

2°. На F задан оператор γ , называемый оператором следа и ограниченно действующий из F в G , причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$ и

$$\gamma : F \rightarrow G_+ \hookrightarrow G, \quad \|\gamma u\|_G \leq b\|u\|_F, \quad b > 0, \quad \forall u \in F. \quad (9)$$

3°. Ядро оператора γ , т.е. $\ker \gamma =: N$, плотно в E :

$$\overline{N} = E. \quad (10)$$

Типичным примером, когда выполнены условия 1° – 3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, с введенными на них нормами (2) и стандартной нормой в $L_2(\Gamma)$, а также с обычным оператором следа

$$\gamma u := u|_\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (11)$$

В самом деле, в этом случае (в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей) по теореме вложения (С.Л. Соболев, В.Е. Кондрашов, Ф. Реллих, см. [11]; [12], с. 32; [13], с. 47) имеем свойство плотности $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и выполнены неравенства

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq a\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (12)$$

причем оператор вложения компактен. Далее, по теореме Гальярдо о следах (см. [14]) получаем, что оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в пространство $G_+ := H^{1/2}(\Gamma)$, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$, и выполнено неравенство

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq b\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (13)$$

Наконец, в этом примере $N := \ker \gamma = H_0^1(\Omega)$, а это подпространство пространства $H^1(\Omega)$, как известно, плотно в $L_2(\Omega)$. Таким образом, для указанной тройки пространств и оператора следа (11) выполнены все условия 1° – 3°.

Теорема 1. Пусть для тройки пространств E , F , G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора γ выполнены условия (8) – (10). Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (14)$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяется однозначно.

Доказательство. Оно проводится, с одной стороны, по схеме, изложенной в [2], с. 188–189, а с другой – с изменениями и некоторыми обобщениями, учитывающими, в частности, то обстоятельство, что только по элементу $u \in F$ выражения $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$ находятся неоднозначно (см. [15], с. 117).

1) Переходя к доказательству теоремы, отметим сначала, что в силу (9) ядро $N = \ker \gamma$ является подпространством в F . Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F , т.е. считаем, что

$$F = N \oplus M, \quad \dim N = \dim M = \infty. \quad (15)$$

□

Согласно определениям N и M оператор сужения $\gamma_M := \gamma|_M$ оператора γ на подпространство M осуществляет взаимно однозначное отображение M на G_+ (см. (9)). Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \quad (16)$$

Опираясь на (16) и (15), можно установить, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min \{\|u\|_F : \gamma u = \varphi\}, \quad (17)$$

и так как $G_+ \hookrightarrow G$ и имеет свойство (9), то $(G_+; G)$ – гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $G_+ = G^{1/2}$, $G = G^0$, $(G_+)^* = G^{-1/2}$.

С целью получения представления для оператора гильбертовой пары $(G_+; G)$ проведем следующие построения. Обозначим через T_M оператор, сопряженный к оператору γ_M

по форме пространства G . Так как в силу (16) оператор γ_M изометрически отображает пространство M на $G_+ = G^{1/2}$, то оператор $T_M := (\gamma_M)^*$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $M^* = M$. При этом, по определению T_M , имеем

$$(\eta, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in M, \quad \forall \psi \in (G_+)^* = G^{-1/2}. \quad (18)$$

Обозначим теперь через ∂_M оператор, обратный к T_M , который, очевидно, существует, поскольку между элементами из M и G_+ имеется взаимно однозначное соответствие и даже изометрия (см. (16)), а потому $(T_M)^{-1} = (\gamma_M^*)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*$. Тогда из (18) получаем тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_G, \quad \forall \eta, w \in M, \quad \gamma_M \eta \in G_+, \quad \partial_M w \in (G_+)^*. \quad (19)$$

При $\eta = T_M \varphi$, $\varphi \in (G_+)^*$, из (18) получаем соотношение

$$(T_M \varphi, T_M \psi)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G, \quad \forall \varphi, \psi \in (G_+)^*. \quad (20)$$

Отсюда следует, в частности, что оператор $C_M := \gamma_M T_M$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $G^{1/2} = G_+$. Кроме того, $C_M|_G$ является ограниченным в G самосопряженным и положительным оператором.

Эти свойства позволяют установить, что $(C_M)^{-1}$ является оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$, и для него согласно свойству (7) выполнено тождество

$$(\varphi, \psi)_{G_+} = \langle \varphi, C_M^{-1} \psi \rangle_G, \quad \forall \varphi, \psi \in G_+. \quad (21)$$

2) Продолжим построения, связанные с доказательством теоремы. Рассмотрим гильбертову пару $(F; E)$, которая существует в силу условия 1°, и введем оператор A этой гильбертовой пары. Тогда, согласно (7),

$$(\eta, u)_F = (A^{1/2} \eta, A^{1/2} u)_E = \langle \eta, Au \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (22)$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства N и M соответственно и рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_F, \quad \eta_N = P_N \eta \in N, \quad u \in F. \quad (23)$$

С учетом (22) он преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (\eta_N, u)_F &= \langle \eta_N, Au \rangle_E = \langle P_N \eta_N, Au \rangle_E = \langle \eta_N, P_N^* Au \rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u \rangle_E, \\ L_N u &:= P_N^* Au, \quad \forall u \in F. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $L_N : F \rightarrow N^*$ — линейный ограниченный оператор, так как $A : F \rightarrow F^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F^* \rightarrow N^* = AN$ — ограниченный проектор, действующий в F^* .

Из (24) приходим к формулам

$$(\eta_N, u_N)_F = \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E, \quad \eta_N = P_N \eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F, \quad (25)$$

$$(\eta_N, u_M)_F = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M \rangle_E, \quad u_M = P_M u, \quad u \in F. \quad (26)$$

Так как $\overline{N} = E$ (см. (10)), то из (26) получаем, что

$$L_N u_M = L_N P_M u = 0, \quad u \in F. \quad (27)$$

3) Введенный функционал $L_N u$ задан на подпространстве N . Расширим его определенным образом до функционала Lu , действующего на всем $F = N \oplus M$. Именно, далее будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F \rightarrow N^*, \quad L_M : F \rightarrow M^* := AM. \quad (28)$$

При этом потребуем (и это свойство соответствует многочисленным приложениям), чтобы

$$Lu_M = 0, \quad \forall u_M \in M. \quad (29)$$

Тогда в силу (27) и (28) должно выполняться свойство

$$L_M u_M = 0, \quad \forall u_M \in M. \quad (30)$$

4) Введем теперь в рассмотрение функционал

$$\Psi_u(\eta) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (31)$$

По построению (см. (24)) имеем свойство $\Psi_u(\eta_N) = 0$. Поэтому

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M), \quad \eta_M = P_M \eta \in M,$$

т.е. этот функционал принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+ , так как между M и G_+ имеет место изометрический изоморфизм (см. (16)).

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно представить либо в виде функционала на M , либо функционала на G_+ , либо в виде суммы функционалов на M и G_+ соответственно, причем в этом последнем случае между указанными функционалами будет определенная связь. Именно этот последний вариант, как будет видно из рассмотренного ниже классического примера, и возникает в приложениях. Отметим еще, что в краевых задачах математической физики элемент $f = Lu \in F^*$ может содержать составляющую (обобщенную функцию, распределение), сосредоточенную не только внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, где изучается краевая задача, но и на границе $\Gamma = \partial\Omega$ этой области (см., например, [15], с. 117).

Реализуя эту идею в абстрактной форме, представим $\Psi_u(\eta)$ в виде

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u \rangle_E = \langle \eta, L_M u \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F. \quad (32)$$

Здесь $L_M u \in M^* = AM$, а $\langle \eta, L_M u \rangle_E = \langle \eta_M, L_M u \rangle_E$ — функционал на подпространстве M , выраженный в виде полуторалинейной формы относительно $\eta_M \in M$ и $L_M u \in M^*$. Соответственно $\partial u \in (G_+)^*$, а $\langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \gamma_M \eta_M, \partial u \rangle_G$ — функционал на G_+ , выраженный в виде формы относительно $\gamma \eta = \gamma_M \eta_M$ и $\partial u \in (G_+)^*$.

Отметим, что в приложениях конкретный вид выражения $L_M u$ определяется, исходя из заданного дифференциального выражения, отражающего физический процесс, и соответствующей формулы Грина, отвечающей исследуемой задаче.

Из (32) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$(\eta_M, u_M)_F = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G, \quad \eta_M, u_M \in M, \quad (33)$$

служащее определением функционала $\partial_M u_M \in (G_+)^*$, являющегося абстрактным аналогом производной по внешней нормали для элементов из подпространства M . Заметим, что это тождество уже было выведено ранее (см. (19)), причем

$$\partial_M = (T_M)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*.$$

При выводе (33) было учтено, что (см. (24), (30))

$$\langle \eta_M, L_N u_M \rangle_E = 0, \quad L_M u_M = 0.$$

При $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (32) имеем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G, \quad \forall \eta_M \in M, \quad \forall u_N \in N. \quad (34)$$

Именно оно и дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, о которой говорилось выше. В частности, если функционал $L_M u_N \in M^*$ задан, то функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$ определен однозначно.

5) Назовем $Lu := L_N u + L_M u$ (см. (28)) абстрактным дифференциальным выражением. С учетом (25) и (30) будем иметь

$$Lu = L_N(u_N + u_M) + L_M(u_N + u_M) = L_N u_N + L_M u_N = Lu_N \in F^*. \quad (35)$$

Введем еще функционал

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N, \quad \forall u = u_N + u_M \in N \oplus M = F \quad (36)$$

и назовем его абстрактной производной по внешней нормали для любого элемента $u \in F$.

Для получения абстрактной формулы Грина воспользуемся тождествами (25), (26) и (33), (34). Из них после сложения левых и правых частей приходим к соотношению

$$\begin{aligned} (\eta, u)_F &= (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G = \\ &= \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M + \partial_N u_N \rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \\ &= \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E. \end{aligned} \quad (37)$$

Проверим теперь, что

$$\langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \langle \eta, Lu \rangle_E, \quad (38)$$

где Lu определено формулой (28). В самом деле, с учетом (35) имеем

$$\begin{aligned} \langle \eta, Lu \rangle_E &= \langle \eta_N + \eta_M, L_N u_N + L_M u_N \rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_N, L_M u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E, \end{aligned} \quad (39)$$

так как

$$\begin{aligned} \langle \eta_M, L_N u_N \rangle_E &= \langle P_M \eta, P_N^* A u_N \rangle_E = \langle P_N P_M \eta, A u_N \rangle_E = 0, \\ \langle \eta_N, L_M u_N \rangle_E &= \langle \eta_N, P_M^* L_M u_N \rangle_E = \langle P_M P_N \eta, L_M u_N \rangle_E = 0. \end{aligned}$$

Здесь в последнем тождестве использовано свойство $L_M u_N = P_M^* L_M u_N \in M^*$.

6) Из (37) и (38) следует формула Грина

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \quad (40)$$

причем по построению

$$Lu \in F^*, \quad \partial u \in (G_+)^*, \quad Lu = L_N u_N + L_M u_N, \quad \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N. \quad (41)$$

Отметим еще раз, что если функционал $L_M u_N$ выбран, то функционал $\partial_N u_N$ определен однозначно. $\square$

Замечание 1. Из проведенного доказательства теоремы следует, что для тройки пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ , удовлетворяющих условиям (8) – (10), существует не одна, а целое семейство формул Грина. Это семейство параметризуется, во-первых, выбором функционала $L_M u_N \in M^*$, а во-вторых, — произвольным числовым параметром α , вещественным либо комплексным. В самом деле, при выбранном $L_M u_N$ можно ввести семейство абстрактных дифференциальных выражений $L(\alpha)u$ по формуле

$$L(\alpha)u := L_N u + \alpha L_M u = L_N u_N + \alpha L_M u_N, \quad (42)$$

а также отвечающее им семейство производных по нормали

$$\partial(\alpha)u := \partial_M u_M + \alpha \partial_N u_N, \quad (43)$$

и тогда получим семейство формул Грина вида

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial(\alpha)u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (44)$$

При этом формула Грина (40) отвечает значению $\alpha = 1$. $\square$

Замечание 2. Отметим еще раз, что в приложениях дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ определено из физического смысла задачи, и тогда для него однозначно находятся $L_M u_N$ и константа α . $\square$

Следствием теоремы 1 является такое утверждение.

Теорема 2. (вторая формула Грина). *Если выполнены условия теоремы 1, то в случае вещественных гильбертовых пространств E, F и G справедлива формула*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E - \langle u, L\eta \rangle_E = \langle \gamma u, \partial \eta \rangle_G - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F; \quad (45)$$

для комплексных пространств E, F и G соответственно имеем

$$\langle \eta, Lu \rangle_E - \overline{\langle u, L\eta \rangle_E} = \overline{\langle \gamma u, \partial \eta \rangle_G} - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F. \quad (46)$$

$\square$

1.2. Основной пример. Рассмотрим в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$ гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ с нормами (2). Как уже упоминалось выше, пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$, т.е. соответствующий оператор вложения компактен, а $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Воспользуемся первой формулой Грина для оператора $u - \Delta u$ (см., например, [15], с. 114):

$$(\eta, u - \Delta u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \left(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta \in H^1(\Omega), \quad u \in H^2(\Omega). \quad (47)$$

Отсюда на основе обычных вариационных соображений и с использованием определения (3) порождающего оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ устанавливаем, что он является оператором краевой задачи Неймана:

$$Au := u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \quad (48)$$

Точнее говоря, в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ порождающий оператор пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ является расширением оператора задачи (48) с $H^2(\Omega)$ на $H^1(\Omega)$, при этом

$$\mathcal{D}(A) = H^1(\Omega), \quad \mathcal{R}(A) = (H^1(\Omega))^*, \quad (49)$$

а его сужение на $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$ с $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$ является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$, причем A^{-1} — положительный компактный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$.

Введем, как и выше (см. (11)), для элементов из $H^1(\Omega)$ оператор следа γ по закону

$$\gamma u := u|_{\Gamma}, \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \mathcal{D}(\gamma) = H^1(\Omega). \quad (50)$$

Как уже упоминалось, по теореме Гальярдо (см. [14]) в области Ω с липшицевой границей Γ оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в гильбертово пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 := \int_{\Gamma} |\varphi|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_x} \int_{\Gamma_y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x - y|^{m+1}} d\Gamma_x d\Gamma_y, \quad (51)$$

и имеет место оценка (вида (13)):

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (52)$$

При этом $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma)$. Далее, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $u \in H^1(\Omega)$ (определяемая не единственным образом по φ), такая, что

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (53)$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим согласно общей схеме п. 1.1 ортогональное разложение пространства $H^1(\Omega)$. Очевидно, что

$$N = \ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = u|_{\Gamma} = 0\} =: H_0^1(\Omega). \quad (54)$$

Выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H_0^1(\Omega)$ в $F = H^1(\Omega)$.

Если $\eta \in H_0^1(\Omega)$ и $u \in M$, то в силу ортогональности η и u имеем

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} (\eta u + \nabla \eta \cdot \nabla u) d\Omega = 0, \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega), \quad \forall u \in M. \quad (55)$$

Отсюда, из свойства плотности $H_0^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, а также того факта, что в $H_0^1(\Omega)$ плотным множеством является совокупность финитных бесконечно дифференцируемых функций, получаем, что

$$M =: H_h^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0\}. \quad (56)$$

Далее для простоты будем называть $H_h^1(\Omega)$ подпространством гармонических функций. Таким образом, имеет место ортогональное разложение

$$F = H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega) = N \oplus M. \quad (57)$$

Воспользуемся еще следующим фактом (см., например, [15], с. 98, [16], с. 149): в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \quad (58)$$

т.е. $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ — дуальные пространства, и имеет место оснащение

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*. \quad (59)$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства $H_0^1(\Omega)$ и $H_h^1(\Omega)$ соответственно (см. (57)). Реализуя для данного примера общие построения, которые были проведены при доказательстве теоремы 1, рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\eta_N u + \nabla \eta_N \cdot \nabla u) d\Omega, \quad \forall \eta_N = P_N \eta \in H_0^1(\Omega), u \in H^1(\Omega). \quad (60)$$

С учетом определения (7) оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, а также выражения (48) для этого оператора функционал (60) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} l_u(\eta_N) &:= (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta_N, P_N^*(u - \Delta u) \rangle_{L_2(\Omega)} =: \\ &=: \langle \eta_N, L_N u \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta_N \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (61)$$

(Это соотношение выводится сначала для $u \in H^2(\Omega)$, а затем предельным переходом и для $u \in H^1(\Omega)$.)

Так как $H_0^1(\Omega)$ плотно вложено в $L_2(\Omega)$ и имеет место оснащение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^*, \quad (62)$$

то из (61) следует, что

$$L_N u := P_N^*(u - \Delta u) \in N^* = (H_0^1(\Omega))^*, \quad (63)$$

а оператор $L_N \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H_0^1(\Omega))^*)$. Здесь P_N^* — проектор в пространстве $(H^1(\Omega))^*$, $P_N^* = AP_N$.

Из тождества (61) следуют соотношения

$$(\eta_N, u_N)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta_N = P_N \eta, \quad \forall u_N = P_N u \in H_0^1(\Omega), \quad (64)$$

$$(\eta_N, u_M)_{H^1(\Omega)} = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \eta_N \in H_0^1(\Omega), \quad \forall u_M \in H_h^1(\Omega). \quad (65)$$

Из (65) и (62), в частности, получаем, что

$$L_N u_M = P_N^*(u_M - \Delta u_M) = 0, \quad (66)$$

хотя этот факт очевиден также из (56).

Следуя далее общей схеме доказательства теоремы 1, рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Psi_u(\eta) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \eta, L_N u \rangle_{L_2(\Omega)} = \\ &= \int_{\Omega} (\eta u + \nabla \eta \cdot \nabla u) d\Omega - \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u) \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta, u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (67)$$

Так как по построению $\Psi_u(\eta_N) = 0$, то $\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M)$, $\eta_M = P_M \eta \in M = H_h^1(\Omega)$.

Напомним, что между элементами пространства $H_h^1(\Omega)$ и элементами пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ имеется изоморфизм и даже изометрия, если в $H^{1/2}(\Gamma)$ задать норму в виде

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \varphi = \gamma_M u, \quad u \in H_h^1(\Omega). \quad (68)$$

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно выразить как в виде $\langle \eta_M, L_M u \rangle_{L_2(\Omega)}$, где $L_M u \in (H_h^1(\Omega))^* = AH_h^1(\Omega)$, $L_M \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H_h^1(\Omega))^*)$ — произвольный оператор, либо в виде $\langle \gamma_M \eta_M, \partial u \rangle_{L_2(\Gamma)}$, $\partial u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (см. (59)), либо в виде суммы таких функционалов, связанных между собой (см. (34)):

$$\begin{aligned} \Psi_u(\eta) &= \langle \eta_M, L_M u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M \eta_M, \partial u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ \eta_M &= P_M \eta \in H_h^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (69)$$

Учитывая, что $\gamma_M \eta_M = \gamma u$, $\forall u \in H^1(\Omega)$, а также тот факт, что $L_M u = P_M^* L_M u$, правую часть в (69) можно переписать в виде

$$\Psi_u(\eta) = \langle \eta, L_M u \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (70)$$

а тогда из (67), (70) следует тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, Lu \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (71)$$

$$Lu := L_N u + L_M u = P_N^*(u - \Delta u) + L_M u, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (72)$$

Потребуем, как и в общей схеме доказательства теоремы 1 (см. (29)), чтобы выполнялось условие

$$Lu_M = 0. \quad (73)$$

Тогда в силу (72), (66) получаем свойство

$$L_M u_M = 0, \quad \forall u_M = P_M u \in H_h^1(\Omega). \quad (74)$$

Из (71) либо (69), в частности, при $u = u_M \in H_h^1(\Omega)$, $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$ имеем соотношение

$$(\eta_M, u_M)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_{L_2(\Gamma)} =: \langle \gamma_M \eta_M, \frac{\partial u_M}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \frac{\partial u_M}{\partial n} \Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (75)$$

которое служит определением производной по внешней нормали элемента $u_M \in H_h^1(\Omega)$. Оно обобщает обычную формулу

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\eta_M u_M + \nabla \eta_M \cdot \nabla u_M) d\Omega &= \int_{\Gamma} \eta_M \frac{\partial u_M}{\partial n} d\Gamma, \\ \eta_M &\in H_h^1(\Omega), \quad u_M \in H_h^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \end{aligned} \quad (76)$$

Отметим еще, что в (75) функционал $\left(\frac{\partial u_M}{\partial n} \right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ не зависит от того, какой функционал $L_M u$ выбран в (69), так как выполнено условие (74).

Возьмем теперь в (71) $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$, $u = u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда в силу ортогональности $H_h^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, а также свойства (73), получаем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega), \quad \forall u_N \in H_0^1(\Omega), \quad (77)$$

$$\partial_N u_N := (\partial u)|_N \in (G_+)^*, \quad L_M u_N \in M^*. \quad (78)$$

Здесь по аналогии с формулой

$$\int_{\Omega} \eta_M (u_N - \Delta u_N) d\Omega + \int_{\Gamma} \eta_M \frac{\partial u_N}{\partial n} d\Gamma = 0, \quad \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega), \quad \forall u_N \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad (79)$$

функционал $\partial_N u_N$ можно назвать производной по внешней нормали для элемента $u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$\partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N = \left(\frac{\partial u_M}{\partial n} + \frac{\partial u_N}{\partial n} \right)_\Gamma = \frac{\partial}{\partial n} (u_N + u_M) \Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (80)$$

т.е. ∂u есть производная по внешней нормали для произвольного элемента $u \in H^1(\Omega)$.

Тождество (77), как и в общих построениях в теореме 1, дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, которая по необходимости должна выполняться. В частности, опираясь на (79), можно выбрать $L_M u_N$ в виде

$$L_M u_N := P_M^*(u_N - \Delta u_N), \quad u_N \in H_0^1(\Omega). \quad (81)$$

(Напомним, что согласно (48), (49) элемент $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$, а P_M^* — проектор на подпространство $M^* = AM = (H^1(\Omega))^*$.) Тогда формула (71) примет вид

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u) + P_M^*(u - \Delta u) \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \quad (82)$$

Теорема 3. Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа γ (см. (50)) имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (83)$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (84)$$

При этом $(\partial u / \partial n)_\Gamma$ определяется по элементам $u \in H^1(\Omega)$ и $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$ однозначно.

Доказательство. Оно следует из проведенных построений и из (82), если заметить, что $P_N^* + P_M^* = I_{F^*}$ — единичный оператор в $(H^1(\Omega))^*$. $\square$

Из (83) следует также "привычная" первая формула Грина для оператора Лапласа Δ :

$$\langle \eta, -\Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla \eta \cdot \nabla u \, d\Omega - \langle \gamma \eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \quad (85)$$

Из (83) можно получить и вторую обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа, см. теорему 2.

Замечание 3. Отметим еще раз, как и в замечаниях 1 и 2, что из доказательства теоремы 3 можно установить существование не одной формулы Грина (83), а целого семейства таких формул, т.е.

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma \eta, \partial(\alpha)u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (86)$$

$$L(\alpha)u := P_N^*(u - \Delta u) + \alpha P_M^*(u - \Delta u) \in (H^1(\Omega))^*, \quad (87)$$

$$\partial(\alpha)u := \left(\frac{\partial u_M}{\partial n} \right)_\Gamma + \alpha \left(\frac{\partial u_N}{\partial n} \right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (88)$$

где α — произвольная константа. Однако в приложениях возникает дифференциальное выражение $u - \Delta u$ (или $-\Delta u$ в (85)), которое получается из (87) при $\alpha = 1$. $\square$

1.3. Другие примеры обобщенных формул Грина. Здесь будут рассмотрены некоторые примеры классических формул Грина и (без доказательства) их соответствующие обобщенные варианты.

1°. *Равномерно эллиптическое дифференциальное выражение.*

Пусть снова $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, а $\Gamma := \partial\Omega$ — сначала достаточно гладкая.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu := - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + a_0(x)u, \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad (89)$$

для которого выполнены условия

$$a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad j, k = \overline{1, m}, \quad 0 < a_0 \leq a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad (90)$$

а также условие равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq c \sum_{k=1}^m |\xi_k|^2, \quad c > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (91)$$

Введем производную по конормали

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} n_j, \quad \vec{n} = \sum_{j=1}^m n_j \vec{e}_j, \quad (92)$$

отвечающую дифференциальному выражению (89), и квадратичную форму

$$\|u\|_{H_{eq}^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)|u|^2 \right] d\Omega. \quad (93)$$

Тогда, как известно, имеет место следующая классическая формула Грина для равномерно эллиптического дифференциального выражения Lu :

$$\int_{\Omega} \eta Lu d\Omega = (\eta, u)_{H_{eq}^1(\Omega)} - \int_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma, \quad \eta \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u \in C^2(\overline{\Omega}). \quad (94)$$

Форма (93) при условиях (90), (91) задает в пространстве $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной норме (2). Отсюда, а также из теоремы Гальярдо следует, что для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H_{eq}^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ (см. (50)) выполнены для области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ общие условия (8) — (10). Отсюда, в свою очередь, следует, что справедлива следующая обобщенная формула Грина для равномерно эллиптического оператора:

$$\langle \eta, Lu \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H_{eq}^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial \nu} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H_{eq}^1(\Omega) = H^1(\Omega), \quad (95)$$

$$Lu \in (H_{eq}^1(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (96)$$

Отметим, что если выполнены условия

$$a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}, \quad a_0(x) \equiv 1, \quad (97)$$

то формула (95) переходит в формулу (83).

2°. *Обобщенная формула Грина для систем линейных эллиптических уравнений.*

Будем снова считать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и $\Gamma := \partial\Omega$ достаточно гладкая.

Рассмотрим систему дифференциальных выражений

$$L_a u := - \sum_{j,k=1}^m \partial_j [a_{jk}(x) \partial_k u(x)] + a_0(x) u(x), \quad \partial_j := \partial / \partial x_j, \quad (98)$$

которая применена к вектор-столбцу

$$u(x) := (u_1(x); \dots; u_n(x))^T, \quad x \in \Omega, \quad (99)$$

где символом $(\cdot; \dots; \cdot)^T$ обозначена операция транспонирования. Здесь $a_{jk}(x)$ — матрицы, подчиненные условиям симметрии (в комплексных пространствах):

$$a_{jk}^*(x) = a_{jk}(x) \iff a_{jk}^{rs}(x) = \overline{a_{kj}^{sr}(x)}, \quad r, s = \overline{1, n}, \quad (100)$$

а матрица $a_0(x)$ — эрмитова и положительно определенная, т.е.

$$a_0^*(x) = a_0(x) \gg 0. \quad (101)$$

Введем производную по конормали, отвечающую дифференциальному выражению (98):

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^m n_j(x) a_{jk}(x) \partial_k u(x), \quad n = (n_1(x); \dots; n_m(x))^T, \quad (102)$$

и будем считать, что выполнены следующие условия (см. [17]).

1°. Матрица

$$a(x, \xi) := \sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \xi_j \xi_k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1, \quad (103)$$

называемая главным символом дифференциального выражения (98), является положительно определенной равномерно по $x \in \overline{\Omega}$, т.е. выражение $L_a u$ сильно эллиплично. Как указано в [17], с. 11, из сформулированного условия следует свойство эллиптичности $\det a(x, \xi) \neq 0$ и выполнение так называемого условия Шапиро–Лопатинского.

2°. Имеет место неравенство

$$\sum a_{jk}^{rs} \xi_j^r \overline{\xi_k^s} \geq c \sum |\xi_j^r|^2, \quad x \in \Gamma, \quad \xi_j^r \in \mathbb{C}, \quad c > 0. \quad (104)$$

Тогда (см., например, [17]) имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_a^1(\Omega)}^2 &:= \int_{\Omega} E(u, u) d\Omega + \int_{\Omega} (a_0(x)u) \cdot \bar{u} d\Omega \geq \\ &\geq c\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := c \sum_{k=1}^n \|u_k\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad E(u, u) := \sum a_{jk}^{rs} \partial_j u^r \overline{\partial_k u^s}. \end{aligned} \quad (105)$$

Заметим теперь, что для гладких функций $\eta(x) := (\eta_1(x); \dots; \eta_n(x))^T$ и $u(x) := (u_1(x); \dots; u_n(x))^T$ в области Ω с гладкой границей имеет место следующая формула Грина:

$$(\eta, L_a u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H_a^1(\Omega)} - (\gamma\eta, \partial_{\nu_a} u)_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta \in C^1(\bar{\Omega}), \quad u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad (106)$$

$$L_2(\Omega) := \{u := (u_1; \dots; u_n)^T : \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 := \sum_{r=1}^n \|u_r\|_{L_2(\Omega)}^2 < \infty\}, \quad (107)$$

$$L_2(\Gamma) := \{\varphi := (\varphi_1; \dots; \varphi_n)^T : \|\varphi\|_{L_2(\Gamma)}^2 := \sum_{r=1}^n \|\varphi_r\|_{L_2(\Gamma)}^2 < \infty\}, \quad (108)$$

$$\gamma u := (\gamma u_1; \dots; \gamma u_n)^T.$$

Из неравенства (105) следует, что нормы в пространствах $H_a^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ (для вектор-столбца $u := (u_1; \dots; u_n)^T$, см. правую часть (105)) эквивалентны. Отсюда и из теоремы 1, примененной к тройке пространств $E = L_2(\Omega)$ (см. (107)), $F = H_a^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ (см. (108)) и оператору γ , приходим к выводу, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ справедлива формула Грина

$$\langle \eta, L_a u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H_a^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \partial_{\nu_a} u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H_a^1(\Omega), \quad (109)$$

$$L_a u \in (H_a^1(\Omega))^*, \quad \partial_{\nu_a} u \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \quad (110)$$

обобщающая формулу (106).

3°. *Обобщенная формула Грина линейной теории упругости.*

В линейной теории упругости основным дифференциальным выражением для поля $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, перемещений сплошной упругой среды является выражение

$$L\vec{u} := \vec{u} - [\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \vec{u}], \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad (111)$$

где λ и μ — физические константы. Соответствующая классическая формула Грина для гладких полей $\vec{\eta}(x)$ и $\vec{u}(x)$ в области Ω с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot (L\vec{u}) d\Omega &= \mu E(\vec{\eta}, \vec{u}) + \lambda \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{\eta})(\operatorname{div} \vec{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\eta} \cdot \vec{u} d\Omega - \\ &- \int_{\Gamma} (\gamma\vec{\eta}) \cdot (P\vec{u}) d\Gamma, \quad \vec{\eta} \in \vec{C}^1(\bar{\Omega}), \quad \vec{u} \in \vec{C}^2(\bar{\Omega}), \\ E(\vec{\eta}, \vec{u}) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^3 \tau_{jk}(\vec{\eta}) \tau_{jk}(\vec{u}) d\Omega, \quad \tau_{jk}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \\ P\vec{u} &:= \sum_{j,k=1}^3 (\mu \tau_{jk}(\vec{u}) + \lambda \operatorname{div} \vec{u} \delta_{jk}) \cos(\vec{n}, \vec{e}_j) \vec{e}_j, \\ \vec{u} &= \sum_{j=1}^3 u_j \vec{e}_j, \quad \gamma\vec{\eta} := \sum_{j=1}^3 (\gamma u_j) \vec{e}_j =: \vec{\eta}|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (112)$$

Введем пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ с нормой (107) при $n = 3$, соответствующее пространство $\vec{L}_2(\Gamma)$ (см. (108)), а также пространство $\vec{H}_{eq}^1(\Omega)$ с нормой

$$\|\vec{u}\|_{\vec{H}_{eq}^1(\Omega)}^2 := \mu E(\vec{u}, \vec{u}) + \lambda \int_{\Omega} |\operatorname{div} \vec{u}|^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\Omega. \quad (113)$$

Опираясь на неравенство Корна (см. [18], с. 18, а также (105))

$$\|\vec{u}\|_{\vec{H}_{eq}^1(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\vec{u}\|_{\vec{H}^1(\Omega)}^2, \quad c_1 > 0, \quad \forall \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega), \quad (114)$$

можно доказать, что нормы в пространстве $\vec{H}_{eq}^1(\Omega)$ и в пространстве $\vec{H}^1(\Omega)$ со стандартной нормой эквивалентны.

Отсюда и из теоремы 1, примененной к пространствам $E = \vec{L}_2(\Omega)$, $F = \vec{H}_{eq}^1(\Omega)$, $G = \vec{L}_2(\Gamma)$ и оператору следа γ (см. (112)), получаем, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место следующая обобщенная формула Грина линейной теории упругости:

$$\langle \vec{\eta}, L\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\vec{H}_{eq}^1(\Omega)} - \langle \gamma \vec{\eta}, P\vec{u} \rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)}, \quad \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{H}_{eq}^1(\Omega) = \vec{H}^1(\Omega), \quad (115)$$

$$L\vec{u} \in (\vec{H}_{eq}^1(\Omega))^*, \quad \gamma \vec{\eta} \in \vec{H}^{1/2}(\Gamma), \quad P\vec{u} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^* = \vec{H}^{-1/2}(\Gamma). \quad (116)$$

Здесь $\vec{H}^{1/2}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций, заданных на Γ и имеющих проекции на оси координат, являющиеся элементами из $H^{1/2}(\Gamma)$.

2. АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В этом параграфе при определенных дополнительных условиях выводится абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач. Приводятся поясняющие примеры, а также приложения к классической тройке гильбертовых пространств.

2.1. Первые формулировки абстрактной формулы Грина. В математической физике часто изучаются такие проблемы, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — так называемое третье краевое условие, или условие Ньютона. Задачи подобного вида называют смешанными. Для таких задач функционал, связанный с Γ и фигурирующий в формуле Грина, естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Рассмотрим эту проблему в абстрактной форме. Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ выполнены условия (8) – (10), обеспечивающие по теореме 1 существование абстрактной формулы Грина:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad Lu \in F^*, \quad \partial u \in (G_+)^*, \quad \gamma \eta \in G_+, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (117)$$

Для смешанных краевых задач желательно выражение $\langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G$ заменить, при определенных дополнительных условиях, на выражение $\sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}$, где $\gamma_k \eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta \in F$ на части Γ_k границы Γ , а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Переходя к выводу абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач, будем считать, что дополнительно к условиям (8) – (10) выполнены следующие соотношения:

$$G = \bigoplus_{k=1}^q G_k, \quad \exists (G_+)_k, \quad (G_+)_k^* : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \quad k = \overline{1, q}. \quad (118)$$

Рассмотрим для простоты случай $q = 2$. Пусть p_1 — непрерывный проектор, действующий в пространстве G_+ , а $p_2 = I_+ - p_1$ — дополнительный проектор. Введем подпространства

$$(\widehat{G_+})_k := p_k G_+, \quad p_k : G_+ \rightarrow (\widehat{G_+})_k, \quad k = 1, 2, \quad (119)$$

отвечающие этим проекторам. Введем также операторы

$$\widehat{\gamma}_k := p_k \gamma, \quad \widehat{\partial}_k := p_k^* \partial, \quad p_k^* : (\widehat{G_+})_k^* \rightarrow (G_+)^*. \quad (120)$$

Так как по условию p_k непрерывен, то и p_k^* непрерывен и $(p_k^*)^2 = p_k^*$.

Теорема 4. (первая формулировка абстрактной формулы Грина). *В сформулированных выше предположениях имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^2 \langle \hat{\gamma}_k \eta, \hat{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (121)$$

Доказательство. Оно достаточно простое. Так как $p_1 + p_2 = I_+$, то

$$\gamma \eta = (p_1 + p_2) \gamma \eta = (\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2) \eta, \quad \forall \eta \in F. \quad (122)$$

Поэтому соответствующее слагаемое из правой части формулы (117) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G &= \langle (\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2) \eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^2 \langle \hat{\gamma}_k \eta, \partial u \rangle_G = \\ &= \sum_{k=1}^2 \langle p_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^2 \langle p_k^2 \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^2 \langle p_k \gamma \eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^2 \langle \hat{\gamma}_k \eta, \hat{\partial}_k u \rangle_G. \end{aligned} \quad (123)$$

Отсюда и из (117) следует формула (121). $\square$

Из доказательства соотношения (123) видно, что если имеется не два, а q взаимно дополнительных проекторов, т.е.

$$\sum_{k=1}^q p_k = I_+, \quad p_k p_j = p_k \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, q}, \quad (124)$$

то аналогично выводу (123) приходим к формуле

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^q \langle \hat{\gamma}_k \eta, \hat{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (125)$$

Поясним разобранную в абстрактной форме ситуацию на простом примере. Пусть липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ состоит из двух непересекающихся частей Γ_1 и Γ_2 , причем

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \text{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) := \inf\{|x - y| : x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2\} > 0. \quad (126)$$

Тогда если $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, то

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \quad (127)$$

причем, как следует из формулы (51),

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq \|\varphi_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}^2 + \|\varphi_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)}^2. \quad (128)$$

Введем оператор p_1 , действующий для любого φ из (127) по закону

$$p_1 \varphi := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \quad (129)$$

Нетрудно видеть, что этот оператор обладает свойством $p_1^2 = p_1$. Обозначим совокупность элементов вида (129) через $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_1) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_1) := p_1 H^{1/2}(\Gamma)$.

Лемма 1. *Оператор*

$$p_1 : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \hat{H}^{1/2}(\Gamma_1)$$

является ограниченным проектором, действующим в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Оно основано на оценке нормы $p_1 \varphi$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. Непосредственное вычисление с использованием формулы (51) дает неравенство

$$\|p_1 \varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \leq (1 + 2|\Gamma_2|d^{-m-1}) \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad (130)$$

где $d = \text{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$. Поэтому

$$\|p_1\| \leq (1 + 2|\Gamma_2|d^{-m-1})^{1/2}. \quad (131)$$

Свойство $p_1^2 = p_1$ уже отмечалось выше, так что p_1 — ограниченный проектор. $\square$

Оператор $p_2 := I_+ - p_1$, очевидно, также является ограниченным проектором (I_+ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$) и действует по закону

$$p_2\varphi = \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \quad (132)$$

Эти рассуждения показывают, что при условии (126) имеет место прямое разложение:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)(+) \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_2), \quad \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k) = p_k H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2. \quad (133)$$

Таким образом, общий подход, примененный в теореме 4, является совершенно естественным для смешанных краевых задач.

Форма (125) абстрактной формулы Грина не совсем естественна, так как в классическом случае, отвечающем разобранным выше примеру, выражение

$$\langle \widehat{\gamma}_1 \eta, \widehat{\partial}_1 u \rangle_G = \int_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma, \quad \eta = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

Но тогда интеграл справа лучше написать в виде

$$\int_{\Gamma_1} (\eta|_{\Gamma_1}) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} d\Gamma_1,$$

а затем расширить его до выражения $\langle \gamma_1 \eta, \partial_1 u \rangle_{L_2(\Gamma_1)}$. Такие построения сейчас и будут проделаны.

Как следует из рассмотрения многих задач математической физики, введенные выше проекторы p_k можно представить в виде

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad (134)$$

где $\rho_k : G_+ \rightarrow (G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы, а $\omega_k : (G_+)_k \rightarrow \widehat{(G_+)}_k$ — оператор продолжения нулем из $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\rho_k \omega_k = I_k \quad (\text{в } (G_+)_k), \quad k = \overline{1, q}, \quad (135)$$

т.е. ω_k является правым обратным для ρ_k . Будем далее считать также, что ρ_k и ω_k — ограниченные операторы.

Из (134), (135) следует, что $p_k^2 = p_k$ и этот оператор p_k ограничен, т.е. он является ограниченным проектором.

Поясним общие свойства (134), (135) на примере, разобранным выше, см. (126) — (133). Введем оператор ρ_k по закону

$$\rho_k \varphi := \varphi|_{\Gamma_k}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2. \quad (136)$$

Введем еще операторы ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_1 \varphi_1 := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1) \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2) \end{cases}, \quad \omega_2 \varphi_2 := \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1) \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2) \end{cases}. \quad (137)$$

Тогда очевидно, что $\omega_k \rho_k = p_k$, $k = 1, 2$, (см. (129), (132)) и, кроме того, выполнены свойства (135).

Возвращаясь к общим рассуждениям, сформулируем в виде теоремы основной абстрактный результат.

Теорема 5. (вторая формулировка абстрактной формулы Грина). Пусть выполнены условия (134), (135) и сделанные при этом предположения. Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F, \quad (138)$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \quad (139)$$

где γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

Доказательство. Преобразуем слагаемое из суммы в правой части (121) с учетом (134), (135). Имеем

$$\langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \langle p_k^2 \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G. \quad (140)$$

Так как по предположению ω_k — непрерывный оператор, то полученное выражение является линейным ограниченным функционалом относительно элементов вида $\rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k$. Поэтому этот функционал можно представить по форме пространства G_k , $G = \bigoplus_{k=1}^q G_k$, $(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*$, $k = \overline{1, q}$, в следующем виде:

$$\langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \rho_k \gamma \eta, \omega_k^* \partial u \rangle_{G_k} =: \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \eta, u \in F. \quad (141)$$

Отсюда и следует формула Грина (138) с обозначениями (139). $\square$

2.2. Классический пример. Вернемся снова к тройке пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, оператору γ , $\gamma u := u|_\Gamma$, $\forall u \in H^1(\Omega)$, и будем считать, что Γ — липшицева граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

В этом случае норму в $H^1(\Omega)$ определяют эквивалентным образом по формуле

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \inf \{ \|\widehat{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^m)} : \widehat{u}|_\Omega = u \}, \quad (142)$$

(см. [16], с. 147), а в пространстве $H^s(\Gamma)$ — аналогично:

$$\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} := \inf \{ \|\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})} : \widehat{\varphi}|_\Gamma = \varphi \}, \quad |s| \leq 1. \quad (143)$$

(Точнее говоря, здесь вместо $\|\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})}$ следует взять $\sum_j \|\eta_j \widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})}$, где $\sum_j \eta_j \equiv 1$ — конечное разбиение единицы на Γ , см., например, [16], с. 147.)

Разобьем теперь поверхность Γ на односвязные открытые части Γ_k , $k = \overline{1, q}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Тогда аналогично (142), (143) нормы в пространствах $H^s(\Gamma_k)$ определяют по формуле

$$\|\psi_k\|_{H^s(\Gamma_k)} := \inf \{ \|\widehat{\psi}\|_{H^s(\Gamma)} : \widehat{\psi}|_{\Gamma_k} = \psi_k \}, \quad |s| \leq 1. \quad (144)$$

Введем в рассмотрение ρ_k , оператор сужения с Γ на Γ_k , по закону

$$\rho_k \varphi := \varphi|_{\Gamma_k}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (145)$$

Лемма 2. Оператор ρ_k ограничен и

$$\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_k)} \leq 1. \quad (146)$$

Доказательство. Оно следует непосредственно из определения нормы в $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. (51)) и неравенства (128). $\square$

Введем теперь подпространства

$$\begin{aligned} H_{0, \Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega) &:= \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_k\} = \\ &= \ker \gamma_{\Gamma \setminus \Gamma_k} = \ker ((I_+ - \rho_k) \gamma), \quad k = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (147)$$

Поскольку

$$H_{0, \Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega) \supset H_0^1(\Omega) = \ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ (на } \Gamma)\} \quad (148)$$

и $H_0^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $H_{0, \Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ при любом $k = \overline{1, q}$.

Введем еще одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leq 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформулированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [19] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [16], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leq 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s . Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 3. (В.С. Рычков [19], см. также М.С. Агранович [16]). Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на части Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1, q}$. Тогда существует линейный оператор $\mathcal{E}$ (оператор В.С. Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом

$$\|\mathcal{E}\psi\|_{H^s(\Gamma)} \leq c\|\psi\|_{H^s(\Gamma_k)}, \quad \forall \psi \in H^s(\Gamma_k), \quad |s| \leq 1. \quad (149)$$

□

Опираясь на введенные понятия, рассмотрим полуторалинейную форму следующего вида:

$$[\varphi, \psi]_\Gamma := \langle \varphi, \mathcal{E}\psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad (150)$$

где $\mathcal{E}\psi \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (см. (58)). Из (149) следует оценка

$$|[\varphi, \psi]_\Gamma| \leq c\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \quad (151)$$

Пусть теперь $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H_{0,\Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega)$, т.е. $\gamma\eta = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_k$. Тогда можно проверить, что

$$\langle \gamma\eta, \mathcal{E}\psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \varphi, \mathcal{E}\psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \rho_k \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \rho_k \gamma\eta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad (152)$$

где ρ_k — оператор сужения (145), а справа стоит расширение по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Gamma_k)$ на элементы $\rho_k \varphi = \gamma_k \eta$, $\eta \in H_{0,\Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, т.е. функционал по форме $L_2(\Gamma_k)$.

Отметим, что при выбранном $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H_{0,\Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega)$, правая часть в (152) не зависит от способа продолжения элемента $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ до элемента $\hat{\psi} := \mathcal{E}\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а определяется лишь значениями ψ на Γ_k .

Рассмотрим теперь вспомогательную смешанную краевую задачу вида

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad w = 0 \quad (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\Gamma_k} = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k). \quad (153)$$

Слабым решением задачи (153) назовем такую функцию $w \in H_{0,\Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega)$, для которой при любой $\eta \in H_{0,\Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega)$ выполнено тождество

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k \eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \gamma_k \eta := \rho_k \gamma\eta. \quad (154)$$

Нетрудно видеть, что классическое решение задачи (153) является слабым решением в смысле определения (154).

Лемма 4. Задача (153) имеет слабое решение w тогда и только тогда, когда выполнено условие $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. При этом

$$w \in H_{0,\Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega) \cap H_h^1(\Omega) =: H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega). \quad (155)$$

Доказательство. Оно традиционно и основано на соотношении (152) с учетом леммы 2 и теоремы Гальярдо. □

Из этой леммы следует, что оператор $\tilde{T}_k$, сопоставляющий элементу $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ решение $w = \tilde{T}_k \psi_k$ задачи (153), ограниченно действует из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ на $H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)$. Полагая в (154) $\eta \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)$, будем иметь тождество

$$(\eta, \tilde{T}_k \psi_k)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k \eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega), \quad \forall \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad (156)$$

Здесь, по построению, элементы вида $\tilde{\varphi}_k := \gamma_k w$, $w \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)$, обладают следующими свойствами: во-первых, они принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_k)$, а во-вторых, — продолженные нулем с Γ_k на всю Γ они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$. Кроме того, очевидно, что между элементами $\tilde{\varphi}_k = \gamma_k w$ и w имеется взаимно однозначное соответствие.

Обозначим через $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ совокупность элементов вида

$$\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \{\tilde{\varphi}_k = \gamma_k w : w \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)\} \subset H^{1/2}(\Gamma_k). \quad (157)$$

Лемма 5. Множество $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ плотно в $L_2(\Gamma_k)$.

Доказательство. Оно проводится от противного с использованием тождества (156), см. [8]. □

Введем в рассмотрение оператор

$$\tilde{C}_k := \gamma_k \tilde{T}_k : H^{-1/2}(\Gamma_k) \rightarrow \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \quad (158)$$

По построению между $\mathcal{D}(\tilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ и областью значений $\mathcal{R}(\tilde{C}_k) = \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Учитывая этот факт, а также изоморфизм между $H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)$ и $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, введем на $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\alpha, \beta)_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}, \quad \eta, u \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega), \quad \gamma_k \eta = \alpha, \quad \gamma_k u = \beta. \quad (159)$$

С учетом определения (157) и тождества (156) это соотношение можно переписать в виде

$$(\alpha, \beta)_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \alpha, \tilde{C}_k^{-1} \beta \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \alpha, \beta \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad (160)$$

$$\eta = \tilde{T}_k \zeta_k, \quad \gamma_k \eta = \alpha, \quad w = \tilde{T}_k \psi_k, \quad \gamma_k \tilde{T}_k \psi_k = \tilde{C}_k \psi_k = \beta, \quad \psi_k, \zeta_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \quad (161)$$

Лемма 6. Оператор $\tilde{C}_k^{-1} = (\gamma_k \tilde{T}_k)^{-1}$ с областью определения $\mathcal{D}(\tilde{C}_k^{-1}) = \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и областью значений $\mathcal{R}(\tilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{D}(\tilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ является оператором гильбертовой пары $(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$.

Доказательство. Оно основано на неравенствах

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}\|_{L_2(\Gamma_k)} &\leq \|\tilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leq \|\tilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_1 \|w\|_{H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)} = c_1 \|\tilde{\varphi}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \\ \tilde{\varphi} &= \gamma_k w, \quad w \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega), \quad \tilde{\varphi} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \end{aligned} \quad (162)$$

где $\tilde{\varphi}$ – продолженная нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$ функция $\tilde{\varphi} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, и лемме 5. $\square$

Таким образом, имеет место оснащение

$$\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \hookrightarrow L_2(\Gamma_k) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k). \quad (163)$$

Отметим еще, что норма в $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ "сильнее" стандартной нормы в $H^{1/2}(\Gamma_k)$, что следует из (162):

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leq c_1 \|\tilde{\varphi}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \quad \forall \tilde{\varphi} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \subset H^{1/2}(\Gamma_k). \quad (164)$$

Опираясь на доказанные факты, введем на элементах из $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ оператор ω_k продолжения нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$, действующий по закону

$$\omega_k \tilde{\varphi}_k := \begin{cases} \tilde{\varphi}_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \end{cases} \quad \forall \tilde{\varphi} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \quad (165)$$

Лемма 7. Оператор ω_k продолжения нулем с Γ_k на Γ , рассматриваемый на области определения $\mathcal{D}(\omega_k) := \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, является непрерывным оператором из $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$; при этом

$$\|\omega_k \tilde{\varphi}_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_1 \|\tilde{\varphi}_k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \quad \forall \tilde{\varphi}_k \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad (166)$$

где $c_1 > 0$ – константа из неравенства (39) (теорема Гальярдо).

Доказательство. Этот факт уже установлен при выводе неравенств (162) с той же константой c_1 . В самом деле, в (162) $\tilde{\varphi} = \omega_k \tilde{\varphi}_k$, откуда и следует (166). $\square$

Отметим здесь следующее важное обстоятельство. Как известно (см. [20], с. 78, а также [21], с. 116 – 117), даже в случае гладкой Γ оператор продолжения нулем с некоторой части $\Gamma_k \subset \Gamma$ (с гладкой $\partial\Gamma_k$) на всю Γ не является непрерывным из $H^{1/2}(\Gamma_k)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$. Однако в данном случае, т.е. на решениях w вспомогательной задачи (153) на элементах $\gamma_k w$, $w \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)$, этот оператор оказывается непрерывным.

Введем теперь следующие классы функций:

$$\hat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k \varphi \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1, q}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}^1(\Omega) &:= H_0^1(\Omega) \oplus \{(\cdot)_{k=1}^q H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \\ H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega) &= H_h^1(\Omega) \cap H_{0,\Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega). \end{aligned} \quad (168)$$

Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ регулярным по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на части Γ_k , $k = \overline{1, q}$, если для любого k элемент $\gamma_k u = \rho_k \gamma u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е. он продолжим нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Согласно проведенным выше построениям и определениям (167), (168), элементы из $\hat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след: для любого $u \in \hat{H}^1(\Omega)$ имеем

$$u = u_0 + u_1 + \dots + u_q, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_k \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega), \quad k = \overline{1, q}, \quad (169)$$

$$\gamma u_0 = 0, \quad \gamma_k u_k =: \tilde{\varphi}_k \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \gamma_k u_j = 0 \quad (k \neq j), \quad j, k = \overline{1, q}. \quad (170)$$

При этом элементы $\gamma u \in \hat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k , продолжимые нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь следующую тройку пространств и оператор следа:

$$E = L_2(\Omega), \quad F = \hat{H}^1(\Omega), \quad G = L_2(\Gamma), \quad \Gamma := \partial\Omega, \quad \gamma u := u|_\Gamma, \quad u \in \hat{H}^1(\Omega). \quad (171)$$

Нетрудно видеть, что для них выполнены следующие свойства.

1°. $\hat{H}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} = c \|u\|_{\hat{H}^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \hat{H}^1(\Omega), \quad (172)$$

2°. Оператор $\gamma : \hat{H}^1(\Omega) \rightarrow \hat{H}^{1/2}(\Gamma)$ ограничен, $\hat{H}^{1/2}(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$ и (по теореме С.Л. Соболева о следах)

$$\|\gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \leq \tilde{c} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \hat{H}^1(\Omega), \quad (173)$$

3°. Пространство $H_0^1(\Omega) = \ker \gamma$ плотно в $L_2(\Omega)$.

4°. Для каждого $k = \overline{1, q}$ оператор $p_k = \omega_k \rho_k$ в силу лемм 2 и 7 является ограниченным проектором в пространстве $G_+ := \hat{H}^{1/2}(\Gamma)$, а оператор $\rho_k \omega_k$ по построению является ограниченным проектором в $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) =: (G_+)_k$.

Поэтому по теореме 5 приходим к следующему выводу.

Теорема 6. Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\hat{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : \hat{H}^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$, $\gamma \eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \hat{H}^1(\Omega)$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ , разбитой на части Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1, q}$, справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач:

$$\langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta, u \in \hat{H}^1(\Omega), \quad (174)$$

$$u - \Delta u \in (\hat{H}^1(\Omega))^*, \quad \gamma_k \eta := \eta|_{\Gamma_k} \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1, q}.$$

□

2.3. Итоговая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Вторая формулировка абстрактной формулы Грина, выраженная теоремой 5, не всегда отражает те классы смешанных краевых задач, которые встречаются в приложениях. Именно, оператор ω_k продолжения нулем с $(G_+)_k$ на $(\widehat{G_+})_k$, как было видно из рассмотрений п. 2.2, полезно использовать в случаях, когда куски Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ расположены на положительном расстоянии либо когда на разных кусках границы задают краевые условия Дирихле с функциями класса $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому целесообразно получить еще более общую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы в приложениях можно было использовать и краевые условия Неймана или Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, снова будем считать, что имеют место оснащения

$$(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \quad k = \overline{1, q}, \quad G = \bigoplus_{k=1}^q G_k, \quad (175)$$

а операторы проектирования $p_k : G_+ \rightarrow (\widehat{G_+})_k$ представляются в виде (134), (135):

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad \rho_k \omega_k = (I_+)_k, \quad k = \overline{1, q}, \quad \sum_{k=1}^q p_k = I_+, \quad (176)$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)_k}$, но не обязательно нулем. Предполагается также, что $\rho_k : G_+ \rightarrow (G_+)_k$ и $\omega_k : (G_+)_k \rightarrow \widehat{(G_+)_k}$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях сопряженный оператор

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*, \quad \rho_k^* = (G_+)_k^* \rightarrow (G_+)^*, \quad \omega_k^* = \widehat{(G_+)_k}^* \rightarrow (G_+)_k^*, \quad k = \overline{1, q}, \quad (177)$$

где ρ_k^* и ω_k^* — ограниченные операторы, причем здесь ω_k^* — оператор сужения с $\widehat{(G_+)_k}^*$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 7. (общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач). Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование абстрактной формулы Грина в форме (14), т.е. условия (8) – (10). Пусть также выполнены условия (175) и условия (176) либо (177). Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в форме (138), (139):

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F. \quad (178)$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \quad (179)$$

где ρ_k и ω_k^* — операторы со свойствами (176), (177).

Доказательство. Если выполнены условия (176), то доказательство полностью повторяет вывод формул (140), (141).

Если же выполнены условия (177), то имеем

$$\begin{aligned} \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G &= \langle \gamma \eta, \left(\sum_{k=1}^q p_k^* \right) \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^q \langle \gamma \eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \\ &= \sum_{k=1}^q \langle \gamma \eta, \rho_k^* \omega_k^* \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^q \langle \rho_k \gamma \eta, \omega_k^* \partial u \rangle_{G_k} =: \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \eta, u \in F. \end{aligned}$$

□

2.4. Приложения к классической тройке гильбертовых пространств.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как выглядит формула Грина (178), (179) для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и обычного оператора следа γ . Сначала докажем некоторые предварительные утверждения.

Рассмотрим вспомогательную задачу Неймана

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \quad (180)$$

а также соответствующую задачу Зарембы

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad w = \varphi_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k). \quad (181)$$

Теорема 8. Задача Неймана (180) тогда и только тогда имеет слабое решение $w =: T_k \psi_k \in H_h^1(\Omega)$, когда выполнено условие

$$\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \quad (182)$$

Задача Зарембы (181) имеет слабое решение $w =: \gamma_k^{-1} \varphi_k \in H_h^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k). \quad (183)$$

Доказательство. Заметим сначала, что условия (182), (183) необходимы для разрешимости задач (180), (181). В самом деле, если $w \in H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, то по теореме Гальярдо (см. п. 1.2) $\gamma w := w|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, а потому, как следует из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma_k)$ (см. (51)), $\varphi_k := w|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е. выполнено условие (183). Далее, для $w \in H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ аналогично получаем (см. (84)), что $(\partial w / \partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому, согласно (144), $(\partial w / \partial n)_{\Gamma_k} =: \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$.

Докажем теперь, что условия (182), (183) достаточны для разрешимости (180), (181) соответственно.

Представим решение задачи Зарембы (181) в виде $w = w_1 + w_2$. Предварительно продолжим с помощью оператора В.С. Рычкова функцию $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$, т.е. введем, согласно лемме 3,

$$\varphi := \mathcal{E}_k \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\mathcal{E}_k \varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_k \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}. \quad (184)$$

Далее будем считать, что φ есть след на Γ функции w_1 , которая является решением задачи Дирихле:

$$w_1 - \Delta w_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad w_1 = \varphi = \mathcal{E}_k \varphi_k \quad (\text{на } \Gamma). \quad (185)$$

Тогда решение w_1 этой задачи существует, единственно и выражается формулой

$$w_1 = \gamma_M^{-1} \mathcal{E}_k \varphi_k \in H_h^1(\Omega), \quad (186)$$

где оператор γ_M^{-1} ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma)$ на $H_h^1(\Omega)$.

Для функции $w_2 := w - w_1$ возникает краевая задача

$$w_2 - \Delta w_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad w_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \frac{\partial w_2}{\partial n} = -\frac{\partial w_1}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \quad (187)$$

которая уже исследована выше (см. (153)). В самом деле, так как $w_1 \in H^1(\Omega)$, то $(\partial w_1 / \partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому $(\partial w_1 / \partial n)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. По лемме 4 получаем, что задача (187) имеет единственное слабое решение

$$w_2 \in H_{h, \Gamma_k}^1(\Omega), \quad w_2 = T_k(-\partial w_1 / \partial n)_{\Gamma_k}. \quad (188)$$

Итак, условие (183) не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача Зарембы (181) имела единственное слабое решение.

Пусть теперь $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Докажем, что существует единственное слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ задачи Неймана (180).

Заметим сначала, что если $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, то элемент

$$\widehat{\psi}_k := \rho_k^* \psi_k := \begin{cases} \psi_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \end{cases} \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*. \quad (189)$$

Здесь ρ_k^* — оператор продолжения нулем с $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$. Докажем это последнее утверждение, т.е. свойство $\widehat{\psi}_k \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Так как $L_2(\Gamma_k)$ плотно в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$, то для $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ найдется последовательность элементов $\psi_{k_j} \in L_2(\Gamma_k)$, сходящаяся к ψ_k в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Кроме того, если ζ_{k_j} — последовательность элементов из $L_2(\Gamma \setminus \Gamma_k)$, сходящаяся к нулю при $j \rightarrow \infty$, то последовательность элементов

$$\widehat{\psi}_{k_j} := \begin{cases} \psi_{k_j} & (\text{на } \Gamma_k), \\ \zeta_{k_j} & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots,$$

фундаментальна в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Поэтому она имеет предел (в силу полноты $H^{-1/2}(\Gamma)$), который, очевидно, равен $\widehat{\psi}_k$. Значит, $\widehat{\psi}_k \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Докажем теперь тождество

$$\langle \mathcal{E}_k \varphi_k, \widehat{\psi}_k \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \forall \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad (190)$$

а также неравенство

$$|\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}| = |\langle \mathcal{E}_k \varphi_k, \widehat{\psi}_k \rangle_{L_2(\Gamma)}| \leq \|\mathcal{E}_k\| \cdot \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \cdot \|\widehat{\psi}_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (191)$$

Здесь предполагается, что норма в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ определена по закону (144).

Для элементов $\widehat{\psi}_k$ вида (189) с $\psi_k \in L_2(\Gamma_k)$ имеем

$$\langle \mathcal{E}_k \varphi_k, \widehat{\psi}_k \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\mathcal{E}_k \varphi_k, \widehat{\psi}_k)_{L_2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} (\mathcal{E}_k \varphi_k)(\widehat{\psi}_k) d\Gamma = \int_{\Gamma_k} \varphi_k \psi_k d\Gamma_k = (\varphi_k, \psi_k)_{L_2(\Gamma_k)},$$

а отсюда тождество (190) получается предельным переходом, т.е. расширением скалярного произведения на элементы ψ_k из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Далее, из (190) получаем неравенство

$$|\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}| = |\langle \mathcal{E}_k \varphi_k, \widehat{\psi}_k \rangle_{L_2(\Gamma)}| \leq \|\mathcal{E}_k\| \cdot \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \cdot \|\widehat{\psi}_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (192)$$

Переходя справа к

$$\inf \{ \|\widehat{\psi}_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} : \widehat{\psi}_k|_{\Gamma_k} = \psi_k \},$$

приходим к формуле (191).

Опираясь на доказанные утверждения, в частности, на (189) и (191), докажем, что при $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ задача Неймана (180) имеет единственное решение $w \in H_h^1(\Omega)$. В самом деле, ее слабое решение определяется из тождества

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k \eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta \in H^1(\Omega), \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k). \quad (193)$$

Так как при любом $\eta \in H^1(\Omega)$ правая часть в (193) в силу (190), (191) и свойств $\gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\rho_k \gamma\eta = \gamma_k \eta =: \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$, то имеет место тождество (193). Тогда

$$w =: T_k \varphi_k, \quad T_k \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k), H_h^1(\Omega)). \quad (194)$$

□

Опираясь на утверждения теоремы 8, введем оператор Стеклова (иногда его называют оператором Пуанкаре–Стеклова, см. [22] – [24]), который сопоставляет по решению w задачи Неймана (180) его след на Γ_k :

$$\varphi_k = \gamma_k T_k \psi_k =: C_k \psi_k, \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k). \quad (195)$$

Пусть η и w — два решения задачи Неймана (180), отвечающие соответственно элементам ζ_k и ψ_k из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$, причем $\eta|_{\Gamma_k} = \xi_k$, $w|_{\Gamma_k} = \varphi_k$. Тогда, исходя из определения (193) слабого решения задачи Неймана, легко видеть, что

$$\langle \xi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle C_k \zeta_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \zeta_k, C_k^{-1} \varphi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \quad (196)$$

откуда следует, что C_k^{-1} — оператор гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$,

$$\mathcal{D}(C_k^{-1}) = \mathcal{R}(C_k) = H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(C_k^{-1}) = \mathcal{D}(C_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k). \quad (197)$$

Будем далее говорить, что если выполнены условия (196), (197), то пространства $H^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задаче Неймана (180) либо задаче Зарембы (181).

Аналогичное утверждение о дуальности справедливо и для задачи (153) – (154), т.е.

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad w = 0 \quad (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \quad (198)$$

и соответствующей задачи Дирихле:

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad w = \tilde{\varphi}_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad w = 0 \quad (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \quad (199)$$

Здесь, как показали проведенные выше рассуждения, возникает оператор Стеклова $\tilde{C}_k := \gamma_k \tilde{T}_k$, гильбертова пара пространств $(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); H^{-1/2}(\Gamma_k))$, а также соотношения

$$\langle \tilde{\xi}_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \tilde{C}_k \zeta_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \zeta_k, \tilde{C}_k^{-1} \tilde{\varphi}_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \quad (200)$$

$$\mathcal{D}(\tilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{R}(\tilde{C}_k) = \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(\tilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{D}(\tilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad (201)$$

а η и w — соответствующие решения задач (198) либо (199). Таким образом, пространства $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задачам (198), (199).

Отметим, наконец, и такой очевидный факт: пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ дуальны по задаче Неймана

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (202)$$

и соответствующей задаче Дирихле

$$w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad w = \varphi \quad (\text{на } \Gamma), \quad (203)$$

причем связь между ψ и φ дается классическим оператором Стеклова:

$$\varphi = C\psi, \quad \xi = C\zeta, \quad \mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C) = H^{1/2}(\Gamma), \quad \mathcal{R}(C^{-1}) = \mathcal{D}(C) = H^{-1/2}(\Gamma), \quad (204)$$

$$\langle \xi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle C\zeta, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \zeta, C^{-1}\varphi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \quad \eta, w \in H_h^1(\Omega). \quad (205)$$

Приведем еще одну вспомогательную формулу, которая далее понадобится. Пусть $\xi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Тогда, как было установлено выше, $\xi_k := \xi|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k)$, $\psi_k :=$

$\psi|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, причем эти пространства дуальны по задачам (180), (181), $k = \overline{1, q}$. Убедимся, что имеет место формула

$$\langle \xi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^q \langle \xi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \xi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (206)$$

В самом деле, если $\psi \in L_2(\Gamma)$, то $\psi_k \in L_2(\Gamma_k)$ и имеет место формула

$$\langle \xi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\xi, \psi)_{L_2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \xi \psi d\Gamma = \sum_{k=1}^q \int_{\Gamma_k} \xi_k \psi_k d\Gamma_k = \sum_{k=1}^q (\xi_k, \psi_k)_{L_2(\Gamma_k)}, \quad (207)$$

а формула (206) получается из (207) предельным переходом, так как $L_2(\Gamma)$ по построению образует плотное множество в $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Введем в $H^{-1/2}(\Gamma)$ норму, отвечающую разбиению Γ на части Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1, q}$, по следующему правилу:

$$\|\psi\|_{eq, H^{-1/2}(\Gamma)}^2 := \sum_{k=1}^q \|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}^2. \quad (208)$$

Лемма 8. Нормы в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$, определяемые по обычному закону

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} := \sup \{ |\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}| / \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} : 0 \neq \varphi \in H^{1/2}(\Gamma) \} \quad (209)$$

и по правилу (208), эквивалентны.

Доказательство. Так как

$$\|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)} := \inf \{ \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} : \psi|_{\Gamma_k} = \psi_k \}, \quad (210)$$

то

$$\sum_{k=1}^q \|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}^2 \leq q \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2. \quad (211)$$

Далее, из формулы (51), задающей квадрат нормы в $H^{1/2}(\Gamma)$, следует, что

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \geq \sum_{k=1}^q \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}^2, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (212)$$

Поэтому, с использованием формул (206) и (212), имеем

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}|^2}{\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2} &= \frac{\left| \sum_{k=1}^q \langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \right|^2}{\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^q |\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}| \right)^2}{\sum_{k=1}^q \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}^2} \leq \\ &\leq q \sum_{k=1}^q \frac{|\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}|^2}{\sum_{j=1}^q \|\varphi_j\|_{H^{1/2}(\Gamma_j)}^2} \leq q \sum_{k=1}^q \frac{|\langle \varphi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}|^2}{\|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}^2} \leq q \sum_{k=1}^q \|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq q \sum_{k=1}^q \|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}^2,$$

что вместе с (211) приводит к неравенствам

$$q^{-1/2} \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\psi\|_{eq, H^{-1/2}(\Gamma)} \leq q^{1/2} \|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (213)$$

□

Опираясь на установленные факты, приведем примеры операторов проектирования в пространствах $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, а также их представления в виде (176) и (177), использованные при доказательстве общей теоремы 7. Эти примеры основаны на результатах рассмотрения вспомогательных краевых задач, изученных выше.

Рассмотрим сначала пространство $H^{-1/2}(\Gamma)$ и будем считать, что липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ разбита на части Γ_k с липшицевыми $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1, q}$. Для любой $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ найдем

$$\psi_k := \psi|_{\Gamma_k} =: \omega_k^* \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad (214)$$

где ω_k^* — оператор сужения, $\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k)$, который, в силу предыдущих построений и определения нормы в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ (см. (210)), ограничен и его норма

$$\|\omega_k^*\| \leq 1 \iff \|\rho_k\| \leq 1. \quad (215)$$

Далее, введем оператор продолжения нулем, действующий из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$ по закону

$$\rho_k^* \psi_k = \hat{\psi}_k := \begin{cases} \psi_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k). \end{cases} \quad (216)$$

Из (208) и (213) следует, что оператор ρ_k^* ограничен. Кроме того, очевидно, выполнены свойства

$$p_k^* := \rho_k^* \omega_k^* = (p_k^*)^2, \quad \omega_k^* \rho_k^* = (I_-)_k, \quad p_k^* p_j^* = 0 \quad (k \neq j), \quad (217)$$

где $(I_-)_k$ — единичный оператор в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$.

Отсюда следует, что p_k^* является ограниченным оператором проектирования в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$,

$$\sum_{k=1}^q p_k^* = I_-, \quad (218)$$

где I_- — единичный оператор в пространстве $H^{-1/2}(\Gamma)$, и имеет место прямое разложение

$$H^{-1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^q \hat{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \hat{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := p_k^* H^{-1/2}(\Gamma). \quad (219)$$

Кроме того, в силу указанного выше свойства дуальности пространств $H^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ по задаче Неймана (180) либо по задаче Зарембы (181), выполнены общие требования (175), где $(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k)$, $G_k = L_2(\Gamma_k)$, $(G_+)_k^* = H^{-1/2}(\Gamma_k)$, а также свойства (177).

Приведем теперь более сложный пример, относящийся к пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. Пусть $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Опираясь на связи между решениями задач Дирихле (203) и Неймана (202) и вводя оператор Стеклова $C : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, будем иметь $\psi := C^{-1}\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Рассмотрим, далее, элементы $\psi_k = \psi|_{\Gamma_k} = \omega_k^* \psi$ и $\hat{\psi}_k := \rho_k^* \psi_k$ (см. разобранный выше пример). Решая теперь задачу Неймана (202) с $\psi = \hat{\psi}_k$, а затем находя след слабого решения w этой задачи на Γ , получаем

$$w|_{\Gamma} = C \hat{\psi}_k = C \rho_k^* \omega_k^* C^{-1} \varphi =: p_k \varphi, \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (220)$$

Убедимся, что введенный оператор p_k является ограниченным оператором проектирования, действующим в $H^{1/2}(\Gamma)$. Прежде всего, он равен произведению ограниченных операторов (действующих из одного пространства в другое) и потому ограничен. Кроме того, опираясь на свойства (217), легко убедиться, что

$$p_k^2 = p_k, \quad \sum_{k=1}^q p_k = I_+, \quad p_k p_j = 0 \quad (k \neq j), \quad (221)$$

где I_+ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$. Поэтому для операторов p_k выполнены общие свойства (176), причем можно формально считать, что

$$p_k = \tilde{\omega}_k \tilde{\rho}_k, \quad \tilde{\rho}_k := \omega_k^* C^{-1}, \quad \tilde{\omega}_k := C \rho_k^*, \quad (222)$$

$$\tilde{\rho}_k : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \tilde{\omega}_k : H^{-1/2}(\Gamma_k) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \quad \tilde{\rho}_k \tilde{\omega}_k = \omega_k^* \rho_k^* = (I_-)_k. \quad (223)$$

Таким образом, имеем прямое разложение

$$H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^q \check{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \check{H}^{1/2}(\Gamma_k) := p_k H^{1/2}(\Gamma). \quad (224)$$

Оно позволяет по любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ найти такие функции $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma)$, связанные с φ через решение задачи Неймана (202), что в сумме имеем

$$\sum_{k=1}^q \varphi_k = \varphi. \quad (225)$$

В качестве следствия из разобранных примеров, а также из теоремы 7 приходим к такому выводу.

Теорема 9. Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ , разбитой на липшицевы куски Γ_k , $k = \overline{1, q}$, справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} - \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \quad (226)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k \eta &:= \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1, q}, \\ u - \Delta u &\in (H^1(\Omega))^*. \end{aligned} \quad (227)$$

Формула Грина (226), таким образом, приспособлена не только к исследованию с ее помощью слабых решений краевых задач в области Ω с условиями Дирихле на части Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ (см. теорему 6), но также и с краевыми условиями Неймана либо Ньютона.

Из рассмотрения теорем 6 и 9 и формул Грина (174) и (226) соответственно возникает следующий естественный вопрос: в каком отношении находятся между собой пространства $\hat{H}^1(\Omega)$ (см. (168)) и $H^1(\Omega)$, для которых эти формулы справедливы? Очевидно, имеет место включение $\hat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, однако далее будет установлено, что эти пространства изоморфны.

Переходя к более детальному изучению этой проблемы, установим взаимосвязь между пространством

$$\hat{H}^{1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^q \hat{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad (228)$$

$$\hat{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \left\{ \hat{\varphi}_k := \begin{cases} \tilde{\varphi}_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_k \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \right\} \quad (229)$$

(см. (166)) и пространством $H^{1/2}(\Gamma) \supset \hat{H}^{1/2}(\Gamma)$. Напомним, что элементы из $\hat{H}^{1/2}(\Gamma)$ состоят из наборов функций, заданных на Γ_k и продолжимых нулем вне Γ_k . При этом они обращаются в нуль на $\partial\Gamma_k$ и удовлетворяют необходимым условиям продолжения нулем в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Введем подпространство

$$\hat{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_q) := (\dot{+})_{k=1}^{q-1} \hat{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad (230)$$

и выясним, каково ортогональное дополнение этого подпространства в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. При этом будем считать, что скалярное произведение в $H^{1/2}(\Gamma)$ определено по закону (см. (16), (17))

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2)_{H^{1/2}(\Gamma)} &:= (w_1, w_2)_{H^1(\Omega)}, \quad \gamma w_1 = \varphi_1, \quad \gamma w_2 = \varphi_2, \\ w_k - \Delta w_k &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (231)$$

приводящему к норме, эквивалентной стандартной норме (51).

Лемма 9. Имеет место ортогональное разложение

$$H^{1/2}(\Gamma) = \hat{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_q) \oplus \check{H}^{1/2}(\Gamma_q), \quad (232)$$

где

$$\begin{aligned} \check{H}^{1/2}(\Gamma_q) &:= \left\{ \varphi_q = \gamma w_q : w_q - \Delta w_q = 0 \quad (\text{в } \Omega), \right. \\ &\left. \frac{\partial w_q}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = \overline{1, q-1}, \quad \frac{\partial w_q}{\partial n_q} = \psi_q \quad (\text{на } \Gamma_q), \quad \forall \psi_q \in H^{-1/2}(\Gamma_q) \right\}. \end{aligned} \quad (233)$$

Доказательство. Пусть $\hat{\varphi} \in \hat{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_q)$ — произвольный элемент, т.е.

$$\hat{\varphi} = \sum_{j=1}^{q-1} \hat{\varphi}_j, \quad \hat{\varphi}_j \in \hat{H}^{1/2}(\Gamma_j), \quad j = \overline{1, q-1}. \quad (234)$$

Пусть, далее, φ_q ортогонально любому $\widehat{\varphi}$ в $H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда с использованием формулы Грина (226) имеем

$$\begin{aligned} (\widehat{\varphi}, \varphi_q)_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \left(\sum_{j=1}^{q-1} \widehat{\varphi}_j, \varphi_q \right)_{H^{1/2}(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{q-1} (\widehat{\varphi}_j, \varphi_q)_{H^{1/2}(\Gamma)} = \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} (w_j, w_q)_{H^1(\Omega)} = \sum_{j=1}^{q-1} \langle w_j, w_q - \Delta w_q \rangle_{L_2(\Omega)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k w_j, \frac{\partial w_q}{\partial n_k} \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{k=1}^{q-1} \langle \gamma_k w_j, \frac{\partial w_q}{\partial n_k} \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = 0. \end{aligned} \quad (235)$$

Здесь при выводе использованы связи

$$w_q - \Delta w_q = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \widehat{\varphi}_j = \gamma w_j, \quad \widehat{\varphi}_j|_{\Gamma_q} = 0, \quad j = \overline{1, q-1}. \quad (236)$$

Отметим еще, что

$$\gamma_k w_j = \gamma_k w_k \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, q-1}, \quad (237)$$

поэтому (235) дает соотношение

$$\sum_{k=1}^{q-1} \langle \gamma_k w_k, \frac{\partial w_q}{\partial n_k} \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = 0. \quad (238)$$

Заметим теперь, что $\gamma_k w_k = \widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, причем $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ плотно в $L_2(\Gamma_k)$ (лемма 5), а $L_2(\Gamma_k)$ плотно в $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому из (238) имеем свойства

$$H^{-1/2}(\Gamma_k) \ni \frac{\partial w_q}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = \overline{1, q-1},$$

а производная по нормали $\partial w_q / \partial n_q =: \psi_q$ на Γ_q может быть произвольным элементом из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Отсюда следует, что ортогональное дополнение к $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma \setminus \Gamma_q)$ имеет вид (233). $\square$

Из этой леммы получаем следующий важный результат.

Теорема 10. *Пространства $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ (см. (228), (229)) и $H^{1/2}(\Gamma)$ изоморфны. Соответственно изоморфны пространства $\widehat{H}^1(\Omega)$ (см. (168)) и $H^1(\Omega)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\widehat{H}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \left\{ (\cdot)_{k=1}^q H_{h, \Gamma_k}^1(\Omega) \right\}, \quad (239)$$

$$H_{h, \Gamma_k}^1(\Omega) := \left\{ w_k \in H_h^1(\Omega) : w_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \quad \frac{\partial w_k}{\partial n_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k) \right\} \quad (240)$$

(см. (153) – (155)). Соответственно для $H^1(\Omega)$ имеем разложение

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \quad (241)$$

$$H_h^1(\Omega) := \left\{ w \in H^1(\Omega) : w - \Delta w = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi, \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\}. \quad (242)$$

Представим любую функцию $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ в виде

$$\psi = \sum_{k=1}^q \widehat{\psi}_k, \quad \widehat{\psi}_k \in \widehat{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1, q}, \quad (243)$$

(см. (216), (219)). Тогда очевидно, что $H_h^1(\Omega)$ допускает прямое разложение

$$H_h^1(\Omega) = (\cdot)_{k=1}^q H_{h, \Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega), \quad (244)$$

$$\begin{aligned} H_{h, \Gamma \setminus \Gamma_k}^1(\Omega) &:= \\ &= \left\{ w_k \in H_h^1(\Omega) : \frac{\partial w_k}{\partial n_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \frac{\partial w_k}{\partial n_j} \Big|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j \neq k) \right\}. \end{aligned} \quad (245)$$

Для пространств $\hat{H}^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ из (228), (229), а также из (244), (245) аналогично получаем, что каждое из них является прямой суммой подпространств вида (229), связанных с решениями вспомогательной задачи (153), и соответственно вспомогательной задачи (180). В частности (см. (224)),

$$H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^q \check{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad (246)$$

где $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ определено так же, как в (233) определено $\check{H}^{1/2}(\Gamma_q)$ при $k = q$:

$$\begin{aligned} \check{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \left\{ \varphi_k = \gamma w_k : w_k - \Delta w_k = 0 \text{ (в } \Omega), \right. \\ \left. \frac{\partial w_k}{\partial n_k} = \psi_k \text{ (на } \Gamma_k), \quad \forall \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \frac{\partial w_k}{\partial n_j} \Big|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j \neq k) \right\}. \end{aligned} \quad (247)$$

Из формул (239) – (247) видно, что для доказательства всех утверждений теоремы достаточно убедиться, что подпространства $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ изоморфны для каждого $k = \overline{1, q}$.

Установим это свойство, опираясь на свойства решений вспомогательных задач (153) и (180). Для решений задачи (153) имеем (см. (161))

$$\tilde{\varphi}_k := \gamma_k \tilde{T}_k \psi_k = \tilde{C}_k \psi_k \in \check{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \psi_k = \tilde{C}_k^{-1} \tilde{\varphi}_k, \quad (248)$$

где $\tilde{C}_k$ — оператор гильбертовой пары $(\check{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$ (лемма 6, см. также (198) – (201)). Для решений задачи (180) соответственно получаем

$$\varphi_k := w|_{\Gamma} = C \rho_k^* \psi_k, \quad (249)$$

где C — оператор Стеклова задачи Неймана (202), примененный к элементу $\rho_k^* \psi_k =: \tilde{\psi}_k$ (см. (216), (217)). Отсюда получаем связи

$$\rho_k^* \psi_k = C^{-1} \varphi_k, \quad \psi_k = \omega_k^* C^{-1} \varphi_k. \quad (250)$$

Из (249), (250) следует, что элементы $\tilde{\varphi}_k$ и φ_k (и соответственно $\hat{\varphi}_k$ и φ_k , см. (229)), образующие подпространства $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, связаны соотношениями

$$\tilde{\varphi}_k := \tilde{C}_k \omega_k^* C^{-1} \varphi_k, \quad \varphi_k = C \rho_k^* \tilde{C}_k^{-1} \tilde{\varphi}_k, \quad k = \overline{1, q}. \quad (251)$$

Таким образом, пространства $\hat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\check{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ изоморфны, т.е. между элементами этих пространств имеются взаимно однозначные и взаимно непрерывные отображения, описываемые формулами (251). Отсюда, в силу сказанного выше, следуют также свойства изоморфности между пространствами $\hat{H}^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$, а также между $\hat{H}^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$. $\square$

Доказанная теорема, вместе с леммой 9 и теоремами 6 и 9, показывают, что вид изоморфизма пространства $H^1(\Omega)$ при решении смешанных краевых задач следует выбирать, исходя из вида краевых условий на отдельных частях Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$. Ниже это соображение будет принято во внимание.

3. АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

До сих пор рассматривалась ситуация, когда имеется тройка гильбертовых пространств E, F, G и оператор следа γ , связанные условиями (8) – (10), и для этих объектов имеет место формула Грина (14). Однако в приложениях часто возникает ситуация (несимметричный случай), когда вместо скалярного произведения в пространстве F исходным является полуторалинейная форма $\Phi(\eta, u)$, $\eta, u \in F$, связанная с нормой в пространстве F естественными соотношениями (см. ниже (253) и (264)). Оказывается, и в этом случае можно доказать существование абстрактной формулы Грина, где вместо скалярного произведения $(\eta, u)_F$ стоит соответствующая форма $\Phi(\eta, u)$.

3.1. Полуторалинейные ограниченные формы. Рассмотрим функцию $\Phi(\eta, u) : F \times F \rightarrow \mathbb{C}$, определенную на комплексном гильбертовом пространстве F . Ее называют *полуторалинейной формой*, если она линейна по η и антилинейна по u , т.е.

$$\begin{aligned}\Phi(c_1\eta_1 + c_2\eta_2, u) &= c_1\Phi(\eta_1, u) + c_2\Phi(\eta_2, u), \\ \Phi(\eta, c_1u_1 + c_2u_2) &= \bar{c}_1\Phi(\eta, u_1) + \bar{c}_2\Phi(\eta, u_2).\end{aligned}\tag{252}$$

Простейшим примером полуторалинейной формы является скалярное произведение $(\eta, u)_F$.

Полуторалинейная форма называется *ограниченной* на F , если

$$|\Phi(\eta, u)| \leq c_1 \|\eta\|_F \cdot \|u\|_F, \quad \forall \eta, u \in F, \quad c_1 > 0.\tag{253}$$

Будем считать далее, что имеется гильбертова пара пространств $(F; E)$, а потому имеет место и оснащение

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*.\tag{254}$$

Нетрудно установить, что каждой форме $\Phi(\eta, u)$ однозначно отвечает линейный ограниченный оператор $A : F \rightarrow F^*$, с помощью которого форма $\Phi(\eta, u)$ допускает представление

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F.\tag{255}$$

В самом деле, в силу (253) форма $\Phi(\eta, u)$ является ограниченным линейным функционалом в пространстве F , а потому ее можно представить в виде

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, u_* \rangle_E, \quad \forall \eta \in F.\tag{256}$$

При этом элемент $u_* \in F^*$ однозначно находится по элементу $u \in F$.

Вводя оператор $A : F \rightarrow F^*$ по закону

$$Au := u_*,\tag{257}$$

приходим к выводу, что имеет место представление (255). При этом в силу (253) имеем

$$|\langle \eta, Au \rangle_E| \leq c_1 \|\eta\|_F \cdot \|u\|_F,\tag{258}$$

откуда следует, что

$$\|Au\|_{F^*} \leq c_1 \|u\|_F \implies \|A\|_{F \rightarrow F^*} \leq c_1,\tag{259}$$

т.е. оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ ограничен.

Очевидно, имеет место и обратное утверждение: каждый линейный ограниченный оператор $A : F \rightarrow F^*$ однозначно определяет форму $\Phi(\eta, u)$ по закону (255), и для этой формы выполнено неравенство (253) с константой $c_1 := \|A\|_{F \rightarrow F^*}$. Таким образом, между ограниченными формами и их операторами имеет место взаимно однозначное соответствие.

Форма

$$\Phi^*(\eta, u) := \overline{\Phi(u, \eta)}\tag{260}$$

называется *сопряженной* к форме $\Phi(\eta, u)$. Если выполнено условие

$$\Phi^*(\eta, u) = \Phi(\eta, u), \quad \forall \eta, u \in F,\tag{261}$$

то форма $\Phi(\eta, u)$ называется *эрмитовой*, или *симметрической*. Сопряженной форме $\Phi^*(\eta, u)$ однозначно отвечает сопряженный ограниченный оператор $A^* : F \rightarrow F^*$:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, A^*u \rangle_E,\tag{262}$$

а эрмитовой (симметрической) форме отвечает *самосопряженный* оператор (действующий из F в F^*):

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E = \overline{\langle u, A\eta \rangle_E}, \quad \forall \eta, u \in F.\tag{263}$$

3.2. Равномерно аккретивные формы. Назовем форму $\Phi(\eta, u)$ и отвечающий ей оператор A *равномерно аккретивными* в пространстве F , если

$$\operatorname{Re} \Phi(u, u) = \operatorname{Re} \langle u, Au \rangle_E \geq c_2 \|u\|_F^2, \quad c_2 > 0, \quad \forall u \in F. \quad (264)$$

(Это соотношение иногда называют также *усиленным неравенством Гординга*.) Равномерно аккретивная форма является *ограниченной снизу*:

$$|\Phi(u, u)| \geq c_2 \|u\|_F^2, \quad (265)$$

поскольку $|\Phi(u, u)| \geq \operatorname{Re} \Phi(u, u)$.

Лемма 10. *Ограниченная равномерно аккретивная форма $\Phi(\eta, u)$ может быть представлена через скалярное произведение в F в виде*

$$\Phi(\eta, u) = (Q\eta, u)_F = (\eta, Q^*u)_F, \quad \forall \eta, u \in F, \quad (266)$$

где Q — линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор.

Доказательство. Снова заметим, что при фиксированном $u \in F$ величина $\Phi(\eta, u)$ является линейным по η функционалом в F и потому представима в виде

$$\Phi(\eta, u) = (\eta, w)_F, \quad w \in F, \quad (267)$$

при этом

$$\|w\|_F \leq c_1 \|u\|_F, \quad (268)$$

в силу чего элемент w определяется однозначно. Положив $w = Q^*u$, придем к представлению (266), причем в этом представлении $Q^* : F \rightarrow F$, а потому и Q — ограниченные операторы:

$$\|Q^*\| = \|Q\| \leq c_1. \quad (269)$$

Принимая в (267) $\eta = u$, из (265), (268) получаем

$$c_2 \|u\|_F^2 \leq |\Phi(u, u)| = |(u, Q^*u)_F| = |(u, w)_F| \leq \|u\|_F \cdot \|w\|_F \leq c_1 \|u\|_F^2. \quad (270)$$

Отсюда при $u \neq 0$ имеем

$$c_2 \|u\|_F \leq \|w\|_F = \|Q^*u\|_F \leq c_1 \|u\|_F. \quad (271)$$

Аналогично устанавливаем, что

$$c_2 \|u\|_F \leq \|Qu\|_F \leq c_1 \|u\|_F. \quad (272)$$

Из (271) следует, что $\ker Q^* = \{0\}$, а потому, в силу разложения

$$F = \mathcal{R}(Q) \oplus \ker Q^*, \quad (273)$$

приходим к выводу, что область значений оператора Q есть все пространство. Тогда из левого неравенства (272) следует, что оператор Q имеет ограниченный обратный и

$$\|Q^{-1}\| \leq c_2^{-1}. \quad (274)$$

□

Далее понадобится еще одно известное утверждение.

Лемма 11. (Лакс, Мильграм, см., например, [15], с. 43). *Ограниченный на F равномерно аккретивный оператор $A : F \rightarrow F^*$, отвечающий форме $\Phi(\eta, u)$, имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1} : F^* \rightarrow F$.*

Доказательство. Аналогично (270) и с учетом (255) имеем

$$c_2 \|u\|_F^2 \leq \operatorname{Re} \Phi(u, u) \leq |\Phi(u, u)| = |\langle u, Au \rangle_E| \leq \|u\|_F \cdot \|Au\|_{F^*}, \quad (275)$$

откуда при $u \neq 0$ следует, что

$$\|u\|_F \leq c_2^{-1} \|Au\|_{F^*}, \quad \forall u \in F. \quad (276)$$

Следовательно, $\ker A = \{0\}$. Аналогично устанавливаем, что $\ker A^* = \{0\}$. Так как $A : F \rightarrow F^*$ ограничен (см. (259)), а потому замкнут, снова, как и в лемме 10, получаем, что

$\mathcal{R}(A) = F^*$. Значит, обратный оператор существует, определен на всем F^* и потому (по теореме Банаха) ограничен:

$$\|A^{-1}\|_{F^* \rightarrow F} \leq c_2^{-1}. \quad (277)$$

□

3.3. О представлении несимметрической равномерно аккретивной формы.

Доказанные выше факты позволяют установить для ограниченной несимметрической равномерно аккретивной формы $\Phi(\eta, u)$ структуру отвечающего ей оператора A . Перейдем к изложению этого круга вопросов.

Итак, пусть несимметрическая форма $\Phi(\eta, u)$ удовлетворяет условиям (253) и (264), т.е. является ограниченной и равномерно аккретивной в пространстве F , причем $\Phi(\eta, u) \neq \Phi^*(\eta, u)$.

Введем в рассмотрение симметрические формы

$$\begin{aligned} \Phi_R(\eta, u) &:= \frac{1}{2} [\Phi(\eta, u) + \Phi^*(\eta, u)] = \Phi_R^*(\eta, u), \\ \Phi_I(\eta, u) &:= \frac{1}{2i} [\Phi(\eta, u) - \Phi^*(\eta, u)] = \Phi_I^*(\eta, u), \end{aligned} \quad (278)$$

называемые *вещественной* и *мнимой частями* формы $\Phi(\eta, u)$, так как

$$\Phi(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u) + i\Phi_I(\eta, u). \quad (279)$$

Для $\Phi_R(\eta, u)$ из (264), (253) имеем неравенства

$$c_2 \|u\|_F^2 \leq \Phi_R(u, u) =: \|u\|_{F_0}^2 \leq c_1 \|u\|_F^2, \quad \forall u \in F. \quad (280)$$

Отсюда следует, что в пространстве F можно ввести новую норму, эквивалентную норме $\|u\|_F$, а также соответствующее скалярное произведение. Таким образом, теперь имеем $F = F_0$, а норма в F_0 определена по закону (280).

Возникает гильбертова пара пространств $(F_0; E)$. Обозначим через A_0 оператор этой гильбертовой пары. Тогда в шкале пространств E^α , построенной по этому оператору, будем иметь

$$E = E^0, \quad F_0 = E^{1/2} = \mathcal{D}(A_0), \quad F_0^* = E^{-1/2} = \mathcal{R}(A_0), \quad (281)$$

$$A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(F_0; E), \quad A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(E; F_0^*), \quad (282)$$

$$(\eta, u)_{F_0} = (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0 u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0. \quad (283)$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств мнимой части формы $\Phi(\eta, u)$. Из неравенств (253), (280) имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_I(\eta, u)| &\leq |\Phi(\eta, u)| \leq c_1 \|\eta\|_F \cdot \|u\|_F \leq c_1 c_2^{-1} \|\eta\|_{F_0} \cdot \|u\|_{F_0} = \\ &= c_1 c_2^{-1} \|A_0^{1/2}\eta\|_E \cdot \|A_0^{1/2}u\|_E, \end{aligned} \quad (284)$$

т.е. формы $\Phi_I(\eta, u)$ и $\Phi(\eta, u)$ ограничены сверху в пространстве F_0 .

Из (284) следует, что форму $\Phi_I(\eta, u)$ можно рассматривать как функцию от аргументов $A_0^{1/2}\eta$ и $A_0^{1/2}u$ в пространстве E :

$$\Phi_I(\eta, u) =: \varphi(\eta', u'), \quad \eta' = A_0^{1/2}\eta \in E, \quad u' = A_0^{1/2}u \in E, \quad (285)$$

причем эта новая форма ограничена на E . Поэтому к форме $\varphi(\eta', u')$ применима лемма 10 в следующей редакции. Во-первых, вместо F здесь следует взять пространство E . Во-вторых, необходимо использовать то утверждение леммы, где учитывается лишь ограниченность, но не равномерная аккретивность формы. В-третьих, следует учесть, что $\Phi_I(\eta, u)$, а потому и $\varphi(\eta', u')$ — симметрические формы.

Тогда по лемме 10 будем иметь

$$\varphi(\eta', u') = (Q\eta', u')_E = (\eta', Qu')_E, \quad \forall \eta', u' \in E, \quad (286)$$

где уже учтено, что оператор $Q \in \mathcal{L}(E)$ является самосопряженным в E . Таким образом, из (285), (286) имеем представление

$$\Phi_I(\eta, u) =: (QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, QA_0^{1/2}u)_E, \quad \forall \eta, u \in F_0. \quad (287)$$

Окончательно, с учетом (279), (280) и (287), получаем

$$\begin{aligned}\Phi(\eta, u) &:= (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E + i(QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I + iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, (I - iQ)A_0^{1/2}u)_E = \\ &= \langle \eta, A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F.\end{aligned}\quad (288)$$

Сравнивая (288) с формулой (255), приходим к выводу, что оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ имеет вид

$$A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}, \quad A \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \quad (289)$$

Так как $Q = Q^*$ в пространстве E , а оператор $A_0^{1/2}$ ограниченно обратим (из F_0^* в E и из E в F_0), то оператор A имеет ограниченный обратный

$$A^{-1} = A_0^{-1/2}(I - iQ)^{-1}A_0^{-1/2}, \quad A^{-1} \in \mathcal{L}(F_0^*, F_0). \quad (290)$$

Выкладки и выводы, проведенные выше для формы $\Phi(\eta, u)$, можно повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$. Тогда вместо (288) будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi^*(\eta, u) &= \Phi_R(\eta, u) - i\Phi_I(\eta, u) = ((I - iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= (A_0^{1/2}\eta, (I + iQ)A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F = F_0.\end{aligned}\quad (291)$$

Отсюда с учетом определения (262) получаем, что форме $\Phi^*(\eta, u)$ отвечает сопряженный к (289) оператор

$$A^* = A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}, \quad A^* \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \quad (292)$$

Заметим также, что при $Q = 0$, т.е. в симметрическом случае, из (289), (292) следует, что

$$\Phi(\eta, u) = \Phi^*(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u) = \langle \eta, A_0 u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0, \quad (293)$$

где $A_0 : F_0 \rightarrow F_0^*$ — самосопряженный оператор в смысле определения (263).

3.4. Абстрактные формулы Грина для полуторалинейных форм. Представление (289) для оператора A формы $\Phi(\eta, u)$ и соответствующего оператора A^* из (292) для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u)$ позволяют получить обобщение обсуждавшегося в п. 1.1 варианта, когда имелась тройка пространств E , F и G , а также оператор следа γ . Именно, теперь можно рассмотреть случай, когда вместо пространства F с введенным на нем скалярным произведением имеется форма $\Phi(\eta, u)$, удовлетворяющая в пространстве F общим условиям (253), (264). Соответствующую формулу Грина, существование которой далее будет установлено, назовем абстрактной формулой Грина для полуторалинейной формы $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть выполнены условия (8) – (10), а также условия (253), (264). Тогда для пространства $F_0 = F$ с нормой (280) и соответствующим скалярным произведением

$$(\eta, u)_{F_0} := \Phi_R(\eta, u), \quad (294)$$

пространств E , G и оператора следа γ выполнены условия теоремы 1, и потому имеет место абстрактная формула Грина вида

$$\Phi_R(\eta, u) = \langle \eta, L_0 u \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial_0 u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0, \quad (295)$$

$$F_0 = N_0 \oplus M_0, \quad N_0 = \ker \gamma, \quad L_0 u := L_{0, N_0} u + L_{0, M_0} u, \quad (296)$$

$$\partial_0 u = \partial_{N_0} u_{N_0} + \partial_{M_0} u_{M_0}, \quad \forall u = u_{N_0} + u_{M_0} \in F_0, \quad \partial_0 u \in (G_+)^*, \quad L_0 u \in (F_0)^*. \quad (297)$$

Здесь $L_0 u$ — абстрактное дифференциальное выражение, $\partial_0 u$ — абстрактный оператор производной по внешней нормали, который однозначно определяется по $u \in F_0$ и выбранному $L_0 u \in F_0^*$.

Пусть $\eta = \eta_{N_0} + \eta_{M_0}$, $u = u_{N_0} + u_{M_0}$ — произвольные элементы из F_0 , представленные через их проекции на взаимно ортогональные подпространства N_0 и M_0 . Тогда из (295) получаем формулы (являющиеся аналогами формул (25), (26), а также (33), (34)) следующего вида

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{N_0}) = \langle \eta_{N_0}, L_{0, N_0} u_{N_0} \rangle_E, \quad L_{0, N_0} u_{N_0} = P_{N_0}^* A_0 u_{N_0}, \quad (298)$$

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{M_0}) = 0 = \langle \eta_{N_0}, L_{0, N_0} u_{M_0} \rangle_E, \quad L_{0, N_0} u_{M_0} = 0, \quad (299)$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{M_0}) = \langle \gamma_{M_0} \eta_{M_0}, \partial_{M_0} u_{M_0} \rangle_G, \quad L_{0, M_0} u_{M_0} = 0, \quad (300)$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{N_0}) = 0 = \langle \eta_{M_0}, L_{0, M_0} u_{N_0} \rangle_E + \langle \gamma_{M_0} \eta_{M_0}, \partial_{N_0} u_{N_0} \rangle_G. \quad (301)$$

Здесь A_0 — оператор гильбертовой пары $(F_0; E)$, P_{N_0} — ортопроектор на $N_0 = \ker \gamma$; $L_{0, M_0} u_{N_0}$ — функционал, который, вообще говоря, выбирается произвольно, $L_{0, M_0} : N_0 \rightarrow M_0^* := A_0 M_0$; при этом соотношение (300) служит определением функционала $\partial_{M_0} u_{M_0}$, а (301) — функционала $\partial_{N_0} u_{N_0}$ (через $L_{0, M_0} u_{N_0}$).

Наша цель — получить такую формулу Грина для формы $\Phi(\eta, u)$, которая бы имела вид, близкий к (295), и при $Q = 0$ (когда $\Phi(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u)$) переходила в формулу (295). Иными словами, желательно получить формулу с непрерывной зависимостью от $Q = Q^* \in \mathcal{L}(E)$.

По-видимому, тогда искомая формула Грина должна иметь вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0, \quad (302)$$

где Lu и ∂u — абстрактные дифференциальное выражение и производная по внешней нормали (конормали), определяемые по исходным данным и при $Q \rightarrow 0$ (в $\mathcal{L}(E)$) переходящие в $L_0 u$ и $\partial_0 u$ соответственно (см. (296), (297)).

Отметим еще одно важное обстоятельство: для несимметричной формы $\Phi(\eta, u)$ теперь следует использовать не ортогональное, а прямое разложение пространства F_0 , т.е.

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N(\dot{+})M, \quad N = \ker \gamma, \quad M \neq M_0. \quad (303)$$

Здесь подпространство M , очевидно, снова обладает тем свойством, что между элементами $u \in M$ и $\gamma u \in G_+$ по-прежнему, как и в симметрическом случае, имеет место взаимно однозначное соответствие, поскольку $\ker \gamma = N$.

Проведем далее построения, близкие к тем, которые уже были использованы при доказательстве теоремы 1 применительно к форме $(\eta, u)_F$, однако теперь с учетом представления (288), (289) для $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть подпространства N и M в прямом разложении F_0 (см. (303)) уже выбраны, а P_N и $P_M = I - P_N$ — соответствующие проекторы на эти подпространства. Рассмотрим при любом $u \in F_0$ функционал

$$\begin{aligned} \Phi(\eta_N, u) &= \langle \eta_N, Au \rangle_E = \langle P_N \eta_N, Au \rangle_E = \langle \eta_N, P_N^* Au \rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u \rangle_E, \\ L_N u &:= P_N^* Au, \quad A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}, \quad \eta_N = P_N \eta \in N, \end{aligned} \quad (304)$$

где $A : F_0 \rightarrow F_0^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F_0^* \rightarrow N^*$ — ограниченный проектор. Из (304) приходим к формулам

$$\Phi(\eta_N, u_N) = \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E, \quad \eta_N = P_N \eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F_0, \quad (305)$$

$$\Phi(\eta_N, u_M) = \langle \eta_N, L_N u_M \rangle_E. \quad (306)$$

Введенный функционал $L_N u \in N^*$ задан на подпространстве N . Расширим его на все пространство $F_0 = N(\dot{+})M$ до функционала Lu и будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F_0 \rightarrow N^*, \quad L_M : F \rightarrow M^*. \quad (307)$$

При этом потребуем (как и при доказательстве теоремы 1), чтобы

$$Lu_M = L_N u_M + L_M u_M = 0, \quad \forall u = u_M \in M. \quad (308)$$

Введем теперь функционал

$$\Psi_u(\eta) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u \rangle_E, \quad \forall \eta, u \in F_0, \quad (309)$$

который в силу (304) принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+ . Как и при доказательстве теоремы 1, будем считать, что правая часть в (309) равна сумме функционалов на M и G_+ :

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u \rangle_E = \langle \eta, L_M u \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \eta, u \in F, \quad (310)$$

$$L_M u = P_M^* L_M u \in M^* \subset F_0^*, \quad \partial u \in (G_+)^*, \quad \gamma \eta = \gamma_M \eta_M \in G_+. \quad (311)$$

Из (310) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \eta_M, L_M u_M \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G, \quad (312)$$

где учтено, что $\langle \eta_M, L_N u_M \rangle_E = 0$ в силу определения $L_N u$ из (304) и свойства $P_M P_N = 0$. Далее, при $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (310) получаем аналогично

$$\Phi(\eta_M, u_N) = \langle \eta_M, L_M u_N \rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N \rangle_G. \quad (313)$$

До сих пор выбор подпространств N и M из прямого разложения (303) не был сделан. Будем далее считать, что эти подпространства таковы, что выполнено условие

$$\Phi(\eta_N, u_M) = 0, \quad \forall \eta_N = P_N \eta \in N, \quad \forall u_M = P_M u \in M. \quad (314)$$

Тогда из (306) получаем, что в силу плотности N в E должно иметь место свойство

$$L_N u_M = 0, \quad u_M = P_M u \in M, \quad (315)$$

которое вместе с (308) дает также свойство

$$L_M u_M = 0, \quad u_M \in M. \quad (316)$$

Поэтому из (307) имеем формулу

$$Lu = L_N u_N + L_M u_M = L_N u, \quad (317)$$

определяющую закон действия абстрактного дифференциального выражения $Lu \in F_0^*$, учитывающий свойство (308).

С учетом (316) формула (312) приводит к соотношению

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M \rangle_G, \quad (318)$$

служащему определением абстрактной производной по конормали из подпространства M . Заметим, что это определение не зависит от выбора функционала $L_M u$ в (310). Далее, формулой (313) определяется производная по конормали из подпространства N , т.е. функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$. Очевидно, этот функционал зависит от выбора функционала $L_M u_N \in M^*$.

Итак, если выполнено условие (314), то соотношения (305), (306), (318), (313) являются обобщением соотношений (298) – (301) соответственно и при $Q \rightarrow 0$ переходят в них, так как $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$, а проекторы P_N и P_M , как будет установлено ниже, переходят в ортопроекторы P_{N_0} и P_{M_0} (см. (303)).

Покажем, что условие (314) выполнимо, и получим соответствующие формулы для проекторов P_M и P_N .

Для любого $\eta \in F_0$ имеем

$$\eta = P_{N_0} \eta + P_{M_0} \eta = P_N \eta + P_M \eta = \eta_N + \eta_M. \quad (319)$$

Здесь $P_N \eta \in N = N_0$ и потому $P_{N_0} P_N \eta = P_N u$. Аналогично устанавливаем, что $P_{M_0} P_M u = P_{M_0} u$, $\forall u \in F_0$, и тогда

$$P_{M_0} P_M = P_{M_0} \iff P_N = P_{N_0} P_N. \quad (320)$$

Воспользуемся теперь формулами (288) и представим $\Phi(\eta, u)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, u) &= ((I + iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}(I + iA_0^{-1/2}QA_0^{1/2})\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I + iQ_0)\eta, u)_{F_0} = (\eta, (I - iQ_0)u)_{F_0}, \quad \forall \eta, u \in F_0. \end{aligned} \quad (321)$$

Легко проверить, что здесь

$$Q_0 := A_0^{-1/2}QA_0^{1/2} = Q_0^* \in \mathcal{L}(F_0), \quad (322)$$

т.е. является ограниченным самосопряженным оператором, действующим в F_0 .

В представлении (321) условие (314) переписывается в виде

$$(P_N \eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0, \quad \forall \eta, u \in F_0. \quad (323)$$

Используя второе соотношение (320), отсюда имеем

$$(P_{N_0} P_N \eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = (P_{N_0} P_N \eta, P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0.$$

Значит, элемент $P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u$ принадлежит подпространству $N_0 = N$ и одновременно ортогонален ему при любом $u \in F_0$. Поэтому

$$P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u = 0, \quad \forall u \in F_0. \quad (324)$$

Представляя $P_M u$ в виде суммы его ортогональных проекций на N_0 и M_0 , имеем из (324), с учетом первой формулы (320) и свойства $P_{N_0} P_{M_0} = 0$,

$$\begin{aligned} P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0} P_M u + P_{M_0} P_M u) &= P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0} P_M u + P_{M_0} u) = \\ &= (I_{N_0} - iP_{N_0} Q_0 P_{N_0}) P_{N_0} P_M u - i(P_{N_0} Q_0 P_{M_0})(P_{M_0} u), \end{aligned} \quad (325)$$

где I_{N_0} — единичный оператор в N_0 .

Поскольку здесь оператор $P_{N_0} Q_0 P_{N_0}$ самосопряжен и действует в N_0 , то существует ограниченный обратный оператор $(I_{N_0} - iP_{N_0} Q_0 P_{N_0})^{-1}$, и из (325) получаем, что

$$P_{N_0} P_M u = i(I_{N_0} - iP_{N_0} Q_0 P_{N_0})^{-1}(P_{N_0} Q_0 P_{M_0})(P_{M_0} u), \quad \forall u \in F_0.$$

Окончательно имеем

$$P_M u = P_{M_0} u + i(I_{N_0} - iP_{N_0} Q_0 P_{N_0})^{-1}(P_{N_0} Q_0 P_{M_0})(P_{M_0} u), \quad \forall u \in F_0, \quad (326)$$

$$P_N u = P_{N_0} u - i(I_{N_0} - iP_{N_0} Q_0 P_{N_0})^{-1}(P_{N_0} Q_0 P_{M_0})(P_{M_0} u), \quad \forall u \in F_0. \quad (327)$$

Формулы (326), (327) дают связь проекторов P_M и P_N с ортопроекторами P_{N_0} и P_{M_0} . В симметрическом случае, т.е. при $Q = 0 \iff Q_0 = 0$, они переходят в ожидаемые тривиальные соотношения, когда $N = N_0$, $M = M_0$, $P_N = P_{N_0}$, $P_M = P_{M_0}$.

Можно проверить, что для операторов P_M и P_N из (326), (327) выполнены свойства $P_M^2 = P_M$, $P_N^2 = P_N$, т.е. эти ограниченные операторы действительно являются проекторами.

Таким образом, при выборе абстрактного дифференциального выражения Lu по формулам (307), (308), (317) и проекторов P_M и P_N в виде (326), (327) справедливы соотношения (305), (306), (318), (313) причем $Lu_M = 0$ и выполнено свойство (314).

Введем еще, как и в п. 1.1, абстрактную производную по конормали ∂u по закону

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N \in (G_+)^*, \quad u = u_N + u_M \in F_0. \quad (328)$$

Итогом проведенных построений является следующее утверждение.

Теорема 11. (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм). Пусть выполнены условия (8) – (10) для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также условия (253), (264) для формы $\Phi(\eta, u)$. Тогда имеет место следующая формула Грина:

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \quad (329)$$

$$Lu = L_N u + L_M u \in F_0^*, \quad L u = L u_N, \quad \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M \in (G_+)^*. \quad (330)$$

При этом ∂u определяется однозначно по элементам $u \in F_0$ и $Lu \in F_0^*$.

Доказательство. После проведенных выше построений для доказательства теоремы достаточно почти дословно повторить разделы 5) и 6) доказательства теоремы 1 с заменой $(\eta, u)_F$ на $\Phi(\eta, u)$. $\square$

Замечание 4. Относительно формулы Грина (329), (330) справедливы утверждения, высказанные в замечаниях 1 и 2 : наряду с (329) можно получить семейство формул Грина вида

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_E + \langle \gamma \eta, \partial(\alpha)u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0, \quad (331)$$

где α — произвольная константа, а $L(\alpha)u$ и $\partial(\alpha)u$ по-прежнему выражаются формулами (42), (43). Однако в приложениях Lu , как правило, задано обычным дифференциальным выражением, полученным из рассмотрения физического или иного смысла задачи. $\square$

Построения, проведенные выше для формы $\Phi(\eta, u)$, легко аналогично повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$ и отвечающего ей оператора $A^* = A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}$. Тогда вместо (321) будем иметь

$$\Phi^*(\eta, u) = ((I - iQ_0)\eta, u)_{F_0}, \quad \forall \eta, u \in F_0, \quad (332)$$

а пространство F_0 допускает прямое разложение

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N_*(+)M_*, \quad N_* = N_0, \quad M_* \neq M_0. \quad (333)$$

При этом вместо (326), (327) для проекторов P_{M_*} и P_{N_*} на подпространства M_* и N_* соответственно приходим к формулам

$$P_{M_*}u = P_{M_0}u - i(I_{N_0} + iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u), \quad \forall u \in F_0, \quad (334)$$

$$P_{N_*}u = P_{N_0}u + i(I_{N_0} + iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u), \quad \forall u \in F_0. \quad (335)$$

Далее, абстрактное дифференциальное выражение L_*u , отвечающее форме $\Phi^*(\eta, u)$, определяется по закону, аналогичному (330):

$$L_*u := L_{*,N}u + L_{*,M}u \in F_0^*, \quad L_*u = L_*u_{N_*}, \quad L_{*,N}u := (P_{N_*})^*A^*u, \quad u \in F_0, \quad (336)$$

а абстрактная производная по конормали — по формуле

$$\partial_*u := \partial_{M_*}u_{M_*} + \partial_{N_*}u_{N_*} \in (G_+)^*. \quad (337)$$

Здесь производные по конормали в подпространствах M_* и N_* , т.е. функционалы $\partial_{M_*}u_{M_*}$ и $\partial_{N_*}u_{N_*}$, определяются из тождеств, аналогичных (318) и (313):

$$\Phi^*(\eta_{M_*}, u_{M_*}) = \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{M_*}u_{M_*} \rangle_G, \quad (338)$$

$$\Phi^*(\eta_{M_*}, u_{N_*}) = \langle \eta_{M_*}, L_{*,M_*}u_{N_*} \rangle_E + \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{N_*}u_{N_*} \rangle_G. \quad (339)$$

Исходя из этих фактов, приходим к следующему утверждению.

Теорема 12. (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейной сопряженной формы). Пусть выполнены условия теоремы 11. Тогда имеет место следующая формула Грина:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, L_*u \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_*u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \quad (340)$$

где L_*u и ∂_*u определены формулами (336), (337). $\square$

Из (330), (340) и связи $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$, получаем, что

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \overline{\langle u, L_*\eta \rangle_E} + \overline{\langle \gamma u, \partial_*\eta \rangle_G}, \quad \forall \eta, u \in F_0. \quad (341)$$

Теорема 13. (вторая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм). Пусть выполнены условия теоремы 11. Тогда имеет место следующая абстрактная формула Грина:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E - \overline{\langle u, L_*\eta \rangle_E} = \overline{\langle \gamma u, \partial_*\eta \rangle_G} - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F_0. \quad (342)$$

$\square$

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Наметим теперь, какие проблемы естественным образом исследуются на основе доказанных теорем о существовании абстрактных формул Грина (329), (340), (342). Все эти проблемы рассматриваются на базе соответствующих формул Грина с уже выбранным дифференциальным выражением Lu (см., например, [20], с. 237).

Отметим, что глубокие результаты исследования смешанных краевых задач в липшицевых областях для сильно эллиптических систем второго порядка, а также соответствующих спектральных задач, получены в последнее время в работах М.С. Аграновича, см. [26], [27].

4.1. Абстрактные краевые задачи. К числу таких задач относятся следующие проблемы.

1°. Неоднородная задача Неймана для уравнения Пуассона:

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G). \quad (343)$$

Для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f \in F_0^*, \quad \psi \in (G_+)^*, \quad (344)$$

а слабое решение выражается формулой

$$u = A^{-1}f + T_M\psi, \quad (345)$$

где $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$ — оператор формы $\Phi(\eta, u)$, а $T_M : (G_+)^* \rightarrow M \subset F_0$ — оператор вспомогательной задачи

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G). \quad (346)$$

2°. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона:*

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = \varphi \quad (\text{в } G). \quad (347)$$

Здесь при выполнении необходимых и достаточных условий

$$f \in N^*, \quad \varphi \in G_+, \quad (348)$$

задача имеет слабое решение

$$u = A_{00}^{-1}f + \gamma_M^{-1}\varphi, \quad (349)$$

где $A_{00} = P_N^*AP_N : N \rightarrow N^*$ — оператор, отвечающий сужению формы $\Phi(\eta, u)$ на подпространство N (для η и u), а γ_M — сужение оператора следа γ на M .

3°. *Третья краевая задача (задача Ньютона–Неймана):*

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \psi \quad (\text{в } G), \quad (350)$$

где $\alpha : G_+ \rightarrow (G_+)^*$ — неотрицательный оператор, т.е.

$$\langle \varphi, \alpha\varphi \rangle_G \geq 0, \quad \forall \varphi \in G_+. \quad (351)$$

Эта задача исследуется так же, как и 1°, однако взамен нормы $\|u\|_{F_0}^2 = \Phi_R(u, u)$ здесь используется эквивалентная норма

$$\|u\|_{eq, F_0}^2 := \|u\|_{F_0}^2 + \langle \gamma u, \alpha\gamma u \rangle_G. \quad (352)$$

Если выполнены условия (344), то задача (350) имеет единственное слабое решение $u \in F_0$, выражаемое формулой вида (345) (с измененными A и T_M).

4.2. Абстрактные смешанные краевые задачи. Теорема 7, доказывающая существование абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач в случае симметрической формы — скалярного произведения в пространстве F , справедлива и в случае несимметрической формы $\Phi(\eta, u)$, если выполнены предположения (175) – (177). Такая формула Грина теперь имеет вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F_0. \quad (353)$$

На ее основе изучаются абстрактные смешанные краевые задачи, когда на разных частях "границы", т.е. в граничном пространстве G , задаются различные краевые условия типа Дирихле, Неймана либо Ньютона–Неймана. В симметрическом случае и для классической тройки гильбертовых пространств подобный подход описан в п. 2.4.

Здесь отметим еще раз, что в смешанных краевых задачах выбор пространства, в котором ищется слабое решение, в значительной мере определяется характером краевых условий, заданных на различных частях (подпространствах) границы (граничного пространства).

4.3. Спектральные проблемы и абстрактная формула Грина. На основе абстрактной формулы Грина (329), а также формулы (353) для смешанных краевых задач исследуются спектральные проблемы, возникающие в приложениях. Перечислим кратко некоторые из них. Отметим, что рассмотрение этих проблем приводит к изучению некоторых нестандартных спектральных задач, в частности, несамосопряженных (см. [5], [8]).

1°. *Задача Дирихле, Неймана, Ньютона:*

Эти задачи соответственно вида

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = 0 \quad (\text{в } G); \quad (354)$$

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u = 0 \quad (\text{в } G); \quad (355)$$

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = 0 \quad (\text{в } G). \quad (356)$$

2°. *Задача Стеклова:*

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial w + \alpha \gamma w = \lambda \gamma w \quad (\text{в } G). \quad (357)$$

3°. *Задача Стефана:*

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha \gamma u = \lambda \gamma u \quad (\text{в } G). \quad (358)$$

4°. *Задача М. Аграновича:*

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha \gamma u = \mu \gamma u \quad (\text{в } G). \quad (359)$$

Здесь один из параметров (λ или μ) является спектральным, а другой — фиксированным.

5°. *Задача С. Крейна:*

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \lambda(\partial u + \alpha \gamma u) = \gamma u \quad (\text{в } G). \quad (360)$$

6°. *Задача Чуешова:*

$$Lu + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha \gamma u = \lambda \gamma u \quad (\text{в } G). \quad (361)$$

4.4. Спектральные задачи сопряжения. Подробное изучение этого класса задач для конкретных приложений проведено М.С. Аграновичем с его учениками и коллегами (см. например, [25]). В абстрактной форме такие проблемы обсуждаются в [8].

Приведем краткое словесное описание постановки спектральных задач сопряжения. Пусть имеется набор пространств E_j , F_j и G_j и операторов следа γ_j , $j = \overline{1, q}$, таких, что для каждого набора справедлива абстрактная формула Грина в форме (14), т.е.

$$\langle \eta_j, L_j u_j \rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j \eta_j, \partial_j u_j \rangle_{G_j}, \quad \forall \eta_j, u_j \in F_j, \quad j = \overline{1, q}. \quad (362)$$

Будем считать также, что каждое граничное пространство G_j является ортогональной суммой пространств, $G_j = \oplus_{kl} G_{jkl}$, причем каждое G_{jkl} имеет оснащение:

$$(G_+)_j{}_{kl} \hookrightarrow G_{jkl} \hookrightarrow (G_+)^*_{jkl}.$$

При этом оснащения совпадают при перемене мест индексов k и j .

В этих обозначениях спектральная задача сопряжения формулируется следующим образом. Необходимо найти набор $u = (u_1, \dots, u_q)$ элементов $u_j \in F_j$ из уравнений

$$L_j u_j + \lambda u_j = 0 \quad (\text{в } E_j), \quad j = \overline{1, q}, \quad (363)$$

а также "краевых" условий сопряжения, которые разбиваются на следующие категории.

При $k > j$:

1°. Это условия первой задачи сопряжения с параметром μ , когда приравниваются следы на G_{jkl} , а сумма производных по нормали равна спектральному параметру μ , умноженному на след элемента u_j либо u_k .

2°. Аналогичное условие без параметра μ (т.е. $\mu = 0$).

3°. Условия второй задачи сопряжения (когда приравнивается нулю сумма производных по нормали) с параметром μ .

4°. Условия второй задачи сопряжения без параметра μ .

При $k = j$ имеются три типа условий:

1°. Условие Ньютона–Неймана с параметром μ .

2°. Условие Ньютона–Неймана без параметра ($\mu = 0$).

3°. Однородное условие Дирихле.

Оказывается, для таких задач можно доказать существование формулы Грина в форме (9) применительно к некоторому подпространству F_0 пространства $F = \oplus_{k=1}^q F_j$, учитывающему "главные" краевые условия. На этой основе проблему можно снова свести к задаче вида (359) и исследовать ее уже разработанными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
- [2] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384 с.
- [3] Aubin J.-P. Abstract Boundary-Value Operators and Their Adjoint // *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*. – 1970. – Vol. 43. – pp. 1 – 33.
- [4] Showalter R.E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 1994. – Vol. 1. – 214 p.
- [5] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // *Украинский матем. вестник*. – 2004. – Т. 1. – № 1. – С. 69 – 97.
- [6] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса // *Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ)*. – 2004. – Т. 2. – С. 52 – 80.
- [7] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач // *Ученые записки Таврического национального ун-та им. В.И. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика"*. – 2007. – Т. 20(59). – № 2. – С. 3 – 12.
- [8] Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., Старков П.А. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // *Современная математика. Фундаментальные направления*. – 2009. – Т. 34. – С. 5 – 44. (Translated: V.I. Voytitsky, N.D. Kopachevsky, P.A. Starkov. Multicomponent Conjugation (Transmission) Problems and Auxillary Abstract Boundary-Value Problems // *Journal of Mathematical Sciences (Springer)*. – 2010. – Vol. 170, Issue 2. – pp. 131 – 172.)
- [9] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [10] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.
- [11] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
- [12] Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
- [13] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
- [14] Gagliardo E. Caratterizzazioni delle tracce sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in „n” variabili // *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*. – 1957. – Vol. 27. – pp. 284 – 305.
- [15] McLean W. Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. – Cambridge University Press, 2000. – 358 p.
- [16] Agranovich M.S. Remarks on Potential Spaces and Besov Spaces in a Lipschitz Domain and on Whitney Arrays on its Boundary // *Russian Journal of Math. Physics*. – 2008. – Vol. 15. – № 2. – pp. 146 – 155.
- [17] Агранович М.С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // *Успехи матем. наук*. – 2002. – Т. 57. – Вып. 5(347). – С. 3 – 78.
- [18] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
- [19] Rychkov V.S. On Restrictions and Extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin Spaces with Respect to Lipschitz Domains // *Journal of London Math. Soc.* – 1999. – Vol. 60(1). – pp. 237 – 257.
- [20] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
- [21] Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. – М.: Наука, 1994. – 336 с.
- [22] Пальцев Б.В. О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях // *Математический сборник*. – 1996. – Т. 187. – № 4. – С. 59 – 116.
- [23] Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. – М.: Отдел вычисл. матем. АН СССР, 1983. – 184 с.

- [24] Агошков В.И., Лебедев В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1985. – Вып. 2. – С. 173 – 226.
- [25] Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. – Wiley-VCH, Berlin, . . . , Toronto, 1999. – 378 p.
- [26] Агранович М.С. Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем второго порядка // Функциональный анализ и его приложения. – 2011. – 45 с. (в печати).
- [27] Агранович М.С. Спектральные задачи в липшицевых областях // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2011. – 39. – С. 11–35.

КОПАЧЕВСКИЙ НИКОЛАЙ ДМИТРЕВИЧ, Украина, Симферополь, 95007, ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО, ПРОСП. АКАД. В.И. ВЕРНАДСКОГО, 4

E-mail: kopachevsky@list.ru

Т.А. Белкина, Н.Б. Конюхова, С.В. Курочкин

СИНГУЛЯРНАЯ НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В МОДЕЛЯХ СТРАХОВОЙ МАТЕМАТИКИ

На неотрицательной вещественной полуоси рассматривается линейное интегродифференциальное уравнение (ИДУ) второго порядка с вольтерровым интегральным оператором и сильными особенностями в нуле и на бесконечности. Ставятся предельные условия, которым должны удовлетворять решения в особых точках. Показано, что поставленная на полуоси задача является сингулярной начальной задачей (СНЗ), а условия на бесконечности являются условиями нормировки решения: при исходных предположениях ИДУ обладает однопараметрическим семейством ограниченных в нуле решений; даны необходимые и достаточные условия, при которых все решения этого семейства имеют на бесконечности конечные пределы; тогда условия на бесконечности выделяют единственное решение из этого семейства. В результате доказаны существование и единственность решения сингулярной задачи для ИДУ и даны асимптотические представления решения при малых и больших значениях независимого переменного. Предложен алгоритм численного нахождения решения, проведены расчеты и дана их интерпретация.

Задача возникает для вероятности разорения страховой компании за бесконечное время (как функции ее первоначального капитала (ПК)) в динамической модели страхования Крамера–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований (исков) и при определенной стратегии поведения компании на финансовом рынке – вложении постоянной доли капитала в рисковый актив (акции) и оставшейся доли – в безрисковый актив (банковский счет).

A second order linear integro-differential equation (IDE) defined on nonnegative semiaxis with Volterra integral operator and strong singularities at zero and infinity is concerned. Limit conditions for solutions at singular points are posed. It is proved that the problem is in fact a singular initial problem, and that the conditions at infinity are normalizing conditions for a solution: under assumptions taken the IDE has a one-parameter family of solutions bounded at zero; necessary and sufficient conditions are given for all the solutions of this family to have finite limits at infinity; the conditions at infinity then select a single solution from the family. As a corollary, existence and uniqueness of solution of the singular problem for the IDE are proved and asymptotic representations of the solution for small and large values of independent variable are given. A numeric algorithm for evaluating the solution is proposed, calculations and their interpretation are given.

The problem under study describes the ruin probability of an insurance company on infinite time interval (as a function of initial capital) in Cramér–Lundberg dynamic insurance model with exponential distributions of claims and certain company's strategy at the financial market assuming investment of a fixed fraction of a capital into risky assets (shares) and the rest of it into a risk-free asset (bank deposit).

ВВЕДЕНИЕ: ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ КРАМЕРА–ЛУНДБЕРГА

Данная работа дополняет исследования [1], [2], посвященные проблеме использования финансовых инструментов в целях уменьшения риска страхования. Наиболее детально в [1], [2] проводятся исследования оптимальной стратегии инвестиций с использованием двух видов активов – рискового и безрискового – в модели Крамера–Лундберга при наличии бюджетного ограничения, т.е. когда заем бюджетных средств не допускается. В частности, для рассматриваемого в данной работе ИДУ исследование сингулярной начальной задачи с параметром является частью решения оптимизационной задачи, поставленной и исследованной в [1], [2]; решение такой начальной задачи определяет вероятность неразорения, соответствующую оптимальной стратегии, при небольших значениях ПК.

Изучаемая в [2] и в данной работе сингулярная задача для линейного ИДУ второго порядка, определенного на всей неотрицательной вещественной полуоси, представляет также самостоятельный математический и практический интерес. Дается более полный и строгий анализ этой задачи, чем приведенный в [2] (допущенные там неточности и опечатки здесь исправлены). Приведены дополнительные результаты расчетов и дана их интерпретация.

Далее мы дадим очень краткое представление о математической модели, приводящей к рассматриваемой задаче. Подробную историю вопроса, описание моделей и вывод изучаемого здесь ИДУ см. в [1], [2].

0.1. Классическая модель страхования Крамера–Лундберга (без инвестиций капитала в рисковые и/или безрисковые активы). Опишем кратко математическую модель страхования, указанную в названии.

Рассмотрим классический процесс риска

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь R_t – величина капитала страховой компании в момент времени t , u – величина ПК, c – скорость поступления страховых взносов (премий), $\{N_t\}$ – пуассоновский процесс с параметром λ , определяющий для каждого t число предъявленных исков за временной промежуток $(0, t]$; $Z_1, Z_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с некоторой функцией распределения $F(z)$ ($F(0) = 0$, $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$), представляющих собой величины последовательных страховых выплат, причем эти случайные величины не зависят также от процесса $\{N_t\}$.

В этой модели условие положительности чистого ожидаемого дохода ("нагрузки без-опасности") имеет вид:

$$c - \lambda m > 0. \quad (2)$$

Обозначим $\tau = \inf\{t : R_t < 0\}$ – момент разорения, тогда $\mathbf{P}(\tau < \infty)$ – вероятность разорения в течение бесконечного промежутка времени.

Классическим результатом теории риска Крамера–Лундберга является следующее утверждение (см., например, [3]). При выполнении условия (2) и существовании константы $R > 0$ ("коэффициент Лундберга"), такой, что справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} [1 - F(x)] \exp(Rx) dx = c/\lambda > 0,$$

вероятность разорения $\xi(u)$ (как функция ПК) допускает оценку

$$\xi(u) = \mathbf{P}(\tau < \infty) \leq \exp(-Ru), \quad u \geq 0. \quad (3)$$

При этом, если распределение величин страховых выплат экспоненциально,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad m > 0, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

то $R = (c - \lambda m)/(mc) > 0$, и вероятность неразорения $\varphi(u) = 1 - \xi(u)$ задается точной формулой:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} \exp\left(-\frac{c - \lambda m}{mc} u\right), \quad 0 \leq u < \infty. \quad (5)$$

Для дальнейших сопоставлений отметим следующие свойства функции (5):

$$\varphi(0) = 1 - \lambda m/c > 0, \quad \varphi'(0) = \lambda(c - \lambda m)/c^2 > 0, \quad (6)$$

откуда справедливо соотношение

$$c\varphi'(0) - \lambda\varphi(0) = 0; \quad (7)$$

$$0 < \varphi(u) < 1 \quad \text{для любого конечного } u \in \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

$$\varphi'(u) > 0 \quad \text{для любого конечного } u \in \mathbb{R}_+, \quad (9)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0. \quad (10)$$

Замечание 1. Значение $c = \lambda m$ можно рассматривать как критическое значение параметра бифуркации для вероятности неразорения: при выполнении (2) справедлива формула (5), а при $c \leq \lambda m$ будет $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$.

0.2. Математическая модель страхования Крамэра–Лундберга с вложением капитала в рисковый актив. Рассмотрим теперь ситуацию, когда капитал непрерывно инвестируется в акции, цена которых описывается с помощью геометрического броуновского движения:

$$dS_t = S_t(a dt + b dw_t), \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Здесь S_t – цена акции в момент t , a – ожидаемая доходность акции, $0 < b$ – волатильность, $\{w_t\}$ – стандартный винеровский процесс.

В этом случае, если X_t – капитал компании в момент t , то $X_t = \theta_t S_t$, где θ_t – соответствующее число акций в портфеле. Тогда изменение капитала удовлетворяет уравнению $dX_t = \theta_t dS_t + dR_t$, которое, с учетом (11), приобретает вид:

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dw_t + dR_t, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Здесь, в отличие от классической модели, выполнение требования (2) не предполагается.

Для динамического процесса (12) известно (см., в частности, [1], [2] и библиографию там), что вероятность неразорения $\varphi(u)$ удовлетворяет линейному ИДУ

$$\lambda \int_0^u \varphi(u-z) dF(z) - \lambda\varphi(u) + (au + c)\varphi'(u) + (b^2/2)u^2\varphi''(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \quad (13)$$

и предельному условию в особой точке $u = 0$, обеспечивающему вырождение ИДУ (13) при $u \rightarrow +0$:

$$\lim_{u \rightarrow +0} [c\varphi'(u) - \lambda\varphi(u)] = 0. \quad (14)$$

При экспоненциальном распределении размеров требований (4) получаем из (13) следующее ИДУ, определенное на $\mathbb{R}_+$:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \frac{\lambda}{m} \int_0^u \varphi(u-x) \exp(-x/m) dx = 0. \quad (15)$$

Для решений этого ИДУ, которое и подлежит изучению в данной работе, должны выполняться предельные условия (14), (10) и двухстороннее ограничение (8) (по поводу постановки задачи и, в частности, условий (10) см. точнее далее); решение такой задачи будет также обладать свойством (9).

Замечание 2. Рассматриваемая модель охватывает и более общий случай, когда в акции инвестируется только постоянная доля капитала α , $0 < \alpha < 1$, а оставшаяся доля $1 - \alpha > 0$ вкладывается в безрисковый актив – банковский счет при постоянной процентной ставке: случай $0 < \alpha < 1$ сводится к случаю $\alpha = 1$ простой заменой параметров задачи (параметров акций), на чем здесь останавливаться не будем (см. [1], [2]).

В [4] получен следующий результат для решения $\varphi(u)$ ИДУ (15), если таковое существует и описывает вероятность неразорения как функцию ПК.

Теорема. Пусть $b > 0$ и выполнено предположение об экспоненциальном распределении размеров требований (4). Тогда:

1) если

$$\rho = 2a/b^2 > 1, \quad (16)$$

то при некоторой постоянной $K > 0$ справедливо

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-\rho}[1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty; \quad (17)$$

2) если $\rho < 1$, то $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$.

Это утверждение будем далее именовать теоремой ФКР.

Замечание 3. Неравенство (16) отвечает так называемому "надежному портфелю активов" и играет важную роль в изучении поставленной далее задачи для ИДУ (15). В [4], однако, вся сингулярная задача на $\mathbb{R}_+$ для ИДУ (15) не ставится и не изучается. В частности, не зафиксировано важное, как будет видно из дальнейшего, предельное соотношение (14) в особой точке $u = 0$. Кроме того, забегаая вперед, отметим, что значение $\rho = 1$ (не указанное в приведенной выше теореме) является критическим значением параметра бифуркации: при $\rho \leq 1$ будет $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$ (в этом случае ИДУ (15) не имеет других ограниченных на $\mathbb{R}_+$ решений, кроме $\varphi(u) \equiv 0$).

Замечание 4. Нетрудно проверить, что функция (5) является точным решением "вырожденного" ИДУ первого порядка, получающегося из (15) при $a = b = 0$:

$$c\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \frac{\lambda}{m} \int_0^u \varphi(u-x) \exp(-x/m) dx = 0, \quad 0 \leq u < \infty. \quad (18)$$

Это ИДУ отвечает классической модели с экспоненциальным распределением размера требований, и, как известно (см., например, [5], с.229–230), а также легко и более аккуратно будет следовать здесь из дальнейшего, функция (5) при выполнении требования (2) есть единственное решение ИДУ (18), удовлетворяющее в нуле условию (7) и на бесконечности предельному условию

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad (19)$$

т.е. первому из условий в (10). Неравенства (8), (9) и второе условие из (10) выполняются для него автоматически. Заметим, что здесь предельное условие (19) есть следствие оценки (3) для вероятности разорения и выделяет нетривиальное решение ИДУ (18).

Разумеется, одним из наиболее существенных отличий "вырожденного" ИДУ (18) первого порядка от исходного ИДУ (15) второго порядка является наличие в последнем особенности при $u \rightarrow +0$.

1. Постановка сингулярной задачи для ИДУ, единственность решения и монотонность его поведения

1.1. Формулировка задачи, единственность решения. В результате для исследования модели, обсуждаемой во введении и приводящей к ИДУ (15) с вольтерровым интегральным оператором и сильными особенностями в нуле и на бесконечности, ставится следующая сингулярная задача на $\mathbb{R}_+$:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda(J\varphi)(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \quad (20)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) \quad \text{существуют и конечны,} \quad (21)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} [c\varphi'(u) - \lambda\varphi(u)] = 0, \quad (22)$$

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad (23)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi'(u) = 0. \quad (24)$$

Здесь в общем случае, если не оговорено особо, все параметры a, b, c, λ, m – действительные положительные числа и введено обозначение

$$(J\varphi)(u) = \frac{1}{m} \int_0^u \varphi(u-x) \exp(-x/m) dx = \frac{1}{m} \exp(-u/m) \int_0^u \varphi(s) \exp(s/m) ds, \quad (25)$$

где J – вольтерров интегральный оператор, $J : C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$, $C[0, \infty)$ – пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций.

ИДУ (15) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) \equiv 0$, удовлетворяющее условиям (21)–(23). Нетривиальное решение выделяется требованием (24).

Замечание 5. Отметим еще раз, что до [1], [2] подобная задача на всей полуоси для ИДУ (15) не ставилась и, как следствие, полностью не изучалась. Как и условие (19) для классической модели, предельные условия (24) нуждаются в обосновании, которое может быть осуществлено с помощью вероятностных методов. Для данной модели выполнение (19) следует из верхней оценки для вероятности разорения, полученной в [6] для более общих моделей (см. также уточнение оценки [6] для данной модели в [4]). Как будет видно из дальнейшего, для ИДУ (15) выполнение второго из условий в (24) есть следствие выполнения первого.

Приведенная ниже лемма, устанавливающая достаточные условия единственности решения сингулярной линейной задачи (20)–(24), если таковое существует, в [2] отсутствует.

Лемма 1. Пусть в ИДУ (20) параметры b^2, c, λ, m – любые положительные числа, а параметр a – любое число ($a \in \mathbb{R}$). Тогда, если при фиксированных значениях этих параметров существует решение $\varphi_1(u)$ сингулярной линейной задачи (20)–(24), то оно единственно.

Доказательство. Предположим противное: пусть $\varphi_2(u)$ – другое решение задачи (20)–(24), т.е. $\varphi_2(u) \neq \varphi_1(u)$. Тогда возможны два случая: I случай, когда

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi_2(u) = \lim_{u \rightarrow +0} \varphi_1(u),$$

и II случай, когда

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi_2(u) \neq \lim_{u \rightarrow +0} \varphi_1(u).$$

Рассмотрим I случай. Тогда, в силу линейности задачи, должно существовать нетривиальное решение $\tilde{\varphi}(u)$ ИДУ (20), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{u \rightarrow +0} \tilde{\varphi}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(u) = 0.$$

Пусть $0 < \tilde{u}$ – точка максимума этого решения: $\tilde{\varphi}(\tilde{u}) = \max_{u \in [0, \infty)} \tilde{\varphi}(u) > 0$ (если $\tilde{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений, то рассматриваем функцию $-\tilde{\varphi}(u)$). Тогда должно быть $\tilde{\varphi}'(\tilde{u}) = 0$, $\tilde{\varphi}''(\tilde{u}) \leq 0$. Но из ИДУ (20), с учетом формулы (25), получаем противоречие:

$$\begin{aligned} (b^2/2)\tilde{u}^2\tilde{\varphi}''(\tilde{u}) &= \lambda\tilde{\varphi}(\tilde{u}) - \frac{\lambda}{m} \exp(-\tilde{u}/m) \int_0^{\tilde{u}} \tilde{\varphi}(s) \exp(s/m) ds \geq \\ &\geq \lambda\tilde{\varphi}(\tilde{u}) \left[1 - \frac{1}{m} \exp(-\tilde{u}/m) \int_0^{\tilde{u}} \exp(s/m) ds \right] = \lambda\tilde{\varphi}(\tilde{u}) \exp(-\tilde{u}/m) > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим II случай. Тогда, как легко проверить, можно составить такую линейную комбинацию решений $\hat{\varphi}(u) = c_1\varphi_1(u) + c_2\varphi_2(u)$, что $\hat{\varphi}(u) \not\equiv 1$ и является решением ИДУ (20), удовлетворяющим предельным условиям

$$\lim_{u \rightarrow +0} \hat{\varphi}(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \hat{\varphi}(u) = 1.$$

Если существует $\hat{u}$, такое, что $\hat{\varphi}(\hat{u}) > 1$, то рассуждаем так же, как в I случае. Если предположить, что $\hat{\varphi}(u) \leq 1$ для любого $u \geq 0$, то это противоречит равенству (22), из которого следует, что $\lim_{u \rightarrow +0} \hat{\varphi}'(u) = \lambda/c > 0$.

Лемма доказана. $\square$

1.2. Трактовка задачи как сингулярной начальной задачи с параметром, монотонность положительных решений. Прежде всего рассмотрим сингулярную задачу без начальных данных (20)–(22) (с вырождением при $u \rightarrow +0$) и переформулируем ее в виде эквивалентной СНЗ с параметром:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda(J\varphi)(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \quad (26)$$

$$\lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \varphi'(u) = \lambda C_0/c. \quad (27)$$

Здесь C_0 – параметр, значение которого в дальнейшем подлежит определению; второе условие в (27) обеспечивает выполнение требования (22).

Предельные условия (27) влекут выполнение предельного условия $\lim_{u \rightarrow +0} u^2\varphi''(u) = 0$, обеспечивая вырождение ИДУ (26) при $u \rightarrow +0$ (решение $\varphi(u)$ задачи (26), (27), если таковое существует, должно удовлетворять ИДУ (26) вплоть до особой точки $u = 0$).

Лемма 2. Пусть в ИДУ (26) параметры b^2 , c , λ , m – положительные числа, а параметр a – любое число ($a \in \mathbb{R}$), и пусть при фиксированных значениях этих параметров и фиксированном значении $C_0 > 0$ существует решение $\varphi(u)$ СНЗ (26), (27). Тогда $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. В силу (27), $\varphi'(u) > 0$ в окрестности точки $u = 0$. Покажем, что $\varphi'(u)$ не может обратиться в ноль ни в какой конечной точке $u \in \mathbb{R}_+$.

В самом деле, пусть в точке $u = \hat{u} > 0$ будет $\varphi'(\hat{u}) = 0$. Тогда в этой точке должно быть $\varphi''(\hat{u}) \leq 0$. Но из ИДУ (26), учитывая (25), как и в лемме 1, получаем противоречие:

$$\begin{aligned} (b^2/2)\hat{u}^2\varphi''(\hat{u}) &= \lambda\varphi(\hat{u}) - \frac{\lambda}{m} \exp(-\hat{u}/m) \int_0^{\hat{u}} \varphi(s) \exp(s/m) ds \geq \\ &\geq \lambda\varphi(\hat{u}) \left[1 - \frac{1}{m} \exp(-\hat{u}/m) \int_0^{\hat{u}} \exp(s/m) ds \right] = \lambda\varphi(\hat{u}) \exp(-\hat{u}/m) > 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Далее будет показано, что при фиксированных значениях параметров в ИДУ (26) (при указанных выше и меньших ограничениях на них) и фиксированном значении $C_0 \in \mathbb{R}$ решение $\varphi(u, C_0)$ СНЗ (26), (27) существует, единственно и при малых $u > 0$ представляется асимптотическим рядом по целым неотрицательным степеням u . При этом, если выполнено условие (16) (требование надежности портфеля активов), то это решение имеет конечный предел при $u \rightarrow \infty$. Дано асимптотическое представление решения при больших u .

Вероятностью неразорения $\varphi(u)$ (если она не равна тождественно нулю) будет такое решение из однопараметрического семейства $\varphi(u, C_0)$, которое удовлетворяет ограничениям (23) и условию (24). Тогда параметр $C_0 > 0$ надо выбрать так, чтобы удовлетворить предельному условию (24), а, в силу леммы 2, условие (23) будет выполняться автоматически.

Значение параметра $C_0 > 0$ не может быть найдено методами локального анализа, но проведенный теоретический анализ задачи позволяет предложить и реализовать простой алгоритм его численного нахождения, что будет описано далее.

Таким образом, как следствие изучения СНЗ с параметром (26), (27), мы получим для всей сингулярной линейной задачи (20)–(24) (при исходных ограничениях на параметры) необходимые и достаточные условия, при которых ее решение существует, единственно и является монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+$ функцией. При этом мы также дадим асимптотические представления решения при малых и больших u и опишем их применение для численного нахождения решения.

Замечание 6. Поставленная СНЗ с параметром (26), (27) является также частью задачи определения функции Беллмана для проблемы максимизации вероятности неразорения в рассматриваемой модели с применением инвестиционных стратегий, не использующих заимствования (см. [1], [2]).

2. Сингулярные задачи Коши для сопутствующих линейных ОДУ, их исследования и следствия для ИДУ

2.1. Сведение ИДУ к ОДУ третьего порядка, необходимое и достаточное условие эквивалентности сингулярных задач. Важным для дальнейшего является возможность сведения линейного сингулярного ИДУ второго порядка (26) к линейному сингулярному ОДУ третьего порядка (см., например, [4], [2]).

С этой целью используем дополнительное дифференцирование в (26) и учитываем равенство

$$(J\varphi)'(u) = \frac{1}{m} \left(\int_0^u \varphi(u-x) \exp(-x/m) dx \right)' = [\varphi(u) - (J\varphi)(u)]/m. \quad (28)$$

Справедливость (28) следует из цепочки равенств с использованием интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} (J\varphi)'(u) &= \frac{1}{m} \left(\int_0^u \varphi'_u(u-x) \exp(-x/m) dx + \varphi(0) \exp(-u/m) \right) = \\ &= \frac{1}{m} \left(- \int_0^u \varphi'_x(u-x) \exp(-x/m) dx + \varphi(0) \exp(-u/m) \right) = [\varphi(u) - (J\varphi)(u)]/m. \end{aligned}$$

Тогда дифференцирование ИДУ (26) с учетом (28) приводит к линейному ИДУ третьего порядка:

$$(b^2/2)u^2\varphi'''(u) + [(b^2 + a)u + c]\varphi''(u) + (a - \lambda)\varphi'(u) + (\lambda/m)[\varphi(u) - (J\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

С целью убрать интегральное слагаемое, прибавим к этому ИДУ исходное ИДУ (26), умноженное на $1/m$. В результате получаем линейное ОДУ третьего порядка:

$$u^2\varphi'''(u) + (a_1 + a_2u + a_3u^2)\varphi''(u) + (a_4 + a_5u)\varphi'(u) = 0, \quad 0 < u < \infty. \quad (29)$$

Здесь введены обозначения:

$$a_1 = 2c/b^2, \quad a_2 = 2(1 + a/b^2), \quad a_3 = 1/m, \quad a_4 = 2(a - \lambda + c/m)/b^2, \quad a_5 = 2a/(mb^2). \quad (30)$$

Из требования вырождения ОДУ (29) при $u \rightarrow +0$ получаем условие

$$\lim_{u \rightarrow +0} [a_1\varphi''(u) + a_4\varphi'(u)] = \lim_{u \rightarrow +0} [c\varphi''(u) + (a - \lambda + c/m)\varphi'(u)] = 0, \quad (31)$$

откуда и из условий (21) следует конечность величины $\lim_{u \rightarrow +0} \varphi''(u)$.

Очевидно, что всякое решение ИДУ (20) является решением ОДУ (29). Обратное неверно: например, сингулярная задача (29), (21), (31) имеет континуум решений $\varphi(u) \equiv \text{const} \neq 0$, которые не являются решениями ИДУ (20).

Лемма 3. *Решение $\varphi(u)$ сингулярной задачи (29), (21), (31), определенное с точностью до постоянного множителя и аддитивной постоянной, тогда, и только тогда, является решением ИДУ (20), когда выполняется условие (22).*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Пусть теперь $\tilde{\varphi}(u)$ – решение СНЗ (29), (21), (22), (31). Надо доказать, что $\tilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет ИДУ (20).

Обозначим левую часть ИДУ (20) с функцией $\tilde{\varphi}(u)$ через $g(u)$. Надо показать, что $g(u) \equiv 0$. В самом деле, учитывая способ получения ОДУ (29), получим, что $g(u)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка

$$g'(u) + g(u)/m = 0, \quad 0 \leq u < \infty,$$

общее решение которого имеет вид

$$g(u) = \tilde{C} \exp(-u/m), \quad 0 \leq u < \infty,$$

где $\tilde{C}$ – произвольная постоянная. Но, учитывая, что $\tilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет условиям (21), (22), (31), получаем из ИДУ (20), что $g(0) = 0$. Это влечет $\tilde{C} = 0$, т.е. $g(u) \equiv 0$.

Лемма доказана. $\square$

Замечание 7. Напомним, что в классической модели Крамёра–Лундберга (без инвестиций) при положительной нагрузке безопасности, т.е. при выполнении неравенства (2), вероятность неразорения задается точной формулой (5). Как и следовало ожидать, функция (5) является решением ОДУ (29) при $a = b = 0$ и удовлетворяет условиям (22)–(24). При этом функция (5) является единственным решением такого "вырожденного" ОДУ первого порядка, удовлетворяющим в нуле условию (22) и на бесконечности первому из предельных условий в (24), а ограничение (23) и второе условие из (24) выполняются для него автоматически.

Замечание 8. ОДУ (29) было ранее получено в [4], где, однако, для него не ставится полностью сингулярная задача на $\mathbb{R}_+$ и, в частности, как уже отмечалось, предельное условие (22) в нуле не зафиксировано. Это же условие необходимо, чтобы отделять те решения ОДУ (29), которые одновременно являются решениями исходного ИДУ (20) (см. здесь лемму 3, которая в [2] приведена без доказательства).

В результате будем изучать линейное ОДУ (29) с особенностями в нуле и на бесконечности (по поводу классификации изолированных особенностей для систем линейных ОДУ и общей теории таких ОДУ см., например, монографии [7]–[11], дополняющие друг друга).

Более точно, будем изучать поставленные далее для ОДУ (29) сингулярные задачи Коши (ЗК) в окрестностях особых точек, в основном используя результаты и подходы работ [12]–[14].

2.2. Сингулярная задача Коши для вспомогательного ОДУ второго порядка с параметризованными начальными данными в особой точке $u = 0$. Понизим порядок ОДУ (29), полагая $\psi(u) = \varphi'(u)$, и запишем полученное для $\psi(u)$ ОДУ второго порядка с особенностью в нуле типа полюса в каноническом виде:

$$u^3\psi''(u) + (a_1 + a_2u + a_3u^2)u\psi'(u) + (a_4u + a_5u^2)\psi(u) = 0, \quad u > 0. \quad (32)$$

При $u \rightarrow +0$ ОДУ (32) обладает иррегулярной (сильной) особенностью ранга 1.

Поставим для него в окрестности нуля сингулярную ЗК с параметром: будем искать такое решение $\psi(u)$ ОДУ (32), для которого при $u \rightarrow +0$ предел существует и конечен:

$$\lim_{u \rightarrow +0} \psi(u) = D_1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} [u\psi'(u)] = 0. \quad (33)$$

Здесь D_1 – параметр, а условие для $\psi'(u)$ является естественным минимальным требованием, обеспечивающим вырождение ОДУ (32) при $u \rightarrow +0$.

Лемма 4. Пусть $c > 0$, $b \neq 0$, $m \neq 0$. Тогда при любом фиксированном $D_1 \in \mathbb{R}$ существует и притом единственное решение $\psi(u, D_1)$ сингулярной ЗК (32), (33); это решение при малых u представимо асимптотическим рядом

$$\psi(u, D_1) \sim D_1 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} D_{k+1} u^k \right], \quad u \sim 0, \quad (34)$$

где коэффициенты D_k не зависят от D_1 и определяются формальной подстановкой ряда (34) в ОДУ (32):

$$D_2 = -[(a - \lambda)/c + 1/m], \quad (35)$$

$$D_3 = -[D_2(b^2 + 2a - \lambda + c/m) + a/m]/(2c), \quad (36)$$

$$D_k = -\{D_{k-1}[(k-1)(k-2)b^2/2 + (k-1)a - \lambda + c/m] + D_{k-2}[(k-3)b^2/2 + a]/m\}/[c(k-1)], \quad k = 4, 5, \dots \quad (37)$$

Доказательство. Полагая $y_1(u) = \psi(u) - D_1$, $y_2(u) = u\psi'(u)$, получим из (32), (33) сингулярную ЗК для системы ОДУ первого порядка с параметром D_1 :

$$u^2 y'(u) = (A_0 + A_1 u + A_2 u^2) y(u) + g(u, D_1), \quad u > 0, \quad \lim_{u \rightarrow +0} y(u) = 0, \quad (38)$$

где $y = (y_1, y_2)^T$ (здесь и далее индекс T сверху означает транспонирование),

$$g(u, D_1) = -D_1 (0, a_4 u + a_5 u^2)^T,$$

что влечет $\lim_{u \rightarrow +0} g(u, D_1) = 0$;

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_4 & 1 - a_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_5 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_0 имеет собственные значения (СЗ):

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -a_1 = -2c/b^2 < 0.$$

СЗ $\lambda_2 < 0$ отвечает неограниченным в нуле решениям ОДУ (38). Чтобы разобраться с поведением решений, отвечающих нулевому СЗ, надо найти первую поправку к этому СЗ по теории возмущений, используя вид матрицы A_1 .

Более подробно это осуществляется по следующей схеме. Так как $u = 0$ является иррегулярной особой точкой, удобно перейти к новой независимой переменной $\tau = 1/u$. Тогда для $\tilde{y}(\tau) = y(u(\tau))$ ЗК (38) преобразуется к виду

$$\tilde{y}'(\tau) = -(A_0 + A_1/\tau + A_2/\tau^2) \tilde{y}(\tau) + \tilde{g}(\tau, D_1), \quad \tau \geq \tau_\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{y}(\tau) = 0, \quad (39)$$

где ОДУ (39) будем рассматривать для достаточно больших τ_∞ ($\tau_\infty \gg 1$),

$$\tilde{g}(\tau, D_1) = -g(u(\tau), D_1) = D_1 (0, a_4/\tau + a_5/\tau^2)^T,$$

так что $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{g}(\tau, D_1) = 0$.

При $\tau \rightarrow \infty$ ОДУ (39) имеет иррегулярную особенность ранга 1. Тогда поведение решений системы (39) при больших τ определяется матрицами A_0 и A_1 (из-за наличия у матрицы A_0 нулевого СЗ).

Следуя подходу [13], [14], введем при больших τ преобразование

$$\tilde{y}(\tau) = (E + T/\tau)z(\tau), \quad \tau \geq \tau_\infty,$$

где $z = (z_1, z_2)^T$, E – единичная 2×2 -матрица, а 2×2 -матрица T пока не определена. Для $z(\tau)$ при $\tau \geq \tau_\infty$ получаем ОДУ

$$z'(\tau) = (E + T/\tau)^{-1} \{ [T/\tau^2 - (A_0 + A_1/\tau + A_2/\tau^2)(E + T/\tau)] z(\tau) + \tilde{g}(\tau, D_1) \}. \quad (40)$$

Покажем, что матрицу $T = (t_{ij})_{i,j=1,2}$ можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$T/\tau^2 - (A_0 + A_1/\tau + A_2/\tau^2)(E + T/\tau) = (E + T/\tau) [A_0 + \tilde{A}_1/\tau + G(\tau)/\tau^2], \quad (41)$$

где для $G(\tau)$ существует конечный предел при $\tau \rightarrow \infty$,

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - a_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

(диагональные элементы диагональной матрицы $\tilde{A}_1$ совпадают с диагональными элементами матрицы A_1).

В самом деле, приравнивая в (41) коэффициенты при степенях τ^{-1} , получаем соотношение

$$-A_0 T + T A_0 = A_1 - \tilde{A}_1.$$

Отсюда получаем, что

$$t_{12} = -1/a_1, \quad t_{21} = -a_4/a_1,$$

а t_{11}, t_{22} – произвольные числа, которые для определенности и удобства полагаем равными нулю, т.е., учитывая обозначения (30), получаем

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -b^2/(2c) \\ -(a - \lambda)/c - 1/m & 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

В результате, учитывая (40), (41), получаем для $z(\tau)$ сингулярную ЗК на бесконечности:

$$z'(\tau) = -[A_0 + \tilde{A}_1/\tau + G(\tau)/\tau^2] z(\tau) + \hat{g}(\tau, D_1), \quad \tau \geq \tau_\infty, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} z(\tau) = 0. \quad (44)$$

Здесь, после нахождения матрицы T в виде (43), имеем

$$G(\tau) = (E + T/\tau)^{-1} [A_1 T - T \tilde{A}_1 + A_2(E + T/\tau) - T],$$

$$\hat{g}(\tau, D_1) = (E + T/\tau)^{-1} \tilde{g}(\tau, D_1) = D_1 (E + T/\tau)^{-1} (0, a_4/\tau + a_5/\tau^2)^T,$$

так что справедливы разложения в сходящиеся ряды при больших τ :

$$G(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} G^{(k)} / \tau^k, \quad \hat{g}(\tau, D_1) = D_1 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}^{(k)} / \tau^k, \quad \tau \geq \tau_{\infty}, \quad (45)$$

где $G^{(k)}$ – постоянные 2×2 -матрицы ($k \geq 0$), а $\hat{g}^{(k)}$ – постоянные двумерные вектор-столбцы ($k \geq 1$). Отсюда, в частности, справедливо $\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = G^{(0)} = A_1 T - T \tilde{A}_1 + A_2 - T$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{g}(\tau, D_1) = 0$.

В силу (42), в ОДУ (44) первая поправка к нулевому СЗ матрицы A_0 также является нулевой, что обеспечивает для однородной части системы (44) отсутствие других решений, стремящихся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, кроме тривиального. Это утверждение следует из того, что, в силу, например, теоремы 8 из [7], гл. II, такая однородная система "асимптотически эквивалентна" системе

$$\tilde{z}'(\tau) = -(A_0 + \tilde{A}_1/\tau) \tilde{z}(\tau), \quad \tau \gg 1,$$

(слагаемые порядка $O(1/\tau^2)$, $\tau \rightarrow \infty$, не влияют на характер поведения решений в главном).

Тогда, на основании теоремы 1 из [13], решение сингулярной ЗК (44) существует и единственно; из теоремы 3 в [13] (с учетом там следствия 5 и замечания 3) следует, что это решение представимо асимптотическим рядом по обратным целым степеням τ , причем коэффициенты этого ряда получаются его формальной подстановкой в ОДУ (44) (с учетом разложений (45)).

Возвращаясь к исходным переменным, т.е. от задачи (44) к задаче (32), (33), и учитывая вид проведенных преобразований, получаем справедливость утверждения леммы.

Лемма доказана. $\square$

2.3. Следствия для решений сингулярных начальных задач для ОДУ третьего порядка и для ИДУ. Учитываем, что справедливо равенство

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \int_0^u \psi(s) ds, \quad u \geq 0. \quad (46)$$

Тогда, если $\psi(s)$ есть решение сингулярной ЗК (32), (33), то, в силу соотношения (35), условие (31) для $\varphi(u)$ выполняется автоматически. В результате, используя леммы 3 и 4, получаем

Следствие 1. Пусть выполнены предположения леммы 4. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Сингулярная "дифференциальная задача" (29), (21) без начальных данных обладает двухпараметрическим семейством решений $\varphi(u, C_0, D_1)$; каждое решение этого семейства представимо при малых u асимптотическим рядом

$$\varphi(u, C_0, D_1) \sim C_0 + D_1 \left[u + \sum_{k=2}^{\infty} C_k u^k \right], \quad u \sim +0. \quad (47)$$

Здесь C_0 и D_1 – параметры, а при $k \geq 2$ справедливы равенства

$$C_k = D_k/k, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (48)$$

где постоянные коэффициенты D_k определяются по формулам (35)–(37).

2) Сингулярная начальная "интегродифференциальная задача" (26), (27) обладает однопараметрическим семейством решений $\tilde{\varphi}(u, C_0)$ – подмножеством семейства $\varphi(u, C_0, D_1)$, выделяемого требованием (22), что приводит в асимптотическом разложении (47) к зависимости между параметрами C_0 и D_1 :

$$c D_1 = \lambda C_0. \quad (49)$$

Принимая во внимание дополнительно лемму 2 и соотношения

$$C_2 = -[(a - \lambda)/c + 1/m]/2, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \tilde{\varphi}''(u, C_0) = 2\lambda C_0 C_2/c, \quad (50)$$

следующие из (47)–(49) и (35), получаем

Следствие 2. Пусть выполнены предположения леммы 4 и $\lambda > 0$, и пусть $\varphi(u)$ есть решение СНЗ (26), (27) из семейства $\tilde{\varphi}(u, C_0)$, определенного в следствии 1, при некотором фиксированном $C_0 > 0$. Тогда $\varphi(u)$ монотонно возрастает с ростом u , причем если в (50) значение $C_2 < 0$, то это решение – вогнутая функция, а если $C_2 > 0$, то это решение – выпуклая функция при малых $u > 0$ и может иметь точку перегиба с ростом u .

2.4. Сингулярная задача Коши на бесконечности для вспомогательного ОДУ второго порядка и ее двухпараметрическое семейство решений. Для окончательного решения вопроса, при каких условиях из семейства решений $\tilde{\varphi}(u, C_0)$ СНЗ (26), (27) можно выделить решение, удовлетворяющее условиям (23), (24), рассмотрим ОДУ (32) при больших u . Для этого, разделив ОДУ (32) на u^3 , получим стандартный вид ОДУ второго порядка с иррегулярной особенностью ранга 1 при $u \rightarrow \infty$:

$$\psi''(u) + (a_3 + a_2/u + a_1/u^2)\psi'(u) + (a_5/u + a_4/u^2)\psi(u) = 0, \quad u > 0. \quad (51)$$

Будем искать решения этого ОДУ, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi'(u) = 0. \quad (52)$$

Лемма 5. Пусть в ОДУ (51) будет $b \neq 0$, $a > 0$, $m > 0$, а λ и c – любые числа. Тогда все решения ОДУ (51) удовлетворяют условиям (52), т.е. сингулярная линейная ЗК на бесконечности (51), (52) имеет двухпараметрическое семейство решений $\psi(u, d_1, d_2)$, и при больших u справедливо представление

$$\psi(u, d_1, d_2) = d_1 u^{-2a/b^2} [1 + \chi_1(u)/u] + d_2 u^{-2} \exp(-u/m) [1 + \chi_2(u)/u], \quad (53)$$

где d_1, d_2 – параметры, а функции $\chi_j(u)$ имеют конечные пределы при $u \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2$) и представимы при больших u асимптотическими рядами по обратным целым степеням u . При любом $d_1 \neq 0$ решение этого семейства тогда и только тогда есть интегрируемая на бесконечности функция, когда выполняется условие (16).

Доказательство. Приведем ОДУ (51) к системе первого порядка, полагая $y_1(u) = \psi(u)$, $y_2(u) = \psi'(u)$, $y(u) = (y_1(u), y_2(u))^T$:

$$y'(u) = (B_0 + B_1/u + B_2/u^2) y(u), \quad u > 0, \quad (54)$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a_3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_5 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_4 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая обозначения (30), получаем, что матрица B_0 имеет СЗ:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -a_3 = -1/m < 0.$$

Из-за наличия нулевого СЗ поведение решений системы (54) в главном при больших u определяется двумя матрицами B_0 и B_1 . Тогда снова используем метод асимптотической (квази)диагонализации матриц (см. Основную лемму в [14]).

Введем в (54) при больших u преобразование

$$y(u) = M_0(E + N/u) w(u), \quad u \geq u_\infty. \quad (55)$$

Здесь E – единичная 2×2 -матрица, матрица N пока не определена, а M_0 – диагонализатор матрицы B_0 :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_0 = M_0^{-1} B_0 M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/m \end{pmatrix}.$$

Для $w(u)$ получаем ОДУ

$$w'(u) = (E + N/u)^{-1} \left[(\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1/u + \widetilde{B}_2/u^2) (E + N/u) + N/u^2 \right] w(u), \quad u \geq u_\infty, \quad (56)$$

где

$$\widetilde{B}_1 = -2 \begin{pmatrix} a/b^2 & m \\ a/(mb^2) & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_2 = (2/b^2) \begin{pmatrix} m(\lambda - a - c/m) & m^2(a - \lambda) \\ \lambda - a - c/m & m(a - \lambda) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что матрицу $N = (n_{ij})_{i,j=1,2}$ можно выбрать так, чтобы при больших u ОДУ (56) приобрело вид

$$w'(u) = \left[\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1/u + P(u)/u^2 \right] w(u), \quad u \geq u_\infty, \quad (57)$$

где для матрицы $P(u)$ существует конечный предел при $u \rightarrow \infty$,

$$\widetilde{B}_1 = -2 \begin{pmatrix} a/b^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. диагональные элементы диагональной матрицы $\widetilde{B}_1$ совпадают с диагональными элементами матрицы $\widetilde{B}_1$.

В самом деле, из (57) и (56) имеем

$$(E + N/u) \left[\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1/u + P(u)/u^2 \right] = \left(\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1/u + \widetilde{B}_2/u^2 \right) (E + N/u) + N/u^2.$$

Приравнявая в последнем равенстве коэффициенты при u^{-1} , получаем

$$\widetilde{B}_1 + N\widetilde{B}_0 = \widetilde{B}_0N + \widetilde{B}_1,$$

откуда $n_{12} = 2m^2$, $n_{21} = -2a/b^2$, а n_{11} и n_{22} – произвольные числа. Для определенности и удобства диагональные элементы матрицы N положим равными нулю. Тогда окончательно имеем:

$$N = 2 \begin{pmatrix} 0 & m^2 \\ -a/b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(u) = (E + N/u)^{-1} \left[\widetilde{B}_1N - N\widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2(E + N/u) + N \right],$$

$$P(u) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}/u^k, \quad u \geq u_\infty, \quad P^{(0)} = \lim_{u \rightarrow \infty} P(u) = (E + \widetilde{B}_1)N - N\widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2.$$

На основании теоремы 8 из [7], гл. II, ОДУ (57) при больших u "асимптотически эквивалентно" ОДУ

$$\widetilde{w}'(u) = (\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1/u) \widetilde{w}(u), \quad u \gg 1,$$

компоненты решения которого имеют вид

$$\widetilde{w}_1(u) = \widetilde{C}_1 u^{-2a/b^2}, \quad \widetilde{w}_2(u) = \widetilde{C}_2 \exp(-u/m) u^{-2},$$

где $\widetilde{C}_j$ – произвольные постоянные ($j = 1, 2$).

Возвращаясь к исходным переменным и учитывая результаты общей теории линейных ОДУ с иррегулярной особой точкой на бесконечности, получаем утверждение леммы.

Лемма доказана. $\square$

2.5. Следствия для решений ОДУ третьего порядка и для ИДУ. Учитывая, что справедливы соотношения

$$\varphi(u) = C_\infty - \int_u^\infty \psi(s) ds, \quad C_\infty = \lim_{u \rightarrow \infty} \varphi(u),$$

а из асимптотики (53) для сходимости интеграла на бесконечности должно выполняться неравенство (16), получаем, что справедлива

Лемма 6. В предположениях леммы 5 все решения ОДУ (29) тогда и только тогда имеют конечные пределы при $u \rightarrow \infty$, когда выполнено условие (16).

Замечание 9. Пусть выполнены условия лемм 4 и 6 и $\lambda > 0$, и пусть $\psi(u, 1)$ есть решение сингулярной ЗК (32), (33) при $D_1 = 1$. Тогда функция

$$\varphi(u, C_0) = C_0 \left[1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(s, 1) ds \right]$$

есть решение СНЗ (26), (27). Условие (24) выполняется при

$$C_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \psi(s, 1) ds \right]^{-1}, \quad 0 < C_0 < 1, \quad (58)$$

так что функция

$$\varphi(u) = \left[1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(s, 1) ds \right] \left[1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \psi(s, 1) ds \right]^{-1}, \quad (59)$$

есть решение всей сингулярной задачи (20)–(24).

3. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ ИСХОДНОГО ИДУ

Суммируя результаты предыдущих разделов, получим следующую основную теорему для исходной сингулярной линейной задачи (20)–(24).

Теорема 1. Пусть в ИДУ (20) все параметры b^2 , c , λ , m , a – фиксированные положительные числа, и пусть выполняется условие (16) ("надежности акций"). Тогда:

1) существует, и притом единственное, решение $\varphi(u)$ сингулярной линейной задачи (20)–(22), (24);

2) это решение удовлетворяет требованиям (23) и является бесконечно дифференцируемой монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+$ функцией; если выполнено условие

$$m(a - \lambda) + c > 0, \quad (60)$$

то решение $\varphi(u)$ – вогнутая на $\mathbb{R}_+$ функция, а если

$$m(a - \lambda) + c \leq 0, \quad (61)$$

то $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \hat{u}]$, где $0 < \hat{u}$ – точка перегиба;

3) при малых u справедливо асимптотическое представление

$$\varphi(u) \sim C_0 \left[1 + \frac{\lambda}{c} \left(u + \sum_{k=2}^\infty C_k u^k \right) \right], \quad u \sim +0; \quad (62)$$

здесь $C_0 : 0 < C_0 < 1$, $C_k = D_k/k$, $k = 2, 3, \dots$, где D_k определяются по формулам (35)–(37);

4) при больших u справедливо представление

$$\varphi(u) = 1 - K u^{1-2a/b^2} [1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty, \quad (63)$$

где $K = C_0 \tilde{K} > 0$, параметр $C_0 = \lim_{u \rightarrow +0} \varphi(u) > 0$ является параметром нормировки, выбор которого обеспечивает выполнение условия (24) (значения C_0 и $\tilde{K}$ не могут быть определены методами локального анализа).

Замечание 10. В [4] было формально для ОДУ (51) (без изучения всей задачи для ИДУ) получено асимптотическое представление решений в главном при больших u (с использованием ВКБ-приближений [11]):

$$\psi(u, d_1, d_2) = d_1 u^{-2a/b^2} [1 + o(1)] + d_2 u^{-2} \exp(-u/m) [1 + o(1)], \quad u \rightarrow \infty. \quad (64)$$

Чтобы показать, что для вероятности разорения постоянная $d_1 \neq 0$ в асимптотике (64), применялась нижняя оценка для вероятности разорения при больших u , достаточно сложно полученная в [6] вероятностными методами. В результате, как уже отмечалось, справедлива зафиксированная во введении теорема ФКР из [4]. Непонятно только, почему в этой теореме не охвачен случай $2a/b^2 = 1$ (критическое значение параметра бифуркации).

В утверждении 4) теоремы 1 мы используем этот факт из теоремы ФКР, что $K \neq 0$ в асимптотике (63). Можно провести и независимые рассуждения для доказательства этого утверждения (без привлечения вероятностных методов), на чем здесь останавливаться не будем.

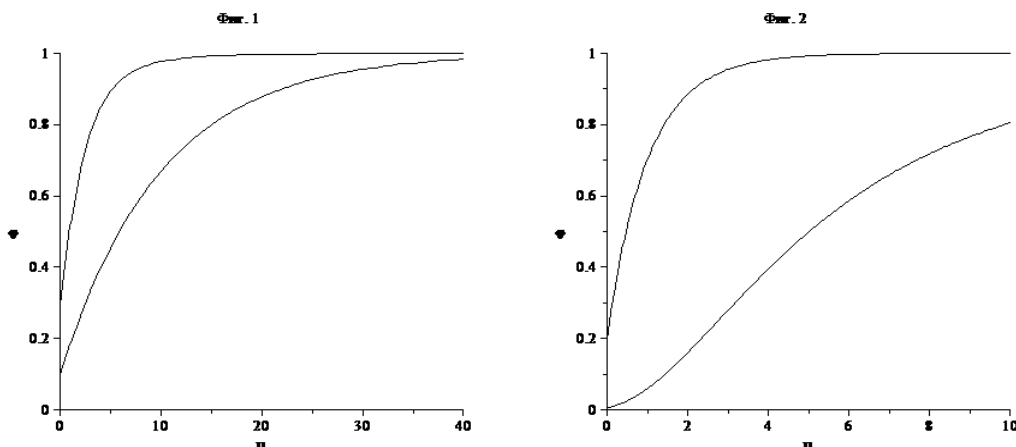
Замечание 11. Условие (60), в частности, выполняется, когда справедливо неравенство (2), т.е. при положительной нагрузке безопасности. При неположительной нагрузке безопасности, в отличие от классической модели Крамера–Лундберга, когда справедливо $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$, в данной модели вероятность разорения не равна нулю ни при каком $u \in \mathbb{R}_+$ для надежного портфеля активов, т.е. когда справедливо неравенство (16). При нарушении этого неравенства, и уже независимо от выполнения или невыполнения условия (2), для вероятности разорения $\varphi(u)$ будет $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ, ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В результате проведенных исследований показано, что решение исходной сингулярной линейной задачи для ИДУ (20)–(24) сводится к решению вспомогательной сингулярной линейной ЗК для ОДУ (29), (27), (31) с параметром C_0 , подлежащим определению, $0 < C_0 < 1$. Для переноса предельных начальных условий (27), (31) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u_0 > 0$ используется асимптотическое представление для решения (62), производные от решения могут быть получены дифференцированием этого разложения. В результате численно решается уже регулярная ЗК от точки $u_0 > 0$. Параметр C_0 в разложении (62) определяется численно, исходя из требования (24), используемого, в силу линейности задачи, как условие нормировки. Другой алгоритм следует из замечания 9. Для вычислений использовался пакет программ Maple.

В качестве иллюстраций приведены результаты расчетов как при положительной нагрузке безопасности (I случай), так и при нарушении неравенства (2) (II случай). Для всех вариантов расчетов зафиксированы параметры $m = 1$ и $\lambda = 0.09$, а акции относятся к числу "надежных".

Значения параметров a , b и c таковы: 1) для I случая $c = 0.1$, $a = 0.02$, $b = 0.1$; на Фиг.1 нижний график отвечает классической модели (без инвестиций), т.е. формуле (5); для него $C_0 = \varphi(0) = 0.1$, $D_1 = \lambda C_0 / c = \varphi'(0) = 0.09$; для расчетной верхней кривой $C_0 = 0.295$, $D_1 = 0.265$; 2) для II случая полагали $c = 0.02$, $b = 0.1$ и проводили расчеты для двух значений параметра a : $a = 0.1$, что отвечает выполнению неравенства (60) (см. верхний график на Фиг.2), и $a = 0.02$, что отвечает выполнению неравенства (61) (см. нижний график на Фиг.2); для нижнего графика $C_0 = 0.00527$, $D_1 = 0.0237$, а для верхнего $C_0 = 0.194$, $D_1 = 0.872$.



Исследование задачи показало, что при больших значениях ПК использование рискованных активов при постоянной структуре портфеля не является благоприятным с точки зрения разорения. В то же время, как показывают случаи нарушения положительности нагрузки безопасности, т.е. невыполнения неравенства (2), при малых значениях ПК рискованные активы являются эффективным инструментом: в то время, как при отсутствии инвестиций разорение неминуемо, при их наличии вероятность разорения быстро нарастает с ростом ПК u (даже при положительности второй производной от решения при малых u !). Проведенное в [1], [2] исследование оптимальной стратегии в случае экспоненциального распределения размера требований показало, что доля рискованных

вложений при стремлении текущего капитала x к бесконечности должна быть бесконечно малой функцией порядка $O(1/x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 10-01-00767-а, 08-01-00139-а и 11-01-00219-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О. *Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – Т.16, вып.6. – С.961–981.
- [2] Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Куркина А.О. *Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамера–Лундберга при экспоненциальном распределении размера требований* // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т.17, вып.1. С.3–24.
- [3] Grandell, I. *Aspects of risk theory* // Berlin: Springer. – 1991.
- [4] Frolova, A., Kabanov, Yu. and Pergamenschchikov, S. *In the Insurance Business Risky Investments Are Dangerous* // Finance Stochast. – 2002. – Vol.6, No.2. – P.227–235.
- [5] Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. *Математика финансовых обязательств* // М.: ГУ ВШЭ. – 2001.
- [6] Kalashnikov V., Norberg R. *Power Tailed Ruin Probabilities in the Presence of Risky Investments* // Stoch. Proc. Appl. – 2002. – Vol.98. – P.211–228.
- [7] Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений* // М.: ИЛ. – 1954.
- [8] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений* // М.: ИЛ. – 1958.
- [9] Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений* // М.: Мир. – 1968.
- [10] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* // М.: Наука. – 1976.
- [11] Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // М.: Наука. – 1983.
- [12] Биргер Е.С., Ляликова (Конюхова) Н.Б. *О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности* // I. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т.5, №6. – С.979–990; II. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1966. – Т.6, №3. – С.446–453.
- [13] Конюхова Н.Б. *Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1983. – Т.23, №3. – С.629–645.
- [14] Конюхова Н.Б. *Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений* // Сообщ. по прикл. матем. – М: ВЦ АН СССР. – 1988. – 67 с.

Белкина Татьяна Андреевна, 117418, Россия, Москва, ЦЭМИ РАН, Нахимовский просп., 47

Конюхова Надежда Борисовна, 119333, Россия, Москва, ВЦ РАН, ул. Вавилова, 40

Курочкин Сергей Владимирович, 119333, Россия, Москва, ВЦ РАН, ул. Вавилова, 40

E-mail: nadja@ccas.ru

Г.С. БАЛАШОВА

РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой статье описаны условия, при которых весовое пространство Соболева бесконечного порядка вкладывается в другое аналогичное пространство или в весовое пространство Лебега. Основным инструментом исследования являются различные типы неравенства Харди.

Ключевые слова: пространство Соболева бесконечного порядка, весовое пространство Лебега, неравенство Харди.

In this paper conditions are described under which a weighted Sobolev space of infinite order is embedded into another or into a weighted Lebesgue space. The main tool is various types of Hardy's inequality.

Key words: Sobolev space of infinite order, weighted Lebesgue space, Hardy's inequality.

В начале прошлого столетия Харди установил, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$, $a_n \geq 0$, $p > 1$, следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^p$$

и имеет место оценка

$$\sum_{n=1}^n \left(\frac{1}{n} a_k \right)^p \leq C_p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p. \quad (1)$$

Аналогично для p -интегрируемой неотрицательной на $(0, \infty)$ функции справедливо неравенство

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq C_p \int_0^{\infty} f(x)^p dx. \quad (2)$$

Постоянная C_p в неравенствах (1) и (2) точная и имеет вид (см.[1])

$$C_p = \left(\frac{p}{p-1} \right)^p.$$

Неравенство (2) обычно называют классическим неравенством Харди.

В 1927 году Харди [2] получил следующие оценки для весовой модификации неравенства (2) в случае измеримой неотрицательной функции $f(x)$ на $(0, \infty)$.

1°. Если $p > 1$ и $\alpha < p - 1$, то справедливо неравенство

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^{\alpha} dx \leq \left(\frac{p}{p-\alpha-1} \right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p x^{\alpha} dx. \quad (3)$$

2°. Если $p > 1$ и $\alpha > p - 1$, то справедливо неравенство

$$\int_0^x \left(\frac{1}{t} \int_t^{\infty} f(t) dt \right)^p x^{\alpha} dx \leq \left(\frac{p}{\alpha+1-p} \right)^p \int_0^{\infty} f(x)^p x^{\alpha} dx. \quad (4)$$

При этом постоянные в (3) и (4) являются наилучшими.

В 1969 году G. Talenti [3] и G. Tomaselli [4] установили, что для справедливости неравенства

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t) dt \right)^p u(x) dx \leq C \int_0^\infty f(x)^p v(x) dx,$$

где $f(x) \geq 0$, $1 < p < \infty$, $u(x)$ и $v(x)$ — весовые функции, то есть измеримые и почти всюду положительные, необходимо и достаточно, чтобы

$$A = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty u(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r v(x)^{1-p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} dx < \infty,$$

при этом имеет место оценка

$$A \leq C \leq \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} A.$$

С 1980 года многими учёными исследуется более общее неравенство типа Харди

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t) dt \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q} \left(\int_a^b f^p(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (5)$$

где $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $1 < p < \infty$, $f(x) \geq 0$; $u(x)$, $v(x)$ — заданные весовые функции на (a, b) .

Автор в этой работе не претендует на исчерпывающий обзор таких неравенств, а интересующимся рекомендует ознакомиться с книгами [5], [6].

Остановимся на неравенстве Харди, записанным в дифференциальной форме

$$\left(\int_a^b |f(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_a^b |f'(x)|^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

для функции $f(x)$ с $f(a) = 0$ или с $f(b) = 0$ или с $f(a) = f(b) = 0$ (см. [6]).

Сформулируем условия на числа p , q и весовые функции $u(x)$ и $v(x)$, при которых справедливо неравенство (6) с соответствующими конечными положительными постоянными C_L , C_R , C_{LR} .

Утверждение 1. Если $1 < p \leq q < \infty$, то для справедливости неравенства (6) с $f(a) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$B_L = \sup_{x \in (a,b)} \left(\int_x^b u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad (7)$$

при этом

$$B_L \leq C_L \leq \left(1 + \frac{q}{p'} \right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q} \right)^{\frac{1}{p'}} B_L. \quad (8)$$

Если $1 < q < p < \infty$, то для справедливости неравенства (6) с $f(a) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$A_L = \left(\int_a^b \left(\int_x^b u(t) dt \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, \quad (9)$$

где $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, при этом

$$q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r} \right)^{\frac{1}{q'}} A_L \leq C_L \leq q^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{q'}} A_L. \quad (10)$$

Утверждение 2. Если $1 < p \leq q < \infty$, то для справедливости неравенства (6) с $f(b) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$B_R = \sup_{x \in (a,b)} \left(\int_a^x u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \quad (11)$$

Если $1 < q < p < \infty$, то для справедливости неравенства (6) с $f(b) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$A_R = \left(\int_a^b \left(\int_a^x u(t) dt \right)^{\frac{x}{q}} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{x}{q'}} v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty. \quad (12)$$

Утверждение 3. Если

$$1 < p \leq q < \infty, \quad (13)$$

то для справедливости неравенства (6) с $f(a) = f(b) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{(c,d) \subset (a,b)} \left[\left(\int_c^d u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \min \left\{ \left(\int_a^c v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_d^b v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} \right] < \infty. \quad (14)$$

Используя теперь вышеизложенное и полученные ранее условия вложения пространств Соболева бесконечного порядка (см. [7], [8]), установим условия вложения для весовых пространств Соболева бесконечного порядка.

Определим пространство Соболева бесконечного порядка

$$W_L^\infty \{a_k, p_k, q_k, w_k\}_{(a,b)} \quad (15)$$

как множество бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) функций $\varphi(x)$, для которых $\varphi^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \dots$, и

$$\rho(u(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\int_a^b |\varphi^{(k)}(x)|^{p_k} w_k(x) dx \right)^{\frac{q_k}{p_k}} < \infty. \quad (16)$$

Здесь $\{a_k\}$, $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ — числовые последовательности, $a_k \geq 0$, $1 < p_k < \infty$, $1 < q_k < \infty$; $\{w_k(x)\}$ — последовательность весовых функций на $[a, b]$. Будем предполагать, что пространства типа (15), рассматриваемые в этой работе, нетривиальны.

Теорема 1. Пусть $\{a_k\}$, $\{p_k\}$, $\{q_k\}$ — числовые последовательности $a_k \geq 0$, $1 < p_k < \infty$, $1 < q_k < \infty$; $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ — последовательности весовых функций на отрезке $[a, b]$ таких, что для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство (6) с $f(x) = \varphi^{(k)}(x)$, $\varphi^{(k)}(a) = 0$, $q = q_k$, $p = p_{k+1}$, $u(x) = u_k(x)$, $v(x) = v_k(x)$, $C_L = C_L^{(k)} = C_k$, и имеет место соотношение

$$b_k \leq a_{k+1}/C_k^{q_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Тогда имеет место вложение

$$W_L^\infty \{a_k, p_k, q_{k-1}, u_k(x)\}_{(a,b)} \subset W_L^\infty \{b_k, q_k, q_k, v_k(x)\}_{(a,b)}. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(x) \in W_L^\infty \{a_k, p_k, q_{k-1}, u_k(x)\}_{(a,b)},$$

то есть

$$\rho(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\int_a^b |\varphi^{(k)}(x)|^{p_k} u_k(x) dx \right)^{\frac{q_{k-1}}{p_k}} < \infty.$$

Тогда в силу (6) и (17) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\int_a^b |\varphi^{(k)}(x)|^{q_k} v_k(x) dx \right) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k C_k^{q_k} \left(\int_a^b |\varphi^{(k+1)}(x)|^{p_{k+1}} u_{k+1}(x) dx \right)^{\frac{q_k}{p_{k+1}}} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \left(\int_a^b |\varphi^{(k+1)}(x)|^{p_{k+1}} u_{k+1}(x) dx \right)^{\frac{q_k}{p_{k+1}}} \leq \rho(\varphi) < \infty, \end{aligned}$$

то есть $\varphi(x) \in W_L^\infty \{b_k, q_k, q_k, v_k(x)\}_{(a,b)}$. $\square$

Пример. Пусть $(a, b) = (0, \infty)$, $u_k(x) = x^{\lambda_k}$, где числа $\lambda_k < p_{k-1}$ и $1 < p_{k+1} < q_k < \infty$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда, если в качестве весовых функций $v_k(x)$ и констант C_k взять

$$v_k(x) = x^{\mu_k}, \quad \mu_k = \lambda_{k+1} \frac{q_k}{p_{k+1}} \frac{q_k}{p'_{k+1}} - 1,$$

$$C_k = \left(\frac{p_{k+1}}{q_k} \right)^{\frac{1}{q_k}} (p_{k+1} - 1)^{\frac{1}{p_{k+1}}} (p_{k+1} - 1 - \lambda_{k+1})^{-\frac{1}{q_k} - \frac{1}{p'_{k+1}}} h(p_{k+1}, q_k),$$

где

$$h(p_{k+1}, q_k) = \left(1 + \frac{q_k}{p'_{k+1}} \right)^{\frac{1}{q_k}} \left(1 + \frac{p'_{k+1}}{q_k} \right)^{\frac{1}{p'_{k+1}}},$$

то будет иметь место вложение (18).

Замечание. Неравенство Харди, которое используется в доказательстве теоремы, справедливо тогда и только тогда, когда выполнены условия (7) или (9) соответственно для $1 < p_{k+1} \leq q_k < \infty$ или для $1 < q_k < p_{k+1} < \infty$.

Если ввести пространство $W_R^\infty \{a_k, p_k, q_{k-1}, u_k(x)\}_{(a,b)}$ с $\varphi^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ или $\dot{W}_{LR}^\infty$ с $\varphi^{(k)}(a) = \varphi^{(k)}(b) = 0$, то будут иметь место аналогии теоремы 1, только для справедливости неравенств Харди должны быть выполнены соответственно условия (11), (12) или (13) и (14). Причем ограничение (13) для пространства $\dot{W}_{LR}^\infty = W_L^\infty \cap W_R^\infty$ существенно. Его можно избежать используя критерий справедливости неравенства Харди (6) для функций $f(a) = f(b) = 0$, установленный в работе [9]. Этот критерий требует существования таких точек $Z_k \in (a, b)$, $k = 1, 2, \dots$, что

$$\int_a^{Z_k} v_k^{1-p'_k}(t) dt = \int_{Z_k}^b v_k^{1-p'_k}(t) dt.$$

Тогда для вложения

$$\dot{W}_{LR}^\infty \{a_k, p_k, q_{k-1}, u_k\}_{(a,b)} \subset \dot{W}_{LR}^\infty \{b_k, q_k, q_k, v_k\}_{(a,b)}$$

требуется выполнение условий

$$\sup_{x \in (a, Z_{k+1})} \left(\int_x^{Z_{k+1}} u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

и

$$\sup_{x \in (Z_{k+1}, b)} \left(\int_{Z_{k+1}}^x u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

если $1 < p_{k+1} \leq q_k < \infty$ или

$$\left(\int_a^{Z_{k+1}} \left(\int_x^{Z_{k+1}} u(t) dt \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{r}{p'}} v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

и

$$\left(\int_{Z_{k+1}}^b \left(\int_{Z_{k+1}}^x u(t) dt \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_x^b v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{r}{p'}} v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

если $1 < q_k < p_{k+1} < \infty$.

Теперь обратимся к неравенству Харди k -го порядка ($k \in N$),

$$\left(\int_a^b |f(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_k \left(\int_a^b |f^{(k)}(x)|^p v_k(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (19)$$

рассматриваемому на классе функций $f(x)$ таких что $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $k > 1$.

Неравенство (19) справедливо тогда и только тогда (см. [11]), когда выполнены условия

$$B = \max(B_1, B_2) < \infty, \quad (20)$$

где

$$B_1 = \sup_{x \in (a, b)} \left(\int_x^b (t-x)^{(k-1)q} u_k(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x v_k^{1-p'_k}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'_k}},$$

$$B_2 = \sup_{x \in (a, b)} \left(\int_x^b u_k(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x (x-t)^{(k-1)p'_k} v_k^{1-p'_k}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'_k}},$$

если

$$1 < \rho_k \leq q < \infty. \quad (21)$$

При этом $B \leq C_k(k-1)! \leq \delta(p, q, k)B$ или

$$A = \max(A_1, A_2) < \infty, \quad (22)$$

где

$$A_1 = \left(\int_a^b \left(\int_x^b (t-x)^{(k-1)q} u_k(t) dt \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_a^x v_k^{1-p'_k}(t) dt \right)^{\frac{r}{q'}} v_k^{1-p'_k}(x) dx \right)^{\frac{1}{r}},$$

$$A_2 = \left(\int_a^b \left(\int_x^b u_k(t) dt \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_a^x (x-t)^{(k-1)p'} v_k^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{r}{p'}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{r}},$$

если

$$1 < q < p_k < \infty. \quad (23)$$

Здесь $r = \frac{p_k q}{p_k - q}$.

Этот результат позволил доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть числовая последовательность $\{p_k\}$, параметр q и последовательности весовых функций $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ удовлетворяют условиям (20), (21) или (22), (23) и ряд

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{C_k^q} u_k(x)$$

сходится равномерно на (a, b) , тогда имеет место вложение

$$W_L^\infty \{a_k, p_k, q, v_k\}_{(a, b)} \subset L^q(a, b, u),$$

где $L^q(a, b, u)$ — весовое пространство Лебега.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(x) \in W_L^\infty\{a_k, p_k, q, u_k\}_{(a,b)}.$$

Тогда в силу (19) имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^q(a,b,u)}^q &= \int_a^b |\varphi(x)|^q u(x) dx = \int_a^b |\varphi(x)|^q \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{C_k^q} u_k(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{C_k^q} \int_a^b |\varphi(x)|^q u_k(x) dx \leq \sum_{k=1}^\infty a_k \left(\int_a^b |\varphi^{(k)}(x)|^{p_k} v_k(x) dx \right)^{\frac{q}{p_k}} \leq \rho(\varphi) < \infty, \end{aligned}$$

то есть $\varphi(x) \in L^p(a, b, u)$. $\square$

Замечание. Аналогичные результаты можно привести также для пространств $W_R^\infty\{a_k, p_k, q, v_k\}_{(a,b)}$ и $W_{LR}^\infty\{a_k, p_k, q, v_k\}_{(a,b)}$, а также рассмотреть случай $1 < q < p_k < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G.H. Hardy. *Notes on some points in the integral calculus, LX. An inequality between integrals.* Messenger of Math. 54 (1925), 150-156.
- [2] G.H. Hardy. *Notes on some points in the integral calculus, LXIV. Further inequalities between integrals.* Messenger of Math. 57 (1927), 12-16.
- [3] G. Talenti. *Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze.* Rend., Sem. Mat. Fis. Milano 39(1969), 171-185.
- [4] G.A. Tomaselli. *A class of inequalities.* Boll. Un. Mat. Ital. 2 (1969), 622-631.
- [5] A. Kufner, Lech Maligranda and Lars-Erik Persson. *The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results.* Pilsen 2007.
- [6] A. Kufner and Lars-Erik Persson. *Integral inequalities with weights.* 2000, Prague.
- [7] Ю.А. Дубинский. *Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Применения к пространствам Соболева бесконечного порядка.* Матем. сб., 1979, т. 110(152), N 3, 428-436.
- [8] Г.С. Балашова. *О теоремах вложения пространств бесконечно дифференцируемых функций.* Матем. заметки, 1984, т. 35, N 4, 505-516.
- [9] A. Kufner, G. Sinnamon. *Overdetermined Hardy inequalities.* J. math. Analysis appl. 1996, 27-35.
- [10] В.Д. Степанов. *Двухвесовые оценки интегралов Римана-Лиувилля.* Изв. Акад. Наук СССР. Сер. Математ. 1990, т. 54, N 3, 645-656.

БАЛАШОВА ГАЛИНА СЕРГЕЕВНА, РОССИЯ, МОСКВА, МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

E-mail: balashovags@mpci.ru

Ю.В. Богданский, В.М. Статкевич

АБСТРАКТНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА И СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предложен вариант обобщения классической теоремы Пикара, следствием которого является теорема о существовании и единственности решения простейшего нелинейного уравнения с существенно бесконечномерным оператором.

1. СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

Теория существенно бесконечномерных дифференциальных уравнений берет свое начало в работах П. Леви (см. [1], а также [2] с подробными комментариями и библиографией). Спецификой рассмотренной в [1] бесконечномерной версии оператора Лапласа (в дальнейшем "оператора Лапласа-Леви") является то обстоятельство, что он обращается в нуль на цилиндрических функциях и именно в этом смысле автором предисловия в [1], Г.Е. Шиловым, был назван "существенно бесконечномерным". Оператор Лапласа-Леви исследовался в работах Е.М. Полищука, М.Н. Феллера, Г.Е. Шилова. Различные версии этого оператора были предложены в работах Г.Е. Шилова и его учеников: А.С. Немировского, И.Я. Дорфман, В.Я. Сикирявого.

Исследование природы специфических свойств оператора Лапласа-Леви и его модификаций привело к выделению класса "существенно бесконечномерных эллиптических операторов" (СБЭО). Этот класс операторов был предложен в работе [3] (см. также [4-7]).

Всюду в дальнейшем H – бесконечномерное сепарабельное вещественное гильбертово пространство; $B_C(H)$ – банахово (относительно операторной нормы) пространство самосопряжённых ограниченных линейных операторов в H . Для вещественнозначной функции u , определённой на H (или на некоторой области в H), значение $u''(x)$ её второй производной (по Фреше) в точке x представляет собой оператор $u''(x) \in B_C(H)$. В работе [8] было предложено под линейным дифференциальным оператором второго порядка понимать оператор вида:

$$(Lu)(x) = j(u''(x)), \quad (1)$$

где j – линейный непрерывный функционал на $B_C(H)$. При этом операторы вида $(Lu)(x) = \text{tr } Au''(x)$ (тут A – неотрицательный ядерный оператор, а $\text{tr } A$ – его след) предлагалось называть "регулярными эллиптическими"; в общем случае оператор (1) – "нерегулярным".

Согласно [3], под СБЭО понимается оператор вида (1), где j – неотрицательный ненулевой линейный функционал на $B_C(H)$, ядру которого принадлежат все операторы конечного ранга в $B_C(H)$. Соответствующий функционал было предложено называть существенно бесконечномерным.

После выхода работы [6] наметился определённый интерес к СБЭО, как к одной из версий операторов Лапласа-Леви (в ряде работ СБЭО стали называть "сингулярными лапласианами", а соответствующие функционалы – "сингулярными").

Формула (1) показывает, что СБЭО является по своей природе оператором второго порядка. С другой стороны, СБЭО удовлетворяет (как легко убедиться) правилу Лейбница: $L(uv) = u \cdot Lv + Lu \cdot v$. Оказалось, что эти свойства СБЭО приводят к целому ряду необычных (с точки зрения конечномерной теории) эффектов, присущих решениям уравнений с такими операторами.

В настоящей работе изучается взаимосвязь между решениями уравнений с СБЭО и классической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Определённые шаги в этом направлении были сделаны в работе [9].

Предлагаемый в п.2 результат может быть истолкован как абстрактная форма теоремы Пикара. Следствиями его являются как теорема существования и единственности для нелинейного уравнения с СБЭО (см. п.3), так и классическая теорема Пикара (см. п.4).

2. АБСТРАКТНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА

Пусть S – произвольное множество; $\mathcal{F}(S)$ – банахова алгебра всех вещественнозначных ограниченных функций на S (относительно поточечных операций и суп-нормы). Пусть X – замкнутая подалгебра в $\mathcal{F}(S)$ (потому $u \in X \Rightarrow |u| \in X$); $T(t)$ – (C_0) -полугруппа в X с генератором $A = T'(0)$. Полугруппа $T(t)$ предполагается мультипликативной ($\forall u, v \in X, \forall t \geq 0 : T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v$) и нильпотентной ($\exists t_0 > 0 \forall u \in X : T(t_0)u = 0$). Следствиями мультипликативности полугруппы являются: позитивность ($\forall u \geq 0, \forall t \geq 0 : T(t)u \geq 0$); равенство $T(t)(|u|) = |T(t)u|$ для всех $u \in X$; $T(t)$ – сжимающая полугруппа.

Пусть $F : X \rightarrow X$ – нелинейное отображение, удовлетворяющее условию: $\exists C > 0 \forall u, v \in X : |F(u) - F(v)| \leq C|u - v|$. Это условие весьма сильное: для $\forall x \in S$ значение $(F(u))(x)$ полностью определяется значением $u(x)$. Будем его в дальнейшем называть "усиленным условием Липшица".

Теорема 1. *Уравнение*

$$Au = F(u) \quad (2)$$

имеет и притом единственное решение в X .

Доказательство. В силу нильпотентности полугруппы $T(t)$, $0 \in \rho(A)$ и уравнение $Au = v$ для $\forall v \in X$ имеет и притом единственное решение $u = -\int_0^{t_0} T(t)v dt$. Потому уравнение (2) эквивалентно уравнению:

$$u = -\int_0^{t_0} T(t)(F(u))dt = g(u). \quad (3)$$

Для $m \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\begin{aligned} |g^m(u_1) - g^m(u_2)| &\leq \int_0^{t_0} T(t)(|F(g^{m-1}(u_1)) - F(g^{m-1}(u_2))|)dt \leq \\ &\leq C \int_0^{t_0} dt \int_0^{t_0} T(t+s)(|F(g^{m-2}(u_1)) - F(g^{m-2}(u_2))|)ds \leq \dots \leq \\ &\leq C^{m-1} \int_0^{t_0} dt_1 \dots \int_0^{t_0} dt_m T(t_1 + \dots + t_m)(|F(u_1) - F(u_2)|) \leq \\ &\leq \frac{C^{m-1}t_0^m}{m!} |F(u_1) - F(u_2)|, \end{aligned}$$

откуда $\|g^m(u_1) - g^m(u_2)\| \leq \frac{C^m t_0^m}{m!} \|u_1 - u_2\|$; $\exists m \in \mathbb{N}$, для которого g^m является сжатием в X . Следовательно, уравнение (3), а потому и (2), имеет и притом единственное решение. $\square$

Теорема 2. Пусть $T(t) : X \rightarrow X$ – полугруппа, рассмотренная выше; $T'(0) = A$. Пусть функция $f : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: а) $\forall p \in \mathbb{R} : f(\cdot, p) \in X$; б) f удовлетворяет (классическому) условию Липшица по второму аргументу (равномерно относительно первого): $\exists C > 0 \forall x \in S, \forall u, v \in \mathbb{R} : |f(x, u) - f(x, v)| \leq C|u - v|$.

Тогда уравнение

$$(Au)(x) = f(x, u(x)) \quad (4)$$

имеет и притом единственное решение в X .

Доказательство. Достаточно доказать, что для $\forall u \in X$ функция $f(\cdot, u(\cdot)) \in X$, а также усиленное условие Липшица для отображения $F : X \ni u \mapsto f(\cdot, u(\cdot)) \in X$. Это позволит воспользоваться результатом теоремы 1.

Лемма 1. (обобщённая теорема Стоуна-Вейерштрасса). Пусть Y – замкнутая подалгебра $\mathcal{F}(S)$; $1 \in Y$; T – хаусдорфов компакт; $C(T; Y)$ – алгебра всех непрерывных функций на T со значениями в Y ; W – подалгебра в $C(T; Y)$, которая содержит тождественно единичную функцию и разделяет точки: $\forall t_1, t_2 \in T \exists g \in W$, для которой $g(t_1) - g(t_2)$ – обратимый элемент в Y . Тогда W плотна в $C(T; Y)$.

Доказательство. Лемма доказывается аналогично классической теореме Стоуна-Вейерштрасса с использованием структурных свойств алгебры Y . $\square$

Продолжаем доказательство теоремы 2. Предположим, что $1 \notin X$, присоединим к подалгебре X единицу: $Y = \{c \cdot 1 + u \mid u \in X; c \in \mathbb{R}\}$. По лемме 1 каждую функцию из $C([a; b]; Y)$ можно приблизить многочленами вида $q(p) = \sum_{k=0}^m h_k p^k$, $h_k \in Y$.

Пусть $u \in X$; отрезок $[a; b]$ содержит точку 0 и отрезок $[\inf_{x \in S} u(x); \sup_{x \in S} u(x)]$. В силу условия б) теоремы функция $[a; b] \ni p \mapsto f(\cdot, p) \in Y$ непрерывна; $\forall \varepsilon > 0 \exists$ функция $\sum_{k=0}^m h_k p^k$, для которой

$$\sup_{x \in S} \left| f(x, p) - \sum_{k=0}^m h_k(x) p^k \right| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Подставим $p = u(x)$ в формулу (5): тогда $f(x, u(x)) \in Y$; подстановка $p = 0$ даёт:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S} |f(x, 0) - h_0(x)| &\leq \varepsilon; \\ \sup_{x \in S} \left| f(x, u(x)) - f(x, 0) - \sum_{k=1}^m h_k(x) u^k(x) \right| &\leq \\ \sup_{x \in S} \left| f(x, u(x)) - \sum_{k=0}^m h_k(x) u^k(x) \right| + \sup_{x \in S} |h_0(x) - f(x, 0)| &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

X – идеал в Y . Потому $\sum_{k=1}^m h_k(x) u^k(x) \in X$; в силу условия а) теоремы $f(x, 0) \in X$. Следовательно, $f(x, u(x)) \in X$.

Если $1 \in X$, то рассуждения упрощаются: $[a; b] = [\inf_{x \in S} u(x); \sup_{x \in S} u(x)]$, формула (5) при подстановке $p = u(x)$ даёт $f(x, u(x)) \in X$.

Усиленное условие Липшица для отображения F есть непосредственное следствие условия б) теоремы. $\square$

Замечание. Легко убедиться, что для функции f выполнено классическое требование непрерывности по совокупности аргументов на $S \times \mathbb{R}$.

3. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Для приложения теоремы 2 к уравнениям с СБЭО следует построить соответствующую полугруппу.

Множество $D \subset B_C(H)$ называется почти компактным (см., например, [7]), если $\forall \varepsilon > 0 \exists$ компактное множество $K \subset B_C(H)$ и числа $n \in \mathbb{N}$; $d > 0$ такие, что $K + Q_{n,d}$ является ε -сетью для D (тут $Q_{n,d}$ – множество операторов из $B_C(H)$, ранг которых не превышает n , а норма не превышает d).

Фиксируем $R > 0$ и рассмотрим шар $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leq R\}$. Пусть Z – множество функций класса $C^2(H)$, носители которых лежат в B_R ; $u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на H и множество $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ является почти компактным. Если X – замыкание Z по норме $\sup_{x \in B_R} |u(x)|$, то X – замкнутая подалгебра без единицы алгебры $\mathcal{F}(H)$ из п.2.

Доказано (см., например, [4,6,7]): СБЭО L , заданный формулой (1), корректно определён на $D(L) = Z \subset X$, допускает замыкание и его замыкание $\bar{L}$ является генератором (C_0) -полугруппы $T(t)$. Эта полугруппа мультипликативна и нильпотентна.

Теперь теорема 2 (полагая: $S = H$; $A = \bar{L}$) может быть истолкована как теорема существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения (4) с СБЭО.

4. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ПИКАРА И ЕЁ НЕЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛОГ

Классическая теорема Пикара не является непосредственным следствием теоремы 2. Но её также можно получить из теоремы 2 в два этапа.

На первом этапе рассмотрим нелокальный аналог.

Следствие 1. Пусть $x_0 \in [a; b]$; $X = C[a; b]$; $f : [a; b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: а) $\forall u \in [a; b] : f(\cdot, u)$ непрерывна по первому аргументу; б) $\exists C > 0 \forall x \in [a; b], \forall u, v \in \mathbb{R} : |f(x, u) - f(x, v)| \leq C|u - v|$.

Тогда задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dx} = f(x, u(x)); \quad u(x_0) = u_0 \quad (6)$$

имеет и притом единственное решение в X .

Доказательство. Прежде всего, заметим: без потери общности можно считать, что в условии следствия $u_0 = 0$; $f(x_0, u_0) = 0$. Действительно, замена $\tilde{u} = u - f(x_0, u_0)(x - x_0) - u_0$; $\tilde{f}(x, \tilde{u}) = f(x, u) - f(x_0, u_0)$ приводит к задаче:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx} = \tilde{f}(x, \tilde{u}(x)); \quad \tilde{u}(x_0) = 0,$$

которая эквивалентна исходной задаче (6). Для функции $\tilde{f}$ условия а) и б) следствия сохраняются.

Положим $X^+ = \{u \in C[a; x_0] \mid u(x_0) = 0\}$; $Y^+ = \{v \in C[a; +\infty] \mid v(x) = 0; x \geq x_0\}$, где $C[a; +\infty]$ – банахова алгебра ограниченных равномерно непрерывных вещественных функций на $[a; +\infty)$; $V^+(t)$ – (C_0) -полугруппа сдвигов в Y^+ : $(V^+(t)v)(x) = v(x+t)$. Пусть $p : Y^+ \rightarrow X^+$; $q : X^+ \rightarrow Y^+$ – операторы "сужения" и "продолжения": $(pv)(x) = v(x)$ ($a \leq x \leq x_0$); $(qu)(x) = u(x)$ ($a \leq x \leq x_0$); $(qu)(x) = 0$ ($x \geq x_0$). Полугруппу $T^+(t)$ определим в X^+ формулой: $T^+(t) = p \circ V^+(t) \circ q$. $T^+(t)$ является мультипликативной и нильпотентной ($T^+(x_0 - a) = 0$) (C_0) -полугруппой в X^+ с генератором $A^+ = \frac{d}{dt}$, $D(A^+) = \{u \in X^+ \mid \exists u' \in X^+\}$. Для $u \in X^+$ выполнено условие: $f(\cdot, u(\cdot)) \in X^+$.

В силу теоремы 2, задача (6) имеет и притом единственное решение $u_1(x)$ на $[a; x_0]$.

Аналогично полагаем $X^- = \{u \in C[x_0; b] \mid u(x_0) = 0\}$; $Y^- = \{v \in C[-\infty; b] \mid v(x) = 0, x \leq x_0\}$; $(V^-(t)v)(x) = v(x-t)$ – (C_0) -полугруппа сдвигов в Y^- ; операторы $p : Y^- \rightarrow X^-$; $q : X^- \rightarrow Y^-$; $T^-(t) = p \circ V^-(t) \circ q$ – мультипликативная и нильпотентная ($T^-(b - x_0) = 0$) (C_0) -полугруппа в алгебре X^- ; $u \in X^- \Rightarrow f(\cdot, u(\cdot)) \in X^-$. Генератором $T^-(t)$ является $-\frac{d}{dt}$ и, применяя теорему 2, получаем решение $u_2(x)$ задачи (6) на $[x_0; b]$.

Осталось заметить, что в силу равенства: $u'_1(x_0 - 0) = f(x_0, 0) = u'_2(x_0 + 0)$ функция $u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \leq x_0 \\ u_2(x), & x \geq x_0 \end{cases}$ является решением задачи (6). □

На втором этапе рассмотрим классическую теорему Пикара.

Следствие 2. Пусть функция $f : D = [x_0 - a; x_0 + a] \times [u_0 - b; u_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: а) $\forall u : f(\cdot, u)$ непрерывна по первому аргументу; б) $\exists C > 0 \forall x, \forall u, v : |f(x, u) - f(x, v)| \leq C|u - v|$.

Тогда задача (6) имеет и притом единственное решение на отрезке $[x_0 - h; x_0 + h]$, где $h = \min(a, \frac{b}{M})$, $M = \max_D |f(x, u)|$.

Доказательство. Продолжим функцию f с прямоугольника D на полосу $[x_0 - a; x_0 + a] \times \mathbb{R}$ с сохранением условий а) и б) следствия. Продолжение f_1 функции f может быть получено, например, так:

$$f_1(x, u) = \begin{cases} f(x, u_0 - b), & u < u_0 - b, \\ f(x, u), & u_0 - b \leq u \leq u_0 + b, \\ f(x, u_0 + b), & u > u_0 + b. \end{cases}$$

Тогда в силу следствия 1 задача

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u(x)); \quad u(x_0) = u_0 \quad (7)$$

имеет и притом единственное решение в пространстве $C[x_0 - a; x_0 + a]$.

При этом $(|x - x_0| \leq h) \Rightarrow (|u(x) - u_0| \leq b)$, а потому сужение $u(x)$ на отрезок $[x_0 - h; x_0 + h]$ даёт решение задачи (6). Замечание о том, что любое решение задачи (6) на $[x_0 - h; x_0 + h]$ является одновременно решением задачи (7), доказывает независимость от способа продолжения функции f , а, следовательно, единственность и завершает доказательство следствия. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Леви П. *Конкретные проблемы функционального анализа*. – М.: Наука, 1967. – 512с.
- [2] Feller M.N. *The Levy Laplacian*. – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press. 2005. – 153р.
- [3] Богданский Ю.В. *Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, №6. – С. 781-784.
- [4] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярными эллиптическими операторами* // Там же. – 1989. – **41**, №5. – С. 584-590.
- [5] Богданский Ю.В. *Задача Дирихле для уравнения Пуассона с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором* // Там же. – 1994. – **46**, №7. – С. 803-808.
- [6] Bogdanskyy Yu.V., Dalecky Yu.L. *Cauchy problem for the simplest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator* // Suppl. to chapters IV, V in book: Dalecky Yu.L., Fomin S.V. *Measures and differential equations in infinite-dimensional space*. – Amsterdam – New York: Kluwer Acad. Publ., 1991. – P. 309-322.
- [7] Bogdanskyy Yu.V. *Essentially infinite-dimensional elliptic operators and P. Levy's problem* // Methods of functional analysis and topology. – 1999. – V. 5, №4. – P. 28-36.
- [8] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. *Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье* // Труды Моск. матем. об-ва. – 1972. – Т. 27. – С. 247-282.
- [9] Богданский Ю.В., Статкевич В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с существенно бесконечномерными операторами (укр.)* // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №2. – С. 144-147.

Богданский Юрий Викторович, Украина, Киев, НТУУ "КПИ"

E-mail: bogd__@ukr.net

Статкевич Виталий Михайлович, Украина, Киев, НТУУ "КПИ"

E-mail: mstatckevich@yahoo.com

В.М. БРУК

ОБ ОБРАТИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ И НЕВАНЛИННОВСКОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ¹

Рассматриваются семейства максимальных и минимальных отношений, порожденных на конечном или бесконечном интервале дифференциальным выражением и неванлинновской операторной функцией. В случае регулярных концов интервала устанавливается связь между различными определениями минимального и максимального отношений. Доказывается, что если сужение максимального отношения непрерывно обратимо, то оператор, обратный к такому сужению, является интегральным (как в случае регулярных, так и в случае сингулярных концов). Полученные результаты применяются к доказательству существования характеристического оператора.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейное отношение, дифференциальное выражение, неванлинновская функция, голоморфное семейство отношений, резольвента, характеристический оператор.

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе рассматривается линейное дифференциально-операторное уравнение, которое содержит спектральный параметр λ как аргумент операторной неванлинновской функции. Этот случай охватывает уравнения с параметром λ , входящим в виде его произведения на весовую неотрицательную операторную функцию. Такие уравнения возникают, например, при решении уравнения колеблющейся нагруженной струны методом разделения переменных (см., например, монографию Ф. Аткинсона [1, глава 9]). Различные граничные задачи, связанные с уравнениями, содержащими спектральный параметр неванлинновским образом, исследовались, например, в статьях С.А. Орлова [2], Ф.С. Рофе-Бекетова [3], В.И. Храбустовского [4], [5].

В данной работе для изучения дифференциальных уравнений с неванлинновской операторной функцией применяется теория линейных отношений путем сопоставления этому уравнению голоморфных семейств минимальных и максимальных отношений. В случае регулярных концов интервала доказывается эквивалентность различных определений максимального и минимального отношений. В статье [6] рассматривались непрерывно обратимые сужения максимальных отношений и в случае регулярных концов интервала установлено, что операторы, обратные к таким сужениям, являются интегральными и дан критерий голоморфности семейства этих операторов. Эти результаты распространены здесь на случай сингулярных концов. В качестве следствия получены необходимые и достаточные условия того, чтобы семейство линейных отношений порождало характеристический оператор как в случае регулярных, так и сингулярных концов. Определение характеристического оператора дано [4], [5]. Там же доказано существование характеристического оператора. Здесь существование характеристического оператора установлено иными методами.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00276

1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим на конечном или бесконечном интервале (a, b) дифференциальное выражение l порядка r ($r = 2n$ или $r = 2n + 1$):

$$l[y] = \begin{cases} \sum_{k=1}^n (-1)^k \{ (p_{n-k} y^{(k)})^{(k)} - i[(q_{n-k} y^{(k)})^{k-1} + (q_{n-k} y^{(k-1)})^{(k)}] \} + p_n y, \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \{ i[(q_{n-k} y^{(k)})^{(k+1)} + (q_{n-k} y^{(k+1)})^k] + (p_{n-k} y^{(k)})^{(k)} \}. \end{cases}$$

Коэффициенты этого выражения являются ограниченными самосопряженными операторами в пространстве H , причем $p_0(t)$ (при $r = 2n$) и $q_0(t)$ (при $r = 2n + 1$) имеют всюду определенные ограниченные обратные при почти всех $t \in (a, b)$. Квазипроизводные для выражения l определены в [7]. Предполагается, что функция q_0 (при $r = 2n + 1$) сильно непрерывно дифференцируема, функции p_j, q_k сильно непрерывны, и нормы операторов

$$p_0^{-1}(t), p_0^{-1}(t)q_0(t), q_0(t)p_0^{-1}(t)q_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t), q_0(t), \dots, q_{n-1}(t) \quad (\text{в случае } r = 2n),$$

$$q'_0(t), q_1(t), \dots, q_n(t), p_0(t), \dots, p_n(t) \quad (\text{в случае } r = 2n + 1)$$

являются интегрируемыми функциями на каждом замкнутом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Конец a называется регулярным, если $a > -\infty$, в качестве α можно взять a , и норма введенных ниже операторов $C_\lambda(t)$ – интегрируемая функция на каждом интервале $[a, \beta]$ ($\beta < b$). В противном случае конец a называется сингулярным. Аналогично определяется регулярность или сингулярность конца b .

Пусть $C_\lambda = C_\lambda(t)$ – функция со значениями в множестве ограниченных операторов в H и удовлетворяющая следующим условиям из [5]:

(а) существуют такие множества $\mathbb{C}_0 \supset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^1$ и $\mathcal{I}_0 \subset (a, b)$, что мера множества $(a, b) \setminus \mathcal{I}_0$ равна нулю и для каждой точки множества $\mathbb{C}_0$ найдется независимая от $t \in \mathcal{I}_0$ окрестность, в которой функция $C_\lambda(t)$ голоморфна по λ ;

(б) при любом $\lambda \in \mathbb{C}_0$ функция C_λ локально интегрируема по Бохнеру в равномерной операторной топологии;

(с) $C_\lambda^*(t) = C_{\bar{\lambda}}(t)$ и $\text{Im } C_\lambda(t)/\text{Im } \lambda$ является неотрицательным оператором при всех $t \in \mathcal{I}_0$ и всех λ таких, что $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Пусть $\mathcal{B}_\lambda(t) = \text{Re } C_\lambda(t)$, $\mathcal{A}_\lambda(t) = \text{Im } C_\lambda(t)$. Условие (с) влечет $\mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(t) = \mathcal{B}_\lambda(t)$, $\mathcal{A}_{\bar{\lambda}}(t) = -\mathcal{A}_\lambda(t)$. При $\text{Im } \lambda \neq 0$ положим $\mathbf{a}_\lambda(t) = \mathcal{A}_\lambda(t)/\text{Im } \lambda$. Из условия (с) следует также, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}_0 \cap \mathbb{R}$ существует $\lim_{\lambda \rightarrow \zeta \pm i0} \mathbf{a}_\lambda(t)$, обозначаемый $\mathbf{a}_\zeta(t)$. Функция $\mathbf{a}_\zeta$ локально интегрируема [5].

Обозначим

$$l_\lambda[y] = l[y] - C_\lambda y, \quad \tilde{l}[y] = l[y] - \mathcal{B}_{\mu_0} y,$$

где $\mu_0 \in \mathbb{C}_0$ фиксировано. Отметим, что выражение $\tilde{l}$ формально самосопряженное и для любой функции y выражения $l_\lambda, l, \tilde{l}$ одновременно имеют или не имеют смысл; при этом для этих выражений совпадают все квазипроизводные до порядка $r - 1$ включительно.

Пусть $W_{j,\lambda}(t), W_j(t, \mu_0)$ – операторные решения уравнений $l_\lambda[y] = 0, \tilde{l}[y] = 0$ соответственно, удовлетворяющие начальным условиям: $W_{j,\lambda}^{[k-1]}(t_0) = W_j^{[k-1]}(t_0, \mu_0) = \delta_{j,k} E$, где $t_0 \in (a, b)$, $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера, E – тождественный оператор, $j, k = 1, \dots, r$. Обозначим через $W_\lambda(t), W(t, \mu_0)$ – операторные однострочные матрицы $W_\lambda(t) = (W_{1,\lambda}(t), \dots, W_{r,\lambda}(t))$, $W(t, \mu_0) = (W_1(t, \mu_0), \dots, W_r(t, \mu_0))$.

При фиксированных t, λ операторы $W_\lambda(t), W(t, \mu_0)$ ограничены и отображают пространство H^r в H . Сопряженные к ним операторы $W_\lambda^*(t), W^*(t, \mu_0)$ непрерывно действуют из H в H^r . При фиксированном t функция $W_\lambda(t)$ голоморфна на $\mathbb{C}_0$.

Для выражений $l, l_\lambda, \tilde{l}$ при $r = 2n$ и при $r = 2n + 1$ введем в рассмотрение операторные матрицы J_{2n} и J_{2n+1} порядков $2n$ и $2n + 1$ соответственно. В этих матрицах на побочной диагонали в первых n строках стоят операторы $-E$, в последних n строках стоят E . В матрице J_{2n+1} на пересечении $n + 1$ -строки и $n + 1$ -столбца стоит элемент $2iq_0^{-1}(t)$. Остальные элементы этих матриц равны нулю.

Общее решение уравнений $l_\lambda[y] = f$, $\tilde{l}[z] = g$ где f, g – локально интегрируемые на (a, b) функции, представимы соответственно в виде (см., например, [6], [8])

$$y(t) = W_\lambda(t) \left(c + J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W_\lambda^*(s) f(s) ds \right), \quad (1)$$

$$z(t) = W(t, \mu_0) \left(c + J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W^*(s, \mu_0) g(s) ds \right). \quad (2)$$

Зафиксируем какое-либо $\lambda_0 \in \mathbb{C}_0$ и в целях сокращения записи обозначим $A(t) = \mathbf{a}_{\lambda_0}(t)$. На множестве непрерывных финитных на интервале (a, b) функций со значениями в H введем квазискалярное произведение

$$(y, z)_A = \int_a^b (A(t)y(t), z(t)) dt. \quad (3)$$

Отождествляя с нулем те функции y , для которых $(y, y)_A = 0$, а затем производя пополнение, получим гильбертово пространство, которое обозначим $\mathfrak{H} = L_2(H, A(t); a, b)$. Элементами пространства $\mathfrak{H}$ являются классы функций, отождествленных между собой по норме

$$\|y\|_A = \left(\int_a^b \|A^{1/2}(t)y(t)\|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Чтобы излишне не усложнять терминологию, класс функций с представителем y обозначаем тем же символом, а про функцию y будем говорить, что y принадлежит $\mathfrak{H}$. Равенства между функциями из $\mathfrak{H}$ понимаются как равенства соответствующих классов эквивалентности. Из [5] вытекает, что пространство $\mathfrak{H}$ не зависит от выбора точки λ в следующем смысле: если в (3) $A(t) = \mathbf{a}_{\lambda_0}(t)$ заменить на $\mathbf{a}_\lambda(t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}_0$) или на $\mathcal{A}_\lambda(t)$ ($\text{Im} \lambda > 0$), то получится то же множество $\mathfrak{H}$ с эквивалентной нормой.

Множество $G(t) = \ker \mathbf{a}_\lambda(t)$ ($t \in \mathcal{I}_0$) не зависит от $\lambda \in \mathbb{C}_0$ [5]. Через $H(t)$ обозначим ортогональное дополнение в H к $G(t)$, $H(t) = H \ominus G(t)$; $A_0(t)$ – сужение оператора $A(t)$ на $H(t)$. Пусть $H_{-1/2}(t)$ – пополнение $H(t)$ по норме $(A_0(t)x, x)^{1/2}$. Пространство $H_{-1/2}(t)$ можно считать негативным относительно $H(t)$ [9, с. 59]. Соответствующее положительное пространство обозначим $H_{1/2}(t)$. Из [5] следует, что цепочка $H_{1/2}(t) \subset H(t) \subset H_{-1/2}(t)$ не зависит от замены $A(t)$ на $\mathbf{a}_\lambda(t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}_0$) или на $\mathcal{A}_\lambda(t)$ ($\text{Im} \lambda > 0$) в том смысле, что при такой замене множества $H_{1/2}(t)$, $H_{-1/2}(t)$ не меняются, а нормы в них заменяются на эквивалентные, причем постоянные в неравенствах между нормами не зависят от $t \in \mathcal{I}_0$.

Из определения позитивных и негативных пространств вытекает, что оператор $A_0(t)$ допускает непрерывное расширение $\tilde{A}_0(t)$ на пространство $H_{-1/2}(t)$. Расширенный оператор $\tilde{A}_0(t)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $H_{-1/2}(t)$ на $H_{1/2}(t)$. Через $\tilde{A}(t)$ обозначим оператор, определенный на $H_{-1/2}(t) \oplus G(t)$ и равный $\tilde{A}_0(t)$ на $H_{-1/2}(t)$ и нулю на $G(t)$. Очевидно, $\tilde{A}(t)$ – расширение $A(t)$.

В [10] доказано, что пространства $H_{-1/2}(t)$ являются измеримыми по параметру t [11, с. 28], если в качестве семейства измеримых функций взять множество функций вида $\tilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/2}(t)h(t)$, где $h(t)$ – измеримые функции со значениями в пространстве H . Пространство $\mathfrak{H}$ является измеримой суммой пространств $H_{-1/2}(t)$ и состоит из элементов (т.е. классов функций) с представителями вида $\tilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/2}(t)h(t)$, где $h(t) \in L_2(H; a, b)$ [10].

Положим $\mathcal{B}_{\lambda, \mu}(t) = \mathcal{B}_\lambda(t) - \mathcal{B}_\mu(t)$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_0$, $t \in \mathcal{I}_0$. Из [5] следует, что $G(t) = \ker \mathbf{a}_\lambda(t) \subset \ker \mathcal{B}_{\lambda, \mu}(t)$. Поэтому $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{B}_{\lambda, \mu}(t))} \subset \overline{\mathcal{R}(\mathbf{a}_\lambda(t))} = H(t)$. Через $\mathcal{B}_{\lambda, \mu}^{(0)}(t)$ ($\mathcal{A}_\lambda^{(0)}(t)$) обозначим сужение $\mathcal{B}_{\lambda, \mu}(t)$ ($\mathcal{A}_\lambda(t)$ соответственно) на $H(t)$. В [6] доказано, что операторы $\mathcal{B}_{\lambda, \mu}^{(0)}(t)$, $\mathcal{A}_\lambda^{(0)}(t)$ допускают расширения $\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu}^{(0)}(t)$, $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda^{(0)}(t)$ по непрерывности на пространство $H_{-1/2}(t)$ и расширенные операторы непрерывно отображают $H_{-1/2}(t)$ в $H_{1/2}(t)$ (оператор $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda^{(0)}(t) : H_{-1/2}(t) \rightarrow H_{1/2}(t)$ – биекция). Через $\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu}(t)$, $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda(t)$ обозначим операторы, определенные на $H_{-1/2}(t) \oplus G(t)$ и равные соответственно $\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu}^{(0)}(t)$, $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda^{(0)}(t)$ на $H_{-1/2}(t)$ и нулю на

$G(t)$. Положим $\tilde{C}_{\lambda,\mu}(t) = \tilde{B}_{\lambda,\mu}(t) + i\tilde{A}_{\lambda}(t) - i\tilde{A}_{\mu}(t)$. Оператор $\tilde{C}_{\lambda,\mu}(t)$ является расширением $C_{\lambda,\mu}(t)$. Через $\tilde{C}_{\lambda,\mu}$, $\tilde{B}_{\lambda,\mu}$, $\tilde{A}_{\lambda}$ обозначим операторы

$$y(t) \rightarrow \tilde{A}_0^{-1}(t)\tilde{C}_{\lambda,\mu}(t)y(t), \quad y(t) \rightarrow \tilde{A}_0^{-1}(t)\tilde{B}_{\lambda,\mu}(t)y(t), \quad y(t) \rightarrow \tilde{A}_0^{-1}(t)\tilde{A}_{\lambda}(t)y(t)$$

соответственно. Операторы $\tilde{C}_{\lambda,\mu}$, $\tilde{B}_{\lambda,\mu}$, $\tilde{A}_{\lambda}$ рассматриваются в пространстве $\mathfrak{H}$. Следующая теорема доказана в [6].

Теорема 1. Операторы $\tilde{C}_{\lambda,\mu}$, $\tilde{B}_{\lambda,\mu}$, $\tilde{A}_{\lambda}$ при фиксированных $\lambda, \mu \in \mathbb{C}_0$ ограничены в пространстве $\mathfrak{H}$. Операторная функция $\{\lambda, \mu\} \rightarrow \tilde{C}_{\lambda,\mu}$ при фиксированном λ или μ голоморфна в $\mathfrak{H}$ по другой переменной на $\mathbb{C}_0$. Операторные функции $\lambda \rightarrow \tilde{A}_{\lambda}$, $\lambda \rightarrow \tilde{B}_{\lambda,\mu}$ непрерывны по λ, μ в равномерной операторной топологии на $\mathbb{C}_0$.

2. МИНИМАЛЬНЫЕ И МАКСИМАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ – банаховы пространства. Под линейным отношением T понимается любое линейное многообразие $T \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$. Терминология, связанная с линейными отношениями, имеется, например, в [9], [13]. Далее используются обозначения: $\{x_1, x_2\}$ – упорядоченная пара, составленная из элементов x_1, x_2 ; $\ker T$ – множество таких элементов x , что пара $\{x, 0\} \in T$; $\mathcal{D}(T)$ – область определения, $\mathcal{R}(T)$ – область значений отношения T . Отношение T называется обратимым (непрерывно обратимым), если отношение T^{-1} является оператором (всюду определенным ограниченным оператором). Линейные операторы считаются линейными отношениями, поэтому записи $S \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, $\{x_1, x_2\} \in S$ используются и для операторов S . Все отношения (и операторы), встречающиеся в дальнейшем, считаются линейными, поэтому слово "линейное" часто будет опускаться.

Под семейством линейных многообразий в банаховом пространстве $\mathbf{B}$ понимается функция $\lambda \rightarrow \mathcal{T}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$), значениями которой являются линейные многообразия $\mathcal{T}(\lambda) \subset \mathbf{B}$. Семейство подпространств (замкнутых) $\mathcal{T}$ называется голоморфным в точке $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, если существуют такое банахово пространство $\mathbf{B}_0$ и такое голоморфное в окрестности λ_1 семейство $\lambda \rightarrow \mathcal{K}(\lambda)$ ограниченных линейных операторов $\mathcal{K}(\lambda) : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}$, что при каждом фиксированном λ оператор $\mathcal{K}(\lambda)$ взаимно однозначно отображает $\mathbf{B}_0$ на $\mathcal{T}(\lambda)$. Семейство подпространств называется голоморфным в области $\mathcal{D}$, если оно голоморфно в каждой точке области $\mathcal{D}$. Поскольку замкнутое линейное отношение $T(\lambda)$ является подпространством в $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, то определение голоморфности относится и к семействам линейных отношений. Это определение обобщает соответствующее определение голоморфных семейств замкнутых операторов [14, с. 460].

Минимальное и максимальное отношения, порожденные выражением l_{λ} , определим следующим образом. Через $L'_0(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}_0$) обозначим отношение, состоящее из тех и только тех пар $\{y, f\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, которые удовлетворяют условиям: (а) y – финитная функция такая, что квазипроизводные $y^{[k]}$ существуют, абсолютно непрерывны до порядка $r - 1$ включительно; (б) $l_{\lambda}[y](t) = A(t)f(t)$ при почти всех t . Замыкание отношения $L'_0(\lambda)$ обозначим $L_0(\lambda)$ и назовем минимальным отношением. Отношение $L(\lambda) = (L_0(\lambda))^*$ назовем максимальным.

В [6] доказано, что семейства $\lambda \rightarrow L_0(\lambda)$, $\lambda \rightarrow L(\lambda)$ голоморфны на $\mathbb{C}_0$. Доказательство основано на теореме 1 и на равенстве $L_0(\lambda) = L_0(\mu) + \tilde{C}_{\lambda,\mu}$.

Нам понадобятся также отношения Λ'_0 , $\Lambda_0 = \overline{\Lambda'_0}$, $\Lambda = \Lambda_0^*$, порожденные формально самосопряженным выражением $l - \mathcal{B}_{\mu_0}$, где $\mu_0 \in \mathbb{C}_0$ фиксировано. Эти отношения определяются таким же образом, как и отношения $L'_0(\lambda)$, $L_0(\lambda)$, $L(\lambda)$ соответственно с заменой l_{λ} на $l - \mathcal{B}_{\mu_0}$. В силу теоремы 1 введенные выше отношения связаны между собой равенствами

$$L'_0(\lambda) = \Lambda'_0 + \tilde{\mathcal{B}}_{\mu_0,\lambda} - \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda}, \quad L(\lambda) = \Lambda + \tilde{\mathcal{B}}_{\mu_0,\lambda} - \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda}, \quad L_0(\lambda) = \Lambda_0 + \tilde{\mathcal{B}}_{\mu_0,\lambda} - \tilde{\mathcal{A}}_{\lambda}. \quad (5)$$

Введем отношение $\tilde{L}'(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}_0$), порожденное отношением l_{λ} , как отношение, состоящее из пар $\{y, f\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, удовлетворяющих тем же условиям (а), (б), что и пары из $L'_0(\lambda)$, за исключением условия финитности функции y . Замыкание отношения $\tilde{L}'(\lambda)$ обозначим $\tilde{L}(\lambda)$. В случае, когда оба конца интервала (a, b) регулярны, определим отношение $\tilde{L}_0(\lambda)$ как сужение отношения $\tilde{L}'(\lambda)$ на множество функций y , удовлетворяющих условиям $y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, r - 1$). Аналогичным образом, определим отношения $\tilde{\Lambda}'$, $\tilde{\Lambda}$

(замыкание $\tilde{\Lambda}'$), $\tilde{\Lambda}_0$, порожденные выражением $l - \mathcal{B}_{\mu_0}$. Из теоремы 1 вытекает справедливость равенств

$$\tilde{L}'(\lambda) = \tilde{\Lambda}' + \tilde{\mathbf{B}}_{\mu_0, \lambda} - \tilde{\mathbf{A}}_\lambda, \quad \tilde{L}(\lambda) = \tilde{\Lambda} + \tilde{\mathbf{B}}_{\mu_0, \lambda} - \tilde{\mathbf{A}}_\lambda, \quad \tilde{L}_0(\lambda) = \tilde{\Lambda}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_{\mu_0, \lambda} - \tilde{\mathbf{A}}_\lambda. \quad (6)$$

Через Q_0 обозначим множество элементов $c \in H^r$, для которых функция $W_\mu(t)c$ ($\mu \in \mathbb{C}_0$) отождествлена с нулем в пространстве $\mathfrak{H}$, т.е. $\|A(t)W_\mu(t)c\| = 0$ почти всюду. Равенства (1), (2) влекут

$$W_\mu(t)c = W_\lambda(t)c + W_\lambda(t)J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W_\lambda^*(s) \mathcal{C}_{\mu\lambda}(s) W_\mu(s) c ds, \quad (7)$$

$$W(t, \mu_0)c = W_\mu(t)c + W_\mu(t)J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W_\mu^*(s) (\mathcal{B}_{\mu_0}(s) - \mathcal{C}_\mu(s)) W(s, \mu_0) c ds, \quad (8)$$

$$W_\mu(t)c = W(t, \mu_0)c + W(t, \mu_0)J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W^*(s, \mu_0) (\mathcal{C}_\mu(s) - \mathcal{B}_{\mu_0}(s)) W_\mu(s) c ds. \quad (9)$$

Отсюда следует, что множество Q_0 не изменится, если в определении Q_0 заменить $W_\mu(t)$ на $W_\lambda(t)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}_0$) или на $W(t, \mu_0)$.

Пусть Q – ортогональное дополнение в H^r к Q_0 , $Q = H^r \ominus Q_0$. В случае регулярности концов интервала (a, b) введем в Q норму

$$\|c\|_- = \left(\int_a^b \|A^{1/2}(s)W_\mu(s)c\|^2 ds \right)^{1/2} \leq k \|c\|, \quad c \in Q, \quad k > 0. \quad (10)$$

Полное дополнение Q по этой норме обозначим Q_- . Из равенств (7) – (9) следует, что замена в (10) $W_\mu(s)$ на $W_\lambda(s)$ или на $W(s, \mu_0)$ приводит к тому же множеству Q_- с эквивалентной нормой. Пространство Q_- можно рассматривать как пространство с негативной нормой относительно Q [9, с. 59]. Соответствующее пространство с позитивной нормой обозначим Q_+ .

Из изложенного следует, что оператор $c \rightarrow W_\lambda(t)c$, обозначаемый $\mathcal{W}_\lambda$, непрерывно и взаимно однозначно отображает Q_- в $\mathfrak{H}$ и его область значений замкнута. Поэтому сопряженный к $\mathcal{W}_\lambda$ оператор $\mathcal{W}_\lambda^*$ непрерывно отображает $\mathfrak{H}$ на Q_+ . В [6] доказано, что оператор $\mathcal{W}_\lambda^*$ имеет вид $\mathcal{W}_\lambda^* f = \int_a^b W_\lambda^*(s) \tilde{A}(s) f(s) ds$. Заменим здесь λ на $\bar{\lambda}$ и сведем свойства операторов $\mathcal{W}_\lambda$, $\mathcal{W}_\lambda^*$ в следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть оба конца интервала (a, b) регулярны. При фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}_0$ оператор $\mathcal{W}_\lambda$ непрерывно, взаимно однозначно отображает Q_- в $\mathfrak{H}$ и имеет замкнутую область значений. Оператор $\mathcal{W}_\lambda^*$ непрерывно отображает $\mathfrak{H}$ на Q_+ . Операторные функции $\lambda \rightarrow \mathcal{W}_\lambda$, $\lambda \rightarrow \mathcal{W}_\lambda^*$ голоморфны на $\mathbb{C}_0$.

Теорема 2. Пусть оба конца интервала (a, b) регулярны. Тогда справедливы равенства

$$\tilde{L}(\lambda) = L(\lambda), \quad \tilde{L}_0(\lambda) = L_0(\lambda). \quad (11)$$

Доказательство. Из теоремы 1 и равенств (5), (6) следует, что каждое из равенств (11) выполняется одновременно с соответствующим равенством

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda, \quad \tilde{\Lambda}_0 = \Lambda_0. \quad (12)$$

Отношение $\tilde{\Lambda}_0$ замкнуто [8]. Поэтому $\Lambda_0 = \overline{\Lambda_0} \subset \tilde{\Lambda}_0$. Докажем обратное включение. Достаточно установить, что $\Lambda_0^* = (\Lambda_0')^* \subset (\tilde{\Lambda}_0')^*$. В [8] доказано равенство $(\tilde{\Lambda}_0)^* = \tilde{\Lambda}$. Следовательно, для доказательства второго равенства (12) нужно убедиться в справедливости включения $\Lambda = (\Lambda_0')^* \subset \tilde{\Lambda}$. Тем самым будет доказано и первое равенство (12).

Пусть Δ – произвольный отрезок, $\Delta = [\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Определим отношения $\tilde{\Lambda}_{0, \Delta}$, $\tilde{\Lambda}_\Delta$, порожденные выражением $l - \mathcal{B}_{\mu_0}$ на отрезке Δ , таким же образом, как $\tilde{\Lambda}_0$, $\tilde{\Lambda}$ на отрезке $[a, b]$. Тогда $(\tilde{\Lambda}_{0, \Delta})^* = \tilde{\Lambda}_\Delta$ [8]. Если пара $\{z, f\} \in \tilde{\Lambda}_{0, \Delta}$, то $z^{[k]}(\alpha) = z^{[k]}(\beta) = 0$ ($k = 0, \dots, r-1$). Продолжим функции z, f нулем вне Δ . (Здесь за продолженными и суженными функциями

сохраняем прежние обозначения.) Квазипроизводные $z^{[k]}$ абсолютно непрерывны на (a, b) . Поэтому $z \in \mathcal{D}(\Lambda'_0)$ и пара $\{z, f\} \in \Lambda'_0$. Для любой пары $\{u, v\} \in (\Lambda'_0)^* = \tilde{\Lambda}$ имеем

$$(f, u)_{L_2(H, A(t); \Delta)} = (z, v)_{L_2(H, A(t); \Delta)}.$$

Отсюда и из равенства $\tilde{\Lambda}_{0, \Delta}^* = \tilde{\Lambda}_\Delta$ вытекает, что $\{u, v\} \in \tilde{\Lambda}_\Delta$. В [8] установлено, что пара $\{z_0, f_0\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит отношению $\tilde{\Lambda}$, когда

$$z_0(t) = W(t, \mu_0)x + W(t, \mu_0)J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W^*(s, \mu_0) \tilde{A}(s) f_0(s) ds, \quad (13)$$

где $x \in Q_-$. Поэтому

$$u(t) = W(t, \mu_0)x_\Delta + W(t, \mu_0)J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W^*(s, \mu_0) \tilde{A}(s) v(s) ds \quad (t \in \Delta), \quad (14)$$

где $x_\Delta \in Q_-(\Delta)$, пространство $Q_-(\Delta)$ строится на отрезке Δ так же, как Q_- на отрезке $[a, b]$. Отметим, что $u \in \mathfrak{H}$, так как $u \in \mathcal{D}((\Lambda'_0)^*)$. Обозначим

$$u_0(t) = u(t) - W(t, \mu_0)J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W^*(s, \mu_0) \tilde{A}(s) v(s) ds.$$

Тогда $u_0 \in \mathfrak{H}$ и на любом отрезке $\Delta \subset (a, b)$ функция u_0 совпадает в пространстве $L_2(H, A(t); \Delta)$ с функцией $W(t, \mu_0)x_\Delta$. Следовательно, $\|x_\Delta\|_{Q_-(\Delta)} \leq \|u_0\|_{\mathfrak{H}}$.

Пусть последовательность отрезков $\Delta_n = [\alpha_n, \beta_n] \subset (a, b)$ ($n \in \mathbb{N}$) такова, что $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ и $\alpha_n \rightarrow a$, $\beta_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда на каждом отрезке Δ_n справедливо равенство (14), в котором Δ заменяется на Δ_n . Докажем существование такого элемента $x \in Q_-$, что функция $\tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x$ совпадает с $\tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x_{\Delta_n}$ на любом интервале Δ_n . Тогда по формуле (13) пара $\{u, v\} \in \tilde{\Lambda}$. Как отмечено выше, можно считать, что в (10) $W_\mu(s)$ заменено на $W(s, \mu_0)$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ выберем такой элемент $x_n \in Q$, что в пространстве $Q_-(\Delta_n)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|x_{\Delta_n} - x_n\|_{Q_-(\Delta_n)} &= \left(\int_{\Delta_n} \left\| \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x_{\Delta_n} - \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x_n \right\|^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_{\Delta_n} \left\| \tilde{A}^{1/2}(t)u_0(t) - \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x_n \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq 2^{-n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена в Q_- . Пусть существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$, для которой $\|x_{n_j}\|_{Q_-} \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Из (15) и из неравенства $\|x_{\Delta_n}\|_{Q_-(\Delta_n)} \leq \|u_0\|_{\mathfrak{H}}$ следует, что $\|x_{n_j}\|_{Q_-(\Delta_{n_j})} \leq 2\|u_0\|_{\mathfrak{H}}$. Отсюда и из интегрируемости нормы $\|\tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)\|$ на $[a, b]$ вытекает, что последовательность $\{\|x_{n_j}\|_{Q_-}^{-1} x_{n_j}\}$ сходится в пространстве Q_- к нулю, а это невозможно. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограничена в Q_- .

Из ограниченности $\{x_n\}$ и из интегрируемости на $[a, b]$ функции $\|\tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)\|$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m > N$ выполняется неравенство

$$\int_{[a, b] \setminus \Delta_N} \left\| \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x_n - \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x_m \right\|^2 dt < \varepsilon.$$

Отсюда и из (15) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, при котором неравенство $\|x_n - x_m\|_{Q_-}^2 < \varepsilon$ справедливо для всех $n, m > N$.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в Q_- . Поэтому в пространстве Q_- существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left\| \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x_n - \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x \right\|^2 dt = 0.$$

Отсюда и из неравенства (15) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \left\| \tilde{A}^{1/2}(t)u_0(t) - \tilde{A}^{1/2}(t)W(t, \mu_0)x \right\|^2 dt \rightarrow 0.$$

Это влечет равенство $u_0(t) = W(t, \mu_0)x$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Из (13) получаем, что пара $\{u, v\} \in \tilde{\Lambda}$. Таким образом, $\Lambda = (\Lambda'_0)^* \subset \tilde{\Lambda}$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Если пространство Q_- является подпространством в H^r , равенства (12) установлены в [10] как в случае регулярных, так и сингулярных концов. (Очевидно, если пространство H конечномерно, то Q_- – всегда подпространство в H^r .) В случае регулярных концов в [8] доказано равенство $\tilde{\Lambda} = (\tilde{\Lambda}_0)^*$. В этих работах изучались линейные отношения, порожденные формально самосопряженным выражением.

3. ОБРАТИМЫЕ СУЖЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ В СЛУЧАЕ СИНГУЛЯРНЫХ КОНЦОВ

В [6] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть оба конца интервала (a, b) регулярны и отношение $\hat{L}(\lambda)$ таково, что $L_0(\lambda) \subset \hat{L}(\lambda) \subset L(\lambda)$. Если отношение $\hat{L}(\lambda)$ непрерывно обратимо, то оператор $R_\lambda = \hat{L}^{-1}(\lambda)$ является интегральным

$$R_\lambda g = \int_a^b K_\lambda(t, s) \tilde{A}(s) g(s) ds \quad (g \in \mathfrak{H}) \quad (16)$$

с ядром

$$K_\lambda(t, s) = W_\lambda(t)(M(\lambda) - (1/2)\operatorname{sgn}(s - t)J_r^{-1}(t_0))W_\lambda^*(s),$$

где $M(\lambda) : Q_+ \rightarrow Q_-$ – непрерывный оператор. Функция $\lambda \rightarrow R_\lambda$ ($\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}_0$) тогда и только тогда голоморфна в точке $\lambda_1 \in \mathcal{D}$, когда при любом $x \in Q_+$ функция $\lambda \rightarrow M(\lambda)x$ голоморфна в той же точке. Равенства $R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}}$, $M^*(\lambda) = M(\bar{\lambda})$ выполняются или нет одновременно.

Перенесем эту теорему на случай сингулярных концов.

Построим область определения и область значений оператора $M(\lambda)$. Пусть $[\alpha_n, \beta_n]$ – последовательность таких интервалов, что $[\alpha_n, \beta_n] \subset (\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$ и $\alpha_n \rightarrow a$, $\beta_n \rightarrow b$ ($n \in \mathbb{N}$) в случае сингулярности обоих концов a, b . Если же один из концов, например, a регулярен, то берем $\alpha_n = a$, и $[a, \beta_n] \subset [a, \beta_{n+1})$, $\beta_n \rightarrow b$. Аналогично поступаем в случае регулярности конца b . На множестве Q введем систему полунорм

$$p_n(x) = \left(\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \left\| A^{1/2}(s)W_\mu(s)c \right\|^2 ds \right)^{1/2}, \quad \mu \in \mathbb{C}_0, \quad c \in Q. \quad (17)$$

Пополнение Q по этой системе является отделимым локально выпуклым пространством, которое обозначим Q_- . Из равенства (7) так же как в [6], получим, что пространство Q_- не зависит от выбора точки $\mu \in \mathbb{C}_0$ в том смысле, что при замене μ на $\lambda \in \mathbb{C}_0$ получится изоморфное пространство [15, с. 24]. Пространство Q_- изоморфно проективному пределу построенных ниже банаховых пространств $Q_-(n)$ (см. [15, с. 71, доказательство 5.4]). Пусть $Q_+(n)$ – пространство, сопряженное к $Q_-(n)$, Q_+ – индуктивный предел пространств $Q_+(n)$. Тогда Q_+ будет областью определения характеристического оператора $M(\lambda)$, а Q_- – областью значений. Для доказательства свойств $M(\lambda)$ опишем эту конструкцию более

подробно. Поскольку эта конструкция незначительно отличается от соответствующих построений из [12], то детали рассуждений пропускаются.

Обозначим $\mathfrak{H}_n = L_2(H, A(t); \alpha_n, \beta_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $Q_0(n)$ – множество таких элементов $c \in Q$, что функция $W_\lambda(t)c$ отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}_n$, $Q(n) = Q \ominus Q_0(n)$. Тогда $Q_0(n) \subset Q_0(m)$ и $Q(n) \supset Q(m)$ при $n > m$. На множестве $Q(n)$ введем полунорму по формуле (17). Эта полунорма на $Q(n)$ является нормой. Обозначим ее $\|\cdot\|_-^{(n)}$. Если $m < n$, $c \in Q(m)$, то $\|c\|_-^{(m)} \leq \|c\|_-^{(n)}$. Пополнение $Q(n)$ по норме $\|\cdot\|_-^{(n)}$ обозначим $Q_-(n)$.

Определим отображения $h_{mn}: Q_-(n) \rightarrow Q_-(m)$ ($n > m$) следующим образом. Обозначим $Q(n, m) = Q(n) \ominus Q(m)$. Для любых элементов $c_1 \in Q(m)$, $c_0 \in Q(n, m)$ положим $h_{mn}c_1 = c_1$, $h_{mn}c_0 = 0$. Тогда, учитывая, что $p_m(c_0) = 0$, получим

$$\|h_{mn}(c_1 + c_0)\|_-^{(m)} = \|c_1\|_-^{(m)} = p_m(c_1) = p_m(c_1 + c_0) \leq \|(c_1 + c_0)\|_-^{(n)}.$$

Отсюда следует, что отображение h_{mn} допускает продолжение по непрерывности с множества Q на все пространство $Q_-(n)$.

Введем в рассмотрение проективный предел $\lim(pr)h_{mn}Q_-(n)$ семейства пространств $\{Q_-(n); n \in \mathbb{N}\}$ относительно отображений h_{mn} ($m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$) [15, с. 70]. Повторением соответствующих рассуждений из [15, с. 71, доказательство 5.4], можно доказать, что этот проективный предел изоморфен введенному выше пространству Q_- . Пространство Q_- является пространством Фреше [15, с. 72].

Согласно определению проективного предела, Q_- – это подпространство произведения $\prod_n Q_-(n)$, состоящее из элементов $c = \{c_n\}$, удовлетворяющих равенству $c_m = h_{mn}c_n$ для всех $m \leq n$. Пространство $Q_-(n)$ можно рассматривать как пространство с негативной нормой относительно $Q(n)$ [9, с. 59]. Соответствующее пространство с позитивной нормой обозначим $Q_+(n)$. При $m \leq n$ пространство $Q_+(m)$ непрерывно вкладывается в $Q_+(n)$. Сопряженное к h_{mn} отображение $h_{mn}^+: Q_+(m) \rightarrow Q_+(n)$ является вложением (непрерывным) $Q_+(m)$ в $Q_+(n)$ ($m \leq n$). Через Q_+ обозначим индуктивный предел [15, с. 76] семейства $\{Q_+(n); n \in \mathbb{N}\}$ относительно отображений h_{mn}^+ , т.е. $Q_+ = \lim(ind)h_{mn}^+Q_+(n)$. Согласно [15, с. 178], Q_+ является сопряженным к Q_- . Пространство Q_+ можно рассматривать как объединение $Q_+ = \cup_n Q_+(n)$ с сильнейшей топологией, при которой все вложения $Q_+(n)$ в Q_+ непрерывны [15, с. 76].

По лемме 1 оператор $c_n \rightarrow W_\lambda(t)c_n$ непрерывно, взаимно однозначно отображает $Q_-(n)$ в $\mathfrak{H}_n$ и имеет замкнутую область значений. Этот оператор обозначим $\mathcal{W}_\lambda(n)$. Из леммы 1 следует, что сопряженный к $\mathcal{W}_\lambda(n)$ оператор $\mathcal{W}_\lambda^*(n)$ непрерывно отображает $\mathfrak{H}_n$ на $Q_+(n)$ и $\mathcal{W}_\lambda^*(n)f = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_\lambda^*(s)\tilde{A}(s)f(s)ds$. Поэтому $\int_\alpha^\beta W_\lambda^*(s)\tilde{A}(s)f(s)ds \in Q_+$ для любой функции $f \in \mathfrak{H}$ и любых α, β ($a < \alpha < \beta < b$).

Пусть $c = \{c_n\} \in Q_-$. Тогда $c_m = h_{mn}c_n$ ($m \leq n$). Следовательно, сужение функции $\tilde{A}^{1/2}(t)W_\lambda(t)c_n$ на отрезок $[\alpha_m, \beta_m]$ совпадает в пространстве $\mathfrak{H}_m = L_2(H; \alpha_m, \beta_m)$ с функцией $\tilde{A}^{1/2}(t)W_\lambda(t)c_m$. В связи с этим обозначаем через $\tilde{A}^{1/2}(t)W_\lambda(t)c$ функцию, равную $\tilde{A}^{1/2}(t)W_\lambda(t)c_n$ на любом отрезке $[\alpha_n, \beta_n]$. Соответственно, $W_\lambda(t)c$ обозначает функцию со значениями в $H_{-1/2}(t) \oplus G(t)$ и совпадающую с $W_\lambda(t)c_n$ в пространстве $\mathfrak{H}_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, в пространстве $\mathfrak{H}_m$ при любом $m \leq n$ выполняется равенство $W_\lambda(t)c_n = W_\lambda(t)c_m$. Следующая лемма установлена в [6].

Лемма 2. Если пара $\{y, f\} \in L(\lambda)$, то y может быть представлена в виде

$$y = W_\lambda(t) \left(c + J_r^{-1}(t_0) \int_{t_0}^t W_\lambda^*(s)\tilde{A}(s)f(s)ds \right),$$

где $c \in Q_-$.

Теорема 4. Теорема 3 останется верной в случае сингулярных концов. При этом интеграл (16) сходится по крайней мере слабо в пространстве $\mathfrak{H}$.

Доказательство. С учетом аргументации, приведенной после теоремы 3, требуемое утверждение получается повторением доказательства основной теоремы из [12]. $\square$

Применим полученные результаты к доказательству существования характеристического оператора. Определение характеристического оператора дано в [4], [5]. Там же доказано существование характеристического оператора на основании изучения специальных граничных задач для уравнения (18) со спектральным параметром, голоморфно входящим в граничные условия. Здесь существование характеристического оператора устанавливается как следствие теорем 3, 4. Связь между характеристическими операторами и обобщенными резольвентами симметрических отношений иным способом установлена в [5].

Как отмечено выше, если в равенствах, определяющих скалярное произведение (3) и норму (4) в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(H, A(t); a, b)$, заменить $A(t) = \mathbf{a}_{\lambda_0}(t)$ на $\mathbf{a}_\lambda(t)$ ($\lambda \in \mathbb{C}_0$), то получится пространство с эквивалентной нормой (это следует из [5]). Норму в пространстве $L_2(H, \mathbf{a}_\lambda(t); a, b)$ обозначим $\|\cdot\|_{\mathbf{a}_\lambda}$, а скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{a}_\lambda}$.

Рассмотрим на интервале (a, b) уравнение

$$l_\lambda[y](t) = l[y](t) - \mathcal{C}_\lambda(t)y = \mathbf{a}_\lambda(t)f(t), \quad f \in \mathfrak{H}. \quad (18)$$

Определение. Голоморфная при $\text{Im}\lambda \neq 0$ функция $\lambda \rightarrow M(\lambda) = M^*(\bar{\lambda})$, значениями которой являются ограниченные операторы, отображающие пространство Q_+ в пространство Q_- , называется характеристическим оператором уравнения (18), если для любой финитной функции $f \in \mathfrak{H}$ с компактным носителем соответствующее решение уравнения (18)

$$y_\lambda(t) = (\mathbf{R}_\lambda f)(t) = \int_a^b W_\lambda(t)(M(\lambda) - (1/2)\text{sgn}(s-t)J_r^{-1}(t_0))W_\lambda^*(s)\mathbf{a}_\lambda(s)f(s)ds \quad (19)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{R}_\lambda f\|_{\mathbf{a}_\lambda}^2 \leq \text{Im}(\mathbf{R}_\lambda f, f)_{\mathbf{a}_\lambda} / \text{Im}\lambda \quad (\text{Im}\lambda \neq 0). \quad (20)$$

Из (20) вытекает, что для любой финитной функции $f \in \mathfrak{H}$ выполняется неравенство $\|\mathbf{R}_\lambda f\|_{\mathbf{a}_\lambda} \leq \|f\|_{\mathbf{a}_\lambda} / |\text{Im}\lambda|$ ($\text{Im}\lambda \neq 0$). Следовательно, оператор $\mathbf{R}_\lambda$ ограничен в $\mathfrak{H}$ и поэтому допускает продолжение по непрерывности на все пространство $\mathfrak{H}$. Продолженный оператор обозначаем тем же символом $\mathbf{R}_\lambda$.

Рассмотрим оператор R_λ , определенный на финитных функциях $g \in \mathfrak{H}$ с компактным носителем формулой

$$z_\lambda(t) = (R_\lambda g)(t) = \int_a^b W_\lambda(t)(M(\lambda) - (1/2)\text{sgn}(s-t)J_r^{-1}(t_0))W_\lambda^*(s)\tilde{A}(s)g(s)ds. \quad (21)$$

Положим $f(t) = (\text{Im}\lambda)\tilde{\mathcal{A}}_{0,\lambda}^{-1}(t)\tilde{A}(t)g(t)$. Из теоремы 1 следует, что функции f и g одновременно принадлежат или не принадлежат пространству $\mathfrak{H}$. Кроме того, выполняются равенства

$$g(t) = \tilde{A}_0^{-1}(t)\mathbf{a}_\lambda(t)f(t), \quad \mathbf{a}_\lambda(t)f(t) = \tilde{A}(t)g(t). \quad (22)$$

Отсюда и из (19) следует, что функция z_λ является решением уравнения

$$l[z](t) - \mathcal{C}_\lambda(t)z = \tilde{A}(t)g(t), \quad g \in \mathfrak{H}.$$

Из равенств (19), (21), (22) вытекает, что $R_\lambda g = \mathbf{R}_\lambda f$. Поэтому неравенство (20) равносильно следующему

$$\|R_\lambda g\|_{\mathbf{a}_\lambda}^2 \leq \text{Im}(R_\lambda g, g)_A / \text{Im}\lambda \quad (\text{Im}\lambda \neq 0). \quad (23)$$

Из эквивалентности норм $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_{\mathbf{a}_\lambda}$ и из (23) получаем, что оператор R_λ ограничен в пространстве $\mathfrak{H}$. Поэтому R_λ допускает расширение по непрерывности на все пространство $\mathfrak{H}$. Расширенный оператор обозначаем тем же символом R_λ .

Будем говорить, что семейство замкнутых отношений $\lambda \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$ ($\text{Im}\lambda \neq 0$) со свойством $L_0(\lambda) \subset \mathfrak{L}(\lambda) \subset L(\lambda)$ порождает характеристический оператор $M(\lambda)$, если $\mathfrak{L}^{-1}(\lambda) = R_\lambda$, где R_λ — всюду определенный оператор, заданный на финитных функциях из $\mathfrak{H}$ равенством (21).

Дадим описание семейств, которые могут порождать характеристический оператор. Обозначим через $\mathcal{F}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ множество голоморфных при $\text{Im}\lambda \neq 0$ функций $\lambda \rightarrow F(\lambda)$, значениями которых являются ограниченные операторы, отображающие $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ при $\text{Im}\lambda > 0$,

имеющие норму $\|F(\lambda)\| \leq 1$ и обладающие свойством $F(\bar{\lambda}) = F^*(\lambda)$ ($\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ – гильбертовы пространства).

Отношение Λ_0 , введенное в предыдущем разделе, является симметрическим, так как оно порождено формально самосопряженным выражением $l - \mathcal{B}_{\mu_0}$. Пусть $\mathfrak{N}_\zeta = \mathfrak{H} \ominus \mathcal{R}(\Lambda_0 - \zeta E) = \ker(\Lambda_0^* - \bar{\zeta} E)$ – дефектное подпространство отношения Λ_0 , соответствующее числу ζ ($\text{Im} \zeta \neq 0$). Рассмотрим голоморфную операторную функцию $\lambda \rightarrow F(\lambda)$ из класса $\mathcal{F}(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i})$ и обозначим через $\Lambda_{F(\lambda)}$ линейное отношение, состоящее из упорядоченных пар вида $\{y_0 + F(\lambda)z_0 - z_0, y_1 + iF(\lambda)z_0 + iz_0\}$, где $\{y_0, y_1\} \in \Lambda_0, z_0 \in \mathfrak{N}_i$. Тогда $(\Lambda_{F(\lambda)})^* = \Lambda_{F(\bar{\lambda})}$. Семейство $\lambda \rightarrow \Lambda_{F(\lambda)}$ голоморфно при $\text{Im} \lambda \neq 0$. Отношения $\Lambda_{F(\lambda)}$ являются максимальными аккумулятивными при $\text{Im} \lambda > 0$ и максимальными диссипативными при $\text{Im} \lambda < 0$. Обратно, пусть $\lambda \rightarrow \hat{\Lambda}_\lambda$ – голоморфное при $\text{Im} \lambda \neq 0$ семейство таких линейных отношений, что $\Lambda_0 \subset \hat{\Lambda}_\lambda \subset \Lambda_0^*$, каждое отношение $\hat{\Lambda}_\lambda$ максимально аккумулятивно при $\text{Im} \lambda > 0$, и $(\hat{\Lambda}_\lambda)^* = \hat{\Lambda}_{\bar{\lambda}}$. Тогда найдется такая операторная функция $\lambda \rightarrow F(\lambda)$ из класса $\mathcal{F}(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i})$, что $\hat{\Lambda}_\lambda = \Lambda_{F(\lambda)}$ (см. [16], [17]). Отметим, что семейство $\Lambda_{F(\lambda)}$ играет важную роль в описании обобщенных резольвент симметрического отношения Λ_0 , а именно, операторная функция $\tilde{R}_\lambda$ тогда и только тогда является обобщенной резольвентой отношения Λ_0 , когда $\tilde{R}_\lambda = (\Lambda_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1}$ [16], [17].

Теорема 5. Для любой функции $\lambda \rightarrow F(\lambda)$ из класса $\mathcal{F}(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i})$ семейство отношений $\mathfrak{L}(\lambda) = \Lambda_{F(\lambda)} - \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu_0} - i\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$ порождает некоторый характеристический оператор уравнения (18) и, обратно, если семейство $\lambda \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$ ($\text{Im} \lambda \neq 0$) порождает некоторый характеристический оператор, то найдется такая операторная функция $\lambda \rightarrow F(\lambda)$ из класса $\mathcal{F}(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i})$, что $\mathfrak{L}(\lambda) = \Lambda_{F(\lambda)} - \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu_0} - i\tilde{\mathcal{A}}_\lambda$.

Доказательство. Отметим сначала, что включения $L_0(\lambda) \subset \mathfrak{L}(\lambda) \subset L(\lambda)$ и $\Lambda_0 \subset \Lambda_{F(\lambda)} \subset \Lambda_0^*$ выполняются одновременно. В силу теоремы 1 голоморфность семейства $\lambda \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$ влечет голоморфность $\lambda \rightarrow \Lambda_{F(\lambda)}$ и обратно. Равенства $\mathfrak{L}(\bar{\lambda}) = \mathfrak{L}^*(\lambda)$, $(\Lambda_{F(\lambda)})^* = \Lambda_{F(\bar{\lambda})}$ выполняются одновременно, так как $(\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu_0} - i\tilde{\mathcal{A}}_\lambda)^* = \tilde{\mathcal{B}}_{\bar{\lambda}, \mu_0} - i\tilde{\mathcal{A}}_{\bar{\lambda}}$. Из теоремы 1 вытекает, что для любых $f_0 \in \mathfrak{H}$

$$\text{Im}((\tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu_0} - i\tilde{\mathcal{A}}_\lambda)f_0, f_0)_A = -(\tilde{\mathcal{A}}_\lambda f_0, f_0)_A = -\int_a^b (\tilde{\mathcal{A}}_\lambda(t)f_0(t), f_0(t))dt. \quad (24)$$

Пара $\{z, g\} \in \mathfrak{L}(\lambda)$ тогда и только тогда, когда пара $\{z, h\} \in \Lambda_{F(\lambda)}$, где $g = h - \tilde{\mathcal{B}}_{\lambda, \mu_0}z - i\tilde{\mathcal{A}}_\lambda z$. Отсюда и из (24) следует, что для любых пар $\{z, g\} \in \mathfrak{L}(\lambda)$ выполняется неравенство

$$(\text{Im} \lambda)^{-1} \text{Im}(g, z)_A \leq -(\text{Im} \lambda)^{-1} (\tilde{\mathcal{A}}_\lambda z, z)_A. \quad (25)$$

Здесь учтено, что $\tilde{\mathcal{A}}_\lambda = -\tilde{\mathcal{A}}_{\bar{\lambda}}$. Неравенство (23) равносильно (25). Из (25) и из равенства $\mathfrak{L}(\bar{\lambda}) = \mathfrak{L}^*(\lambda)$ вытекает, что $\mathfrak{L}^{-1}(\lambda)$ является ограниченным всюду определенным оператором. Поэтому отношения $\Lambda_{F(\lambda)}$ и $\mathfrak{L}(\lambda)$ одновременно являются максимальными аккумулятивными в верхней полуплоскости и максимальными диссипативными в нижней полуплоскости. (Из [16], [17] следует, что можно рассмотреть только случай $\text{Im} \lambda > 0$.)

Таким образом, если функция $\lambda \rightarrow F(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{F}(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{N}_{-i})$, то семейство $\lambda \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$ голоморфно, обладает свойством $\mathfrak{L}(\bar{\lambda}) = \mathfrak{L}^*(\lambda)$, удовлетворяет неравенству (25) и отношения $\mathfrak{L}(\lambda)$ непрерывно обратимы. Из теорем 3, 4 следует, что семейство $\lambda \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$ порождает характеристический оператор. Обратное утверждение вытекает из обратимости приведенного доказательства. Теорема доказана. $\square$

Следствие. Семейство линейных отношений $\lambda \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$ со свойством $L_0(\lambda) \subset \mathfrak{L}(\lambda) \subset L(\lambda)$ ($\text{Im} \lambda \neq 0$) тогда и только тогда порождает некоторый характеристический оператор уравнения (18), когда $\mathfrak{L}(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\mathfrak{L}(\bar{\lambda}) = \mathfrak{L}^*(\lambda)$, 2) семейство $\lambda \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$ голоморфно при $\text{Im} \lambda \neq 0$, 3) при любом фиксированном λ отношение

$\mathfrak{L}^{-1}(\lambda)$ является всюду определенным оператором (из замкнутости следует ограниченность $\mathfrak{L}^{-1}(\lambda)$), 4) для любых пар $\{z, g\} \in \mathfrak{L}(\lambda)$ при $\operatorname{Im} \lambda > 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Im}(g, z)_A \leq -(\tilde{\mathbf{A}}_\lambda z, z)_A = -\int_a^b (\tilde{\mathcal{A}}_\lambda(t) z(t), z(t)) dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Аткинсон Ф. *Дискретные и непрерывные граничные задачи*. М., Мир, 1968. – 750 с.
- [2] Орлов С.А. *Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы о инвариантности рангов радиусов предельных кругов*. – 1976 // Известия АН СССР, Серия матем. – Т. 40, № 3. – С. 593–644.
- [3] Rofe-Beketov F.S. *Square-Integrable Solutions, Self-Adjoint Extensions and Spectrum of Differential Systems* // Differential Equations. Proc. from the Uppsala 1977 Intern. Conf. on Differ. Eq. Uppsala – 1977. – Рр. 169–178.
- [4] Храбустовский В.И. *О характеристической матрице типа Вейля-Титчмарша для дифференциально-операторных уравнений с линейно или нелинейно входящим спектральным параметром*. // Математическая физика, анализ, геометрия – 2003. Т. 10, № 2. С. 205–227.
- [5] Khrabustovsky V.I. *On the Characteristic Operators and Projections and on the Solutions of Weil Type of Dissipative and Accumulative Operator Systems. 1. General case; 2. Abstract Theory; 3. Separated Boundary Conditions* // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry – 2006. – V. 2, № 2, № 3, № 4. Рр. 149–175, 299–317, 449–473.
- [6] Bruk V.M. *On Linear Relations Generated by a Differential Expression and by a Nevanlinna Operator Function* // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry – 2011. – V. 7, № 2.
- [7] Kogan V.I., Rofe-Beketov F.S. *On Square-Integrable Solutions of Symmetric Systems of Differential Equations of Arbitrary Order* Proc. Roy. Soc. Edinburgh – 1975. – V. 74. – Рр. 5–40.
- [8] Bruk V.M. *On Spaces of Boundary Values for Relations Generated by Formally Self-adjoint Expression and Nonnegative Operator Function* // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry – 2006. V. 2, № 3. – Рр. 268–277.
- [9] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*. – Киев, Наукова Думка, 1984. – 284 с.
- [10] Брук В.М. *О линейных отношениях в пространстве вектор-функций* // Матем. заметки – 1978. – Т. 24, № 4. – С. 499–511.
- [11] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М., Мир, 1971. – 372 с.
- [12] Bruk V.M. *Generalized Resolvents of Symmetric Relations Generated on Semi-axis by a Differential Expression and a Nonnegative Operator Function* // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry – 2006. – V. 2, № 4. – Рр. 372–387.
- [13] Баскаков А.Г. *Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений* // Известия РАН, Серия матем. – 2009. – Т. 73, № 2. – С. 3–68.
- [14] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* // М., Мир, 1972. – 740 с.
- [15] Шефер Х. *Топологические векторные пространства*. М., Мир, 1971. – 360 с.
- [16] Штраус А. В. *О расширениях и характеристической функции симметрического оператора* // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 1. – С. 186–207.
- [17] Dijksma A., de Snoo H. S. V. *Self-adjoint extension of symmetric subspaces* // Pacific J. Math. – 1974. – V. 54, № 1. – Рр. 71–100.

БРУК ВЛАДИСЛАВ МОИСЕЕВИЧ, РОССИЯ, САРАТОВ, САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

E-mail: vladislavbruk@mail.ru

С.А. БУТЕРИН

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ОБОБЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕЙКИ¹

Рассматривается оператор Штурма-Лиувилля на графе-звезде, состоящем из конечного числа некомпактных ребер, с обобщенными условиями склейки во внутренней вершине. Дается постановка обратной задачи рассеяния, обобщающая классическую обратную задачу рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на оси, и доказывается теорема единственности ее решения.

Ключевые слова: некомпактные графы, дифференциальные уравнения на графах, обратная задача рассеяния, метод спектральных отображений

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется обратная задача рассеяния для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля на некомпактном графе-звезде. Дифференциальные операторы на графах (сетях, деревьях) часто встречаются в естествознании и технике (см. [1] и литературу там). Большинство работ по спектральной теории на графах посвящены исследованию прямых задач. В последние годы появился целый ряд работ по обратным спектральным задачам на компактных графах, в том числе графах с циклами (см. обзоры в [2]– [4]). В [5] исследовалась обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля на некомпактном графе с одним полубесконечным ребром. В настоящей работе рассматривается некомпактный граф типа звезды, состоящий из произвольного конечного числа полубесконечных ребер, то есть произвольный граф, не содержащий компактных ребер. Рассматривается случай обобщенных условий склейки во внутренней вершине. Отметим, что в [3] изучалась обратная спектральная задача на компактном дереве с обобщенными условиями склейки. В работе дается постановка и доказывается теорема единственности решения обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на некомпактном графе-звезде, которая является естественным обобщением классической задачи на оси (см. [2], [6]– [9]). В качестве данных рассеяния используется спектр вместе с так называемыми коэффициентами отражения и весовыми числами, ассоциированными со всеми, кроме одного, ребрами. Такие данные являются обобщением левых (или правых) данных рассеяния на оси. С помощью развития идеи метода спектральных отображений [2], [10] доказывается, что задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал на графе-звезде. Аналогичная задача в случае стандартных условий склейки изучалась в [11]. Следует также отметить, что обратные задачи рассеяния на некомпактных графах обсуждались в [12]– [14].

В следующем разделе исследуются специальные решения дифференциального уравнения на графе, обладающие необходимыми асимптотическими и аналитическими свойствами. В разделе 2 дается определение данных рассеяния и исследуются их свойства. В разделе 3 доказывается теорема единственности восстановления потенциала на графе по введенным данным рассеяния.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ННС (проекты 10-01-00099, 10-01-92001-ННС-а).

1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

В конечномерном евклидовом пространстве рассмотрим некомпактный граф типа звезды Γ с вершиной v_0 и полубесконечными ребрами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Вершина v_0 является начальной точкой всех ребер, которые параметризуются переменной $x \in [0, \infty)$. Измеримая функция y на Γ может быть представлена как вектор $y(x) = [y_j(x)]_{j=\overline{1,m}}$, $x \geq 0$, где функция $y_j(x)$ определена на ребре ε_j .

Пусть $q(x) = [q_j(x)]_{j=\overline{1,m}}$ – вещественнозначная функция на Γ , удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty (1+x)|q_j(x)| dx < \infty, \quad j = \overline{1,m}.$$

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля $L = L(q)$ на Γ :

$$\ell_j y_j := -y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad x > 0, \quad j = \overline{1,m}, \quad (1)$$

где λ – спектральный параметр. Функция $q(x)$ называется потенциалом. Пусть $y(x) = [y_j(x)]_{j=\overline{1,m}}$ удовлетворяет следующим m условиям склейки в вершине v_0 :

$$y_1(0) = \beta_j y_j(0), \quad j = \overline{2,m}, \quad \sum_{j=1}^m (\beta_j^{-1} y_j'(0) + \beta_j^0 y_j(0)) = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad (2)$$

где β_j, β_j^0 – вещественные числа, $\beta_j \neq 0$. В случае $\beta_j \equiv 1, \beta_j^0 \equiv 0$ условия (2) являются стандартными условиями склейки, выражающими закон Кирхгофа.

Пусть $\lambda = \rho^2$, $\rho = \sigma + i\tau$. Обозначим $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Omega_\pm := \{\rho : \pm \operatorname{Im} \rho > 0\}$,

$$Q_{0j}(x) := \int_x^\infty |q_j(t)| dt, \quad Q_{1j}(x) := \int_x^\infty Q_{0j}(t) dt, \quad B_0 = \sum_{j=1}^m \frac{\beta_j^0}{\beta_j}, \quad B_1 = \sum_{j=1}^m \beta_j^{-2}.$$

Пусть $C_j(x, \lambda), S_j(x, \lambda)$ – решения уравнения (1) на ребре ε_j , удовлетворяющие начальным условиям $C_j(0, \lambda) = S_j'(0, \lambda) = 1, C_j'(0, \lambda) = S_j(0, \lambda) = 0$. Обозначим $e_j(x, \rho)$, $\rho \in \overline{\Omega_+}$, – решение Йоста уравнения (1) на ребре ε_j . Приведем необходимые в дальнейшем свойства решения Йоста (см. [2], теорема 2.4.1).

Теорема 1. 1) Решение Йоста $e_j(x, \rho)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$e_j(x, \rho) = \exp(i\rho x) + \int_x^\infty \frac{\sin \rho(t-x)}{\rho} q_j(t) e_j(t, \rho) dt. \quad (3)$$

2) Для каждого фиксированного x функции $e_j^{(\nu)}(x, \rho)$, $\nu = 0, 1$, аналитичны в Ω_+ и непрерывны в $\overline{\Omega_+}$.

3) При $\nu = 0, 1$

$$e_j^{(\nu)}(x, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

равномерно в $\overline{\Omega_+}$. Кроме того, для $\rho \in \overline{\Omega_+}$

$$\left. \begin{aligned} |e_j(x, \rho) \exp(-i\rho x)| &\leq \exp(Q_{1j}(x)), \\ |e_j(x, \rho) \exp(-i\rho x) - 1| &\leq Q_{1j}(x) \exp(Q_{1j}(x)), \\ |e_j'(x, \rho) \exp(-i\rho x) - i\rho| &\leq Q_{0j}(x) \exp(Q_{1j}(x)). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

4) Для каждого фиксированного $\rho \in \Omega_+$ $e_j(x, \rho) \in L_2(0, \infty)$. Более того, $e_j(x, \rho)$ является единственным решением (1) (с точностью до мультипликативной константы) обладающим этим свойством.

5) При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Omega_+}$, $\nu = 0, 1$

$$e_j^{(\nu)}(x, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x) \left(1 + \frac{\omega_j(x)}{i\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad \omega_j(x) = -\frac{1}{2} \int_x^\infty q_j(t) dt \quad (6)$$

равномерно по $x \geq 0$.

6) При $\rho \in \mathbb{R}^*$ функции $\{e_j(x, \rho), e_j(x, -\rho)\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), и

$$\langle e_j(x, \rho), e_j(x, -\rho) \rangle \equiv -2i\rho, \quad (7)$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$.

Следующая лемма (см. [2], лемма 2.4.1) дает свойства решений Йоста $e_{j,r}(x, \rho)$, соответствующих потенциалам $q_{j,r}$, аппроксимирующим q_j .

Лемма 1. Если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1+x) |q_{j,r}(x) - q_j(x)| dx = 0,$$

то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in \Omega_+} \sup_{x \geq 0} |(e_{j,r}^{(\nu)}(x, \rho) - e_j^{(\nu)}(x, \rho)) \exp(-i\rho x)| = 0, \quad \nu = 0, 1.$$

Здесь $e_{j,r}(x, \rho)$ – решения Йоста для потенциалов $q_{j,r}$.

Рассмотрим решения $f_k(x, \rho) = [f_{kj}(x, \rho)]_{j=\overline{1,m}}$, $k = \overline{1,m}$, уравнения (1), удовлетворяющие условиям склейки (2) и обладающие асимптотикой

$$f_{kk}(x, \rho) \sim \exp(-i\rho x), \quad f_{kj}(x, \rho) = O(\exp(i\rho x)), \quad j \neq k, \quad x \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Omega_+. \quad (8)$$

Чтобы доказать существование таких решений, построим вспомогательные решения $g_k(x, \rho) = [g_{kj}(x, \rho)]_{j=\overline{1,m}}$ следующим образом:

$$g_{kj}(x, \rho) = \frac{e_j(x, \rho)}{\beta_j} \prod_{l \neq k, j} e_l(0, \rho), \quad j \neq k, \quad (9)$$

$$g_{kk}(x, \rho) = \frac{C_k(x, \lambda)}{\beta_k} \prod_{l \neq k} e_l(0, \rho) - \beta_k S_k(x, \lambda) \prod_{l \neq k} e_l(0, \rho) \left(\sum_{j \neq k} \frac{e'_j(0, \rho)}{\beta_j^2 e_j(0, \rho)} + B_0 \right). \quad (10)$$

Очевидно, $g_k(x, \rho)$ удовлетворяют условиям склейки (2), аналитичны в Ω_+ и непрерывны в $\overline{\Omega_+}$ для каждого фиксированного $x \geq 0$. Кроме того, выполняется

$$g_{kj}(x, \rho) = O(\exp(i\rho x)), \quad j \neq k, \quad x \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Omega_+}.$$

Имеем

$$g_{kk}(x, \rho) = a_k(\rho) e_k(x, -\rho) + b_k(\rho) e_k(x, \rho), \quad \rho \in \mathbb{R}^*, \quad (11)$$

где согласно (7), (9)–(11) коэффициенты разложения имеют вид

$$a_k(\rho) = \frac{1}{2i\rho} \langle g_{kk}(x, \rho), e_k(x, \rho) \rangle = \beta_k a(\rho), \quad (12)$$

$$a(\rho) = \frac{1}{2i\rho} \prod_{l=1}^m e_l(0, \rho) \left(\sum_{j=1}^m \frac{e'_j(0, \rho)}{\beta_j^2 e_j(0, \rho)} + B_0 \right), \quad (13)$$

$$b_k(\rho) = -\frac{\beta_k}{2i\rho} \left(\frac{e'_k(0, -\rho)}{\beta_k^2} \prod_{l \neq k} e_l(0, \rho) + e_k(0, -\rho) \prod_{l \neq k} e_l(0, \rho) \left(\sum_{j \neq k} \frac{e'_j(0, \rho)}{\beta_j^2 e_j(0, \rho)} + B_0 \right) \right). \quad (14)$$

Формула (12) дает аналитическое продолжение $a(\rho)$ в Ω_+ . Функция $a(\rho)$ аналитична в Ω_+ , а $\rho a(\rho)$ непрерывна в $\overline{\Omega_+}$. Кроме того, из (6), (12) получаем асимптотику

$$a(\rho) = \frac{B_1}{2} \left(1 + \frac{1}{i\rho} \left(\sum_{j=1}^m \omega_j(0) + \frac{B_0}{B_1} \right) \right) + o\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Omega_+}. \quad (15)$$

Лемма 2. При $\rho \in \mathbb{R}^*$ имеют место следующие соотношения

$$\overline{a_k(\rho)} = a_k(-\rho), \quad \overline{b_k(\rho)} = b_k(-\rho), \quad (16)$$

$$|a_k(\rho)|^2 - |b_k(\rho)|^2 = \sum_{j \neq k} \frac{1}{\beta_j^2} \prod_{l \neq k, j} |e_l(0, \rho)|^2. \quad (17)$$

Доказательство. Так как в силу (3) имеем $\overline{e_j^{(\nu)}(x, \rho)} = e_j^{(\nu)}(x, -\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\nu = 0, 1$, то (16) следует из (12)–(14). Далее, (11) дает

$$\langle g_{kk}(x, \rho), g_{kk}(x, -\rho) \rangle = 2i\rho(a_k(\rho)a_k(-\rho) - b_k(\rho)b_k(-\rho)). \quad (18)$$

С другой стороны, согласно (10) имеем

$$\langle g_{kk}(x, \rho), g_{kk}(x, -\rho) \rangle = 2i\rho \sum_{j \neq k} \frac{1}{\beta_j^2} \prod_{l \neq k, j} e_l(0, \rho) e_l(0, -\rho),$$

что вместе с (16), (18) дает (17). $\square$

Следствие 1. Так как $e_j(x, \rho) \neq 0$ при $\rho \in \mathbb{R}^*$, то (17) дает $a(\rho) \neq 0$ при $\rho \in \mathbb{R}^*$. Кроме того, для всех попарно различных индексов $k, j \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$\left| \frac{1}{a(\rho)} \prod_{l \neq k, j} e_l(0, \rho) \right| \leq |\beta_j \beta_k|, \quad \rho \in \mathbb{R}^*. \quad (19)$$

Лемма 3. При $\rho \in \Omega_+$, для которых $a(\rho) \neq 0$, имеет место представление

$$f_k(x, \rho) = \frac{1}{a_k(\rho)} g_k(x, \rho). \quad (20)$$

Доказательство. Согласно (4), (8) имеем

$$\langle e_k(x, \rho), f_{kk}(x, \rho) \rangle = -2i\rho. \quad (21)$$

Покажем сначала, что если $a(\rho) \neq 0$, то

$$f_k(x, \rho) = D_k(\rho) g_k(x, \rho). \quad (22)$$

При $j \neq k$ имеем $f_{kj}(x, \rho) = D_{kj}(\rho) g_{kj}(x, \rho)$, откуда согласно (2), (9) получаем

$$(D_{kj_1}(\rho) - D_{kj_2}(\rho)) \prod_{j \neq k} e_j(0, \rho) = 0, \quad j_1, j_2 \neq k.$$

Таким образом, если

$$\prod_{j \neq k} e_j(0, \rho) \neq 0, \quad (23)$$

то все $D_{kj}(\rho)$, $j \neq k$, равны между собой, и положим $D_k(\rho) = D_{kj}(\rho)$. Если (23) не верно, то существует единственное $j_0 \neq k$, такое что $e_{j_0}(0, \rho) = 0$, иначе согласно (13) $a(\rho) = 0$. Принимая во внимание (9), получаем $g_{kj}(x, \rho) \equiv 0$, $j \neq k, j_0$, и положим $D_k(\rho) = D_{kj_0}(\rho)$. Поскольку обе функции $f_k(x, \rho)$, $g_k(x, \rho)$ удовлетворяют условиям склейки (2), получаем

$$f_{kk}(x, \rho) = D_k(\rho) g_{kk}(x, \rho) \quad (24)$$

и приходим к (22). Подставляя теперь (24) в (21) и используя (12), получаем

$$-2i\rho = D_k(\rho) \langle e_k(x, \rho), g_{kk}(x, \rho) \rangle = -2i\rho D_k(\rho) a_k(\rho),$$

что вместе с (22) дает (20). $\square$

При $\rho \in \mathbb{R}^*$ примем (20) в качестве определения функции $f_k(x, \rho)$.

2. ДАННЫЕ РАССЕЯНИЯ

Согласно (11) и (20) получаем

$$f_{kk}(x, \rho) = e_k(x, -\rho) + s_k(\rho) e_k(x, \rho), \quad \rho \in \mathbb{R}^*, \quad (25)$$

где функция

$$s_k(\rho) = \frac{b_k(\rho)}{a_k(\rho)} \quad (26)$$

называется *коэффициентом отражения*, ассоциированным с ребром ε_k .

Изучим свойства дискретного спектра.

Определение 1. Значения параметра λ , при которых уравнение (1) имеет нетривиальные решения $y(x) = [y_j(x)]_{j=1, m}$, $y_j(x) \in L_2(0, \infty)$, удовлетворяющие условиям склейки (2) называются *собственными значениями*, а соответствующие решения называются *собственными функциями*.

Теорема 2. Множество собственных значений конечно и совпадает со множеством Λ . Все собственные значения вещественны, отрицательны и имеют вид:

$$\lambda_n = \rho_n^2, \quad \rho_n = i\tau_n, \quad n = \overline{1, N}, \quad 0 < \tau_N < \dots < \tau_1.$$

Каждому собственному значению соответствует не более $m - 1$ линейно независимых собственных функций. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

Доказательство. Повторяя рассуждение для случая $m = 1$ (см. теоремы 2.1.6, 2.2.12 в [2]), заключаем, что $\lambda \geq 0$ не могут быть собственными значениями. Каждая собственная функция $y(x) = [y_j(x)]_{j=\overline{1, m}}$, соответствующая собственному значению $\lambda = \rho^2$, имеет вид $y_j(x) = A_j e_j(x, \rho)$, где A_j – некоторые постоянные, одновременно не обращающиеся в ноль. Подставляя это представление в условия склейки (2), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно A_j с определителем $C\rho a(\rho)$, $C = \text{const}$. Таким образом, множество собственных значений совпадает с Λ . Поскольку все элементы этого определителя не могут одновременно обратиться в ноль, ранг соответствующей матрицы не меньше 1. Таким образом, число линейно независимых собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению не превосходит $m - 1$.

В силу самосопряженности соответствующего оператора все собственные значения вещественны, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны в $L_2(\Gamma)$.

Покажем, что множество собственных значений конечно. Согласно (12) имеем

$$g_{kk}(x, \rho_n) = d_{kn} e_k(x, \rho_n). \quad (27)$$

Таким образом, если функция $g_k(x, \rho_n)$ не обращается тождественно в ноль, то она является собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_n . Предположим от противного, что множество Λ счетно. Тогда $\tau_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Поскольку $e_j(0, \rho_n) \neq 0$, $j = \overline{1, m}$, для достаточно больших n (см., например, [6]), будем иметь $g_k(x, \rho_n) \neq 0$, $k = \overline{1, m}$, для больших n , и следовательно, $g_k(x, \rho_n)$ является собственной функцией. Согласно (3), (10), (27) имеем $d_{kn} \in \mathbb{R}$. Можно выбрать такие возрастающие последовательности натуральных чисел $\{n_\nu\}$, $\{n'_\nu\}$, что для всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$n_\nu \neq n'_\nu, \quad d_{1n_\nu} d_{1n'_\nu} \geq 0, \quad e_j(0, \rho_{n_\nu}) e_j(0, \rho_{n'_\nu}) > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (28)$$

В силу (5) существует $A > 0$, такое что

$$\int_A^\infty e_j(x, i\tau') e_j(x, i\tau'') dx \geq \frac{\exp(-2AM)}{8M}, \quad \tau', \tau'' \in (0, M].$$

Следовательно для достаточно больших ν получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e_j(x, \rho_{n_\nu}) e_j(x, \rho_{n'_\nu}) dx &= \int_A^\infty e_j(x, \rho_{n_\nu}) e_j(x, \rho_{n'_\nu}) dx + \\ &+ \int_0^A e_j(x, \rho_{n_\nu}) (e_j(x, \rho_{n'_\nu}) - e_j(x, \rho_{n_\nu})) dx + \int_0^A e_j^2(x, \rho_{n_\nu}) dx > 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно (9), (27) и (28), (29) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_0^\infty g_{1j}(x, \rho_{n_\nu}) g_{1j}(x, \rho_{n'_\nu}) dx &= d_{1n_\nu} d_{1n'_\nu} \int_0^\infty e_1(x, \rho_{n_\nu}) e_1(x, \rho_{n'_\nu}) dx + \\ &+ \sum_{j=2}^m \frac{1}{\beta_j^2} \prod_{l \neq 1, j} e_l(0, \rho_{n_\nu}) e_l(0, \rho_{n'_\nu}) \int_0^\infty e_j(x, \rho_{n_\nu}) e_j(x, \rho_{n'_\nu}) dx > 0, \end{aligned}$$

что противоречит ортогональности собственных функций $g_1(x, \rho_{n_\nu})$, $g_1(x, \rho_{n'_\nu})$. $\square$

Теорема 3. *Функции $f_k(x, \rho)$ имеют не более чем простые полюса в точках ρ_n , а соответствующие ненулевые вычеты являются собственными функциями, отвечающими собственным значениям $\lambda_n = \rho_n^2$.*

Доказательство. Согласно (4), (8) имеем

$$\langle f_{kj}(x, \rho), e_j(x, \rho) \rangle = 2i\rho\delta_{kj}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (30)$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Пусть ρ_n является полюсом порядка $s \geq 1$ функции $f_k(x, \rho)$. Рассмотрим функцию $u(x) = [u_j(x)]_{j=\overline{1, m}}$, определенную по формуле

$$u(x) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_n} (\rho - \rho_n)^s f_k(x, \rho). \quad (31)$$

Формулы (30), (31) дают

$$\langle u_j(x), e_j(x, \rho_n) \rangle = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (32)$$

и следовательно

$$-u_j'' + q_j(x)u_j = \lambda_n u_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (33)$$

Поскольку функция $f_k(x, \rho)$ удовлетворяет условиям склейки (2), функция $u(x)$ также им удовлетворяет. Таким образом, $u(x)$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_n .

Предположим от противного, что $s > 1$. Определим функцию $v(x) = [v_j(x)]_{j=\overline{1, m}}$ по формуле

$$v(x) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_n} \frac{d}{d\rho} ((\rho - \rho_n)^s f_k(x, \rho)).$$

В силу (30), (31) и определения $v(x)$ будем иметь

$$\langle v_j(x), e_j(x, \rho_n) \rangle + \langle u_j(x), \dot{e}_j(x, \rho_n) \rangle = 0, \quad (34)$$

где $\dot{e}_j(x, \rho) = \frac{d}{d\rho} e_j(x, \rho)$. Дифференцируя (34) по x и подставляя

$$e_j''(x, \rho_n) = (q_j(x) - \rho_n^2)e_j(x, \rho_n), \quad \dot{e}_j''(x, \rho_n) = (q_j(x) - \rho_n^2)\dot{e}_j(x, \rho_n) - 2\rho_n e_j(x, \rho_n),$$

приходим к

$$-v_j''(x) + q_j(x)v_j(x) = \rho_n^2 v_j(x) + 2\rho_n u_j(x). \quad (35)$$

Используя (33), (35) получим

$$\sum_{j=1}^m \langle v_j(x), u_j(x) \rangle \Big|_{x=0}^\infty = 2\rho_n \sum_{j=1}^m \int_0^\infty u_j^2(x) dx. \quad (36)$$

Поскольку функции $u(x)$, $v(x)$ удовлетворяют условиям склейки (2), имеем

$$\sum_{j=1}^m \langle v_j(x), u_j(x) \rangle \Big|_{x=0}^\infty = 0. \quad (37)$$

Далее, имеем $\dot{e}_j^{(\nu)}(x, \rho_n) = O(1)$, $x \rightarrow \infty$, $\nu = 0, 1$, (см. [2], с.216). Согласно (32) получим $u_j(x) = C_j e_j(x, \rho_n)$, $j = \overline{1, m}$, что вместе с (34) дает

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle v_j(x), u_j(x) \rangle = C_j \lim_{x \rightarrow \infty} \langle v_j(x), e_j(x, \rho_n) \rangle = C_j \lim_{x \rightarrow \infty} \langle \dot{e}_j(x, \rho_n), u_j(x) \rangle = 0, \quad (38)$$

поскольку $u_j^{(\nu)}(x) = o(1)$, $x \rightarrow \infty$, $\nu = 0, 1$. В силу (3), (9), (10), (12), (20) функции $f_k(x, i\tau)$, $\tau \neq \tau_n$, вещественнозначны. Таким образом, согласно (31) функция $u(x)$ является вещественной или мнимой в зависимости от четности или нечетности s соответственно. Используя (36)–(38), получаем $u(x) \equiv 0$, что невозможно. $\square$

Следствие 2. *Чтобы собственное значение $\lambda_{n_0} = \rho_{n_0}^2$ было кратным, то есть $a(\rho_{n_0}) = \dot{a}(\rho_{n_0}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовали по крайней мере три разных числа $j_1, j_2, j_3 \in \{1, \dots, m\}$, такие что $e_{j_\nu}(0, \rho_{n_0}) = 0$, $\nu = \overline{1, 3}$.*

Доказательство. Достаточность следует из (13). Пусть $a(\rho_{n_0}) = \dot{a}(\rho_{n_0}) = 0$, тогда согласно теореме 3 и формуле (20) имеем $g_{kj}(x, \rho_{n_0}) \equiv 0$ для всех $k, j \in \{1, \dots, m\}$. Поэтому для всех k, j в правой части (9) при $\rho = \rho_{n_0}$ должен быть хотя бы один ненулевой множитель $e_l(0, \rho_{n_0}) = 0$, $l \neq k, j$, что доказывает необходимость. $\square$

Лемма 4. Для всех $k, j \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$a_{kj}(\rho) := \frac{1}{a(\rho)} \prod_{l \neq k, j} e_l(0, \rho) = O(1), \quad |\rho| \rightarrow 0, \quad \rho \in \overline{\Omega_+}. \quad (39)$$

Доказательство. Зафиксируем $k, j \in \{1, \dots, m\}$. Предположим, что функции $e_l^{(\nu)}(0, \rho)$, $l = \overline{1, m}$, $\nu = 0, 1$, аналитичны в окрестности нуля. Тогда, используя (13) и (19), заключаем, что функция $a_{kj}(\rho)$ имеет устранимую особенность в начале координат, и следовательно, справедливо (39).

В общем случае введем потенциалы $q_{(r)} = [q_{j,r}(x)]_{j=\overline{1, m}}$, где

$$q_{j,r}(x) = \begin{cases} q_j(x), & |x| < r, \\ 0, & |x| > r, \end{cases}$$

и рассмотрим соответствующие решения Йоста $e_{j,r}(x, \rho)$. Ясно, что при фиксированных x функции $e_{j,r}^{(\nu)}(x, \rho)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{1, m}$, являются целыми по ρ . Положим

$$a_{(r)}(\rho) = \frac{1}{2i\rho} \prod_{l=1}^m e_{l,r}(0, \rho) \left(\sum_{j=1}^m \frac{e'_{j,r}(0, \rho)}{\beta_j^2 e_{j,r}(0, \rho)} + B_0 \right).$$

В силу леммы 1 будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho a_{(r)}(\rho) = \rho a(\rho) \text{ равномерно в } \overline{\Omega_+}. \quad (40)$$

Поскольку функция $a(\rho)$ имеет не более конечного числа нулей, можно выбрать такое $\delta > 0$, что $a(\rho) \neq 0$ для всех $\rho \in O_\delta := \{\rho : |\rho| \leq \delta\} \cap \Omega_+$. В силу (40) для каждого $\varepsilon > 0$ существует R , такое что $a_{(r)}(\rho) \neq 0$ при $r \geq R$ и $\rho \in O_\delta \setminus O_\varepsilon$. Пусть $\rho_{n,r}$, $n = \overline{1, N_r}$, — нули функции $a_{(r)}(\rho)$ в O_ε с учетом кратности. Покажем, что $N_r \leq K$ для всех r .

Поскольку функции $e_{j,r}(0, \rho)$ имеют ограниченное в совокупности число нулей (см. [6]), согласно следствию 2 функция $a_{(r)}(\rho)$ имеет ограниченное в совокупности число кратных нулей. Пусть функции $g_{k,r}(x, \rho) = [g_{kj,r}(x, \rho)]_{j=\overline{1, m}}$ построены аналогично $g_k(x, \rho)$ для потенциала $q_{(r)}$. Если $\rho_{n,r}$ — простой нуль $a_{(r)}(\rho)$, то $g_{k,r}(x, \rho_{n,r})$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\rho_{n,r}^2$, и

$$g_{kk,r}(x, \rho_{n,r}) = d_{kn,r} e_{k,r}(x, \rho_{n,r}). \quad (41)$$

Предположим от противного, что число нулей N_r неограничено, тогда функции $a_{(r)}(\rho)$ при больших r могут иметь сколь угодно много простых нулей в O_ε . Тогда существуют такие последовательности $\{r_\nu\}$, $\{n_\nu\}$, $\{n'_\nu\}$, что нули ρ_{n_ν, r_ν} , $\rho_{n'_\nu, r_\nu}$ простые, и

$$n_\nu \neq n'_\nu, \quad d_{1n_\nu, r_\nu} d_{1n'_\nu, r_\nu} \geq 0, \quad e_{j, r_\nu}(0, \rho_{n_\nu, r_\nu}) e_{j, r_\nu}(0, \rho_{n'_\nu, r_\nu}) > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (42)$$

Аналогично оценке (29) получаем

$$\int_0^\infty e_{j, r_\nu}(x, \rho_{n_\nu, r_\nu}) e_{j, r_\nu}(x, \rho_{n'_\nu, r_\nu}) dx > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (43)$$

для достаточно больших ν . Согласно (9), (41) и (42), (43) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \int_0^\infty g_{1j, r_\nu}(x, \rho_{n_\nu, r_\nu}) g_{1j, r_\nu}(x, \rho_{n'_\nu, r_\nu}) dx &= d_{1n_\nu, r_\nu} d_{1n'_\nu, r_\nu} \int_0^\infty e_{1, r_\nu}(x, \rho_{n_\nu, r_\nu}) e_{1, r_\nu}(x, \rho_{n'_\nu, r_\nu}) dx + \\ &+ \sum_{j=2}^m \frac{1}{\beta_j^2} \prod_{l \neq 1, j} e_{l, r_\nu}(0, \rho_{n_\nu, r_\nu}) e_{l, r_\nu}(0, \rho_{n'_\nu, r_\nu}) \int_0^\infty e_{j, r_\nu}(x, \rho_{n_\nu, r_\nu}) e_{j, r_\nu}(x, \rho_{n'_\nu, r_\nu}) dx > 0, \end{aligned}$$

что противоречит ортогональности собственных функций $g_{1, r_\nu}(x, \rho_{n_\nu, r_\nu})$, $g_{1, r_\nu}(x, \rho_{n'_\nu, r_\nu})$. Таким образом, приходим к $N_r \leq K$.

Далее, положим

$$A_{kj,r}(\rho) := a_{kj,r}(\rho) \psi_r(\rho), \quad (44)$$

где

$$a_{kj,r}(\rho) = \frac{1}{a_{\langle r \rangle}(\rho)} \prod_{l \neq k,j} e_{l,r}(0, \rho), \quad \psi_r(\rho) = \prod_{n=1}^{N_r} \frac{\rho - \rho_{n,r}}{\rho + \rho_{n,r}}.$$

После устранения особенностей функция $A_{kj,r}(\rho)$ становится аналитической в O_δ . Очевидно, что $|\psi_r(\rho)| \leq 1$, $\rho \in \overline{\Omega_+}$, и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_r(\rho) = 1, \quad \rho \in \Omega_+. \quad (45)$$

В силу (40), (44), (45) и леммы 1 получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_{kj,r}(\rho) = a_{kj}(\rho)$$

равномерно по $\rho \in O_\delta \setminus O_\varepsilon$ для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$. Это означает, в частности, что $|A_{kj,r}(\rho)| \leq C$ при $|\rho| = \delta$, где C не зависит от r . Кроме того, согласно следствию 1 имеем $|A_{kj,r}(\rho)| \leq |\beta_k \beta_j|$ при $\rho \in \mathbb{R}$. Таким образом, используя принцип максимума модуля, получаем

$$|A_{kj,r}(\rho)| \leq C, \quad \rho \in O_\delta. \quad (46)$$

Переходя в (46) к пределу при $r \rightarrow \infty$, приходим к $|a_{kj}(\rho)| \leq C$, $\rho \in O_\delta$. $\square$

Обозначим

$$\varphi_k(x, \rho_n) := \operatorname{Res}_{\rho=\rho_n} f_k(x, \rho), \quad k = \overline{1, m}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (47)$$

Согласно теореме 3 ненулевые функции $\varphi_k(x, \rho_n) = [\varphi_{kj}(x, \rho_n)]_{j=\overline{1, m}}$, $k = \overline{1, m}$, являются собственными функциями, отвечающими собственному значению ρ_n^2 , и

$$\varphi_{kk}(x, \rho_n) = \alpha_{kn} e_k(x, \rho_n). \quad (48)$$

Числа a_{kn} , $n = \overline{1, N}$, назовем *весовыми числами*, ассоциированными с ребром ε_k .

Определение 2. Набор $J = \{s_k(\rho), \lambda_n, \alpha_{kn}\}_{k=\overline{1, m-1}, n=\overline{1, N}}$ называется *данными рассеяния* для L .

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Обратная задача формулируется следующим образом.

Обратная задача 1. Даны J , найти $q(x) = [q_j(x)]_{j=\overline{1, m}}$.

Условимся, что здесь и далее вместе с L будем рассматривать уравнение $\tilde{L} = L(\tilde{q}(x))$ того же вида, но с другим потенциалом. Если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к L , то этот символ с волной $\tilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, соответствующий $\tilde{L}$, и $\hat{\gamma} := \gamma - \tilde{\gamma}$.

Теорема 4. Если $J = \tilde{J}$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание спектра вместе с коэффициентами отражения и весовыми числами, ассоциированными со всеми, кроме одного, ребрами, однозначно определяет потенциал $q(x)$.

Доказательство. Зафиксируем $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Обозначим

$$\Phi_k^+(x, \rho) = \begin{bmatrix} f_{kk}(x, \rho) & e_k(x, \rho) \\ f'_{kk}(x, \rho) & e'_k(x, \rho) \end{bmatrix}, \quad \Phi_k^-(x, \rho) = \begin{bmatrix} e_k(x, -\rho) & f_{kk}(x, -\rho) \\ e'_k(x, -\rho) & f'_{kk}(x, -\rho) \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Лемма 5. При $\rho \in \mathbb{R}^*$ имеет место соотношение

$$\Phi_k^-(x, \rho) = \Phi_k^+(x, \rho) V_k(\rho), \quad V_k(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & s_k(-\rho) \\ -s_k(\rho) & 1 - s_k(-\rho)s_k(\rho) \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Доказательство. Согласно (21) функции $f_{kk}(x, \rho)$, $e_k(x, \rho)$ образуют фундаментальную систему решений на ребре ε_k , если $f_k(x, \rho)$ существует – в частности, для $\rho \in \mathbb{R}^*$. Таким образом, при $\rho \in \mathbb{R}^*$ имеем

$$\left. \begin{aligned} e_k(x, -\rho) &= f_{kk}(x, \rho) v_{k,11}(\rho) + e_k(x, \rho) v_{k,21}(\rho), \\ f_{kk}(x, -\rho) &= f_{kk}(x, \rho) v_{k,12}(\rho) + e_k(x, \rho) v_{k,22}(\rho). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Вычислим коэффициенты $v_{k,\nu j}(\rho)$. Согласно (7), (25), (51) приходим к

$$\begin{aligned} 2i\rho v_{k,11}(\rho) &= \langle e_k(x, -\rho), e_k(x, \rho) \rangle = 2i\rho, \\ 2i\rho v_{k,21}(\rho) &= \langle f_{kk}(x, \rho), e_k(x, -\rho) \rangle = -2i\rho s_k(\rho), \\ 2i\rho v_{k,12}(\rho) &= \langle f_{kk}(x, -\rho), e_k(x, \rho) \rangle = 2i\rho s_k(-\rho), \\ 2i\rho v_{k,22}(\rho) &= \langle f_{kk}(x, \rho), f_{kk}(x, -\rho) \rangle = 2i\rho(1 - s_k(\rho)s_k(-\rho)), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$v_{k,11}(\rho) = 1, \quad v_{k,12}(\rho) = s_k(-\rho), \quad v_{k,21}(\rho) = -s_k(\rho), \quad v_{k,22}(\rho) = 1 - s_k(-\rho)s_k(\rho),$$

что вместе с (51) дает (50). $\square$

Определим матрицу $P_k^+(x, \rho) = [P_{k,\nu j}^+(x, \rho)]_{\nu,j=1,2}$, $\rho \in \overline{\Omega}_+$, по формуле

$$P_k^+(x, \rho)\tilde{\Phi}_k^+(x, \rho) = \Phi_k^+(x, \rho). \quad (52)$$

В силу (21), (49) это дает

$$\left. \begin{aligned} P_{k,\nu 1}^+(x, \rho) &= \frac{1}{2i\rho} \left(f_{kk}^{(\nu-1)}(x, \rho)\tilde{e}'_k(x, \rho) - e_k^{(\nu-1)}(x, \rho)\tilde{f}'_{kk}(x, \rho) \right), \\ P_{k,\nu 2}^+(x, \rho) &= \frac{1}{2i\rho} \left(\tilde{f}_{kk}(x, \rho)e_k^{(\nu-1)}(x, \rho) - f_{kk}^{(\nu-1)}(x, \rho)\tilde{e}_k(x, \rho) \right), \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$e_k(x, \rho) = P_{k,11}^+(x, \rho)\tilde{e}_k(x, \rho) + P_{k,12}^+(x, \rho)\tilde{e}'_k(x, \rho). \quad (54)$$

Используя (6), (10), (15), (20), (53) и с асимптотику $C_k^{(\nu)}(x, \lambda)$, $S_k^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, (см. [2]), получаем

$$\left. \begin{aligned} P_{k,11}^+(x, \rho) &= 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \\ P_{k,12}^+(x, \rho) &= O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Omega}_+. \quad (55)$$

Аналогично определим матрицу $P_k^-(x, \rho) = [P_{k,\nu j}^-(x, \rho)]_{\nu,j=1,2}$, $\rho \in \overline{\Omega}_-$, по формуле

$$P_k^-(x, \rho)\tilde{\Phi}_k^-(x, \rho) = \Phi_k^-(x, \rho). \quad (56)$$

Очевидно,

$$P_k^-(x, \rho) = P_k^+(x, -\rho). \quad (57)$$

Так как $\tilde{s}_k(\rho) = s_k(\rho)$, $\rho \in \mathbb{R}^*$, то при $\rho \in \mathbb{R}^*$ формулы (50), (52), (56) дают

$$\begin{aligned} P_k^-(x, \rho) &= \Phi_k^-(x, \rho)(\tilde{\Phi}_k^-(x, \rho))^{-1} = \Phi_k^+(x, \rho)V_k(\rho)(\tilde{\Phi}_k^+(x, \rho)\tilde{V}_k(\rho))^{-1} = \\ &= \Phi_k^+(x, \rho)V_k(\rho)(\tilde{V}_k(\rho))^{-1}(\tilde{\Phi}_k^+(x, \rho))^{-1} = \Phi_k^+(x, \rho)(\tilde{\Phi}_k^+(x, \rho))^{-1} = P_k^+(x, \rho). \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого $x \geq 0$ функция $P_k^-(x, \rho)$ является аналитическим продолжением $P_k^+(x, \rho)$ в Ω_- . Следовательно, согласно лемме 4 функция

$$P_k(x, \rho) := \begin{cases} P_k^+(x, \rho), & \rho \in \overline{\Omega}_+, \\ P_k^-(x, \rho), & \rho \in \Omega_-, \end{cases}$$

мероморфна с не более чем простыми полюсами в точках $\pm\rho_n$, $\pm\tilde{\rho}_n$ и в нуле. Поскольку $\tilde{N} = N$, $\tilde{\rho}_n = \rho_n$, $\tilde{\alpha}_{kn} = \alpha_{kn}$, $n = \overline{1, N}$, согласно (47), (48) будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\rho=\rho_n} P_{k,\nu 1}^+(x, \rho) &= \frac{1}{2i\rho_n} \left(\varphi_{kk}^{(\nu-1)}(x, \rho_n)\tilde{e}'_k(x, \rho_n) - e_k^{(\nu-1)}(x, \rho_n)\tilde{\varphi}'_{kk}(x, \rho_n) \right) = \\ &= \frac{\alpha_{kn} - \tilde{\alpha}_{kn}}{2i\rho_n} e_k^{(\nu-1)}(x, \rho_n)\tilde{e}'_k(x, \rho_n) = 0, \\ \operatorname{Res}_{\rho=\rho_n} P_{k,\nu 2}^+(x, \rho) &= \frac{1}{2i\rho_n} \left(\tilde{\varphi}_{kk}(x, \rho_n)e_k^{(\nu-1)}(x, \rho_n) - \tilde{e}_k(x, \rho_n)\varphi_{kk}^{(\nu-1)}(x, \rho_n) \right) = \\ &= \frac{\tilde{\alpha}_{kn} - \alpha_{kn}}{2i\rho_n} \tilde{e}_k(x, \rho_n)e_k^{(\nu-1)}(x, \rho_n) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (57) функция $\rho P_k(x, \rho)$ является целой по ρ . Используя (55), (57) и теорему Лиувилля, получим

$$P_{k,11}^+(x, \rho) \equiv 1 + \frac{C}{\rho}, \quad P_{k,12}^+(x, \rho) \equiv 0,$$

что вместе с (54) и (6) дает $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ п.в. на $(0, \infty)$, $k = \overline{1, m-1}$.

Остается доказать, что $q_m(x) = \tilde{q}_m(x)$. Функция $M(\lambda) := e_m(0, \rho)(e'_m(0, \rho))^{-1}$ является функцией Вейля краевой задачи для уравнения (1) (при $j = m$) с краевым условием $y'_m(0) = 0$, и достаточно доказать, что $\hat{M}(\lambda) \equiv 0$ (см. [2]).

Согласно (9), (20) имеем

$$M(\lambda) = \frac{f_{1m}(0, \rho)}{f'_{1m}(0, \rho)}. \quad (58)$$

Заметим, что при $\rho \in \mathbb{R}^*$ функции $f_{1m}^{(\nu)}(0, \rho)$, $\nu = 0, 1$, однозначно определяются заданием $s_1(\rho)$ и $e_j^{(\nu)}(0, \rho)$, $j = \overline{1, m-1}$. Действительно, в силу (2), (9), (20), (25), получим

$$f_{1m}(0, \rho) = \frac{1}{\beta_m}(e_1(0, -\rho) + s_1(\rho)e_1(0, \rho)), \quad \rho \in \mathbb{R}^*, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} f'_{1m}(0, \rho) = & -\beta_m \left(e'_1(0, -\rho) + s_1(\rho)e'_1(0, \rho) + \right. \\ & \left. + (e_1(0, -\rho) + s_1(\rho)e_1(0, \rho)) \left(B_0 + \sum_{j=2}^{m-1} \frac{e'_j(0, \rho)}{\beta_j^2 e_j(0, \rho)} \right) \right), \quad \rho \in \mathbb{R}^*. \end{aligned} \quad (60)$$

Далее, положим

$$F_\nu(\rho) = f_{1m}^{(\nu)}(0, \rho)A(\rho), \quad \nu = 0, 1, \quad A(\rho) = \prod_{n=1}^N \frac{\rho - i\tau_n}{\rho + i\tau_n}. \quad (61)$$

Очевидно, функции $F_\nu(\rho)$ аналитичны в Ω_+ и непрерывны в $\overline{\Omega_+} \setminus \{0\}$. Кроме того, согласно (9), (20) и лемме 4 имеем

$$F_\nu(\rho) = O(1), \quad |\rho| \rightarrow 0, \quad \rho \in \overline{\Omega_+}. \quad (62)$$

Легко вычислить, что

$$A(\rho) = 1 + \frac{2}{i\rho} \sum_{n=1}^N \tau_n + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty.$$

В силу (6), (9), (15), (20), (61) для $\nu = 0, 1$ приходим к

$$F_\nu(\rho) = \frac{2(i\rho)^\nu}{\beta_m B_1} \left(1 + \frac{1}{i\rho} \left(2 \sum_{n=1}^N \tau_n - \omega_1(0) - \frac{B_0}{B_1} \right) + o\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Omega_+}. \quad (63)$$

Обозначим

$$G_0(\rho) = F_0(\rho) - \frac{2}{\beta_m B_1}, \quad G_1(\rho) = F_1(\rho) - \frac{2i\rho}{\beta_m B_1} \left(1 + \frac{1}{i\rho} \left(2 \sum_{n=1}^N \tau_n - \omega_1(0) - \frac{B_0}{B_1} \right) \right). \quad (64)$$

Таким образом, (63) дает

$$G_0(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad G_1(\rho) = o(1), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Omega_+}. \quad (65)$$

Рассмотрим контур

$$\Gamma_{\delta, R} = [-R, -\delta] \cup \gamma_\delta \cup [\delta, R] \cup \gamma_R$$

с обходом против часовой стрелки, где $\gamma_a = \{\rho : |\rho| = a, \operatorname{Im} \rho \geq 0\}$. Интегральная формула Коши дает

$$G_\nu(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta, R}} \frac{G_\nu(\xi) d\xi}{\xi - \rho}, \quad \rho \in \operatorname{int} \Gamma_{\delta, R}, \quad \nu = 0, 1. \quad (66)$$

Согласно (62), (65) будем иметь

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta} \frac{G_\nu(\xi) d\xi}{\xi - \rho} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{G_\nu(\xi) d\xi}{\xi - \rho} = 0, \quad \nu = 0, 1.$$

Переходя в (66) к пределу при $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, получаем

$$G_\nu(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_\nu(\xi) dx}{\xi - \rho}, \quad \rho \in \Omega_+, \quad \nu = 0, 1,$$

где при $\nu = 1$ интеграл понимается в смысле главного значения. Таким образом, согласно (59), (60), (61), (64) будем иметь $\hat{f}_{1m}^{(\nu)}(0, \rho) \equiv 0$, $\nu = 0, 1$, при $\rho \in \overline{\Omega_+}$, и следовательно, (58) дает $\hat{M}(\lambda) \equiv 0$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*. – М.: Физматлит, 2004.
- [2] Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач*. – М.: Физматлит, 2007.
- [3] Freiling G., Yurko V.A. *Inverse problems for differential operators on graphs with general matching conditions* // Appl. Anal. – 2007. – V.86, N.6. – P.653–667.
- [4] Yurko V.A. *Inverse spectral problems for differential operators on arbitrary compact graphs* // J. Inv. Ill-Posed Problems – 2010. – V.18, N.3. – P.245–261.
- [5] Freiling G., Yurko V.A. *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators on noncompact trees*, Results in Mathematics 50 (2007) 195–212.
- [6] Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*. – Киев: Наукова Думка, 1977.
- [7] Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*. – М.: Наука, 1984.
- [8] Фаддеев Л.Д. *О связи S-матрицы и потенциала для одномерного оператора Шредингера* // ДАН СССР – 1958. – Т.121, N.1. – С.63–66.
- [9] Deift P., Trubowitz E. *Inverse scattering on the line* // Comm. Pure Appl. Math. – 1979. – V.32. – P.121–251.
- [10] Yurko V.A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series*. – Utrecht: VSP, 2002.
- [11] Buterin S.A., Freiling G. *Inverse scattering problem for the Sturm-Liouville operator on a noncompact star-type graph*. Preprint SM-DU-725, Duisburg-Essen Universität, Duisburg, 2011.
- [12] Герасименко Н.И. *Обратная задача рассеяния на некомпактном графе* // Теорет. Мат. Физ. – 1988. – Т.75, N.2 – С.187–200.
- [13] Kurasov P., and Stenberg F. *On the inverse scattering problem on branching graphs* // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – V.35, N.2. – P.101–121.
- [14] Harmer M., *Inverse scattering on matrices with boundary conditions* // J. Phys. A – 2005. – V.38, N.22. – P.4875–4885.

БУТЕРИН СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ, САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО, УЛ. АСТРАХАНСКАЯ 83, 410012, САРАТОВ, РОССИЯ

E-mail: buterinsa@info.sgu.ru

Международный научный журнал
"Спектральные и эволюционные задачи"

Том 21 (2011) N 1, с. 89 – 92.

УДК 519.22+519.23+528.854

MSC2000: 62B15, 68T10

С.И. ГУРОВ

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ НАДЁЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ

В работе на основе разработанной информационной модели алгоритма классификации получены новые оценки его надёжности, более точные, чем классические. Модель не использует являющееся слабым местом VC-теории предположение об априорном задании класса, из которого выбирается алгоритм.

Проблема оценки надёжности алгоритмов классификации — одна из основных в теории обучения по прецедентам, и ей посвящено большое количество работ (обзор по направлениям см. в [2]). При этом в основном потоке публикаций рассматривается постановка задачи в рамках либо известной теории Вапника-Червоненкиса (VC-теория), либо в том или ином развитии этой теории.

В данной работе представлены первые результаты в решении указанной проблемы, полученные с использованием новой информационной (в терминах формальной зависимости «вектор параметров – класс») модели алгоритма классификации, свободной от основных положений VC-теории.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается конкретный алгоритм A детерминированной классификации объектов из некоторого пространства $\mathcal{X}$ на два класса без отказов — *классифицирующий алгоритм*. Считается, что создание (обучение) алгоритма A проводилось с использованием некоторого подмножества $\mathcal{X}$ — (конечной) *обучающей* последовательности.

Необходимо оценить вероятность P правильной классификации произвольного объекта из $\mathcal{X}$. Оценка осуществляется тестированием алгоритма A на *контрольной* выборке прецедентов из $\mathcal{X}$. При этом единственными данными для оценки P является информация о том, что на контрольной выборке длины n алгоритм A совершил m ошибок.

Заметим, что в данной постановке класс F алгоритмов, из которого, может быть, был выбран A , не фиксируется. Такая постановка обладает очевидными преимуществами перед другими, принимающими требование — обозначим его (C) — VC-теории и некоторых других подходов об априорном указании F , в результате чего становится необходимым решать непростые (подчас неразрешимые) вопросы, связанные с определением различных характеристик класса F (ёмкость, функция роста, коэффициент разнообразия и др.; о данных трудностях и путях их преодоления см., например, в [9, 2, 4]). Кроме того, предположение (C) часто не соответствует реальному процессу построения классифицирующих алгоритмов. Наконец, одна и та же дискриминантная функция на $\mathcal{X}$ может быть получена реализацией различных алгоритмов, принадлежащих разным классам, что приведёт, вообще говоря, к разным оценкам надёжности осуществляемой ей классификации.

2. КЛАССИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В различных подходах к решению указанной задачи часто принимаются предположения (например, о типах распределений), в результате чего для оценки P требуются трудно вычисляемые или даже ненаблюдаемые параметры [4].

Оценки различного типа для вероятности P в указанной выше постановке, полученные в рамках классических статистических моделей без привлечения дополнительных предположений, приведены в [5]. Во всех указанных здесь подходах используется

Гипотеза. На пространстве образов $\mathcal{X}$ задано (может быть неизвестное) распределение вероятностей $P(X)$, $X \subseteq \mathcal{X}$, и любой рассматриваемый набор образов $x_1, x_2, \dots, x_n$ из $\mathcal{X}$ считается (если явно не указано иначе), реализацией независимой выборки n случайных величин из генеральной совокупности с распределением $P(X)$.

Впрочем, данная гипотеза также может быть сформулирована в рамках слабой вероятностной аксиоматики, развиваемой К. В. Воронцовым [3, 4, 11].

Все указанные подходы опираются на классическую информационную модель, описывающую функционирование алгоритма классификации как процесс (1) получения описания объекта $x \in \mathcal{X}$, (2) получения значения r случайной величины, равномерно распределённой на отрезке $[0, 1]$, (3) сравнения r с внутренним параметром $P \in [0, 1]$ алгоритма и (4) выдачей правильного ответа о принадлежности x , если $r \leq P$ и неправильного в противном случае. Можно также считать, что описание x содержит скрытый двузначный параметр z , кодирующий принадлежность x тому или иному классу, и классификация осуществляется опираясь на “подсмотренное” алгоритмом значение z . Статистическая модель, соответствующая данной информационной — урновая схема Бернулли.

Представляется, однако, что в силу своей универсальности, урновая схема является слишком грубой формализацией процесса классификации, осуществляемой данным алгоритмом A . Она, например, не учитывает факт построения (настройки) A по обучающейся последовательности, в силу чего большие значения искомого параметра P более вероятны, чем малые, и более того, $P \geq \frac{1}{2}$.

Ниже развивается подход, опирающийся на предлагаемую новую, более адекватную информационную и определяемые ей соответствующие статистические модели алгоритмов классификации.

3. ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ КЛАССИФИЦИРУЮЩЕГО АЛГОРИТМА

Предлагаемая информационная модель алгоритма классификации базируется на следующих предположениях.

- (1) Информация о значениях n и m является достаточной и адекватной для оценки вероятности P .
- (2) Каждый классифицирующий алгоритм характеризуется значением некоторого скрытого параметра $t \in [0, 1]$, определяющим его степень «необученности».

Условие (1) будет выполняться, например, когда экзаменационная выборка независима от обучающей, т.е. когда справедлива **Гипотеза 1**.

Понятно, что $m \leq \frac{n}{2}$, поскольку при $\frac{n}{2} < m \leq n$ можно вернуться к этапу построения алгоритма и соответствующим образом изменить решающее правило. Будем далее считать, что $1 \leq m$, т.к. случай 0-события ($m = 0$) требует специального рассмотрения, который предполагается изучить при дальнейших исследованиях. Таким образом, в настоящей работе считаем, что $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$, $2 \leq n$.

Параметр t , упомянутый в условии (2), описывает результат классификации, осуществляемый построенным алгоритмом A , как долю случайной с вероятностью p «угадки» класса данного объекта. Естественно считать $\frac{1}{2} \leq p$. Ясно, что при этом значение $1 - t$ характеризует долю правильной классификации на основе верно восстановленной информационной модели объекта.

В данных предположениях вероятность P правильной классификации произвольного объекта оценивается как

$$P = 1 - t + tp \geq 1 - \frac{t}{2}, \quad \frac{m}{n} \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Теперь наша задача — оценить значение t . Это можно сделать, построив на основе приведённой информационной модели алгоритма две его статистические модели: дискретную и непрерывную¹.

¹Данные модели соответствуют осреднению «по времени» и «по совокупности» соответственно в рамках эргодической теории случайных процессов.

3.1. Дискретная модель (ДМ). Считаем, что $[(1-t)n]$ элементов контрольной выборки алгоритм отклассифицировал правильно, «подсмотрев» значение параметра z , а классификация остальных прецедентов – результат случайного угадывания с вероятностью успеха p .

3.2. Непрерывная модель (НМ). Считаем, что классификация каждого прецедента происходит следующим образом: если значение r , полученное в результате разыгрывания равномерной распределённой на интервале $[0, 1]$ случайной величины, оказалось не менее t , то алгоритм выдаёт «подсмотренное» значение параметра z , а в противном случае происходит случайное угадывание принадлежности объекта классу с вероятностью успеха p .

Общепринятыми являются следующие возможности определить параметр t : (1) из условия максимума правдоподобия и (2) по апостериорному распределению (максимум апостериорной вероятности, медиана, интервальные оценки) в рамках частотного и байесовского подхода соответственно. Очевидно также, что при равномерном априорном, апостериорное распределение есть нормированная функция правдоподобия.

4. ОЦЕНКИ В РАМКАХ ДМ

Полагаем $t = \frac{k}{n}$, $m \leq k \leq n$. Функция правдоподобия $L(k)$ параметра t , пересчитанная для k будет иметь вид

$$L(k) = C_k^m p^{n-m} (1-p)^{m-n+k} = \frac{C_k^m}{2^k}. \quad (2)$$

Легко показать, что максимум $L(k)$ будет наблюдаться для $k \in \{2m-1, 2m\}$, откуда верхняя оценка параметра t есть $\frac{2m}{n}$, а оценка $\hat{P}_{ML}$ максимума правдоподобия P по (1) –

$$\hat{P}_{ML} \geq 1 - \frac{m}{n} = \hat{P}_{Cl}. \quad (3)$$

Отличие от классической оценки тут состоит в знаке: в (3) стоит $\geq$, а не $=$, показывая, что классическая точечная оценка $\hat{P}_{Cl}$ для P занижена. Объяснение этом факту – неучёт в классической модели, при справедливости **Гипотезы 1**, результатов работы алгоритма на обучающей выборке, где частота ошибки, скорее всего, меньше $\frac{m}{n}$.

Достоверность η оценки (3) может быть определена в рамках байесовского подхода для равномерного априорного распределения значения k :

$$\eta = \eta(K; n, m) = \frac{\sum_{k=m}^K \frac{C_k^m}{2^k}}{\sum_{k=m}^n \frac{C_k^m}{2^k}}. \quad (4)$$

По формуле (4) можно по некоторым значениям η определить достоверность оценки $P = 1 - \frac{K}{n}$, а при $K = 2m$ – для (3). Например, $\eta(2; n, 1) = \frac{1}{2 - (n+2)/2^n}$, и при $m = 1$ классическая оценка P для не слишком малых n является медианной (при этом для $n = 2, 3$ – сильно заниженной²). Так, для $n = 10$ и $m = 1$ по (3) имеем $0,9 \leq P$, в то время как классическая медианная оценка даёт $0,85 = P$ [1].

Приведём теперь оценки P высокой (практически) одинаковой достоверности при тех же значениях $n = 10$ и $m = 1$ по предлагаемой и классической моделям. По (4) имеем $\eta(6; 10, 1) = 0,943 \approx 0,95$, откуда $t = 0,6$ и по (1) – $0,7 \leq P$, а при классическом доверительном с $\eta = 0,95$ оценивании получим $0,61 \leq P \leq 0,99$ [8]. Далее, поскольку $\eta(5; 10, 1) = 0,895 \approx 0,9$, по (4) имеем $t = 0,5$ и по (1) – $0,75 \leq P$, в то время, как классическое доверительное с $\eta = 0,9$ оценивание даёт $0,66 \leq P \leq 0,99$.

Несложный анализ показывает, что классические оценки тем более занижены, чем $\frac{m}{n}$ ближе к $\frac{1}{2}$.

Понятно, что приведённые значения P – демонстрационные, возможно далёкие от реально могущих появиться на практике. Заметим, что возможно вычисление сумм в (4) через значения неполной бета-функции [1].

²Автор не считает возможным делать статистические выводы для таких значений n [7].

5. ОЦЕНКИ В РАМКАХ НМ

В этом случае функция правдоподобия $L(t)$ есть

$$L(t) = C_n^m \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-m} \left(\frac{t}{2}\right)^m, \quad \frac{m}{n} \leq t \leq 1,$$

максимум которой достигается при $t = \frac{2m}{n}$. Совпадение оценок со случаем ДМ говорит об «эргодичности» рассматриваемой информационной модели, поэтому ДМ есть просто дискретный аналог НМ и выбор какой-либо из них определяется лишь удобством их использования в конкретной задаче.

Интервальные оценки для P в рамках байесовского подхода с равномерным априорным распределением могут быть получены по апостериорному распределению с плотностью

$$f_{a_post}(t) = \frac{1}{M} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-m} \left(\frac{t}{2}\right)^m, \quad \frac{m}{n} \leq t \leq 1, \quad \text{где } M = \int_{\frac{m}{n}}^1 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-m} \left(\frac{t}{2}\right)^m dt. \quad (5)$$

По (5) возможно получение оценок P для произвольных значений η . Простой анализ показывает, что такие оценки точнее классических. В частности, для $n = 10$ и $m = 1$ интервальная оценка по f_{a_post} практически совпадает для полученной в ДМ.

Выводы. Предложенная информационная модель более адекватно описывает работу классифицирующего алгоритма, чем классическая урновая схема. Модель не использует являющееся слабым местом VC-теории предположение (C) об априорном задании класса, из которого выбирается алгоритм. На основе введённой модели возможно получение более точных, чем классические, оценок надёжности классификации. Дальнейшее уточнение оценок возможно путём отказа от предположения о равномерности априорного распределения с использованием принципа согласованности [6].

Интересным направлением дальнейших исследований является сравнение новых оценок с известными, получаемыми на основе различных подходов, не использующих предположение (C) . Возможно и адаптация указанных подходов к введённой модели.

Также на основе метода, изложенного в [7], возможно распространение введённой модели на случай $m = 0$, т.е. когда неправильная классификация является 0-событием.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 10-01-00131-а, 08-01-00405-а) и компании *Intel Corp.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965.
- [2] *Воронцов К. В.* Обзор современных исследований по проблеме качества обучения алгоритмов // Таврический вестник информатики и математики. — 2004. — № 1. — С. 5–24.
- [3] *Воронцов К. В.* Комбинаторная вероятность и точность оценок обобщающей способности. — 2008. — Vol. 18, № 2. — С. 243–259.
- [4] *Воронцов К. В.* Комбинаторная теория надёжности обучения по прецедентам: Дис. док. физ.-мат. наук: 05-13-17. — Вычислительный центр РАН, 2010. — 271 с.
- [5] *Гуров С. И.* Оценка надёжности классифицирующих алгоритмов. — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002. — 45 с.
- [6] *Гуров С. И.* Интервальное оценивание на основе принципа согласованности // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». — 2008. — Вып. 9, № 14 (74). — С. 77–93.
- [7] *Гуров С. И.* Оценка вероятности 0-события // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика», — 2009. — Вып. 3, № 28 (14). — С. 55–66.
- [8] *Закс Л.* Статистическое оценивание. — М.: Статистика, 1976. — 598 с.
- [9] *Лбов Г. С., Старева Н. Г.* Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. — 212 с.
- [10] *Феллер В.* Введение в теорию вероятности и её приложения. — М.: Мир, 1963. — 512 с.
- [11] <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title> — Слабая вероятностная аксиоматика.

К.А. ДАРОВСКАЯ

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка со спектральным параметром и интегральными условиями, содержащими производную искомой функции. В терминах эквивалентных норм в пространствах Соболева и пространстве правых частей получены априорные оценки решений задач при достаточно больших значениях параметра.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор

$$Au + \lambda^2 u = -a_0(t)u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t) + \lambda^2 u(t) = f_0(t) \quad (t \in (0, 1)) \quad (1)$$

с интегральными условиями

$$B_\rho^j u = \int_0^1 h_\rho(t) u^{(j)}(t) dt = f_\rho \quad (\rho = 1, 2). \quad (2)$$

Здесь $j = 0, 1, 2$ фиксировано, a_i ($i = 0, 1, 2$) — вещественнозначные функции такие, что $a_0 \geq k > 0$ ($t \in [0, 1]$), и $a_1, a_2 \in C[0, 1]$; $f_0 \in L_2(0, 1)$, $f_\rho \in \mathbb{C}$ ($\rho = 1, 2$); $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, h_ρ — линейно независимые вещественнозначные функции.

Замечание 1. Вообще говоря, функции h_ρ различны для различных j . Мы не вводим в этих функциях дополнительный индекс, поскольку будем рассматривать задачу (1), (2) для фиксированного j .

Введем обозначения:

- $C_\beta^\alpha[0, 1] = \{v \in L_2(0, 1) : v \in C^\alpha[0, \beta], v \in C^\alpha[1 - \beta, 1]\}$ ($\beta \in (0, 1/2)$), где $C^\alpha[a, b]$ — пространство Гельдера ($\alpha \in (0, 1]$).
- $W_{\infty, \beta}^1(0, 1) = \{v \in C[0, 1] : v \in W_\infty^1(0, \beta), v \in W_\infty^1(1 - \beta, 1)\}$ ($\beta \in (0, 1/2)$), где $W_\infty^1(a, b)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $v(t)$, $t \in [a, b]$ таких, что $v' \in L_\infty(a, b)$.

В дальнейшем предполагаем, что $a_0 \in W_{\infty, \beta}^1(0, 1)$ и $h_\rho \in C_\beta^\alpha[0, 1]$ ($\alpha \in (1/2, 1]$, $\beta \in (0, 1/2)$).

Далее, $\omega_\varepsilon = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\arg \gamma| \leq \varepsilon \text{ или } |\arg \gamma - \pi| \leq \varepsilon\}$, где $0 < \varepsilon < \pi/2$, и $\omega_{\varepsilon, q} = \{\gamma \in \omega_\varepsilon : |\gamma| \geq q\}$. Введем также определитель из концевых значений весовых функций:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} h_1(0) & h_1(1) \\ h_2(0) & h_2(1) \end{vmatrix}. \quad (3)$$

В пространстве Соболева $W^2(0, 1)$ и пространстве $\mathcal{W}(0, 1) = L_2(0, 1) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ введем эквивалентные нормы, зависящие от спектрального параметра и от фиксированного j :

$$|||u|||_{W^2(0, 1)} = \left(\|u\|_{W^2(0, 1)}^2 + |\lambda|^4 \|u\|_{L_2(0, 1)}^2 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0, 1]} = \left(\|f_0\|_{L_2(0, 1)}^2 + |\lambda|^{\frac{2^2-j}{j}} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где $f = (f_0, f_1, f_2)$.

Рассмотри линейный оператор $L^j(\lambda) : W^2(0, 1) \rightarrow \mathcal{W}[0, 1]$ вида

$$L^j(\lambda) = (A + \lambda^2 I, B_1^j, B_2^j).$$

Наша цель — доказать следующую

Теорема 1. Пусть $\Delta_h \neq 0$. Тогда для любого j и для любого $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ существует $q > 1$ (возможно, свое для каждого j) такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q}$ любая функция $u \in W^2(0, 1)$ удовлетворяет неравенству

$$|||u|||_{W^2(0,1)} \leq C |\lambda|^{1/2} |||L^j(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,1]}, \quad (6)$$

где $C > 0$ не зависит от λ , u .

Замечание 2. Соотношение (5) задает правило выбора эквивалентных норм в пространстве $\mathcal{W}[0, 1]$ для подобных задач. Эквивалентная норма в пространстве $W^2(0, 1)$ остается неизменной и задается соотношением (4).

Доказательство теоремы 1 для случаев $j = 0$ и $j = 1$ приведено в [3] и [2] соответственно. Таким образом, нам остается доказать (6) для случая $j = 2$.

1. РАЗРЕШИМОСТЬ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Для доказательства теоремы 1 изучим вначале вспомогательную задачу

$$A_0 u + \lambda^2 u = -p u''(t) + \lambda^2 u = f_0(t) \quad (t \in (0, 1)), \quad (7)$$

$$h_\rho(0) \int_0^{1/2} u''(t) dt + h_\rho(1) \int_{1/2}^1 u''(t) dt = f_\rho \quad (\rho = 1, 2). \quad (8)$$

Здесь $p > 0$ — константа, $f_0 \in L_2(0, 1)$ и $f_\rho \in \mathbb{C}$.

Лемма 1. Пусть $\Delta_h \neq 0$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < \pi/2$ существует $q_0 > 1$ такое, что для каждого $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}$ задача (7), (8) имеет единственное решение $u \in W^2(0, 1)$ для всех $f \in \mathcal{W}[0, 1]$ и

$$|||u|||_{W^2(0,1)} \leq K |||f|||_{\mathcal{W}[0,1]}, \quad (9)$$

где $K > 0$ не зависит от λ , u .

Доказательство. 1. Пусть вначале $f_0(t) = e^{i2\pi st}$ ($s \neq 0$), $f_1 = f_2 = 0$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}$, где $q_0 > 1$ достаточно велико. Тогда задача (7), (8) примет вид

$$-p u_s''(t) + \lambda^2 u_s = e^{i2\pi st} \quad (t \in (0, 1)), \quad (10)$$

$$h_\rho(0) \int_0^{1/2} u_s''(t) dt + h_\rho(1) \int_{1/2}^1 u_s''(t) dt = 0 \quad (\rho = 1, 2). \quad (11)$$

Сильное решение уравнения (10) дается формулой

$$u_s(t) = c_{1s} e^{\mu t} + c_{2s} e^{-\mu t} + \frac{e^{i2\pi st}}{4p\pi^2 s^2 + \lambda^2} \quad (0 < t < 1), \quad (12)$$

где $\mu = \sqrt{\lambda^2/p}$, $\Re \mu > 0$.

Подставляя (12) в интегральные условия (11), мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$MC_s = B_s, \quad (13)$$

где $M = (m_{kj})$ — матрица порядка 2×2 с элементами

$$m_{kj} = (-1)^{j+1} \mu \left(e^{(-1)^{j+1} \mu/2} - 1 \right) \left(h_k(0) + h_k(1) e^{(-1)^{j+1} \mu/2} \right),$$

а B_s и C_s — двумерные вектор-столбцы вида

$$B_s = \left(\frac{-i2\pi s (e^{i\pi s} - 1) (h_1(0) + h_1(1) e^{i\pi s})}{4p\pi^2 s^2 + \lambda^2}, \frac{-i2\pi s (e^{i\pi s} - 1) (h_2(0) + h_2(1) e^{i\pi s})}{4p\pi^2 s^2 + \lambda^2} \right)^T,$$

Априорные оценки решений одного класса задач для дифференциальных операторов 95

и $C_s = (c_{1s}, c_{2s})^T$.

Положим $\Delta(\lambda) = \det M$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta(\lambda) = g(\lambda) + o(g(\lambda)) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}, \quad (14)$$

где

$$g(\lambda) = -\mu^2 e^\mu \Delta_h.$$

По условию $\Delta_h \neq 0$. Поэтому если $q_0 > 1$ достаточно велико, то $\Delta(\lambda) \neq 0$ для $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}$. Поэтому система линейных алгебраических уравнений (13) имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера:

$$c_{ls} = \frac{\Delta_{ls}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (l = 1, 2), \quad (15)$$

где $\Delta_{ls}(\lambda) = 0$ для $s = 2m$ и

$$\Delta_{ls}(\lambda) = g_{ls}(\lambda) + o(g_{ls}(\lambda)) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}, \quad (16)$$

для $s = 2m + 1$; здесь

$$g_{ls}(\lambda) = \frac{i4\pi s(-1)^{l+1}\mu\Delta_h e^{\mu(l-1)}}{4p\pi^2 s^2 + \lambda^2} \quad (l = 1, 2).$$

Из (14)–(16) следует, что

$$\begin{aligned} c_{ls} &= \frac{i4\pi s\mu^{-1}e^{\mu(l-2)} + o(\mu^{-1}e^{\mu(l-2)})}{4p\pi^2 s^2 + \lambda^2} \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0} \quad (l = 1, 2, \quad s = 2m + 1), \\ c_{ls} &= 0 \quad (l = 1, 2, \quad s = 2m). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (12), мы получим

$$u_s(t) = v_s(t) + w_s(t) \quad \text{при} \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0},$$

где

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \frac{i4\pi s((\mu^{-1}e^{-\mu} + o(\mu^{-1}e^{-\mu}))e^{\mu t} + (\mu^{-1} + o(\mu^{-1}))e^{-\mu t})}{4p\pi^2 s^2 + \lambda^2} \quad \text{для} \quad s = 2m + 1, \\ v_s(t) &\equiv 0 \quad \text{для} \quad s = 2m, \end{aligned} \quad (18)$$

$$w_s(t) = \frac{e^{2i\pi st}}{4p\pi^2 s^2 + \lambda^2}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) несложно получить следующие оценки:

$$|||v_s|||_{W^2(0,1)} \leq k_1 |||f|||_{W[0,1]} \quad (\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}, \quad s \neq 0) \quad (20)$$

и

$$|||w_s|||_{W^2(0,1)} \leq k_2 \quad (\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}, \quad s \neq 0). \quad (21)$$

Здесь и далее $k_r > 0$ не зависят от λ и s .

2. Положим теперь $f_0(t) \equiv 1$, $f_1 = f_2 = 0$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}$, где $q_0 > 1$ достаточно велико. Рассмотрим задачу (10), (11) при $s = 0$. Аналогично пункту 1 мы получим, что $u_0(t) = v_0(t) + w_0(t)$, где $v_0(t) \equiv 0$ и $w_0(t) = \lambda^{-2}$, откуда

$$|||u_0|||_{W^2(0,1)} = |||w_0|||_{W^2(0,1)} \leq k_3 \quad (\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}), \quad (22)$$

где $k_3 > 0$ не зависит от λ .

3. Рассмотрим задачу (7), (8) для $f = (F_N(t), 0, 0)$ и $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}$, где

$$F_N(t) = \sum_{|s| \leq N} f_{0s} e^{i2\pi st}, \quad f_{0s} = \int_0^1 f_0(t) e^{-i2\pi st} dt.$$

Поскольку $\Delta(\lambda) \neq 0$ ($\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}$), задача (7), (8) имеет единственное решение

$$U_N(t) = \sum_{|s| \leq N} f_{0s} u_s(t).$$

Используя неравенство (20), мы получим

$$\left\| \sum_{|s| \leq N} f_{0s} v_s(t) \right\|_{W^2(0,1)} \leq k_4 |\lambda|^{-1/2} \|f_0\|_{L_2(0,1)}, \quad (23)$$

где $k_4 > 0$ не зависит от λ и f_0 .

Из (21), (22) и ортогональности функций $w_s(t)$ в $W^2(0,1)$ следует, что

$$\left\| \sum_{|s| \leq N} f_{0s} w_s(t) \right\|_{W^2(0,1)} \leq k_5 \|f_0\|_{L_2(0,1)}, \quad (24)$$

где $k_5 > 0$ не зависит от λ и f_0 .

Из (23) и (24) следует, что

$$\|U_N\|_{W^2(0,1)} \leq k_6 \|f_0\|_{L_2(0,1)} \quad (\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}), \quad (25)$$

где $q_0 > 1$ достаточно велико.

Поскольку $\Delta(\lambda) \neq 0$ ($\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}$), задача (7), (8) имеет единственное решение $u \in W^2(0,1)$ для любого $f_0 \in L_2(0,1)$, если $f_1 = f_2 = 0$. Аналогично (23) и (24), мы убеждаемся, что $\{U_N\}$ — последовательность Коши в $W^2(0,1)$. В силу полноты пространства $W^2(0,1)$ и единственности предела мы имеем $\|U_N - u\|_{W^2(0,1)} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Переходя к пределу в неравенстве (25), мы получим оценку

$$\|u\|_{W^2(0,1)} \leq k_6 \|f_0\|_{L_2(0,1)} \quad (\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}), \quad (26)$$

где $f_0 \in L_2(0,1)$ — произвольная.

4. Рассмотрим теперь уравнение (7) с неоднородными условиями (8). Мы сведем эту задачу к задаче с однородными условиями, которая уже была изучена. Для этого введем функцию $v(t) = c_1 t^3 + c_2 t^2$, удовлетворяющую условиям

$$h_\rho(0) \int_0^{1/2} v''(t) dt + h_\rho(1) \int_{1/2}^1 v''(t) dt = f_\rho \quad (\rho = 1, 2). \quad (27)$$

Подставляя $v(t)$ в условия (27), мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_1 \frac{3h_\rho(0) + 9h_\rho(1)}{4} + c_2 (h_\rho(0) + h_\rho(1)) = f_\rho \quad (\rho = 1, 2). \quad (28)$$

Определитель этой системы $\Delta_c = -3\Delta_h/2 \neq 0$. Поэтому система уравнений (28) имеет единственное решение c_1, c_2 . Это решение является линейной функцией аргументов f_1 и f_2 , т. е.

$$c_\rho = R_{\rho 1} f_1 + R_{\rho 2} f_2 \quad (\rho = 1, 2), \quad (29)$$

где $R_{\rho 1}$ и $R_{\rho 2}$ — константы. Поскольку $\Delta(\lambda) \neq 0$, задача (7), (8) имеет единственное решение $u \in W^2(0,1)$. Положим $w(t) = u(t) - v(t)$. Очевидно, $w(t)$ является решением задачи

$$-p w''(t) + \lambda^2 w = f_0(t) + 6p c_1 t + 2p c_2 - \lambda^2 v(t) \quad (t \in (0,1)), \quad (30)$$

$$h_\rho(0) \int_0^{1/2} w''(t) dt + h_\rho(1) \int_{1/2}^1 w''(t) dt = 0 \quad (\rho = 1, 2). \quad (31)$$

Из (26) следует, что

$$\|w\|_{W^2(0,1)} \leq k_7 (\|f_0\|_{L_2(0,1)} + \|6p c_1 t\|_{L_2(0,1)} + \|2p c_2\|_{L_2(0,1)} + |\lambda|^2 (|f_1| + |f_2|)) \quad (\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}), \quad (32)$$

где $k_7 > 0$ не зависит от λ и f . Из (32) с учетом (29) получим, что

$$\|w\|_{W^2(0,1)} \leq k_8 (\|f_0\|_{L_2(0,1)} + |\lambda|^2 (|f_1| + |f_2|)) \quad (\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_0}), \quad (33)$$

где $k_8 > 0$ не зависит от λ и f . Таким образом, мы получаем оценку (9). $\square$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство. Вначале мы преобразуем уравнение (1) к виду, в котором коэффициент при второй производной равен некоторой константе в достаточно малой окрестности точек 0 и 1. Для этого мы введем новую переменную τ , полагая

$$\tau = \frac{1}{d} \int_0^t \frac{d\xi}{b(\xi)}, \quad (34)$$

где $d = \int_0^1 b^{-1}(\xi) d\xi$,

$$b(\xi) = \begin{cases} \sqrt{a_0(\xi)} & \text{для } \xi \in [0, \beta] \cup [1 - \beta, 1], \\ \frac{(1 - \xi - \beta)\sqrt{a_0(\beta)} + (\xi - \beta)\sqrt{a_0(1 - \beta)}}{1 - 2\beta} & \text{для } \xi \in (\beta, 1 - \beta). \end{cases}$$

Поскольку по условию $a_0 \in W_{\infty, \beta}^1(0, 1)$ и $a_0(t) \geq k > 0$, мы имеем $0 < k_1 \leq b^{-1}(t) \leq k^{-1/2}$ и $b^{-1} \in W_{\infty}^1(0, 1)$. Поэтому функция $\tau = \tau(t)$ отображает отрезок $[0, 1]$ на себя; более того,

$$\frac{d\tau}{dt} = (db(t))^{-1} \geq k_1 k^{1/2} > 0$$

и $\frac{d\tau}{dt} \in W_{\infty}^1(0, 1)$.

Эта подстановка сводит задачу (1), (2) к виду

$$-\bar{a}_0(\tau)\bar{u}''(\tau) + \bar{a}_1(\tau)\bar{u}'(\tau) + \bar{a}_2(\tau)\bar{u}(\tau) + \lambda^2\bar{u} = \bar{f}_0(\tau) \quad (\tau \in (0, 1)), \quad (35)$$

$$\int_0^1 \bar{h}_{\rho}(\tau)\bar{u}''(\tau)d\tau = f_{\rho} \quad (\rho = 1, 2), \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}(\tau) &= u(t(\tau)), \quad \bar{f}_0(\tau) = f_0(t(\tau)), \quad \bar{a}_0(\tau) = a_0(t(\tau))d^{-2}b^{-2}(t(\tau)) \in W_{\infty, \beta_0}^1(0, 1), \\ \bar{a}_1(\tau) &\in L_{\infty}(0, 1), \quad \bar{a}_2(\tau) \in C[0, 1], \quad \bar{h}_{\rho}(\tau) = h_{\rho}(t(\tau))/db(t(\tau)) \in C_{\beta_0}^{\alpha}[0, 1], \end{aligned}$$

$$\beta_0 = \min \left\{ d^{-1} \int_0^{\beta} b^{-1}(\xi) d\xi, 1 - d^{-1} \int_0^{1-\beta} b^{-1}(\xi) d\xi \right\}.$$

Более того, $\bar{a}_0(\tau) = 1/d^2$, $\tau \in [0, \beta_0] \cup [1 - \beta_0, 1]$.

Очевидно, неравенство (6) инвариантно относительно замены $\tau = \tau(t)$. Более того, если $\Delta_h \neq 0$, то

$$\Delta_{\bar{h}} = \begin{vmatrix} \bar{h}_1(0) & \bar{h}_1(1) \\ \bar{h}_2(0) & \bar{h}_2(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1(0)/d\sqrt{a_0(0)} & h_1(1)/d\sqrt{a_0(1)} \\ h_2(0)/d\sqrt{a_0(0)} & h_2(1)/d\sqrt{a_0(1)} \end{vmatrix} = \Delta_h/d^2\sqrt{a_0(0)a_0(1)} \neq 0.$$

Поэтому, не ограничивая общности, мы можем полагать, что $a_0 \in W_{\infty, \beta}^1(0, 1)$, $a_i \in L_{\infty}(0, 1)$ ($i = 1, 2$), $h_{\rho} \in C_{\beta}^{\alpha}[0, 1]$ ($\rho = 1, 2$), $a_0(t) \geq k > 0$, $a_0(t) = a_0(0)$ ($t \in [0, \beta] \cup [1 - \beta, 1]$) и $\Delta_h \neq 0$.

2. Перейдем к доказательству неравенства (6). Вначале мы выведем априорную оценку решений задачи (1), (2) на замкнутом интервале $[\delta/3, 1 - \delta/3]$, где $\delta = \delta(\lambda) > 0$.

Введем срезающую функцию $\zeta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leq \zeta(t) \leq 1$, $\zeta(t) = 1$ для $|t| < 1/4$, $\zeta(t) = 0$ для $|t| > 1/3$.

Для каждого $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_1}$ введем функцию $\eta(t) = \zeta(t/\delta) + \zeta((t-1)/\delta)$, где $q_1 = \max\{q_0, \beta^{-3}\}$, $\delta = |\lambda|^{-1/3-2\gamma}$ и $(1 - \alpha)/(6\alpha + 3) < \gamma < 1/12$.

Заметим, что условие $\alpha \in (1/2, 1]$ влечет за собой выполнение неравенства $(1 - \alpha)/(6\alpha + 3) < 1/12$. Очевидно, мы имеем

$$|\eta^{(j)}(t)| \leq k_1 \delta^{-j} \quad (t \in \mathbb{R}, j = 1, 2), \quad (37)$$

где $k_1 > 0$ не зависит от t и δ . Поскольку $|\lambda| \geq q_1$, то $\delta < q_1^{-1/3} \leq \beta$. Из леммы 1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_2 \geq q_1$ такое, что для $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_2}$ каждое решение $u \in W^2(0, 1)$

задачи (1), (2) удовлетворяет следующему неравенству:

$$|||(1-\eta)u|||_{W^2(0,1)} \leq k_2 \|(A + \lambda^2 I)((1-\eta)u)\|_{L_2(0,1)}, \quad (38)$$

где $k_2 > 0$ не зависит от u и λ .

Отсюда путем несложных преобразований мы перейдем к оценке

$$|||(1-\eta)u|||_{W^2(0,1)} \leq k_3 (|||f|||_{W[0,1]} + |\lambda|^{-\sigma} |||u|||_{W^2(0,1)}), \quad (39)$$

где $\sigma = 2/3 - 2\gamma > 0$; $k_3 > 0$ не зависит от u и λ .

3. Теперь мы установим априорную оценку решений задачи (1), (2) вблизи концов интервала $(0, 1)$. Введем операторы A_0 и A_1 по формулам $A_0 u = -a_0(0)u''(t)$ и $A_1 u = -a_0(t)u''(t)$ ($t \in (0, 1)$). В (7) мы положим $p = a_0(0)$. Тогда, используя лемму 1, формулу Лейбница и неравенство (37), аналогично (38) и (39) мы получим

$$|||\eta u|||_{W^2(0,1)} \leq k_4 \left(\|(A_0 + \lambda^2 I)(\eta u)\|_{L_2(0,1)} + |\lambda|^{1/2} \sum_{\rho} \left| h_{\rho}(0) \int_0^{1/2} (\eta(t)u(t))'' dt + \right. \right. \\ \left. \left. + h_{\rho}(1) \int_{1/2}^1 (\eta(t)u(t))'' dt \right| \right). \quad (40)$$

Отсюда

$$|||\eta u|||_{W^2(0,1)} \leq k_5 \left(|||f|||_{W[0,1]} + |\lambda|^{-\sigma} |||u|||_{W^2(0,1)} + |\lambda|^{1/2} (|\lambda|^{2/3+4\gamma} \|u\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + |\lambda|^{1/3+2\gamma} \|u'\|_{L_2(0,1)}) + |\lambda|^{1/2} \sum_{\rho} (|I_{\rho 1}| + |I_{\rho 2}| + |I_{\rho 3}|) \right). \quad (41)$$

Здесь

$$I_{\rho 1} = \int_0^1 h_{\rho}(t)(\eta(t) - 1)u''(t)dt, \quad I_{\rho 2} = \int_0^{1/2} \eta(t)(h_{\rho}(0) - h_{\rho}(t))u''(t)dt, \\ I_{\rho 3} = \int_{1/2}^1 \eta(t)(h_{\rho}(1) - h_{\rho}(t))u''(t)dt.$$

Для того, чтобы оценить $|I_{\rho 1}|$, мы введем новую срезающую функцию $\zeta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $0 \leq \zeta_1(t) \leq 1$, $\zeta_1(t) = 1$ ($|t| < 1/8$) и $\zeta_1(t) = 0$ ($|t| > 1/4$). Мы определим также функцию $\eta_1(t) = \zeta_1(t/\delta) + \zeta_1((t-1)/\delta)$ для каждого $\lambda \in \omega_{\varepsilon, q_2}$. Тогда

$$|\eta_1^{(j)}(t)| \leq k_8 \delta^{-j} \quad (t \in \mathbb{R}, j = 1, 2). \quad (42)$$

Будем иметь:

$$|I_{\rho 1}| \leq k_6 \|u''\|_{L_2(\delta/4, 1-\delta/4)} \leq k_7 \|u\|_{W^2(\delta/4, 1-\delta/4)} \leq k_7 \|(1-\eta_1)u\|_{W^2(0,1)} \leq \\ \leq k_8 \|(A + \lambda^2 I)((1-\eta_1)u)\|_{L_2(0,1)} \leq k_9 (|||f|||_{W[0,1]} + |\lambda|^{-\sigma} |||u|||_{W^2(0,1)}). \quad (43)$$

Поскольку $\text{supp } \eta \cap [0, 1/2] \subset [0, \delta/3]$ и $h_{\rho} \in C^\alpha[0, \delta]$, то

$$|I_{\rho 2}| \leq \left(\int_0^{\delta/3} |h_{\rho}(0) - h_{\rho}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \|u''\|_{L_2(0,1)} \leq \\ \leq k_{10} |\lambda|^{-(2\gamma+1/3)(\alpha+1/2)} \|u''\|_{L_2(0,1)} \leq k_{10} |\lambda|^{-(2\gamma+1/3)(\alpha+1/2)} |||u|||_{W^2(0,1)}. \quad (44)$$

Аналогичным образом мы можем доказать неравенство

$$|I_{\rho 3}| \leq k_{11} |\lambda|^{-(2\gamma+1/3)(\alpha+1/2)} |||u|||_{W^2(0,1)}. \quad (45)$$

Из (41) и (43)–(45) мы получим оценку

$$|||\eta u|||_{W^2(0,1)} \leq k_{12} \left(|\lambda|^{1/2} |||f|||_{W[0,1]} + |\lambda|^{-\psi} |||u|||_{W^2(0,1)} \right), \quad (46)$$

где

$$\psi = \min \left\{ \frac{1}{6} - 2\gamma, -\frac{1}{2} + \left(2\gamma + \frac{1}{3} \right) \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right\} > 0.$$

Из условий $1/2 < \alpha \leq 1$ и $(1 - \alpha)/(6\alpha + 3) < \gamma < 1/12$ следует, что $\sigma > \psi$, поэтому, выбирая $q > q_2$ так, что $(k_3 + k_{12})q^{-\psi} < 1$, мы получим неравенство (6) из (39) и (46). $\square$

Работа выполнена при поддержке G-RISC (проект № М-2010а-4) и АБЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (тема «Нелокальные и нелинейные задачи математической физики и их приложения к междисциплинарным исследованиям»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Агранович М. С., Вишик М. И. *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида* // Успехи мат. наук. — 1964. — 19, № 3. — С. 53–161.
- [2] Даровская К. А., Скубачевский А. Л. *Об одной спектральной задаче с интегральными условиями* // Труды семинара им. И. Г. Петровского — 2010. — 28. — С. 149–162.
- [3] Скубачевский А. Л. *Неклассические краевые задачи. I* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т. 26. — С. 3–132.

ДАРОВСКАЯ КСЕНИЯ АЛЕКСАНДРОВНА, РОССИЯ, МОСКВА, РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

E-mail: k.darovsk@gmail.com

Д.О. ДЕГТЯРЕВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ ВОЗРАСТАНИИ ВРЕМЕНИ

Рассматривается уравнение параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x)u$, при $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$, с неотрицательным коэффициентом при неизвестной функции, финитными начальными данными и ограниченной краевой функцией. Методом согласования асимптотических разложений строится равномерное асимптотическое приближение краевой задачи при неограниченном возрастании времени.

Ключевые слова: асимптотика, краевая задача, метод согласования асимптотических разложений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим начально-краевую задачу для линейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c(x)u = -Lu, \quad (1)$$

в области $Q = \Omega \times (0, \infty)$, где $\Omega = (0, \infty)$. С финитной начальной функцией $\varphi(x)$:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

и краевым условием $\omega(t)$:

$$u(0, t) = \omega(t), \quad (3)$$

потребуем, чтобы $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Также будем считать, что коэффициент $c(x) \in C(\mathbb{R}^+)$ разлагается в асимптотический ряд:

$$c(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c_k}{x^k}, \quad x \rightarrow \infty,$$

и кроме того предположим, что

$$c(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Как известно, при данных ограничениях на коэффициенты оператора L , поставленная задача имеет единственное решение в классе $C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$. Нас будет интересовать асимптотическое разложение решения данной задачи при неограниченном возрастании времени $t \rightarrow +\infty$.

Чтобы построить искомое разложение сделаем замену переменных:

$$(x, t) \leftrightarrow (s, t),$$

где $s = \frac{x}{2\sqrt{t}}$. И рассмотрим, пока что формальные, асимптотические ряды:

$$U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k(x)}{t^{\frac{k}{2}}}, \quad t \rightarrow \infty \quad (4)$$

$$V(s) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(t) \cdot V_j(s). \quad t \rightarrow \infty \quad (5)$$

Разложение (4) в переменных (x, t) будем называть внутренним и предположим, что оно приближает исходное решение в области при $t \rightarrow +\infty$ и $x \ll t$. А разложение (5) в переменных (s, t) будем называть внешним, при этом считая, что оно приближает решение в области при $t \rightarrow \infty$ и $t \ll x$.

Далее перейдем к поиску функций $U_k(x)$, $V_j(s)$.

2. ВНЕШНЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ.

Запишем исходное уравнение в переменных (s, t) . Для этого найдем выражения для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{4t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{x}{4\sqrt{t^3}} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{s}{2t} \cdot \frac{\partial u}{\partial s}.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{s}{2t} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{4t} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - c(2\sqrt{t} \cdot s)v. \quad (6)$$

Для того чтобы найти функции $v_j(s)$ подставим формальный асимптотический ряд (5) в уравнение (6):

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{k}{2} \frac{v_k}{t^{\frac{k}{2}+1}} - \frac{s}{2t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v'_k}{t^{\frac{k}{2}}} = \frac{1}{4t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v''_k}{t^{\frac{k}{2}}} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{c_k}{(2s\sqrt{t})^k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{t^{\frac{k}{2}}} \quad (7)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$v''_0 + 2sv'_0 = 0$$

$$v''_1 + 2sv'_1 + 2v_1 = \frac{c_3}{2s^3}v_0$$

...

$$v''_n + 2sv'_n + (2n)v_n = \sum_{i+j=n+2} \frac{c_i}{2^{i-2}s^i} v_j \quad (8)$$

Рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую неоднородной системе (8):

$$z''_0 + 2sz'_0 = 0$$

$$z''_1 + 2sz'_1 + 2z_1 = 0$$

...

$$z''_n + 2sz'_n + (2n)z_n = 0. \quad (9)$$

Обозначим через $z_i^1(s)$, $z_i^2(s)$ фундаментальную систему решений соответствующего уравнения, причем через $z_i^1(s)$ условимся обозначать решение, ведущее себя на бесконечности как $O(Q(s)e^{-s^2})$, $s \rightarrow \infty$, где $Q(s)$ - полином. Тогда

$$z_0^1(s) = \int_s^\infty e^{-\xi^2} d\xi, \quad z_0^2(s) = \int_0^s e^{-\xi^2} d\xi.$$

Заметим, что каждое последующее уравнение, получается из предыдущего путем дифференцирования его правой и левой частей:

$$(z_0'' + 2sz_0')' = (z_0')'' + 2s(z_0')' + 2z_0' = 0$$

...

$$(z_{n-1}'' + 2sz_{n-1}' + 2(n-1)z_{n-1})' = (z_{n-1}')'' + 2s(z_{n-1}')' + (2n)z_{n-1}' = 0$$

Таким образом, зная решения $z_0^1(s)$, $z_0^2(s)$, мы сможем найти фундаментальные системы решений для остальных уравнений:

$$z_1^1(s) = e^{-s^2}, \quad z_1^2(s) = e^{-s^2} \int_0^s e^{\xi^2} d\xi,$$

$$z_2^1(s) = -2se^{-s^2}, \quad z_2^2(s) = 1 - 2se^{-s^2} \cdot \int_0^s e^{\xi^2} d\xi,$$

...

$$z_n^1(s) = H_{n-1}(s)e^{-s^2}, \quad z_n^2(s) = P_{n-2}(s) + H_{n-1}(s)e^{-s^2} \cdot \int_0^s e^{\xi^2} d\xi, \quad n \geq 2,$$

где $H_k(s)$ – полином Эрмита, $P_k(s)$ – полином степени k от переменной s , данные многочлены можно посчитать по следующим формулам:

$$P_0(s) = 1,$$

$$H_k(s) = e^{s^2} \frac{d^k}{ds^k} e^{-s^2},$$

$$P_k(s) = P_{k-1}'(s) + H_k(s).$$

Таким образом чтобы найти общий вид решений неоднородных уравнений системы (8), достаточно построить частное решение каждого из этих уравнений. При этом нас будут интересовать только ограниченные при $s \rightarrow \infty$ решения. Рассмотрим первое уравнение

$$v_1'' + 2sv_1' + 2v_1 = \frac{c_3}{2s^3}v_0 \quad (10)$$

и заметим, что в качестве частного решения, ограниченного при $t \rightarrow \infty$, можно выбрать следующее решение:

$$\varphi_1(s) = z_1^1(s) \int_s^\infty z_1^2(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi - z_1^2(s) \int_s^\infty z_1^1(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi, \quad (11)$$

где $v_0(\xi) = \beta_0 z_0^1(\xi)$. Заметим, что формула (11) корректна, поскольку оба несобственных интеграла сходятся при $s > 0$. Проверим, что φ_1 – действительно частное решение уравнения (10):

$$\begin{aligned} \varphi_1'(s) &= (z_1^1)' \int_s^\infty z_1^2(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi - (z_1^2)' \int_s^\infty z_1^1(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi, \\ \varphi_1''(s) &= (z_1^1)'' \int_s^\infty z_1^2(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi - (z_1^2)'' \int_s^\infty z_1^1(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi + \\ &\quad - W_1(s) \cdot \frac{c_3 v_0(s)}{2s^3} \cdot e^{s^2}, \end{aligned}$$

где $W_1(s)$ – определитель Вронского системы решений $z_1^1(s)$, $z_1^2(s)$ уравнения

$$z_1'' + 2sz_1' + 2z_1 = 0.$$

Найдем его явное выражение:

$$\begin{aligned} W_1(s) &= (z_1^1)' z_1^2 - (z_1^2)' z_1^1 = \\ &= -2se^{-s^2} e^{-s^2} \int_0^s e^{\xi^2} d\xi + e^{-s^2} e^{s^2} e^{-s^2} + 2se^{-s^2} e^{-s^2} \int_0^s e^{\xi^2} d\xi = e^{-s^2} \end{aligned}$$

Далее подставим полученные значения $\varphi'(s)$, $\varphi''(s)$, $W_1(s)$ в уравнение (10), в результате получим:

$$\begin{aligned} & (z_1^1)'' \int_s^\infty z_1^2(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi - (z_1^2)'' \int_s^\infty z_1^1(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi + \\ & 2s \cdot \left((z_1^1)' \int_s^\infty z_1^2(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi - (z_1^2)' \int_s^\infty z_1^1(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi \right) + \\ & + 2 \cdot \left(z_1^1(s) \int_s^\infty z_1^2(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi - z_1^2(s) \int_s^\infty z_1^1(\xi) \frac{c_3 v_0(\xi)}{2\xi^3} e^{\xi^2} d\xi \right) + \\ & - W_1(s) \cdot \frac{c_3 v_0(s)}{2s^3} \cdot e^{s^2} = \frac{c_3 v_0(s)}{2s^3} \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом $\varphi_1(s)$ – частное решение уравнения (10), которое при $s \rightarrow \infty$ ведет себя как $O(Q(s)e^{-s^2})$, где $Q(s)$ – некоторая рациональная функция. Следовательно мы можем записать общий вид решений ведущих себя при $s \rightarrow \infty$ указанным образом:

$$v_1(s) = \beta_1 z_1^1(s) + \varphi_1(s),$$

где β_1 – произвольная постоянная.

Заметим, что частные решения остальных уравнений системы (8) также могут быть представлены в виде

$$\varphi_n(s) = z_n^1(s) \int_1^s z_n^2(\xi) g_n(\xi) d\xi + z_n^2(s) \int_s^\infty z_n^1(\xi) g_n(\xi) d\xi, \quad n \geq 2, \quad (13)$$

где $g_n(\xi)$, $n \geq 2$ – некоторые функции. Подставим функцию $\varphi_n(s)$ в соответствующее уравнение. Учитывая результат подстановки (12), получаем формальное равенство:

$$\varphi_n''(s) + 2s\varphi_n'(s) + (2n)\varphi_n(s) = -W_n(s)g_n(s) = \sum_{i+j=n+2} \frac{c_i}{2^{i-2}s^i} v_j, \quad (14)$$

как и прежде $W_n(s)$ – определитель Вронского для системы функций $z_n^1(s)$, $z_n^2(s)$ и соответствующего уравнения. Согласно формуле Лиувилля-Остроградского вронскиан с точностью до умножения на константу имеет вид:

$$W_n(s) = e^{-s^2}$$

Вернемся к формуле (13) и покажем, что она справедлива и при $n \geq 2$. При этом, определяемое ей решение имеет порядок $\varphi_n = O(Q(s)e^{-s^2})$ при $s \rightarrow \infty$, $Q(s)$ – рациональная функция. Действительно при $n = 2$ формула (13) принимает вид:

$$\varphi_2(s) = z_2^1(s) \int_1^s z_2^2(\xi) g_2(\xi) d\xi + z_2^2(s) \int_s^\infty z_2^1(\xi) g_2(\xi) d\xi,$$

где $g_2(s) = \left(\frac{c_3}{2s^3} v_1 + \frac{c_4}{4s^4} v_0 \right) \cdot O(e^{s^2})$. Но $v_0(s)$, $v_1(s)$ – мы выбирали таким образом, что $v_0(s) = O(Q_0(s)e^{-s^2})$, $v_1(s) = O(Q_1(s)e^{-s^2})$. Учитывая, что $z_2^1(s) = O(se^{-s^2})$, а $z_2^2(s) = O(Q(s))$, получаем

$$\varphi_2(s) = O(e^{-s^2}),$$

при $s \rightarrow \infty$.

Допустим, что формула (13) верна при $n = k$, причем $\varphi_k(s) = O(Q(s)e^{-s^2})$, при $s \rightarrow \infty$, покажем, что она справедлива и при $n = k + 1$. Для этого заметим, что $z_n^1 = O(s^{n-1}e^{-s^2})$, $z_n^2(s) = O(s^{n-2})$, а $g_n(s) = O(Q(s))$ при $s \rightarrow \infty$. Но тогда

$$z_n^1(s) \cdot g_n(s) = O(P(s)e^{-s^2}), s \rightarrow \infty,$$

$$z_n^2(s) \cdot g_n(s) = O(Q(s)),$$

$s \rightarrow \infty$. Где $Q(s), P(s)$ – по прежнему некоторые рациональные функции. А значит и $\varphi_{k+1}(s) = O(Q(s)e^{-s^2})$. Тогда любое финально ограниченное решение уравнения (8) может быть представлено в виде:

$$v_{k+1}(s) = \beta_{k+1} z_{k+1}^1(s) + \varphi_{k+1}(s), \quad (15)$$

где β_{k+1} – произвольная константа. Более того данное решение ведет себя как $O(Q(s)e^{-s^2})$, $s \rightarrow \infty$.

После того как найдены явные формулы для решений системы уравнений (8), можно найти асимптотические представления для этих решений при $s \rightarrow 0$.

3. ВНУТРЕННЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ.

Теперь можно приступить к построению внутреннего разложения, которое должно быть согласовано с внешним разложением, т.е. с формальным асимптотическим рядом V . Для этого сделаем обратную замену переменных в ряде V и сгруппируем слагаемые по функциям $\left\{ \frac{\ln^m t}{t^{\frac{k}{2}}} \right\}$, где $k, m \in \mathbb{N}$, причем $m \leq k$. В результате данной группировки получим новый формальный асимптотический ряд:

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{k}{2}}} \sum_{j=0}^k \ln^j t \cdot Y_k^j(x), \quad t \rightarrow \infty \quad (16)$$

где $Y_k^j(x)$ – асимптотические ряды при $x \rightarrow \infty$ Таким образом внутреннее разложение решения исходной задачи будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{k}{2}}} \sum_{j=0}^k \ln^j t \cdot U_k^j(x), \quad t \rightarrow \infty \quad (17)$$

Дифференциальные уравнения для функций $U_k^j(s)$ получаются после формальной подстановки (17) в исходное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U(x, t)) = -LU(x, t).$$

Группируя слагаемые при одинаковых степенях $\left\{ \frac{\ln^m t}{t^{\frac{k}{2}}} \right\}$, получаем рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2}{dx^2} U_k^j(x) - c(x) \cdot U_k^j(x) = 0, \quad j \leq k, \quad k - j < 2, \quad (18)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U_m^i(x) - c(x) \cdot U_m^i(x) = \frac{m-2}{2} \cdot U_{m-2}^i(x) - (i+1) \cdot U_{m-2}^{i+1}(x), \quad m-i \geq 2, \quad (19)$$

если в какой-то из функций $U_j^i(x)$ верхний индекс окажется больше нижнего, то считаем ее тождественно нулевой. Оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 1. Асимптотические ряды $Y_k^m(x)$, определяемые из условия согласования, являются формальными асимптотическими рядами уравнений (18), (19).

Доказательство. Для доказательства рассмотрим операторы $A_{n,x}$, $A_{m,s}$ переводящие про-

странство формальных степенных рядов по калибровочным последовательностям $\left\{ \frac{\ln^j t}{t^{\frac{k}{2}}} \right\}$,

$\left\{ \frac{1}{t^{\frac{k}{2}}} \right\}$ соответственно, в пространство их частичных сумм, таким образом, что в них входят

все слагаемые порядка $\frac{1}{t^{\frac{\nu}{2}}}$, где $\nu \leq n$. Подставим в уравнение (6) частичную сумму ряда (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(A_{n,s}V) - \frac{s}{2t} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(A_{n,s}V) &= \frac{1}{4t} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2}(A_{n,s}V) - c(2\sqrt{t} \cdot s)(A_{n,s}V) - \\ &- \sum_{j=0}^n \frac{V_j(s)}{t^{\frac{j}{2}}} \left(c(2\sqrt{t}s) - \sum_{i=3}^{n+2-j} \frac{c_i}{2^i s^i t^{\frac{i}{2}}} \right), \end{aligned}$$

или, в переменных (x, t)

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_{n,s}V) = -L(A_{n,s}V) - \sum_{j=0}^n \frac{V_j\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)}{t^{\frac{j}{2}}} \left(c(x) - \sum_{i=3}^{n+2-j} \frac{c_i}{x^i} \right).$$

Далее применим оператор $A_{m,x}$ к полученному равенству, учитывая, что $A_{m,x}A_{n,s}V = \sum_{l=0}^m \frac{1}{t^{\frac{l}{2}}} \sum_{j=0}^l \ln^j t \cdot B_{n-l}Z_l^j$. В результате этого в получившемся уравнении останутся лишь

конечные суммы вида $\sum_{i,j} \frac{\ln^j t}{t^{\frac{i}{2}}} f_i^j(x)$, группируя слагаемые при одинаковых степенях $\frac{\ln^j t}{t^{\frac{i}{2}}}$

получаем систему тождеств, которым удовлетворяют частичные суммы $B_{n-l}Z_l^j$, данные тождества отличаются от системы уравнений (18) лишь на достаточно малое слагаемое, которое при $x \rightarrow \infty$ ведет себя как $O(x^{-(n+2-l)})$. Отсюда вытекает, что ряды $Z_l^j(x)$ формальные асимптотические ряды уравнений (18) при $x \rightarrow \infty$. $\square$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Таким образом, были построены формальные асимптотические ряды для уравнения (1). Существенное отличие данной задачи, от задач близкой тематики состоит в том, что на этапе согласования внешнего и внутреннего разложений, не удастся устранить неопределенность в выборе коэффициентов асимптотических рядов. Более точно, на каждом шаге построения функций $V_k(s)$ возникает константа β_k , которая по-видимому является функционалом на пространстве функций D , определяющих начальные данные задачи. Дальнейшие исследования будут направлены на доказательство предположения о том, что существует решение исходной начально-краевой задачи, которое может быть представлено построенным асимптотическим рядом, при этом константы β_k определяются однозначно, исходя из начальных данных задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Ильин. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач* // Наука – 1989.
- [2] А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // УМН, 17:3(105) (1962), 3–146

ДЕГТЯРЁВ ДЕНИС ОЛЕГОВИЧ, РОССИЯ, ЧЕЛЯБИНСК, ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

E-mail: degtyarev.d.o@gmail.com

С.Ф. ДОЛБЕЕВА

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С МНОГИМИ МАЛЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ НА ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрена краевая задача для двумерного уравнения Лапласа в области, из которой выброшено много отверстий малого диаметра. Получено равномерное асимптотическое разложение решения задачи.

We consider the boundary value problem for a two-dimensional Laplace equation in the domain from which many small holes are thrown away. The uniform asymptotic expansion of the solution is obtained.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x) \quad (1)$$

с граничным условием

$$u_\varepsilon(x) \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

в области Ω_ε , зависящей от малого параметра $\varepsilon > 0$. Эта область получается из ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ путём выбрасывания множества ω_ε малой меры порядка ε . Как на границе $\partial\Omega$, так и на границе $\partial\omega_\varepsilon$ выполняются какие-нибудь краевые условия. Вопрос состоит в том, какова асимптотика решения такой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Начнём с изучения случая одного отверстия в трёхмерном случае, когда множество ω_ε это окрестность начала координат. Естественно предположить, что решение краевой задачи (1), (2) разлагается в ряд

$$u_\varepsilon(x) \stackrel{as}{=} u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x). \quad (3)$$

Ясно, что $u_0(x)$ — это решение уравнения (1), которое равно нулю при $x \in \partial\Omega$. Коэффициенты $u_k(x)$ это не гладкие функции, а гармонические функции, которые имеют особенности в начале координат.

Для построения равномерного приближения решения во всей области ω_ε надо рассмотреть так называемое внутреннее разложение в окрестности начала координат, растянутые внутренние переменные $\xi_i = \varepsilon^{-1}x_i$ и асимптотический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi). \quad (4)$$

Все функции $v_k(\xi)$ гармонические вне области ω и равны нулю на $\partial\omega$. Ряды (3) и (4) должны быть согласованы, что даёт возможность определить все коэффициенты этих рядов [1].

Так обстоит дело в трёхмерном случае. Совсем другая ситуация наблюдается при $n = 2$. В двумерном случае не существует асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра ε . В 1977 г. впервые в качестве калибровочных функций были рассмотрены рациональные функции $\mu(\ln \varepsilon)$ и построено равномерное асимптотическое разложение решения с точностью до любой степени малого параметра. Оказалось, что калибровочные коэффициенты асимптотического ряда — это произведение различных степеней ε и $\mu(\ln \varepsilon)$. Асимптотика в случае одного малого отверстия была построена и обоснована

в [2]. В несколько видоизменённом виде равномерная асимптотика решения строится и в случае, когда множество ω_ε состоит из нескольких малых окрестностей точек $\mathbf{P}_k$.

Здесь мы рассмотрим конкретную краевую задачу, когда число малых окрестностей велико. Из круга радиуса R , $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$ с центром в начале координат удалено много малых окружностей, центры которых $\mathbf{P}_k$ расположены на окружности радиуса a . Радиус малых отверстий равен $\varepsilon \ll 1$, их число равно $N = 2m + 1$ и они расположены равномерно на окружности $x_1^2 + x_2^2 = a^2$.

$$\Delta u \equiv \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -4,$$

$$u(x) = 0 \text{ при } |x| = R \text{ и при } |x - \mathbf{P}_k| = \varepsilon, k = \overline{1, N}$$

Запишем функцию Грина для уравнения Лапласа с краевым условием $u(x) = 0$ при $|x| = R$ и с особенностью в точке $\mathbf{P}_0 = (a, 0)$.

Она имеет следующий вид:

$$\Gamma(x, \mathbf{P}_0) = \frac{1}{2} \ln R^2 \frac{|x|^2 - 2ax_1 + a^2}{a^2|x|^2 - 2aR^2x_1 + R^4}.$$

Рассмотрим асимптотику этой функции в окрестности точки $(a, 0)$. Введём обозначения: $x_1 = a + y_1, x_2 = y_2$. Тогда

$$\Gamma_0(x) \equiv \Gamma(x, \mathbf{P}_0) = \ln |y| + \ln \frac{R}{R^2 - a^2} + \frac{ay_1}{R^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \frac{y_2^2 - y_1^2}{(R^2 - a^2)^2} + \frac{a^3(y_1^3 - 3y_1y_2^2)}{3(R^2 - a^2)^3} + O(|y|^4)$$

Угол между соседними точками равен $\theta = \frac{2\pi}{N}$,

координаты точки $\mathbf{P}_k$ это $(a \cos k\theta, a \sin k\theta)$.

Обозначим $\Gamma_k(x) \equiv \Gamma(x, \mathbf{P}_k)$.

Итак,

$$\Gamma_k(x) = \frac{1}{2} \ln R^2 \frac{(x_1 - a \cos k\theta)^2 + (x_2 - a \sin k\theta)^2}{(x_1^2 + x_2^2)a^2 - 2x_1aR^2 \cos k\theta - 2x_2aR^2 \sin k\theta + R^4}.$$

$$\text{В частности } \Gamma_k(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{2} \ln R^2 \frac{2a^2 - 2a^2 \cos k\theta}{a^4 - 2a^2R^2 \cos k\theta + R^4},$$

$$\Gamma_0(x) = \frac{1}{2} \ln R^2 \frac{(x_1 - a)^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)a^2 - 2x_1aR^2 + R^4}.$$

Если ввести внутренние переменные $(x_1 - a = \varepsilon\xi, x_2 = \varepsilon\eta)$, то

$$\Gamma_0(x) = \ln R + \ln \varepsilon + \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \ln(R^2 - a^2) + \dots$$

Внешнее асимптотическое разложение имеет вид

$$u(x, \varepsilon) = U(x) + l_0(\varepsilon)\Gamma_0(x) + \sum_{k=1}^{2m} l_k(\varepsilon)\Gamma_k(x).$$

Вследствие симметрии задачи все $l_k(\varepsilon) = l(\varepsilon)$, поэтому

$$u(x, \varepsilon) = U(x) + l(\varepsilon)[\Gamma_0(x) + \sum_{k=1}^{2m} \Gamma_k(x)],$$

Главный член асимптотики внутреннего разложения это

$$v(x, \varepsilon) = l(\varepsilon) \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Условие согласования асимптотических рядов состоит в равенстве

$$u(x, \varepsilon) \approx v(x, \varepsilon) \text{ при } x \approx \mathbf{P}_0.$$

Поэтому равенство главных членов означает следующее соотношение:

$$U(a, 0) + l(\varepsilon)[\ln R + \ln \varepsilon + \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \ln(R^2 - a^2) + \sum_{k=1}^{2m} \Gamma_k(a, 0)] = l(\varepsilon) \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{2m} \Gamma_k(a, 0) = m \ln(2a^2 R^{-2}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \ln(1 - \cos k\theta) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \ln \left(\left(\frac{a}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cos k\theta + 1 \right),$$

то коэффициент $l(\varepsilon)$ определяется из равенства

$$U(a, 0) + l(\varepsilon) \left[\ln \frac{R}{(R^2 - a^2)} + \ln \varepsilon + m \ln(2a^2 R^{-2}) + T \right] = 0,$$

где

$$T = \sum_{k=1}^m \left[\ln(1 - \cos k\theta) - \ln \left(\left(\frac{a}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{R}\right)^2 \cos k\theta + 1 \right) \right].$$

В результате несложных вычислений получим, что

$$T = 2 \ln m! + m \left(2 \ln \theta - \ln 2 - \ln \left[\left(\frac{a}{R}\right)^4 + 1 \right] \right) - \sum_{k=1}^m f\left(\frac{k}{N}\right),$$

$$\text{где } f(z) = 2 \ln \frac{\sin \pi z}{\pi z} - \ln(1 - b \cos 2\pi z), b = \frac{2\left(\frac{a}{R}\right)^2}{\left(\frac{a}{R}\right)^4 + 1}$$

Основной результат статьи - это получение асимптотической формулы решения при малых ε и больших N . Если точка (x, y) находится не близко к окружности $x^2 + y^2 = a^2$, то после приближения сумм соответствующими интегралами получаем, что

$$u_0(r, 0) = U(r, 0) + l(\varepsilon) \left[(2m+1) \ln R + \frac{1}{2} N \int_0^1 F^*(z) dz + \left(\frac{1}{40} B_4 + \frac{1}{8} B_3 \right) N^{-3} \right],$$

где

$$F^*(z) = \ln \frac{r^2 - 2ar \cos 2\pi z + a^2}{r^2 a^2 - 2ra R^2 \cos 2\pi z + R^4}$$

$$|B_j| \leq \|F^*\|_{C_j}. \quad U(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$$

$$U(a, 0) + l(\varepsilon) \left[\ln \frac{R}{(R^2 - a^2)} + \ln \varepsilon + m \ln(2a^2 R^{-2}) + T \right] = 0$$

$$T = 2 \ln m! + m \ln \frac{\theta^2 R^4}{2(a^4 + R^4)} - (2m+1) \int_0^{\frac{1}{2}} f(z) dz + \frac{b_3}{96N^3} + \frac{b_4}{80N^3},$$

$$N = 2m+1, \theta = \frac{2\pi}{N}, b = \frac{2a^2 R^2}{a^4 + R^4}.$$

$$f(z) = 2 \ln \frac{\sin \pi z}{\pi z} - \ln(1 - b \cos 2\pi z), f(0) = f'(0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad |b_j| \leq \|f\|_{C_j}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.:Наука, 1989.
- [2] Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием. // Математический сборник Т.103, N 2, 1977 г., С.265-284.

ДОЛБЕЕВА СВЕТЛАНА ФИЛИППОВНА, 454001, РОССИЯ, Г. ЧЕЛЯБИНСК, ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, УЛ. БР.КАШИРИНЫХ, Д.129

E-mail: dolbeeva@gmail.com

А.Г. Дьяконов

КРИТЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУММЫ ФУНКЦИЙ ОТ k ПЕРЕМЕННЫХ

Описаны все системы точек, на которых любая функция представима в виде суммы функций k переменных. Описания используют понятие «размеченного параллелепипеда» и обобщают результат Л. Рида и К. Сана, полученный при исследовании вырожденности матрицы попарных расстояний.

ВВЕДЕНИЕ

Представления функций в виде суммы функций меньшего числа переменных интенсивно исследуются с середины прошлого века [1], [2]. Возможность представления на конечной системе точек функции в виде суммы функций, зависящих от одной переменной, связана с невырожденностью матрицы попарных l_1 -расстояний точек системы [3]. Отметим, что задача нахождения критериев такой невырожденности хорошо известна в теории интерполяции (необходимую библиографию можно найти в [3], [4]). Таким образом, размерность пространства всевозможных линейных комбинаций столбцов матрицы попарных l_1 -расстояний совпадает с числом точек системы тогда и только тогда, когда любая функция на точках системы представима в требуемом виде. Оказывается, что в общем случае (при представлении в виде суммы функций от k переменных) справедлив аналогичный результат: надо лишь вместо линейных комбинаций рассматривать полиномы над столбцами ограниченной степени. В работе даётся краткое обоснование этого факта, а также описываются все системы точек, для которых представления всегда существуют. Напомним, что подобное точное описание для $k = 1$ было получено лишь в 1993 году [4], хотя проблема стояла, начиная с работ И. Шёнберга [5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью работы является описание всех систем точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$, которые обладают следующим свойством: любая функция f , заданная на системе S , представима в виде суммы конечного числа функций от k переменных, т.е.

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} f_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \quad (1)$$

Точнее, будут описаны все системы, которые этим свойством не обладают, что формализовано ниже термином « k -сингулярная система». Например, на всех вершинах квадрата $\{(\pm 1, \pm 1)\}$ в виде суммы функций от одной переменной реализуются только функции, удовлетворяющие условию

$$f(+1, +1) + f(-1, -1) = f(-1, +1) + f(+1, -1),$$

а на любых трёх вершинах реализуется произвольная функция.

Рассмотрим систему $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subset \mathbb{R}^m$. На множестве $\{1, 2, \dots, q\}$ введем отношение эквивалентности $\sim_t$, которое соответствует равенству t -й координаты:

$$i \sim_t j \Leftrightarrow (\tilde{s}_i)_t = (\tilde{s}_j)_t,$$

$t \in \{1, 2, \dots, m\}$. Запишем по столбцам в (бинарную) матрицу $T^t = \|\theta_{ij}\|_{q \times (p(t)+1)}$ характеристические векторы классов эквивалентности $\sim_t$, т.е.

$$\theta_{ij} = 1 \Leftrightarrow (\tilde{s}_i)_t = a_{t,j-1},$$

$i \in \{1, 2, \dots, q\}$, $j \in \{1, 2, \dots, p(t) + 1\}$, где

$$\{a_{t0}, a_{t1}, \dots, a_{tp(t)}\} = \{(\tilde{s}_i)_t \mid i \in \{1, 2, \dots, q\}\} -$$

– множество значений t -й координаты, $a_{t0} < a_{t1} < \dots < a_{tp(t)}$.

Нетрудно видеть, что всевозможные значения функции вида (1) описываются всевозможными полиномами степени не выше k над столбцами матрицы $T_S = [T^1 \dots T^m]$ (полиномы с нулевым свободным членом, умножение поэлементное). Ниже множество таких полиномов степени не выше k над столбцами матрицы H или векторами множества H будем обозначать через $\mathbb{U}^k(H)$. $\mathbb{U}^1(H)$ (множество линейных комбинаций) будем обозначать также через $\mathbb{L}(H)$. Пусть также $\mathbb{L}^\perp(H)$ – пространство ортогональное к $\mathbb{L}(H)$ и $F(H) = \|F(h_{ij})\|$ при $H = \|h_{ij}\|$ и $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Следующая лемма является простым обобщением леммы из [3] (см. также [6]).

Лемма 1. Для функции $F_k(x) = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k (x - j + 1)$, и системы попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subseteq \mathbb{R}^m$, $q \geq 2$, при $k \leq m$ справедливы равенства

$$\mathbb{U}^k(P_S) = \mathbb{L}(F_k(H_S)) = \mathbb{U}^k(T_S) = \mathbb{U}^k(P'_S),$$

где $H_S = T_S \cdot T_S^\top$, P_S – матрица попарных расстояний Хэмминга системы точек S , а P'_S – l_1 -расстояний.

Определение 1. Система точек S называется k -сингулярной, если размерность пространства $\mathbb{U}^k[S] = \mathbb{U}^k(T_S)$ меньше q .

Теорема 1. Система точек S не является k -сингулярной при $k \leq m$ тогда и только тогда, когда любая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на точках системы S может быть представлена в виде конечной суммы (1) функций, каждая из которых зависит от k переменных.

Теорема 1 является простым обобщением теоремы 1 из [3]. Доказательство также очевидно (из определения k -сингулярности).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ

Опишем все k -сингулярные системы точек. Рассмотрим систему $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q \subseteq \mathbb{R}^m$ попарно различных точек, $q \geq 2$, $p(t) \geq 1$ для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ (для отсутствия фиктивных размерностей). Для вектора $\tilde{w} = (w_1, \dots, w_n)^\top$ при $n = \sum_{t=1}^m p(t)$ введем обозначение $\tilde{w}^{[t]} = (w_{\eta(t)+1}, \dots, w_{\eta(t)})^\top$, где $\eta(t) = \sum_{j=1}^t p(j)$, $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ (считаем, что $\eta(0) = 0$). Пусть

$$A = \bigtimes_{t=1}^m \{a_{t0}, a_{t1}, \dots, a_{tp(t)}\} \subseteq \mathbb{R}^m,$$

для вектора $\tilde{s} \in A$ положим $w(\tilde{s}) = \tilde{w} \in \{0, 1\}^n$:

$$\tilde{w}^{[t]} = \begin{cases} (0, \dots, 0), & (\tilde{s})_t = a_{t0}, \\ (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), & (\tilde{s})_t = a_{tr}, \quad r \in \{1, 2, \dots, p(t)\}, \end{cases}$$

(единица в r -й координате) для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Запишем в матрицу N размера $2^n \times n$ последовательно по строкам все n -мерные бинарные векторы:

$$N = \begin{bmatrix} \tilde{v}(0) \\ \vdots \\ \tilde{v}(2^n - 1) \end{bmatrix},$$

$\tilde{v}(i) = (v_1, \dots, v_n)$ – бинарный вектор, представляющий двоичную запись числа i , т.е. $i = \sum_{j=1}^n v_j 2^{j-1}$. Пусть $\tilde{x}_j$ – j -й столбец этой матрицы, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Для вектора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \{0, 1\}^n$ введем обозначения

$$\tilde{x}_{\tilde{\alpha}} = \prod_{j: \alpha_j=1} \tilde{x}_j, \quad \tilde{y}_{\tilde{\alpha}} = \prod_{j: \alpha_j=0} \tilde{\bar{x}}_j,$$

здесь произведение поэлементное (конъюнкция), произведение по пустому множеству равно вектору, состоящему из одних единиц, отрицание $\tilde{\bar{x}}_j$ означает покомпонентное инвертирование вектора $\tilde{x}_j$. Будем через $\text{Ind}(\tilde{x})$ обозначать множество ненулевых координат вектора $\tilde{x}$, например, нетрудно видеть, что

$$\text{Ind}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}) = \{i + 1 \mid \tilde{v}(i) \geq \tilde{\alpha}\}, \quad \text{Ind}(\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}) = \{i + 1 \mid \tilde{v}(i) \leq \tilde{\alpha}\}$$

(здесь символ $\leq$ – «стандартное» поэлементное сравнение векторов [7]).

Для вектора $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ введем обозначение $\tilde{x}|_I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_s})^T$ при $I = \{i_1, \dots, i_s\}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$. Пусть $u(\tilde{v}(i)) = i + 1$, т.е. функция u по вектору указывает номер строки, в которой он записан в матрице N . Считаем, что $\tilde{x}_0 = \tilde{1}$, тогда очевидно, что $\mathbb{U}^k[S] = \mathbb{U}^k(\{\tilde{x}_j|_{u(w(S))}\}_{j=0}^n)$, поскольку матрица размера $q \times n$, составленная из векторов множества $\{\tilde{x}_j|_{u(w(S))}\}_{j=1}^n$, получается из матрицы T_S вычеркиванием некоторых столбцов: по одному (первому) из каждой подматрицы T^t , $t \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Для булева вектора $\tilde{\alpha}$ через $\|\tilde{\alpha}\|$ обозначаем вес (число единичных координат) этого вектора, см. [7]. Для функции f через $Z[f]$ обозначаем множество наборов, на которых она обращается в ноль. Напомним, что монотонной булевой функцией [7] называется функция $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, для которой

$$\forall \tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n \quad \forall \tilde{\beta} \in \{0, 1\}^n \quad \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}).$$

Пусть $\tilde{r} = (r_1, \dots, r_{2^n})^T$: $r_i = (-1)^{\|\tilde{v}(i-1)\|}$ при $i \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$, нетрудно доказать справедливость неравенства

$$\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = \begin{cases} (-1)^{\|\tilde{\alpha}\|}, & \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}, \\ 0, & \tilde{\alpha} \neq \tilde{\beta} \end{cases},$$

где умножение $\circ$ – поэлементное.

Лемма 2. Для монотонной булевой функции $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ справедливо равенство

$$\mathbb{U}^k(\{\tilde{x}_j|_{u(Z[f])}\}_{j=0}^n) = \mathbb{L}(\{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| \leq k}).$$

Доказательство. Равенство $\mathbb{U}^k(\{\tilde{x}_j|_I\}_{j=0}^n) = \mathbb{L}(\{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_I\}_{\tilde{\alpha}: \|\tilde{\alpha}\| \leq k})$ для произвольного множества $I \subseteq \{1, 2, \dots, 2^n\}$ следует из определения векторов $\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$. Если $f(\tilde{\alpha}) = 1$, т.е. $\tilde{\alpha} \notin Z[f]$, то $\text{Ind}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}) \cap u(Z[f]) = \emptyset$. Действительно, если $i \in \text{Ind}(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}) \cap u(Z[f]) \neq \emptyset$, т.е.

$$\tilde{v}(i-1) \geq \tilde{\alpha}, \quad f(\tilde{v}(i-1)) = 0,$$

то это противоречит монотонности функции f : $0 = f(\tilde{v}(i-1)) \geq f(\tilde{\alpha}) = 1$.

Поэтому при $\tilde{\alpha} \notin Z[f]$ справедливо равенство $\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])} = (0, \dots, 0)^T$, из которого следует утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3. Для монотонной булевой функции $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ справедливо равенство

$$\mathbb{L}^\perp(\mathbb{U}^k(\{\tilde{x}_j|_{u(Z[f])}\}_{j=0}^n)) = \mathbb{L}(\{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}).$$

Доказательство. Доказательство следует из трех очевидных фактов: 1) все векторы множества $Y_f^k = \{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| > k}$ ортогональны ко всем векторам множества $X_f^k = \{\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]: \|\tilde{\alpha}\| \leq k}$, 2) все векторы множества X_f^k линейно независимы, все векторы множества Y_f^k линейно независимы, 3) $|X_f^k| + |Y_f^k| = |Z[f]|$.

Отметим, что утверждение п. 1 следует из леммы 2 и того, что в векторах $\{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f]}$ все координаты с номерами не из $u(Z[f])$ равны нулю:

$$(\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}})_i \neq 0 \Leftrightarrow (\tilde{y}_{\tilde{\alpha}})_i = 1 \Leftrightarrow \tilde{v}(i-1) \leq \tilde{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\tilde{\nu}(i-1)) \leq f(\tilde{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{\nu}(i-1)) = 0 \Rightarrow i \in u(Z[f]).$$

Поэтому

$$(\tilde{x}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])})^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}|_{u(Z[f])}) = \tilde{x}_{\tilde{\alpha}}^T \cdot (\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\beta}}) = 0$$

для $\tilde{\alpha} \in Z[f]$: $\|\tilde{\alpha}\| \leq k$, $\tilde{\beta} \in Z[f]$: $\|\tilde{\beta}\| > k$. При доказательстве п. 3 пользуемся тем, что

$$|X_f^k| = |\{\tilde{\alpha} \in Z[f] : \|\tilde{\alpha}\| \leq k\}|, \quad |Y_f^k| = |\{\tilde{\alpha} \in Z[f] : \|\tilde{\alpha}\| > k\}|.$$

□

Далее считаем, что булева функция f задана КНФ [7] $\bigvee_{t=1}^m \bigvee_{\eta(t-1)+1 \leq a < b \leq \eta(t)} x_a x_b$.

Заметим, что функция f монотонная и $Z[f] = w[A]$, а функция w устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множеством A и множеством нулевых наборов функции f .

Теорема 2. Система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда найдётся вектор $\tilde{l}$ из $\mathbb{L}(\{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f] : \|\tilde{\alpha}\| > k})$ такой, что $\emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq u(w(S))$.

Доказательство. Система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда пространство

$$\mathbb{L}^\perp(\mathbb{U}^k(\{\tilde{x}_j|_I\}_{j=0}^n))$$

при $I = u(w(S))$ содержит ненулевой вектор. Это означает, что пространство

$$\mathbb{L}^\perp(\mathbb{U}^k(\{\tilde{x}_j|_{u(Z[f])}\}_{j=0}^n))$$

должно содержать вектор $\tilde{l}$, для которого $\emptyset \neq \text{Ind}(\tilde{l}) \subseteq I$. Из леммы 3 получаем утверждение теоремы, поскольку координаты с номерами из $\{1, 2, \dots, 2^n\} \setminus u(Z[f])$ векторов множества $\{\tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f] : \|\tilde{\alpha}\| > k}$ равны нулю (обоснование было в доказательстве леммы 3). Теорема доказана. □

Пусть функция $\Pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ обращается в ноль вне элементов множества $\times_{t=1}^m \{a_t, b_t\}$, а в точках $(c_1, \dots, c_m)$ этого множества равна $(-1)^c$, где $c = |\{t \in \{1, \dots, m\} \mid c_t = a_t\}|$. Назовём такую функцию *размеченным параллелепипедом размерности $r = |\{t \in \{1, \dots, m\} \mid a_t \neq b_t\}|$* .

Теорема 3. Система точек S k -сингулярна тогда и только тогда, когда найдётся такая конечная сумма Σ функций из множества размеченных параллелепипедов размерности больше k с одной общей вершиной $(a_{10}, \dots, a_{m0})$, что

$$\emptyset \neq N[\Sigma] \subseteq S. \quad (2)$$

Доказательство. Каждой функции g на множестве A можно «естественным образом» взаимно однозначно сопоставить вектор $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{2^n})$, в котором $z_{u(w(\tilde{s}))} = g(\tilde{s})$ и $z_i = 0$ при $i \notin u(Z[f])$. Доказываемое утверждение вытекает из теоремы 2, если условие существования вектора $\tilde{l} \in \mathbb{L}(\{\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}\}_{\tilde{\alpha} \in Z[f] : \|\tilde{\alpha}\| > k})$ заменить тем условием, что вектор $\tilde{l}$ является суммой векторов $\pm \tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} \in Z[f]$: $\|\tilde{\alpha}\| > k$ (последнее, очевидно, можно сделать, поскольку если этот вектор линейно выражается через векторы $\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}$, то рациональные коэффициенты в разложении можно привести к общему знаменателю, а вектор $\tilde{l}$ нам нужен с точностью до ненулевого множителя). Действительно, вектору $\tilde{r} \circ \tilde{y}_{\tilde{\alpha}}|_{u(Z[f])}$ при $\tilde{\alpha} \in Z[f]$ соответствует размеченный параллелепипед с множеством вершин $\times_{t=1}^m \{a_{t0}, b_t\}$, где

$$b_t = \begin{cases} a_{t0}, & \tilde{\alpha}^{[t]} = (0, \dots, 0), \\ a_{tr}, & \tilde{\alpha}^{[t]} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \end{cases}$$

(единица в r -й позиции), корректность определения следует из $\tilde{\alpha} \in Z[f]$, поскольку тогда $\|\tilde{\alpha}^{[t]}\| \leq 1$ для всех $t \in \{1, 2, \dots, m\}$. Условия $\tilde{\alpha} \in Z[f]$, $\|\tilde{\alpha}\| > k$ эквивалентны тому, что неразмеченный параллелепипед имеет размерность больше k . Поэтому вектору $\tilde{l}$ соответствует сумма Σ и условие теоремы 2 переписывается в виде (2). Теорема доказана. □

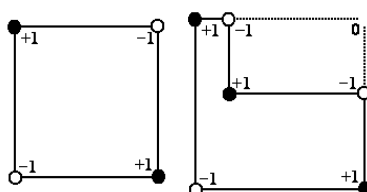


Рис. 1. Размеченный прямоугольник и сумма двух размеченных прямоугольников

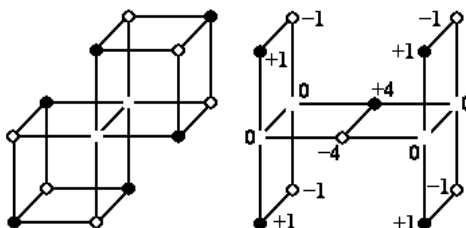


Рис. 2. Сумма двух размеченных параллелепипедов и сумма размеченных прямоугольников в пространстве

Выводы

Нетрудно видеть, что в условии теоремы 3 можно рассмотреть множество размеченных параллелепипедов размерности $k + 1$ (даже без общей вершины). Это обобщает критерий 1-сингулярности Л.Рида и К.Сана [4], в котором рассматривалось множество размеченных прямоугольников (параллелепипедов размерности 2). На рис. 1 показан пример 1-сингулярной конфигурации точек, которая получается суммой двух размеченных прямоугольников. Сам прямоугольник даёт уже рассмотренный нами пример множества $\{\pm 1, \pm 1\}$, для которого существуют функции, не представимые в виде суммы функций от одной переменной. В общем случае для описания всех конфигураций суммируются размеченные параллелепипеды, см. рис. 2.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-07-00609-а, и гранта Президента РФ, проект МД-757.2011.9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Diliberto S.P., Straus E.G.* On the approximation of a function of several variable by the sum of functions of fewer variables // Pacific J. Math. – 1951. – V.1. – Pp. 195–210.
- [2] *Арнольд В.И.* О функциях трех переменных // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 4. – С. 679–681.
- [3] *Дьяконов А.Г.* Проблема Шёнберга: критерий вырожденности матрицы l_1 -расстояний // Spectral and Evolution Problems. – 2009. – Vol. 19. – Pp. 44–49.
- [4] *Reid L., Sun X.* Distance matrices and ridge function interpolation // Canadian Journal of Mathematics. – 1993. – V.45. – Pp.1313–1323.
- [5] *Schoenberg I.J.* On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space // Ann. Math. – 1937. – №38. – Pp.787–793.
- [6] *Дьяконов А.Г.* Теория систем эквивалентностей для описания алгебраических замыканий обобщенной модели вычисления оценок. II. – Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, №3. – С.529–544.
- [7] *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов. /Под ред. В.А. Садовниченко. - 3-е изд., стер. – М.: Высш.шк.; 2001.

Дьяконов А.Г., 119991, РФ, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ, КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

E-mail: djakonov@mail.ru

Ю.Н. ЖИТЕНЕВА, Л.В. БОРОДИНА, В.С. МОЛОСТВОВ

МНОГОШАГОВЫЙ МАКСИМИН

На основе понятия максимина в работе дается определение гарантированного решения для многошаговой однокритериальной задачи при неопределенности. С помощью подходящей модификации метода динамического программирования сформулированы достаточные условия существования и найден явный вид гарантированного решения в линейно-квадратичном случае.

In this paper the definition of guaranteed solution for multistep multicriterion problem under uncertainty is introduced. This solution is based on maximin conception. The sufficient conditions of existence are formulated with relevant modification of dynamic programming method. For linear-quadratic problem the explicit form of guaranteed solution is resulted.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Упорядоченная четверка

$$\langle \Sigma, \mathbf{U}, \mathbf{Z}_u, F(U, Z_u, x_0) \rangle \quad (1)$$

образует однокритериальную K -шаговую позиционную линейно-квадратичную задачу при неопределенности.

Здесь изменение (во времени) управляемой системы Σ описывается разностным (дискретным) векторным линейным уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + u + z, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $k = 0, 1, \dots, K-1$ – точки деления всего временного интервала $[0, K]$ функционирования управляемого дискретного процесса, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – значение фазового вектора x в момент времени k , $u \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие ЛПР (лица, принимающего решение), $z \in \mathbb{R}^n$ – неопределенный фактор, $(k, x(k))$ позиция в момент времени k , $(0, x_0)$ – заданная начальная позиция, A – постоянная $n \times n$ -матрица.

$U(k)$ – стратегия (позиционная) ЛПР в момент k отождествляется с вектор-функцией $u(k, x) = P(k)x$, т.е.

$$U(k) \div u(k, x) = P(k)x, \quad P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

где $\mathbb{R}^{n \times n}$ – множество постоянных $n \times n$ -матриц. Следовательно, выбор ЛПР своей стратегии в момент времени $k = 0, 1, \dots, K-1$ сводится к выбору конкретной $n \times n$ -матрицы $P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда упорядоченный набор

$$\begin{aligned} U &= (U(0), U(1), \dots, U(K-1)) \div (u(0, x), u(1, x), \dots, u(K-1, x)) = \\ &= (P(0)x, P(1)x, \dots, P(K-1)x) \end{aligned}$$

является стратегией ЛПР в задаче (1), множество таких стратегий U обозначим через $\mathbf{U}$.

$\mathbf{Z}_u(k)$ – множество неопределенностей $Z_u(k)$ в момент времени k , причем

$$Z_u(k) \div z(k, x, u) = Q(k)x + R(k)u,$$

где матрицы $Q(k), R(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Класс неопределенностей, зависящих не только от позиции (k, x) , но и от управляющего воздействия u , используется по той причине, что действие неопределенности можно трактовать как действие еще одного фиктивного ЛПР, который, не имея своего критерия эффективности, направляет все усилия на то, чтобы "максимально навредить" существующему ЛПР. Ю.Б. Гермейер назвал такую неопределенность *стратегической*. В этом случае указанное фиктивное ЛПР кроме реализующейся позиции может использовать любую мыслимую информацию. В частности, ему может быть известно управление, реализуемое ЛПР [1, с. 333]. Здесь имеет место так называемая *информационная дискриминация ЛПР*. Неопределенность в задаче (1) определяется упорядоченным набором

$$Z_u = (Z_u(0), Z_u(1), \dots, Z_u(K-1)) \div (z(0, x, u), z(1, x, u), \dots, z(K-1, x, u)) = \\ = (Q(0)x + R(0)u, Q(1)x + R(1)u, \dots, Q(K-1)x + R(K-1)u).$$

Множество таких неопределенностей Z_u обозначим символом $\mathbf{Z}_u$.

Развитие во времени управляемого дискретного процесса в задаче (1) происходит следующим образом. ЛПР выбирает и использует свою конкретную стратегию $U \in \mathbf{U}$. Независимо от его выбора реализуется некоторая неопределенность $Z_u \in \mathbf{Z}_u$. Подставляя указанные стратегию U и неопределенность Z_u в (2), получим

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax_0 + u(0, x_0) + z(0, x_0, u(0, x_0)) = [A + P(0) + Q(0) + R(0)P(0)]x_0, \\ x(2) &= [A + P(1) + Q(1) + R(1)P(1)]x(1), \\ &\vdots \\ x(K) &= [A + P(K-1) + Q(K-1) + R(K-1)P(K-1)]x(K-1). \end{aligned}$$

В результате имеем три последовательности

$$\left\{x(k)\right\}_{k=0}^K, \left\{u[k] = P(k)x(k)\right\}_{k=0}^{K-1}, \left\{z[k] = Q(k)x(k) + R(k)P(k)x(k)\right\}_{k=0}^{K-1},$$

с помощью которых формируется критерий эффективности

$$F(U, Z_u, x_0) = x'(K)Cx(K) + \sum_{k=0}^{K-1} (u'[k]D(k)u[k] + z'[k]L(k)z[k]), \quad (3)$$

значение которого называется *исходом* для ЛПР. В (3) все используемые $n \times n$ -матрицы $C, D(k), L(k), R(k), P(k), Q(k)$ постоянны, причем $C, D(k), L(k)$ – симметричны, штрих сверху означает операцию транспонирования. Далее для $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ тот факт, что квадратичная форма $u'Mu$ определенно положительна (отрицательна), будем обозначать $M > 0$ (соответственно, $M < 0$). Также считаем, что E_n – единичная $n \times n$ -матрица, 0_n – нулевой n -вектор.

На содержательном уровне, ЛПР стремится таким образом выбрать свою стратегию $U \in \mathbf{U}$, чтобы критерий $F(U, Z_u, x_0)$ принял возможно большее значение, одновременно учитывая возможность реализации любой неопределенности $Z_u \in \mathbf{Z}_u$.

Используя понятие максимина, получим

Определение 1. Пару $(U^g, F^g[x_0]) \in \mathbf{U} \times \mathbb{R}^1$ назовем *гарантированным решением задачи* (1), если существует неопределенность $Z_u^g \in \mathbf{Z}_u$ такая, что

$$\begin{aligned} F^g[x_0] &= \max_{U \in \mathbf{U}} \min_{Z_u \in \mathbf{Z}_u} F(U, Z_u, x_0) = \\ &= \min_{Z_u \in \mathbf{Z}_u} F(U^g, Z_u, x_0) = F(U^g, Z_u^g, x_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Стратегию U^g назовем *гарантирующей*, а $F^g[x_0]$ – *гарантированным исходом*.

Замечание 1. ЛПР выгодно использовать в задаче (1) стратегию $U^g \in \mathbf{U}$ из гарантированного решения по двум причинам.

Во-первых, из равенства

$$\min_{Z_u \in \mathbf{Z}_u} F(U^g, Z_u, x_0) = F^g[x_0]$$

следует, что при реализации любой неопределенности $Z_u \in \mathbf{Z}_u$ выполнено неравенство

$$F(U^g, Z_u, x_0) \geq F^g[x_0],$$

т.е. исход ЛПР будет не меньше гарантированного.

Во-вторых, для каждой стратегии $U \in \mathcal{U}$ будет свой гарантированный (при любых $Z_u \in \mathcal{Z}_u$) исход

$$\min_{Z_u \in \mathcal{Z}_u} F(U, Z_u, x_0),$$

который не может стать больше, чем $F^g[x_0]$.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

С помощью подходящей модификации метода динамического программирования, учитывающего специфику задачи (1), получим достаточные условия существования гарантированного решения этой задачи. При этом на каждом шаге $k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$ будем использовать функцию Беллмана в виде $V^{(k)}(x) = x'\theta(k)x$, где симметричная матрица $\theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и скалярные функции

$$\begin{aligned} & W(k, x, u, z, V^{(k+1)}(Ax + u + z)) = \\ & = W(k, x, u, z, (x'A' + u' + z')\theta(k+1)(Ax + u + z)) = W[k, x, u, z, \theta(k+1)] = \\ & = u'D(k)u + z'L(k)z + (x'A' + u' + z')\theta(k+1)(Ax + u + z). \end{aligned} \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть удалось найти последовательности: скалярных функций $\{V^{(k)}(x) = x'\theta(k)x\}_{k=0}^K$, n -вектор-функций $\{u(k, x, \theta(k+1)) = P(k, \theta(k+1))x\}_{k=0}^{K-1}$, $\{z(k, x, u, \theta(k+1)) = Q(k, \theta(k+1))x + R(k, \theta(k+1))u\}_{k=0}^{K-1}$ таких, что

$$V^{(K)}(x) = x'Cx \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad (6)$$

при всех $x, u \in \mathbb{R}^n$, $\theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$ будет

$$\min_z W[k, x, u, z, \theta(k+1)] = W[k, x, u, z(k, x, u, \theta(k+1)), \theta(k+1)]; \quad (7)$$

для каждой $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \max_u W[k, x, u, z(k, x, u, \theta(k+1)), \theta(k+1)] = \\ & = W[k, x, u(k, x, \theta(k+1)), z(k, x, u(k, x, \theta(k+1))), \theta(k+1), \theta(k+1)]; \end{aligned} \quad (8)$$

и при любых $x \in \mathbb{R}^n$ для $k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$ выполняются тождества

$$\begin{aligned} & V^{(k)}(x) = x'\theta(k)x = \\ & = W[k, x, u(k, x, \theta(k+1)), z(k, x, u(k, x, \theta(k+1))), \theta(k+1), \theta(k+1)] \end{aligned}$$

(откуда находим матрицы $\theta(k)$ ($k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$)).

Тогда при любом выборе начального фазового вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ гарантированное решение ($U^g, F^g[x_0]$) задачи (1) примет вид

$$\begin{aligned} & U^g \div (u^g[0, x], u^g[1, x], \dots, u^g[K - 1, x]), \\ & F^g[x_0] = V^{(0)}(x_0) = x_0'\theta(0)x_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$u^g[k, x] = u(k, x, \theta(k+1)) \quad (k = 0, 1, \dots, K - 1). \quad (10)$$

Доказательство утверждения проводится стандартным приемом, следуя, например, [2, с. 366-367].

Замечание 2. Для каждого момента времени $k = 0, 1, \dots, K - 1$ рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Gamma(k) = \langle \mathcal{U}, \mathcal{Z}, W[k, x, u, z, \theta(k+1)] \rangle,$$

где $\mathcal{U}$ – множество стратегий вида $u(k, x) = P(k)x$, $\mathcal{Z}$ – множество неопределенностей $z(k, x, u, \theta(k+1)) = Q(k)x + R(k)u$, критерий $W[k, x, u, z, \theta(k+1)]$ задан в (5).

Тогда объединение требований (7) и (8) означает

$$\begin{aligned} & \max_{u \in \mathcal{U}} \min_{z \in \mathcal{Z}} W[k, x, u, z, \theta(k+1)] = \min_{z \in \mathcal{Z}} W[k, x, u(k, x, \theta(k+1)), z, \theta(k+1)] = \\ & = W[k, x, u(k, x, \theta(k+1)), z(k, x, u(k, x, \theta(k+1))), \theta(k+1), \theta(k+1)] = \\ & = W^g[k, x, \theta(k+1)], \end{aligned}$$

т.е. в каждый момент времени $k = K - 1, K - 2, \dots, 1, 0$ ЛПР реализует максимин в вспомогательной задаче $\Gamma(k)$. Тогда теорема 1 фактически означает, что, используя локальный максимин в каждый момент времени k , ЛПР добивается реализации глобального максимина (4) в задаче (1).

3. ЯВНЫЙ ВИД ГАРАНТИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ

Перед тем, как перейти к построению явного вида гарантированного решения задачи (1), приведем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть симметричные $n \times n$ -матрицы $L(k-1) > 0$ и $\theta(k) < 0$, тогда $L(k-1) + \theta(k) > 0$, если $\lambda(k-1) > \mu(k)$, где $\lambda(k-1)$ и $-\mu(k)$ – наименьшие корни характеристических уравнений $\det[L(k-1) - \lambda E_n] = 0$ и $\det[\theta(k) - \mu E_n] = 0$ соответственно.

Доказательство. Если $\lambda(k-1)$ и $-\mu(k)$ – наименьшие корни соответствующих характеристических уравнений, то

$$z' L(k-1) z \geq \lambda(k-1) z' z, \quad z' \theta(k) z \geq -\mu(k) z' z \quad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

и тогда

$$z' [L(k-1) + \theta(k)] z \geq [\lambda(k-1) - \mu(k)] z' z > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}.$$

□

Лемма 2. Если симметричные постоянные $n \times n$ -матрицы

$$D(k) < 0, C < 0, L(k-1) > 0, L(k-1) + \theta(k) > 0, \quad (11)$$

то матрицы

$$\begin{aligned} M(\theta(k)) &= \theta(k) \{ \theta^{-1}(k) - [L(k-1) + \theta(k)]^{-1} \} \theta(k), \\ \theta(k-1) &= A' M(\theta(k)) \{ M^{-1}(\theta(k)) - [D(k) + M(\theta(k))]^{-1} \} M(\theta(k)) A \end{aligned} \quad (12)$$

симметричны, $M(\theta(k)) < 0$ и при

$$\det A \neq 0 \quad (13)$$

матрица $\theta(k-1) < 0$.

Доказательство. Симметричность $M(\theta(k))$ и $\theta(k-1)$ следует из свойств

$$(ABC)' = C' B' A', [A^{-1}]' = [A']^{-1}, A'' = A$$

и легко проверяемых равенств

$$M(\theta(k)) = M'(\theta(k)), \theta(k-1) = \theta'(k-1).$$

Установим определенную отрицательность $M(\theta(k))$ и $\theta(k-1)$ с помощью цепочек импликаций

$$\begin{aligned} \theta(k) < 0 &\Rightarrow \det \theta(k) \neq 0 \Rightarrow \exists \theta^{-1}(k) \wedge \theta^{-1}(k) < 0, \\ L(k-1) + \theta(k) > 0 &\Rightarrow [L(k-1) + \theta(k)]^{-1} > 0 \Rightarrow -[L(k-1) + \theta(k)]^{-1} < 0, \\ \theta^{-1}(k) < 0 \wedge -[L(k-1) + \theta(k)]^{-1} < 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \theta^{-1}(k) - [L(k-1) + \theta(k)]^{-1} < 0 \wedge \det \theta(k) \neq 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow M(\theta(k)) = \theta(k) \{ \theta^{-1}(k) - [L(k-1) + \theta(k)]^{-1} \} \theta(k) < 0, \\ D(k) < 0 \wedge M(\theta(k)) < 0 &\Rightarrow [D(k) + M(\theta(k))] - M(\theta(k)) = D(k) < 0 \wedge [3, \text{с. 89}] \Rightarrow \\ \Rightarrow M^{-1}(\theta(k)) - [D(k) + M(\theta(k))]^{-1} < 0, \\ \det A \neq 0 \wedge M(\theta(k)) < 0 &\Rightarrow \det [AM(\theta(k))] \neq 0, \\ \det [AM(\theta(k))] \neq 0 \wedge M^{-1}(\theta(k)) - [D(k) + M(\theta(k))]^{-1} < 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \theta(k-1) = A' M(\theta(k)) \{ M^{-1}(\theta(k)) - [D(k) + M(\theta(k))]^{-1} \} M(\theta(k)) A < 0. \end{aligned}$$

□

Следствие 1. При выполнении требований (11) и (13) леммы 2 имеет место импликация

$$\theta(k) < 0 \Rightarrow \theta(k-1) < 0. \quad (14)$$

Справедливость (14) фактически установлена в лемме 2.

Замечание 3. Определение 1 приводит к следующему способу построения гарантированного решения задачи (1), состоящему из $K+1$ последовательных этапов. При этом функцию Беллмана будем искать в виде квадратичной формы $V^{(k)}(x) = x'\theta(k)x$, где симметричная $n \times n$ -матрица $\theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Этап 1 (при $k = K$). Из (6) следует, что матрица $\theta(K) = C$.

Этап 2 (при $k = K - 1$). Функция $W[K - 1, x, u, z, \theta(K)]$, заданная в (5), примет вид

$$W[K - 1, x, u, z, \theta(K)] = u'D(K - 1)u + z'L(K - 1)z + (x'A' + u' + z')\theta(K)(Ax + u + z). \quad (15)$$

Проверив выполнение условия $L(K - 1) + C = L(K - 1) + \theta(K) > 0$, строим $z(K - 1, x, u, \theta(K))$, исходя из требования

$$\min_z W[K - 1, x, u, z, \theta(K)] = W[K - 1, x, u, z(K - 1, x, u, \theta(K)), \theta(K)] \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n. \quad (16)$$

Затем найдем вектор-функцию $u(K - 1, x, \theta(K))$ из условия

$$\begin{aligned} \max_u W[K - 1, x, u, z(K - 1, x, u, \theta(K)), \theta(K)] &= \\ = W[K - 1, x, u(K - 1, x, \theta(K)), z(K - 1, x, u(K - 1, x, \theta(K)), \theta(K)), \theta(K)] &= \\ = \overline{W}[K - 1, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (17)$$

и постоянную $n \times n$ -матрицу $\theta(K - 1)$ из тождества

$$x'\theta(K - 1)x = \overline{W}[K - 1, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, на втором этапе должны быть найдены вектор-функция $u^g[K - 1, x] = u(K - 1, x, \theta(K))$ и симметричная матрица $\theta(K - 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Этап k (при $k = K - 2, K - 3, \dots, 1$). Действуя аналогично этапу 2, строим вектор-функцию $u^g[k, x] = u(k, x, \theta(k + 1))$ и симметричную матрицу $\theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Этап 0 (при $k = 0$). На этом этапе функция

$$W[0, x, u, z, \theta(1)] = u'D(0)u + z'L(0)z + (x'A' + u' + z')\theta(1)(Ax + u + z).$$

Поступаем аналогично этапу 2, именно, проверяем выполнение требования $L(0) + \theta(1) > 0$ и строим, во-первых, вектор-функцию $z(0, x, u, \theta(1))$, исходя из требования

$$\min_z W[0, x, u, z, \theta(1)] = W[0, x, u, z(0, x, u, \theta(1)), \theta(1)] \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n,$$

во-вторых, n -вектор-функцию $u(0, x, \theta(1))$, согласно условию

$$\begin{aligned} \max_u W[0, x, u, z(0, x, u, \theta(1)), \theta(1)] &= \\ = W[0, x, u(0, x, \theta(1)), z(0, x, u(0, x, \theta(1)), \theta(1)), \theta(1)] &= \overline{W}[0, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

и, наконец, $n \times n$ -матрицу $\theta(0)$ из равенства

$$x'\theta(0)x = \overline{W}[0, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

В результате будут найдены вектор-функция $u^g[0, x] = u(0, x, \theta(1))$ и постоянная $n \times n$ -матрица $\theta(0)$.

Тогда при любом выборе в (2) начального фазового вектора $x(0) = x_0$, используя (9) и (10), получим явный вид гарантированного решения $(U^g, F^g[x_0])$ задачи (1).

Реализуя алгоритм, указанный в замечании 3, получим следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть в задаче (1)

$$D(k) < 0, L(k) > 0, C < 0, \det A \neq 0 \quad (k = 0, 1, \dots, K - 1) \quad (18)$$

и последовательность матриц $\{\theta(k)\}_{k=0}^K$, полученная из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
 \theta(K) &= C, \quad M(\theta(K)) = C[C^{-1} - (L(K-1) + C)^{-1}]C, \\
 \theta(K-1) &= A'M(\theta(K))\{M^{-1}(\theta(K)) - [D(K-1) + M(\theta(K))]^{-1}\}M(\theta(K))A, \\
 M(\theta(K-1)) &= \theta(K-1)\{\theta^{-1}(K-1) - [L(K-2) + \theta(K-1)]^{-1}\}\theta(K-1), \\
 \theta(K-2) &= A'M(\theta(K-1))\{M^{-1}(\theta(K-1)) - [D(K-2) + M(\theta(K-1))]^{-1}\}M(\theta(K-1))A, \\
 &\vdots \\
 \theta(k) &= A'M(\theta(k+1))\{M^{-1}(\theta(k+1)) - [D(k) + M(\theta(k+1))]^{-1}\}M(\theta(k+1))A, \\
 M(\theta(k)) &= \theta(k)\{\theta^{-1}(k) - [L(k-1) + \theta(k)]^{-1}\}\theta(k), \\
 \theta(k-1) &= A'M(\theta(k))\{M^{-1}(\theta(k)) - [D(k-1) + M(\theta(k))]^{-1}\}M(\theta(k))A, \\
 &\vdots \\
 \theta(1) &= A'M(\theta(2))\{M^{-1}(\theta(2)) - [D(1) + M(\theta(2))]^{-1}\}M(\theta(2))A, \\
 M(\theta(1)) &= \theta(1)\{\theta^{-1}(1) - [L(0) + \theta(1)]^{-1}\}\theta(1), \\
 \theta(0) &= A'M(\theta(1))\{M^{-1}(\theta(1)) - [D(0) + M(\theta(1))]^{-1}\}M(\theta(1))A,
 \end{aligned} \tag{19}$$

такова, что

$$L(k) + \theta(k+1) > 0 \quad (k = K-1, \dots, 0). \tag{20}$$

Тогда, при любом выборе начального фазового вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (в уравнении (2)) гарантированное решение $(U^g, F^g[x_0])$ задачи (1) имеет вид

$$\begin{aligned}
 U^g &\div (-[D(0) + M(\theta(1))]^{-1}M(\theta(1))Ax, -[D(1) + M(\theta(2))]^{-1}M(\theta(2))Ax, \dots, \\
 &\quad -[D(K-1) + M(\theta(K))]^{-1}M(\theta(K))Ax), \\
 F^g[x_0] &= x_0\theta(0)x_0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Доказательство. Согласно этапу 1 из замечания 3, матрица $\theta(K) = C < 0$ и функция Беллмана в момент времени $k = K$ будет $V^{(K)}(x) = x'Cx$.

Следуя этапу 2, составим скалярную функцию (5) при $k = K-1$, т.е. из (15) и (16) найдем $z(K-1, x, u, \theta(K))$. Согласно приведенному явному виду $W[K-1, x, u, z, \theta(K)]$, вектор-функция $z(K-1, x, u, \theta(K))$ реализует одновременно и минимум функции

$$\varphi_1(K-1, x, u, z) = z'L(K-1)z + z'\theta(K)z + 2z'\theta(K)(Ax + u) \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n.$$

Достаточные условия существования минимума этой функции имеют вид

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \varphi_1(K-1, x, u, z)}{\partial z} \right|_{z(K-1, x, u, \theta(K))} &= 2[L(K-1) + \theta(K)]z(K-1, x, u, \theta(K)) + \\
 &\quad + 2\theta(K)(Ax + u) = 0_n \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n
 \end{aligned} \tag{22}$$

и

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(K-1, x, u, z)}{\partial z^2} = 2[L(K-1) + \theta(K)] > 0.$$

Выполнение последнего требования следует из (20) при $k = K-1$. Согласно (22) получим, во-первых,

$$z(K-1, x, u, \theta(K)) = -[L(K-1) + \theta(K)]^{-1}\theta(K)(Ax + u), \tag{23}$$

во-вторых,

$$\begin{aligned}
 &z'(K-1, x, u, \theta(K))[L(K-1) + \theta(K)]z(K-1, x, u, \theta(K)) + \\
 &\quad + 2z'(K-1, x, u, \theta(K))\theta(K)(Ax + u) = \\
 &= -z'(K-1, x, u, \theta(K))[L(K-1) + \theta(K)]z(K-1, x, u, \theta(K)).
 \end{aligned}$$

Используя последнее равенство, а также (23) и (12), преобразуем (15). Получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
 &W[K-1, x, u, z(K-1, x, u, \theta(K)), \theta(K)] = u'D(K-1)u + \\
 &+ (x'A' + u')\theta(K)(Ax + u) - z'(K-1, x, u, \theta(K))[L(K-1) + \theta(K)]z(K-1, x, u, \theta(K)) = \\
 &= u'D(K-1)u + (x'A' + u')\theta(K)\theta^{-1}(K)\theta(K)(Ax + u) - (x'A' + u')\theta(K)[L(K-1) + \\
 &\quad + \theta(K)]^{-1}\theta(K)(Ax + u) = u'D(K-1)u + (x'A' + u')\theta(K)\{\theta^{-1}(K) - \\
 &\quad - [L(K-1) + \theta(K)]^{-1}\}\theta(K)(Ax + u) = u'D(K-1)u + (x'A' + u')M(\theta(K))(Ax + u) = \\
 &= u'[D(K-1) + M(\theta(K))]u + 2u'M(\theta(K))(Ax + u) + x'A'M(\theta(K))Ax.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим (17), при этом учитываем, что

$$\begin{aligned} W[K-1, x, u, z(K-1, x, u, \theta(K)), \theta(K)] = \\ = u'[D(K-1) + M(\theta(K))]u + 2u'M(\theta(K))(Ax + u) + x'A'M(\theta(K))Ax. \end{aligned}$$

Если максимум в (17) достигается на $u = u(K-1, x, \theta(K))$, то

$$\begin{aligned} \max_u \varphi_2(K-1, x, u) = \max_u \{u'[D(K-1) + M(\theta(K))]u + \\ + 2u'M(\theta(K))Ax\} \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

также реализуется на том же самом $u = u(K-1, x, \theta(K))$. Достаточными условиями такой максимизации являются

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_2(K-1, x, u)}{\partial u} \right|_{u(K-1, x, \theta(K))} &= 2[D(K-1) + M(\theta(K))]u(K-1, x, \theta(K)) + \\ &+ 2M(\theta(K))Ax = 0_n \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2(K-1, x, u)}{\partial u^2} &= 2[D(K-1) + M(\theta(K))] < 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Выполнение второго требования следует из (18) и леммы 2. Кроме того, согласно лемме 2 матрица $M(\theta(K))$ симметрична.

Из (24) следует, во-первых,

$$u(K-1, x, \theta(K)) = -[D(K-1) + M(\theta(K))]^{-1}M(\theta(K))Ax, \quad (25)$$

во-вторых,

$$\begin{aligned} u'(K-1, x, \theta(K))[D(K-1) + M(\theta(K))]u(K-1, x, \theta(K)) + \\ + 2u'(K-1, x, \theta(K))M(\theta(K))Ax = -u'(K-1, x, \theta(K))[D(K-1) + \\ + M(\theta(K))]u(K-1, x, \theta(K)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

С учетом данного тождества, а также (25) и (12) получим

$$\begin{aligned} \overline{W}[K-1, x] &= \\ &= W[K-1, x, u(K-1, x, \theta(K)), z(K-1, x, u(K-1, x, \theta(K)), \theta(K)), \theta(K)] = \\ &= -u'(K-1, x, \theta(K))[D(K-1) + M(\theta(K))]u(K-1, x, \theta(K)) + \\ &+ x'A'M(\theta(K))M^{-1}(\theta(K))M(\theta(K))Ax = \\ &= x'A'M(\theta(K))\{M^{-1}(\theta(K)) - [D(K-1) + M(\theta(K))]^{-1}\}M(\theta(K))Ax = \\ &= x'\theta(K-1)x = V^{(K-1)}(x), \end{aligned}$$

причем, согласно следствию 1, имеет место импликация (14), и по лемме 2 матрица $\theta(K-1)$ симметрична.

Следуя алгоритму, предложенному в замечании 3, далее нужно провести аналогичные рассуждения на каждом из последующих k этапов ($k = K-2, \dots, 1, 0$). В результате будем иметь при каждом $k = 0, 1, \dots, K-1$ равенства

$$\begin{aligned} u(k, x, \theta(k+1)) &= -[D(k) + M(\theta(k+1))]^{-1}M(\theta(k+1))Ax, \\ V^{(k)}(x) &= x'\theta(k)x, \end{aligned} \quad (26)$$

где симметричные матрицы $\theta(k)$ ($k = K, K-1, \dots, 1, 0$) найдены из рекуррентных соотношений (19). Отсюда, подставляя (26) в (9) и (10), получим справедливость (21). Утверждение доказано. $\square$

В заключении статьи отметим, что о многошаговых игровых задачах, динамика которых описывается разностными (дискретными) уравнениями, более 50 лет тому назад Р. Беллман писал "Процессы такого рода представляют несомненный интерес, но, к сожалению, исследования в этой области покрыты мраком неизвестности." [4, с. 252]. Авторы надеются, что предлагаемая статья несколько приоткрывает эту завесу, и благодарят профессора В.И. Жуковского за постановку задачи и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красовский Н.Н., Субботин А.Н. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.
- [2] Болтянский В.Г. *Оптимальное управление дискретными системами*. М.: Наука, 1973.
- [3] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления*. М.: Наука, 1984.
- [4] Беллман Р. *Процессы регулирования с адаптацией*. М.: Наука, 1964.

ЖИТЕНЕВА Юлия Николаевна, Россия, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности филиал в г. Орехово-Зуево, КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

E-mail: ulya_zhiteneva@mail.ru

БОРОДИНА Людмила Викторовна, Россия, г. Москва, ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

E-mail: Lv_borodina@mail.ru

МОЛОСТВОВ Виталий Серафимович, Россия, г. Москва, ГОУ ВПО "Государственный университет - Высшая школа экономики КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

E-mail: molostvov@list.ru

В.И. Жуковский, М.И. Высоко́с

УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНАМИ ЗА СЧЕТ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И УРОВНЯ ЖЕЛАЕМОГО АКТИВА

Найден явный вид равновесного решения в дискретной позиционной математической модели регулирования цены на рынке сбыта за счет предложения и желаемого уровня актива. Сама модель представляет собой бескоалиционную двухшаговую позиционную игру двух лиц, а равновесное решение найдено с помощью подходящей модификации метода динамического программирования.

The explicit form of Nash equilibrium in discrete positional model of price regulating at the market is found. This model is represented as non-coalition two-step positional game. The equilibrium solution is constructed due to modification of dynamic programming method.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РАЗНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

Рассматриваемая модель представляет собой разностный аналог из [1, с.13]. В нем производная $\frac{dx}{dt}$ заменяется на отношение разностей $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Поскольку в случае дискретного времени t принимает обычно целые значения, то сравнивая величины $x(t)$ в двух последовательных моментах времени, получаем $\Delta t = 1$. По этой причине отношение разностей $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ обычно упрощается до $\Delta x = x(k+1) - x(k)$ (символ Δ , означающий разность, является дискретным аналогом оператора $\frac{d}{dt}$). Итак, в дальнейшем будем трактовать разностные уравнения (для $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ как уравнения, содержащие однопериодный временной лаг в переменной x).

Перейдем к построению математической модели. При этом будет использован термин "активы".

Активы - это учетная категория, включающая стоимость собственного имущества рыночного субъекта плюс средства и запасы, предназначенные для уплаты задолженности. Активы могут быть *осязаемыми*, имеющими материальную субстанцию (оборудование, строения, товары, материальные запасы) и *неосязаемые* (патенты, долговые обязательства и т.д.). Активы делятся также на *текущие* и *фиксированные* в зависимости от того, превращаются ли они в деньги в течение года (иного отчетного периода) или нет. В хозяйственной практике составляется баланс активов и задолженности. Задолженность подразделяется на краткосрочную и долгосрочную в зависимости от того, погашается ли она в течении отчетного периода или переходит за его пределы. Стоимость собственного имущества фирмы равна активам минус задолженности [2, с. 6-7].

Будем предполагать, что в выравнивании цен $p(k)$ на рынке одного товара участвуют две фирмы, причем

во-первых, управляющее воздействие первой фирмы u_1 есть предложение товара на рынке сбыта;

во-вторых, изменение уровня актива $q(k+1) - q(k)$ пропорционально разности между предложением u_1 и спросом $d(p)$, который, в свою очередь, считаем линейным по цене:

$$d(p) = -cp + d_0 \quad (d_0, c = \text{const} > 0);$$

тогда

$$q(k+1) = q(k) + l[u_1 - d(p(k))] = q(k) + l[u_1 + cp(k) - d_0]. \quad (1)$$

где постоянный коэффициент пропорциональности $l \in (0, 1)$;

в-третьих, управляющее воздействие второй фирмы $u_2[k]$ - желаемый уровень актива в каждый момент времени k ;

в-четвертых, изменение цены товара $p(k+1) - p(k)$ за один период также предполагаем пропорциональным отклонению актива $q(k)$ от желаемого уровня $u_2[k]$ с коэффициентом пропорциональности $m = \text{const} > 0$:

$$p(k+1) = p(k) - m[q(k) - u_2]. \quad (2)$$

Разностные уравнения (1)-(2) описывают изменение актива и цены товара в зависимости от выбранного 1-ой фирмой предложения u_1 и выбранного 2-ой желаемого уровня актива u_2 . Тройка (k, q, p) образуют *позицию* определенной далее бескоалиционной игры. Пусть заданы начальные значения фазовых координат

$$q(0) = q_0, \quad p(0) = p_0, \quad (3)$$

и k принимает три значения

$$k = 0, 1, 2.$$

Далее используем фазовые вектора

$$x = (q, p), \quad x_0 = (q_0, p_0),$$

а также позицию - тройку

$$(k, q, p) = (k, x);$$

i -ю фирму будем называть i -м игроком ($i = 1, 2$).

Стратегию (позиционную, построенную по принципу обратной связи) i -го игрока $U_i(k)$ в момент времени $k = 0, 1$ отождествляем со скалярной функцией $u_i(k, x)$, удовлетворяющей требованию $u_i(k, x) \geq 0$ при любых позициях $(k, x) = \{0; 1\} \times \mathbf{R}^2$ ($i = 1, 2$). Тогда стратегию i -го игрока U_i будем отождествлять с парой $(u_i(0, x), u_i(1, x))$. Этот факт далее обозначаем

$$U_i = (U_i(0, x), U_i(1, x)) \div (u_i(0, x), u_i(1, x)) \quad (i = 1, 2).$$

Множество таких стратегий обозначаем символом $\mathcal{U}_i = \{U_i\}$, пару $U = (U_1, U_2)$ называют *ситуацией* и множество последних обозначим через $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$.

Развитие игры во времени (*партия игры*) происходит следующим образом. Пусть каждый i -ый игрок выбирает свою конкретную стратегию $U_i^* \in \mathcal{U}_i$ ($i = 1, 2$), $U_i^* \div (u_i^*(0, p, q), u_i^*(1, p, q)) = (u_i^*(0, x), u_i^*(1, x))$. Затем с помощью (1)-(3) находим при $k = 0$

$$\begin{aligned} q^*(1) &= q_0 + l[u_1^*(0, p_0, q_0) + cp_0 - d_0], \\ p^*(1) &= p_0 - m[q_0 - u_2^*(0, p_0, q_0)]; \end{aligned}$$

при $k = 1$

$$\begin{aligned} q^*(2) &= q^*(1) + l[u_1^*(1, p^*(1), q^*(1)) + cp^*(1) - d_0], \\ p^*(2) &= p^*(1) - m[q^*(1) - u_2^*(1, p^*(1), q^*(1))]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем три последовательности

$$\{x(k)\}^2 = \{p^*(k), q^*(k)\}_0^2, \{u_i^*[k]\}_0^1 = \{u_i^*(k, p^*(k), q^*(k))\}_0^1; \quad (4)$$

здесь для краткости записи обозначены $p^*(0) = p_0, q^*(0) = q_0$

С помощью полученных последовательностей введем *функцию выигрыша* (критерий, значение которого оценивает качество функционирования) i -го игрока ($i = 1, 2$)

$$J_1(U_1^*, U_2^*) = [q^*(2)]^2 + \sum_{k=0}^1 [-(u_1^*[k])^2], \quad (5)$$

$$J_2(U_1^*, U_2^*) = -[p^*(2)]^2 + \sum_{k=0}^1 [-(u_2^*[k])^2]. \quad (6)$$

Увеличение критерия (5) фактически означает стремление игрока 1 "с малыми потерями добиться большего актива" к моменту $k = 2$; увеличение функции выигрыша (6) - стремление 2-го игрока снизить цену, за счет снижения желаемого уровня актива (опять-таки к заключительному моменту времени $k = 2$).

Упорядоченный набор

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \Sigma, \{\mathcal{U}_i\}_{i=1,2}, \{J_i(U_1, U_2)\}_{i=1,2} \rangle \quad (7)$$

образует *позиционную бескоалиционную двухшаговую игру двух лиц*.

Здесь $\{1, 2\}$ - множество порядковых номеров игроков ,

Σ - управляемая дискретная динамическая система, изменение во времени ($k = 0, 1, 2$) которой описывается системой из двух разностных уравнений (1)-(2) с начальными условиями (3);

$\mathcal{U}_i = \{U_i \div (u_i(0, x), u_i(1, x)) | u_i(k, x) \geq 0\}$ - множество (позиционных) стратегий i -го игрока ($i = 1, 2$);

$J_i(U_1, U_2)$ - функция выигрыша i -го игрока, имеющая вид (5) при $i = 1$ и (6) - при $i = 2$.

Цель каждого i -го игрока в игре (7) - выбор такой своей стратегии $U_i \in \mathcal{U}_i$, чтобы при сложившейся (при таком выборе) ситуации $U = (U_1, U_2)$ его *выигрыш* - значение J_i при выбранной $U \in \mathcal{U}$ - стал бы возможно *большим*.

Далее используем следующий принцип оптимальности - *равновесность по Нэшу*.

Определение. Ситуация $U^e = (U_1^e, U_2^e) \in \mathcal{U}$ называется *равновесной* по Нэшу в игре (7), если

$$\begin{aligned} \max_{U_1 \in \mathcal{U}_1} J_1(U_1, U_2^e) &= J_1(U^e), \\ \max_{U_2 \in \mathcal{U}_2} J_2(U_1^e, U_2) &= J_2(U^e), \end{aligned}$$

при этом пару $(J_1(U^e), J_2(U^e))$ называют *равновесным выигрышем игроков* в игре (7).

Задача: найти явный вид ситуации равновесия $U^e \in \mathcal{U}$ в игре (7) и равновесные выигрыши $J_i(U^e)$ ($i = 1, 2$) игроков. Решим эту задачу, используя алгоритм, "диктуемый" соответствующим вариантом метода динамического программирования (описан в [3]).

Замечание. Для игры (7) этот алгоритм сводится к выполнению трех последующих этапов.

Этап 1. При $k = 2$ строятся две функции

$$V_1^{(2)}(q, p) = q^2, \quad V_2^{(2)}(q, p) = -p^2.$$

Этап 2. При $k = 1$ находим четыре скалярные функции $u_i^e(1, q, p)$ и $V_i^{(1)}(q, p)$ ($i = 1, 2$), исходя из условий

$$\begin{cases} V_1^{(0)}(q, p) = \max_{u_1} \{-u_1^2 + [q + l(u_1 + cp - d_0)]^2\} = Idem\{u_1 \rightarrow u_1^e(1, q, p)\}, \\ V_2^{(0)}(q, p) = \max_{u_2} \{-u_2^2 - [p - m(q - u_2)]^2\} = Idem\{u_2 \rightarrow u_2^e(1, q, p)\}, \end{cases} \quad (8)$$

где $Idem\{u_i \rightarrow u_i^e(1, q, p)\}$ означает выражение в фигурных скобках, где u_i заменена на $u_i^e(1, q, p)$.

Этап 3. При $k = 0$ определяем функции $u_i(0, q, p)$ и $V_i^{(0)}(q, p)$ ($i = 1, 2$) согласно двум требованиям

$$\begin{aligned} V_1^{(0)}(q, p) &= \max_{u_1} \{-u_1^2 + V_1^{(1)}(q(1), p(1))\} = Idem\{u_i \rightarrow u_i^e(0, q, p)\}, \\ V_2^{(0)}(q, p) &= \max_{u_2} \{-u_2^2 + V_2^{(1)}(q(1), p(1))\} = Idem\{u_i \rightarrow u_i^e(0, q, p)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $q(1) = q + l(u_1 + cp - d_0)$, $p(1) = p - m(q - u_2)$.

Тогда, *во-первых*, ситуация равновесия по Нэшу в игре Γ будет $U^e = (U_1^e, U_2^e)$, $U_i^e = (U_i^e(0), U_i^e(1))$ и $U_i^e(0) \div u_i^e(0, q, p)$ из (8), $U_i^e(1) \div u_i^e(1, q, p)$ из (9) ($i = 1, 2$); *во-вторых*, равновесные выигрыши игроков (их выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу) станут

$$J_i(U^e) = V_i^{(0)}(q_0, p_0) \quad (i = 1, 2);$$

равновесное решение игры Γ при этом представляет тройку $(U^e, V_1^{(0)}(x_0), V_2^{(0)}(x_0))$.

2. ПОСТРОЕНИЕ СИТУАЦИИ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ

Следуем здесь схеме, представленной в приведенном выше замечании.

Этап 1 (при $k = 2$). Строим две скалярные функции

$$V_1^{(2)}(q, p) = q^2, \quad V_2^{(2)}(q, p) = -p^2.$$

Этап 2 (при $k = 1$). Первое равенство из (8) реализуется для $u_1^e(1, q)$, если

$$\max_{u_1} \psi_1(u_1) = \psi_1(u_1^e(1, q, p)) \quad \forall q, p \in \mathbf{R}^1, \quad (10)$$

где $\psi_1(u_1) = -u_1^2 + [q + l(u_1 + cp - d_0)]^2$.

Условие (10) имеет место, при

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1(u_1)}{\partial u_1} \Big|_{u_1^e(1, x)} &= -2u_1^e(1, x) + 2[q + l(u_1^e(1, x) + cp - d_0)]l = 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_1(u_1)}{\partial u_1^2} \Big|_{u_1^e(1, x)} &= -2 + 2l^2 < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Второе требование в (11) выполняется, если

$$0 < l < 1, \quad (12)$$

и тогда из первого равенства в (11) следует

$$u_1^e(1, p, q) = \frac{l[q + l(cp - d_0)]}{1 - l^2} = \frac{l}{1 - l^2}[q + l(cp - d_0)]. \quad (13)$$

Аналогично для второго равенства из (8) введем функцию

$$\psi_2(u_2) = -u_2^2 - [p - m(q - u_2)]^2,$$

ищем $u_2^e(1, x)$, исходя из условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2(u_2)}{\partial u_2} \Big|_{u_2^e(1, x)} &= -2u_2^e(1, x) - 2[p - m(q - u_2^e(1, x))]m = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi_2(u_2)}{\partial u_2^2} \Big|_{u_2^e(1, x)} &= -2 - 2m^2 < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда

$$u_2^e(1, p, q) = \frac{m}{1 + m^2}(mq - p). \quad (15)$$

Перейдем к построению $V_i^{(1)}(p, q)$ ($i = 1, 2$). Из (11) имеем

$$\frac{u_1^e(1, x)}{l} = q + l[u_1^e(1, x) + cp - d_0],$$

тогда

$$\begin{aligned} V_1^{(1)}(x) &= -[u_1^e(1, x)]^2 + [q + l(u_1^e(1, x) + cp - d_0)]^2 = \\ &= -[u_1^e(1, x)]^2 + \left[\frac{u_1^e(1, x)}{l}\right]^2 = \frac{1-l^2}{l^2}[u_1^e(1, x)]^2 = \frac{1-l^2}{l^2} \cdot \frac{l^2}{(1-l^2)^2}[q + l(cp - d_0)]^2 = \\ &= \frac{1}{1-l^2}[q + l(cp - d_0)]^2, \end{aligned}$$

т.е. получили

$$V_1^{(1)}(p, q) = \frac{1}{1 - l^2}[q + l(cp - d_0)]^2. \quad (16)$$

Для $V_2^{(1)}(x)$ из (14) аналогично

$$\frac{u_2^e(1, x)}{m} = -[p - m(q - u_2^e(1, x))],$$

или

$$\left[\frac{u_2^e(1, x)}{m}\right]^2 = [p - m(q - u_2^e(1, x))]^2,$$

отсюда

$$\begin{aligned} V_2^{(1)}(1, p, q) &= -[u_2^e(1, x)]^2 - [p - m(q - u_2^e(1, x))]^2 = \\ &= -[u_2^e(1, x)]^2 - \left[\frac{u_2^e(1, x)}{m}\right]^2 = -\frac{1+m^2}{m^2}[u_2^e(1, x)]^2 = \\ &= -\frac{1+m^2}{m^2} \cdot \frac{m^2}{(1+m^2)^2}(mq - p)^2 = -\frac{1}{1+m^2}(mq - p)^2, \end{aligned}$$

т.е. пришли к

$$V_2^{(1)}(1, p, q) = -\frac{1}{1 + m^2}(mq - p)^2. \quad (17)$$

Этап 3 (при $k = 0$). Приступаем к построению $V_i^{(0)}(0, q, p)$ и $u_i^e(0, q, p)$ ($i = 1, 2$). В первую очередь, найдем $u_i^e(0, q, p)$ ($i = 1, 2$) из условий

$$\begin{aligned} V_1^{(0)}(q, p) &= \max_{u_1} \left\{ -u_1^2 + \frac{1}{1-l^2} [q + l(u_1 + cp - d_0) + lc(p - m(q - u_2^e(1, x))) - ld_0]^2 \right\} = \\ &= Idem\{u_1 \rightarrow u_1^e(0, x)\}, \\ V_2^{(0)}(q, p) &= \max_{u_2} \left\{ -u_2^2 - \frac{1}{1+m^2} [mq + ml(u_1^e(0, x) + cp - d_0) - p + m(q - u_2)]^2 \right\} = \\ &= Idem\{u_2 \rightarrow u_2^e(0, x)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначив выражение в фигурных скобках первого и второго из предыдущих равенств через $\psi_3(u_1)$ и $\psi_4(u_2)$ соответственно, применим для отыскания $u_i^e(0, x)$ ($i = 1, 2$) достаточные условия в виде набора требований

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_3(u_1)}{du_1} \Big|_{u_1^e(0, x)} &= -2u_1^e(0, x) + \frac{2l}{1-l^2} [q + lu_1^e(0, x) + lcp - ld_0 + \\ &+ lcp - lctmq + lctmu_2^e(0, x) - ld_0] = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{d^2\psi_3(u_1)}{du_1^2} \Big|_{u_1^e(0, x)} = -2 + \frac{2l^2}{1-l^2} = 2\frac{1-4l^2}{1-l^2} < 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_4(u_2)}{du_2} \Big|_{u_2^e(0, x)} &= -2u_2^e(0, x) + \frac{2m}{1+m^2} [mq + ml u_1^e(0, x) + mlcp - \\ &- mld_0 - p + mq - mu_2^e(0, x)] = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{d^2\psi_4(u_2)}{du_2^2} \Big|_{u_2^e(0, x)} = -2 - \frac{2m^2}{1+m^2} = -\frac{1+4m^2}{1+m^2} < 0.$$

Отметим, что с учетом (12), неравенство (20) имеет место для

$$\frac{1}{2} < l < 1, \quad (22)$$

ибо при этом $1 - l^2 > 0$ и $1 - 4l^2 < 0$.

Из (19) и (21) получаем для нахождения $u_i^e(0, x)$ ($i = 1, 2$) следующую неоднородную линейную систему из двух уравнений

$$\begin{cases} (2l - \frac{1}{l})u_1^e(0, x) + lctmu_2^e(0, x) = \alpha, \\ ml u_1^e(0, x) - (2m + \frac{1}{m})u_2^e(0, x) = \beta, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= (lcm - 1)q - 2lcp + 2ld_0, \\ \beta &= -2mq + (1 - mlc)p + mld_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Система (23) имеет единственное решение $(u_1^e(0, x), u_2^e(0, x))$, если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2l - \frac{1}{l} & lcm \\ ml & -(2m + \frac{1}{m}) \end{vmatrix} = (-2l + \frac{1}{l})(2m + \frac{1}{m}) - m^2 l^2 c \neq 0 \quad (25)$$

при $l > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (тогда $-2l + \frac{1}{l} < 0$). Объединяя с (22), получаем, что неравенства (22) и (25) имеют место, если

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < l < 1. \quad (26)$$

При условии (26) решаем систему (23) (с учетом вида Δ в (25)):

$$\begin{aligned} u_1^e(0, q, p) &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha & lcm \\ \beta & -(2m + \frac{1}{m}) \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta} [\alpha(2m + \frac{1}{m}) + \beta lcm], \\ u_2^e(0, q, p) &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2l - \frac{1}{l} & \alpha \\ ml & \beta \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} [\beta(2l - \frac{1}{l}) - \alpha lm], \end{aligned} \quad (27)$$

где явный вид α и β приведен в (24).

Таким образом, явный вид ситуации равновесия по Нэшу игры (7) определяется следующим утверждением.

Утверждение 1. Равновесная по Нэшу ситуация игры (7) при любых положительных постоянных c, d_0, m и для любых $l \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ имеет вид

$$U^e = (U_1^e, U_2^e), U_i^e \div (u_i^e(0, q, p), u_i^e(1, q, p)) \quad (i = 1, 2),$$

здесь

$$\begin{aligned} u_1^e(0, q, p) &= -\frac{1}{\Delta}[\alpha(2m + \frac{1}{m}) + \beta lcm] & (\text{см. (27)}), \\ u_1^e(1, q, p) &= \frac{l}{1-l^2}[q + l(cp - d_0)] & (\text{см. (13)}), \\ u_2^e(0, q, p) &= \frac{1}{\Delta}[\beta(2l - \frac{1}{l}) - mlq] & (\text{см. (27)}), \\ u_2^e(1, q, p) &= \frac{m}{1+m^2}(mq - p) & (\text{см. (15)}), \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2l + \frac{1}{2})(2m + \frac{1}{m}) - m^2 l^2 c < 0 & (\text{см. (25)}), \\ \alpha &= (lcm - 1)q - 2lcp + 2ld_0 & (\text{см. (24)}), \\ \beta &= -2mq + (1 - mcl)p + mld_0 & (\text{см. (24)}). \end{aligned}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ РАВНОВЕСНЫХ ВЫИГРЫШЕЙ $J_i(U^e)$ ($i = 1, 2$)

Согласно упомянутому выше этапу 3 $J_i(U^e) = V_i^{(0)}(q_0, p_0)$ ($i = 1, 2$). Перейдем к нахождению явного вида $V_1^{(0)}(q, p) = J_1(U^e)$. Для этого из (19) найдем

$$q + l(u_1^e(0, x) + cp - d_0) + lc(p - m(q - u_2^e(0, x)) - ld_0) = \frac{1-l^2}{l}u_1^e(0, x). \quad (28)$$

Подставляя в (18) вместо $u_1 \rightarrow u_1^e(0, q, p)$ и используя (28), приходим к тождеству

$$V_1^{(0)}(q, p) = -[u_1^e(0, q, p)]^2 + \frac{1}{1-l^2} \cdot \frac{(1-l^2)^2}{l^2} [u_1^e(0, q, p)]^2 = (\frac{1}{l^2} - 2)[u_1^e(0, q, p)]^2. \quad (29)$$

Аналогичные преобразования приведем для равенства с $V_2^{(0)}(q, p)$ из (18). Именно, согласно (21)

$$[mq + ml(u_1^e(0, q, p) + cp - d_0) - p + m(q - u_2^e(0, q, p))] = \frac{1+m^2}{m}u_2^e(0, q, p). \quad (30)$$

Подставляя (30) и заменив в (18) u_2 на $u_2^e(0, q, p)$, приходим к тождеству

$$V_2^{(0)}(q, p) = -[u_2^e(0, q, p)]^2 - \frac{1}{1+m^2} \cdot \frac{(1+m^2)^2}{m^2} [u_2^e(0, q, p)]^2 = -(\frac{1}{m^2} + 2)[u_2^e(0, q, p)]^2. \quad (31)$$

Итак, получили

Утверждение 2. При любых положительных постоянных c, d_0, m и для любых $l \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ равновесные выигрыши игроков в игре (7) будут

$$\begin{aligned} J_1(U^e) &= (\frac{1}{l^2} - 2)[u_1^e(0, q_0, p_0)]^2 & (\text{см. (29)}), \\ J_2(U^e) &= -(\frac{1}{m^2} + 2)[u_2^e(0, q_0, p_0)]^2 & (\text{см. (31)}), \end{aligned}$$

где (q_0, p_0) - заданная начальная позиция, а вид $u_i^e(0, q, p)$ ($i = 1, 2$) определен в утверждении 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Журавлев С.Г., Аниковский В.В. Дифференциальные уравнения. М.: Экзамен, 2005.
- [2] Русско-англо-немецкий толковый словарь по бизнесу (составители Н.Н. Кузнецова, Э.В. Новикова, С.В. Плохинов, Н.А. Чекмезов). М.: Горизонт, 1992.
- [3] Жуковский В.И., Золотарев В.В. *Равновесие по Нэшу в многошаговой игре* // Spectral and Evolution Problems – 2009. – Vol.19. – P.50-55.

ЖУКОВСКИЙ Владислав Иосифович, 142600, Россия, Московская область, г. ОРЕХОВО-ЗУЕВО, ул. ШУЛАЙКИНОЙ, 2, филиал ГОУ ВПО "РОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ" в г. ОРЕХОВО-ЗУЕВО

ВЫСОКОС Мария Ивановна, 142600, Россия, Московская область, г. ОРЕХОВО-ЗУЕВО, ул. ШУЛАЙКИНОЙ, 2, филиал ГОУ ВПО "РОССИЙСКИЙ ЗАОЧНЫЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ" в г. ОРЕХОВО-ЗУЕВО

E-mail: mvysokos@mail.ru

В.В. Золотарёв, С. Жаркынбаев, Л.В. Бородина

ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В КОНФЛИКТНОЙ ЗАДАЧЕ

Вводится, по аналогии с максимином, понятие гарантированного равновесия в бескоалиционной игре двух лиц при неопределенности. Устанавливается существование в смешанных стратегиях и найден явный вид в линейно-квадратичной задаче.

The concept of guaranteed equilibrium in non-cooperative game of two person under uncertainty is introduced (by analogy with maximin). Its existence in mixed strategies is established. Explicit form in linear-quadratic problem is found.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бескоалиционная игра двух лиц при неопределенности, определяемая упорядоченной четверкой

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

где 1 и 2 – порядковые номера игроков, $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ – множество стратегий $x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n_i)})$ для i -го игрока ($\mathbb{R}^{n_i}$ – n_i -мерное евклидово пространство с нормой $\|x_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_i} [x_i^{(j)}]^2}$),

$Y \subset \mathbb{R}^m$ – множество неопределенностей y ,

$f_i(x, y)$ – функция выигрыша i -го игрока, значение которой на конкретной тройке $(x_1, x_2, y) \in X_1 \times X_2 \times Y$ есть выигрыш этого игрока.

Далее используются ситуации $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 = X$, контрнеопределенности $y(\cdot) : X \rightarrow Y$. Предполагаем, что о неопределенностях каждому игроку известна лишь область возможных значений Y , а какие-либо статистические характеристики (распределения y на Y) отсутствуют по тем или иным причинам, они перечислены в [1, с. 31]. Такие неопределенные факторы названы Еленой Сергеевной Венцель в [2, с. 21] "дурными неопределенностями" (из-за непредсказуемости их конкретной реализации).

Партия игры проходит следующим образом. Игроки, не имея возможности объединяться в коалиции, одновременно выбирают свои стратегии $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$). В результате образуется ситуация $x = (x_1, x_2) \in X$. При таком выборе игроки учитывают возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$. На появившейся таким образом тройке $(x_1, x_2, y) \in X_1 \times X_2 \times Y$ определяется выигрыш i -го игрока $f_i(x, y)$. Задача каждого игрока (на "содержательном уровне") – выбор такой своей стратегии $x_i \in X_i$, чтобы выигрыш каждого стал возможно *большим*, при этом, подчеркнем еще раз, игроки вынуждены рассчитывать на реализацию любой неопределенности $y \in Y$.

Приведем ряд сведений (используемых в дальнейшем) из выпуклого анализа.

Непрерывная на $X \times Y$ скалярная функция $f(x, y)$ строго выпукла по $y \in Y$ при всяком $x \in X$, если для любых $y^{(1)}, y^{(2)} \in Y$, $y^{(1)} \neq y^{(2)}$, и каждом $x \in X$

$$f(x, \lambda y^{(1)} + (1 - \lambda)y^{(2)}) < \lambda f(x, y^{(1)}) + (1 - \lambda)f(x, y^{(2)})$$

при всех постоянных $\lambda \in (0, 1)$.

Лемма. [1, с. 72-74]. Пусть

- a) функция $f(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$
- b) множества X и Y компактны, причем Y – выпукло,
- c) функция $f(x, y)$ строго выпукла по $y \in Y$ при каждом $x \in X$.

Тогда существует единственная непрерывная на X вектор-функция $y(x) : X \rightarrow Y$ такая, что

$$f(x, y(x)) = \min_{y \in Y} f(x, y) \quad \forall x \in X.$$

2. ПОНЯТИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО РАВНОВЕСИЯ

Предлагаемое определение находится на стыке двух понятий из математической теории игр. Первое из них – принцип гарантированного результата (принцип максимина) – был предложен Вальдом в 1939 г. в [3]. Он позволяет строить гарантированный результат для каждой возможной стратегии: именно, выбор ЛПР (лицом, принимающим решение) $x \in X$ "обеспечивает" ему гарантию

$$f(x, y(x)) = \min_{y \in Y} f(x, y) \leq f(x, y) \quad \forall y \in Y.$$

Второе понятие – принцип равновесности (по Нэшу) был сформулирован Джоном Нэшем в 1949 г., опубликован в [4]. Согласно этому принципу, предложенная Нэшем равновесная ситуация обладает *свойством устойчивости*: от нее невыгодно отклоняться отдельному игроку.

Последовательное применение указанных двух принципов приводит к следующему понятию *гарантированного равновесия* в игре Γ . Его проведем в два этапа.

Этап 1. Каждой ситуации $x \in X$ и каждому игроку $i = 1, 2$ поставим в соответствие m -вектор-функцию $y^{(i)}(x)$ такую, что

$$f_i(x, y^{(i)}(x)) = \min_{y \in Y} f_i(x, y) = f_i[x_1, x_2] \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Этап 2. Игре Γ поставим в соответствие вспомогательную бескоалиционную игру двух лиц (без неопределенности)

$$G = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{f_i[x_1, x_2]\}_{i=1,2} \rangle.$$

Ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e) \in X$ называется *равновесной* (по Нэшу) в игре G , если

$$\begin{cases} f_1[x_1, x_2^e] \leq f_1[x^e] = f_1^e \quad \forall x_1 \in X_1, \\ f_2[x_1^e, x_2] \leq f_2[x^e] = f_2^e \quad \forall x_2 \in X_2. \end{cases} \quad (2)$$

Полученную в результате (1), (2) четверку $(x_1^e, x_2^e, f_1^e, f_2^e)$ назовем *гарантированным равновесием* игры Γ , при этом ситуация (x_1^e, x_2^e) есть гарантирующее равновесие и f_i^e – гарантированный равновесный выигрыш i -го игрока.

"Игровой смысл" предлагаемого решения состоит в следующем. Если игроки выбрали стратегии $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$), образующие ситуацию $x = (x_1, x_2)$, то каждый i -й из них "обеспечивает" себе выигрыш $f_i(x_1, x_2, y)$ не меньший $f_i[x_1, x_2]$ (из (1)) при реализации любых неопределенностей $y \in Y$; данный факт следует из последнего равенства в (1), представленного в виде

$$f_i[x_1, x_2] \leq f_i(x_1, x_2, y) \quad \forall y \in Y \quad (i = 1, 2),$$

т.е. $f_i[x_1, x_2]$ есть гарантия для игрока i при использовании обоими своих стратегий из ситуации $x \in X$ и появлении любой неопределенности $y \in Y$.

Далее, согласно этапу 2 (из определения), вместо игры при неопределенности Γ рассматривается игра G (без неопределенностей), в которой "роль" функций выигрыша игроков "выполняют" уже их гарантии $f_i[x]$ ($i = 1, 2$), а ситуация равновесия (по Нэшу) для игры G определяется с помощью того же принципа равновесности, но примененного уже к "новым" функциям выигрыша из игры G , именно к гарантиям $f_i[x_1, x_2]$ ($i = 1, 2$) функций выигрыша из Γ .

Устойчивость введенного гарантированного равновесия в том, что при выборе обоими игроками своих стратегий из ситуации $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ игроки,

во-первых, "обеспечивают" себе (при любых неопределенностях $y \in Y$) выигрыши $f_i(x_1^e, x_2^e, y) \geq f_i[x_1^e, x_2^e] = f_i^e$ ($i = 1, 2$) (которые не меньше их гарантий);

во-вторых, при отклонении, например, первого игрока от x_1^e (т.е. выбрав стратегию $\tilde{x}_1 \in X_1$ и $\tilde{x}_1 \neq x_1^e$) этот игрок "обеспечит" себе выигрыш $f_1(\tilde{x}_1, x_2^e, y)$, у которого гарантия $f_1[\tilde{x}_1, x_2^e]$ не превосходит гарантию $f_1[x_1^e, x_2^e]$ в ситуации равновесия x^e (игра Γ при неопределенности оценивается игрой G – "игрой гарантий").

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ

Пусть множества X_i ($i = 1, 2$) суть компакты. Определим борелевскую σ -алгебру подмножеств множества X_i (подробно об этом в [1, с. 77-78]) и в качестве расширения множества (чистых) стратегий $x_i \in X_i$ игрока i будем рассматривать его смешанные стратегии $\mu_i(\cdot)$ – вероятностные меры на компакте X_i , т.е. неотрицательные скалярные функции множеств $\mu_i(\cdot)$, определенные на борелевской σ -алгебре подмножеств множества X_i (на σ -алгебре борелевских подмножеств компакта X_i), счетно аддитивные и нормированные на X_i единицей. Множество смешанных стратегий игрока i обозначим через $\{\mu_i\}$ ($i = 1, 2$). Заметим, что мера вида $\delta(x_i - x_i^*)(dx_i)$, где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака, также является смешанной стратегией игрока i . Меры-произведения $\mu(dx_1, dx_2)$, понимаемые в соответствии с определениями [5, с. 271] и обозначениями [6, с. 284],

$$\mu(dx_1, dx_2) = \mu_1(dx_1)\mu_2(dx_2),$$

также являются вероятностными мерами на произведении компактов $X = X_1 \times X_2$. Отметим, что при построении меры-произведения $\mu(dx_1, dx_2)$ в качестве σ -алгебры подмножеств множества $X_1 \times X_2$ выбирается наименьшая борелевская σ -алгебра, содержащая все произведения $Q_1 \times Q_2$, где Q_i – элемент борелевской σ -алгебры подмножеств компакта X_i ($i = 1, 2$).

Если функции выигрыша $f_i[x_1, x_2]$ непрерывны на $X_1 \times X_2$, то можно определить следующие интегралы (математические ожидания)

$$F_i[\mu_1, x_2] = \int_{X_1} f_i[x_1, x_2] \mu_1(dx_1), \quad F_i[x_1, \mu_2] = \int_{X_2} f_i[x_1, x_2] \mu_2(dx_2).$$

Так как функции $f_i[x_1, x_2]$ непрерывны на $X_1 \times X_2$, то [7, с. 113] интегралы $F_i[\mu_1, x_2]$ и $F_i[x_1, \mu_2]$ являются непрерывными функционалами на X_2 и X_1 соответственно. Тогда существуют и двойные интегралы

$$\begin{aligned} F_i[\mu_1, \mu_2] &= \int_{X_2} F_i[\mu_1, x_2] \mu_2(dx_2) = \int_{X_2} \int_{X_1} f_i[x_1, x_2] \mu_1(dx_1) \mu_2(dx_2), \\ \int_{X_1} F_i[x_1, \mu_2] \mu_1(dx_1) &= \int_{X_1} \int_{X_2} f_i[x_1, x_2] \mu_2(dx_2) \mu_1(dx_1), \end{aligned}$$

кроме того, по теореме Фубини, эти интегралы равны.

Перейдем теперь к смешанному расширению игры G , именно к бескоалиционной игре

$$\tilde{G} = \langle \{1, 2\}, \{\mu_i\}_{i=1,2}, \{F_i[\mu_1, \mu_2]\}_{i=1,2} \rangle,$$

где $\{\mu_i\}$ – множество смешанных стратегий $\mu_i(\cdot)$, которые являются вероятностными мерами на компакте X_i , математическое ожидание

$$F_i[\mu_1, \mu_2] = \int_{X_1 \times X_2} f_i[x_1, x_2] \mu_1(dx_1) \mu_2(dx_2) \quad (3)$$

есть смешанное расширение функции выигрыша $f_i[x_1, x_2]$ ($i = 1, 2$) игры G .

Пара смешанных стратегий $(\mu_1^e(\cdot), \mu_2^e(\cdot)) \in \{\mu_1\} \times \{\mu_2\}$ образует *ситуацию равновесия* (по Нэшу) в игре $\tilde{G}$, если

$$\begin{aligned} F_1[\mu_1, \mu_2^e] &\leq F_1[\mu_1^e, \mu_2^e] \quad \forall \mu_1^e(\cdot) \in \{\mu_1\}, \\ F_2[\mu_1^e, \mu_2] &\leq F_2[\mu_1^e, \mu_2^e] \quad \forall \mu_2^e(\cdot) \in \{\mu_2\}. \end{aligned} \quad (4)$$

В [8, с. 119] приведена

Теорема 1. Если в игре G функции выигрыша $f_i[x_1, x_2]$ непрерывны на $X_1 \times X_2$, а множества X_i суть компакты ($i = 1, 2$), то в игре $\tilde{G}$ существует ситуация равновесия $(\mu_1^e(\cdot), \mu_2^e(\cdot)) \in \{\mu_1\} \times \{\mu_2\}$.

Эту ситуацию называют иногда *ситуацией равновесия в смешанных стратегиях для игры G* .

Перейдем к определению аналога гарантированного равновесия для игры Γ в смешанных стратегиях.

Итак, пусть в игре Γ множества X_i ($i = 1, 2$) и Y суть компакты, а функции выигрыша $f_i(x_1, x_2, y)$ ($i = 1, 2$) непрерывны на $X_1 \times X_2 \times Y$.

Определение. Четверку $(\mu_1^e(\cdot), \mu_2^e(\cdot), F_1^e, F_2^e) \in \{\mu_1\} \times \{\mu_2\} \times \mathbb{R}^2$ назовем *гарантированным равновесием* (по Нэшу) *игры Γ в смешанных стратегиях*, если существуют m -вектор-функции $y^{(i)}(x) : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) такие, что для функций $F_i[\mu_1, \mu_2]$ ($i = 1, 2$) из (3) имеют место неравенства (4).

Здесь $F_i[\mu_1, \mu_2] = \int_X f_i[x] \mu_1(dx_1) \mu_2(dx_2)$, $f_i[x] = f_i(x, y^{(i)}(x)) = \min_y f_i(x, y)$, смешанная стратегия i -го игрока $\mu_i^e(\cdot) \in \{\mu_i\}$, его гарантированный выигрыш $F_i^e = F_i[\mu_1^e, \mu_2^e]$ ($i = 1, 2$).

Теорема 2. Пусть в бескоалиционной игре двух лиц при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x_1, x_2, y)\}_{i=1,2} \rangle,$$

1^о) множество $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ стратегий x_i y i -го игрока есть компакт ($i = 1, 2$), а множество $Y \subset \mathbb{R}^m$ неопределенностей y суть выпуклый компакт;

2^о) функция выигрыша i -го игрока ($i = 1, 2$) непрерывна на произведении $X_1 \times X_2 \times Y$ и строго выпукла по $y \in Y$ при каждом $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Тогда в игре Γ существует гарантированное равновесие в смешанных стратегиях.

Доказательство. Согласно компактности X_i ($i = 1, 2$) и Y , выпуклости Y , а также из непрерывности $f_i(x_1, x_2, y)$ на $X_1 \times X_2 \times Y$ и строгой вогнутости этих функций по $y \in Y$ при каждом $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, получаем (из леммы) существование непрерывных на $X_1 \times X_2$ m -вектор-функций $y^{(i)}(x_1, x_2)$ таких, что

$$\min_{y \in Y} f_i(x_1, x_2, y) = f_i(x_1, x_2, y^{(i)}(x_1, x_2)) = f_i[x_1, x_2] \quad (i = 1, 2)$$

при любых $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Функции

$$f_i(x_1, x_2, y^{(i)}(x_1, x_2)) = f_i[x_1, x_2] \quad (i = 1, 2)$$

непрерывны на $X_1 \times X_2$ как суперпозиции непрерывных функций $f_i(x_1, x_2, y)$ и $y = y^{(i)}(x_1, x_2)$.

Составим затем бескоалиционную игру двух лиц

$$G = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{f_i[x_1, x_2]\}_{i=1,2} \rangle.$$

В ней, как установлено выше, функция выигрыша i -го игрока $f_i[x_1, x_2]$ ($i = 1, 2$) непрерывна на произведении компактов $X_1 \times X_2$. Тогда, по теореме 1, существует ситуация равновесия $(\mu_1^e(\cdot), \mu_2^e(\cdot)) \in \{\mu_1\} \times \{\mu_2\}$ в смешанных стратегиях (для этой ситуации имеют место неравенства (4)). Затем следует построить пару

$$F_i^e = F_i[\mu_1^e, \mu_2^e] = \int_{X_1 \times X_2} f_i[x_1, x_2] \mu_1^e(dx_1) \mu_2^e(dx_2) \quad (i = 1, 2),$$

числа F_i^e существуют, вследствие непрерывности $f_i[x_1, x_2]$ на компакте $X_1 \times X_2$ ($i = 1, 2$).

Полученная в результате четверка $(\mu_1^e(\cdot), \mu_2^e(\cdot), F_1^e, F_2^e)$ как раз и является гарантированным равновесием в игре Γ в смешанных стратегиях. $\square$

4. ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЙ ВАРИАНТ ИГРЫ

Здесь рассматриваем игру Γ , в которой $X_i = \mathbb{R}^{n_i}$, $Y = \mathbb{R}^m$ (задача без ограничений), а функции выигрыша линейно квадратичны по x_i, y и имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x'_1 A_1 x_1 + 2x'_1 x_2 + x'_1 C_1 y + y' D_1 y + 2a'_1 x_1, \\ f_2(x, y) &= x'_2 A_2 x_2 - 2x'_2 x_1 + x'_2 C_2 y + y' D_2 y + 2a'_2 x_2, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь x_1, x_2 – n -вектора (столбцы), y – m -вектор-столбец, штрих сверху означает операцию транспонирования, постоянные векторы a_i и матрицы A_i, C_i, D_i соответствующих размерностей, причем A_i и D_i – симметричны ($i = 1, 2$); далее $A_i < 0$ ($D_i > 0$) означает, что квадратичная форма $x'A_i x$ ($y'D_i y$) определено отрицательно (соответственно, положительна), а $K \leq 0$ означает, что квадратичная форма $x'Kx \leq 0 \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n$; 0_n – нулевой n -вектор.

Итак, далее рассматриваем бескоалиционную игру двух лиц при неопределенности

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i = \mathbb{R}^n\}_{i=1,2}, Y = \mathbb{R}^m, \{f_i(x_1, x_2, y)\}_{i=1,2} \rangle, \quad (6)$$

здесь функции выигрыша $f_i(x_1, x_2, y)$ определены в (5), стратегиями i -го игрока являются n -вектора-столбцы $x_i \in \mathbb{R}^n$, неопределенности $y \in \mathbb{R}^m$; специальный вид (5) функций выигрыша $f_i(x_1, x_2, y)$ вызван желанием охватить все слагаемые (линейные и квадратичные), содержащие x_i , учет других возможных слагаемых, не вызывая принципиальных затруднений, приведет лишь к громоздким записям.

Утверждение. Если в игре (6) матрицы

$$A_i < 0, \quad D_i < 0 \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

то гарантированное равновесие $(x_1^e, x_2^e, f_1^e, f_2^e)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1^e &= [(A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2')^{-1} + (A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1')]^{-1} [(A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2')^{-1} a_2 - a_1], \\ x_2^e &= -[(A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1')^{-1} + (A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2')]^{-1} [(A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1')^{-1} a_1 + a_2], \\ f_1^e &= -[x_1^e]' [A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1'] x_1^e, \\ f_2^e &= -[x_2^e]' [A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2'] x_2^e. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Из (7) и [9] следует справедливость цепочек импликаций:

$$\begin{aligned} D_i > 0 &\Rightarrow \det D_i \neq 0 \Rightarrow \exists D_i^{-1}, \\ D_i > 0 &\Rightarrow D_i^{-1} > 0 \Rightarrow C_i D_i^{-1} C_i' \geq 0 \Rightarrow -C_i D_i^{-1} C_i' \leq 0, \\ A_i < 0 \wedge -C_i D_i^{-1} C_i' \leq 0 &\Rightarrow A_i - C_i D_i^{-1} C_i' < 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее доказательство проведем по этапам 1 и 2 определения гарантированного равновесия игры Γ .

Этап 1. Найдем $y^{(i)}(x_1, x_2)$ согласно условию

$$f_i(x_1, x_2, y^{(i)}(x_1, x_2)) = \min_{y \in \mathbb{R}^m} f_i(x_1, x_2, y^{(i)}(x_1, x_2)). \quad (10)$$

При отсутствии ограничений ($x_i \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ ситуации $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n}$) достаточные условия реализации минимума в (10) на m -вектор-функции $y(x)$ сводятся (с учетом $D_i > 0$ из (7)) к

$$\begin{aligned} \text{grad}_y f_i(x, y^{(i)}(x)) &= \frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y} \Big|_{y^{(i)}(x)} = 2D_i y^{(i)}(x) + 2C_i' x_i = 0_m, \\ \frac{\partial^2 f_i(x, y)}{\partial y^2} \Big|_{y^{(i)}(x)} &= 2D_i > 0 \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2}$ – гессиан для $f_i(x, y)$ по компонентам m -вектора y ; при построении градиента $\frac{\partial f_i}{\partial y}$ использованы равенства

$$\frac{\partial}{\partial y} (y' L x) = L x, \quad \frac{\partial}{\partial y} (x' K y) = K' x, \quad \frac{\partial}{\partial y} (y' D y) = 2D y$$

из [9, с. 106]. Согласно (11)

$$y^{(i)}(x) = -D_i^{-1} C_i' x_i \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

Из (11) также получаем тождество (при $\forall x \in \mathbb{R}^{2n}$)

$$[y^{(i)}(x)]' D_i y^{(i)}(x) + 2x_i' C_i y^{(i)}(x) = -[y^{(i)}(x)]' D_i y^{(i)}(x) \quad (i = 1, 2). \quad (13)$$

С помощью (12) и (13) построим

$$\begin{aligned} f_1[x_1, x_2] &= f_1(x_1, x_2, y^{(1)}(x)) = x_1' A_1 x_1 + 2x_1' x_2 - [y^{(1)}(x)]' D_1 y^{(1)}(x) + 2a_1' x_1 = \\ &= x_1' [A_1 - C_1 D_1^{-1} C_1'] x_1 + 2x_1' x_2 + 2a_1' x_1, \\ f_2[x_1, x_2] &= f_2(x_1, x_2, y^{(2)}(x)) = x_2' [A_2 - C_2 D_2^{-1} C_2'] x_2 - 2x_2' x_1 + 2a_2' x_2, \end{aligned} \quad (14)$$

причем, согласно (9),

$$A_i - C_i D_i^{-1} C'_i < 0 \quad (i = 1, 2). \quad (15)$$

Этап 2. Для построения ситуации (x_1^e, x_2^e) , реализующей максимумы в (2) снова используем достаточные условия в виде

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_1[x_1, x_2]}{\partial x_1} \right|_{x_1^e} &= 2[A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1]x_1^e + 2x_2^e + 2a_1 = 0_n, \\ \left. \frac{\partial f_2[x_1, x_2]}{\partial x_2} \right|_{x_2^e} &= -2x_1^e + 2[A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2]x_2^e + 2a_2 = 0_n, \\ \left. \frac{\partial^2 f_1[x_1, x_2]}{\partial x_1^2} \right|_{x_1^e} &= 2[A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1] < 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f_2[x_1, x_2]}{\partial x_2^2} \right|_{x_2^e} &= 2[A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2] < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Справедливость последних двух соотношений в (16) сразу получаем из (15), а с помощью первых двух равенств приходим к системе из двух линейных алгебраических уравнений с двумя векторными неизвестными x_1^e и x_2^e :

$$\begin{cases} (A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1)x_1^e + x_2^e = -a_1, \\ -x_1^e + (A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2)x_2^e = -a_2. \end{cases} \quad (17)$$

Умножая слева первое из них на обратную к невырожденной (см. (15)) матрице $A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1$ и складывая по столбцам, получаем

$$[(A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1)^{-1} + (A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2)]x_2^e = -[(A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1)^{-1}a_1 + a_2]. \quad (18)$$

Аналогично, умножая слева второе из (17) на взятую со знаком "минус" обратную к невырожденной матрице $A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2$ и снова, складывая по столбцам, приходим к

$$[(A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2)^{-1} + (A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1)]x_1 = (A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2)^{-1}a_2 - a_1. \quad (19)$$

Из (15) следует

$$(A_i - C_i D_i^{-1} C'_i)^{-1} < 0 \quad (i = 1, 2).$$

и, с учетом (15), матрицы

$$\begin{aligned} (A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1)^{-1} + (A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2) &< 0, \\ (A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2)^{-1} + (A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1) &< 0, \end{aligned}$$

откуда, в частности, следует невырожденность этих матриц и, следовательно, существование матриц, обратных к этим двум матрицам.

Тогда из (18) и (19) сразу получаем справедливость первых двух формул в (8).

Для построения $f_i^e = f_i[x_1^e, x_2^e]$ ($i = 1, 2$) снова воспользуемся первыми двумя равенствами из (16), откуда, в частности, следует

$$f_1^e = f_1[x_1^e, x_2^e] = [x_1^e]'[A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1]x_1^e + 2[x_1^e]'x_2^e + 2a_1'x_1^e = -[x_1^e]'[A_1 - C_1 D_1^{-1} C'_1]x_1^e,$$

аналогично

$$f_2^e = -[x_2^e]'[A_2 - C_2 D_2^{-1} C'_2]x_2^e.$$

□

Замечание. Чтобы применять полученное выше утверждение, следует, прежде всего, проверить выполнение требований (7), а затем уже строить гарантированное равновесие $(x_1^e, x_2^e, f_1^e, f_2^e)$ по формулам (8). Так, например, если в (6) используются скалярные переменные x_1, x_2, y , матрицы $A_i = -\frac{1}{2}$, $C_i = 1$, $D_i = 2$, a_i – скалярные постоянные ($i = 1, 2$), то $A_i - C_i D_i^{-1} C'_i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ ($i = 1, 2$), по формулам (8) тогда будет

$$\begin{aligned} x_1^e &= [-1 - 1]^{-1}[-1a_2 - a_1] = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \\ x_2^e &= [-1 - 1]^{-1}[-1a_1 + a_2] = \frac{1}{2}(a_1 - a_2), \\ f_1^e &= -\frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2, \\ f_2^e &= -\frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2. \end{aligned}$$

Зависимость равновесных гарантированных выигрышей f_i^e от a_1 и a_2 представлена на рис. 1 и рис. 2 параболическими цилиндрами

$$f_1^e = -\frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2 \text{ и } f_2^e = -\frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2.$$

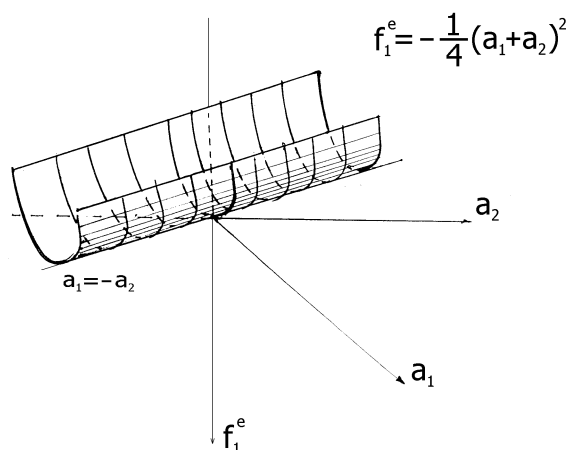


Рис. 1.

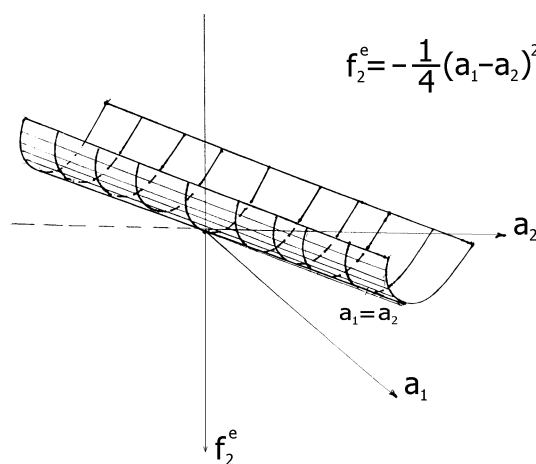


Рис. 2.

На рис. 1 вершина параболы $f_1^e = -\frac{1}{4}v^2$ "скользит" по прямой $a_1 = a_2$, на рис. 2 вершина параболы $f_2^e = -\frac{1}{4}u^2$ "скользит" уже по прямой $a_1 = -a_2$, образуя также параболический цилиндр; здесь считаем $a_1 + a_2 = v$, $a_1 - a_2 = u$.

Авторы благодарят профессора В.И. Жуковского за постановку задачи и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жуковский В.И. *Риски при конфликтных ситуациях*. М.: КРАСАНД, 2011.
- [2] Венцель Е.С. *Исследование операций*. М.: Знание, 1976.
- [3] Wald A. *Contribution to theory of statistical estimation and testing hypothesis* // *Ann. Math. Statist.* 1939. V.10. P. 299-326.
- [4] Nash J.F. *Non-cooperative games* // *Ann. Math.* 1951. 54. P. 286-295.
- [5] Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа* М.: Наука, 1969.
- [6] Красовский Н.Н., Субботин А.Н. *Позиционные дифференциальные игры* М.: Наука, 1974.
- [7] Воробьев Н.Н. *Теория игр для экономистов-кибернетиков* М.: Наука, 1985.
- [8] Воробьев Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры* М.: Наука, 1984.
- [9] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления* М.: Наука, 1984.

ЗОЛОТАРЁВ ВИКТОР ВАЛЕРЬЕВИЧ, РОССИЯ, МОСКВА, РОСЗИТЛП

ЖАРКЫНБАЕВ САБЫР, КАЗАХСТАН, АЛМАТЫ, АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕПРЕРЫВНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

БОРОДИНА Л.В., РОССИЯ, МОСКВА, РОСЗИТЛП

E-mail: rzitlpoz@rambler.ru

А.В. КАРПИКОВА

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА-ШРЕДИНГЕРА

В данной статье для исследования спектральных свойств оператора Хилла-Шредингера используется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра оператора Хилла-Шредингера, а также оценки сходимости спектральных разложений.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $L_2[0, 2\pi]$ — гильбертово пространство измеримых на $[0, 2\pi]$ и суммируемых с квадратом нормы функций. Скалярное произведение в $L_2[0, 2\pi]$ для удобства оценок определим как

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \overline{y(\tau)} d\tau, \quad x, y \in L_2[0, 2\pi].$$

Через $W_2^2[0, 2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2[0, 2\pi] : y' \text{ абсолютно непрерывна и } y'' \in L_2[0, 2\pi]\}$. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство (далее пространство $L_2[0, 2\pi]$ обозначается через $\mathcal{H}$) и $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ — идеал операторов Гильберта—Шмидта ([1], с.120) из алгебры $End\mathcal{H}$. Символом $\|X\|_2$ обозначается норма Гильберта—Шмидта оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Рассматривается одномерный оператор Хилла—Шредингера

$$L = A - B : D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[0, 2\pi],$$

где оператор $A : D(A) \subset L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[0, 2\pi]$, а оператор $B : D(B) \subset L_2[0, 2\pi] \rightarrow L_2[0, 2\pi]$, причем считаем, что $D(B) = D(A) = D(L)$. Данный оператор Хилла—Шредингера определяется дифференциальным выражением

$$Ly = -y'' - v(t)y,$$

с областью определения $y \in D(L) = \{y \in W_2^2[0, 2\pi] : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)\}$, т.е. областью определения, задаваемой периодическими краевыми условиями. Комплекснозначный потенциал $v \in L_2[0, 2\pi]$, причем $v(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Предполагается, что

$$v_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) dt = 0.$$

Таким образом, B — оператор умножения на потенциал v . Этот оператор будет играть роль возмущения. Если же $v = 0$, то оператор L обозначается символом A . Оператор A будет называться *свободным оператором Хилла—Шредингера*.

Спектр и собственные функции самосопряженного оператора A с компактной резольвентой имеют следующий вид: $\sigma(A) = \{n^2, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ — спектр оператора A [2]; $E_n^0 = Span\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)}\}$ — собственное подпространство для собственного значения n^2 , $n \neq 0$, где $e_n^{(1)}(t) = e_n(t) = e^{int}$, $e_n^{(2)}(t) = e_{-n}(t) = e^{-int}$; $E_0^0 = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

В данной статье для исследования спектральных свойств оператора Хилла-Шредингера используется метод подобных операторов [3]– [5]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого оператора в оператор, спектральные свойства которого близки

к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Таким образом существенно упрощается изучение исследуемого оператора L .

Основными результатами статьи являются теоремы 1 и 3, которые позволяют установить асимптотику собственных значений оператора L и получить оценки равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений операторов L и A . В данной работе существенно используется терминология из [2], где использовалась техника, основанная на оценках резольвенты возмущенного оператора, позволяющая получать важные результаты об асимптотическом поведении модуля разности возмущенного и невозмущенного оператора Хилла-Шредингера и его зависимости от гладкости потенциала v . Также, известная асимптотика спектра оператора Хилла-Шредингера получена для $v \in \widetilde{W}_2^n$ (см. [6], с.77). В работах А.М. Савчука и А.А. Шкаликова проведены исследования для $v \in W_2^{-1}$, поэтому и оценки являются более грубыми по сравнению с приведенными мною.

1. НЕКОТОРАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ ИЗ МЕТОДА ПОДОВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Два линейных оператора $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End}\mathcal{H}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 Ux = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2 .

При доказательстве основных утверждений используется

Лемма 1. Пусть $A_i : D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — два подобных оператора, и $U \in \text{End}\mathcal{H}$ — оператор преобразования оператора A_1 в оператор A_2 . Тогда

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, — спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i , $i = 1, 2$, соответственно;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A|_{\mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{H}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, то подпространства $\mathcal{H}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A|_{\mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т.е. $\mathcal{H}_1 = \text{Im} P$ — образ проектора P , $\mathcal{H}_2 = \text{Im}(I - P)$), то проектор $\tilde{P}$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой $\tilde{P} = U P U^{-1}$.

Пусть P_n — ортогональный проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\{n^2\} \subset \sigma(A)$ и, следовательно, $AP_n = n^2 P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Этот проектор имеет вид

$$P_n x = (x, e_n) e_n + (x, e_{-n}) e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad P_0 x = (x, e_0) e_0,$$

где $e_n \perp e_{-n}$, $n \geq 1$, $\|e_n\| = 1$, $\|e_{-n}\| = 1$. Введем в рассмотрение самосопряженный компактный оператор $C_0 : D(C_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ следующего вида:

$$C_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P_k + P_0,$$

с областью определения $D(C_0) = \{x \in \mathcal{H} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \|P_k x\|_2^2 < \infty\}$.

Рассмотрим операторы JB , ΓB следующего вида

$$(JB)x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n B P_n x, \quad x \in \mathcal{H},$$

$$(\Gamma B)x = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z}_+ \\ |i| \neq |j|}} \frac{P_i B P_j}{i^2 - j^2} x, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Для оператора $0 \neq X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим последовательность $(\alpha_n(X))$ вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1} \max\left\{\left(\sum_{|k| \geq |n|} \|X P_k\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{|k| \geq |n|} \|P_k X\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Она обладает свойствами:

1) $\alpha_n(X) = \alpha_{-n}(X), n \in \mathbb{Z}$; 2) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \alpha_n(X) = 0$; 3) $\alpha_n(X) \leq 1$; 4) $\alpha_n(X) \geq \alpha_{n+1}(X), n \geq 0$; 5) $\alpha_n(X) \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ если и только если $P_{(m)}XP_{(m)} \neq X$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $P_{(m)} = \sum_{|k| \leq m} P_k$; 6) конечна величина $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ \alpha_n(X) \neq 0}} \frac{\|XP_n\|_2^2 + \|P_nX\|_2^2}{\alpha_n(X)^2}$.

Также для оператора $0 \neq X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ рассмотрим самосопряженный компактный оператор

$$f_X(A) = f(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(X) P_n \in \text{End} \mathcal{H},$$

являющийся функцией f_X от оператора A , где $f_X : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $f_X(\lambda_n) = \alpha_n(X), n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что $\|f_X(A)\| \leq \max_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n(X)| = 1$.

Введем в рассмотрение банахово пространство операторов $\mathfrak{U}(f)$ из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, допускающих представления

$$X = X_l f(A) C_0, \quad X = f(A) X_r C_0,$$

для некоторых $X_l, X_r \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ и с нормой $\|X\|_* = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Ясно, что $\|X\|_2 \leq \|X\|_*$ для любого $X \in \mathfrak{U}(f)$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение последовательности

$$\omega_n = v_{-n}v_n, \quad \widetilde{\omega}_n = p_{-n}p_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $p_n = v_{2n} + c_{n,-n}, p_{-n} = v_{-2n} + c_{-n,n}$.

Элементы c_{nn} и $c_{-n,-n}, n \in \mathbb{Z}$ матрицы оператора BGB относительно базиса $(e_n), n \in \mathbb{Z}$ представимы в виде

$$c_{n,n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{n-j} \frac{v_{j-n}}{j^2 - n^2}, \quad c_{-n,-n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{-(n+j)} \frac{v_{j+n}}{j^2 - n^2}$$

и равны между собой.

Матрица $P_n B_0 P_n$ оператора $B_0 = JB + J(BGB) + \widetilde{T}_1 C_0$ в базисе $(e_n), n \in \mathbb{Z}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & a(n) \\ b(n) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(n) & d(n) \\ m(n) & c(n) \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) \\ f_3(n) & f_4(n) \end{pmatrix},$$

где оператор $\widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Собственные значения $\lambda_n^\pm$ матрицы $P_n B_0 P_n$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_n^\pm = & c(n) + \frac{f_1(n) + f_4(n)}{2n} \pm \frac{\sqrt{4(a(n) + d(n))(b(n) + m(n))}}{2} \pm \\ & \pm \left(\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{f_1(n) - f_4(n)}{n} \right)^2 + 4(a(n) + d(n) + \frac{f_2(n)}{n})(b(n) + m(n) + \frac{f_3(n)}{n}) -} \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{4(a(n) + d(n))(b(n) + m(n))}}{2} \right). \end{aligned}$$

Тогда $\lambda_n^\pm = c_{n,n} \pm \sqrt{\widetilde{\omega}_n} + \beta_n^\pm$, где $\beta_n^\pm$ определяется формулой

$$\beta_n^\pm = \frac{\alpha(n)}{n} \pm \frac{\beta(n)}{Q(n) \cdot n}, \quad (1)$$

в которой $\sum_{|n| \geq m+1} |\alpha(n)| < \infty, \sum_{|n| \geq m+1} |\beta(n)|^{\frac{2}{3}} < \infty$,

$$\begin{aligned} Q(n) = & 2 \left(\sqrt{\left(\frac{f_1(n) - f_4(n)}{n} \right)^2 + 4(a(n) + d(n) + \frac{f_2(n)}{n})(b(n) + m(n) + \frac{f_3(n)}{n}) +} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{4(a(n) + d(n))(b(n) + m(n))}}{2} \right). \end{aligned}$$

Следующий результат получен с помощью метода подобных операторов [3]- [5]

Теорема 1. Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора $L = A - B$ представим в виде

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right), \quad (2)$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества σ_n , $|n| \geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенством

$$\sigma_n = \{n^2 - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{\omega_k}{k(k+2n)} \pm \sqrt{\tilde{\omega}_n} + \beta_n^\pm\}, \quad |n| \geq m+1, \quad (3)$$

где $\beta_n^\pm$ задается равенством (1).

Представление (2) спектра оператора $A - B$ позволяет получать различные спектральные свойства оператора $A - B$ и, в частности, получать оценки его собственных значений.

Теорема 2. Существует такой оператор $\widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$, где $B_0 = JB + J(B\Gamma B) + T_1$, $T_1 = \widetilde{T}_1 C_0$. При этом, существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что имеет место следующая оценка:

$$\left| \left(\frac{\lambda_n^+ + \lambda_n^-}{2} \right) - \left(\frac{\tilde{\lambda}_n^+ + \tilde{\lambda}_n^-}{2} \right) \right| \leq \frac{|\beta_n|}{|n|}, \quad |n| \geq m+1,$$

где λ_n^+, λ_n^- — собственные значения оператора $JB + J(B\Gamma B)$, $\tilde{\lambda}_n^+, \tilde{\lambda}_n^-$ — собственные значения оператора B_0 , (β_n) , $|n| \geq m+1$, — абсолютно сходящаяся последовательность.

Пусть $\tilde{P}_m$ — спектральный проектор Рисса, построенный по оператору L и множеству $\sigma_{(m)}$. Для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \setminus \sigma_m^0$, где $\sigma_m^0 = \{-m, \dots, m\}$, символом $P(\Omega)$ обозначим спектральный проектор $\sum_{k \in \Omega} P_k$, а через $\tilde{P}(\Omega)$ — спектральный проектор $\sum_{k \in \Omega} \tilde{P}_k$, где $\tilde{P}_k = U^{-1} P_k U$, $|k| \geq m+1$. Далее для любого оператора $X \in \mathfrak{S}_2(L_{2,\pi})$ и любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}$ через $\alpha(\Omega, X)$ обозначим величину $\max_{n \in \Omega} \alpha_n(X)$.

Теорема 3. Существует такой оператор $\widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$. Тогда для любого подмножества $\Omega \subset \mathbb{Z}_+ \setminus \sigma_m^0$ имеет место оценка (равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений)

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}(\Omega) - P(\Omega)\|_2 &\leq C_0 \left(\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, \tilde{B}) \frac{1}{m(\Omega)} \right) \leq C_0 \alpha(\Omega, \Gamma B) + \\ &+ C_1 (\alpha(\Omega, \Gamma B) + \alpha(\Omega, JB) + \alpha(\Omega, B\Gamma B)) \frac{1}{m(\Omega)}. \end{aligned}$$

где $C_0, C_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от Ω , $m(\Omega) = \max_{k \in \Omega} k$.

Теорема 4. Существует такой оператор $\widetilde{T}_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - B_0$. Тогда, начиная с некоторого номера n , имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}_m + \sum_{|k|=m+1}^n \tilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^n P_k\|_2 &\leq C_0 \alpha_{n+1}(\Gamma B) + C_1 (\alpha_{n+1}(\Gamma B) + \\ &+ \alpha_{n+1}(JB) + \alpha_{n+1}(B\Gamma B)) \frac{1}{m+1}, \end{aligned}$$

где $n \geq m+1$, $C_0, C_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от n .

Следствие 1. Имеет место равномерная равносходимость спектральных разложений операторов L и A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{P}_m + \sum_{|k|=m+1}^n \tilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^n P_k\|_2 = 0.$$

Теорема 5. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что*

$$\sum_{|n| \geq m+1} \frac{1}{\beta_n^2} \|\tilde{P}_n - P_n\|_2^2 \cdot n^2 < \infty,$$

где $\beta_n = \alpha_n(\Gamma B) + \alpha_n(JB) + \alpha_n(B\Gamma B)$, $|n| \geq m+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн *Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов* // М.: Наука, 1965. – 448 с.
- [2] П. Джаков, Б.С. Митягин *Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака* // Успехи математических наук. – 2006. – Т.61. – №4. – с. 77-182.
- [3] А.Г. Баскаков *Гармонический анализ линейных операторов* // Воронеж: изд-во Воронежского государственного университета, 1987. – 165с.
- [4] А.Г. Баскаков *Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений* // Известия АН СССР. сер. матем. – 1986. – Т.50. – №3. – С. 435-457.
- [5] А.Г. Баскаков, А.В. Дербушев, А.О. Щербаков *Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом* // Известия РАН. сер. матем. – 2011. – Т.75. – №2.
- [6] В.А. Марченко *Операторы Штурма Лиувилля и их приложения* // М.: Наука, 1977.

КАРПИКОВА Алина Вячеславовна, ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, УНИВЕРСИТЕТСКАЯ ПЛ., 1, 394000, ВОРОНЕЖ, РОССИЯ

E-mail: karpikovaav@mail.ru

В.А. КОРНЕЕВ

ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЛАБЫХ ВОЛН В РЕШЕНИИ ВЕКТОРНОГО ВАРИАЦИОННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Изучены негладкие решения системы уравнений Эйлера-Лагранжа, соответствующей вариационной задаче с несколькими искомыми функциями многих переменных и квадратичным функционалом. Распространение слабых разрывов описывается уравнениями метода сингулярных характеристик, развитого в работах А.А.Меликяна. Исследовано возникновение и взаимодействие слабых разрывов решения, инициированных негладкими начальными условиями. Предложенная методика позволяет изучать распространение и взаимодействие слабых волн.

Non-smooth solutions of Euler-Lagrange equations corresponding to variational problems with several unknown functions of several variables and quadratic functional are studied. Propagation of weak discontinuities is described by equations of the method of singular characteristics, developed by A.A. Melikyan. The occurrence and interaction of weak discontinuities of solutions initiated by non-smooth initial conditions are studied. The proposed methodology allows us to study the propagation and interaction of weak waves.

В различных физических теориях возникают задачи, постановки которых имеют вариационную формулировку. К таким задачам, в частности, относятся задачи теории поля, гидродинамики (распространение волн), теории цепей. При этом могут возникать ситуации, когда гладкое в области решение задачи претерпевает слабый разрыв (разрыв производной). Причиной возникновения такого разрыва могут служить такие явления как негладкость граничных условий, пересечение сильных волн, самопроизвольный разрыв внутри области. В данной работе рассматривается в основном случай, когда причиной возникновения разрыва служит негладкость граничных условий.

1. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ

Рассматривается вариационная задача в области

$$J = \int_G F(x, u(x), p(x)) dx \rightarrow \text{extr}, p = \frac{\partial u}{\partial x}, u(x) : G \rightarrow R^N, x \in G \subset R^n, \quad (1)$$
$$B[u(x)]_{x \in \partial G} = 0$$

на множестве пар

$$U = \{u^*(x), G_*\}, \quad (2)$$

в которых непрерывные функции определены и дважды кусочно-непрерывно дифференцируемы в области G_* . Для краткости это будем обозначать как $u^*(x) \in PC^2(G_*)$. Область G_* своя для каждой функции. Конкретный вид граничных условий $B[u(x)]_{x \in \partial G} = 0$ зависит от типа задачи и включает задание на различных частях границы значений самой функции или её частных производных. Эта задача с нефиксированной (варьируемой) границей. Лагранжиан F предполагается непрерывно дифференцируемым достаточное число раз.

Известно, что дважды дифференцируемое решение задачи (1) удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа – квазилинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$F_u - \operatorname{div} F_p = 0, \quad x \in G \quad \left(\operatorname{div} F_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i} \right). \quad (3)$$

Решением вариационной задачи (1), вообще говоря, может быть негладкая функция класса (2). Такие функции удовлетворяют уравнению Эйлера только в точках дифференцируемости. Без дополнительных требований на поверхностях потери гладкости решение, вообще говоря, может быть неединственным. Для того чтобы рассматривать решения уравнения (3) в классе кусочно гладких функций (2), определим решение как функцию класса $PC^2(G)$, удовлетворяющую условию:

$$\delta J[u(x); \delta u(x)] = 0 \quad (4)$$

для всех допустимых вариаций $\delta u(x)$ функции $u(x)$. Здесь δJ – первая вариация функционала (1), соответствующая вариации функции $\delta u(x)$. Класс допустимых вариаций $\delta u(x)$ будет уточнен ниже. Таким образом, обобщенное решение в точках гладкости удовлетворяет уравнению (3), а в точках потери гладкости – некоторым другим следствиям из соотношения (4). Негладкость решения имеет место на некоторой гиперповерхности (коразмержности 1), называемой далее сингулярной поверхностью или слабой волной. Эта поверхность имеет непустое пересечение с границей области G и делит область по крайней мере на две подобласти, в каждой из которых $u \in C^2(G)$, т.е. удовлетворяет обычным уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha i}} = 0, \quad p_{\alpha i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Здесь и далее латинские индексы будут соответствовать пространственным переменным x_i , $i=1, \dots, n$, а греческие нумеровать компоненты функции u_α , $\alpha=1, \dots, N$. По латинским индексам будет подразумеваться суммирование. Суммирование по греческим не предполагается. Задача состоит в определении необходимых условий сшивания гладких ветвей решения на границе областей и описании алгоритма построения сингулярных поверхностей. В данной работе рассматривается квадратичный лагранжиан и соответствующее ему вариационное волновое уравнение. Для случая $N=1$ эта задача рассматривалась в [1], [2]. Случай $N=2$ изучался в [3].

2. ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ

Рассмотрим семейство обратимых преобразований друг в друга n -мерных пространств $\mathbb{R}_x^n, \mathbb{R}_y^n$:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_y^n : \quad y = \Phi(x, \varepsilon), \quad \Phi(x, 0) = x, \\ \Psi : \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_x^n : \quad x = \Psi(y, \varepsilon), \quad \Psi(y, 0) = y, \\ \Phi(\Psi(y, \varepsilon), \varepsilon) &= y, \quad \Psi(\Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) = x, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем также

$$\phi(x) = \frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \Psi(x, 0)}{\partial \varepsilon},$$

и однопараметрическое семейство функций и областей

$$\begin{aligned} (w(y, \varepsilon), G_\varepsilon) : w(y, \varepsilon) &= u(\Psi(y, \varepsilon)) + \varepsilon h(\Psi(y, \varepsilon)), \quad y \in G_\varepsilon, \\ G_\varepsilon &= \{y \in \mathbb{R}_y^n : y = \Phi(x, \varepsilon), x \in G_0\} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $u(x)$, $h(x)$ – гладкие функции, $G = G_0$. При $\varepsilon = 0$ получаем $G_\varepsilon = G_0 = G$ и $w(y, 0) = w(x, 0) = u_0(x)$, поскольку $y = x$. Семейство (7) – кривая на множестве U из

(2), проходит через $(u_0(x), G_0)$. Первая вариация функционала (1), соответствующая допустимой функции $(u_0(x), G_0)$ и вариации $\delta u(x)$, определяются равенствами

$$\delta J[u, \delta u] = \left. \frac{\partial J(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \delta u(x) = (h(x), \phi(x)) = (h(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) \quad (8)$$

Здесь предполагается, что скалярной функции $h(x)$ и векторная функция $\phi(x)$ по определению, в совокупности составляют вариацию номинальной функции $\delta u(x)$.

Кратный интеграл от лагранжиана F по переменной y в области G_ε путем замены переменных сводится к интегралу по переменной x в стандартной области G_0 , не зависящей от ε ,

$$J(\varepsilon) = \int_{G_\varepsilon} F\left(y, w(y, \varepsilon), \frac{\partial w(y, \varepsilon)}{\partial y}\right) dy = \int_{G_0} F\left(\Phi(x, \varepsilon), w(\Phi(x, \varepsilon), \varepsilon), \frac{\partial w(\Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial y}\right) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right| dx$$

где $|\partial \Phi / \partial x|$ - якобиан преобразования (6). Вычисляя первую вариацию и используя формулу Гаусса, получаем

$$\delta J = \int_G \sum_{\alpha=1}^N (F_{u_\alpha} - \operatorname{div} F_{p_\alpha}) g_\alpha dx + \int_{\partial G} \left\langle \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha(x) F_{p_\alpha} + F \phi(x), n(x) \right\rangle d\sigma, \quad \frac{\partial w(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = g(x) \quad (9)$$

где $n(x)$ - внешняя нормаль к границе области G в точке $x \in \partial G$, $d\sigma$ - элемент площади поверхности. Предполагаем, что функция $u(x)$ дважды гладкая, а поверхность ∂G - кусочно-гладкая. Из формулы (9) видно, что для первой вариации функционала существенны значения функции $\phi(x)$ лишь в граничных точках области G . Для вариаций $\delta u(x)$ из (8) с фиксированной границей и граничными значениями, т.е. когда функция $\phi(x)$ исчезает во всей области, а функция $h(x)$ - лишь на границе ∂G , равенство нулю первой вариации (9) влечет за собой уравнение Эйлера (3) (основная лемма вариационного исчисления). Под выражением $\langle a, b \rangle$ здесь и далее подразумевается скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ. ОБОБЩЕНИЕ УСЛОВИЙ ВЕЙЕРШТРАССА - ЭРДМАНА.

Теорема. Пусть пара $(u(x), G)$ есть решение задачи (1), причем функция $u(x)$ кусочно-гладкая. Предположим, что существует гладкая поверхность $\Gamma \subset G$, разделяющая область G на две открытые подобласти G^-, G^+ : $G = G^- + \Gamma + G^+$, рис.1. Пусть далее, функция $u(x)$ непрерывна в области G и дважды гладкая в каждой из областей G^-, G^+ , а ее градиент терпит разрыв на Γ , причем m_0 первых компонент u имеют излом на кривой Γ , а остальные компоненты гладкие. Тогда на поверхности Γ выполнены обобщенные условия Вейерштрасса - Эрдмана

$$\begin{cases} F(x, u, p) - F(x, u, q) - \sum_{\alpha=1}^{m_0} \langle F_{q_\alpha}, p_\alpha - q_\alpha \rangle = 0, \\ \langle F_{p_\alpha} - F_{q_\alpha}, p_\alpha - q_\alpha \rangle = 0, & \alpha = 1, \dots, m_0, \\ \langle F_{p_\alpha} - F_{q_\alpha}, p_1 - q_1 \rangle = 0, & \alpha = m_0 + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство. Действительно, обозначим через $u^+(x), u^-(x)$ ограничение функции $u(x)$ на области G^-, G^+ . В каждой из областей G^-, G^+ соответствующая ветвь решения удовлетворяет уравнению Эйлера.

Поэтому функционал (9) можно переписать как

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\partial G} \left\langle \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha^-(x) F_{p_\alpha}(x, u, p) + F(x, u, p) \phi(x), n(x) \right\rangle d\sigma - \\ & - \int_{\partial G} \left\langle \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha^+(x) F_{q_\alpha}(x, u, q) + F(x, u, q) \phi(x), n(x) \right\rangle d\sigma, \end{aligned} \quad (11)$$

где $p = \partial u^- / \partial x$, а $q = \partial u^+ / \partial x$.

Вариации g^-, g^+ имеют следующий вид

$$g^- = h^- - \langle p, \phi \rangle, \quad g^+ = h^+ - \langle q, \phi \rangle. \quad (12)$$

Здесь $h^-(x), h^+(x)$ определяют изменение самих функции $u^-(x), u^+(x)$, а вектор $\phi(x)$ – вариацию границы ∂G . Выбор значений $h^-(x), h^+(x)$ и $\phi(x)$ для граничных точек $x \in \partial G$ должен быть согласован с граничными условиями в (1). В остальном эти функции достаточно произвольны. Очевидно, что на границе Γ в силу непрерывности обе ветви должны быть равны. Также должны быть равны вариации $h^+ = h^- = h$. Таким образом, с учетом выражений (12) и условий непрерывности вариации h выражение (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{\Gamma} \left[\sum_{\alpha=1}^N h_{\alpha} \langle F_{p_{\alpha}} - F_{q_{\alpha}}, n \rangle + \right. \\ \left. + \left\langle (F(x, u, p) - F(x, u, q))n - \sum_{\alpha=1}^N \langle F_{p_{\alpha}}, n \rangle p_{\alpha} - \langle F_{q_{\alpha}}, n \rangle q_{\alpha}, \phi \right\rangle \right] d\sigma \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, необходимое условие экстремума (4) функционала (1) дает следующие формулы, которые должны выполняться на кривой излома Γ

$$\begin{aligned} \langle F_{p_{\alpha}} - F_{q_{\alpha}}, n \rangle = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N, \\ (F(x, u, p) - F(x, u, q))n - \sum_{\alpha=1}^N (\langle F_{p_{\alpha}}, n \rangle p_{\alpha} - \langle F_{q_{\alpha}}, n \rangle q_{\alpha}) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть m_0 первых компонент u имеют излом на кривой Γ , тогда вследствие непрерывности функции $u(x)$ векторы $p_{\alpha} - q_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, m_0$ ортогональны поверхности Γ , т.е. коллинеарны вектору n . Поэтому для некоторых ненулевых скалярных величин λ_{α} , $\alpha = 1, \dots, m_0$ имеют место равенства:

$$n = \lambda_{\alpha}(p_{\alpha} - q_{\alpha}), \quad \lambda_{\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha = 1, \dots, m_0. \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в (14), получим условия (10).

Таким образом условия (10) представляют собой условия сшивания гладких ветвей решения на сингулярной поверхности. $\square$

Условия (10) симметричны относительно обеих гладких ветвей решения $u^{\pm}(x)$. Однако при построении решения (численном или аналитическом) одна из ветвей может быть найдена до построения поверхности Γ , а для построения другой ветви требуется знание поверхности Γ . В обозначении ветви $u^-(x)$ далее будем опускать знак минус, а ветвь $u^+(x)$ будем обозначать через $v(x)$, сохранив для градиентов прежние обозначения p, q .

Для определенности будем полагать известной ветвь $v(x)$, $q(x)$, точнее, некоторое ее гладкое расширение на область G . Подставив значения $v(x), q(x)$ в левую часть равенств (10), будем рассматривать эти части как функции величин (x, u, p) .

4. СЛАБЫЙ РАЗРЫВ ОДНОЙ КОМПОНЕНТЫ.

Найдем общий вид лагранжиана F , чтобы негладкой могла быть только одна компонента u_1 , а все остальные были бы гладкими, т.е. установить общий вид лагранжиана, при котором слабый разрыв возникающий в одной компоненте функции u не приводит к возникновению слабых разрывов в других компонентах. Для этого достаточно, чтобы лагранжиан разделялся по производным

$$F(x, u, p) = E(x, u, p_1) + I(x, u, \bar{p}), \quad \bar{p} = (p_2, p_3, \dots, p_N). \quad (16)$$

При этом никаких условий на зависимость от самих функции u_{α} не налагается. Все уравнения Эйлера, кроме первого, не содержат вторых производных от u_1 . Поэтому слабый разрыв u_1 не сказывается на дифференцируемости остальных функций.

Отметим, что все предыдущие выкладки носили локальный характер. Поэтому в глобальной задаче может существовать несколько возможно даже пересекающихся сингулярных поверхностей, вдоль которых те или иные компоненты терпят излом.

Рассмотрим соотношения (10). Пусть из некоторых априорных соображений нам известно, что слабый разрыв будет только у u_1 – первой компоненты. В этих уравнениях участвуют две вектор-функции u и v . Считаем, что функция $v = v(x)$ задана на всей области G и является гладким решением вариационной задачи (1). В силу предположения об отсутствии разрыва у всех компонент, кроме первой $u_i(x) = v_i(x)$, $i = 2, \dots, N$. Таким образом, из (10) мы имеем 2 дифференциальных уравнения, где неизвестными являются функции u_1, p_1 . Поэтому (14) можно переписать

$$\begin{aligned} H(x, u_1, p_1) &= F(x, u_1, u_2(x), \dots, u_N(x), p_1, p_2(x), \dots, p_N(x)) - \\ &\quad - F(x, v(x), q(x)) - \langle F_{q_1}(x, v(x), q(x)), p_1 - q_1(x) \rangle = 0, \\ R(x, u_1, p_1) &= \langle F_{p_1}(x, u_1, u_2(x), \dots, u_N(x), p_1, p_2(x), \dots, p_N(x)) - \\ &\quad - F_{q_1}(x, v(x), q(x)), p_1 - q_1(x) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

К этим уравнениям необходимо добавить условие непрерывности

$$F_1(x, u_1) = u_1 - v_1(x) = 0. \quad (18)$$

Равенства (17) представляют собой модифицированные условия Вейерштрасса-Эрдмана, а равенство (18) является необходимым дополнением к условиям Вейерштрасса-Эрдмана для применения метода сингулярных характеристик [4], [6]. Другое наблюдение состоит в том, что второе условие Вейерштрасса-Эрдмана выражается через первое условие в терминах скобок Якоби следующим образом:

$$R(x, u_1, p_1) = \{F_1 H\} = \langle H_p(x, u_1, p_1), p_1 - q_1 \rangle \quad (H_p = F_p - F_q). \quad (19)$$

Отметим, что скобки Якоби

$$\{FG\} = \langle F_x + pF_u, G_p \rangle - \langle G_x + pG_u, F_p \rangle$$

превращаются в скобки Пуассона в отсутствие зависимости от u ; подобная зависимость обязательно присутствует в условии непрерывности $F_1(x, u) = 0$, если даже лагранжиан F в (1) не зависит от u .

Соотношение (19) предлагает инвариантную интерпретацию условий Вейерштрасса-Эрдмана.

Таким образом уравнения (17)-(18) определяют следующее многообразие W_3 коразмерности 3:

$$W_3 : H(x, w, r) = 0, \quad R(x, w, r) = \{F_1 H\} = 0, \quad F_1(x, w) = 0, \quad (20)$$

где $w = u_1$, $r = p_1$.

Система сингулярных характеристик, интегрированием которой строится поверхность Γ , задается как касательное поле на W_3 . Согласно методу сингулярных характеристик [4], [6] упомянутая система имеет вид:

$$\dot{x} = H_r, \quad \dot{w} = \langle r, H_r \rangle, \quad \dot{r} = -H_x - rH_w - \frac{\{\{HF_1\}H\}}{\{\{F_1H\}F_1\}}(r - q_1(x)). \quad (21)$$

Сингулярная поверхность Γ строится интегрированием системы характеристик (21). Начальным условием для (21) служит надстройка над краем Γ_2 , $\dim \Gamma_2 = n - 2$ многообразия Γ . Система (21) описывает один из типов сингулярных характеристик нелинейного уравнения в частных производных первого порядка $H(x, u, p) = 0$. Роль системы (21) для уравнения второго порядка (3) заключается в том, что она описывает распространение конечных возмущений (негладкости) решения; с ее помощью, в частности, можно находить область границы ∂G , которая влияет на значение решения в данной точке области G . Доказана следующая Лемма 1.

Лемма 1. Пусть в задаче (1) функция $F(x, u, p)$ имеет вид (16), пара $(u(x), G)$ есть решение задачи (1), причем функция $u(x)$ кусочно-гладкая. Предположим, что существует гладкая поверхность $\Gamma \subset G$, разделяющая область G на две открытые подобласти G^- , G^+ : $G = G^- \cup \Gamma \cup G^+$, рис.1. Пусть далее, функция $u(x)$ непрерывна в области G и дважды гладкая в каждой из областей G^- , G^+ , а ее градиент терпит разрыв на Γ , причем только первая компонента u имеет излом на кривой Γ , а остальные компоненты гладкие. Предполагаем также, что одна из ветвей решения $u^+(x)$ (обозначаемая в формулах (17)-(21) $v(x)$, $q = \nabla v(x)$) может быть найдена до построения поверхности Γ , а для построения другой ветви $u^-(x)$ (обозначаемой в формулах (17)-(21) $u(x)$, $p = \nabla u(x)$) требуется знание поверхности Γ . Тогда на поверхности Γ выполнены необходимые условия (20), (21), в которых $w = u_1$, $r = p_1$.

В теории дифференциальных игр система (21) представляет собой сингулярную характеристику уравнения Беллмана-Айзека [7, с. 170]; [8, с. 23] и описывает так называемые особые эквивокальные траектории, [4]; [7, с. 344].

5. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ. КВАДРАТИЧНЫЙ ЛАГРАНЖИАН.

Начальное подмногообразие Γ_2 может соответствовать нерегулярности граничных условий из (1). Точки негладкости граничных условий могут служить началом слабых волн (сингулярных поверхностей). Для определения начальных условий к уравнениям характеристик (21) необходимо рассмотрение поведения решения в малой окрестности точек сингулярности граничных условий.

Пусть негладкость граничных условий в этой точке есть только у u_1 , а граничные условия для остальных компонент регулярны. Уравнения (21) по форме не отличаются от уравнений, полученных в скалярном случае (u - скалярная функция). Поэтому результаты, полученные в работе [1] остаются в силе. Без ограничения общности рассмотрим случай, когда $n = 2$ и, когда Γ_2 - точка. Пусть $G = \{x_2 : x_2 > 0\}$ и из Γ_2 выходят m слабых волн (см. рис. 2).

Основные предположения: в окрестности Γ_2 волны не пересекаются друг с другом и с границей ∂G , для каждого межволнового сектора пределы первых производных u_1 в нуле конечны. Рассмотрим разложения Тейлора функции $w = u_1$ в окрестности нуля

$$w_i(x_1, x_2) = a_i x_1 + b_i x_2 + d, \quad a_i = \frac{\partial w_i(0, 0)}{\partial x_1}, \quad b_i = \frac{\partial w_i(0, 0)}{\partial x_2}, \quad d = w(0, 0),$$

где индекс $i = 1, \dots, m + 1$ нумерует разложение в секторах. Каждая волна - кривая и описывается уравнением $x_2 = g_i(x_1)$, которое в линейном приближении имеет вид

$$x_2 = k_i x_1, \quad k_i = \frac{\partial g_i(0)}{\partial x_1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Таким образом мы имеем $3(m + 1)$ неизвестных

$$d, k_1, \dots, k_m, a_1, \dots, a_{m+1}, b_1, \dots, b_{m+1}.$$

Для их определения необходимо выписать уравнения (20) для каждой волны

$$\begin{aligned} H(x, w_i, r) = 0, \quad R(x, w_i, r) = \{F_1 H\} = 0, \quad F_1(x, w_i) = 0, \\ w_i = u_1(x_1, k_i x_1), \quad r = p_1, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (22)$$

и добавить граничные условия. Тогда получим систему уравнений определяющих начальные условия для характеристик.

Для квадратичного лагранжиана

$$F(x, u, p) = \sum_{\alpha=1}^N F_{\alpha}(x, u, p_{\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \langle A_{\alpha}(x, u) p_{\alpha}, p_{\alpha} \rangle, \quad u = \{u_1, \dots, u_N\} \quad (23)$$

уравнения Эйлера имеют вид

$$A_{\beta ij} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial A_{\beta ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + \sum_\alpha \left[\frac{\partial A_{\beta ij}}{\partial u_\alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial A_{\alpha ij}}{\partial u_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right] \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим двумерную задачу, когда

$$A_\alpha(x, u) = \begin{pmatrix} -c_\alpha^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Введём прямоугольную область

$$G = \{x, y : |x| < l, |y| < T\}.$$

Условия Коши формулируются для $y = 0$ и уравнения интегрируются в прямом и обратном времени y . Таким образом отрезок с начальными данными оказывается внутри области G , что упрощает численное и аналитическое решение задачи. Начальные условия имеют вид

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \Psi(x), \quad u(-l, y) = u(l, y) = 0. \quad (26)$$

Пусть все компоненты вектор-функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ являются гладкими, за исключением первых $\varphi(x) = \Phi_1(x)$, $\psi(x) = \Psi_1(x)$. А функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы всюду, за исключением точки $x = 0$, где $\varphi(x)$ может иметь угловую точку, а $\psi(x)$ разрыв первого рода. Таким образом реализуется наше предположение о существовании слабого разрыва только у одной компоненты.

Теперь рассмотрим уравнения (22). Необходимо прибавить к ним начальные условия (26) и определить количество слабых волн. Заметим, что из-за квадратичности лагранжиана мы имеем $R = 2H$. Таким образом количество уравнений (22) уменьшается на m штук. Начальные условия определяют 5 параметров

$$d = \varphi(0), \quad a_1 = \frac{\partial \varphi(+0)}{\partial x}, \quad b_1 = \psi(+0), \quad a_{m+1} = \frac{\partial \varphi(-0)}{\partial x}, \quad b_{m+1} = \psi(-0). \quad (27)$$

Считаем количество неизвестных параметров

$$3(m+1) - 5 = 3m - 2.$$

Приравнявая количество неизвестных и количество уравнений, получаем

$$3m - 2 = 2m \implies m = 2.$$

Мы доказали Лемму 2.

Лемма 2. Пусть выполнены условия Леммы 1, а функция $F(x, u, p)$ из (1) удовлетворяет соотношениям (23), (25). Тогда негладкость начальных условий на гладкой части границы области Γ может приводить к возникновению двух слабых волн.

Этот результат полностью согласуется с результатами работ [1], [2] в случае скалярной неизвестной функции.

Нетрудно показать, что параметры k_1 , k_2 , a_2 , b_2 имеют вид

$$k_1 = -k_2 = c_1^{-1}(u(0)), \quad a_2 = \frac{a_3 + a_1}{2} + \frac{k_2(b_3 - b_1)}{2}, \quad b_2 = \frac{b_3 - b_1}{2} + \frac{a_3 - a_1}{2k_2}. \quad (28)$$

Волну с положительным угловым коэффициентом будем называть правой (бежит слева направо), а с отрицательным левой.

Теперь, после определения параметров волн, перейдём к рассмотрению уравнений сингулярных характеристик и начальных условий к ним. Обозначим через $v(x, y)$ гладкую ветвь решения $u_1(x, y)$ в первом секторе, а индекс у c_1 будем опускать. Гамильтониан для рассматриваемой задачи имеет вид

$$H(x, y, w, r_1, r_2) = F_1(x, w, u_2(x, y), \dots, u_N(x, y), \xi, \gamma) = \frac{1}{2}(-c^2(u)\xi^2 + \gamma^2),$$

$$\xi = r_1 - q_1(x, y), \quad \gamma = r_2 - q_2(x, y), \quad q_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad q_2 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Запишем уравнение сингулярных характеристик (21)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\bar{c}^2 \xi, \\ \dot{y} &= \gamma, \\ \dot{w} &= -q_1 \bar{c}^2 \xi + q_2 \gamma, \\ \dot{\xi} &= \bar{c} \bar{c}'_x \xi^2 + \bar{c} \bar{c}'_w \xi^2 q_1 = (\bar{c}'_x + \bar{c}'_w q_1) \bar{c} \xi^2, \\ \dot{\gamma} &= \bar{c} \bar{c}'_y \xi^2 + \bar{c} \bar{c}'_w \xi^2 q_2 = (\bar{c}'_y + \bar{c}'_w q_2) \bar{c} \xi^2, \end{aligned} \tag{29}$$

где $q_1 = q_1(x, y)$, $q_2 = q_2(x, y)$, $\bar{c} = \bar{c}(x, u, w) = c(w, u_2(x, y), \dots, u_N(x, y))$. Система характеристик (29) является обобщением системы характеристик, полученных в [1].

Начальные условия для системы (29) с использованием (27) и (28) имеют вид

$$\begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0, \quad w(0) = d, \\ \xi(0) &= a_2 - a_1 = \frac{a_3 - a_1}{2} - \frac{b_3 - b_1}{2\bar{c}(0, 0, d)}, \\ \gamma(0) &= b_2 - b_1 = \frac{b_3 - b_1}{2} - \frac{\bar{c}(0, 0, d)(a_3 - a_1)}{2}. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим задачу (1) с двухкомпонентной функцией $u = (u_1, u_2)$ на двумерной области. Система обозначений этой главы несколько отличается от использованной ранее. Это сделано для символической совместимости с работами [1], [2].

Введём обозначения

$$\alpha_1 = \bar{c}_1^2, \quad \alpha_2 = \bar{c}_2^2.$$

Лагранжиан (23) имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \left(-\alpha_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - \alpha_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right).$$

Уравнения Эйлера (24) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= \alpha_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= \alpha_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Система сингулярных характеристик для первой компоненты имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha_1 \xi, & \dot{y} = \gamma, \\ \dot{u}_1 = -q_{1x} \alpha_1 \xi + q_{1y} \gamma, \\ \dot{\xi} = \frac{1}{2} (\alpha'_{1x} + \alpha'_{1u_1} q_{1x}) \xi^2, \\ \dot{\gamma} = \frac{1}{2} (\alpha'_{1y} + \alpha'_{1u_1} q_{1y}) \xi^2, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$\alpha'_{1x} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \alpha'_{1y} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \alpha'_{1u_1} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} q_{1x} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad q_{1y} = \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Система сингулярных характеристик для второй компоненты выглядит аналогично:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha_2 \xi, & \dot{y} = \gamma, \\ \dot{u}_2 = -q_{2x} \alpha_2 \xi + q_{2y} \gamma, \\ \dot{\xi} = \frac{1}{2} (\alpha'_{2x} + \alpha'_{2u_2} q_{2x}) \xi^2, \\ \dot{\gamma} = \frac{1}{2} (\alpha'_{2y} + \alpha'_{2u_2} q_{2y}) \xi^2, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$\alpha'_{2x} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \alpha'_{2y} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \alpha'_{2u_2} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2}, \quad q_{2x} = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad q_{2y} = \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Начальные условия для системы (30) для правой волны записывается в виде:

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = 0, \quad u_1(0) = d, \\ \xi(0) = a_2 - a_1 = \frac{a_3 - a_1}{2} - \frac{b_3 - b_1}{2\sqrt{\alpha_1(\Phi(0))}}, \\ \gamma(0) = b_2 - b_1 = \frac{b_3 - b_1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha_1(\Phi(0))}(a_3 - a_1)}{2}, \end{aligned}$$

для левой (31)

$$\begin{aligned} x(0) = y(0) = 0, \quad u_1(0) = d, \\ \xi(0) = a_2 - a_3 = \frac{a_1 - a_3}{2} - \frac{b_3 - b_1}{2\sqrt{\alpha_1(\Phi(0))}}, \\ \gamma(0) = b_2 - b_3 = \frac{b_3 - b_1}{2} - \frac{\sqrt{\alpha_1(\Phi(0))}(a_1 - a_3)}{2}. \end{aligned}$$

6. ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ЕГО АНАЛИЗ

6.1. Алгоритм и программы. Для численного исследования задачи были созданы две программы под названием *Char* и *Direct*. Они написаны на языке Fortran Power Station 4 и предназначены для расчета слабых волн в решении двумерного вариационного волнового уравнения в прямоугольной области. Программа *Direct* позволяет строить решение для случаев, когда функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, задающие решение на границе, непрерывны и могут иметь угловые точки внутри области определения, а функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, задающие производные решения на границе, могут иметь разрывы первого рода.

В программе *Char* построение решения проводится с использованием уравнений сингулярных характеристик для одной из компонент. Вторая компонента предполагалась гладкой.

В программе *Direct* построение решения проводилось непосредственным интегрированием системы двух двумерных волновых уравнений в прямоугольной области без использования уравнений сингулярных характеристик (сквозной счет). Такой подход обладает своими преимуществами, поскольку позволяет получить достоверные результаты, даже когда решение обладает участками близкими к вертикали и горизонтали.

Интегрирование уравнений Эйлера-Лагранжа в программах проводилось по хорошо известной явной схеме (см. [16, с. 505], ; [17, с. 209]), разработанной для численного интегрирования уравнений гиперболического типа. Соотношение между шагами, для рассматриваемой нелинейной задачи выбиралось из условия устойчивости соответствующей линейной задачи.

6.2. Численное моделирование решения волнового уравнения. Построение решений с помощью программы *VectorDirect* проводилось для случая, когда функции $\alpha_1(u_1, u_2)$, $\alpha_2(u_1, u_2)$ в системе волновых уравнений Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} &= \alpha_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} &= \alpha_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

с помощью параметров ε_{ij} ($i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_1(u_1, u_2) &= \varepsilon_{11} \cos^2(u_1) + \varepsilon_{12} \sin^2(u_1) + \varepsilon_{13} \cos^2(u_2) + \varepsilon_{14} \sin^2(u_2), \\ \alpha_2(u_1, u_2) &= \varepsilon_{21} \cos^2(u_1) + \varepsilon_{22} \sin^2(u_1) + \varepsilon_{23} \cos^2(u_2) + \varepsilon_{24} \sin^2(u_2). \end{aligned} \quad (33)$$

Граничные условия определялись равенствами

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial y} = \psi_1(x), \quad u_1(-l, y) = u_1(l, y) = 0, \\ u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial y} = \psi_2(x), \quad u_2(-l, y) = u_2(l, y) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Для точек множества G здесь введено покомпонентное обозначение: $x = x_1, y = x_2$. Область G представляет собой прямоугольник

$$G = \{|x| \leq l, \quad 0 \leq y \leq T\}.$$

Данные Коши (34) формулируются для $y = 0$, и уравнения (32), (33) интегрируются в прямом времени y .

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \alpha'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad (35)$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \psi(x), \quad u(-l, y) = u(l, y) = 0 \quad (36)$$

и функцией $\alpha(u)$ задаваемой соотношением

$$\alpha(u) = a^2 \cos^2(u) + b^2 \sin^2(u) \quad (37)$$

представляет собой одномерный случай рассматриваемой задачи и описывает распространение возмущений в жидких кристаллах, [10, с. 40], .

Действительно, если для одной из компонент решения u_1, u_2 в задаче (32)-(34) положить нулевые начальные условия, например, для u_1 $\varphi_1(x) \equiv 0$ и $\psi_1(x) \equiv 0$, то эта компонента будет тождественным нулем т.е. $u_1(x, y) \equiv 0$. Путем переобозначения переменных и постоянных нетрудно убедиться, что в этом случае задачи (32)-(34), (35)-(37) совпадают. Расчеты с нулевой компонентой проводились как для тестирования работы программы так и для более наглядной демонстрации взаимодействия компонент решения.

Обозначим через $\alpha_{i0}(u_1, u_2)$, $i = 1, 2$ функции $\alpha_1(u_1, u_2)$, $\alpha_2(u_1, u_2)$ для значений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = 0.5, \varepsilon_{12} = 1.5, \varepsilon_{13} = 1.5, \varepsilon_{14} = 0.5, \\ \varepsilon_{21} = 1.5, \varepsilon_{22} = 0.5, \varepsilon_{23} = 0.7, \varepsilon_{24} = 1.7 \end{aligned}$$

Результаты расчетов приведены в основном для функций

$$\alpha_1(u_1, u_2) = \alpha_{10}(u_1, u_2), \quad \alpha_2(u_1, u_2) = \alpha_{20}(u_1, u_2). \quad (38)$$

Но кроме этого для изучения влияния коэффициентов ε_{ij} на решение были проведены расчеты для

$$\alpha_i(u_1, u_2) = i \alpha_{i0}(u_1, u_2), \quad \alpha_2(u_1, u_2) = i \alpha_{20}(u_1, u_2), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (39)$$

Указанные значения параметров были выбраны на основе большого объема проведенных расчетов для различных значений параметров ε_{ij} ($i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$) с тем, чтобы результаты построений наиболее наглядно иллюстрировали взаимодействие волн и влияние граничных условий на поведение решения. Некоторая несимметричность в значениях данных была допущена сознательно для исключения возможной нейтрализации различных эффектов выбором специфических значений данных. Из аналогичных соображений выбирались начальные функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$, $i=1, 2$.

Некоторые результаты численных построений представлены на рисунках 3,4. На этих рисунках изображены графики компонент решения u_1, u_2 системы уравнений Эйлера (32). При этом на рисунке 3 представлено решение задачи (32)-(34) для функций $\alpha_j(u_1, u_2)$, $j = 1, 2$ из (38). На рисунке 4 представлено решения задачи (32)-(34) для функций $\alpha_j(u_1, u_2)$, $j = 1, 2$ из (39) при $i = 4$.

На рис. 3,4 представлены решения для случая когда первая компонента решения u_1 имеет гладкие начальные условия, а вторая компонента решения u_2 имеет негладкие начальные условия. В качестве начальных функций $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ выбраны гладкие функции,

имеющие максимум в точке $x = -0.5$. В качестве начальных функций $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ выбраны функции, имеющие излом и максимум в начале координат. Максимумы в начальных функциях для обеих компонент были выбраны в различных точках для лучшего понимания взаимодействия компонент решения u_1 , u_2 . На рисунках начальные условия для компонент u_1 , u_2 (функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_1(x)$) выделены жирными линиями. Функции $\psi_1(x)$, $\psi_1(x)$ выбирались пропорциональными функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_1(x)$. Сравнение рисунков 3,4 показывает что наиболее заметное влияние другой компоненты испытывает компонента, имеющая негладкие начальные условия. Эффект влияния компоненты в основном зависит от величины объема пространства между графиком влияющей компоненты решения и плоскостью x, y (интегральный эффект) и расположением ее максимума. Рисунки 3,4 показывают, что при увеличении значений $\alpha_j(u_1, u_2)$, $j = 1, 2$ характер поведения решения остается прежним, но волны распространяются с большей скоростью.

Были проведены расчеты для случая когда компоненты решения u_1 , u_2 имеют негладкие начальные условия. В качестве начальных функций $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ были выбраны функции, имеющие излом и максимум в точке $x = -0.5$. В качестве начальных функций $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ выбраны функции, имеющие излом и максимум в точке $x = 0.5$. Максимумы в начальных функциях для обеих компонент были выбраны в различных точках для лучшего понимания взаимодействия компонент решения u_1 , u_2 . Оказалось что заметного влияния друг на друга компоненты не оказывают. Рисунки для этого случая из-за ограниченности объема статьи здесь не приведены.

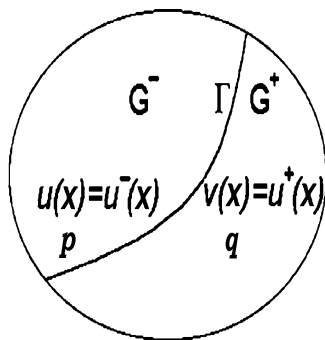


Рис. 1

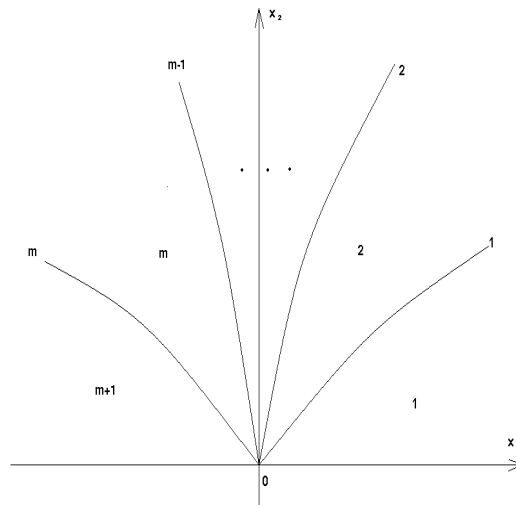


Рис. 2

Выводы

В работе применен метод сингулярных характеристик для построения решения системы уравнений Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи с квадратичным функционалом в классе непрерывных кусочно-гладких функций. Получены условия, при которых в задаче с несколькими искомыми функциями может быть использован данный метод. Изучались, в основном, случаи возникновения слабого разрыва решения, инициированного негладкими граничными условиями. Исследован также случай, когда волновая картина возникает и при гладких, но быстро меняющихся начальных условиях. Эффективность предложенной методики для изучения распространения и взаимодействия слабых волн продемонстрирована на примерах.

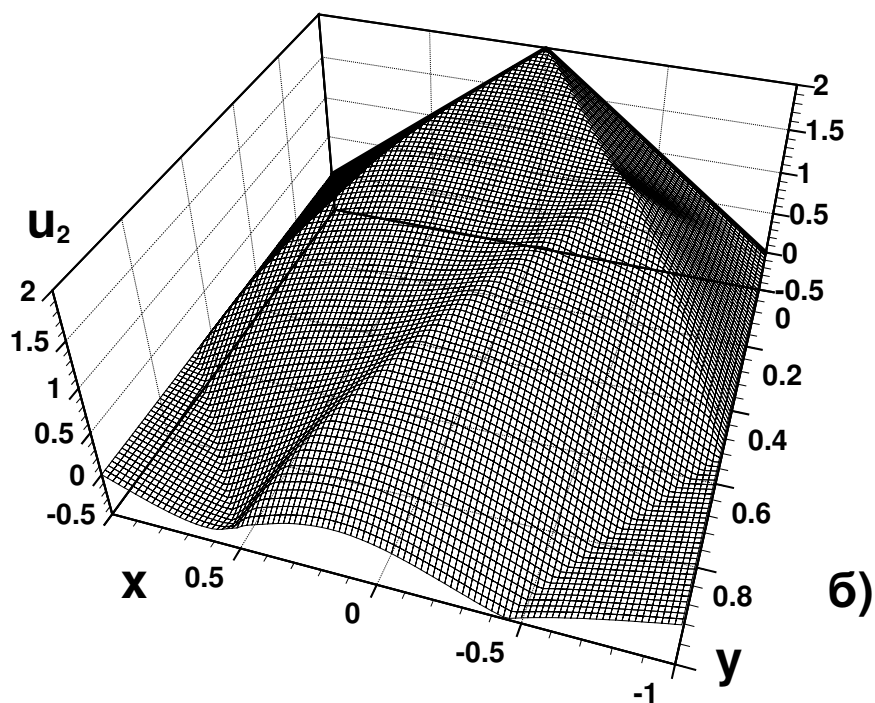
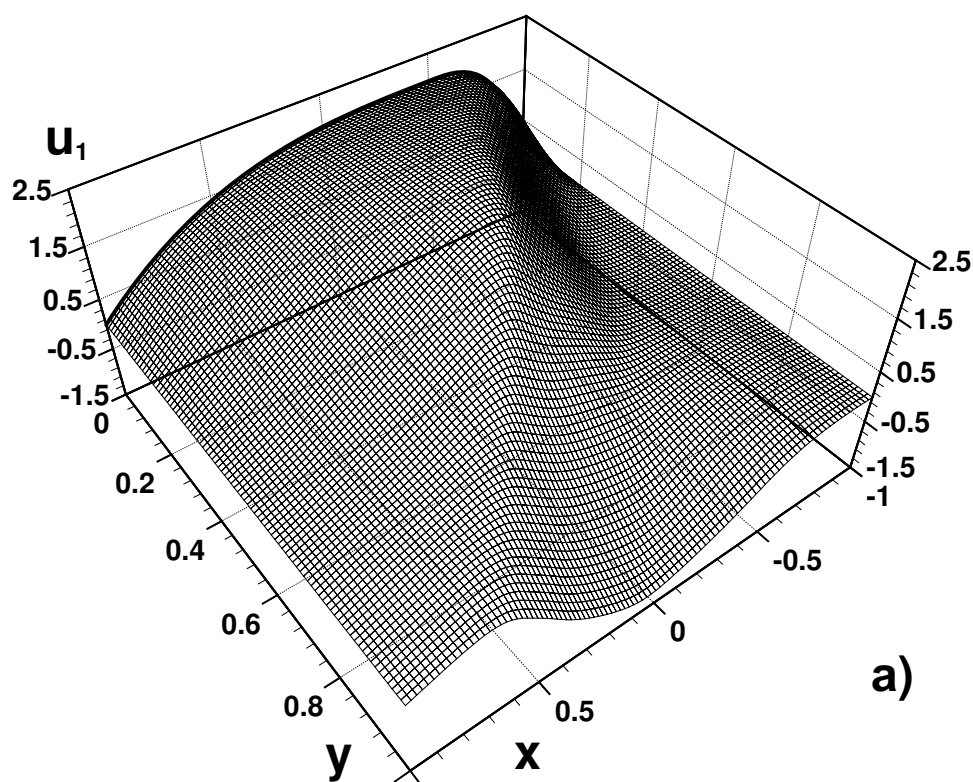


Рис. 3 (а,б)

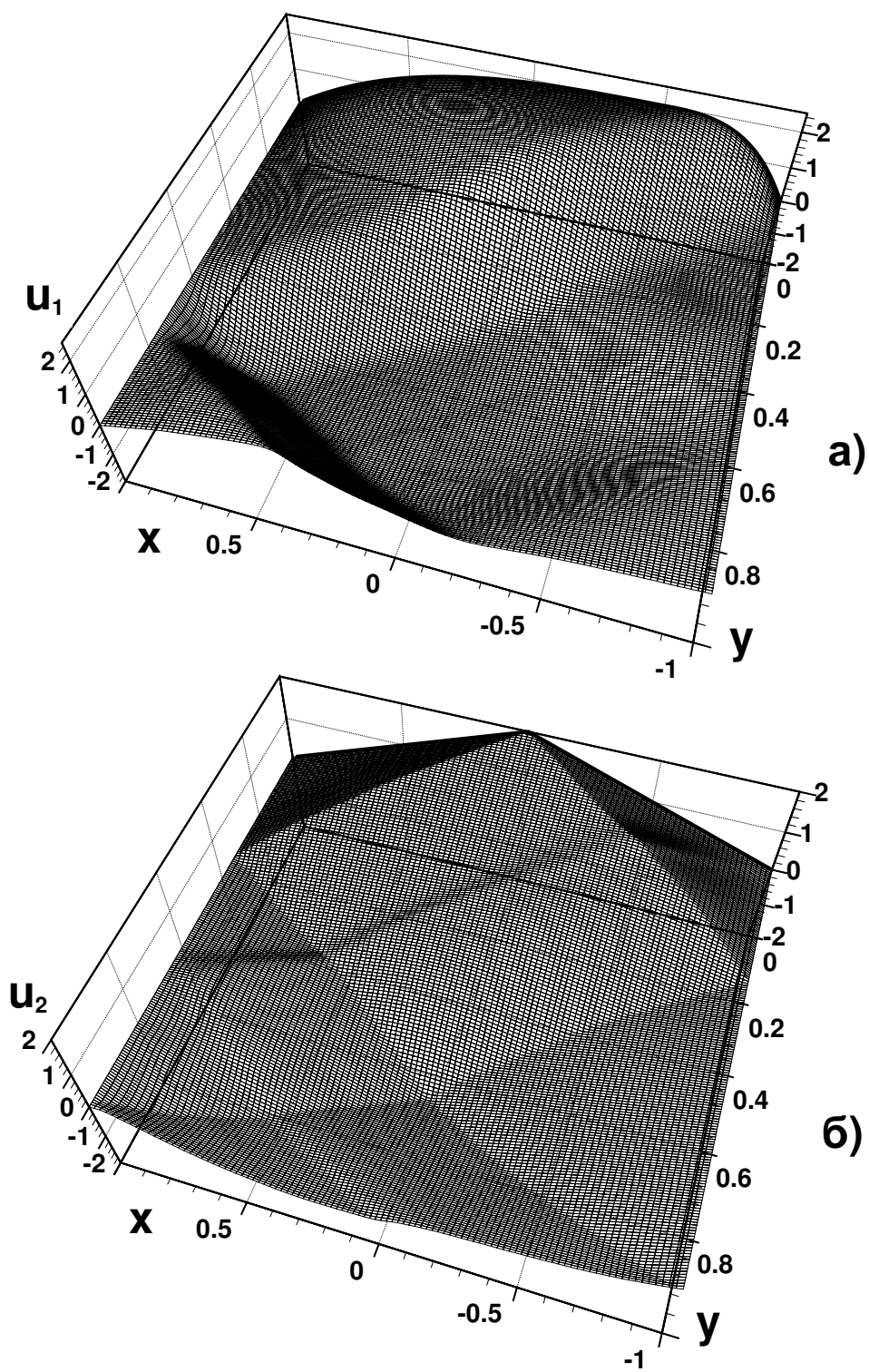


Рис. 4 (а,б)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнеев В.А., Меликян А.А. *Построение слабых разрывов решения вариационной задачи в области* // Изв. РАН. ТиСУ. 2003, N 1. С. 47-60.
- [2] Корнеев В.А., Меликян А.А. *Численное исследование слабых волн в решении вариационного волнового уравнения* // Изв. РАН. ТиСУ. 2005, N 1. С. 63-74
- [3] Корнеев В.А., Королев С.Л., Меликян А.А. *Исследование поведения слабых волн в решении векторного вариационного волнового уравнения* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. No 9, с. 1237-1248.
- [4] Melikyan, A.A. *Generalized Characteristics of First Order PDEs. Applications in Optimal Control and Differential Games* // Boston: Birkhauser, 1998, 320 p.
- [5] Курант Р. *Уравнения в частных производных*. М.: Мир, 1964. 830 с.
- [6] Меликян А.А. *Сингулярные характеристики уравнений в частных производных первого порядка* // Докл. РАН. 1996, Vol. 82. N 2. С. 203-217.
- [7] Айзекс Р. *Дифференциальные игры*. М.: Мир, 1967. 480 с.
- [8] Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнения Гамильтона-Якоби*. М: Наука, 1995.
- [9] Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации*. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
- [10] Glassey, R.T., Hunter, J.K. and Zheng, Y. *Singularities and oscillations in a nonlinear variational wave equation*. IMA Volumes in Mathematics and its Applications/Eds. A.Friedman, R.Gulliver. N. Y.: Springer Verlag, 1998. P. 37-60.
- [11] Melikyan A.A. *Propagation of weak discontinuities of the solutions to the multiple integral variational problem* // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2, 2000. М: МАИК "Наука/Interperiodika 2000. P. S113-S124.
- [12] Arnold, V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. N. Y.: Springer, 1988. 351 p.
- [13] Корнеев В.А., Меликян А.А. *Построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби методом характеристик* // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. N 6. С. 168-177.
- [14] Корнеев В.А. *Численное построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби* // Изв. РАН. ТиСУ. 1998, N 1. С. 99-106.
- [15] Корнеев В.А., Королев С.Л., Меликян А.А. *Исследование поведения слабых волн в решении векторного вариационного волнового уравнения* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. No 9, с. 1237-1248.
- [16] Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Г. *Численные методы*. Москва - Санкт-Петербург: Физматлит, 2001. 632 с.
- [17] Годунов С.К., Рябенский В.С. *Разностные схемы (введение в теорию)*. М.: Наука, 1977. 400 с.

КОРНЕЕВ ВСЕСЛАВ АЛЕКСАНДРОВИЧ, РОССИЯ, МОСКВА, ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО РАН

E-mail: korneev@ipmnet.ru

Е.В. КРУТЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

Для задачи Коши

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t, \omega t) + \omega b_2(t, \omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t, \omega t) + b_0(t, \omega t) \right] x = \\ = e^{i \int_0^t \left(\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s) \right) ds} \left(\omega^{\frac{m_1}{2}} f(t) + \omega^{\frac{m_2}{2}} g(t, \omega t) \right), \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega x_1,$$

где $m_1, m_2 \in Z, \omega \gg 1, a(t) \neq \frac{l}{2}, l \in Z$, функции $b(t, \tau)$ и $g(t, \tau)$ — 2π -периодические по τ , x_0 и x_1 — заданные вещественные числа, построено асимптотическое разложение решения

$$x_\omega(t) = \sum_{k=1}^2 e^{i \int_0^t \left(\omega \lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s) \right) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{m-(j+4)}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t)) + \\ + e^{i \int_0^t \left(\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s) \right) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{m-(j+r)}{2}} (p_j(t) + q_j(t, \omega t)),$$

здесь

$$r = \begin{cases} 4, & a^2(t) \neq \mu_1^2(t), t \in [0, T]; \\ 3, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t, \tau) \rangle \neq \mu_1(t) \mu_2(t), t \in [0, T]; \\ 2, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t, \tau) \rangle \equiv \mu_1(t) \mu_2(t); \end{cases}$$

$m = \max\{2, m_1, m_2\}$, функции $v_{jk}(t, \tau)$ и $q_j(t, \tau)$ — 2π -периодические по τ функции с нулевым средним.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрены линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка, коэффициенты при неизвестных и свободные элементы у которых содержат плавные и быстро осциллирующие слагаемые, пропорциональные определённым степеням частоты осцилляций. Построены и обоснованы полные асимптотические разложения решений задачи Коши. Похожая задача, но без высокочастотных слагаемых рассмотрена в монографии Н.Н.Моисеева [1]. Работа примыкает к статьям Крутенко Е.В., Левенштама В.Б. [2]– [3], где исследованы близкие задачи для однородных скалярного и векторного уравнений.

1. ПОСТАНОВКИ

Пусть $T > 0$, $a(t), \mu_1(t), \mu_2(t), f(t)$ и $g(t, \tau), b_k(t, \tau), k = 0, 1, 2, 3$, — заданные на множествах $t \in [0, T]$ и $(t, \tau) \in [0, T] \times [0, \infty) \equiv \Pi$, соответственно, вещественные непрерывные функции, обладающие непрерывными производными по t любого порядка. Будем предполагать, что $a(t)$ не принимает целых и полупелых значений ($a(t) \neq \frac{n}{2}, n \in Z$) — нерезонансный случай, а функции $g(t, \tau), b_k(t, \tau), k = 0, 1, 2, 3$, являются 2π -периодическими по τ и имеют по τ непрерывные на Π производные.

Рассмотрим на участке $t \in [0, T]$ задачу Коши

$$\ddot{x} + \left[\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} b_3(t, \omega t) + \omega b_2(t, \omega t) + \omega^{\frac{1}{2}} b_1(t, \omega t) + b_0(t, \omega t) \right] x =$$

$$= e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s)) ds} \left(\omega^{\frac{m_1}{2}} f(t) + \omega^{\frac{m_2}{2}} g(t, \omega t) \right), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \omega x_1, \quad (2)$$

где ω — большой вещественный параметр, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, а x_0 и x_1 — заданные вещественные числа.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ

Построим формальную асимптотику

а) Случай $a^2(t) - \mu_1^2(t) \neq 0, t \in [0, T]$.

Асимптотическое разложение решения $x_\omega(t)$ задачи (1), (2) в этом случае будем строить в виде

$$x_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{m-(j+4)}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 e^{i \int_0^t (\omega \lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s)) ds} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t)) \right.$$

$$\left. + e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s)) ds} (p_j(t) + q_j(t, \omega t)) \right), \quad (3)$$

где $m = \max\{2, m_1, m_2\}$, а $v_{jk}(t, \tau)$ и $q_j(t, \tau)$ — 2π -периодические по τ функции с нулевым средним, то есть

$$\langle v_{jk}(t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{jk}(t, s) ds = 0, \quad \langle q_j(t, \tau) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_j(t, s) ds = 0.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов асимптотического разложения подставим ряд (3) в уравнение (1) и приравняем в левой и правой частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых функциях вида

$$\omega^{\frac{1}{2}} e^{i \int_0^t (\omega \lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s)) ds}, \quad k = 1, 2, \text{ и } \omega^{\frac{1}{2}} e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s)) ds}, \quad l = m, m-1, m-2, \dots$$

В результате получим бесконечную цепочку уравнений. При $\omega^{\frac{m}{2}}$ имеют места три равенства

$$\left(\lambda_k^2(t) + a^2(t) \right) \left(u_{0k}(t) + v_{0k}(t, \tau) \right) + 2\lambda_{1k}(t) v'_{0k}(t, \tau) + v''_{0k}(t, \tau) = 0, \quad k = 1, 2; \quad (4)$$

$$(a^2(t) - \mu_1^2(t)) (p_0(t) + q_0(t, \tau)) + 2i\mu_1(t) q'_0(t, \tau) + q''_0(t, \tau) = \alpha f(t) + \beta g(t, \tau), \quad (5)$$

где $\alpha = \begin{cases} 1, & m_1 = m, \\ 0, & m_1 < m; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1, & m_2 = m, \\ 0, & m_2 < m. \end{cases}$

Применяя к (4) операцию усреднения по τ , найдём уравнения

$$(\lambda_{1k}^2(t) + a^2(t)) u_{0k}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

в которых положим $\lambda_{11}(t) = a(t)i$, $\lambda_{12}(t) = -a(t)i$.

Вычитая из равенств (4) равенства (6), получим следующие уравнения

$$v''_{0k}(t, \tau) + 2\lambda_{1k}(t) v'_{0k}(t, \tau) = 0,$$

которые в силу наложенных на v_{0k} ограничений имеют нулевые решения.

В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$\{a(t, \tau)\}_\tau = a(t, \tau) - \langle a(t, \tau) \rangle.$$

Производя те же самые действия с равенством (5), будет найдено

$$p_0(t) = \frac{\alpha f(t) + \beta \langle g(t, \tau) \rangle}{a^2(t) - \mu_1^2(t)}$$

и уравнение

$$q''_0(t, \tau) + 2i\mu_1(t) q'_0(t, \tau) + (a^2(t) - \mu_1^2(t)) q_0(t, \tau) = \beta \{g(t, \tau)\}_\tau,$$

которое можно записать в виде системы

$$z'(t, \tau) + A(t)z(t, \tau) = d(t, \tau),$$

где

$$y(t, \tau) = \begin{pmatrix} q_0(t, \tau) \\ r(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a^2(t) - \mu_1^2(t) & 2i\mu_1(t) \end{pmatrix}, \quad d(t, \tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \{g(t, \tau)\}_\tau \end{pmatrix},$$

решение которой существуют в случае когда $\mu_1(t) \pm a(t)$ не принимают целые и полуцелые значения при $t \in [0, T]$ и имеет вид

$$y(t, \tau) = (E - e^{-2\pi A(t)})^{-1} \int_0^{2\pi} e^{A(s-2\pi-\tau)} d(t, s) ds + \int_0^\tau e^{A(s-\tau)} d(t, s) ds.$$

Следующие три равенства (при $\omega^{\frac{m-1}{2}}$) имеют вид

$$(2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3)u_{0k} + (\lambda_{1k}^2 + a^2)(u_{1k} + v_{1k}) + 2\lambda_{1k}v'_{1k} + v''_{1k} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

$$q_1'' + 2i\mu_1q_1' + 2i\mu_2q_0' + (a^2 - \mu_1^2)(p_1 + q_1) + (b_3 - \mu_1\mu_2)(p_0 + q_0) = \alpha f + \beta g, \quad (8)$$

где $\alpha = \begin{cases} 1, & m_1 = m - 1, \\ 0, & m_1 \neq m - 1; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1, & m_2 = m - 1, \\ 0, & m_2 \neq m - 1. \end{cases}$

Применяя к (7) операцию $\langle \dots \rangle$, получим

$$\lambda_{21}(t) = -\frac{\langle b_3(t, \tau) \rangle i}{2a(t)}, \quad \lambda_{22}(t) = \frac{\langle b_3(t, \tau) \rangle i}{2a(t)}.$$

А применяя к равенствам (7) операцию $\{\dots\}_\tau$, найдём уравнения

$$v''_{1k} + 2\lambda_{1k}v'_{1k} + \{b_3\}_\tau u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

сделав в которых замену

$$v'_{1k} = w_{1k}u_{0k}, \quad \langle w_{1k} \rangle = 0, \quad k = 1, 2,$$

мы получим уравнения вида

$$w''_{1k} + 2\lambda_{1k}w'_{1k} = -\{b_3\}_\tau, \quad k = 1, 2.$$

Эти уравнения имеют решения

$$w_{1k}(t, \tau) = (1 - e^{\mp 4a(t)\pi})^{-1} \int_0^{2\pi} \{b_3(t, s)\}_s e^{\pm 2a(t)i(s-\tau-2\pi)} ds + \\ + \int_0^\tau \{b_3(t, s)\}_s e^{\pm 2a(t)i(s-\tau)} ds \equiv \alpha_k(t, \tau), \quad k = 1, 2,$$

где $\alpha_k(t, \tau + 2\pi) = \alpha_k(t, \tau), \quad \langle \alpha_k(t, \tau) \rangle = 0.$

Из выше сказанного следует, что исходные уравнения (9) имеют решения

$$v_{1k}(t, \tau) = \beta_k(t, \tau)u_{0k}(t),$$

где

$$\beta_k(t, \tau) = \int_0^\tau \alpha_k(t, s) ds - \left\langle \int_0^\tau \alpha_k(t, s) ds \right\rangle.$$

Применяя последовательно операции $\langle \dots \rangle$ и $\{\dots\}_\tau$ к равенству (8), получим

$$p_1 = \frac{\alpha f + \beta \langle g \rangle + (\mu_1\mu_2 - \langle b_3 \rangle)p_0 - \langle b_3q_0 \rangle}{a^2 - \mu_1^2},$$

а также уравнение

$$q_1'' + 2i\mu_1q_1' + (a^2 - \mu_1^2)q_1 = \beta \{g\}_\tau - \{b_3(p_0 + q_0)\}_\tau - 2i\mu_2q_0' + \mu_1\mu_2q_0,$$

где в правой части стоит известная 2π -периодическая по τ функция с нулевым средним.

Последнее уравнение решается так же как и уравнение для q_0 .

Равенства коэффициентов при $\omega^{\frac{m-2}{2}}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\lambda_{1k}^2 + a^2)(u_{2k} + v_{2k}) + (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3)(u_{1k} + v_{1k}) + \\ & + (\lambda_{2k}^2 + b_2 + \dot{\lambda}_{1k})u_{0k} + 2\lambda_{1k}\dot{u}_{0k} + v''_{2k} = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (a^2 - \mu_1^2)(p_2 + q_2) + (b_3 - \mu_1\mu_2)(p_1 + q_1) + (i\dot{\mu}_1 - \mu_2^2)(p_0 + q_0) + \\ & + 2i\mu_1(\dot{p}_0 + \dot{q}_0) + q_2'' + 2i\mu_1q_2' + 2i\mu_2q_1' + 2\dot{q}_0' = \alpha f + \beta g, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\alpha = \begin{cases} 1, & m_1 = m - 2, \\ 0, & m_1 \neq m - 2; \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1, & m_2 = m - 2, \\ 0, & m_2 \neq m - 2. \end{cases}$

Усредняя по τ равенства (10), получим уравнения

$$\pm 2a(t)i\dot{u}_{0k}(t) + \left(\langle b_2(t, \tau) + b_3(t, \tau)\beta_k \rangle \pm \dot{a}(t)i - \frac{\langle b_3(t, \tau) \rangle^2}{4a^2(t)} \right) u_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{01}(0) + u_{02}(0) &= \delta - p_0(0) - q_0(0), \\ \lambda_{11}u_{01}(0) + \lambda_{12}u_{02}(0) &= \gamma - i\mu_1(0)(p_0(0) + q_0(0)) - q'_0(0), \end{cases} \quad (13)$$

где $\delta = \begin{cases} x_0, & m = 4, \\ 0, & m \neq 4; \end{cases} \quad \gamma = \begin{cases} x_1, & m = 4, \\ 0, & m \neq 4; \end{cases}$

Найдя из (12) и (13) u_{01} , u_{02} , найдём и v_{11} , v_{12} .

Предположим, что для некоторого числа N найдены все $u_{j,k}$, $v_{j+1,k}$, $k = 1, 2$, и p_{j+2} , q_{j+2} , $j \leq N$. Покажем, что могут быть найдены неизвестные $u_{N+1,k}$, $v_{N+2,k}$, $k = 1, 2$, и p_{N+3} , q_{N+3} . Для этого рассмотрим уравнения, полученные приравнованием коэффициентов при $\omega^{\frac{m-N-2}{2}}$:

$$\begin{aligned} & (\lambda_{1k}^2(t) + a^2(t)) (u_{N+2,k} + v_{N+2,k}) + (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3(t, \tau)) (u_{N+1,k} + v_{N+1,k}) + \\ & \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + b_2(t, \tau) \right) (u_{N,k} + v_{N,k}) + \left(\dot{\lambda}_{2k} + b_1(t, \tau) \right) (u_{N-1,k} + v_{N-1,k}) + \\ & + 2\lambda_{1k} (\dot{u}_{N,k} + \dot{v}_{N,k} + \dot{v}'_{N+2,k}) + 2\lambda_{2k} (\dot{u}_{N-1,k} + \dot{v}_{N-1,k} + \dot{v}'_{N+1,k}) + \\ & + \ddot{u}_{N-2,k} + \ddot{v}_{N-2,k} + 2\dot{v}'_{N,k} + v''_{N+2,k} + b_0 (u_{N-2,k} + v_{N-2,k}) = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя к ним операцию усреднения по τ , получим равенства

$$\begin{aligned} & \lambda_{2k}^2 u_{N,k} + \dot{\lambda}_{1k} u_{N,k} + \dot{\lambda}_{2k} u_{N-1,k} + 2\lambda_{1k} \dot{u}_{N,k} + 2\lambda_{2k} \dot{u}_{N-1,k} + \ddot{u}_{N-2,k} + \\ & + \langle b_3(t, \tau) v_{N+1,k} \rangle + \langle b_2(t, \tau) \rangle u_{N,k} + \langle b_2(t, \tau) v_{N,k} \rangle + \langle b_1(t, \tau) \rangle u_{N-1,k} + \\ & + \langle b_1(t, \tau) v_{N-1,k} \rangle + \langle b_0(t, \tau) \rangle u_{N-2,k} + \langle b_0(t, \tau) v_{N-2,k} \rangle = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти равенства используются при определении коэффициентов $u_{N,k}$. Поскольку последние по предположению найдены, то здесь этими уравнениями заниматься не будем.

Разность уравнений (14) и (15) имеет вид

$$\begin{aligned} & v''_{N+2,k} + 2\lambda_{1k} v'_{N+2,k} + \{b_3\}_\tau u_{N+1,k} = \langle b_3 v_{N+1,k} \rangle - (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3) v_{N+1,k} - \\ & - 2\lambda_{2k} v'_{N+1,k} - \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + b_2 \right) v_{N,k} - 2\lambda_{1k} \dot{v}_{N,k} + \langle b_2 v_{N,k} \rangle + \langle b_1 v_{N-1,k} \rangle - \\ & - \dot{\lambda}_{2k} v_{N-1,k} - \ddot{v}_{N-2,k} - b_0 v_{N-2,k} + \langle b_0 v_{N-2,k} \rangle - \{b_2\}_\tau u_{N,k} - \\ & - \{b_1\}_\tau u_{N-1,k} - \{b_0\}_\tau u_{N-2,k} \equiv \psi_{N+2,k}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\psi_{N+2,k}$ — известные 2π -периодические по τ функции с нулевыми средними. То есть, получили выражение подобное уравнению (9). Действуя по описанному для нахождения v_{1k} алгоритму, будут найдены

$$\begin{aligned} v_{N+2,k} &= \left\{ \int_0^\tau (\alpha_k(t, s) u_{N+1,k}(t) + \gamma_{N+2,k}(t, s)) ds \right\}_\tau \equiv \\ &\equiv \xi_k(t, \tau) u_{N+1,k}(t) + \eta_{N+2,k}(t, \tau), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (17)$$

где ξ_k и $\eta_{N+2,k}$ — известные 2π -периодические по τ функции с нулевым средним.

Уравнения для p_{N+2} и q_{N+2} опущены, так как они тоже уже найдены.

Следующая тройка уравнений рассматриваемой нами последовательности имеет вид

$$\begin{aligned} & (\lambda_{1k}^2 + a_2) (u_{N+3,k} + v_{N+3,k}) + (2\lambda_{1k}\lambda_{2k} + b_3) (u_{N+2,k} + v_{N+2,k}) + \\ & + \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + b_2 \right) (u_{N+1,k} + v_{N+1,k}) + \left(\dot{\lambda}_{2k} + b_1 \right) (u_{N,k} + v_{N,k}) + \\ & + 2\lambda_{1k} (\dot{u}_{N+1,k} + \dot{v}_{N+1,k} + \dot{v}'_{N+3,k}) + 2\lambda_{2k} (\dot{u}_{N,k} + \dot{v}_{N,k} + \dot{v}'_{N+2,k}) + \\ & + \ddot{u}_{N-1,k} + \ddot{v}_{N-1,k} + 2\dot{v}'_{N+1,k} + v''_{N+3,k} + b_0 (u_{N-1,k} + v_{N-1,k}) = 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & q''_{N+3} + 2i\mu_1 q'_{N+3} + (a^2 - \mu_1^2) (p_{N+3} + q_{N+3}) = \\ & = \alpha f + \beta g + (\mu_1 \mu_2 - b_3) (p_{N+2} + q_{N+2}) + (\mu_2^2 - i\dot{\mu}_1 - b_2) (p_{N+1} + q_{N+1}) - \\ & - (i\dot{\mu}_2 + b_3) (p_N + q_N) - b_0 (p_{N-1} + q_{N-1}) - 2i\mu_1 (\dot{p}_{N+1} + \dot{q}_{N+1}) - \\ & - 2i\mu_2 (\dot{p}_N + \dot{q}_N) - 2i\mu_2 q'_{N+2} - \ddot{p}_{N-1} - \ddot{q}_{N-1} - 2\dot{q}'_{N+1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Применяя к уравнениям (18) операцию усреднения, получим соотношения

$$\begin{aligned} & 2\lambda_{1k}\dot{u}_{N+1,k} + \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + \langle b_2 \rangle\right) u_{N+1,k} + \langle b_3 v_{N+2,k} \rangle = \\ & = -\dot{\lambda}_{2k} u_{N,k} - 2\lambda_{2k}\dot{u}_{N,k} - \ddot{u}_{N-1,k} - \langle b_2 v_{N+1,k} \rangle - \langle b_1 v_{N,k} \rangle - \\ & - \langle b_0 v_{N-1,k} \rangle - \langle b_1 \rangle u_{N,k} - \langle b_0 \rangle u_{N-1,k}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда, учитывая (17), найдём уравнения

$$\begin{aligned} & 2\lambda_{1k}\dot{u}_{N+1,k} + \left(\lambda_{2k}^2 + \dot{\lambda}_{1k} + \langle b_2 \rangle + \langle b_3 \xi_k \rangle\right) u_{N+1,k} = \\ & = -\langle b_3 \eta_{N+1,k} \rangle - \dot{\lambda}_{2k} u_{N,k} - 2\lambda_{2k}\dot{u}_{N,k} - \ddot{u}_{N-1,k} - \langle b_2 v_{N+1,k} \rangle - \langle b_1 v_{N,k} \rangle - \\ & - \langle b_0 v_{N-1,k} \rangle - \langle b_1 \rangle u_{N,k} - \langle b_0 \rangle u_{N-1,k}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (21)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} u_{N+1,1}(0) + u_{N+1,2}(0) &= \nu_{N+1}, \\ \lambda_{11}(0)u_{N+1,1}(0) + \lambda_{12}(0)u_{N+1,2}(0) &= \sigma_{N+1}, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \nu_{N+1} &= \delta - v_{N+1,1}(0,0) - v_{N+1,2}(0,0) - p_{N+1}(0) - q_{N+1}(0,0), \\ \sigma_{N+1} &= \gamma - \lambda_{11}(0)v_{N+1,1}(0,0) - \lambda_{12}(0)v_{N+1,2}(0,0) - \lambda_{21}(0)u_{N,1}(0) - \lambda_{22}(0)u_{N,2}(0) - \\ & - \lambda_{21}(0)v_{N,1}(0,0) - \lambda_{22}(0)v_{N,2}(0,0) - \dot{v}_{N+1,1}(0,0) - \dot{v}_{N+1,2}(0,0) - \dot{p}_{N-1}(0) - \dot{q}_{N-1}(0,0) - \\ & - i\mu_1(0)(p_{N+1}(0) + q_{N+1}(0,0)) - i\mu_2(0)(p_N(0) + q_N(0,0)) - \dot{q}_{N+1}(0,0), \end{aligned}$$

$$\text{здесь} \quad \delta = \begin{cases} x_0, & m = N+5, \\ 0, & m \neq N+5; \end{cases}, \quad \gamma = \begin{cases} x_1, & m = N+5, \\ 0, & m \neq N+5; \end{cases}.$$

Из (21) и (22) однозначно определяются $u_{N+1,1}$ и $u_{N+1,2}$.

Применяя операцию усреднения по τ к уравнению (19), получим выражение

$$p_{N+3}(t) = \frac{\sigma(t)}{a^2(t) - \mu_1^2(t)},$$

где $\sigma(t)$ — известная непрерывная функция.

Применяя к равенству (19) операцию $\{\dots\}$, найдём уравнение

$$q_{N+3}'' + 2i\mu_1 q_{N+3}' + (a^2 - \mu_1^2) q_{N+3} = \zeta(t, \tau),$$

где $\zeta(t, \tau)$ — известная 2π -периодическая по τ функция с нулевым средним. Последнее уравнение решается так же как и уравнение для q_0 .

Таким образом, показано, что можно найти все коэффициенты разложения (3).

б)Случай $a^2(t) - \mu_1^2(t) \equiv 0$ и $\langle b_3(t, \tau) \rangle \neq \mu_1(t)\mu_2(t)$, $t \in [0, T]$. В этом случае асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_\omega(t) &= \sum_{k=1}^2 e^{\int_0^t (\omega \lambda_{1k}(s) + \omega \frac{1}{2} \lambda_{2k}(s)) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{m-(j+4)}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t)) + \\ & + e^{\int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega \frac{1}{2} \mu_2(s)) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{m-(j+3)}{2}} (p_j(t) + q_j(t, \omega t)), \end{aligned} \quad (23)$$

где $m = \max\{2, m_1, m_2\}$, а $v_{jk}(t, \tau)$ и $q_j(t, \tau)$ — 2π -периодические по τ функции с нулевым средним.

Процесс нахождения неизвестных коэффициентов (23) полностью совпадает с алгоритмом, описанным в первом случае. Здесь и в следующем случае, описание нахождения u_{jk} и v_{jk} опустим, так как оно принципиально не изменится. Подставляя (23) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ω , получим бесконечную цепочку уравнений, первое из которых при $\omega^{\frac{m+1}{2}}$ имеет вид

$$2i\mu_1 q_0' + q_0'' = 0, \quad (24)$$

откуда получим, что $q_0 = 0$.

Следующее равенство коэффициентов имеет вид

$$q_1'' + 2i\mu_1 q_1' + 2i\mu_2 q_0' + b_3(p_0 + q_0) - \mu_1\mu_2(p_0 + q_0) = \alpha f + \beta g, \quad (25)$$

усредняя которое получим

$$p_0(t) = \frac{\alpha f(t) + \beta \langle g(t, \tau) \rangle}{\langle b_3(t, \tau) \rangle - \mu_1(t)\mu_2(t)}.$$

А применяя к (25) операцию $\{\dots\}_\tau$, найдём

$$q_1'' + 2i\mu_1 q_1' = \beta \{g\}_\tau - \{b_3\}_\tau p_0,$$

где в правой части стоит известная 2π -периодическая по τ функция с нулевым средним. Это уравнение решается аналогично уравнению для v_{1k} , рассмотренному в первом случае.

Действуя подобным образом, будут найдены все коэффициенты разложения.

с) Случай $a^2(t) - \mu_1^2(t) \equiv 0$ и $\langle b_3(t, \tau) \rangle \equiv \mu_1(t)\mu_2(t)$. В этом случае асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_\omega(t) = & \sum_{k=1}^2 e^{\int_0^t (\omega \lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s)) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{m-(j+4)}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t)) + \\ & + e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s)) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{m-(j+2)}{2}} (p_j(t) + q_j(t, \omega t)), \end{aligned} \quad (26)$$

где $m = \max\{2, m_1, m_2\}$, а $v_{jk}(t, \tau)$ и $q_j(t, \tau)$ — 2π -периодические по τ функции с нулевым средним. Подставляя (26) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ω , получим бесконечную цепочку уравнений, первое из которых при $\omega^{\frac{m+2}{2}}$ имеет вид

$$2i\mu_1 q_0' + q_0'' = 0, \quad (27)$$

откуда найдём, что $q_0 = 0$.

Следующее равенство коэффициентов имеет вид

$$q_1'' + 2i\mu_1 q_1' - \mu_1 \mu_2 p_0 + b_3 p_0 = 0. \quad (28)$$

Применяя к (28) операцию $\{\dots\}_\tau$, найдём

$$q_1'' + 2i\mu_1 q_1' = -\{b_3\}_\tau p_0,$$

где в правой части стоит известная 2π -периодическая по τ функция с нулевым средним. Это уравнение решается аналогично уравнению для v_{1k} из первого случая.

Равенство коэффициентов при $\omega^{\frac{m}{2}}$ имеет вид

$$-\mu_1 \mu_2 (p_1 - q_1) - \mu_2^2 p_0 + i\dot{\mu}_1 p_0 + 2i\mu_1 q_2' + 2i\mu_1 \dot{p}_0 + 2i\mu_2 q_1' + q_2'' + b_3(p_1 + q_1) + b_2 p_0 = \alpha f + \beta g. \quad (29)$$

Применяя операцию усреднения к (29), получим

$$2i\dot{p}_0 + (i\dot{\mu}_1 - \mu_2^2 + \langle b_2 \rangle) p_0 + \langle b_3 \rangle q_1 = \alpha f + \beta \langle g \rangle.$$

Полагая $p_0(0) = 0$, из последнего уравнения, будет однозначно определено p_0 . А применяя к (29) операцию $\{\dots\}_\tau$, найдём уравнение

$$q_2'' + 2i\mu_1 q_2' = \beta \{g\} - 2i\mu_2 q_1' + \mu_1 \mu_2 q_1 - \{b_3(p_1 + q_1)\} + \{b_2\} p_0,$$

которое однозначно разрешимо. Продолжая этот процесс, будут найдены все коэффициенты разложения (26).

Перейдём к обоснованию

Задачу (1), (2) перепишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y, \\ \dot{y} = \left[-\omega a^2(t) - \omega^{\frac{1}{2}} b_3(t, \tau) - b_2(t, \tau) - \omega^{-\frac{1}{2}} b_1(t, \tau) - \omega^{-1} b_0(t, \tau) \right] x + \\ \quad + e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s)) ds} \left(\omega^{\frac{m_1}{2}} f(t) + \omega^{\frac{m_2}{2}} g(t, \omega t) \right) \end{cases} \quad (30)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = x_1$$

или

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \left[\omega A_1(t) + \omega^{\frac{1}{2}} A_2(t, \tau) + A_3(t, \tau) + \omega^{-\frac{1}{2}} A_4(t, \tau) + \omega^{-1} A_5(t, \tau) \right] u + r(t, \tau, \omega), \\ u(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2(t) & 0 \end{pmatrix}, A_2(t, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_3(t, \tau) & 0 \end{pmatrix}, A_3(t, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_2(t, \tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4(t, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_1(t, \tau) & 0 \end{pmatrix}, A_5(t, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b_0(t, \tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$r(t, \tau, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s)) ds} \left(\omega^{\frac{m_1}{2}} f(t) + \omega^{\frac{m_2}{2}} g(t, \omega t) \right) \end{pmatrix}.$$

С целью уничтожения в задаче (31) слагаемого $\{A_2(t, \tau)\}_\tau, \tau = \omega t$, произведём в ней замену переменных

$$u = v + \omega^{-\frac{1}{2}} C(t, \omega t) v, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где $C(t, \tau)$ — неизвестная 2π -периодическая по τ матрица второго порядка. Получим

$$\dot{v} = \left[\left(\omega A_1 + \omega^{\frac{1}{2}} \langle A_2 \rangle \right) + \omega^{\frac{1}{2}} \left(A_1 C - C A_1 - C' + \{A_2\}_\tau \right) + \right. \\ \left. + \left(A_3 + A_2 C + C^2 A_1 - C \left(A_1 C + A_2 - C' \right) \right) + \omega^{-\frac{1}{2}} B_1(t, \omega t, \omega) \right] v + r_1(t, \omega t, \omega). \quad (33)$$

Здесь $B_1(t, \tau, \omega)$ зависит от $C(t, \tau)$, причём для любой 2π -периодической по τ и равномерно ограниченной на множестве Π матрицы-функций $C(t, \tau)$. $B_1(t, \tau, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} B_k(t, \tau), \omega \gg 1$, — равномерно сходящийся на множестве Π ряд, коэффициенты $B_k(t, \tau)$ которого непрерывны и 2π -периодичны по τ . А $r_1(t, \tau, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^{-\frac{k}{2}} (-C)^k r(t, \tau, \omega)$.

Приравняем к нулю матрицу, заключённую во вторые скобки равенства (33):

$$C' - A_1(t)C + C A_1(t) - \{A_2(t, \tau)\}_\tau = 0. \quad (34)$$

Переходя от матричного уравнения (34) к системе соответствующих поэлементных равенств, получим

$$\xi' = A(t)\xi + f(t, \tau), \quad (35)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a^2(t) & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -a^2(t) & 0 & 0 & a^2(t) \\ 0 & -a^2(t) & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку характеристические числа матрицы A имеют вид $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm 2a(t)i$, то уравнение (35), а значит и (34), имеет единственное 2π -периодическое по τ решение. Покажем это. Поскольку элементами матрицы $A_2(t, \tau)$ являются 2π -периодические по τ функции, имеющие на множестве Π непрерывные производные по τ , то имеет место представление

$$f(t) = \sum_{k \neq 0} \alpha_k(t) e^{ik\tau},$$

где равномерно относительно $t \in [0, T]$ справедлива формула $|\alpha_k(t)| = O(\frac{1}{k}), k \rightarrow \infty$. Решение ξ уравнения (35) будем искать в виде

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \beta_k(t) e^{ik\tau}. \quad (36)$$

Подставляя последнее в (35), получим

$$(ikE - A(t)) \beta_k = \alpha_k.$$

Согласно теореме Крамера, эта система имеет единственное решение, если $|ikE - A(t)| \neq 0, k \in Z, k \neq 0$, то есть при условии $2a(t)i \neq \pm ik$. Последнее выполнено в силу наложенных на $a(t)$ ограничений. При этом

$$\beta_k(t) = (ikE - A)^{-1} \alpha_k.$$

Поскольку $|\beta_k| = \left| (ik - A)^{-1} \alpha_k \right| = \left| \frac{1}{ik} \left(E - \frac{A}{ik} \right)^{-1} \alpha_k \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, $k \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{k \neq 0} \beta_k(t) e^{ik\tau}$, фигурирующий в представлении (35), равномерно и абсолютно сходится.

Таким образом, существует искомая матрица $C(t, \tau)$, при которой задача (31) в результате замены (32) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \omega v_2 + d_1(t, \omega t, \omega) v_1 + d_2(t, \omega t, \omega) v_2 + r_{11}(t, \omega t, \omega), \\ \dot{v}_2 &= -\omega \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle \right) v_1 + d_3(t, \omega t, \omega) v_1 + d_4(t, \omega t, \omega) v_2 + r_{12}(t, \omega t, \omega) \\ v_1(0) &= v_{1\omega}, \quad v_2(0) = v_{2\omega}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $d_k(t, \tau, \omega)$, $\omega \gg 1$, — непрерывные на множестве Π и равномерно ограниченные относительно ω функции, представленные сходящимися асимптотическими рядами:

$$d_k(t, \tau, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} d_{kj}(t, \tau), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (38)$$

где $d_{kj}(t, \tau)$ — непрерывные по (t, τ) функции, 2π -периодические по τ .

Выразим из первого уравнения системы (37) v_2 :

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \omega^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} e_{1j}(t, \omega t) \dot{v}_1 + \omega^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2}} e_{2j}(t, \omega t) v_1 + l(t, \tau, \omega) \equiv \\ &\equiv \omega^{-1} (e_1(t, \tau, \omega) \dot{v}_1 + e_2(t, \tau, \omega) v_1) + l(t, \tau, \omega), \end{aligned} \quad (39)$$

а затем продифференцируем это же уравнение по t и в полученное равенство подставим выражение функции v_2 из (39) и выражение её производной $\dot{v}_2$ из (37), в котором v_2 опять же представлена рядом (39). Получим дифференциальное уравнение второго порядка для v_1 . Начальные условия для него найдём из (37). В результате от задачи (37) придём к задаче

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 + \omega^2 \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle \right) v_1 + g_1(t, \omega t, \omega) \dot{v}_1 + \omega g_2(t, \omega t, \omega) v_1 &= l(t, \omega t, \omega), \\ v_1(0) &= w_1(\omega), \quad \dot{v}_1(0) = \omega w_2(\omega). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $g_i(t, \tau, \omega)$, $k = 1, 2$, — функции того же типа, что и $d_k(t, \tau, \omega)$, $w_1(\omega) = v_1(\omega)$, а $w_2(\omega)$ — функция того же типа, что и $w_1(\omega)$.

Задачу (40) с помощью замены переменных

$$v_1(t) = e^{\frac{1}{2} \int_0^t g_1(s, \omega s, \omega) ds} z(t) \quad (41)$$

приведём к виду

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \omega^2 \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle \right) z + \omega h(t, \omega t, \omega) z &= e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(s)) ds} \omega^{\frac{m_{max}-1}{2}} d(t, \omega t, \omega), \\ z(0) &= w_1(\omega), \quad \dot{z}(0) = \omega w_2(\omega). \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь

$$\begin{aligned} h(t, \tau, \omega) &= g_2(t, \tau, \omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_1(t, \omega t, \omega)}{\partial t} + \frac{\omega}{2} \frac{\partial g_1(t, \omega t, \omega)}{\partial \tau}, \\ m_{max} &= \max \{m_1, m_2\}. \end{aligned}$$

Асимптотическое разложение решения задачи (42) может быть построено в виде

$$\begin{aligned} z_{\omega}(t) &= \sum_{k=1}^2 e^{i \int_0^t (\omega \lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s)) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{l-(j+4)}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t)) + \\ &+ e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(t) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(t)) ds} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^{\frac{l-(j+r)}{2}} (p_j(t) + q_j(t, \omega t)), \\ \langle v_{jk}(t, \tau) \rangle &= 0, \quad \langle q_j(t, \tau) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь $l = \max \{2, m_{max} - 1\}$,

$$r = \begin{cases} 4, & a^2(t) \neq \mu_1^2(t), t \in [0, T]; \\ 3, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t, \tau) \rangle \neq \mu_1(t) \mu_2(t), t \in [0, T]; \\ 2, & a^2(t) \equiv \mu_1^2(t), \langle b_3(t, \tau) \rangle \equiv \mu_1(t) \mu_2(t). \end{cases}$$

Асимптотическое разложение (43) строится совершенно аналогично тому, как была построена асимптотика (3) решения $x(t)$ задачи (1), (2). При этом частичные суммы

$$z^n(t) = \sum_{k=1}^2 e^{\int_0^t (\omega \lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s)) ds} \sum_{j=0}^n \omega^{\frac{l-(j+4)}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t)) + \\ + e^{\int_0^t (\omega \mu_1(t) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(t)) ds} \sum_{j=0}^n \omega^{\frac{l-(j+r)}{2}} (p_j(t) + q_j(t, \omega t)), \quad (44)$$

удовлетворяют соотношениям

$$\ddot{z}^n + \omega^2 \left(a^2 + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3 \rangle \right) z^n + \omega h(t, \omega t, \omega) z^n = \epsilon_n(t, \omega t, \omega), \quad (45)$$

$$z^n(0) = w_1^n(\omega), \quad \dot{z}^n(0) = \omega w_2^n(\omega), \quad (46)$$

где

$$\sup_{(t, \tau) \in \Pi} |\epsilon_n(t, \tau, \omega)| = O\left(\omega^{\frac{l-n-r+3}{2}}\right), \quad (47)$$

$$|w_k^n(\omega) - w_k(\omega)| = O\left(\omega^{\frac{l-n-1}{2}}\right), \quad k = 1, 2, \quad (48)$$

Введём обозначение

$$p_n = z_\omega - z^n.$$

Вычтем из первого равенства (42) равенство (45), а из остальных равенств (42) вычтем соответствующие равенства (46). Придём к задаче

$$\ddot{p}_n + \omega^2 \left(a(t) + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3(t, \tau) \rangle \right) p_n + \omega h(t, \omega t, \omega) p = -\epsilon_n(t, \omega t, \omega), \quad (49)$$

$$p_n(0) = \omega^{\frac{l-n-1}{2}} p_{1\omega}, \quad \dot{p}_n(0) = \omega^{\frac{l-n+1}{2}} p_{2\omega}, \quad (50)$$

где в силу (48)

$$|p_{1\omega}| = O(1), \quad |p_{2\omega}| = O(1), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Умножим уравнение (49) на $\dot{p}_n(t)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t . В результате получим

$$\frac{1}{2} \dot{p}_n^2(t) + \frac{1}{2} \omega^2 \left(a^2(t) + \omega^{-\frac{1}{2}} \langle b_3(t, \tau) \rangle \right) p_n^2(t) + \frac{1}{2} \omega h(t, \tau, \omega) p_n^2(t) = \\ = - \int_0^t \epsilon_n(s, \omega s, \omega) \dot{p}_n(s) ds + \omega^2 \int_0^t a(s) \dot{a}(s) p_n^2(s) ds + \\ + \frac{1}{2} \omega^{\frac{3}{2}} \int_0^t \langle \dot{b}_3(s, \omega s) \rangle p_n^2(s) ds + \frac{1}{2} \omega \int_0^t \left(\dot{h}(s, \omega s, \omega) + \right. \\ \left. + \omega h'(s, \omega s, \omega) \right) p_n^2(s) ds + \frac{1}{2} \left[\dot{p}_n^2(0) + \left(\omega^2 a^2(0) + \omega^{\frac{3}{2}} \langle b_3(0, 0) \rangle + \omega h(0, 0, 0) \right) p_n^2(0) \right]$$

В силу (50) и (51), последнее равенство можно переписать в следующем виде

$$\frac{1}{2} \dot{p}_n^2(t) + \frac{1}{2} \omega^2 a^2(t) p_n^2(t) + \frac{1}{2} \omega^{\frac{3}{2}} \langle b_3(t, \tau) \rangle p_n^2(t) + \frac{1}{2} \omega h(t, \tau, \omega) p_n^2(t) = \\ = - \int_0^t \epsilon_n(t, \omega s, \omega) \dot{p}_n(s) ds + \omega^2 \int_0^t a(s) \dot{a}(s) p_n^2(s) ds + \frac{1}{2} \omega^{\frac{3}{2}} \int_0^t \langle \dot{b}_3(s, \omega s) \rangle p_n^2(s) ds + \\ + \frac{1}{2} \omega \int_0^t \left(\dot{h}(s, \omega s, \omega) + \omega h'(s, \omega s, \omega) \right) p_n^2(s) ds + \epsilon_{n_1} \quad (52)$$

где

$$\max_{(t, \tau) \in \Pi} |\epsilon_{n_1}(t, \tau, \omega)| = O\left(\omega^{\frac{l-n-r+1}{2}}\right), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (53)$$

Так как $\dot{p}_n^2(t) \geq 0$, то из равенства (52) следует неравенство

$$\frac{1}{2} \left(\omega^2 a^2(t) + \omega^{\frac{3}{2}} \langle b_3(t, \tau) \rangle + \omega h(t, \tau, \omega) \right) p_n^2(t) \leq \\ \leq - \int_0^t \epsilon_n(t, \omega s, \omega) \dot{p}_n(s) ds + \omega^2 \int_0^t a(s) \dot{a}(s) p_n^2(s) ds + \frac{1}{2} \omega^{\frac{3}{2}} \int_0^t \langle \dot{b}_3(s, \omega s) \rangle p_n^2(s) ds +$$

$$+\frac{1}{2}\omega\int_0^t\left(\dot{h}(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega)\right)p^2(s)ds+\epsilon_{n_1}.$$

Применяя к первому интегралу метод интегрирования по частям, придём к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)\right)p_n^2(t)\leq \\ & \leq -\epsilon_n(t,\omega s,\omega)p_n(t)+\epsilon_n(0,0,0)p_n(0)+\int_0^t\left(\dot{\epsilon}_n(s,\omega s,\omega)-\omega\epsilon_n'(s,\omega s,\omega)\right)p_n(s)ds+ \\ & \int_0^t p_n^2(s)\left(\omega^2 a(s)\dot{a}(s)+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\langle\dot{b}_3(s,\omega s)\rangle+\frac{1}{2}\omega\left(\dot{h}(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega)\right)\right)ds+\epsilon_{n_1}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу неравенства

$$|ab|\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}, \quad (54)$$

следует соотношение

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)-1\right)p_n^2(t)\leq \\ & \leq \int_0^t p_n^2(s)\left(2\omega^2 a(s)\dot{a}(s)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(s,\omega s)\rangle+ \right. \\ & \left. +\omega\left(\dot{h}(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega)\right)+1\right)ds+\epsilon_{n_2}, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\max_{(t,\tau)\in\Pi}|\epsilon_{n_2}(t,\tau,\omega)|=O(\omega^{\frac{l-n-r+6}{2}}), \quad \omega\rightarrow\infty.$$

При достаточно больших ω

$$\alpha_\omega=\omega^2 a^2(t)+\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(t,\tau)\rangle+\omega h(t,\tau,\omega)>1. \quad (56)$$

Разделив (55) на α_ω , получим

$$p_n^2(t)\leq M\int_0^t p_n^2(s)ds+\frac{\epsilon_{n_2}}{\alpha_\omega}$$

Из леммы Гронуолла теперь следует оценка

$$p_n^2(t)\leq\frac{\epsilon_{n_2}}{\alpha_\omega}e^{Mt}, \quad (57)$$

так что

$$|p_n(t)|\leq\sqrt{\frac{\epsilon_{n_2}}{\alpha_\omega}e^{Mt}},$$

а

$$\sup_{t\in[0,T]}|p(t)|=O\left(\omega^{-\frac{l-n-r+4}{2}}\right), \quad \omega\rightarrow\infty.$$

Из равенства (52) в силу (56) следует неравенство

$$\begin{aligned} \dot{p}_n^2(t)\leq & -2\int_0^t\epsilon_n(s,\tau,\omega)\dot{p}_n(s)ds+2\int_0^t p_n^2(s)\left(\omega^2 a(s)\dot{a}(s)+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(s,\tau)\rangle+ \right. \\ & \left. +\frac{1}{2}\omega\left(\dot{h}(s,\tau,\omega)+\omega h'(s,\tau,\omega)\right)\right)ds+\epsilon_{n_1}(t,\tau,\omega). \end{aligned}$$

Воспользовавшись снова формулой (54), получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_n^2(t)\leq & \int_0^t\epsilon_n^2(s,\omega s,\omega)(s)ds+\int_0^t\dot{p}_n^2(s)ds+2\int_0^t p_n^2(s)\left(\omega^2 a(s)\dot{a}(s)+\frac{1}{2}\omega^{\frac{3}{2}}\langle b_3(s,\omega s)\rangle+ \right. \\ & \left. +\frac{1}{2}\omega\left(\dot{h}(s,\omega s,\omega)+\omega h'(s,\omega s,\omega)\right)\right)ds+\epsilon_{n_1}(t,\tau,\omega). \end{aligned}$$

В силу (57) отсюда следует оценка

$$\dot{p}_n^2(t) \leq \int_0^t \dot{p}_n^2(s) ds + \epsilon_{n_3}(t, \tau, \omega),$$

где

$$\max_{(t, \tau) \in \Pi} |\epsilon_{n_3}| = O(\omega^{\frac{l-n-r+6}{2}}), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Поэтому в силу леммы Гронуолла имеет место неравенство

$$|\dot{p}_n(t)| \leq \sqrt{\epsilon_{n_3} e^t},$$

так что

$$\sup_{t \in [0, T]} |\dot{p}(t)| = O\left(\omega^{\frac{l-n-r+6}{2}}\right), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (58)$$

Из полученных результатов следует, что

$$|z_\omega - z^{n+5}| \leq C_1 \omega^{\frac{l-n-r-1}{2}}, \quad |\dot{z}_\omega - \dot{z}^{n+5}| \leq C_2 \omega^{\frac{l-n-r+1}{2}}.$$

Используя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned} |z_\omega - z^n| &\leq |z_\omega - z^{n+5}| + |z^{n+5} - z^n| \leq C_3 \omega^{\frac{l-n-r-1}{2}}, \\ |\dot{z}_\omega - \dot{z}^n| &\leq |\dot{z}_\omega - \dot{z}^{n+5}| + |\dot{z}^{n+5} - \dot{z}^n| \leq C_4 \omega^{\frac{l-n-r+1}{2}}. \end{aligned}$$

Из выше сказанного вытекает следующее соотношение между решением x задачи (1), (2) и решением z задачи (42)

$$\begin{aligned} \left(\omega^{-1} \dot{x}\right) &= e^{\frac{1}{2} \int_0^t g_1(s, \omega s, \omega) ds} \left(E + \omega^{-\frac{1}{2}} C(t, \omega t)\right) \left(\omega^{-1} e_1(t, \omega t, \omega) \dot{z} + \right. \\ &\quad \left. + \omega^{-1} \left(\frac{1}{2} g_1(t, \omega t, \omega) e_1(t, \omega t, \omega) + e_2(t, \omega t, \omega)\right) z + r_1(t, \omega t, \omega)\right). \end{aligned} \quad (59)$$

Ясно, что подставив в (59) вместо z его асимптотическое разложение (43) мы получим формальное асимптотическое разложение решения x задачи (1), (2) и его производной, а также будут получены оценки

$$|x_\omega - x^n| \leq C_1 \omega^{\frac{l-n-r-1}{2}}, \quad |\dot{x}_\omega - \dot{x}^n| \leq C_2 \omega^{\frac{l-n-r+1}{2}}.$$

Выводы

Для формулировки теоремы введём следующие обозначения.

Задачей типа (А) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0, \infty)$ о нахождении 2π -периодического по τ с нулевым средним решения уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varphi(t, \tau),$$

где $t \in [0, T]$ — параметр, а $\varphi(t, \tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π -периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(B_\pm)$ назовём задачу на полуоси $\tau \in [0, \infty)$ о нахождении 2π -периодического по τ решения уравнения

$$\frac{\partial w(t, \tau)}{\partial \tau} \pm 2ia(t)w(t, \tau) = \psi(t, \tau),$$

где $t \in [0, T]$ — параметр, а $\psi(t, \tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π -периодическая по τ с нулевым средним.

Задачей типа $(C_\pm)$ назовём задачу Коши на участке $t \in [0, T]$ вида

$$\pm 2ia(t)\dot{u} + \left(\langle b_2(t, \tau) + b_3(t, \tau)\beta_\pm(t, \tau) \rangle \pm i\dot{a}(t) - \frac{\langle b_3(t, \tau) \rangle^2}{4a^2(t)} \right) u = \chi(t),$$

$$u(0) = u_0,$$

где $\chi(t)$, u_0 — вещественные непрерывная функция и число, а $\beta_{\pm}(t, \tau)$ — 2π -периодическое по τ с нулевым средним решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \beta_{\pm}}{\partial \tau^2} \pm 2ia(t) \frac{\partial \beta_{\pm}}{\partial \tau} = \{b_3(t, \tau)\}_{\tau}.$$

Задачей типа (D) назовём задачу на полуоси $\tau \in [0, \infty)$ о нахождении 2π -периодического по τ решения уравнения

$$q''(t, \tau) + 2i\mu_1(t)q'(t, \tau) + (a^2(t) - \mu_1^2(t))q(t, \tau) = g(t, \tau),$$

где $t \in [0, T]$ — параметр, а $g(t, \tau)$ — непрерывная на множестве Π функция, 2π -периодическая по τ с нулевым средним.

Частичную сумму ряда (3)

$$\begin{aligned} z^n(t) = & \sum_{k=1}^2 e^{\int_0^t (\omega \lambda_{1k}(s) + \omega^{\frac{1}{2}} \lambda_{2k}(s)) ds} \sum_{j=0}^n \omega^{\frac{m-(j+4)}{2}} (u_{jk}(t) + v_{jk}(t, \omega t)) + \\ & + e^{i \int_0^t (\omega \mu_1(t) + \omega^{\frac{1}{2}} \mu_2(t)) ds} \sum_{j=0}^n \omega^{\frac{m-(j+r)}{2}} (p_j(t) + q_j(t, \omega t)), \end{aligned}$$

будем называть n -ым приближением решения $x_{\omega}(t)$ задачи (1), (2).

Теорема 1. Для любого целого неотрицательного числа n найдутся такие положительные числа C_n и ω_n , что при $\omega > \omega_n$ описанным выше способом эффективно строится n -ое приближение $x^n(t)$ решения $x_{\omega}(t)$ задачи (1), (2), которое является вещественным и при всех $t \in [0, T]$ удовлетворяет оценкам

$$|x_{\omega}(t) - x^n(t)| \leq C_n \omega^{\frac{l-n-r-1}{2}}, \quad |\dot{x}_{\omega}(t) - \dot{x}^n(t)| \leq C_n \omega^{\frac{l-n-r+1}{2}}.$$

Под эффективностью понимается тот факт, что построение приближения $x^n(t)$ сводится к решению $(n+1)$ задач каждого из типов: A, B_+, C_+, D .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
- [2] Крутенко Е.В., Левенштам В.Б. Асимптотика решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с большими слагаемыми // Сибирский математический журнал. 2010, V. 51, N.1, с. 74-89.
- [3] Крутенко Е.В., Левенштам В.Б. Асимптотический анализ некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с большим параметром // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009, V.49, N.12, с. 1-13.

КРУТЕНКО ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА, РОССИЯ, РОСТОВ-НА-ДОНУ, ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

E-mail: vvanele@mail.ru

И.В. КУРБАТОВА

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

Изучается дифференциальное уравнение $E\ddot{x} + F\dot{x} + Hx = f$. Предполагается, что резольвента пучка имеет полюс на бесконечности. Получены формулы для решения.

The equation $E\ddot{x} + F\dot{x} + Hx = f$ is investigated. It is assumed that the pencil resolvent has a pole at infinity. Formulas for solution are obtained.

Решение начальной задачи для неоднородного уравнения $E\ddot{x} + F\dot{x} + Hx = f$ выражается (теоремы 6 и 10) через импульсную характеристику T и оператор сдвига U , либо через их векторные варианты $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{U}$. В случае, когда коэффициент E не обратим, импульсная характеристика T и оператор сдвига U не совпадают, хотя и частично выражаются друг через (следствие 2). В статье рассматривается случай, когда резольвента пучка имеет полюс на бесконечности. Приводятся несколько утверждений о представлении импульсной характеристики и оператора сдвига в виде сходящихся рядов (теоремы 7, 8, 9, 11, и 12). В этих представлениях принципиальную роль играют алгебраические операции $\odot$ и $\square$, введенные в [5, 7, 8].

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-000276.

Пусть X и Y — комплексные банаховы пространства. Обозначим через $\mathbf{B}(X, Y)$ множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y . Символом $\mathbf{1}$ будем обозначать тождественный оператор.

(Квадратичным операторным) пучком называют [2, 3] функцию

$$\lambda \mapsto \lambda^2 E + \lambda F + H \in \mathbf{B}(X, Y), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $E, F, H \in \mathbf{B}(X, Y)$. Резольвентным множеством пучка называют множество $\rho(E, F, H)$, состоящее из тех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda^2 E + \lambda F + H: X \rightarrow Y$ обратим, а резольвентой — функцию (семейство)

$$R_\lambda = (\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1} \in \mathbf{B}(Y, X), \quad \lambda \in \rho(E, F, H).$$

Дополнение $\sigma(E, F, H)$ к $\rho(E, F, H)$ называют спектром пучка.

Обозначим через $\mathbf{B}_{(E, F, H)}(Y, X)$ замыкание в $\mathbf{B}(Y, X) \oplus \mathbf{B}(Y, X)$ линейной оболочки всевозможных пар $(R_\lambda, \lambda R_\lambda)$, $\lambda \in \rho(E, F, H)$. В $\mathbf{B}_{(E, F, H)}(Y, X)$ определим $\square$ -умножение [7, 8] элементов $\mathfrak{A} = (A_0, A_1)$ и $\mathfrak{B} = (B_0, B_1)$ по формуле

$$\mathfrak{A} \square \mathfrak{B} = (A_0, A_1) \square (B_0, B_1) = (A_1 E B_0 + A_0 F B_0 + A_0 E B_1, A_1 E B_1 - A_0 H B_0).$$

Степени и обратные относительно $\square$ -умножения будем обозначать символами типа $\mathfrak{A}^{n\square}$ и $\mathfrak{A}^{-1\square}$.

Лемма 1 ([8, лемма 6]). Для любой пары $(B_0, B_1) \in \mathbf{B}_{(E, F, H)}(Y, X)$ справедливы тождества

$$E B_0 H + E B_1 F = H B_0 E + F B_1 E, \quad F B_0 H + E B_1 H = H B_0 F + H B_1 E.$$

Теорема 1 ([8, теорема 7]). *Банахово пространство $\mathbf{B}_{(E,F,G)}(Y, X)$ является (с точностью до замены нормы на эквивалентную) коммутативной банаховой алгеброй относительно $\square$ -умножения. Эта алгебра содержит единицу тогда и только тогда, когда оператор $E: X \rightarrow Y$ обратим; при этом единицей $\mathbf{1}_{\square}$ является пара $(\mathbf{0}, E^{-1})$.*

В случае, когда оператор E не обратим, обозначим через $\tilde{\mathbf{B}}_{(E,F,H)}(Y, X)$ алгебру $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y, X)$ с присоединенной единицей $\mathbf{I}$. В случае, когда E обратим, под $\tilde{\mathbf{B}}_{(E,F,H)}(Y, X)$ будем понимать саму алгебру $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y, X)$, а под $\mathbf{I}$ — пару $(\mathbf{0}, E^{-1})$.

Введем в рассмотрение векторную резольвенту $\mathfrak{R}_{\lambda} = (R_{\lambda}, \lambda R_{\lambda}) \in \mathbf{B}_{(E,F,G)}(Y, X)$, $\lambda \in \rho(E, F, H)$.

Теорема 2 ([7, следствие 57]). *Пусть ∞ является полюсом порядка $w - 1$ резольвенты $R_{(\cdot)}$ пучка. Тогда найдутся такие элементы $\mathfrak{P}, \mathfrak{A}, \mathfrak{N} \in \mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y, X)$, что*

$$\mathfrak{N}^{w+1\square} = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{P}^{2\square} = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{A} \square \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \square \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{N} \square \mathfrak{P} = \mathfrak{P} \square \mathfrak{N} = \mathbf{0}$$

и разложение векторной резольвенты $\mathfrak{R}_{(\cdot)}$ в ряд Лорана в проколотой окрестности бесконечности имеет вид

$$\mathfrak{R}_{\lambda} = \mathfrak{R}_{r,\lambda} + \mathfrak{R}_{s,\lambda},$$

где

$$\mathfrak{R}_{r,\lambda} = \frac{\mathfrak{P}}{\lambda} + \frac{\mathfrak{A}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{A}^{2\square}}{\lambda^3} + \frac{\mathfrak{A}^{3\square}}{\lambda^4} + \dots, \quad (1)$$

$$\mathfrak{R}_{s,\lambda} = -\mathfrak{N} - \lambda \mathfrak{N}^{2\square} - \lambda^2 \mathfrak{N}^{3\square} - \dots - \lambda^w \mathfrak{N}^{w+1\square}. \quad (2)$$

Теорема 3 ([7, теорема 59]). *Пусть спектр квадратичного пучка состоит из конечного множества точек $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Пусть эти точки $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$, а также точка $\mu_0 = \infty$ являются полюсами резольвенты $R_{(\cdot)}$, а их порядки равны соответственно $w_1, w_2, \dots, w_q$ и $w_0 - 1$. Тогда существуют такие элементы $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_q; \mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_q \in \mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y, X)$, что*

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_i^{2\square} &= \mathfrak{P}_i, & \mathfrak{N}_i \square \mathfrak{P}_i &= \mathfrak{P}_i \square \mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_i, & i &= 0, 1, \dots, q, \\ \mathfrak{P}_i \square \mathfrak{P}_j &= \mathbf{0}, & \mathfrak{N}_i \square \mathfrak{P}_j &= \mathfrak{P}_j \square \mathfrak{N}_i = \mathbf{0}, & i &\neq j, \\ \mathfrak{N}_i^{w_i\square} &= \mathbf{0}, & \mathfrak{N}_0^{w_0+2\square} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{P}_0 = \mathbf{1} - \sum_{i=1}^q \mathfrak{P}_i$, $\mathbf{1}$ — (присоединенная) единица, а резольвента пучка представима в виде

$$\mathfrak{R}_{\lambda} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{w_i} \frac{\mathfrak{N}_i^{j-1\square}}{(\lambda - \mu_i)^j} - \sum_{j=0}^{w_0} \mathfrak{N}_0^{j+1\square} \lambda^j, \quad (3)$$

где $\mathfrak{N}_i^{0\square} = \mathfrak{P}_i$.

Расширенным резольвентным множеством пучка $\lambda \mapsto \lambda^2 E + \lambda F + H$ назовем подмножество $\bar{\rho}(E, F, H)$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из $\rho(E, F, H)$ и, возможно, точки ∞ . Точку ∞ отнесем к расширенному резольвентному множеству $\bar{\rho}(E, F, H)$ пучка $\lambda \mapsto \lambda^2 E + \lambda F + H$, если оператор E обратим. В противном случае точку ∞ отнесем к расширенному спектру $\bar{\sigma}(E, F, H)$ пучка $\lambda \mapsto \lambda^2 E + \lambda F + H$.

Пусть K — замкнутое подмножество расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим символом $\mathbf{O} = \mathbf{O}(K)$ множество всех аналитических функций $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, каждая из которых определена в некоторой открытой окрестности U множества K .

Теорема 4 ([8, теорема 15]). *Пусть $\infty \in \bar{\sigma}(E, F, H)$, т. е. оператор E не имеет обратного. Тогда отображение $\Upsilon: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(E, F, H)) \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{(E,F,H)}(Y, X)$, определенное по формуле*

$$\Upsilon(f) = (\psi(f), \chi(f)) + f(\infty)\mathbf{I},$$

где отображения $\psi, \chi: \mathbf{O}(\bar{\sigma}(E, F, H)) \rightarrow \mathbf{B}(Y, X)$ определены по формулам

$$\psi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1} d\lambda,$$

$$\chi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda f(\lambda) (\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1} d\lambda,$$

в которых Γ — контур, являющийся ориентированной огибающей [10, с. 183] расширенного спектра $\bar{\sigma}(E, F, H)$ относительно дополнения к области определения функции f , сохраняют алгебраические операции. В частности,

$$\begin{aligned} \Upsilon(fg) = & \left(f(\infty)\psi(g) + g(\infty)\psi(f) + \chi(f)E\psi(g) + \psi(f)F\psi(g) + \psi(f)E\chi(g), \right. \\ & \left. f(\infty)\chi(g) + g(\infty)\chi(f) + \chi(f)E\chi(g) - \psi(f)H\psi(g) \right) + f(\infty)g(\infty)\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение семейство экспоненциальных функций

$$\exp_t(\lambda) = \exp \lambda t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Зафиксируем пучок $\lambda \mapsto \lambda^2 E + \lambda F + H$, (обычный) спектр которого ограничен и тем самым бесконечность либо не принадлежит расширенному спектру пучка, либо является в нем изолированной точкой. Рассмотрим модифицированное семейство экспоненциальных функций

$$\text{Exp}_t(\lambda) = \begin{cases} \exp \lambda t, & \text{если } \lambda \in U_0, \\ 0, & \text{если } \lambda \in U_1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

где U_0 — некоторая ограниченная окрестность (обычного) спектра пучка, а U_1 — не пересекающаяся с ней окрестность бесконечности. Очевидно,

$$\psi(\text{Exp}_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_{\lambda} d\lambda, \quad \chi(\text{Exp}_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R_{\lambda} d\lambda,$$

где Γ — контур, окружающий (обычный) спектр пучка.

Следствие 1. Пусть бесконечность является изолированной точкой расширенного спектра пучка. Тогда имеют место следующие формулы

$$\begin{aligned} \psi(\text{Exp}_{t+s}) &= \chi(\text{Exp}_t)E\psi(\text{Exp}_s) + \psi(\text{Exp}_t)F\psi(\text{Exp}_s) + \psi(\text{Exp}_t)E\chi(\text{Exp}_s), \\ \chi(\text{Exp}_{t+s}) &= \chi(\text{Exp}_t)E\chi(\text{Exp}_s) - \psi(\text{Exp}_t)H\psi(\text{Exp}_s). \end{aligned}$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 4. □

Пусть бесконечность является изолированной точкой расширенного спектра пучка. Векторным оператором сдвига назовем функцию

$$\mathfrak{U}(t) = \Upsilon(\text{Exp}_t) = (\psi(\text{Exp}_t), \chi(\text{Exp}_t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

а скалярным оператором сдвига — функцию

$$U(t) = \psi(\text{Exp}_t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Согласно определению

$$\mathfrak{U}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \mathfrak{R}_{\lambda} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R},$$

где Γ окружает (обычный) спектр пучка.

Предложение 1. Пусть бесконечность является изолированной точкой расширенного спектра пучка. Тогда векторный оператор сдвига $\mathfrak{U}(t) = \Upsilon(\text{Exp}_t)$ бесконечно дифференцируем и при всех $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$E\ddot{\mathfrak{U}}(t) + F\dot{\mathfrak{U}}(t) + H\mathfrak{U}(t) = \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathfrak{U}}(t)E + \dot{\mathfrak{U}}(t)F + \mathfrak{U}(t)H = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Очевидно, производные можно представить в виде

$$\frac{d^n}{dt^n} \mathfrak{U}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n e^{\lambda t} \mathfrak{R}_{\lambda} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Подставим эти представления в дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
E\ddot{\mathfrak{U}}(t) + F\dot{\mathfrak{U}}(t) + H\mathfrak{U}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda^2 E + \lambda F + E) \mathfrak{R}_{\lambda} d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda^2 E + \lambda F + E) (R_{\lambda}, \lambda R_{\lambda}) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (1, \lambda) \mathbf{1} d\lambda = \mathbf{0}, \\
\ddot{\mathfrak{U}}(t)E + \dot{\mathfrak{U}}(t)F + \mathfrak{U}(t)H &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \mathfrak{R}_{\lambda} (\lambda^2 E + \lambda F + E) d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (R_{\lambda}, \lambda R_{\lambda}) (\lambda^2 E + \lambda F + E) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (1, \lambda) \mathbf{1} d\lambda = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

В конце этих преобразований была использована теорема Коши. $\square$

Предложение 2. Пусть бесконечность является изолированной точкой в расширенном спектре пучка. Тогда векторный оператор сдвига $\mathfrak{U}(t) = \Upsilon(\text{Exp}_t)$ представим в виде

$$\mathfrak{U}(t) = (U(t), \dot{U}(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $U(t) = \psi(\text{Exp}_t)$ — скалярный оператор сдвига.

Доказательство. Вытекает из определений и замечания о том, что производная функции $\lambda \mapsto \text{Exp}_t(\lambda)$ по t есть $\lambda \mapsto \lambda \text{Exp}_t(\lambda)$. $\square$

Определим $\square$ -произведение элементов алгебры $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y, X)$ на векторы $(x_0, x_1) \in X \oplus X$:

$$(A_0, A_1) \square (x_0, x_1) = (A_1 E x_0 + A_0 F x_0 + A_0 E x_1, A_1 E x_1 - A_0 H x_0). \quad (4)$$

Предложение 3. Отображение, сопоставляющее элементу $\mathfrak{A} = (A_0, A_1) \in \mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y, X)$ оператор $\mathfrak{A}_{\square}: (x_0, x_1) \mapsto (A_0, A_1) \square (x_0, x_1)$, является представлением алгебры $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y, X)$ в банаховом пространстве $X \oplus X$.

Доказательство. Проверим сохранение $\square$ -умножения. С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned}
((A_0, A_1) \square (B_0, B_1)) \square (x_0, x_1) &= (A_1 E B_0 + A_0 F B_0 + A_0 E B_1, \\
&\quad A_1 E B_1 - A_0 H B_0) \square (x_0, x_1) = \\
&= (A_1 E B_1 E x_0 - A_0 H B_0 E x_0 + A_1 E B_0 F x_0 + A_0 F B_0 F x_0 + A_0 E B_1 F x_0 + \\
&\quad + A_1 E B_0 E x_1 + A_0 F B_0 E x_1 + A_0 E B_1 E x_1, \\
&\quad A_1 E B_1 E x_1 - A_0 H B_0 E x_1 - A_1 E B_0 H x_0 - A_0 F B_0 H x_0 - A_0 E B_1 H x_0).
\end{aligned}$$

А с другой —

$$\begin{aligned}
(A_0, A_1) \square ((B_0, B_1) \square (x_0, x_1)) &= (A_0, A_1) \square (B_1 E x_0 + B_0 F x_0 + B_0 E x_1, \\
&\quad B_1 E x_1 - B_0 H x_0) = \\
&= (A_1 E B_1 E x_0 + A_1 E B_0 F x_0 + A_1 E B_0 E x_1 + A_0 F B_1 E x_0 + A_0 F B_0 F x_0 + \\
&\quad + A_0 F B_0 E x_1 + A_0 E B_1 E x_1 - A_0 E B_0 H x_0, \\
&\quad A_1 E B_1 E x_1 - A_1 E B_0 H x_0 - A_0 H B_1 E x_0 - A_0 H B_0 F x_0 - A_0 H B_0 E x_1) = \\
&= (A_1 E B_1 E x_0 - A_0 E B_0 H x_0 + A_1 E B_0 F x_0 + A_0 F B_0 F x_0 + A_0 F B_1 E x_0 + \\
&\quad + A_1 E B_0 E x_1 + A_0 F B_0 E x_1 + A_0 E B_1 E x_1, \\
&\quad A_1 E B_1 E x_1 - A_0 H B_0 E x_1 - A_1 E B_0 H x_0 - A_0 H B_0 F x_0 - A_0 H B_1 E x_0).
\end{aligned}$$

С учетом леммы 1 это одно и то же. $\square$

Обозначим через $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ линейное пространство всех бесконечное число раз дифференцируемых функций $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, имеющих компактный носитель, с поточечными операциями сложения и умножения на число. Говорят, что последовательность $\psi_k \in \mathcal{D}$ сходится к функции $\psi \in \mathcal{D}$, если

- (а) носители функций ψ_k равномерно ограничены, т. е. все содержатся в одном и том же отрезке $[a, b]$;

- (b) последовательность $\psi_k^{(n)}$ равномерно сходится к $\psi^{(n)}$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$; здесь $\psi^{(n)}$ — n -ая производная ψ , в частности, $\psi^{(0)} = \psi$.

Пусть $\mathbb{E}$ — произвольное комплексное банахово пространство с нормой $|\cdot|$. Пусть $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}$ — линейный (векторнозначный) функционал. Будем обозначать значение функционала f на $\psi \in \mathcal{D}$ символом $\langle \psi, f \rangle$. Функционал f называют *непрерывным*, если $\langle \psi_k, f \rangle$ сходится к $\langle \psi, f \rangle$ всякий раз, когда ψ_k сходится к ψ в $\mathcal{D}$. Всякий непрерывный линейный функционал $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}$ называют (подробнее см. [12] и [1]) *обобщенной функцией* или *распределением* на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{E}$. Обозначим символом $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ линейное пространство всех обобщенных функций с естественными операциями сложения и умножения на число. Допуская вольность речи, элементы пространства $\mathcal{D}'$ обычно называют просто функциями.

Пусть $f \in \mathcal{D}'$. Функционал f' , определенный правилом

$$\langle \psi, f' \rangle = -\langle \psi', f \rangle,$$

называют *производной* функционала f .

Пусть $f, g \in \mathcal{D}'$. Говорят, что f и g *совпадают* на открытом множестве $M \subseteq \mathbb{R}$, если $\langle \psi, f \rangle = \langle \psi, g \rangle$ для всех $\psi \in \mathcal{D}$, носители которых содержатся в M .

Обозначим через $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ линейное пространство всех бесконечное число раз дифференцируемых функций $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию

$$\forall m, n = 0, 1, 2, \dots \quad \exists C \quad \forall x \quad |x^m \psi^{(n)}(x)| < C$$

(подробнее см., например, [1, с. 153]). Говорят, что последовательность $\psi_k \in \mathcal{S}$ *сходится* к функции $\psi \in \mathcal{S}$, если

при всех $m, n = 0, 1, 2, \dots$ последовательность $x \mapsto x^m \psi_k^{(n)}(x)$ равномерно сходится к $x \mapsto x^m \psi^{(n)}(x)$.

Линейный (векторнозначный) функционал $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{E}$ называют *непрерывным*, если $\langle \psi_k, f \rangle$ сходится к $\langle \psi, f \rangle$ всякий раз, когда ψ_k сходится к ψ в $\mathcal{S}$. Всякий непрерывный линейный функционал $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{E}$ называют [1, с. 155] *обобщенной функцией* или *распределением медленного роста* со значениями в $\mathbb{E}$. Обозначим символом $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ пространство всех обобщенных функций медленного роста. Поскольку $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ и из сходимости в $\mathcal{D}$ вытекает сходимость в $\mathcal{S}$, пространство $\mathcal{S}'$ можно считать подпространством $\mathcal{D}'$. Нетрудно показать, что операция дифференцирования переводит $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ в себя. Напомним [1, с. 165], что на пространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ корректно определено преобразование Фурье $\mathcal{F}$.

Обобщенной функцией *класса* $\mathcal{D}'_+(\alpha) = \mathcal{D}'_+(\mathbb{E}, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, называют [1, с. 181] обобщенную функцию $f \in \mathcal{D}'$, которая равна нулю на $(-\infty, 0)$ и после умножения на функцию $t \mapsto e^{-\sigma t}$ при любом $\sigma > \alpha$ попадает в пространство $\mathcal{S}'$. Очевидно, $\mathcal{D}'_+(\alpha) \subseteq \mathcal{D}'_+(\beta)$ при $\alpha \leq \beta$.

Преобразованием Лапласа функции $f \in \mathcal{D}'_+(\alpha)$ называют [1, с. 183], [11, глава 3] функцию

$$\mathcal{L}(\sigma + i\omega) = \mathcal{F}(f_\sigma)(\omega), \quad \omega > \alpha,$$

где $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ — преобразование Фурье, а $f_\sigma(t) = e^{-\sigma t} f(t)$.

(Обобщенной) *скалярной импульсной характеристикой* класса $\mathcal{D}'_+(\alpha)$ дифференциального уравнения

$$E\ddot{x} + F\dot{x} + Hx = f$$

назовем обобщенную функцию T класса $\mathcal{D}'_+(\alpha) = \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, \mathbf{B}(Y, X), \alpha)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$E\ddot{T}(t) + F\dot{T}(t) + HT(t) = \mathbf{1}_Y \delta(t).$$

Теорема 5. Пусть полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ содержит хотя бы одну точку резольвентного множества $\rho(E, F, H)$. Для того чтобы существовала обобщенная импульсная характеристика T класса $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, \mathbf{B}(Y, X), \alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы правая полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ содержалась в резольвентном множестве $\rho(E, F, H)$ и резольвента $R_\lambda: Y \rightarrow X$ удовлетворяла в ней условию

$$\begin{aligned} \forall \gamma_0 > \alpha \quad \exists m \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C \quad \forall \gamma > \gamma_0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \\ \|R_{\gamma+i\omega}: Y \rightarrow X\| \leq C e^{\varepsilon \gamma} (1 + |\gamma + i\omega|^m). \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Повторяет рассуждения [4] при доказательстве аналогичного утверждения для пучка первого порядка. $\square$

Следующая теорема объясняет роль импульсной характеристики.

Теорема 6. Пусть импульсная характеристика класса $\mathcal{D}'_+(\alpha)$ существует, а $f \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, Y, \alpha)$. Тогда обобщенное решение $x \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, X, \alpha)$ начальной задачи

$$\begin{aligned} E\ddot{x}(t) + F\dot{x}(t) + Hx(t) &= f(t), & t \in \mathbb{R}, \\ x(t) &= 0, & t < 0, \end{aligned}$$

существует, единственно и представимо в виде свертки $T * f$ импульсной характеристики T и правой части f , а производная решения — в виде свертки $\dot{T} * f$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что свертка $T * f$ определена и принадлежит $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}, X, \alpha)$. Переходя к преобразованию Лапласа в уравнении, получаем $(\lambda^2 E + \lambda F + H)\mathcal{X}(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda)$, где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{X}$ — преобразования Лапласа функций f и x , что при $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$ равносильно равенству $\mathcal{X}(\lambda) = (\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1} \mathcal{F}(\lambda)$. Остается заметить, что в силу свойств преобразования Лапласа [1, с. 185] функция $\lambda \mapsto (\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1} \mathcal{F}(\lambda)$ является преобразованием Лапласа функции $T * f$.

Равенство $\frac{d}{dt}(T * f) = \dot{T} * f$ вытекает из правила [1] дифференцирования свертки. $\square$

Обозначим через $\dot{T}$ (обобщенную) производную импульсной характеристики T . В силу свойств [1] преобразования Лапласа функция $\dot{T}$ является преобразованием Лапласа функции $\lambda \mapsto \lambda R_\lambda$. Рассмотрим векторную импульсную характеристику

$$\mathfrak{T}(t) = (T(t), \dot{T}(t)).$$

Лемма 2 ([9, гл. 6, § 1, п. 82]). Пусть функция F комплексной переменной (принимая значения в банаховом пространстве) в окрестности бесконечно удаленной точки допускает разложение в ряд

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\lambda^k}.$$

Тогда обратное преобразование Лапласа от F имеет вид

$$f(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) \eta(t),$$

где η — функция Хевисайда.

Теорема 7. Пусть бесконечность является полюсом порядка $w - 1$ резольвенты $R_{(\cdot)}$ пучка. Тогда векторная импульсная характеристика $\mathfrak{T}$ класса $\mathcal{D}'_+(\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ лежит правее спектра $\sigma(E, F, H)$, существует и представима в виде

$$\mathfrak{T}(t) = \mathfrak{T}_r(t) + \mathfrak{T}_s(t),$$

где $\mathfrak{T}_r$ и $\mathfrak{T}_s$ — обратные преобразования Лапласа слагаемых $\mathfrak{R}_{r,(\cdot)}$ и $\mathfrak{R}_{s,(\cdot)}$, определенных в теореме 2. Они допускают представление в виде сумм

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_r(t) &= \left(\mathfrak{P} + t\mathfrak{A} + \frac{t^2}{2!}\mathfrak{A}^{2\Box} + \frac{t^3}{3!}\mathfrak{A}^{3\Box} + \dots \right) \eta(t), \\ \mathfrak{T}_s(t) &= -\mathfrak{N}\delta(t) - \mathfrak{N}^{2\Box}\delta'(t) - \mathfrak{N}^{3\Box}\delta''(t) - \mathfrak{N}^{4\Box}\delta'''(t) - \dots - \mathfrak{N}^{w+1\Box}\delta^{(w)}(t), \end{aligned}$$

где $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ — те же, что в теореме 2.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2. Ряд (1) сходится равномерно в некоторой окрестности бесконечности и поэтому определяет там ограниченную функцию. Поэтому $\mathfrak{R}_\lambda = \mathfrak{R}_{r,\lambda} + \mathfrak{R}_{s,\lambda}$ допускает в проколотой окрестности бесконечности оценку $\|\mathfrak{R}_\lambda\| \leq C|\lambda|^{w-1}$, из которой вытекает условие (5). Следовательно, в силу теоремы 5 импульсная характеристика существует.

Применим таблицу преобразований Лапласа к степенному ряду из предложения 2. К конечной сумме (2) применим обратное преобразование Лапласа непосредственно. Обратное преобразование Лапласа от суммы (1) вычислим с помощью леммы 2. $\square$

Функции $\mathfrak{T}_r$ и $\mathfrak{T}_s$, определенные в теореме 7, назовем соответственно *регулярной* и *сингулярной* частями векторной импульсной характеристики.

Теорема 8. Пусть бесконечно удаленная точка является полюсом резольвенты пучка. Тогда векторный оператор сдвига $\mathfrak{U}(t) = \Upsilon(\text{Exp}_t)$ представим в виде

$$\mathfrak{U}(t) = \mathfrak{P} + t\mathfrak{A} + \frac{t^2}{2!}\mathfrak{A}^{2\Box} + \dots,$$

где $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{A}$ — те же, что в предложении 2.

Доказательство. Очевидно, (в обозначениях теоремы 2)

$$U(t) = \varphi(\text{Exp}_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \text{Exp}_t(\lambda) \mathfrak{R}_{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \mathfrak{R}_{r,\lambda} d\lambda,$$

где Γ окружает (обычный) спектр пучка.

Поскольку спектр пучка ограничен, то в последнем интеграле в качестве Γ можно взять окружность с центром в нуле достаточно большого радиуса. Поскольку функция $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$ целая, ее ряд Маклорена на этой окружности сходится равномерно. Поэтому можно поменять суммирование и интегрирование местами:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \mathfrak{R}_{r,\lambda} d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\lambda^n}{n!} \mathfrak{R}_{r,\lambda} d\lambda.$$

В силу равномерной сходимости ряда (1) на окружностях Γ достаточно большого радиуса имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n \mathfrak{R}_{r,\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^n \left(\frac{\mathfrak{P}}{\lambda} + \frac{\mathfrak{A}^{1\Box}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{A}^{2\Box}}{\lambda^3} + \frac{\mathfrak{A}^{3\Box}}{\lambda^4} + \dots \right) d\lambda = \mathfrak{A}^{n\Box},$$

что соответствует доказываемому равенству. $\square$

Следствие 2. Пусть бесконечность является полюсом резольвенты квадратичного пучка. Тогда регулярная часть векторной импульсной характеристики представима в виде

$$\mathfrak{T}_r(t) = \mathfrak{U}(t)\eta(t).$$

Доказательство. Вытекает из теорем 7 и 8. $\square$

Теорема 9. Пусть спектр квадратичного пучка состоит из конечного множества точек $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Пусть эти точки $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$, а также точка $\mu_0 = \infty$ являются полюсами резольвенты $R(\cdot)$, а их порядки равны соответственно $w_1, w_2, \dots, w_q$ и $w_0 - 1$. Тогда векторная импульсная характеристика имеет вид

$$\mathfrak{T}(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{w_i} \mathfrak{N}_i^{(j-1)\Box} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\mu_i t} \eta(t) - \sum_{j=0}^{w_0} \mathfrak{N}_0^{(j+1)\Box} \delta^{(j)}(t),$$

где $\mathfrak{N}_i$ — те же, что в теореме 3. При этом векторный оператор сдвига имеет вид

$$\mathfrak{U}(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{w_i} \mathfrak{N}_i^{(j-1)\Box} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\mu_i t}.$$

Доказательство. Из теоремы 3 видно, что резольвента пучка удовлетворяет оценке из теоремы 6. Чтобы посчитать $\mathfrak{T}$, достаточно применить к формуле (3) таблицу преобразований Лапласа, а чтобы посчитать $\mathfrak{U}$ — подставить (3) в формулу

$$\mathfrak{U}(t) = \Upsilon(\text{Exp}_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \text{Exp}_t(\lambda) \mathfrak{R}_{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \mathfrak{R}_{r,\lambda} d\lambda,$$

где Γ окружает (обычный) спектр пучка. $\square$

Решением начальной задачи

$$\begin{aligned} E\ddot{x}(t) + F\dot{x}(t) + Hx(t) &= 0, & t \geq 0, \\ x(0) &= u_0, \\ \dot{x}(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{6}$$

назовем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $x : [0; +\infty) \rightarrow X$, удовлетворяющую при некоторых C и γ оценке $\|x(t)\| \leq Ce^{\gamma t}$, для которой выполняются соотношения (6).

Фазовым пространством задачи (6), назовем множество пар $(u_0, u_1) \in X \oplus X$, для которых решение задачи (6) существует. Очевидно, фазовое пространство образует подпространство пространства $X \oplus X$.

Теорема 10. Пусть бесконечность является полюсом резольвенты пучка. Тогда фазовое пространство задачи (6) совпадает с образом проектора¹ $\mathfrak{P}_{\square}$, порожденного в соответствии с предложением 3 элементом $\mathfrak{P}$, определенным в соответствии с теоремой 7 и предложением 2.

Если $(u_0, u_1) \in X \oplus X$ принадлежит образу проектора $\mathfrak{P}_{\square}$, то решение x начальной задачи (6) вместе с производной представимо в виде

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \mathfrak{U}(t) \square (u_0, u_1), \quad t \geq 0,$$

где $\mathfrak{U}(t) = \Upsilon(\text{Exp}_t)$ — векторный оператор сдвига.

Доказательство. Пусть x — решение начальной задачи (6). Определим функцию $z : \mathbb{R} \rightarrow X$ по формуле

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ x(t) & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что

$$\dot{z}(t) = \delta(t)u_0 + \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \dot{x}(t) & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\ddot{z}(t) = \dot{\delta}(t)u_0 + \delta(t)u_1 + \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \ddot{x}(t) & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$E\ddot{z} + F\dot{z} + Hz = Eu_0\dot{\delta} + E\delta u_1 + Fu_0\delta.$$

Применим к этому тождеству преобразование Лапласа ($\tilde{z}(\lambda)$ — преобразование Лапласа функции z):

$$(\lambda^2 E + \lambda F + H)\tilde{z}(\lambda) = \lambda Eu_0 + Eu_1 + Fu_0.$$

При $\lambda \in \rho(E, F, H)$ это равенство можно переписать в виде

$$\tilde{z}(\lambda) = R_{\lambda}(\lambda Eu_0 + Eu_1 + Fu_0).$$

Применим к последнему равенству обратное преобразование Лапласа:

$$z(t) = \dot{T}(t)Eu_0 + T(Eu_1 + Fu_0) = [\mathfrak{T}(t) \square (u_0, u_1)]_1,$$

где $[\mathfrak{T}(t) \square (u_0, u_1)]_1$ означает первую координату вектора $\mathfrak{T}(t) \square (u_0, u_1) \in X \oplus X$. Отсюда $\dot{z}(t) = \ddot{T}Eu_0 + \dot{T}(Eu_1 + Fu_0) = -\dot{T}Fu_0 - THu_0 + \dot{T}(Eu_1 + Fu_0) = \dot{T}Eu_1 - THu_0 = [\mathfrak{T}(t) \square (u_0, u_1)]_2$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} (z(t), \dot{z}(t)) &= \mathfrak{T}(t) \square (u_0, u_1) = \mathfrak{T}(t) \square \mathbf{I} \square (u_0, u_1) = \\ &= \mathfrak{T}(t) \square (\mathbf{I} - \mathfrak{P} + \mathfrak{P}) \square (u_0, u_1) = \mathfrak{T}(t) \square \mathfrak{P} \square (u_0, u_1) + \mathfrak{T}(t) \square (\mathbf{I} - \mathfrak{P}) \square (u_0, u_1). \end{aligned}$$

В силу тождеств $\mathfrak{P} \square \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ и $\mathfrak{A} \square \mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ из предложения 2 и теоремы 7 имеем

$$\mathfrak{T}(t) \square \mathfrak{P} = \mathfrak{T}_r(t) \square \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{T}(t) \square (\mathbf{I} - \mathfrak{P}) = \mathfrak{T}_s(t) \square (\mathbf{I} - \mathfrak{P}).$$

Поэтому

$$(z(t), \dot{z}(t)) = \mathfrak{T}_r(t) \square \mathfrak{P} \square (u_0, u_1) + \mathfrak{T}_s(t) \square (\mathbf{I} - \mathfrak{P}) \square (u_0, u_1).$$

В силу теоремы 7 слагаемое $t \mapsto \mathfrak{T}_r(t) \square \mathfrak{P} \square (u_0, u_1)$ является обычной функцией, а слагаемое $t \mapsto \mathfrak{T}_s(t) \square (\mathbf{I} - \mathfrak{P}) \square (u_0, u_1)$ — линейной комбинацией δ -функции и ее производных. Но

¹Поскольку $\mathfrak{P}$ является идемпотентом, в силу предложения 3 $\mathfrak{P}_{\square}$ является проектором.

z — кусочно непрерывная функция. Следовательно, второе слагаемое равно нулю, т. е. $(1 - \mathfrak{P}_{\square})(u_0, u_1) = 0$ и тем самым (u_0, u_1) принадлежит образу проектора $\mathfrak{P}_{\square}$.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть (u_0, u_1) принадлежит образу проектора $\mathfrak{P}_{\square}$. Покажем вначале, что для любых $(u_0, u_1) \in X \oplus X$ вторая координата вектор-функции (см. предложение 2)

$$t \mapsto \mathfrak{U}(t) \square (u_0, u_1) = (\dot{U}(t)Eu_0 + U(t)Fu_0 + U(t)Eu_1, -U(t)Hu_0 + \dot{U}(t)Eu_1)$$

совпадает с производной первой. В самом деле, в силу предложения 1

$$\frac{d}{dt}(\dot{U}(t)Eu_0 + U(t)Fu_0 + U(t)Eu_1) = \ddot{U}(t)Eu_0 + \dot{U}(t)Fu_0 + \dot{U}(t)Eu_1 = -U(t)Hu_0 + \dot{U}(t)Eu_1.$$

Очевидно, образ оператора $\mathfrak{P}_{\square}$ состоит из векторов (u_0, u_1) , имеющих вид $(u_0, u_1) = \mathfrak{P} \square (x_0, x_1)$, где $x_0, x_1 \in X$.

Согласно предложению 1 функция $\mathfrak{U}(t) = \Upsilon(\text{Exp}_t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $E\ddot{\mathfrak{U}}(t) + F\dot{\mathfrak{U}}(t) + H\mathfrak{U}(t) = 0$. Поэтому координаты вектор-функции

$$\begin{aligned} (x(t), \dot{x}(t)) &= \mathfrak{U}(t) \square (u_0, u_1) = \\ &= (\dot{U}(t)Eu_0 + U(t)Fu_0 + U(t)Eu_1, -U(t)Hu_0 + \dot{U}(t)Eu_1) \end{aligned}$$

(являющиеся линейными комбинациями U и $\dot{U}$) удовлетворяют дифференциальному уравнению $E\ddot{x}(t) + F\dot{x}(t) + Hx(t) = 0$.

Проверим выполнение начального условия. Из теоремы 8 следует, что $\mathfrak{U}(0) = \mathfrak{P}$, а согласно теореме 2 — $\mathfrak{P}^2 \square = \mathfrak{P}$. Отсюда имеем

$$(x(0), \dot{x}(0)) = \mathfrak{U}(0) \square (u_0, u_1) = \mathfrak{P} \square (u_0, u_1) = \mathfrak{P} \square \mathfrak{P} \square (x_0, x_1) = \mathfrak{P} \square (x_0, x_1) = (u_0, u_1).$$

□

Далее рассматривается пучок

$$\lambda \mapsto \lambda^2 E - G: X \rightarrow Y. \quad (7)$$

Основные свойства такого пучка могут быть [6] описаны в терминах линейного пучка $\mu \mapsto \mu E - G$.

Итак, рассмотрим вспомогательный линейный пучок $\mu \mapsto \mu E - G$, его резольвентное множество $\rho(E, G)$ и его спектр $\sigma(E, G)$. Для резольвенты этого пучка будем использовать обозначение $S_{\mu} = (\mu E - G)^{-1}$, а для резольвентного множества — $\rho(E, G)$.

Обозначим через $\mathbf{B}_{(E, G)}(Y, X)$ замыкание линейной оболочки значений резольвенты $S_{\mu} = \mu E - G$, $\mu \in \rho(E, G)$. Напомним [5], что относительно операции $\odot$ -умножения

$$A \odot B = AEB$$

линейное пространство $\mathbf{B}_{(E, G)}(Y, X)$ является коммутативной банаховой алгеброй.

Теорема 11. Пусть бесконечность является полюсом порядка $w - 1$ резольвенты линейного пучка $\mu \mapsto \mu E - G$. Тогда импульсная характеристика T класса $\mathcal{D}'_+(\alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ лежит правее спектра пучка $\lambda \mapsto \lambda^2 E - G$, уравнения

$$E\ddot{x} - Gx = f \quad (8)$$

существует и представима в виде

$$T(t) = \left(\Pi t + \sum_{j=2}^{\infty} A^{j-1 \odot} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!} \right) \eta(t) - \sum_{j=0}^{w-1} N^{j+1 \odot} \delta^{(2j)}(t).$$

При этом скалярный оператор сдвига $U(t) = \psi(\text{Exp}_t)$ представим в виде

$$U(t) = \Pi t + \sum_{j=2}^{\infty} A^{j-1 \odot} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!}.$$

Здесь N , Π , A — некоторые элементы алгебры $\mathbf{B}_{(E, G)}(Y, X)$, обладающие свойствами

$$N^{w+1 \odot} = 0, \quad \Pi^{2 \odot} = \Pi, \quad N \odot \Pi = \Pi \odot N = 0, \quad A \odot \Pi = \Pi \odot A = A.$$

Теорема 12. Пусть спектр линейного пучка $S_\mu = \mu E - G$ состоит из конечного множества точек $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q \in \mathbb{C}$. Пусть эти точки $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$, а также точка $\mu_0 = \infty$ являются полюсами резольвенты, а их порядки равны соответственно $w_1, w_2, \dots, w_q$ и $w_0 - 1$. Тогда импульсная характеристика уравнения (8) существует и представима в виде

$$T(t) = \left(\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{w_i} N_i^{(j-1)\odot} D_{ij}(t) \right) \eta(t) - \sum_{j=0}^{w_0-1} N_0^{(j+1)\odot} \delta^{(2j)}(t),$$

где

$$D_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!}, & \text{если } \mu_i = 0, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{(j-1)!} \left(\frac{t}{2\sqrt{\mu_i}} \right)^{j-\frac{1}{2}} I_{j-\frac{1}{2}}(\sqrt{\mu_i}t), & \text{если } \mu_i \neq 0, \end{cases}$$

а I_ν — функция Бесселя мнимого аргумента. При этом скалярный оператор сдвига $U(t) = \psi(\text{Exp}_t)$ представим в виде

$$U(t) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{w_i} N_i^{(j-1)\odot} D_{ij}(t).$$

Здесь $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q; N_0, N_1, \dots, N_q$ — некоторые элементы алгебры $\mathbf{B}_{(F,G)}(Y, X)$, обладающие свойствами

$$\begin{aligned} \Pi_i^{2\odot} &= \Pi_i, & N_i \odot \Pi_i &= \Pi_i \odot N_i = N_i, & i &= 0, 1, \dots, q, \\ \Pi_i \odot \Pi_j &= \mathbf{0}, & N_i \odot \Pi_j &= \Pi_j \odot N_i = \mathbf{0}, & i &\neq j, \\ N_i^{w_i\odot} &= \mathbf{0}, & N_0^{w_0+1\odot} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

где $\Pi_0 = \mathbf{1} - \sum_{i=1}^q \Pi_i$, $\mathbf{1}$ — (присоединенная) единица.

Подставляя результаты теорем 11 и 12 в теоремы 6 и 10, легко получить представление решения начальной задачи для уравнения $E\ddot{x} - Gx = f$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
- [2] Икрамов Х. Д. Матричные пучки — теория, приложения, численные методы // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. Т. 29. — М.: ВИНТИ, 1991. — С. 3–106.
- [3] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
- [4] Курбатова И. В. Об обобщенной импульсной характеристике // Воронеж: Вестник ВГУ. Физика и математика. — 2007. № 1. — С. 148–152.
- [5] Курбатова И. В. Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком // Матем. заметки. — 2009. — Т. 86, № 3. — С. 394–401.
- [6] Курбатова И. В. О квадратичном пучке с нулевым средним слагаемым // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна 2010. — С. 133–141.
- [7] Курбатова И. В. Псевдорезольвенты, функциональное исчисление и операторные пучки. — Воронеж: НИИ математики ВГУ, 2010.
- [8] Курбатова И. В. Функциональное исчисление, порожденное квадратичным операторным пучком // Зап. научных семинаров ПОМИ. — 2011.
- [9] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965.
- [10] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
- [11] Schwartz L. Transformation de Laplace des distributions // Séminaire Mathématique de l'Université de Lund. Tome supplémentaire dédié à M. Riesz. l'Université de Lund. — 1952. — P. 196–206.
- [12] Schwartz L. Distributions à valeurs vectorielles // Ann. Inst. Fourier. — I. 1957. — Vol. 7. — P. 1–141; — II. 1957. — Vol. 8. — P. 1–209.

КУРБАТОВА ИРИНА ВИТАЛЬЕВНА, РОССИЯ, ВОРОНЕЖ, ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

E-mail: la_soleil@bk.ru

И.С. МАЛАХОВА

ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается эллиптическое уравнение в прямоугольнике, один из коэффициентов уравнения является быстро колеблющейся функцией. Период этого коэффициента считается малым параметром. Методом двухмасштабных разложений построено асимптотическое разложение решения по степеням малого параметра.

ВВЕДЕНИЕ

С методикой осреднения, математическими вопросами теории пограничного слоя и способами поиска решения краевых задач, связанных с изучением свойств происходящих в периодических средах процессов, можно ознакомиться во многих работах (см., например, [1], [2]). В данной работе рассматривается задача, объединяющая в себе метод двухмасштабных разложений, метод пограничных функций и осреднение уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x}(a(\xi)\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, \xi, y) \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$u|_{\substack{x=0 \\ x=l_1}} = 0, \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad u|_{y=l_2} = 0. \quad (2)$$

Коэффициент a в уравнении (1) зависит от переменной ξ , равной $\frac{x}{\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $a(\xi)$, $f(x, \xi, y)$ — гладкие периодические функции с периодом 1 по переменной ξ , причём на отрезке $[0, l_1]$ укладывается большое число периодов функции $a(\xi)$, которая вдобавок строго больше нуля, $\varphi(x)$ — достаточно гладкая функция.

Задача состоит в нахождении асимптотики решения $u(x, \frac{x}{\varepsilon}, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ

Будем искать решение как функцию от трёх независимых переменных: медленных переменных x, y и быстрой переменной ξ . В этом случае $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi}\bigg|_x$, $\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_x = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta}\bigg|_{x,y}$, где $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$.

Причём решение представимо в виде:

$$u(x, \xi, y) = U(x, \xi, y) + V(x, \xi, \eta), \quad (3)$$

где

$$U(x, \xi, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \xi, y), \quad V(x, \xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(x, \xi, \eta).$$

Тогда уравнение (1) для функций U, V принимает следующий вид:

$$a(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2}{\varepsilon} a(\xi) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \xi} + \frac{1}{\varepsilon} a'(\xi) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a(\xi) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, \xi, y), \quad (4)$$

$$a(\xi) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2}{\varepsilon} a(\xi) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \xi} + \frac{1}{\varepsilon} a'(\xi) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a(\xi) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0, \quad (5)$$

В одномерном случае была ранее рассмотрена аналогичная задача и получено равномерное асимптотическое разложение с точностью до любой степени ε ([3]). Наиболее важным остаётся отыскание предельного решения $u_0(x, y)$, в процессе построения которого появляются следующие величины:

$$\mu \stackrel{\text{об}}{=} \int_0^1 \frac{d\xi}{a(\xi)}, \quad \beta(\xi) \stackrel{\text{об}}{=} \frac{1}{\mu a(\xi)} - 1, \quad \int_0^1 \beta(\xi) d\xi = 0, \quad \gamma(\xi) \stackrel{\text{об}}{=} \int_0^\xi \beta(t) dt.$$

И получаем в результате уравнение для $u_0(x, y)$:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = [f(x, \xi, y)]_{\text{ср}}. \quad (6)$$

Здесь через $[\cdot]_{\text{ср}}$ обозначен интеграл по ξ по отрезку $[0, 1]$.

Далее под функцией $u_0(x, y)$ будем понимать решение уравнения (6) с граничными условиями (2).

При построении дальнейших слагаемых ряда (3) возникают некоторые особенности, отличающие этот случай от одномерного. Необходимость введения новой переменной $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$ и рассмотрения уравнения (5) обусловлена тем, что, начиная с $k = 1$, функции $u_k(x, \xi, y)$ не удовлетворяют нулевым граничным условиям, то есть из того, что

$$u_k(x, \xi, y) = A_k(x, y) + g_{0,k}(x, \xi, y), \quad g_{0,k}(x, 0, y) = g_{0,k}(x, 1, y) = 0 \quad (7)$$

вытекает, что нулевые граничные условия при $x = 0$, $x = l_1$ и $y = l_2$ для функции $u_k(x, \frac{x}{\varepsilon}, y)$ будут выполнены тогда и только тогда, когда функция $A_k(x, y)$ равна нулю на тех же частях границы. Поскольку функция $A_k(x, y)$ не зависит от ξ , то функция $u_k(x, \xi, y)$, определяемая по формуле (7), при $y = 0$, вообще говоря, не равна нулю. Именно поэтому в окрестности границы $y = 0$ к ряду U добавляется асимптотический ряд V . При этом требуется, чтобы все функции $u_k(x, \xi, y)$ и $v_k(x, \xi, \eta)$ были периодичны по переменной ξ с периодом 1 и чтобы функции $v_k(x, \xi, \eta)$ экспоненциально убывали к нулю при $\eta \rightarrow \infty$.

И в дальнейшем посредством $g_k(x, y)$, $r_k(x, \xi, \eta)$, $b_i^k(x)$ будут обозначены функции, которые уже определены к соответствующему этапу построения коэффициентов ряда (3).

Функции $u_k(x, \xi, y)$ определены формулой (7), где $g_{0,k}(x, \xi, y)$ — уже определённые функции. И после подстановки ряда U в уравнение (4), приравнивания коэффициентов при ε , подстановки известных выражений и осреднения, становится возможным определить $A_k(x, y)$ из уравнения

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^2} = g_k(x, y)$$

с граничными условиями:

$$A_k|_{x=0} = G_1^k(y), \quad A_k|_{x=l_1} = G_2^k(y), \quad A_k|_{y=0} = -G_3^k(x), \quad A_k|_{y=l_2} = -G_4^k(x).$$

Причём функции G_j^k пока не определены. А для того, чтобы определить функции $v_k(x, \xi, \eta)$, необходимо подставить ряд V в уравнение (5) и приравнять коэффициенты при всех степенях ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a(\xi) \frac{\partial v_k}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 v_k}{\partial \eta^2} + r_k = 0, \\ v_k|_{\eta=0} = -g_{0,k}(x, \xi, 0) + G_3^k(x), \end{cases} \quad (8)$$

где $r_k(x, \xi, \eta)$ — некоторые вспомогательные функции, зависящие от предыдущих $v_i(x, \xi, \eta)$, $i = \overline{1, k-1}$, $r_1(x, \xi, \eta) = 0$.

Решение задачи (8) будем искать в виде суммы

$$v_k(x, \xi, \eta) = v_{k,1}(x, \xi, \eta) + v_{k,2}(x, \xi, \eta). \quad (9)$$

Сначала решается неоднородное уравнение, для чего функция $r_k(x, \xi, \eta)$ раскладывается в ряд по системе собственных функций $\Xi_i(\xi)$ задачи Штурма-Лиувилля $\frac{\partial}{\partial \xi}(a(\xi)\Xi'(\xi)) + \lambda\Xi(\xi) = 0$,

$$r_k(x, \xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} r_k^i(x, \eta)\Xi_i(\xi).$$

При этом функция $v_{k,2}(x, \xi, \eta)$ находится как сумма ряда $\sum_{i=0}^{\infty} v_{k,2}^i(x, \eta)\Xi_i(\xi)$, коэффициенты которого — это такие решения уравнений

$$\frac{d^2 v_{k,2}^i}{d\eta^2} - \lambda_i v_{k,2}^i + r_k^i(x, \eta) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

которые экспоненциально стремятся к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. Затем находится решение однородной задачи

$$v_{k,1}(x, \xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^k e^{-\sqrt{\lambda_i}\eta} \Xi_i(\xi)$$

и, соответственно, решение задачи (8) — с помощью формулы (9).

Таким образом, функции G_j^k выбираются таким образом, чтобы решение $u_k + v_k = 0$ при $y = 0$. То есть

$$\begin{cases} G_1^k(y) = 0, \\ G_2^k(y) = 0, \\ G_3^k(x) = \int_0^1 g_{0,k}(x, \xi, 0) d\xi + v_{k,2}^0(x, 0), \\ G_4^k(x) = 0. \end{cases}$$

Существование решения задачи (1), (2), непрерывного в замыкании области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ и гладкого в этой области следует, например, из [4].

Выводы

Теорема. Пусть $u(x, \varepsilon, y)$ решение задачи (1), (2).

Тогда справедлива оценка $u(x, \varepsilon, y) - u_0(x, y) = O(\varepsilon)$, равномерная во всей области Ω .

Оценка приближённого решения может быть значительно улучшена, если предположить дополнительно, что выполнены условия согласования в угловых точках.

Теорема. Пусть $u(x, \varepsilon, y)$ решение задачи (1), (2), формально построен ряд (3) и $Z_n = u_0 + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j (u_j + v_j)$. Пусть выполнены следующие условия: равны нулю функция $\varphi(x)$ и её производные при $x = 0$ и $x = l_1$ до порядка $n+2$, а также равны нулю функция $f(x, \varepsilon, y)$ и все её производные в угловых точках до порядка $n+4$.

Тогда справедлива оценка $u(x, \varepsilon, y) - Z_n(x, \varepsilon, y) = O(\varepsilon^{n+1})$, равномерная во всей области Ω .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. // М.: Наука — 1984.
- [2] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. *Усреднение дифференциальных операторов*. // М.: ФизМатЛит — 1993.
- [3] Ильин А.М., Данилин А.Р. *Асимптотические методы в анализе*. // М.: ФизМатЛит — 2009.
- [4] Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*. // М.: Наука — 1989.

МАЛАХОВА ИРИНА СЕРГЕЕВНА, 454100, РОССИЯ, ЧЕЛЯБИНСК, ГОУ ВПО «ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ», МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

E-mail: Irina-smn@mail.ru

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: КОНУСНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ

В сложных технических, производственных, социально-экономических и других системах крайне важным является выработка алгоритма последовательного или позиционное принятие решений. Любые методы, которые помогают человеку лучше понять, как меняются его предпочтения и доступные ресурсы в процессе функционирования системы, являются полезными, а иногда и просто неоценимыми. Но в большинстве задач управления представлены "мгновенные, статические" конфликтные проблемы [1, с.81-140]. В них не учитывается изменение объекта управления с течением времени. Это относится и к многокритериальным задачам. Однако в большинстве реальных задач с течением времени изменяется и сама управляемая система и предпочтения ЛПР (лица, принимающего решение), ибо "всё течёт, всё движется и ничего не остаётся неизменным" [2, с.214-219]. Процессы, в которых учитываются изменения, связанные с возрастанием времени, называют "динамическими".

Пусть задана линейно - квадратичная, динамическая критериальная задача

$$\Gamma = \langle \Sigma, U, J^{(i)} \rangle_{i \in M}. \quad (1)$$

Аналогичная задача рассматривалась в [3, с.215-232]. Здесь $M = \{1, 2, \dots, m\}$ множество критериев ЛПР. В задаче Γ динамика управляемой динамической системы Σ описывается системой n линейных дифференциальных уравнений и начальными условиями

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (3)$$

Элементы квадратной матрицы $A(t)$, порядка n , предполагаются непрерывными функциями на отрезке времени $[t_0, v]$, т.е. $A(t) \in C_{n \times n}[t_0, v]$. Матрица $B(t) \in C_{n \times n}[t_0, v]$. Здесь $0 \leq t_0 \leq v$ - фиксированные моменты начала и окончания процесса. Текущее состояние системы Σ , в каждый момент времени $t \in [t_0, v]$, характеризуется фазовым вектором $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Этот вектор зависит от времени, т.е. $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ и представляет всю информацию, которой располагает ЛПР в момент $t \in [t_0, v]$. Задана начальная позиция $(t_0, x_0) \in [t_0, v] \times R^n$.

В (2) - (3) представлено изменение вектора состояния $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ под воздействием управления $u = u(t, x)$. Дифференциальное уравнение (2) предъявляет определённые требования к "функциональной природе" управлений. Управляющее воздействие отождествляется с вектор - функцией $u(t, x) = Q(t)x$ где элементы $k \times n$ матрицы $Q(t)$ предполагаются непрерывными для $t \in [t_0, v]$. Множество его стратегий

$$U = \{u = Q(t)x | Q(t) \in C_{k \times n}[t_0, v]\}. \quad (4)$$

В управляемой системе Σ используется управление по принципу обратной связи, т.е. управление, зависящее от ситуации $(t, x) \in [t_0, v] \times R^n$. В тоже время применяется наиболее простой вид таких стратегий - линейных по фазовому вектору и непрерывных от времени. "Математические" и "инженерные" причины такого выбора управлений подробно представлены в литературе [2, с.247 - 252].

Управляемый процесс реализуется следующим образом. Вначале ЛПР выбирает и использует позиционное управление $u = Q(t)x \in U$. Согласно (4) выбор управления сводится к выбору конкретной функциональной матрицы $Q(t) \in C_{k \times n}[t_0, v]$. При таком выборе (2) превращается в систему линейных однородных дифференциальных уравнений. При заданном начальном условии (3), такая система имеет [4, с.21-24] единственное, непрерывно

дифференцируемое решение $x^*(t)$, продолжимое на весь интервал $[t_0, v]$. Затем, с помощью найденного решения $x^*(t) \in C[t_0, v]$, выявляется реализация управления

$$u^* = Q(t)x^*(t).$$

На наборах $(x^*(t), u^*(t, x^*(t)))$ определены m критериев, заданные квадратичными функционалами, именно,

$$J_i(u, t_0, x_0) = x(v)C_i x(v) + \int_0^v u(t, x(t))D_i u(t, x(t))dt, i \in M. \quad (5)$$

Здесь $C_i, D_i, i \in M$, постоянные квадратные симметричные матрицы порядка n и k . В (5) слагаемое $\int_0^v u(t, x(t))D_i u(t, x(t))dt$ называется интегральным, а $x(v)C_i x(v)$ - терминальным слагаемым критерия $J_i(u, t_0, x_0), i \in M$. На содержательном уровне, цель ЛПР - выбор такого управления $u(t, x) \in U$, при котором все критерии $J_i(u(t, x), t_0, x_0), i \in M$, принимают возможно большие значения. Учитывая (2)-(5), задача (1) называется линейно - квадратичной, динамической m -критериальной задачей.

Многокритериальная задача (1) является задачей с неполной информацией по сравнению со стандартной задачей математического программирования. Неопределённость связана с векторным критерием, т.е. с отсутствием единого целевого функционала. Неопределённость можно сокращать или даже снимать, используя дополнительную информацию.

Обычно, решением многокритериальной задачи (1) считают оптимальное по Парето решение, как это показано в [5, с.29]. Такие решения входят в класс оптимальных по конусу решений. Среди последних решений можно проводить процедуру уточнения, как это определено в [6, с.172-175]. Такая процедура позволяет существенно сократить множество претендентов на наилучшее (оптимальное) управление или даже выделить единственное уточнённое по конусу управление.

Один из возможных подходов связан с использованием экспертных оценок. От экспертов следует получать информацию об относительной важности критериев. Каждому критерию $M = 1, \dots, m$ эксперт ставит в соответствие неотрицательное число - весовой коэффициент, указывающий важность критерия относительно других критериев. Таким образом, эксперт формирует вектор весовых коэффициентов для всех m критериев. Пусть сформировано m векторов, составленных из весовых коэффициентов. Они составляют квадратную матрицу A , у которой i -ая строка определяется i -ым экспертом. Матрица A является матрицей отношений экспертов к критериям в задаче (1). Такая матрица задаёт (полиэдральный) конус доминирования, аналогично [6, с.170], в критериальном пространстве R^m .

В качестве оптимального решения динамической многокритериальной задачи (1) будем рассматривать уточнённое по последовательности конусов (по последовательности матриц) управление, представленное по аналогии с определением 2 для "статической задачи" в [6, с.172]. Последовательность конусов, реализующая процесс уточнения решения, задаётся степенями матрицы. По аналогичной схеме уточняется решение и по последовательности для различных конусов. Здесь существенно существование предельно конуса. Условия существования уточнённого по последовательности конусов оптимального решения в многокритериальной задаче в "статическом" случае установлено в [6, с.172].

Сформулируем достаточные условия существования уточнённого по последовательности конусов оптимального управления в многокритериальной, динамической задаче (1). Для этого рассмотрим вспомогательную динамическую задачу

$$\Gamma_\alpha = \langle \Sigma, U, J_\alpha(u, t_0, x_0) \rangle. \quad (6)$$

которая отличается от многокритериальной задачи (1) только скалярным критерием

$$J_\alpha(u, t_0, x_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i J_i(u, t_0, x_0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^T(v)C_i x(v) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^v u^T(t, x(t))D_i u(t, x(t))dt = x^T(v)C(\alpha)x(v) + \int_0^v u^T(t, x(t))D(\alpha)u(t, x(t))dt. \quad (7)$$

Здесь $J_i(u, t_0, x_0)$, $i \in M$, из (5), вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in R^m$, $C = C(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i C_i$, $D = D(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i D_i$.

Утверждение 1. Пусть матрица $A \in R_m \times m$, отношений экспертов к критериям в задаче (1), является неотрицательной, невырожденной, неразложимой, стохастической. Вектор $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$, есть левый собственный вектор, относящемуся к максимальному собственному значению и этот вектор $\alpha \in R_{>}^m$ определяет скалярный критерий (7) в динамической задаче (6). Тогда оптимальное управление в задаче (6) является уточнённым по последовательности конусов решением многокритериальной задачи (1).

Рассмотрим матрицу $A \in R_{m \times m}$, отношений экспертов к критериям в задаче (1). Не уменьшая общности, считаем её стохастической. Для такой матрицы на основании утверждения 5 из [6, с.173] существует предельная матрица и все её строки равны $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$. По аналогии с определением 2 из [6, с.172], уточнённым по последовательности конусов решением, определённым матрицей $A \in R_{m \times m}$, является управление $u^* = Q^*(t)x^*(t)$ такое, что

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} \rho_\alpha(u, t_0, x_0) &= \max_{u \in U} \sum_{i=1}^m \alpha_i J^{(i)}(u, t_0, x_0) = \\ &= \max_{u \in U} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x^T(v) C_i x(v) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_0^v u^T(t, x(t)) D_i u(t, x(t)) dt \right) = \\ &= \max_{u \in U} \left(x^T(v) C(\alpha) x(v) + \int_0^v u^T(t, x(t)) D(\alpha) u(t, x(t)) dt \right) = \\ &= x^{*T}(v) C(\alpha) x^*(v) + \int_0^v u^{*T}(t, x^*(t)) D(\alpha) u^*(t, x^*(t)) dt = \sum_{i=1}^m J^{(i)}(u^*, t_0, x_0) = \rho_\alpha(u^*, t_0, x_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Приведенные равенства есть определение максимума функционала $\rho_\alpha(u, t_0, x_0)$ на допустимых управлениях $u = Q(t)x(t)$ в задаче (6)), что и доказывает утверждение.

При изучении многокритериальной позиционной линейно - квадратичной динамической задачи (1) будем рассматривать квадратичные формы и соответствующие матрицы. В частности выделим знакоопределённые квадратичные формы (матрицы) [7, с.276]. Матрица $C(\alpha)$ называется положительно (отрицательно, неотрицательно, неположительно) определённой, если $\forall x \in R^n$ верно неравенство $x^T C(\alpha) x > 0$ ($x^T C(\alpha) x < 0$, $x^T C(\alpha) x \geq 0$, $x^T C(\alpha) x \leq 0$) и это будет обозначаться $C(\alpha) > 0$, $C(\alpha) < 0$, $C(\alpha) \geq 0$, $C(\alpha) \leq 0$. На основании утверждения 1 получим условия существования уточнённого по последовательности конусов управления в многокритериальной динамической задаче. Эти условия можно сформулировать с помощью подходящей модификации метода динамического программирования [3, с.215-231].

Рассмотрим матрицу $A \in R_{m \times m}$, отношений экспертов к критериям в задаче (1). Её можно считать стохастической. Для такой матрицы на основании утверждения 5 из [6, с.173] существует предельная матрица и все её строки равны $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$. С помощью набора чисел α определяются матрицы $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ из (8).

Утверждение 2. Рассматривается линейно - квадратичная, динамическая m -критериальная задача (1). Пусть для матрицы $A \in R_{m \times m}$, отношений экспертов к критериям в задаче (1) левый собственный вектор таков, что соответствующие матрицы

$$C = C(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i C_i \leq 0, D = D(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i D_i < 0. \quad (9)$$

Тогда в задаче (1) при любом выборе начальной позиции $(t_0, x_0) \in [t_0, v] \times R^n$ существует уточнённая по последовательности конусов с матрицей A оптимальная стратегия $u^* \in U$ из (4) и эта стратегия имеет вид

$$x^* = u^*(t, x) = -D^{-1}(\alpha) B^T(t) \Theta(t) x, \quad (10)$$

где $\Theta(t), 0 \leq t \leq v$, - решение матричного уравнения типа Риккати

$$\dot{\Theta} + A^T(t)\Theta + \Theta A(t) - \Theta B(t)D^{-1}(\alpha)B^T(t)\Theta = 0_{n \times n}, \quad \Theta(v) = -2C(\alpha). \quad (11)$$

При выполнении условий (9) решение $\Theta(t), 0 \leq t \leq v$, системы (11) существует, единственно и продолжимо на интервал $[t_0, v]$.

Доказательство. Согласно утверждению 1 нахождение уточнённого по последовательности конусов управления сводится к построению оптимальной (максимизирующей) стратегии в задачи динамического программирования (6), именно,

$$\max_{u \in U} \rho_\alpha(u, t_0, x_0) = \rho_\alpha(u^*, t_0, x_0).$$

Решение последней задачи будем искать согласно рецептам динамического программирования Беллмана [3, с.215-228], [8, с.366-369]. Именно, введём скалярную функцию

$$W(t, x, u, V) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T (A(t)x + B(t)u) + 1/2 u^T D(\alpha)u. \quad (12)$$

Здесь $V = V(t, x)$ некоторая неизвестная скалярная функция. Оптимальное (максимизирующее) управление в задаче динамического управления (6) найдём из условия

$$\max_{u \in U} W(u, t_0, x_0) = W(u^*, t_0, x_0).$$

Для нахождения оптимального управления используем достаточные условия максимума, т.е.

$$\frac{\partial W}{\partial u} + B^T \frac{\partial V}{\partial x} + Du = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = D < 0. \quad (14)$$

Неравенство (14) означает, что матрица D отрицательно определена и это свойство выполнено в силу (9). Из (13) следует, что

$$u^* = -D^{-1}B^T \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (15)$$

Как принято для линейно - квадратичных задач будем считать, что функция $V = V(t, x)$ имеет вид

$$V = V(t, x) = 1/2 x^T \Theta(t)x. \quad (16)$$

Здесь неизвестной величиной является симметрическая матрица $\Theta = \Theta(t)$, элементы которой есть функции от $t \in [t_0, v]$. Тогда из (15), (16) следует (10), именно,

$$u^* = u^*(t, x) = -D^{-1}(\alpha)B^T(t)\Theta(t)x.$$

Подставляя u^* из (15) и V из (16) в равенства

$$W(t, x, u^*, V) = 0, V(v, x) = 1/2 x^T C(\alpha)x,$$

где функция $W(t, x, u^*, V)$ задана в (15), получаем, что матрица $\Theta(t) \in C_{n \times n}[t_0, v]$ удовлетворяет (11). По условию выполнены неравенства (9). В этом случае матричное уравнение типа Риккати и начальное условие (11) определяют [9, с.207] единственное решение, продолжимое на интервал $[t_0, v]$.

Пример. Рассматривается линейно - квадратичная, динамическая двухкритериальная задача (1), именно, $\Gamma = \langle \Sigma, U, \{J^{(i)}\}_{i=1,2} \rangle$. Здесь динамика управляемой динамической системы Σ описывается системой двух линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_2 = u(t, x).$$

Вектор состояния системы $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Задан промежуток функционирования $t \in [0, 2]$. Скалярное управление с полной обратной связью представлено в (4), именно, $u(t, x) = Q(t)x = q_1 x_1 + q_2 x_2$. Ограничения на управление отсутствуют. На реализованных траектории и управлении динамической системы $(x^*(t), u^*(t, x))$ определены два критерия, заданные квадратичными функционалами, именно,

$$J_1(t, t_0, x_0) = x^T(2)Cx(2), C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$J_2(t, t_0, x_0) = \int_0^t u^T(t, x(t)) \cdot D \cdot u(t, x(t)) dt, D = -1.$$

На содержательном уровне, цель ЛПР в этой задаче состоит в выборе такого управления $u(t, x) \in U$, при котором оба критерия примут возможно большие значения. Представленная задача является линейно - квадратичной, динамической двухкритериальной задачей.

В качестве решения задачи будем рассматривать уточнённое по конусу решение. Это уточнение определяется на основе экспертных оценок. Пусть эксперты представили свои предпочтения стохастической матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице приведены мнения двух экспертов о критериях: первый эксперт оценивает важность критериев $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ как, 3 : 2 а второй эксперт как 4 : 1. Такая информация сокращает неопределённость относительно цели операции, но не снимает её полностью. Наилучший компромисс мнений экспертов устанавливает левый собственный вектор матрицы A , именно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_2 A_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, компромиссное решение экспертов состоит в оценке важности критериев, как 2 : 1.

Согласно утверждению 1, управление

$$u^*(t) \in \operatorname{argmax}_{u(t) \in U} (2/3 J^{(1)}(u(t), 0, x_0) + 1/3 J^{(2)}(u(t), 0, x_0))$$

является уточнённым по последовательности конусов (по последовательности степеней матрицы A) оптимальным (максимальным) решением многокритериальной задачи. Именно, уточнённое управление является решением линейно - квадратичной динамической задачи (6) при условии $\alpha = 2/3$, т.е.

$$\Gamma_{2/3} = \langle \Sigma, U, \rho_{2/3}(u, 0, x_0) \rangle,$$

$$\rho_{2/3}((u(t), 0, x_0)) = 2/3 J^{(1)}(u(t), 0, x_0) + 1/3 J^{(2)}(u(t), 0, x_0).$$

Для линейно - квадратичной динамической двухкритериальной задачи выполнены условия утверждений 2 и 3. Тогда в двухкритериальной задаче при любом выборе начальной позиции существует уточнённая по конусу с матрицей A оптимальная стратегия $u^* \in U$ из (4). Для её нахождения составим матричное уравнение типа Риккати (11), именно

$$\dot{\Theta} + A^T(t)\Theta + \Theta A(t) - \Theta B(t)D^{-1}(\alpha)B^T(t)\Theta = 0_{2 \times 2},$$

$$\Theta(v) = -2C(\alpha).$$

Для уменьшения вычислительных трудностей при решении уравнения запишем его относительно неизвестной матрицы $\Theta^{-1} = \Theta^{-1}(t)$, при этом используем тождество $\dot{\Theta}^{-1} = -\Theta^{-1}(t) \cdot \dot{\Theta}(t) \cdot \Theta^{-1}(t)$. Аналогичное преобразование представлено [8, с.382]. В результате имеем задачу

$$\dot{\Theta}^{-1} - \Theta^{-1}A^T - A\Theta^{-1} + BD^{-1}B^T = 0_{2 \times 2},$$

$$\Theta^{-1}(v) = -1/2C^{-1}(\alpha).$$

После преобразований получаем начально - краевую задачу

$$\dot{q}_{11} = 2q_{12}, q_{11}(2) = 3/8,$$

$$\dot{q}_{12} = q_{22}, q_{12}(2) = 0,$$

$$\dot{q}_{22} = -3, q_{22}(2) = 1/4.$$

Её решение

$$q_{11}(t) = -t^3 + 25/4t^2 - 13t + 75/8, \quad q_{12}(t) = -3/2t^2 + 25/4t - 13/2, \quad q_{22}(t) = -3t + 25/4$$

или в матричной форме

$$\Theta^{-1} = \Theta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^3 + 25/4t^2 - 13t + 75/8 & -3/2t^2 + 25/4t - 13/2 \\ -3/2t^2 + 25/4t - 13/2 & -3t + 25/4 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу

$$\Theta = \Theta(t) = 1/\Delta \begin{pmatrix} q_{22}(t) & -q_{12}(t) \\ -q_{21}(t) & q_{11}(t) \end{pmatrix} = \\ 1/\Delta \begin{pmatrix} -t^3 + 25/4t^2 - 13t + 75/8 & -3/2t^2 + 25/4t - 13/2 \\ -3/2t^2 + 25/4t - 13/2 & -3t + 25/4 \end{pmatrix},$$

где $\Delta = 0,75t^4 - 6,25t^3 + 19,5t^2 - 28,125t + 16,34375$. Оптимальное управление u^* определяется по формуле (10)

$$u^*(t, x) = -D^{-1}(\alpha)B^T(t)\Theta(t)x = \frac{4,5t^2 - 18,75t - 19,5}{\Delta}x_1 + \frac{-3t^3 - 18,75t^2 - 39t - 28,125}{\Delta}x_2$$

и $\Delta = 0,75t^4 - 6,25t^3 + 19,5t^2 - 28,125t - 16,34375$. Таким образом, в данном примере найдено управление, доставляющее наилучшее компромиссное решение с позиций двух экспертов.

В работе рассмотрена линейно - квадратичная, динамическая многокритериальная задача. Наличие в ней m -критериев является выражением неопределённости в системе, именно неопределённости отношения предпочтения ЛПР. В классификации неопределённостей в задачах управления она выделена в [2, с.24], как "неопределённость, отражающая нечёткость знания игроками своих целей". Выявление единой целевой функции снимает эту неопределённость.

Рассматриваемый в работе процесс уточнения по последовательности конусов позволяет уменьшить неопределённость, и в пределе выявить единую целевую функцию. Такое уточнение существенно использует знания экспертов по рассматриваемой проблеме. Их мнения формализуются в форме матрицы отношений экспертов к критериям. Эта матрица и соответствующий ей многогранный конус позволяют свести критериальную проблему к стандартной задаче динамического программирования.

Для последней задачи разработаны эффективные методы решения. В частности, в рассматриваемом случае управление осуществляется по принципу обратной связи, т.е. управляющее воздействие зависит от времени и сложившейся позиции. Для нахождения такого оптимального управления можно использовать метод динамического управления Беллмана. Этот алгоритм решения позволяет выявить явный вид оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Воробьёв Н.Н. Современное состояние теории игр // Успехи математических наук.1970. Т. 25. Вып.2. С.81 - 140.
- [2] Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Изд - во Интеллекта, 2004.
- [3] Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова Думка, 1994.
- [4] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
- [5] Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002.
- [6] Матвеев В. А. Исследование оптимальности по конусу в многокритериальной задаче // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. № 4. С.169-176.
- [7] Гантмахер ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967.
- [8] Пантелеев В.И., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. Москва: Высшая школа, 2003.
- [9] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. Москва:Наука,1972.

МАТВЕЕВ ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ, 180000, Россия, Псков, Псковский государственный педагогический университет, физико - математический факультет, пл. Ленина, 2

E-mail: matveev176@rambler.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Поздравление Михаила Семеновича Аграновича с юбилеем.....	1
ОБ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ	
Копачевский Н.Д.	2
СИНГУЛЯРНАЯ НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИН- ТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕ- ГО В МОДЕЛЯХ СТРАХОВОЙ МАТЕМАТИКИ	
Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В.	41
РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ И ИХ ПРИЛОЖЕ- НИЯ	
Балашова Г.С.	56
АБСТРАКТНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ПИКАРА И СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ	
Богданский Ю.В., Статкевич В.М.	62
ОБ ОБРАТИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЯХ, ПОРОЖДЕН- НЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ И НЕВАНЛИН- НОВСКОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ	
Брук В.М.	67
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА- ЛИУВИЛЛЯ НА НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ОБОБ- ЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕЙКИ	
Бутерин С.А.	78
ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ КЛАССИФИЦИРУЮЩЕГО АЛГОРИТ- МА НА ОСНОВЕ ЕГО ИНФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ	
Гуров С.И.	89
АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ	
Даровская К.А.	93
АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕ- НИЯ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ ВОЗРАСТАНИИ ВРЕМЕНИ	
Дегтярев Д.О.	100
АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕ- НИЯ ПУАССОНА С МНОГИМИ МАЛЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ НА ОКРУЖНОСТИ	
Долбеева С.Ф.	106
КРИТЕРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУММЫ ФУНКЦИЙ ОТ k ПЕРЕМЕННЫХ	
Дьяконов А.Г.	109
МНОГОШАГОВЫЙ МАКСИМИН	
Житенева Ю.Н., Бородина Л.В., Молоствов В.С.	114
УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНАМИ ЗА СЧЕТ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И УРОВНЯ ЖЕЛАЕМОГО АКТИВА.	
Жуковский В.И., Высокос М.И.	122

ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В КОНФЛИКТНОЙ ЗАДАЧЕ	
Золотарёв В.В., Жаркынбаев С., Бородина Л.В.....	128
АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА ХИЛЛА-ШРЕДИНГЕРА	
Карпикова А.В.	135
ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЛАБЫХ ВОЛН В РЕШЕНИИ ВЕКТОРНОГО ВАРИАЦИОННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ	
Корнеев В.А.....	140
АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ	
Крутенко Е.В.....	154
О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ	
Курбатова И.В.....	166
ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	
Малахова И.С.	176
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: КОНУСНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ	
Матвеев В.А.....	179