

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ГИДРОДИНАМИКИ ИМ. М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
"СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК"

ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ И
ШКОЛА ДЛЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ,
ПОСВЯЩЕННЫЕ 100-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА
Л. В. ОВСЯННИКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

13 – 17 мая 2019 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Новосибирск
2019

Программный комитет:

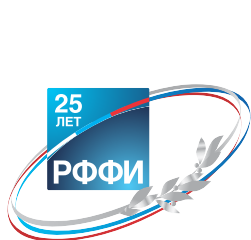
Головин С. В., д. ф. - м. н. — сопредседатель (Новосибирск)
Плотников П. И., чл. -корр. РАН — сопредседатель (Новосибирск)
Пухначев В. В., чл. -корр. РАН — сопредседатель (Новосибирск)
Данилова К. Н., к. ф. - м. н. — ученый секретарь (Новосибирск)
Фоминых Е. Ю., к. ф. - м. н. — ученый секретарь (Новосибирск)
Алексеев С. В., академик (Новосибирск)
Годунов С. К., академик (Новосибирск)
Горячева И. Г., академик (Москва)
Гузов М. А., академик (Владивосток)
Климов Д. М., академик (Москва)
Козлов В. В., академик (Москва)
Кузнецов Е. А., академик (Москва)
Куликовский А. Г., академик (Москва)
Левин В. А., академик (Москва)
Матвеев В. П., академик (Пермь)
Морозов Н. Ф., академик (Санкт-Петербург)
Нигматулин Р. И., академик (Москва)
Панин В. Е., академик (Томск)
Ребров А. К., академик (Новосибирск)
Суржиков С. Т., академик (Москва)
Тайманов И. А., академик (Новосибирск)
Титов В. М., академик (Новосибирск)
Фомин В. М., академик (Новосибирск)
Фортов В. Е., академик (Москва)
Черноузько Ф. Л., академик (Москва)
Гайфуллин А. М., чл. -корр. РАН (Жуковский)
Курчиков А. Р., чл. -корр. РАН (Тюмень)
Липатов И. И., чл. -корр. РАН (Жуковский)
Романов В. Г., чл. -корр. РАН (Новосибирск)
Павловский Ю. Н., чл. -корр. РАН (Москва)
Псахье С. Г., чл. -корр. РАН (Томск)
Федорук М. П., чл. -корр. РАН (Новосибирск)
Алексеев Г. В., д. ф. - м. н. (Владивосток)
Андреев В. К., д. ф. - м. н. (Красноярск)
Антонцев С. Н., профессор (Португалия)
Васильев А. А., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Гаврилюк С. Л., профессор (Франция)
Гончарова О. Н., д. ф. - м. н. (Барнаул)
Ерманюк Е. В., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Ибрагимов Н. Х., профессор (Швеция)
Капцов О. В., д. ф. - м. н. (Красноярск)
Кедринский В. К., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Князева А. Г., д. ф. - м. н. (Томск)
Конопельченко Б. Г., профессор (Италия)
Коробейников С. Н., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Крайко А. Н., д. ф. - м. н. (Москва)
Ляпидевский В. Ю., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Макаренко Н. И., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Марчук И. В., д. ф. - м. н. (Новосибирск)

Мелешко С. В., профессор (Таиланд)
Сенашов С. И., д. ф. - м. н. (Красноярск)
Сидоров Н. А., д. ф. - м. н. (Иркутск)
Солонников В. А., д. ф. - м. н. (Санкт-Петербург)
Стурова И. В., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Фурсиков А. В., д. ф. - м. н. (Москва)
Хабиров С. В., д. ф. - м. н. (Уфа)
Хлуднев А. М., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Чесноков А. А., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Чупахин А. П., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Шапеев В. П., д. ф. - м. н. (Новосибирск)
Шелухин В. В., д. ф. - м. н. (Новосибирск)

В 2019 году исполняется 100 лет со дня рождения Льва Васильевича Овсянникова (22.04.1919 – 23.05.2014), выдающегося российского ученого в области механики и математики. Результаты Л. В. Овсянникова в газовой динамике, теории движения жидкости со свободными границами, в области математического обоснования моделей механики сплошной среды стали классическими и послужили началом новых научных направлений. Разработанные им методы группового анализа дифференциальных уравнений широко применяются в различных областях математики, механики и теоретической физики. Созданная Л. В. Овсянниковым научная школа широко известна в мировой науке.

Научная тематика конференции предполагает обсуждение актуальных проблем прикладной математики, механики и методов математического моделирования, а также их приложений для описания и прогнозирования природных и технических процессов. В ходе работы конференции будут представлены оригинальные сообщения по следующим научным направлениям:

- Теоретико-групповые и аналитические методы в механике сплошной среды;
- Математическая теория нелинейных волновых процессов в жидкостях и газах;
- Модели многофазных и стратифицированных жидкостей, смесей и сред с усложненными реологическими свойствами;
- Нелинейные проблемы деформируемого твердого тела.



Оргкомитет конференции выражает благодарность за финансовую поддержку Российскому фонду фундаментальных исследований (код проекта 19-01-20015), Институту гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН и Региональному математическому центру НГУ.

ISBN 978-5-94671-031-2 © Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

СОДЕРЖАНИЕ

АБЕНОВ М. М. <i>О точных решениях уравнения баланса массы</i>	17
АГИШЕВА У. О., ВДОВЕНКО И. И., ГАЛИМЗЯНОВ М. Н. <i>Устойчивость и акустические свойства перегретой жидкости с газовыми зародышами при повышении давления</i>	18
АДИУЛЛИН Б. Р., МИХАЙЛЕНКО К. И. <i>Влияние длины канала вихревой трубы на температурное разделение воздуха</i>	19
АКСАКОВ А. В., БАЙКОВ В. А., БОРЩУК О. С., КОНОВАЛОВА С. И. <i>Моделирование фильтрации жидкости через флюидоупор по трещинам гидроразрыва</i>	20
АКСЕНОВ А. В., ДОБРОХОТОВ С. Ю., ДРУЖКОВ К. П. <i>Набегание и отражение от берега «ступеньки» на мелкой воде над наклонным дном</i> . .	21
АКСЕНОВ А. В., ДРУЖКОВ К. П. <i>Классификация законов сохранения системы уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном</i>	22
АЛАБУЖЕВ А. А. <i>Влияние движения линии контакта на поведение зажатой капли при колебаниях подложки</i>	23
АЛЕКСЕЕВ Г. В., БРИЗИЦКИЙ Р. В. <i>Задачи управления для стационарных уравнений МГД при смешанных граничных условиях</i>	24
АЛЕКСЕЕВ Г. В., ТЕРЕШКО Д. А. <i>Анализ и оптимизация в задачах переноса тепла и масс в неоднородных средах</i>	25
АЛЛИЛУЕВА А. И. <i>Локализованные асимптотические решения уравнений магнитной гидродинамики и газовой динамики</i>	26
АМОСОВА Е. В. <i>Карлемановская оценка решений уравнений сопряженных уравнениям Навье-Стокса сжимаемой среды</i>	26
АМОСОВА Е. В. <i>О регулярности решений нестационарных уравнений Навье-Стокса</i>	27
АНДРЕЕВ В. К., ЛЕМЕШКОВА Е. Н. <i>Двумерное движение несмешивающихся жидкостей в плоском канале с учетом изменения внутренней энергии</i>	28
АНДРЕЕВ В. К., МАГДЕНКО Е. П. <i>Двумерное стационарное термокапиллярное течение двух жидкостей в цилиндре</i>	29
АННИН Б. Д., ОСТРОСАБЛИН Н. И. <i>Представление общего решения трехмерных динамических уравнений трансверсально-изотропной термоупругой среды</i>	30
АРХИПОВ Д. Г., ХАБАХПАШЕВ Г. А. <i>Нелинейные волны на границе раздела двухслойного течения Пуазейля в плоском наклонном канале</i>	32
АФАНАСЬЕВ А. А. <i>Двухслойная термоконцентрационная конвекция в горизонтальном пористом слое</i>	33
БАГДЕРИНА Ю. Ю. <i>Инварианты и симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка</i>	34
БАЙКИН А. Н. <i>Влияние эффектов пороупругости на распространение радиальной трещины гидроразрыва пласта</i>	34

БАНЩИКОВА И. А., ИЯВОЙНЕН С. В., ЛАРИЧКИН А. Ю. <i>О рациональных режимах формообразования осесимметричной оболочки из стали в условиях ползучести</i>	35
БАТИЩЕВ В. А. <i>Возникновение вращения жидкости в пограничном слое вблизи охлажденной свободной границы</i>	36
БАУТИН С. П. <i>Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике</i>	37
БАУТИН С. П., КОНОНОВ С. Н., ЛЕВУНИНА Э. С. <i>Математическое моделирование течений в тропических циклонах с использованием полной системы уравнений Навье-Стокса</i>	38
БАУТИН С. П., ФИЛИН М. А. <i>Построение решений Бюргерса с помощью бесконечных тригонометрических рядов</i>	39
БЕКЕЖАНОВА В. Б., ГОНЧАРОВА О. Н., ИВАНОВА Н. А., КЛЮЕВ Д. С. <i>Неустойчивость двухслойной системы с деформируемыми границами раздела при точечном нагреве лазерным пучком</i>	40
БЕКЕЖАНОВА В. Б., ОВЧАРОВА А. С. <i>Структура термокапиллярных течений в двухслойной системе при несимметричном размещении нагревателей на границах системы</i>	41
БЕЛОНОСОВ В. С. <i>Нелокальная теория фазовых колебаний при нелинейном параметрическом резонансе</i>	42
БЕЛЫХ В. Н. <i>Об эволюции конечного объема идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью</i>	43
БЕРДНИКОВ В. С., ГУСЕЛЬНИКОВА О. О. <i>Исследование сценариев развития свободноконвективных струй и их взаимодействия с преградами конечной теплопроводности</i>	44
БЛИНОВ В. А., ЛЕГАН М. А. <i>Гидравлический разрыв цилиндрических тел из бетона в неоднородном поле напряжений</i>	45
БОГДАНОВ А. Н. <i>Трансзвуковые течения. Особенности математической модели при нестационарных и вязких эффектах</i>	46
БОЛОТНОВА Р. Х., ГАЙНУЛЛИНА Э. Ф. <i>Динамика волн и вихреобразование при воздействии сферического импульса на границу газа и водной пены</i>	47
БОРОВСКИХ А. В., ПЛАТОНОВА К. С. <i>Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана и проблема замыкания моментной системы</i>	48
БРИЗИЦКИЙ Р. В., САРИЦКАЯ Ж. Ю. <i>Краевые и экстремальные задачи для обобщенной модели Буссинеска</i>	49
БУБЛИК В. В. <i>Групповые свойства уравнений, описывающих движение жидкого металла с включением нанопорошковых инокуляторов</i>	50
БУГАЕНКО А. А., КАЗАЧИНСКИЙ А. О., КРУТОВА И. Ю., ОПРЫШКО О. В. <i>Аналитическое и численное моделирование течений газа в восходящих закрученных потоках</i>	51
БУЗНИК В. М., ГОЛУШКО С. К., НУЖНЫЙ Г. А., ОЧИРОВ А. А. <i>Математическое моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния многослойных балок, армированных геосетками</i>	52

БУЛАТОВ В. В., ВЛАДИМИРОВ Ю. В. <i>Современные проблемы математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред</i>	53
ВАЛОВ А. В., БАЙКИН А. Н., ДОНЦОВ Е. В. <i>Моделирование геометрии плоской трещины гидроразрыва в рамках подхода Planar3D ILSA</i>	54
ВАХИТОВА Р. Д., МОГИЛЕВСКИЙ Е. И. <i>Стабилизация стекающей пленки неньютоновской жидкости продольными колебаниями стенки</i>	55
ВЕДЕНЕЕВ В. В., ГАРЕЕВ Л. Р., ЗАЙКО Ю. С. и др. <i>Анализ развития возмущений в ламинарной затопленной струе</i>	56
ВЕДЕНЕЕВ В. В., ЗАЙКО Ю. С. <i>Абсолютная и конвективная неустойчивость затопленных струй жидкости</i>	57
ВИГДОРОВИЧ И. И. <i>Законы подобия для турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа</i>	58
ВИРЦ Р. А., ПАПИН А. А. <i>Фильтрация жидкости в поропругой среде</i>	59
ВОЛОДЬКО О. С. <i>Численное моделирование циркуляций в озере Шира</i>	60
ГАЗИЗОВ Р. К., ГАЙНЕТДИНОВА А. А. <i>Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с n симметриями</i>	60
ГАЙФУЛЛИН А. М., ГАДЖИЕВ Д. А., ЖВИК В. В., ЗУБЦОВ А. В. <i>Взаимодействие вихревых структур</i>	61
ГАЛИЧКИНА М. А. <i>Стационарные стратифицированные течения над комбинированным препятствием</i>	62
ГЕЛАШ А. А., АГАФОНЦЕВ Д. С. <i>Сильно взаимодействующий солитонный газ</i>	62
ГЕОРГИЕВСКИЙ П. Ю., ЛЕВИН В. А. <i>Критерий эквивалентности для снижения волнового сопротивления тел при помощи энерговклада в набегающий поток</i>	63
ГЕОРГИЕВСКИЙ П. Ю., ЛЕВИН В. А., СУТЫРИН О. Г. <i>Эффект фокусировки при взаимодействии ударных волн и быстролетящих тел с газовыми пузырями</i>	64
ГОЛОВИН С. В., ЛАТЫШЕВ А. А. <i>Определение давления инициации трещины гидроразрыва при различных типах заканчивания скважины</i>	66
ГОЛОГУШ Т. С., ЧЕРЕВКО А. А., ПЕТРЕНКО И. А., ОСТАПЕНКО В. В. <i>Моделирование оптимального сценария эмболизации артериовенозной мальформации</i>	67
ГОЛУБЯТНИКОВ А. Н., ИВАНОВ О. О. <i>Автомодельное движение плавающей частицы</i>	68
ГОЛУБЯТНИКОВ А. Н., УКРАИНСКИЙ Д. В. <i>Периодические и резонансные решения в газовой динамике</i>	69
ГОЛЫХ Р. Н., ХМЕЛЕВ В. Н., ЛОПАТИН Р. А., МИНАКОВ В. Д. <i>Модель влияния ультразвуковой кавитации на скорость получения биоэтанола из порошковой целлюлозы</i>	70
ГОНЧАРОВА О. Н. <i>Влияние теплофизических свойств жидкого теплоносителя на характеристики трехмерных течений с фазовым переходом</i>	71

ГРИГОРЬЕВ А. С., ШИЛЬКО Е. В., ПСАХЬЕ С. Г. <i>Микромасштабная механическая модель основного структурного элемента кероген-глинисто-карбонатно-кремнистых пород бажендовской свиты</i>	72
ГРИГОРЬЕВ Ю. Н., ЕРШОВ И. В. <i>Линейная устойчивость пограничного слоя на пластине в условиях колебательного возбуждения и вязкой стратификации</i>	73
ГРИГОРЬЕВ Ю. Н., МЕЛЕШКО С. В., СУРИЯВИЧИТСЕРАНИИ А. <i>Анализ групповых свойств уравнения Смолуховского и его следствий</i>	74
ГРИШИН М. А., СЛЕПЦОВ С. Д. <i>Математическое моделирование таяния льда в однофазной постановке задачи Стефана с учетом селективного источника излучения</i>	75
ГРИШИН М. А., СЛЕПЦОВ С. Д., БЕССМЕЛЬЦЕВ В. П. <i>О роли плазмы в процессе интенсивного испарения алюминия под действием серии коротких импульсов Nd:YAG лазера</i>	76
ГУБАЙДУЛЛИН А. А., ГУБКИН А. С., ИГНАТЬЕВ П. А., ИГОШИН Д. Е. <i>Проницаемости двумерных моделей пористой среды со случайными микронеоднородностями</i>	77
ГУБАРЕВ Ю. Г., ФУРСОВА Д. А. <i>К устойчивости радиального схлопывания цилиндрической оболочки, наполненной вязкой несжимаемой жидкостью</i>	78
ГУЗЕВ М. А. <i>Перенос тепла в одномерной гармонической цепочке частиц</i> .	79
ДАРЖАИН А. Э., БОЙКО А. В., ЧУПАХИН А. П. <i>Исследование устойчивости пограничного слоя над податливыми покрытиями</i>	80
ДЕНИСЕНКО Н. С., ЧЕРЕВКО А. А. <i>Модель нелинейного осциллятора для моделирования течения крови в артериальных сосудах</i>	81
ДЕРЖО О. Г. <i>Волны сложной структуры в нелинейно-дисперсионных средах</i>	82
ДОБРОХОТОВ С. Ю. <i>Эффективные формулы описания возникновения и распространения линейных поверхностных волн на воде в рамках гидроупругой модели</i>	82
ДОКУКОВА Н. А., КОНОН П. Н. <i>Аналитические методы расчета упругого кольца</i>	83
ЕФИМОВА М. В. <i>О двухслойном конвективном течении с учетом энергии межфазного теплообмена</i>	84
ЖАЛНИНА А. А., КУЧЕР Н. А. <i>Пространственное обтекание препятствия потоком смеси вязких сжимаемых жидкостей</i>	85
ЖУРАВЛЕВА Е. С., КЕДРИНСКИЙ В. К. <i>Фокусировка волны разрежения при ударно-волновом нагружении тонкого слоя многофазной жидкости</i> . .	86
ЗАМУРАЕВ В. П., КАЛИНИНА А. П., ФЕДОРОВА Д. В. и ДР. <i>Выбор граничных условий при нестационарном моделировании втекания струй в сверхзвуковой поток</i>	87
ЗАХАРЧЕНКО К. В., КАПУСТИН В. И., ЛАРИЧКИН А. Ю., РАЕВСКАЯ Г. А. <i>Экспериментальное исследование влияния технологии формообразования на сопротивление материала усталостному разрушению</i>	88

ЗУБАРЕВ Н. М., ЗУБАРЕВА О. В., КОЧУРИН Е. А. <i>Динамика развития неустойчивости свободной заряженной поверхности идеальной жидкости</i>	89
ЗУБАРЕВ Н. М., КАРАБУТ Е. А., ЖУРАВЛЕВА Е. Н. <i>Построение точных решений в задаче о движении жидкости со свободной границей</i>	90
ИБЕН У., МАХНОВ А. В., ПЕТРОВ Н. В., ШМИДТ А. А. <i>Математическое моделирование кавитации и сопровождающих явлений в жидкостях, содержащих растворенный газ</i>	91
ИЯВОЙНЕН С. В. <i>Деформирование балок таврового сечения в условиях ползучести с различными свойствами на растяжение и сжатие</i>	92
КАБАРДИН И. К., ЯВОРСКИЙ Н. И., МЕЛЕДИН В. Г. и др. <i>Исследование границ применимости моделей турбулентности при интенсификации массопереноса управляемым поворотно-дивергентным потоком</i> . .	92
КАВУННИКОВА Е. А., СТАРОВОЙТОВА Б. Н., ГОЛОВИН С. В. <i>Сравнение алгоритмов оптимизации дизайна скважины с множественными гидроразрывами пласта</i>	93
КАЗАКОВ А. Л., КУЗНЕЦОВ П. А., ЛЕМПЕРТ А. А. <i>Аналитические решения задачи об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности при наличии источника</i>	94
КАЗАКОВ А. Л., СПЕВАК Л. Ф. <i>Численный анализ обобщенно-автомодельных решений уравнения нелинейной фильтрации с источником</i>	96
КАЗАКОВ А. Л., СПЕВАК Л. Ф., НЕФЕДОВА О. А. <i>Решение двумерной задачи об иницировании тепловой волны краевым режимом, заданным на подвижном многообразии</i>	97
КАЛУГИН А. Г. <i>Об эффекте ориентационной неустойчивости в нематических жидких кристаллах</i>	98
КАПРАНОВ Ю. И. <i>Вырождения фильтрационного потока неоднородной жидкости</i>	99
КАПЦОВ О. В., КАПЦОВ Д. О. <i>Волны и структуры уравнения Буссинеска</i> .	99
КАСИМОВ А. Р. <i>Динамика сверхзвуковых волн обращения спина в молекулярных магнитах</i>	100
КАЧУЛИН Д. И., ГЕЛАШ А. А., ДЬЯЧЕНКО А. И., ЗАХАРОВ В. Е. <i>Взаимодействие когерентных структур на поверхности глубокой воды</i>	101
КАШИНА М. А., АЛАБУЖЕВ А. А. <i>Влияние свойств поверхности на колебания цилиндрической капли в переменном электрическом поле</i>	102
КИНЕЛОВСКИЙ С. А., МАЕВСКИЙ К. К. <i>Модель ударно-волнового воздействия на порошковые смеси</i>	103
КИСЕЛЕВ С. П., КИСЕЛЕВ В. П., ЗАЙКОВСКИЙ В. Н. <i>Моделирование сверхзвуковых течений газа в радиальных соплах</i>	103
КНЯЗЕВА А. Г. <i>Связанные модели синтеза покрытий на плоской подложке</i>	104
КОВТУНЕНКО П. В., ЕРМИШИНА В. Е. <i>Моделирование процесса образования вязких пальцев в течении жидкости в ячейке Хеле – Шоу</i>	105
КОВЫРКИНА О. А., ОСТАПЕНКО В. В. <i>Задача о подъеме из мелкой воды симметричного выпуклого тела</i>	106

КОЛОТИЛОВ В. А. <i>Использование схем высокого порядка точности в задачах моделирования вязкоупругих материалов в процессе нагружения</i> .	107
КОЛПАКОВ А. Г., РАКИН С. И. <i>Расчет НДС в соединенных упругих телах двухмасштабным методом</i>	108
КОНОН П. Н., ЕРМОЛЕНКО А. И. <i>О движении двух слоев вязких жидкостей на внешней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра</i>	109
КОНОН П. Н., ЖУК А. В., ШКАДОВ В. Я. <i>Неизотермическое возмущенное движение вязкого жидкого слоя на внешней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра</i>	110
КОРНЕВ В. М. <i>Деформационно-силовой подход в задачах усталости при охрупчивании материала</i>	111
КОРОБЕЙНИКОВ С. Н. <i>Анализ моделей изотропной гипопругости, основанных на использовании коротационных скоростей тензора напряжений Кирхгофа</i>	112
КОШЕЛЕВ К. Б., КРАПОШИН М. В., СТРИЖАК С. В. <i>Исследование динамики пузырьковой газовой струи в жидкости с помощью численной модели</i>	113
КРАВЧЕНКО А. С., ЖИЛИН А. А. <i>Математическое моделирование процесса генерации акустических волн в биканальной системе</i>	114
КРАЙКО А. Н. <i>Двумерные течения с прямой звуковой линией</i>	115
КРИЖАНОВСКИЙ В. В., МАЛИ В. И. <i>Моделирование тепловых полей сварки в SPS</i>	116
КУЗНЕЦОВ И. В., САЖЕНКОВ С. А. <i>Энтропийные решения ультра-параболического уравнения с сингулярной правой частью</i>	117
КУЛИКОВ И. М., ЧЕРНЫХ И. Г., ПРОТАСОВ В. А. <i>Гидродинамическое моделирование взрыва сверхновой типа Ia с использованием адаптивных вложенных сеток на суперЭВМ</i>	118
КУРГУЗОВ В. Д., ДЕМЕШКИН А. Г. <i>Применение нелокальных критериев прочности к расчету критических нагрузок для изгибаемых элементов конструкций с учетом нелинейности диаграммы деформирования материала</i>	119
КУЧЕР Н. А., ЖАЛНИНА А. А., МАЛЫШЕНКО О. В. <i>Об одной модели многокомпонентных химически реагирующих смесей вязких жидкостей</i> .	120
КУЯНОВА Ю. О., ПАРШИН Д. В. <i>Анализ изменения церебральной гемодинамики при деструктивных операциях</i>	121
КУЯНОВА Ю. О., ПАРШИН Д. В. <i>Моделирование виртуальной установки стента в церебральных сосудах с аневризмой</i>	122
ЛЕОНТЬЕВ Н. Е. <i>Одножидкостная модель течения суспензии в высокопористой среде</i>	123
ЛИПАТОВ И. И. <i>Распространение возмущений в пограничном слое в условиях слабого гиперзвукового взаимодействия</i>	124
ЛИПОВКА А. И., ДУБОВОЙ А. В., ПАРШИН Д. В. <i>Иерархия гиперупругих моделей при моделировании стенки церебральной аневризмы</i>	125

ЛУЦЕНКО Н. А., САЛГАНСКИЙ Е. А. <i>О моделировании процесса извлечения ценных металлов из металлосодержащих систем методом фильтрационного горения</i>	126
ЛьГОТИНА Е. В., БАЙКИН А. Н., ГОЛОВИН С. В. <i>Анализ чувствительности кривой падения давления при мини-ГРП от физических параметров пороупругого пласта</i>	127
ЛЯПИДЕВСКИЙ В. Ю., НЕВЕРОВ В. В. <i>Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине</i>	128
ЛЯПИДЕВСКИЙ В. Ю., ЯРОЩУК И. О., ХРАПЧЕНКОВ Ф. Ф., КУКАРИН В. Ф. <i>Волновой бор в многослойной мелкой воде</i>	129
МАКРИДИН Э. В., МАКАРЕНКО Н. И. <i>Периодические волны в нелинейных слабо связанных системах с дисперсией</i>	130
МАЛАМАНОВ С. Ю. <i>Численное моделирование взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей</i>	131
МАМАТЮКОВ М. Ю., ХЕ А. К., ПАРШИН Д. В., ЧУПАХИН А. П. <i>Вычисление энергии Уиллмора для кровеносного сосуда с церебральной аневризмой</i>	132
МАМОНТОВ А. Е., ПРОКУДИН Д. А. <i>Глобальная разрешимость начально-краевой задачи для уравнений типа Навье-Стокса-Фурье, описывающих течения смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей</i>	133
МАРКОВ В. Г., ПОПОВ С. В. <i>О противоположных спутных потоках с общими условиями сопряжения</i>	134
МАРЧУК А. Г. <i>Выбор коэффициентов подобия при моделировании волновых процессов на лабораторных установках</i>	135
МАРЫШЕВ Б. С., КЛИМЕНКО Л. С. <i>О транспортных процессах в сложных гидродинамических потоках</i>	135
МАТВЕЕВ А. Д. <i>Расчет композитных оболочек на основе образующих конечных элементов</i>	136
МЕГРАБОВ А. Г. <i>Законы сохранения и группа эквивалентностей</i>	137
МЕЛЕШКО С. В. <i>Взаимосвязь между групповым анализом и методом дифференциальных связей</i>	139
МИРЕНКОВ В. Е., САВЧЕНКО А. В. <i>Некорректные задачи механики деформируемого твердого тела</i>	139
МИШИН А. В. <i>Обоснование закона Дарси методом условных моментов</i>	140
МНУХИН Р. М., ДУДАРЕВ В. В. <i>К обратной задаче об определении упругих свойств полого цилиндра</i>	141
МОГИЛЕВСКИЙ Е. И., ШКАДОВ В. Я. <i>Влияние малого рельефа стенки на неустойчивость стекающей пленки</i>	142
МОШКИН Н. П. <i>Течение вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки</i>	143
МУЛЛЯДЖАНОВ Р. И. <i>Линейная устойчивость дальнего поля струи: эффекты непараллельности потока</i>	144

МУСАКАЕВ Н. Г., ХАСАНОВ М. К. Аналитическое решение задачи о гидратообразовании в пористой среде со скачком температуры на фронте фазового перехода	145
НЕДИН Р. Д. Анализ параметров начального напряженного состояния тонкой пластины с отверстиями при установившихся колебаниях	146
НЕЩАДИМ М. В. Обобщенные функционально инвариантные решения уравнений математической физики	147
ОКУЛОВ В. Л., ФУКУМОТО Я. Аналитические решения для винтовых вихрей	148
ОСТАПЕНКО В. В. О моделировании ондулярных боров	149
ПАНИН В. Е., ЕГОРУШКИН В. Е., ПАНИН С. В. Фундаментальная роль кривизны и механизм пластической дисторсии в пластичности и прочности твердых тел	150
ПАНКРАТОВ Л. С., КОНЮХОВ А. В., ВОЛОШИН А. С. Усредненная неравновесная модель двухфазного течения в пористой среде с двумя масштабами неоднородности	151
ПАНОВ А. В., ТУРОВ М. М. О первом члене асимптотики сферически симметричных движений газозвеси	152
ПАПИН А. А., ТОКАРЕВА М. А. Задача фильтрации вязкой жидкости в деформируемой пористой среде	153
ПАРФЕНОВА Е. С., КНЯЗЕВА А. Г. Моделирование волновых процессов, связанных с взаимодействием диффузии и механических напряжений в условиях обработки поверхности материала потоком частиц	154
ПАРШИН Д. В., ЛИПОВКА А. И., ЮНОШЕВ А. С. и ДР. Комплексное экспериментальное изучение материала стенок церебральных аневризм .	155
ПАХОМОВ М. А. Моделирование структуры течения и теплообмена в пузырьковом полидисперсном турбулентном потоке в трубе	156
ПЕНЕНКО В. В., ПЕНЕНКО А. В., ЦВЕТОВА Е. А., ПЬЯНОВА Э. А. Математические модели геофизической термогидродинамики и химии для природоохранных задач	157
ПЕРЕГУДИН С. И., ПЕРЕГУДИНА Э. С., ХОЛОДОВА С. Е. О крупномасштабных квазигеострофических динамических процессах во вращающемся слое электропроводящей жидкости с произвольным значением магнитного числа Рейнольдса	158
ПЕРЕГУДИН С. И., ПЕРЕГУДИНА Э. С., ХОЛОДОВА С. Е. Об интегрировании системы МГД уравнений, моделирующей волновой процесс во вращающейся жидкой среде при любых значениях магнитного числа Рейнольдса	159
ПЕТРОВ А. Г. Численные схемы без насыщения метода граничных элементов	161
ПЕТРОВ А. Г., КАЗАКОВА А. О. Метод граничных элементов без насыщения для решения задач течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса	161
ПЕТРОВА А. Г. Асимптотическое представление решения задачи о течении водного раствора полимеров вблизи критической точки	163

Пийе Г., Ерманюк Е. В., Маас Л. и др. <i>Волновые аттракторы в трехмерных областях</i>	164
Погорелова А. В., Земляк В. Л. <i>Влияние сил сжатия в плавающей пластине на ее прогибы при нестационарном движении тела в жидкости</i>	165
Погорелова А. В., Козин В. М. <i>Влияние подледного течения на волновое сопротивление СВПА</i>	166
Попов Н. С. <i>О нелокальных интегро-дифференциальных задачах диффузионных процессов</i>	166
Попова Т. С. <i>Задача сопряжения для жесткого и полужесткого включений в упругом теле</i>	167
Порошина А. Б. <i>Влияние сужения и расширения трубки на устойчивость упругих трубок конечной длины</i>	168
Проскурин А. В., Сагалаков А. М. <i>Эволюция нелинейных возмущений в магнитогидродинамических течениях</i>	169
Пухначев В. В. <i>Задача о деформации вязкого слоя</i>	170
Пяткина Е. В. <i>О равновесии двух пластин Кирхгофа – Лява, жестко соединенных вдоль отрезка</i>	171
Рафикова Г. Р., Хасанов М. К. <i>Моделирование процесса вытеснения метана из газогидратного пласта при инжекции двуокиси углерода</i>	172
Рашковский С. А., Якуш С. Е. <i>Волновые явления при взаимодействии жидкости с высокотемпературным расплавом</i>	173
Решмин А. И., Тепловодский С. Х., Трифонов В. В. <i>Расчет турбулентного течения в диффузоре с малыми углами раскрытия</i>	174
Розанова О. С., Турцынский М. К. <i>Об устойчивости положений равновесия матричной системы уравнений, ассоциированной с уравнениями газовой динамики</i>	175
Романов В. Г. <i>Обратная безфазовая задача для уравнений электродинамики</i>	176
Рудой Е. М., Фурцев А. И. <i>Вариационный подход к задаче о склейке упругих тел</i>	177
Рылов А. И. <i>Новые аналоги уравнений Чаплыгина</i>	177
Сальников М. В., Федосеев А. В., Сухинин Г. И. <i>Исследование сушки и заморозки сферических образцов пористых материалов с помощью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка</i>	178
Светов И. Е. <i>О разложении трехмерных тензорных полей</i>	179
Сенашов С. И., Гомонова О. В., Савостьянова И. Л. <i>Симметрии и законы сохранения в теории пластичности</i>	180
Сибин А. Н. <i>Исследование математической модели движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии</i>	181
Сизова С. С., Головин С. В. <i>Образец тезисов конференции</i>	182
Сираева Д. Т. <i>О каноническом виде инвариантных подмоделей ранга 2 уравнений гидродинамического типа</i>	183

СКОПИНЦЕВ А. М., БАЙКИН А. Н., КОВТУНЕНКО П. В., ДОНЦОВ Е. В. <i>Численное моделирование совместной динамики трещины гидроразрыва пласта и переноса проппанта (модель ENHANCED PSEUDO3D)</i>	184
СЛЮНЯЕВ А. В. <i>Фурье-портреты нелинейных морских волн</i>	185
СОЛОННИКОВ В. А. <i>О нестационарной задаче со свободной границей для вязких жидкостей разного типа: сжимаемой и несжимаемой</i>	186
СТЕПАНОВА И. В. <i>О неклассическом решении уравнений термодиффузионной конвекции</i>	187
СТУРОВА И. В., ТКАЧЕВА Л. А. <i>Движение внешней нагрузки по свободной поверхности жидкости в ледовом канале</i>	188
СУДАКОВ В. Г., ВОЕВОДИН А. В., МАМОНОВА Е. Е. <i>Вихревое течение над крылом самолета и управление им для улучшения несущих свойств</i>	189
ТАЛЫШЕВ А. А. <i>О построении моделей инвариантных относительно группы Пуанкаре</i>	190
УТКИНА Е. А., ПАРШИН Д. В., ЧУПАХИН А. П. <i>Моделирование течений вязкой жидкости в сложной сети каналов</i>	191
ФАНКИНА И. В. <i>Контактная задача для двух упругих тел, одно из которых содержит трещину</i>	191
ФЕДОРОВ В. Е. <i>Нелинейная самосопряженность и законы сохранения некоторых систем</i>	192
ФЕДОСЕЕВ А. В., САЛЬНИКОВ М. В., СУХИНИН Г. И. <i>Численное моделирование процессов тепло- и влагопереноса в глинистом пористом материале</i>	193
ФЕЦОВ С. С. <i>О двумерных течениях газа в гранулированных теплоаккумулирующих материалах с фазовыми переходами</i>	194
ФИЛИМОНОВ М. Ю. <i>Представление специальными рядами с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами решений краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений</i>	196
ФУРСИКОВ А. В. <i>О некоторых нелокальных задачах управления системами гидродинамического типа в пространстве гладких функций.</i>	197
ФУРЦЕВ А. И. <i>Предельные переходы по параметрам в задачах о контакте пластин и балок</i>	198
ХАБИРОВ С. В., ХАБИРОВ С. С. <i>Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу</i>	199
ХАБИРОВ С. В., ХАБИРОВ С. С. <i>Модели раскрытия трещины по решениям уравнений Навье–Стокса</i>	200
ХАСАНОВ М. К., СТОЛПОВСКИЙ М. В. <i>Математическая модель инжекции диоксида серы в пласт, насыщенный метаном и водой</i>	200
ХЕ А. К., ВАНИНА В. С., ЧЕРЕВКО А. А. и др. <i>Экспериментальное и численное исследование закрученных потоков в моделях кровеносных сосудов на основе данных МРТ</i>	201
ХЛУДНЕВ А. М. <i>Обратные задачи в механике композитных материалов</i>	202

ХМЕЛЕВ В. Н., БОБРОВА Г. А., ГОЛЫХ Р. Н. и ДР. <i>Исследование влияния ультразвукового воздействия на массоперенос в процессах, реализуемых на границе газ-жидкость</i>	202
ЧЕБОТНИКОВ А. В., ПАРШИН Д. В. <i>О способе изготовления лабораторных моделей церебральных сосудов из силикона</i>	203
ЧЕРЕВКО А. А., ЧУПАХИН А. П., ЯНЧЕНКО А. А. <i>Вихрь Овсянникова в классической и релятивистской газовой динамике</i>	204
ЧЕСНОКОВ А. А., НГУЕН Ч. Х. <i>Гиперболическая модель теории мелкой воды с учетом дисперсионных и вихревых эффектов</i>	205
ЧИРКУНОВ Ю. А. <i>Исследование нелинейной модели диффузии в неоднородной среде с нестационарным поглощением или источником</i>	206
ЧИРКУНОВ Ю. А. <i>Исследование обобщения модели Лейта феноменологической теории волновой турбулентности</i>	207
ЧИРКУНОВ Ю. А. <i>Исследование проблемы рассеяния локальными объектами (областями) в неоднородной среде со сферической стратификацией акустического поля, генерируемого внешними компактно распределенными источниками</i>	208
ЧИРКУНОВ Ю. А. <i>Исследование трехмерной модели Вестервельта нелинейной гидроакустики</i>	209
ЧИРКУНОВ Ю. А., БЕЛЬМЕЦЕВ Н. Ф. <i>Исследование трехмерной модели Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова нелинейной гидроакустики</i>	210
ЧИРКУНОВ Ю. А., ПИКМУЛЛИНА Е. О. <i>Исследование трехмерной модели теплового движения газа в сильно разреженном пространстве</i>	211
ЧИРКУНОВ Ю. А., СКОЛУБОВИЧ Ю. Л. <i>Исследование нелинейной трехмерной диффузионной модели пористой среды</i>	212
ЧУМАКОВ Ю. А., КРЫЛОВА Т. А. <i>Влияние условий нагрева и механического нагружения на фазовый состав продукта в реакционной ячейке при синтезе пористых керамических композитов</i>	213
ЧУХНО В. И., УСОВ Э. В., БУТОВ А. А. <i>Исследование особенностей применения различных численных схем для расчета перемещения пленки расплава по поверхности тепловыделяющего элемента</i>	214
ШАПЕЕВ В. П., ГОЛУШКО С. К., БРЫНДИН С. К., БЕЛЯЕВ В. А., <i>Применение метода коллокации и наименьших квадратов к решению задач механики изотропных пластинок</i>	215
ШАФАРЕВИЧ А. И. <i>Локализованные асимптотические решения гиперболических систем. Волновые фронты и лагранжесвы многообразия.</i>	216
ШЕЛУХИН В. В., НЕВЕРОВ В. В. <i>Реология и микроструктура концентрированных суспензий</i>	217
ШЕР Е. Н., ЧЕРНИКОВ А. Г. <i>Моделирование распространения сейсмических волн в блочных горных породах в условиях внешнего сжатия</i>	218
ШЕФЕР И. А. <i>Влияние теплового граничного режима на устойчивость двухслойного течения с испарением</i>	219
ШИШМАРЕВ К. А., ХАБАХПАШЕВА Т. И., КОРОВКИН А. А. <i>Колебания ледового покрова в канале под действием внешних сил</i>	220

ШМАКОВА Н. Д., ПЕНЬКОВСКАЯ Н. А., САНТУЧЧИ С., ЕРМАНЮК Е. В. <i>Течение пены в ячейке Хеле-Шоу</i>	221
ШМАКОВА Н. Д., ФЛЕР Я.-Б. <i>Нелинейные эффекты внутренних волн, генерируемых горизонтальными колебаниями тора</i>	222
ШМИДТ А. В. <i>Автомодельное решение задачи о течении в дальнем закрученном безымпульсном турбулентном следе</i>	223
ШУТОВ А. В., КАЙГОРОДЦЕВА А. А. <i>Определение оптимальной формы образцов на кручение для определения параметров анизотропной упругопластичности</i>	224
ШУТОВ А. В., КЛЮЧАНЦЕВ В. С. <i>Применение метода гидродинамики сглаженных частиц для решения задач механики твердого тела</i>	225
ШУТОВ А. В., ТАГИЛЬЦЕВ И. И. <i>Эффективное интегрирование эволюционных уравнений для волокнистого тела Максвелла</i>	226
ЩЕРБАКОВ В. В. <i>Метод исчезающей вязкости в задаче о распространении трещин в упругих телах</i>	227
ЯВОРСКИЙ Н. И. <i>Течение Дженсффри-Гамеля для точечного источника</i>	227
ЯГОДНИЦЫНА А. А., КОВАЛЕВ А. В., ПАРШИН Д. В. и др. <i>Экспериментальное исследование эмболизации микроканала</i>	228
ЯКОВЕНКО С. Н., ЕВТУШОК Г. Ю., БОЙКО А. В., ГАВРИЛОВ Н. В. <i>Моделирование течений с обрушением внутренних волн, генерируемых препятствием</i>	229
ЯНЧЕНКО А. А. <i>Численное моделирование течения сжимаемой жидкости сквозь упругий пористый скелет</i>	230
ЯНЬКОВА Г. С., ЧЕРЕВКО А. А., ХЕ А. К. и др. <i>Моделирование гемолитвородинамики на примере гидроцефалии с использованием методов MPT</i>	231
ANCO S. C. <i>New invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow</i>	232
ANTONTSEV S. N., DE OLIVEIRA H. B., KHOMPYSH K. <i>Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous incompressible fluid</i>	233
GAVRILYUK S. L. <i>Structure of the hydraulic jump in convergent radial flows</i>	234
GOLUBYATNIKOV V. P. <i>Periodic trajectories in gene networks models</i>	235
GREBENEV V. N., WACŁAWCZYK M., OBERLACK M. <i>Conformal invariance of the zero-vorticity isolines in 2D turbulence</i>	236
KONOPELCHENKO B. <i>Universal parabolic regularization of the gradient catastrophes for the Burgers-Hopf equation and Jordan chain</i>	237
KOSHKARBAYEV N., TOREBEK B. <i>On a mathematical model of breaking water wave</i>	238
KUZAKOV D. A., LAVRENTIEV M. M., MARCHUK A. G. <i>Reconstruction of tsunami source by a part of wave time series before the first maximum</i>	238
KUZNETSOV E. A. <i>Expansion of the strongly interacting superfluid Fermi gas: symmetry and self-similar regimes</i>	239
LAVRENTIEV M. M., LYSKOV K. F., MARCHUK A. G. ET AL. <i>Dependence of tsunami wave maximal heights along a coastline on the source location</i>	240

PLUMACHER D., OBERLACK M. <i>On a New Infinite Dimensional Hierarchy of Multipoint Characteristic Functions of Turbulence</i>	241
SIDOROV N., SIDOROV D., LI Y. <i>Basins of attraction of nonlinear systems' equilibrium points: stability, branching and blow-up</i>	242
STOYANOVSKAYA O. P., GLUSHKO T. A., OKLADNYKOV F. A., SNYTNIKOV V. N. <i>Computing of intense inter-phase interaction in gas-solid mixtures for Smoothed Particle Hydrodynamics: uniform method for Epstein and Stokes drag modes</i>	243
TANI A. <i>Classical solvability of radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell: viscous normal stress effects and wetting film effects</i>	244
YAKOVENKO S. N., CHANG K. C., LIN C. <i>Studies of free surface evolution in a dam-break flow above horizontal bottom</i>	245
Авторский указатель	245

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА МАССЫ

М. М. Абеннов

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы

Пусть $t \in [0, T]$ – время, $\Omega \subset R^3$ – односвязная ограниченная область, заполненная без пустот жидкостью. Если $h(t, x, y, z)$ – заданная интенсивность источников массы, то, как известно [1], уравнение баланса массы в области $G = [0, T] \times \Omega \subset R^4$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_3)}{\partial z} = h(t, x, y, z). \quad (1)$$

Здесь $\rho(t, x, y, z)$, $V_k(t, x, y, z)$, $k = \overline{1, 3}$, – неизвестные плотность и компоненты скорости жидкости.

Определение 1. Разрешающими параметрами уравнения (1) называются безразмерные скаляры (всего – 12, из них свободных – 10), связанные следующими соотношениями:

$$\delta_1 \delta + \alpha_1 \alpha - \beta_1 \beta - \gamma_1 \gamma = 0; \quad \delta_0 + \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 1.$$

Определение 2. Четырехмерной регулярной функцией, заданной в области G называется вектор-функция $U = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ с компонентами, удовлетворяющими обобщенным условиям Коши – Римана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial u_3}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial u_3}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial u_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

Бесконечномерное пространство регулярных четырехмерных функций является всюду плотным подмножеством пространства четырехмерных векторов с непрерывно-дифференцируемыми компонентами в области G . Далее пусть ρ_0, c, L – характерные плотность, скорость и размер течения.

Теорема. Уравнение (1) имеет континуум точных решений вида:

$$\rho(t, x, y, z) = \delta_1 \rho_0 u_0 \left(\frac{\delta c t}{L}, \frac{\alpha x}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\gamma z}{L} \right) + \delta_0 \int_0^t h(\tau, x, y, z) d\tau, \quad (2)$$

$$\rho V_1(t, x, y, z) = \alpha_1 \rho_0 c u_1 \left(\frac{\delta c t}{L}, \frac{\alpha x}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\gamma z}{L} \right) + \alpha_0 \int_0^x h(t, \xi, y, z) d\xi, \quad (3)$$

$$\rho V_2(t, x, y, z) = -\beta_1 \rho_0 c u_2 \left(\frac{\delta c t}{L}, \frac{\alpha x}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\gamma z}{L} \right) + \beta_0 \int_0^y h(t, x, \eta, z) d\eta, \quad (4)$$

$$\rho V_3(t, x, y, z) = -\gamma_1 \rho_0 c u_3 \left(\frac{\delta c t}{L}, \frac{\alpha x}{L}, \frac{\beta y}{L}, \frac{\gamma z}{L} \right) + \gamma_0 \int_0^z h(t, x, y, \zeta) d\zeta. \quad (5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.

УСТОЙЧИВОСТЬ И АКУСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ С ГАЗОВЫМИ ЗАРОДЫШАМИ ПРИ ПОВЫШЕНИИ ДАВЛЕНИЯ

У. О. Агишева¹, И. И. Вдовенко², М. Н. Галимзянов^{1,2,3}

¹Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

²Башкирский государственный университет, Уфа

³Уфимский государственный авиационный технический университет

Из литературы известно, что физико-химические свойства жидкостей в метастабильном состоянии в основном определяются наличием в их составе различных включений, например, газовых пузырьков или твердых частиц [1]. В настоящей работе, которая является продолжением исследований из [2, 3, 4], рассмотрены особенности распространения звука и развития неустойчивости в перегретой жидкости, содержащей газовые зародыши в зависимости от величины ее перегретости, определяемой как $\Delta T_0 = T_0 - T_s(p_0)$.

Отметим, если в жидкости газовые зародыши отсутствуют, то состояние равновесия парогазожидкостной системы определяется тремя параметрами, в качестве которых можно взять, например, объемное содержание пузырьков α_0 , их радиус a_0 и давление в жидкой фазе p_0 (в качестве последнего параметра можно взять температуру T_0). При наличии в системе газовых зародышей ее состояние определяется четырьмя параметрами (значение параметров α_0 , a_0 , p_0 , T_0 , например).

В работе изучена динамика слабых гармонических возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо пара воды присутствует инертный газ (например, воздух), не участвующий в фазовых переходах. Проанализированы карты зон устойчивости рассматриваемых систем в зависимости от величины перегретости жидкости на плоскости «объемное содержание – радиус пузырьков» с повышением равновесного давления от 0.1 до 10 МПа. Исследовалось влияние начального перегрева (от сотых долей до одного градуса) и повышение давления на дисперсию гармонических волн, а также зависимость инкремента от радиуса пузырьков для неустойчивых систем.

Работа авторов У. О. Агишевой и М. Н. Галимзянова поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию на 2017-2019 годы (№ 0246-2019-0052). Работа И. И. Вдовенко частично поддержана грантом РФФИ (№ 17-41-020582-р_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред*. М.: Наука, 1987. Т. 1, 2.
2. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И., Хабеев Н. С. *Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками*. ИФЖ. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921.
3. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. *Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при прямом их падении*. ТВТ. 2019. Т. 57, № 1. (в печати)
4. Шагапов В. Ш., Галимзянов М. Н., Вдовенко И. И. *Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при «косом» их падении*. ТВТ. 2019. Т. 57, № 2. (в печати)

ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ КАНАЛА ВИХРЕВОЙ ТРУБЫ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ВОЗДУХА

Б. Р. Адиуллин¹, К. И. Михайленко²

¹Уфимский государственный авиационный технический университет

²Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Вихревая труба – простое устройство без движущихся частей, производящее разделение подаваемого воздуха на два потока, которые имеют температуру выше и ниже исходной. Данное устройство впервые описано Ж. Ж. Ранком и получило известность после работы Р. Хилша [1]. Однако до настоящего времени авторами проводимых исследований и обзоров отмечается, что механизм наблюдаемого разделения воздуха на два потока разной температуры остается невыясненным [2].

Так как прямое моделирование турбулентного потока воздуха в вихревой трубе связано с большими затратами ресурсов на программирование и вычисление [3], вычислительные эксперименты проводились с использованием хорошо зарекомендовавшей себя открытой интегрируемой платформы openFOAM, использующей метод конечных объемов. Для представленной задачи выбран решатель sonicFoam, предназначенный для моделирования звуковых течений с ударными волнами. Именно такие режимы течения реализуются в канале вихревой трубы [4].

Ранее продемонстрирована [4, 5] выраженная зависимость эффективности температурного разделения на выходе из вихревой трубы от изменения ряда геометрических параметров. При этом так как механизм разделения неизвестен, предсказать результат не представляется возможным. Поэтому для исследования влияния соответствующего параметра необходимо провести серию экспериментов.

В представленной работе проводится исследование влияния варьирования длины основной части противоточной вихревой трубы на величину температурного разделения. Для исследованных длин показано, что температура на горячем выходе увеличивается пропорционально длине. В то же время на холодном выходе зависимость температуры от длины трубы выражена значительно слабее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hilsch R. *The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process*. Review of Scientific Instruments. 1947. V. 18. P. 108–113.
2. Subudhi S., Sen M. *Review of Ranque–Hilsch vortex tube experiments using air*. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. V. 52. P. 172–178.
3. Марьин Д. Ф., Михайленко К. И., Хазиев Л. Х. *Прямое численное моделирование эффекта Ранка*. Тр. междунар. конф. «Параллельные вычислительные технологии-2011». Челябинск: изд. центр ЮУрГУ. 2011. С. 539–547.
4. Ронжин Р. П., Михайленко К. И. *О зависимости производства холодного воздуха от размера площади горячего выхода вихревой трубы*. Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 29–35.
5. Борисоглебский И. К., Метусова М. В., Михайленко К. И. *Зависимость эффекта Ранка–Хилша от геометрии холодного выхода*. Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 52–58.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ФЛЮИДОУПОР ПО ТРЕЩИНАМ ГИДРОРАЗРЫВА

А. В. Аксаков, В. А. Байков, О. С. Борщук, С. И. Коновалова

ООО «РН-УфаНИПИнефть», г. Уфа

В работе представлена модель переноса жидкости через непроницаемую для флюида глину, основанная на предположении о потере сплошности флюидоупора вследствие образования трещин и дальнейшего движения по ним флюида. Математическая модель развития трещины включает уравнения гидродинамики и линейной теории упругости, описывающие течение жидкости в трещине и деформированное состояние среды, условия их сопряжения, а также начальные и граничные условия.

Закон сохранения массы для трещины, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, в приближении смазочного слоя имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\beta w^2}{4\mu} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta w^3}{12\mu} \frac{\partial p_e}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta w^3}{12\mu} \frac{\partial p_e}{\partial y} \right) = Q_w, \quad (1)$$

где w – ширина раскрытия трещины, $\beta = (\rho_f - \tilde{\rho}_r)g$ – градиент силы плавучести, μ – вязкость жидкости, ρ_f – плотность жидкости, $\tilde{\rho}_r$ – обобщенная плотность пород, $p_e = p - \sigma_{\min}$ – избыточное давление, p – давление в трещине, $\sigma_{\min}$ – смыкающие напряжения в пласте.

Уравнения равновесия упругого тела с учетом условий сопряжения на границе трещины методом граничных интегральных уравнений сводятся к двумерному интегральному уравнению на раскрытие трещины [1]:

$$p_e = -\frac{G}{4\pi(1-\nu)} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial z'} \right) dy' dz', \quad (2)$$

где $r = \sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2}$, ν – коэффициент Пуассона, Ω – область, занятая трещиной, G – модуль сдвига. Интеграл в уравнении (2) является сингулярным, имеется ввиду его главное значение в смысле Коши.

Начальные и граничные условия – начальное распределение избыточного давления в трещине, расход жидкости в основании трещины и условие непротекания по периметру трещины:

$$p_e(z)|_{t=0} = p_0(z) - \sigma_{\min}(z), q|_{z=0} = q(t), q|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрены асимптотические приближения полученной модели, проведены численные эксперименты. Показано, что квазистационарный режим может быть описан известным решением для узкой трещины в бесконечном теле под действием постоянного давления, имеющей в поперечном сечении эллиптическую форму [2]. Получены аналитические решения, связывающие геометрические параметры трещины с расходом жидкости и давлением в трещине, согласующиеся с численными экспериментами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bui H. D. *An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape*. J. Mech. Phys. Solids. 1977. V. 25. P. 29–39.
2. Снеддон И. *Преобразования Фурье*. М.: ИЛ, 1955.

НАБЕГАННИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ОТ БЕРЕГА «СТУПЕНЬКИ» НА МЕЛКОЙ ВОДЕ НАД НАКЛОННЫМ ДНОМ

А. В. Аксенов¹, С. Ю. Доброхотов², К. П. Дружков¹

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

В безразмерных переменных система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [1]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \eta_x &= 0, \\ \eta_t + [(\eta + h(x))u]_x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $h(x)$ – толщина невозмущенного слоя жидкости, $u = u(x, t)$ – средняя по глубине горизонтальная скорость, $\eta = \eta(x, t)$ – отклонение свободной поверхности. Профиль дна задается соотношением $z = -h(x)$ (z – вертикальная координата).

При профиле дна $z = -x$ система уравнений (1) точечным преобразованием [2]

$$\begin{aligned} x &= y - N + \frac{1}{2}U^2, & t &= \tau + U, \\ u &= U, & \eta &= N - \frac{1}{2}U^2 \end{aligned}$$

приводится к линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} U_\tau + N_y &= 0, \\ N_\tau + (yU)_y &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для линеаризованной системы уравнений (2) в работе [2] был представлен содержательный класс точных решений в алгебраических функциях, локализованных в окрестности движущейся по оси y точки.

В настоящей работе получено и исследовано точное решение рассматриваемой системы уравнений, которое соответствует распространению возмущения свободной поверхности в форме «ступеньки». Проведен анализ поведения решения при отражении возмущения от берега. Рассмотрена связь профиля отраженной волны со спектром оператора Гильберта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stoker J. J. *The formation of breakers and bores. The Theory of Nonlinear Wave Propagation in Shallow Water and Open Channels*. Communications on Pure and Applied Mathematics. 1948. V. 1, № 1. P. 1–87.
2. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б. *Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$* . Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, № 1. С. 185–186.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

А. В. Аксенов^{1,2}, К. П. Дружков^{1,2}

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

²Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном имеет следующий вид [1]

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + vv_y + \eta_x &= 0, \\v_t + uv_x + vv_y + \eta_y &= 0, \\ \eta_t + ((\eta + h(x, y))u)_x + ((\eta + h(x, y))v)_y &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $z = -h(x, y)$ – профиль дна (z – вертикальная координата), $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ – компоненты средней по глубине горизонтальной скорости, $\eta = \eta(x, y, t)$ – отклонение свободной поверхности.

В настоящей работе найдены все гидродинамические законы сохранения для всевозможных профилей дна. Приведены соответствующие классифицирующие уравнения. Получен новый базовый закон сохранения, дополняющий закон сохранения массы. Аналогичный дополнительный закон сохранения имеется и в одномерном случае [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00890) и Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (стипендиат К.П. Дружков).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. *Волны на воде. Математическая теория и приложения*. М.: Гостехиздат. 1959.
2. Aksenov A. V., Druzhkov K. P. *Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom*. Journal of Physics: Conf. Series. 2016. V. 722. P. 1–7.

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛИНИИ КОНТАКТА НА ПОВЕДЕНИЕ ЗАЖАТОЙ КАПЛИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ПОДЛОЖКИ

А. А. Алабужев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Пермский государственный национальный исследовательский университет

В работе рассматривается поведение капли жидкости, зажатой между двух параллельных твердых поверхностей и окруженной другой жидкостью. В равновесии капля имеет форму кругового цилиндра с прямым краевым углом между боковой поверхностью капли и твердой подложкой. Одна из поверхностей совершает гармонические колебания в перпендикулярном направлении. В частотном случае подобная геометрия представляет собой капиллярный мост (liquid bridge), один из торцов которого осциллирует. Такие задачи рассматривались, например, в работах [1–3]. Интерес к этим исследованиям вызван не только решениями фундаментальных проблем, но и технологическими задачами, например, выращивание кристаллов или нанесение лакокрасочных покрытий.

В перечисленных выше работах предполагалось либо неподвижность линии контакта трех сред, либо постоянство краевого угла, что существенно ограничивает применимость данных результатов. В данной работе предполагается, что скорость движения линии контакта пропорциональна отклонению от положения равновесия [4]. Несмотря на использование модели невязкой жидкости, применение данного условия приводит к затуханию колебаний, которое объясняется взаимодействием линии контакта с твердой поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis A. M. J., Frenkel A. L. *Cylindrical liquid bridges squeezed between parallel plates: Exact Stokes flow solutions and hydrodynamic forces*. Phys. Fluids A. 1992. V. 4, №6. P. 1105–1109.
2. Dodds S., Carvalho M. S., Kumar S. *Stretching and slipping of liquid bridges near plates and cavities*. Phys. Fluids. 2009. V. 21. 092103.
3. Vincent L., Duchemin L., Le Dizes S. *Forced dynamics of a short viscous liquid bridge*. J. Fluid Mech. 2014. V. 761. P. 220–240.
4. Hocking L. M. *The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary*. J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 253–266.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МГД ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Г. В. Алексеев^{1,2}, Р. В. Бризицкий^{1,2}

¹Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

²Дальневосточный федеральный университет

В настоящей работе исследована задача граничного управления для стационарных уравнений МГД, со смешанными краевыми условиями для магнитного поля. Роль управлений играют нормальная и тангенциальная компоненты магнитного поля, заданные на открытых участках Σ_τ и Σ_ν границы Σ . В отличие от классических работ, разрешимость задачи управления доказана в случае, когда управления принадлежат специальным подпространствам пространств $L^2(\Sigma_\tau)$ и $L^2(\Sigma_\nu)$ ³.

Краевая задача для уравнений МГД рассматривается в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Sigma = \overline{\Sigma}_\tau \cup \overline{\Sigma}_\nu$:

$$\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} = \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\nu_1 \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} + \text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{u} = \nu_1 \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Sigma, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = q, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Sigma_\tau, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{q} \text{ на } \Sigma_\nu. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$ – векторы скорости и магнитного поля, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/\rho_0$, $p = p'/\rho_0$, где $\mathbf{E}'$ – электрическое поле, p' – давление, $\rho_0 = \text{const}$ – плотность жидкости, $\text{rot} = \mu/\rho_0$, $\nu_1 = 1/\rho_0 \sigma = \text{rot} \nu_m$, ν и ν_m – постоянные коэффициенты кинематической и магнитной вязкости, σ – постоянная электропроводность, μ – постоянная магнитная проницаемость, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Σ , $\mathbf{j}$ – плотность сторонних токов, $\mathbf{f}$ – объемная плотность внешних сил, $\mathbf{g}$, q , $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}$ – функции, заданные на участках Σ_τ и Σ_ν границы Σ .

Все величины в (1)–(3) являются размерными и записаны в системе СИ. В частном случае, когда $q = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, граничные условия в (3) для магнитного поля $\mathbf{H}$ отвечают часто встречающейся в приложениях ситуации, когда участок границы Σ_τ является идеальным проводником, а участок Σ_ν – идеальный диэлектрик (см. подробно в [1, 2]).

В случае, когда $q \in H^s(\Sigma_\tau)$ и $\mathbf{q} \in H^s(\Sigma_\nu)$ ³, $s > 0$, для экстремальной задачи выведены системы оптимальности и получены оценки устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданных функций задачи (1)–(3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Alekseev G. V., Brizitskii R. V. *Solvability of the boundary value problem for stationary magnetohydrodynamic equations under mixed boundary conditions for the magnetic field*. Apl. Math. Let. 2014. V. 32. P. 13–18.
2. Алексеев Г. В. *Смешанные краевые задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости*. ЖВМ. 2016. Т. 56, № 2. С. 1441–1454.

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И МАСС В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Г. В. Алексеев^{1,2}, Д. А. Терешко¹

¹Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

²Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

В последние годы интенсивно развивается новое направление в тепломассопереносе, связанное с разработкой технологий дизайна специальных функциональных устройств, служащих для управления потоками тепла и масс. Одним из важнейших таких функциональных тепловых устройств является оболочка, представляющая собой область в виде сферического слоя, заполненного неоднородной и анизотропной в общем случае средой. В зависимости от поставленной цели указанная тепловая оболочка может служить для тепловой маскировки любого объекта, помещенного внутрь ее, либо для концентрирования или перенаправления потока тепла [1, 2].

Экспериментальные исследования в этой области направлены на изучение возможностей управления тепловыми потоками с помощью специально разрабатываемых новых материалов. Теоретические исследования направлены на разработку методов дизайна физических устройств и приводят к необходимости решения обратных задач для моделей тепломассопереноса. Указанные задачи заключаются в выборе параметров среды, заполняющей оболочку с заданной топологией, исходя из некоторой дополнительной информации о создаваемом поле.

Ранее задачи дизайна функциональных тепловых устройств были рассмотрены в ряде работ, где предложен метод построения точных решений, основанный на методе Фурье [1]. Однако этот метод применим лишь при выполнении жестких упрощающих предположений, обеспечивающих построение в явном виде точного решения прямой задачи теплопереноса. Целью настоящего исследования является разработка эффективного численного алгоритма решения обратных задач дизайна устройств управления потоками тепла и масс в сплошных средах и анализ результатов вычислительных экспериментов. Для этого используется оптимизационный метод (см., например, [2]). В качестве процедуры численной оптимизации используется метод роя частиц по схеме, предложенной в [3] для решения задач тепловой маскировки. Анализ результатов вычислительных экспериментов выявил важные свойства оптимальных решений, на основе которых предложены простые правила проектирования эффективных и легко реализуемых систем управления потоками тепла и масс.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований ДВО РАН «Дальний Восток» (проект 18-5-064).

ЛИТЕРАТУРА

1. Guenneau S., Amra C., Veynante D. *Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux*. Opt. Express. 2012. V. 20. P. 8207–8218.
2. Алексеев Г. В. *Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе*. Владивосток: Дальнаука, 2016.
3. Алексеев Г. В., Левин В. А., Терешко Д. А. *Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела*. Докл. АН. 2017. Т. 472, № 4. С. 398–402.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. И. Аллилуева

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Рассматриваются асимптотические решения задачи Коши для уравнений МГД и газовой динамики, линеаризованных на гладком течении. В обоих случаях начальные условия выбираются локализованными в малой окрестности точки, кривой, либо двумерной поверхности. Построена и обоснована асимптотика решения; обсуждаются различные эффекты, описываемые асимптотическими формулами (разделение решения на различные моды, взаимодействие альфвеновских мод для уравнений МГД, фокусировка волн для уравнений газовой динамики, возможность роста возмущения со временем, влияние постоянной и переменной кратности характеристик).

КАРЛЕМАНОВСКАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЯМ НАВЬЕ – СТОКСА СЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Е. В. Амосова

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток
Дальневосточный федеральный университет*

При анализе задачи управляемости для уравнений Навье – Стокса сжимаемой среды требуются карлемановские оценки соответствующей сопряженной системы. В данной статье выводится карлемановская оценка решений уравнений, сопряженных уравнениям неразрывности и импульса в механике сплошной среды в начальный момент времени. Карлемановская оценка – это оценка с сингулярным весом, вид которого зависит от типа дифференциального уравнения и краевого условия. В работе предложен метод получения карлемановской оценки для гиперболо-параболической системы с одной и той же весовой функцией. Метод основан на получении априорных оценок в пространстве весовых функций для регуляризованной системы дифференциальных уравнений на интервалах монотонности сингулярной весовой функции, с последующим предельным переходом.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, $T > 0$, $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma = (0, T) \times \partial\Omega$ – боковая поверхность цилиндра Q . Рассмотрим задачу для гиперболо-параболической системы с данными Коши для уравнения переноса:

$$\partial_t \tau + (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau) - k \tau \operatorname{div} \mathbf{u} = f, \quad \tau|_{t=T} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t f + \Delta f = g + \Delta \tau, \quad (\nabla f \cdot \mathbf{n})|_{\Sigma} = 0; \quad \int_{\Omega} f \, dx = 0. \quad (2)$$

Здесь $k \geq 0 = \text{const}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, g – заданы. Система (1), (2) является сопряженной задачей к уравнениям неразрывности и импульса в механике сплошной среды.

Пусть $s \geq -5/2$. Тогда существует $\hat{\lambda} > 0$ такое, что при любом $\lambda > \hat{\lambda}$ для функций τ , f , g , удовлетворяющих (1), (2) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_Q \varphi^{2s-2} \left(\lambda^{-1} |\partial_t f|^2 + |\partial_{x_i x_j}^2 f|^2 + \lambda \varphi^2 |\nabla f|^2 + \lambda^4 \varphi^4 |f|^2 \right) e^{-2\alpha\lambda} dxdt + \\ & + \int_Q \varphi^{2s} \left((\lambda\varphi)^{-2} |\partial_{x_i x_j}^2 \tau|^2 + \lambda^{-1} |\partial_t \tau|^2 + \lambda^{-1} |\Delta \tau|^2 + |\nabla \tau|^2 + \lambda^3 \varphi^3 |\tau|^2 \right) e^{-2\alpha\lambda} dxdt \leq \\ & \leq c \int_Q \varphi^{2s} |g|^2 e^{-2\alpha\lambda} dxdt + c \int_{Q^{\omega'}} \lambda^4 \varphi^{2s+2} |f|^2 e^{-2\alpha\lambda} dxdt, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

где $Q^{\omega'} = (0, T) \times \omega'$, $\omega' \subset \subset \omega$, постоянная c не зависят от λ , f , τ и g .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 14-11-00079)

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосова Е. В. Карлемановская оценка для гипербола-параболической системы. Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 2. С. 202–215.

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Е. В. Амосова

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнений Навье–Стокса, описывающих движения вязкой однородной несжимаемой жидкости

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in Q, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}|_{\Sigma} = 0, \quad (t; \mathbf{x}) \in \Sigma, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

где $\mathbf{f}$ – внешние массовые силы, Δ – оператор Лапласа, ∇ – оператор градиента, причем $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $\mathbf{v}_0 \in L^2(\Omega)$, $(\mathbf{v}_0, \nabla q) = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega)$.

Известно, что в двумерном случае существует единственное решение задачи (1), (2) класса Хопфа [1]. В трехмерном случае единственность «очень слабого решения» установлена либо на малом промежутке времени [2], либо в более узком пространстве, чем в том, в котором установлено существование [3]. В этом случае элемент $\mathbf{v}$ называют решением задачи (1), (2) класса Хопфа [4]. Про функцию давления ничего не сказано [5, с.214].

Слабым решением задачи (1), (2) назовем пару $(\mathbf{v}; p)$ такую, что $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega; \text{Ker } \{\text{div}\}))$, $p \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ в случае $n = 2$ и $p \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ в случае $n = 3$, $(p, 1) = 0$, удовлетворяющую интегральным тождествам: $(\text{div } \mathbf{v}, q) = 0$,

$$\langle \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + (\text{rot } \mathbf{v}, \text{rot } \mathbf{u}) - (p, \text{div } \mathbf{u}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)},$$

для произвольных $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $q \in L^2(Q)$ и $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ почти всюду в Ω .

На основе регуляризованной задачи, учитывающей релаксацию поля скоростей в соленоидальное, обосновано существование функции давления почти всюду в рассматриваемой области для слабых решений. С помощью предложенной регуляризации доказано существование слабых решений исходной задачи без ограничений малости на исходные данные. В двумерном случае доказана теорема единственности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. *Решение «в целом» краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных*. Докл. АН СССР. 1958. Т. 123, № 3. С. 427–429.
2. Ладыженская О. А., Киселев А. А. *О существовании единственности решений нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. С. 655–680.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Ж.-Л. *Неоднородные граничные задачи и их приложения*. М.: Мир, 1971.
4. Hopf E. *Über die Anfangswertaufgabe für die Hydrodynamischen Grundgleichungen*. Math. Nachr. 1951. V. 4. P. 213–231.
5. Темам П. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ*. М.: Мир, 1981.

ДВУМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭНЕРГИИ

В. К. Андреев, Е. Н. Лемешкова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Изучается задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в плоском канале с твердыми стенками, на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. На общей поверхности раздела потоки тепла не равны между собой и учитывается изменение межфазной энергии, которое характеризуется параметром E . В общем случае для большинства жидких сред этот параметр мал. Однако для маловязких жидкостей и для некоторых криогенных сред, например жидкий CO_2 , этот параметр надо учитывать. Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Возникающая сопряженная краевая

задача является нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль канала. Применение к ней тау-метода показывает, что она имеет три различных решения. В случае, когда отсутствует влияние межфазной энергии на динамику движения жидкостей внутри слоев ($E = 0$), найдено два решения. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении [1]. Для каждого из решений построены характерные структуры течения и проведен анализ влияния безразмерных параметров на интенсивность возникающих течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00229).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К. *Свойства решений сопряженной нелинейной краевой задачи, описывающей стационарное течение двух жидкостей в канале*. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2018: Материалы науч. конф. СПб., 2018. С. 18–23.

ДВУМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ЦИЛИНДРЕ С УЧЁТОМ ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. К. Андреев^{1,2}, Е. П. Магденко^{1,2}

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

²Институт математики и фундаментальной информатики СФУ, Красноярск

Специфика явлений, происходящих на границе раздела фаз, связана с существованием в межфазном переходном слое избыточных по отношению к объемным фазам энергии и энтропии поверхностной фазы [1], однако энергообмен между объемными и поверхностными фазами изучен недостаточно. Согласно проведенным расчетам [2] при достаточно высоких температурах – в условиях, когда вязкость и теплопроводность обычных жидкостей существенно уменьшается, а также для жидкостей с пониженной вязкостью (например, для некоторых криогенных жидкостей, таких как жидкий CO_2) эффекты, связанные с теплотой образования межфазной поверхности, могут оказать значительное воздействие на динамику.

В работе исследуется задача о двумерном стационарном течении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с твердой внешней стенкой и общей подвижной недеформируемой поверхностью раздела. При этом массовые силы отсутствуют. Температура в жидкостях распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Граница раздела обладает поверхностным натяжением, которое линейно зависит от температуры. Учитывается полное энергетическое условие на границе раздела. С математической точки зрения возникающая начально-краевая задача является нелинейной и обратной относительно

градиентов давлений вдоль оси цилиндра. Для решения задачи применяется модифицированный метод Галеркина. Численно установлено, что полученные решения с уменьшением числа Марангони сходятся к решениям задачи о ползущем течении. Построены характерные структуры течения. Исследовано влияние числа Марангони и параметра, характеризующего изменение межфазной энергии, на интенсивность возникающих течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00229).

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамсон А. *Физическая химия поверхностей*. М.: Мир, 1979.
2. Torres F. E., Helberzheimer E. *Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles*. Phys. Fluids A. 1993, V. 5, № 3. P. 537–549.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ТРЁХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Б. Д. Аннин, Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Модель упругой трансверсально-изотропной среды часто используют для описания слоистых композитов и слоистых горных пород [1]. Учет влияния температурного поля на деформации и распространение упругих волн также является важной задачей. Исследование динамических процессов в трансверсально-изотропных средах имеет большое значение в задачах сейсмологии и геофизики.

В работе рассмотрены три варианта представления общего решения трехмерных динамических уравнений трансверсально-изотропной термоупругой среды. Наиболее простым и эффективным оказывается представление с помощью функций напряжений и смещений, при которых тождественно выполняются уравнения движения сплошной среды. В случае динамики для упрощения уравнений существенным является выполнение условия Карриера – Гассмана, налагающего одно ограничение на модули упругости.

В прямоугольной системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$, компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ связаны соотношениями Дюгамеля – Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\partial_1 u_1 + A_{21}\partial_2 u_2 + A_{31}\partial_3 u_3 - \beta_1 u_4, & \sigma_{32} &= A_{44}(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3)/2, \\ \sigma_{22} &= A_{21}\partial_1 u_1 + A_{11}\partial_2 u_2 + A_{31}\partial_3 u_3 - \beta_1 u_4, & \sigma_{31} &= A_{44}(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3)/2, \\ \sigma_{33} &= A_{31}(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + A_{33}\partial_3 u_3 - \beta_3 u_4, & \sigma_{21} &= (A_{11} - A_{21})(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора смещения; A_{ij} – компоненты матрицы модулей упругости трансверсально-изотропной среды; $u_4 = T - T_0$ – изменение температуры,

отсчитываемой от естественного состояния T_0 ; ∂_i – производная по координате x_i ; β_1, β_3 – коэффициенты температурных напряжений.

Имеем уравнения движения сплошной среды и уравнение теплопроводности

$$\partial_j \sigma_{ij} - \rho c^2 \partial_{44} u_i + F_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$T_0 c \partial_4 [\beta_1 (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \beta_3 \partial_3 u_3] + [c_1 c \partial_4 - k_1 (\partial_{11} + \partial_{22}) - k_3 \partial_{33}] u_4 = w. \quad (3)$$

Здесь $x_4 = ct$, t – время, c – некоторая постоянная, имеющая размерность скорости; ρ – постоянная плотность среды; по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование; $\partial_{kl} = \partial_k \partial_l$ – вторые производные по координатам x_k, x_l ; F_i – компоненты вектора объемных сил; c_1 – теплоемкость на единицу объема при постоянной деформации; k_1, k_3 – коэффициенты теплопроводности; w – количество тепла, возникающее в единицу времени в единице объема. Постоянная c вводится для того, чтобы все коэффициенты в уравнениях были одинаковой размерности, а также и переменные x_i , $i = \overline{1, 4}$. При решении конкретных задач к уравнениям (1)–(3) добавляются начальные и граничные условия.

В работе [2] дано общее решение уравнений движения (2) через шесть произвольных функций напряжений и смещений φ_i , $i = \overline{1, 6}$, например, в форме динамического аналога представления Максвелла

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \partial_{33} \varphi_2 + \partial_{22} \varphi_3 + \rho c^2 \partial_{44} \varphi_4 - f_1, & \sigma_{32} &= -\partial_{23} \varphi_1, \\ \sigma_{22} &= \partial_{33} \varphi_1 + \partial_{11} \varphi_3 + \rho c^2 \partial_{44} \varphi_5 - f_2, & \sigma_{31} &= -\partial_{13} \varphi_2, \\ \sigma_{33} &= \partial_{22} \varphi_1 + \partial_{11} \varphi_2 + \rho c^2 \partial_{44} \varphi_6 - f_3, & \sigma_{21} &= -\partial_{12} \varphi_3, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u_1 = \partial_1 \varphi_4, \quad u_2 = \partial_2 \varphi_5, \quad u_3 = \partial_3 \varphi_6, \quad F_1 = \partial_1 f_1, \quad F_2 = \partial_2 f_2, \quad F_3 = \partial_3 f_3.$$

Кроме решения (4) в [2] приведены еще 50 равносильных вариантов общего решения уравнений (2). Из сравнения выражений (1), (4) получаем представление напряжений и смещений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (A_{11} \partial_{11} + A_{21} \partial_{22}) \varphi_4 + A_{31} \partial_{33} \varphi_6 - \beta_1 u_4, & \sigma_{32} &= A_{44} \partial_{23} (\varphi_4 + \varphi_6) / 2, \\ \sigma_{22} &= (A_{21} \partial_{11} + A_{11} \partial_{22}) \varphi_4 + A_{31} \partial_{33} \varphi_6 - \beta_1 u_4, & \sigma_{31} &= A_{44} \partial_{13} (\varphi_4 + \varphi_6) / 2, \\ \sigma_{33} &= A_{31} (\partial_{11} + \partial_{22}) \varphi_4 + A_{33} \partial_{33} \varphi_6 - \beta_3 u_4, & \sigma_{21} &= (A_{11} - A_{21}) \partial_{12} \varphi_4, \\ u_1 &= \partial_1 \varphi_4, & u_2 &= \partial_2 \varphi_4, & u_3 &= \partial_3 \varphi_6, \end{aligned}$$

где потенциалы φ_4, φ_6 и температура u_4 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} [A_{11} (\partial_{11} + \partial_{22}) + (A_{44}/2) \partial_{33} - \rho c^2 \partial_{44}] \varphi_4 + (A_{44}/2 + A_{31}) \partial_{33} \varphi_6 &= 0, \\ (A_{44}/2 + A_{31}) (\partial_{11} + \partial_{22}) \varphi_4 + [(A_{44}/2) (\partial_{11} + \partial_{22}) + A_{33} \partial_{33} - \rho c^2 \partial_{44}] \varphi_6 &= 0; \\ T_0 c \partial_4 [\beta_1 (\partial_{11} + \partial_{22}) \varphi_4 + \beta_3 \partial_{33} \varphi_6] + [c_1 c \partial_4 - k_1 (\partial_{11} + \partial_{22}) - k_3 \partial_{33}] u_4 &= w. \end{aligned} \quad (5)$$

Если модули упругости связаны условием $(A_{44}/2 + A_{31})^2 = (A_{11} - A_{44}/2)(A_{33} - A_{44}/2)$, то система (5) из двух уравнений приводится к диагональному виду.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (код проекта III.23.3.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б. Д. *Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов*. Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 5–14.
2. Остросаблин Н. И. *Функции напряжений и смещений для уравнений движения сплошной среды*. Сиб. журн. индустр. математики. 1999. Т. 2, № 1. С. 123–138.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В ПЛОСКОМ НАКЛОННОМ КАНАЛЕ

Д. Г. Архипов, Г. А. Хабахпашев

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Расслоенные течения несмешивающихся жидкостей в каналах и трубах находят широкое применение в современных технических установках. Основные трудности, возникающие при их использовании, обусловлены многообразием возможных форм и расположений поверхности раздела жидкостей внутри канала. Существующие карты режимов надежны лишь в ограниченной области параметров системы. Вследствие неединственности решений упрощенных математических моделей необходимо подключать феноменологические вариационные принципы даже в теоретических исследованиях [1]. Гораздо более информативен традиционный анализ линейной устойчивости. В фундаментальной работе [2] для горизонтального канала рассчитаны характеристики "межфазной" моды возмущений. Более общий случай наклонного канала рассматривался в [3], однако лишь относительно недавно в серии работ Ульманна и др. (см. например, [4]) экспериментально и теоретически определены границы областей неединственности реальных (устойчивых) расслоенных режимов спутного и противоточного течений при фиксированных расходах фаз. В целом же классификация таких потоков в наклонном канале и сейчас остается актуальной.

В настоящей работе для двух слоев жидкости в плоском наклонном канале при наличии внешнего продольного градиента давления выделено 9 различных типов (режимов) течения и определены их границы в пространстве безразмерных параметров. Показано, что в линейном приближении задача Орра – Зоммерфельда формально сводится к исследованной ранее для случая горизонтального канала с единственным отличием в форме профиля стационарного потока. Методом Галеркина с базисом полиномов Чебышева найдены решения этой задачи, представляющие собой собственные значения и собственные функции линейных возмущений системы. Полученные данные использованы для определения слабонелинейных поправок к профилю возмущения скорости течения. С помощью метода сопряженного оператора выведено нелинейно-дисперсионное эволюционное уравнение для моделирования динамики возмущений границы раздела жидкостей. Показано, что при малой относительной разнице плотностей жидкостей (и, соответственно, малой скорости внутренних гравитационных волн) возможна накачка волн энергией стационарного потока.

ЛИТЕРАТУРА

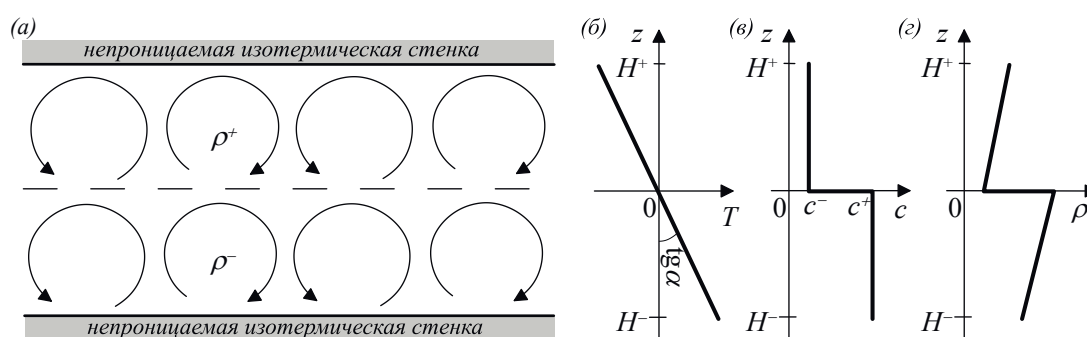
1. Joseph D. D., Renardy Y. Y. *Fundamentals of two-fluid dynamics*. Springer, 1992.
2. Yiantsios S. G., Higgins B. G. *Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids*. Phys. Fluids. 1988. V. 31, № 11. P. 3225–3238.
3. Tilley B. S., Davis S. H., Bankoff S. G. *Linear stability theory of two-layer fluid flow in an inclined channel*. Phys. Fluids. 1994. V. 6, № 12. P. 3906–3922.
4. Ullmann A., Zamir M., Gat S., Brauner N. *Multi-holdups in co-current stratified flow in inclined tubes*. Int. J. Multiphase Flow. 2003. V. 29, № 10. P. 1583–1604.

ДВУХСЛОЙНАЯ ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ

А. А. Афанасьев

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Рассматривается неизотермическая задача о конвекции водного раствора соли в пористой среде. Предполагается, что в начальный момент времени горизонтальный пористый слой конечной толщины насыщен водой, причем в нем имеется горизонтальная граница раздела $z = 0$, выше которой вода пресная $c = c^+$ (при $z \in [0, H^+]$), а ниже – соленая $c = c^-$ (при $z \in [H^-, 0]$) (а, в). Здесь c – концентрация соли. Температура T с глубиной растет (б) и ее значения (или потоки тепла) на верхней и нижней границах слоя поддерживаются постоянными. Таким образом, на течение жидкости в слое влияют как дестабилизирующий эффект, связанный с распределением температуры, так и стабилизирующий эффект, обусловленный тем, что ниже границы раздела плотность жидкости ρ выше (г). В результате может развиваться двухслойная конвекция, когда образуются две различные системы конвективных валов выше и ниже границы раздела, а сама свободная граница может терять устойчивость.



В докладе аналитическими методами и в рамках численного моделирования фильтрации исследуются различные режимы течения и определяются соответствующие им параметры подобия. В линейном приближении показано, что устойчивость границы раздела определяется только тремя параметрами подобия. В явном виде получено достаточное условие ее устойчивости и обнаружено при увеличении числа Рэлея первыми могут терять устойчивость периодические во времени возмущения границы.

С учетом механической дисперсии примеси соли в пористой среде исследована нелинейная динамика системы. Ограничены области параметров задачи, соответствующие различным конечным состояниям системы – жидкость перемешалась полностью или не полностью. Показано, что между данными режимами отсутствует четкая граница: при одних и тех же начальных условиях и различных малых возмущениях слои могут как полностью перемешаться, так и система может прийти к новому устойчивому («размазанному») распределению концентрации c . Во втором случае, на начальном этапе эволюции развивается конвекция, которая быстро сама себя разрушает из-за перераспределения плотности жидкости, а система успокаивается до полного перемешивания слоев.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (МД-3567.2018.1).

ИНВАРИАНТЫ И СИММЕТРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. Ю. Багдерина

Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа

Для скалярных уравнений второго порядка $y'' = F(x, y, y')$ полностью решена проблема эквивалентности относительно точечных преобразований, включая все вырожденные случаи. Для уравнений проективного типа (с не более чем кубической зависимостью правой части от y') доказана теорема Тресса о связи размерности допускаемой алгебры Ли L_r точечных симметрий и ранга матрицы Якоби инвариантов уравнения. Оказывается, что алгебраические и дифференциальные инварианты уравнения одновременно являются и инвариантами L_r .

Для уравнений с $\partial^4 F / \partial y'^4 \neq 0$ аналогичным образом исследуются их дифференциальные инварианты, которые одновременно являются инвариантами некоторых контактных симметрий, допускаемых уравнением. Рассматриваются дуальные уравнения. Показано, что если уравнение $y'' = F(x, y, y')$ допускает r -мерную алгебру Ли точечных симметрий, то дуальное к нему уравнение также допускает r точечных симметрий.

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ ПОРОУПРУГОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

А. Н. Байкин

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Гидроразрыв пласта (ГРП) является одной из основных современных технологий интенсификации нефтедобычи. Распространение трещины гидроразрыва пласта обуславливается закачкой в скважину вязкой жидкости, которая создает давление достаточное для преодоления горного давления, разрыва породы и образования трещины. Процесс развития трещины ГРП включает в себя несколько взаимосвязанных факторов: течение вязкой жидкости по узкой трещине, упругая реакция стенок трещины, фильтрация жидкости из трещины в продуктивный пласт, разрушение породы и продвижение фронта трещины.

В последнее время в научном сообществе для моделирования гидроразрыва пласта в пороупругих средах получил популярность метод конечных элементов. Однако остался открытым вопрос, насколько сильно пороупругие эффекты оказывают влияние на распространение трещины ГРП. В настоящей работе данная задача исследуется с помощью прямого численного моделирования. Для этого рассматривается модель радиальной трещины гидроразрыва пласта в пороупругой среде, построенная

по аналогии с [1]. Модель позволяет рассчитывать поровое давление совместно с деформацией горной породы и процессом раскрытия трещины ГРП. Механика продуктивного пласта подчиняется уравнениям пороупругости Био [2]. Течение жидкости по трещине определяется законом сохранения массы в приближении теории смазки. Для учета затрат энергии на разрушение породы используется модель сил сцепления. Преимущество выбранного подхода заключается в том, что обмен жидкостью между трещиной и горной породой осуществляется естественным образом без применения упрощенных предположений о характере фильтрации жидкости.

Для численного решения задачи применяется метод конечных элементов с использованием модификации алгоритма из [1]. Правильность численных расчетов подтверждается сравнением с аналитическими решениями для радиальной трещины в упругой среде. С помощью проведения серии численных экспериментов в настоящей работе определяется диапазон параметров задачи о радиальной трещине ГРП, в котором пороупругие эффекты и эффект трехмерной фильтрации (нарушение закона Картера) оказывают существенное влияние на решение.

Полученные результаты могут быть использованы для упрощения принятия решений при выборе модели гидроразрыва пласта в инженерной практике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00410-мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Golovin S. V., Baykin A. N. *Influence of pore pressure on the development of a hydraulic fracture in poroelastic medium*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2018. V. 108. P. 198–208.
2. Coussy O. *Poromechanics*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2004.

О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТАЛИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. А. Банщикова¹, С. В. Иявойнен¹, А. Ю. Ларичкин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

По результатам испытаний на одноосное упругопластическое растяжение цилиндрических образцов из стали 09Г2С-12 в диапазоне температур 650–850°C определен наиболее приемлемый интервал температур, при котором следует осуществлять деформацию круглой мембраны в полусферическую оболочку: 700–800°C. Ниже этого интервала прочностные свойства материала резко возрастают, а выше уменьшаются несущественно. Получены константы аппроксимационных функций для описания упругопластических свойств материала [1]. Испытания круглых образцов на одноосное растяжение в условиях ползучести дали зависимость предельной деформации при разрушении от температуры. Найден диапазон температур (730–750°C), который наиболее целесообразен с точки зрения величины «ресурса пластичности», то есть достижения максимальной предельной деформации [2]. Рассмотрены различные

режимы формообразования полусферической оболочки из стали 09Г2С-12 в условиях ползучести за заданное время: формообразование постоянным давлением, формообразование с постоянной скоростью деформирования. Для исключения превышения текучести материала и снижения повреждаемости нагрузку следует прилагать постепенно. Задачи формообразования исследуются с использованием метода конечных элементов комплекса Ansys. Результаты расчетов сравниваются с оценками, полученными по упрощенной схеме, основанной на решении уравнения равновесия безмоментной оболочки в окрестности центральной точки купола.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банщикова И. А., Иявойнен С. В., Ларичкин А. Ю., Леган М. А., Любашевская И. В. *Рациональные режимы формообразования полусферической оболочки из стали 09Г2С-12 в условиях ползучести*. Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. тр. Новокузнецк, 2017. С. 40–47.
2. Iyavounen S. V., Banshchikova I. A., Lubashevskaya I. V., Legan M. A. *High temperature creep of steel 09G2S under non-stationary loading*. Journal of Physics: Conf. Series. 2017. V. 894. 012123.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ ОХЛАЖДЕННОЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

В. А. Батищев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Исследовано термокапиллярное стационарное осесимметричное течение однородной жидкости в полубесконечном пространстве, ограниченном сверху свободной границей, на которой задано неравномерное распределение температуры. Показано, что в результате бифуркации при локальном охлаждении границы возникает вращение жидкости в пограничном слое вблизи границы. Результаты работы переносятся на течение неоднородной жидкости и могут объяснить одну из причин возникновения торнадо.

Движение жидкости рассчитывается на основе уравнений Навье – Стокса при исчезающих диффузионных коэффициентах. В окрестности оси симметрии температура свободной границы распределена по степенному закону от радиальной координаты. Главные члены асимптотических разложений решения задачи строятся методом пограничного слоя и удовлетворяют уравнениям Прандтля. Предполагается, что вне пограничного слоя имеется внешний незакрученный поток жидкости. Компоненты скорости определяются из нелинейной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта задача решается численно.

Режимы течений жидкости делятся на два типа - основные и вторичные. Основные режимы описывают течение без вращения. Вторичные или вращательные режимы возникают в результате бифуркации основных режимов только при охлаждении свободной границы. При нагреве границы возникает только один основной

режим, а при охлаждении - два режима, один из которых описывает зоны тока и противотока, а второй описывает только зону тока. Показано, что от основных режимов при охлаждении могут ответвляться два вращательных режима. Точки бифуркации найдены численно. Вблизи точек бифуркации построена асимптотика вращательных режимов путем введения двух малых параметров. Главные члены этой асимптотики рассчитаны численно. Найдена функциональная связь между малыми параметрами, из которой находится направление ответвления решений и определяется число вторичных режимов.

Результаты работы перенесены на случай неоднородной жидкости, удовлетворяющей уравнениям Обербека – Буссинеска. Численно рассчитаны незакрученные и вращательные режимы течений жидкости в пограничном слое. Рассчитаны главные члены асимптотических разложений вращательных режимов вблизи точек бифуркации.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

С. П. Баутин

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

Для квазилинейной системы уравнений с частными производными поставлена характеристическая задача Коши (ХЗК) и доказано существование у нее единственного аналитического решения [1], [2]. При анализе структуры коэффициентов рядов, задающих решение, часто устанавливается неограниченность области сходимости рядов по части независимых переменных [2].

Данная ХЗК часто встречается в газовой динамике и из доказанного аналога теоремы Ковалевской следует, что у этих задач имеется единственное аналитическое решение [1–6]. Именно таким образом построены многомерные аналоги центрированной волны Римана [3], [4]. С их помощью строго решены многомерные задачи об истечении газа в вакуум [3] и о безударном сильном сжатии газа [4]. Это, в частности, позволило построить такие численные алгоритмы, с помощью которых устойчиво рассчитывается движение кумулятивных струй, а также сильное сжатие термоядерных мишеней. Установление неограниченности области сходимости конкретных рядов позволило обосновать асимптотические законы затухания слабых ударных волн [2]. При исследовании течений газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса поставлены и решены [5], [6] конкретные задачи, являющиеся ХЗК и попадающие под действие аналога теоремы Ковалевской [1], [2]. При анализе решений этих задач строго математически обоснован факт возникновения закрутки газа в восходящих потоках и направление этой закрутки. Также строго математически доказано, что кинетическая энергии вращающейся части потока в торнадо и в тропических циклонах берется только из кинетической энергии вращения Земли вокруг своей оси [5], [6].

В 1972 году на конференции САМГАД автор впервые представил свой аналог теоремы Ковалевской и Л. В. Овсянников сразу отметил этот результат. В последующем он внимательно следил за исследованиями автора, неоднократно поддерживал,

давал нужные рекомендации. Автор благодарен судьбе, что в его жизни был Лев Васильевич.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С. П. *Аналитические решения задачи о движении поршня*. ЧММСС. 1973. Т. 4, № 1. С. 3–15.
2. Баутин С. П. *Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике*. Новосибирск: Наука, 2009.
3. Баутин С. П., Дерябин С. Л. *Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум*. Новосибирск: Наука, 2005.
4. Баутин С. П. *Математическое моделирование сильного сжатия газа*. Новосибирск: Наука, 2007.
5. Баутин С. П. *Торнадо и сила Кориолиса*. Новосибирск: Наука, 2008.
6. Баутин С. П., Дерябин С. Л., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. *Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси*. Екатеринбург: УрГУПС, 2017.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В ТРОПИЧЕСКИХ ЦИКЛОНАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

С. П. Баутин¹, С. Н. Кононов^{1,2}, Э. С. Левунина^{1,3}

¹Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

²Южно-Уральский государственный университет, Озерск

³ФГУП «ПО «Маяк», Озерск

В работе рассмотрены задачи численного моделирования методом конечных разностей для предложенной в [1] полной системы уравнений Навье–Стокса в цилиндрических координатах. Предложенная аналитическая модель описывает поведение воздушных масс при возникновении восходящего закрученного потока с учетом сил тяжести и Кориолиса, а также сжимаемости газа, его вязкости и теплопроводности. Система формируется из уравнения неразрывности для сжимаемого газа, уравнений движения для составляющих скорости газа и уравнения энергии. Уравнение состояния в явном виде отсутствует, давление выражено через температуру и плотность.

Пример полученного уравнения радиальной составляющей скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{i,j,k}^{n+1} - \zeta_{i,j,k}^n}{\tau} = & -\zeta_{i,j,k}^n \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2l} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{il} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \frac{(\eta_{i,j,k}^n)^2}{il} - \\ & -\omega_{i,j,k}^n \frac{\zeta_{i,j,k+1}^n - \zeta_{i,j,k-1}^n}{2h} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2l} - \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\gamma l} + a\eta_{i,j,k}^n - b \cos \varphi w_{i,j,k}^n + \\ & + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left(\frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i-1,j,k}^n}{l^2} + \frac{3}{4(il)^2} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2il^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\zeta_{i,j,k}^n}{(il)^2} + \frac{\eta_{i+1,j,k}^n + \eta_{i-1,j,k}^n \eta_{i,j+1,k}^n + \eta_{i,j-1,k}^n - 4\eta_{i,j,k}^n}{4il^2\alpha} - \frac{7}{4(il)^2} \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \\
& + \frac{3(\zeta_{i,j,k+1}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i,j,k-1}^n)}{4h^2} + \frac{w_{i+1,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n w_{i,j,k+1}^n + w_{i,j,k-1}^n - 4w_{i,j,k}^n}{4lh},
\end{aligned}$$

где i, j, k – номера шагов; l, α, h – шаги по r, φ, z ; n и τ – номер и шаг по времени.

Огромное количество узлов сетки для явной схемы метода конечных разностей привело к использованию методов распараллеливания вычислительного процесса. Реализация счета представленной модели на кластере производилась с использованием наиболее распространенного стандарта МРІ, что потребовало корректного разделения всего координатного пространства модели на части и организации обмена граничными значениями областей с помощью библиотеки МРІСН.

В целях повышения доверия к модели производился счет на примере известного точного решения системы, когда газ находится в покое. Полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими выкладками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С. П., Дерябин С. Л., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. *Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси*. Екатеринбург: УрГУПС, 2017.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ПОМОЩЬЮ БЕСКОНЕЧНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

С. П. Баутин, М. А. Филин

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

В работе рассматривается уравнение Бюргерса [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) представляется в виде бесконечного тригонометрического ряда следующего вида [2]:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k}(t) \cos kx + u_{2k}(t) \sin kx \quad (2)$$

Исходное уравнение, в котором учтено представление (2), проецируется на тригонометрический базис. В результате для бесконечного числа искомых коэффициентов ряда $u_{1k}(t)$, $u_{2k}(t)$, зависящих от времени, получается бесконечная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее применяется процедура,

позволяющая избавиться от двойных сумм, что существенно ускоряет численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае, когда предполагается, что только первые K слагаемых ряда (2) отличны от нуля, и тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений становится конечной. По аналогии со случаем полной системы уравнений Навье–Стокса [2] доказана теорема о кратных частотах для уравнения Бюргерса. Численно построены приближенные представления (2) для точных решений уравнений Бюргерса, полученных с использованием преобразования Хопфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burgers J.M. *Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion*. Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam. 1939. V. 17. P. 1–53.
2. Баутин С. П., Замыслов В. Е., Скачков П. П., *Математическое моделирование одномерных течений вязкого теплопроводного газа тригонометрическими рядами*. Новосибирск: Наука, Екатеринбург: УрГУПС, 2014.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДЕФОРМИРУЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА ПРИ ТОЧЕЧНОМ НАГРЕВЕ ЛАЗЕРНЫМ ПУЧКОМ

В. Б. Бекежанова¹, О. Н. Гончарова², Н. А. Иванова³, Д. С. Ключев³

¹Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

²Алтайский государственный университет, Барнаул

³Тюменский государственный университет

Изучается задача о возникновении конвекции в двухслойной системе под влиянием интенсивного теплового воздействия на верхнюю границу с помощью пучка лазера. Теоретическое исследование термокапиллярной конвекции в системе с деформируемыми поверхностями раздела включает разработку математической модели, апробация которой проводится на основе новых физических экспериментов (Иванова Н. А., Ключев Д. С., Флягин В. М., 2016–2018), и эффективных численных алгоритмов (Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Овчарова А. С., 2018).

Рассматриваемая задача изучается в двух постановках: (1) двухслойная система заполняет кювету с твердыми непроницаемыми стенками; (2) верхняя граница системы двух несмешивающихся жидкостей является свободной поверхностью. Математическая модель для описания возникающих течений включает уравнения Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска, условия прилипания для скорости на твердых стенках канала, предполагаемых теплоизолированными или нагреваемыми, и соотношения на границах раздела (кинематическое и динамическое условия, условия непрерывности температуры, касательных скоростей и тепловых потоков на внутренней границе раздела и условие заданной температуры либо отсутствия потока тепла на свободной границе за исключением участка локального нагрева).

Аналитически и численно изучаются возникновение затухающих колебаний, впервые экспериментально обнаруженное авторами, и эволюция границ раздела и слоев

в системе. Представлены результаты экспериментального и численного исследования структуры и характера конвективных течений в горизонтальных двухслойных системах «жидкость – жидкость» типа «силиконовое масло – бензиловый спирт», «силиконовое масло – глицерин», «толуол – этиленгликоль». Проводится сравнительный анализ данных экспериментов и теоретических исследований, выполненных на основе разработанной математической модели, учитывающей наличие локального источника тепла на свободной границе либо на верхней твердой стенке кюветы. Параметрами эксперимента являются соотношение толщин жидких слоев, типы рабочих жидкостей, коэффициент поглощения жидкостей. Особое внимание уделяется исследованию влияния геометрии системы за счет изменения толщины одного из жидких слоев.

Авторы выражают благодарность А. С. Овчаровой за предоставленный для использования код (программу расчета нестационарных задач конвекции с границами раздела), адаптация которого для исследования новых задач позволила провести новые расчеты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 17-08-00291).

СТРУКТУРА ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ РАЗМЕЩЕНИИ НАГРЕВАТЕЛЕЙ НА ГРАНИЦАХ СИСТЕМЫ

В. Б. Бекежанова¹, А. С. Овчарова²

¹*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

²*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

В рамках полной постановки сопряженной задачи численно исследуется структура течений в системе жидкость – газ, возникающих при локальном нагреве тепловыми источниками. Двухслойная жидкость ограничена твердыми непроницаемыми стенками. Для описания движения сред используются уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска в переменных «функция тока – завихренность». Динамические условия на межфазной поверхности сформулированы в терминах касательной и нормальной скорости, а условия для температуры на внешних границах системы учитывают наличие локальных источников тепла.

Использование уравнений Обербека – Буссинеска, которые подразумевают естественные свойства симметрии пространства – времени и движущейся в этом пространстве жидкости, и замыкающих соотношений, полученных на основе законов сохранения позволяет в полной мере учесть влияние вертикальной компоненты скорости и вклад конвективных слагаемых в формирование структуры наблюдаемых течений, причем как гидродинамической, так и тепловой картины.

Анализируется влияние вариантов размещения нагревателей и режимов их работы на динамику и характер возникающих конвективных режимов. Исследованы случаи переключаемого нагрева в случае нескольких нагревателей, размещенных на нижнюю и верхнюю границу несимметрично относительно середины рабочей области. Присутствие нагревателей на нижней стенке обеспечивает сосуществование

конвективного и термокапиллярного механизмов неустойчивости в рассматриваемой системе. В результате потери устойчивости при переключаемом нагреве наблюдаются гистерезисные явления, при которых в системе возникают колебательные режимы и осцилляции межфазной поверхности. Показана возможность подавления термокапиллярных деформаций в зоне действия одного из нагревателей за счет соответствующего размещения и режима работы дополнительных тепловых источников.

Приведены типичные распределения полей скорости и температуры в системе и положение границы раздела для различных вариантов размещения нагревателей и режимов их работы. Численный алгоритм расчета основан на идее метода, разработанного в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Красноярского края (грант № 18-41-242005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ovcharova A. S. *Multilayer system of films heated from above*. Int. J. Heat Mass Trans. 2017. V. 114. P. 992–1000.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ФАЗОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

В. С. Белоносов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Тема доклада инициирована теорией возмущений динамических систем в нормированных пространствах. Одним из актуальных вопросов является эффект параметрического резонанса, то есть потеря устойчивости динамической системы при малых периодических возмущениях входящих в нее параметров, когда частоты возмущений близки к определенным критическим значениям. Это явление играет важную роль во многих прикладных дисциплинах и интенсивно изучается со второй половины XIX века (см. литературный обзор в [1]). Для линейных систем построена достаточно полная теория параметрической неустойчивости. Установлено, что критические частоты определяются спектральными свойствами операторных коэффициентов соответствующих линейных уравнений. Причем амплитуды колебаний решений возмущенных систем при резонансе экспоненциально возрастают со временем.

Принципиальная особенность нелинейных уравнений – зависимость критических частот от амплитуд колебаний. Поэтому вместо неограниченного роста могут наблюдаться пульсации амплитуд, называемые в нелинейной физике фазовыми колебаниями. Разработка математической теории фазовых колебаний только начинается. Одним из наиболее перспективных подходов представляется асимптотический метод усреднения Крылова – Боголюбова [2]. Пусть ε – малый параметр, характеризующий величину возмущений. В каждой ограниченной области Ω усредненная с точностью до ε^n система приближенно описывает фазовые колебания. Однако здесь возникает другая трудность, связанная с локальным характером усреднения. Фазовый портрет

усредненной системы, вообще говоря, также зависит от ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ интересующие нас особенности могут выходить за пределы области Ω , где установлены оценки погрешностей приближений, приводя к потере эффективности метода усреднения.

Данную проблему можно преодолеть, если так модифицировать метод, чтобы фазовый портрет усредненной системы не зависел от ε , но по-прежнему отражал качественные особенности решений. В общем виде эта задача достаточно сложна. Ее решение для скалярного уравнения Матье–Хилла $\ddot{u} = -a^2 u + \varepsilon p(t, u)$ с полиномиальным по u возмущением $\varepsilon p(t, u)$ анонсировано в [3]. В настоящем докладе будут приведены обобщения этих результатов для динамических систем с конечным числом степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В. А., Старжинский В. М. *Параметрический резонанс в линейных системах*. М.: Наука, 1987.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд-е 2-е*. М.: Наука, 1974.
3. Belonosov V. S. *Nonlocal approach to asymptotic methods of perturbation theory*. Int. Conf. PDEs and Mathematical Hydrodynamics: in Honor of Vsevolod Alekseevich Solonnikov's 85-th Birthday. St. Petersburg. 2018. Abstracts. P. 5–6.

ОБ ЭВОЛЮЦИИ КОНЕЧНОГО ОБЪЁМА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. Н. Белых

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Побудительным мотивом к проведенному исследованию послужила известная гидродинамическая проблема «разрушения» свободных границ в идеальной несжимаемой жидкости, которая в своей точной математической постановке примыкает к проблеме продолжения «далеко» по времени гладких решений трехмерных уравнений Эйлера. Трудности исследования проблемы связаны в основном с отсутствием теоретических представлений и неразвитостью адекватного математического языка для описания режимов поведения жидкости в момент зарождения в ней особенностей. Наибольший интерес вызывает при этом эффект возникновения за конечное время особенностей у комплексных (по времени t) решений этих уравнений. Интерес к указанной проблематике сформировался у автора под влиянием Л. В. Овсянникова.

В отсутствии массовых сил и поверхностного натяжения исследовано в точной постановке неустановившееся потенциальное движение конечного осесимметричного объема идеальной несжимаемой жидкости («капли»), возникающее под действием начального импульса, распределенного по свободной поверхности капли. Доказана локальная теорема существования и единственности аналитического по времени решения задачи [1]. В итоге получено строгое описание начальной стадии нестационарного движения осесимметричной «капли», предшествующей ее эволюционному

разрушению («blow-up») в момент, когда решение теряет аналитичность. Полученный результат позволяет мотивированно формулировать конструктивную гипотезу о возможном характере зарождения особенностей у решения задачи и выступить в качестве стартового в доказательных вычислениях [2, 3], организуемых посредством аналитического продолжения решения по времени с целью отыскания особенностей, если они есть, на положительной части вещественной оси времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белых В. Н. *Об эволюции конечного объема идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью*. ДАН. 2017. Т. 473, № 6. С. 650–654.
2. Бабенко К. И., Петрович В. Ю. *О доказательных вычислениях на ЭВМ: Препр. № 133* М.: Ин-т прикл. мат. АН СССР. 1983. 28 с.
3. Белых В. Н. *К проблеме численной реализации нестационарных осесимметричных задач идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью*. ПМТФ. 2019 (в печати).

ИССЛЕДОВАНИЕ СЦЕНАРИЕВ РАЗВИТИЯ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫХ СТРУЙ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПРЕГРАДАМИ КОНЕЧНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. С. Бердников¹, О. О. Гусельникова²

¹Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный технический университет

Численно исследованы сценарии развития термогравитационных струй, развивающихся над линейным источником тепла. Изучен сопряженный конвективный теплообмен при натекании головной части струи на преграды конечной толщины и теплопроводности в режимах однофазной конвекции и при наличии фазовых переходов – плавления или кристаллизации.

Математическая модель конвективного движения в жидкости описывается системой уравнений Навье – Стокса, записанной в переменных температура, вихрь скорости и функции тока. Расчетная область представляет собой двумерную прямоугольную полость, заполненную жидкостью и ограниченную сверху твердой стенкой заданной толщины и конечной теплопроводности. Источник тепла расположен на нижней стенке полости и имеет форму плоской полосы заданной ширины, на верхней границе верхней стенки поддерживается постоянная температура – ниже температуры плавления гептадекана и воды. Численные эксперименты проведены для жидкостей гептадекан и вода. В случае воды учтена инверсная зависимость плотности от температуры. Для дискретизации системы уравнений использован метод конечных элементов на треугольных сетках. Скрытая теплота фазовых переходов учитывается как дополнительный источник тепла, сосредоточенный на границе раздела сред [1]. Исследована энергетика процесса развития струй в зависимости от

высоты слоя жидкости [2] и от мощности источника тепла. Изучена зависимость от времени полей температуры в слое жидкости и в верхней стенке, локальных и интегральных тепловых потоков в жидкости и на границах раздела сред. Результаты исследований будут использованы при планировании лабораторных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердников В. С., Кислицын С. А., Митин К. А. *Численное моделирование процессов роста кристаллов методом горизонтальной направленной кристаллизации из расплавов с различными числами Прандтля*. Известия РАН. Серия Физическая. 2017. Т. 81, № 10. С. 1389–1394.
2. Антонов П. В., Арбузов В. А., Бердников В. С., Гришков В. А., Новоселова О. Н., Тихоненко В. В. *Экспериментальные и численные исследования нестационарных плавучих струй*. Автометрия. 2012. Т. 48, № 3. С. 90–100.

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАЗРЫВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ИЗ БЕТОНА В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ

В. А. Блинов¹, М. А. Леган^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный технический университет

Технология гидравлического разрыва широко используется в добыче нефти и газа. Однако анализ разрушения при неоднородном напряженном состоянии вокруг ствола скважины проблематичен. В этом исследовании мы сравнили численные расчеты для разных критериев разрушения с экспериментальными данными о гидравлическом разрыве цилиндрических образцов из бетона в неоднородном поле напряжений, чтобы определить наиболее подходящие для этой цели. Реальные скважины имеют значительно больший диаметр, чем лабораторные модели. Поэтому важно исследовать масштабный эффект, который, согласно литературе, имеет место при гидравлическом разрыве. Известно, что при наличии концентрации напряжений масштабный фактор проявляется в гораздо большей степени, чем при однородном напряженном состоянии.

Экспериментальное исследование гидравлического разрыва толстостенных цилиндров с приложением диаметральной нагрузки проводилось на образцах в виде цилиндров с центральным круглым отверстием и круглым отверстием, расположенным на расстоянии половины радиуса от центра цилиндра под углом 45 градусов к линии приложения нагрузки. Эксперименты по гидравлическому разрыву проводились с использованием машины, создающей высокое давление масла. Для изучения масштабного эффекта были испытаны цилиндры разного диаметра с различными диаметрами отверстий. Образцы были изготовлены из бетона на основе глиноземистого цемента марки ГЦ-40. Получение раствора для заливки образцов проводили путем смешивания песка, цемента и воды в пропорции 3/2/1 соответственно. Предельные напряжения в материале определялись для трех типов напряженного состояния: при сжатии, при чистом сдвиге на поверхности отверстия и при сложном

напряженном состоянии в условиях диаметрального сжатия сплошного цилиндра. Значение коэффициента интенсивности критического напряжения бетона, которое использовалось в нелокальных критериях разрушения, было получено из эксперимента по диаметральному сжатию цилиндрических образцов с центральным надрезом. Моделирование процесса гидравлического разрыва, с учетом неоднородности напряженного состояния вблизи отверстия, проводилось с использованием метода граничных элементов (в варианте метода фиктивной нагрузки).

Работа была выполнена при частичном финансировании правительства Российской Федерации (грант 14.W03.31.0002) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-00528).

ТРАНСЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И ВЯЗКИХ ЭФФЕКТАХ

А. Н. Богданов

НИИ механики МГУ им М. В. Ломоносова, Москва

Проведено обоснование необходимости регуляризации предложенной ранее [1,2] аналитической модели нестационарного течения газа в околосвуковом диапазоне скоростей. Предложена регуляризованная модель и проведено сравнение результатов исследования на классической и регуляризованной моделях задач нестационарного трансзвукового течения, в том числе, работы трансзвукового сопла в переходном режиме [3], устойчивости трансзвукового пограничного слоя и др. [4].

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00793-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin C. C., Reissner E., Tsien H. S. *On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid*. J. of Mathematics and Physics. 1948. V. 27, № 3. P. 220–231.
2. Рыжов О. С. *О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосвуковых скоростях внешнего потока*. ДАН СССР. 1977. Т. 236, № 5. С. 1091–1094.
3. Богданов А. Н. *Моделирование переходного режима работы трансзвукового сопла*. Мат. моделирование, 1995. Т. 7, № 9. С. 117–126.
4. Богданов А. Н., Диесперов В. Н., Жук В. И. *Неклассические трансзвуковые пограничные слои. К преодолению некоторых тупиковых ситуаций в аэродинамике больших скоростей*. Ж. вычислит. мат. и мат. физ. 2018. Т. 58, № 2. С. 270–280.

ДИНАМИКА ВОЛН И ВИХРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА НА ГРАНИЦУ ГАЗА И ВОДНОЙ ПЕНЫ

Р. Х. Болотнова, Э. Ф. Гайнуллина

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматривается задача о пространственном взаимодействии инициируемого в результате точечного взрыва сферического импульса с барьером из водной пены. Система модельных уравнений двухфазной среды включает законы сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы в соответствии с однодавленческим, двухскоростным, двухтемпературным приближениями для газожидкостной смеси в двумерной осесимметричной постановке. Сила межфазного сопротивления описывается моделью Шиллера–Наумана [1]. Теплообменные процессы на межфазной поверхности учитываются моделью Ранца–Маршалла [2]. Предполагается, что за фронтом сильной ударной волны водная пена разрушается на монодисперсные микрокапли [3], описываемые моделью газожидкостной смеси. В случае слабых ударных волн для водной пены с малым радиусом пузырьков применяется аналогичная модель [4].

При компьютерной реализации модели используется решатель twoPhaseEulerFoam открытого программного комплекса OpenFOAM [5] с изменениями, соответствующими модельным представлениям. Результаты численного исследования показали значительное замедление прохождения ударных волн вглубь пенного барьера. Установлено, что формирование пространственной неоднородности течения вследствие отражения ударных волн от границы с пеной приводит к искривлению линий тока, сопровождающемуся образованием зон пониженного давления и возникновением серии тороидальных вихрей. Достоверность полученных результатов оценена сравнением с решениями аналогичной задачи с применением других численных методов [3, 6].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта р_а 17-41-020582) и средствами государственного бюджета по госзаданию 0246-2018-0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schiller L., Naumann Z. *A Drag Coefficient Correlation*. Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. V. 77. P. 40–65.
2. Ranz W.E., Marshall W.R. *Evaporation from Drops* Chem. Eng. Prog. 1952. V. 48, № 22. P. 141–146.
3. Болотнова Р. Х., Гайнуллина Э. Ф. *Исследование демпфирующих свойств водной пены под воздействием сферической ударной волны*. Изв. высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2017. № 2. С. 108–121.
4. Monloubou M., Bruning M.A., Saint-Jalmes A., Dollet B., Cantat I. *Blast wave attenuation in liquid foams: role of gas and evidence of an optimal bubble size*. Soft Matter. 2016. V. 12, № 38. P. 8015–8024.
5. OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. URL: <http://www.openfoam.com>.

6. Агишева У. О., Болотнова Р. Х., Гайнуллина Э. Ф., Коробчинская В. А. *Особенности вихреобразования при воздействии импульса давления на газовую область, ограниченную пенным слоем*. Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 47–56.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ МОМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ

А. В. Боровских, К. С. Платонова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Изучается вопрос о возможности решения проблемы замыкания урезанной системы моментных уравнений, получаемых из уравнений Больцмана, групповыми методами: вычислив группу симметрий уравнения Больцмана, перенести ее на моментные величины, и замкнуть то или иное урезание моментной системы соотношением, инвариантным относительно этой группы. Для начала рассмотрен упрощенный вариант – одномерный (по пространственным переменным) случай. Хотя это упрощение и связано с фактическим исчезновением интеграла столкновений и превращением уравнения Больцмана в уравнение Лиувилля

$$f_t + cf_x + (\mathcal{F}f)_c = 0, \quad (1)$$

тем не менее вопрос о реализуемости заявленной схемы при этом сохраняется.

Для решения этого вопроса был выполнен групповой анализ уравнения (1) в предположении, что $\mathcal{F}$ является а) произвольной функцией от (t, x, c) ; б) произвольной функцией от (t, x, c, f) . Рассматривались произвольные точечные преобразования пространства переменных (t, x, c, f) , а для преобразований эквивалентности – и $\mathcal{F}$.

Оказалось, что для получения содержательного результата здесь необходимо привлечение дополнительных предположений относительно класса преобразований, выражающих в математической форме сохранение при заменах переменных "физического смысла" участвующих в уравнении величин. Это условия сохранения (инвариантности) при заменах переменных: а) соотношений $dx = cdt$ и $dc = \mathcal{F}dt$; б) соотношений $dx = dt = 0$ (то есть семейства прямых, параллельных оси c); в) величины $f(1 - c\theta_x(x, c) - \mathcal{F}\theta_c(x, c))dx dc$ для произвольной поверхности $t = \theta(x, c)$ – количества частиц элементе фазового объема.

Доказано, что в обоих рассматриваемых случаях (когда $\mathcal{F}$ зависит от f и когда не зависит) группа эквивалентности уравнения (1), удовлетворяющая перечисленным трем условиям, является группой диффеоморфизмов пространства переменных (t, x) (и соответствующих преобразований остальных переменных). Осуществлена полная групповая классификация соответствующих уравнений (1). Произведен перенос полученных групп на моментные величины. Для простейших случаев найдены инвариантные соотношения, позволяющие урезать моментную систему. Тем самым для одномерного случая программа оказалась полностью выполнимой и дающей содержательные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Платонова К. С., Боровских А. В. *Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Условия сохранения физического смысла моментных величин*. ТМФ. 2018. Т. 195, № 3. С. 452–483.

КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА

Р. В. Бризицкий^{1,2}, Ж. Ю. Сарицкая²

¹Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

²Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается краевая задача

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \beta \mathbf{G} \varphi, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$-\lambda \Delta \varphi + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi + k(\varphi, \mathbf{x}) \varphi = f \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u}$ и φ – скорость и концентрация загрязняющего вещества, $p = P/\rho$, P – давление, $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости, $\nu = \text{const} > 0$ и $\lambda = \text{const} > 0$ – коэффициенты кинематической вязкости и диффузии, β – коэффициент массового расширения, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ – вектор ускорения свободного падения, $\mathbf{f}$ и f – объемные плотности внешних массовых сил и источников вещества, функция $k = k(\varphi, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, имеет смысл коэффициента реакции. На задачу (1)–(3) при заданных функциях $\mathbf{f}$, f и k будем ссылаться как на задачу 1.

Доказана глобальная разрешимость задачи 1, установлены достаточные условия локальной единственности ее решения, доказан принцип максимума.

Исследована задача восстановления неизвестной плотности источников f по измеренной в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$ концентрации вещества φ . С использованием оптимизационного подхода задача восстановления f была сведена к экстремальной задаче, разрешимость которой доказана для общего вида $k(\varphi, \mathbf{x})$. В случае, когда коэффициент реакции и функционалы качества дифференцируемы по Фреше для экстремальной задачи выведены системы оптимальности. Для степенных коэффициентов реакции получены точные оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества. О близких результатах для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции см. [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00365-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Brizitskii R. V., Saritskaya Zh. Yu. *Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation*. J. Inv. Ill-Posed Pr. 2018. V. 26. P. 821–833.
2. Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю. *Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции-диффузии-реакции*. Изв. РАН: Сер. мат. 2016. Т. 82, № 1. С. 17–33.

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА С ВКЛЮЧЕНИЕМ НАНОПОРОШКОВЫХ ИНОКУЛЯТОРОВ

В. В. Бублик

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО
РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Движение жидкого металла с включением нанопорошковых инокуляторов будем описывать системой уравнений Навье – Стокса в осесимметричной системе координат с учетом силы тяжести, направленной против аксиальной координаты и уравнением теплопереноса в жидкости с учетом кристаллизации. Вязкость жидкости рассматриваем зависящей от температуры и доли твердой фазы в расплаве. Считаем, что частицы нанопорошка полностью смачиваются и являются центрами кристаллизации.

Проводится групповая классификация уравнений, описывающих движение жидкого металла с включением нанопорошковых инокуляторов, по отношению к зависимости коэффициента вязкости от температуры и доли твердой фазы в расплаве. Показано, что в случае часто используемой в литературе эмпирической зависимости коэффициента вязкости от доли твердой фазы допускаемая группа очень бедная, что не позволяет строить точные групповые решения. Существенное расширение допускаемой группы получается в случае постоянного коэффициента вязкости. В этом случае допускаемая группа достаточно богата для нахождения групповых точных решений. Поэтому для поиска точных решений используется постоянный коэффициент вязкости, значение которого берется как нулевое приближение известной эмпирической формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
2. Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О. *Симметрии неклассических моделей гидродинамики*. Новосибирск: Наука, 2003.
3. Bublik V. V. *Differential invariants in nonclassical models of hydrodynamics*. AIP Conf. Proc. 2017. V. 1893. 030103. DOI: 10.1063/1.5007561.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ

А. А. Бугаенко¹, А. О. Казачинский¹, И. Ю. Крутова¹, О. В. Опрышко¹

¹Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

В докладе рассмотрены вопросы, связанные с исследованием природных восходящих закрученных потоков, таких как торнадо, тропические циклоны и огненные вихри. Для системы уравнений газовой динамики с учетом действия сил тяжести и Кориолиса обосновано существование и единственность решения конкретных характеристических задач Коши стандартного вида, моделирующих неоднородные течения со стоком, притоком и возле нагревающегося цилиндра. Установлен факт отсутствия закрутки, если в исходной начально-краевой задаче не учитывается вращение Земли вокруг своей оси. Численными методами приближенно построены трехмерные стационарные течения идеального газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости в условиях действия сил тяжести и Кориолиса и определены их геометрические, скоростные и энергетические характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С. П. *Торнадо и сила Кориолиса*. Новосибирск: Наука, 2008.
2. Баутин С. П., Обухов А. Г. *Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей*. Новосибирск: Наука, 2012.
3. Баутин С. П., Крутова И. Ю., Обухов А. Г., Баутин К. В. *Торнадо и сила Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты*. Новосибирск: Наука, 2013.
4. Баутин С. П., Дерябин С. Л., Крутова И. Ю., Обухов А. Г. *Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси*. Екатеринбург: УрГУПС, 2017.
5. Казачинский А. О., Крутова И. Ю. *Построение течений в придонной части восходящих закрученных потоков как решение одной характеристической задачи Коши: препринт*. Снежинск: изд-во СФТИ НИЯУ МИФИ, 2016.
6. Крутова И. Ю., Опрышко О. В. *Расчет кинетической энергии течений в придонной части торнадо и тропического циклона: препринт*. Снежинск: изд-во СФТИ НИЯУ МИФИ, 2018.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ БАЛОК, АРМИРОВАННЫХ ГЕОСЕТКАМИ

В. М. Бузник¹, С. К. Голушко^{2,3}, Г. А. Нужный¹, А. А. Очиров^{2,3}

¹ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» ГНЦ РФ, Москва

²Новосибирский государственный университет

³Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

При определении физико-механических свойств композиционных материалов (КМ) используются два основных подхода: феноменологический и структурный. В рамках первого подхода армированные материалы моделируются однородной анизотропной средой с эффективными физико-механическими свойствами, а механические параметры материала определяются при этом из экспериментов. При структурном подходе физико-механические характеристики композита удается выразить через характеристики его компонентов и структурные параметры армирования [1]. В результате по известным средним напряжениям и деформациям КМ удастся восстановить напряжения и деформации в связующем материале и армирующих элементах, что открывает широкие перспективы и возможности для улучшения свойств композитных конструкций. В работах [2, 3] разработан и реализован комплексный подход к построению математических моделей нелинейно-упругого деформирования полимерных матриц и углепластиков при изгибе, учитывающий эффект разносопротивляемости при растяжении и сжатии.

Доклад посвящен обсуждению возможных подходов к разработке математических моделей, проведению численных расчетов и анализу деформирования композитных элементов конструкций, в том числе с ледяными матрицами [4].

Исследования поддержаны Российским научным фондом (код проекта 18-13-00392).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голушко С. К., Немировский Ю. В. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. Амелина Е. В., Голушко С. К., Ерасов В. С., Идимешев С. В., Немировский Ю. В., Семисалов Б. В., Юрченко А. В., Яковлев Н. О. *Анализ и обработка экспериментальных данных при деформировании полимеров и углепластиков*. Омский научный вестник. 2015. № 3. С. 339–344.
3. Амелина Е. В., Голушко С. К., Ерасов В. С., Идимешев С. В., Немировский Ю. В., Семисалов Б. В., Юрченко А. В., Яковлев Н. О. *О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет*. Выч. технологии. 2015. Т. 20, № 5. С. 27–52.
4. Бузник В. М., Ландик Д. Н., Ерасов В. С., Нужный Г. А. *Физико-механические свойства композиционных материалов на основе ледяной матрицы*. Материаловедение. 2017. № 2 (239). С. 33–40.

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ СРЕД

В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Доклад посвящен изложению фундаментальных проблем математического моделирования волновой динамики природных стратифицированных сред (океан, атмосфера). Представлены основные математические модели, описывающие процессы возбуждения и распространения внутренних и поверхностных гравитационных волн в стратифицированных по вертикали, неоднородных по горизонтали и нестационарных средах. Изложены асимптотические методы, являющиеся обобщением пространственно-временного лучевого метода (методов геометрической оптики и ВКБ). На распространение внутренних и поверхностных гравитационных волн существенное влияние оказывают как неоднородность и нестационарность гидрофизических полей, так и изменение рельефа дна. При этом точные аналитические решения основных волновых задач получаются только в случае, если распределение плотности морской воды (рельеф дна) описываются достаточно простыми модельными функциями. Когда характеристики океанической среды (форма профиля дна) произвольны, можно построить только численные решения соответствующих задач. Однако последнее не позволяет качественно анализировать характеристики волновых полей, особенно на больших расстояниях, что необходимо для решения, например, проблемы обнаружения внутренних волн дистанционными методами в том числе с помощью средств аэрокосмической радиолокации. В этом случае описание и анализ волновой динамики можно осуществить только на основе асимптотических моделей и аналитических методов их решения, изложенных в докладе. Особая роль разработанных асимптотических методов обусловлена тем обстоятельством, что основные параметры природных стратифицированных сред (океан, атмосфера), как правило, известны приближенно, и попытки их точного численного решения по исходным уравнениям гидродинамики с использованием таких параметров могут привести к заметной потере точности получаемых результатов. Помимо фундаментального интереса построенные математические модели представляют значительную ценность для практики, поскольку позволяют решать задачи моделирования волновых гидрофизических полей в широком классе приложений [1–3].

Работа выполнена по теме государственного задания (AAAAA17-117021310375-7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. *Волны в стратифицированных средах*. М.: Наука, 2015.
2. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. *Теория волновых движений неоднородных сред*. Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017.
3. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. *Новые задачи математической теории поверхностных волновых возмущений*. Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В РАМКАХ ПОДХОДА PLANAR3D ILSA

А. В. Валов¹, А. Н. Байкин^{1,2}, Е. В. Донцов³

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³W. D. Von Gonten Laboratories, Houston, USA

В современных симуляторах гидроразрыва пласта наблюдается переход к моделированию раскрытия магистральной трещины в рамках подхода Planar3D. В отличие от классических моделей (PKN, KGD) в этом подходе не делается никаких априорных предположений о характерном отношении длины и высоты трещины. В модели Planar3D все направления развития трещины равноправны с точки зрения применяемых критериев разрушения, учета вязкости и фильтрационно-емкостных свойств. Поэтому модель Planar3D дает более правильную картину развития трещины.

Для решения задачи теории упругости в работе применяется метод разрывных смещений [1], который является разновидностью метода граничных элементов. Использование данного подхода позволяет значительно ускорить алгоритм, поскольку исходная трехмерная задача теории упругости сводится к одному интегральному соотношению между давлением жидкости в трещине и раскрытием.

Одной из существенных проблем в моделировании плоской трещины является отслеживание положения ее фронта. В линейной теории упругости напряжения имеют сингулярность в вершине трещины, для разрешения которой требуется измельчение расчетной сетки и ее перестроение по мере продвижения фронта трещины. Для того, чтобы избежать связанных с этим временных затрат, а также повысить точность вычислений, в работе используется алгоритм [2], основанный на использовании универсальной асимптотики в вершине трещины, которая связывает раскрытие трещины во внутренних точках с расстоянием до фронта трещины и, тем самым, определяет положение фронта трещины на относительно грубой равномерной сетке.

Другая трудность при моделировании состоит в том, что пласт имеет множество слоев, значения сжимающих напряжений в которых могут существенно отличаться. Конечная форма трещины существенным образом зависит от контраста напряжений и наличия перемычек с повышенным напряжением. Для корректного вычисления положения фронта трещины необходимо учитывать этот факт. Наличие слоев с различными сжимающими напряжениями или остановка закачки могут вызвать частичное или полное закрытие трещины. Для получения корректного результата в этом случае решается контактная задача, которая позволяет естественным образом вычислить значение контактной силы и обеспечивает корректное вычисление потоков жидкости внутри трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crouch S. L., Starfield A. M., Rizzo F. J. *Boundary element methods in solid mechanics*. Journal of Applied Mechanics. 1983. V. 50. P. 704–705.
2. Dontsov E. V., Peirce A. P. *A multiscale implicit level set algorithm (ILSA) to model hydraulic fracture propagation incorporating combined viscous, toughness, and leak-off asymptotics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017. V. 313. P. 53–84.

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ПРОДОЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СТЕНКИ

Р. Д. Вахитова, Е. И. Могилевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассматривается течение тонкого слоя неньютоновской жидкости по вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Плоскость совершает гармонические колебания фиксированной амплитуды и частоты в продольном направлении. Решается задача о безволновом течении с плоской свободной поверхностью, в котором имеется только одна ненулевая компонента скорости, описываемая периодической по времени функцией. Изучается устойчивость такого решения к малым возмущениям в предположении, что характерная частота возмущений много меньше частоты колебаний плоскости.

Жидкости полагаются обобщенно-ньютоновскими: тензор вязких напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций с коэффициентом, зависящим от второго инварианта последнего. Рассматриваются реологические модели степенной жидкости и Эйринга. Вторая модель позволяет учесть конечное значение эффективной вязкости при малых скоростях сдвига, имеющих место вблизи свободной поверхности.

Безволновое решение ищется с помощью численного решения обобщенных уравнений Навье – Стокса с учетом плоско-параллельного характера течения. Результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными [1]. Показано, что использование модели Эйринга приводит к лучшему соответствию результатов моделирования эксперименту, чем применение модели степенной жидкости.

Для исследования устойчивости были выведены уравнения для интегральных соотношений методом Капицы – Шкадова. Так как частота рассматриваемых волн мала по сравнению с частотой колебаний стенки, в каждом сечении в каждый момент времени профиль продольной скорости является решением задачи о безволновом течении для локальных значений расхода и толщины пленки. Полученные результаты сравниваются с решением полной задачи об устойчивости течения пленки ньютоновской жидкости по осциллирующей стенке [2].

Получено, что для псевдопластических жидкостей колебания стенки приводят к увеличению среднего расхода при фиксированной толщине слоя. Течение становится устойчивым к малым возмущениям низкой частоты при определенном критическом значении амплитуды колебаний. Значение этой амплитуды зависит от частоты колебаний стенки, но имеет конечный предел при стремлении частоты к бесконечности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-71-00049).

ЛИТЕРАТУРА

1. Sobolik V. *Film flow of pseudoplastic liquids along an oscillating wall*. Rheol. Acta. 1994. V. 33, № 2. P. 136–144
2. Буря А. Г., Шкадов В. Я. *Устойчивость пленки жидкости, стекающей по колеблющейся наклонной поверхности*. Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 3–13.

АНАЛИЗ РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛАМИНАРНОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ

В. В. Веденеев¹, Л. Р. Гареев¹, Ю. С. Зайко², А. И. Решмин², В. В. Трифонов²

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

²НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Предсказания модальной теории устойчивости подтверждены экспериментально лишь для нескольких классов течений [1–5]. Развитие возмущений в затопленных струях экспериментально изучено гораздо менее подробно, причиной чего являются низкие критические числа Рейнольдса Re_{cr} для этих потоков.

В докладе экспериментально исследована устойчивость затопленной струи, результаты сравниваются с предсказаниями линейной теории устойчивости. Поток создавался посредством специального метода – формировалась длинная (~ 0.66 м) ламинарная затопленная струя диаметром 0.12 м при числах Рейнольдса около 10000 [6]. Достаточно большой диаметр позволил детально экспериментально исследовать развитие возмущений в струе. Возмущения вносились посредством колеблющегося кольца из тонкой проволоки, расположенного на расстоянии 0.01 м от диффузора, из которого струя вытекает. Задавались частоты колебаний кольца от 0 до 12 Гц с шагом 0.25 Гц. Влияние возмущений на струю фиксировалось с помощью камеры, струя была засеяна светоотражающими частицами глицерина и подсвечена лазерным ножом. Получено, что наибольшее сокращение длины ламинарного участка струи происходит при частотах колебаний кольца в диапазоне 4...6 Гц, что согласуется с предсказаниями линейной теории устойчивости – частоты наиболее быстро растущих возмущений лежат в этом диапазоне. Полученные экспериментально длины волн также хорошо коррелируют с теоретически полученными значениями длин волн наиболее быстро растущих возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 18-38-00745, 18-08-00074).

ЛИТЕРАТУРА

1. Schubauer G. B., Skramstad H. K. *Laminar-Boundary-Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate*. NACA-TR-909. 1948.
2. Boiko A. V., Westin K. J. A., Klingmann B. G. B., Kozlov V. V., Alfredsson P. H. *Experiments in a boundary layer subjected to free stream turbulence. Part 2. The role of TS-waves in the transition process*. J. Fluid Mech. 1994. V. 281. P. 219–245.
3. Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y. *An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow*. J. Fluid Mech. 1975. V. 72, № 4. P. 731–751.
4. Козлов В. В., Рамазанов М. П. *Экспериментальное исследование устойчивости течения Пуазейля*. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1981. Т. 8, № 2. С. 45–48.
5. Eckhardt B. *Introduction. Turbulence transition in pipe flow: 125th anniversary of the publication of Reynolds' paper*. Phil. Trans. R. Soc. A. 2009. V. 367. P. 449–455.
6. Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A. *Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers*. Physics of Fluids. 2018. V. 30. 043603.

АБСОЛЮТНАЯ И КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Веденеев, Ю. С. Зайко

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Неустойчивость течений жидкости и других физических систем может быть двух видов. В первом случае, когда ограниченные в пространстве растущие возмущения (волновые пакеты) сносятся потоком из любой заданной области, неустойчивость конвективная, а если растут вверх и вниз по потоку – то абсолютная [1]. Известно, что в струйных течениях и течениях в виде следа за телом с «классическими» профилями скорости неустойчивость всегда конвективная, а абсолютной она может становиться лишь при наличии достаточно сильного возвратного течения [2, 3] (в частности, возникновение дорожки Кармана при $Re > 47$ объясняется как результат абсолютной неустойчивости стационарного обтекания цилиндра [4]).

Однако при анализе устойчивости затопленных струй, создаваемых устройством [5], было обнаружено, что неустойчивость, порождаемая точкой перегиба в профиле скорости, вблизи выходного отверстия устройства является абсолютной. Анализ механизма абсолютной неустойчивости показал, что для ее возникновения необходимы два условия: (1) скорость в точке перегиба должна быть мала, (2) крутизна падения скорости в точке перегиба должна быть достаточно высокой. При выполнении обоих условий возникает 1:1 резонанс между вверх и вниз бегущей волной, что и дает абсолютную неустойчивость. В то время как в классических профилях [2, 3] выполняется лишь второе условие, в струях с профилями скорости [5] – оба, что приводит к абсолютной неустойчивости без необходимости наличия возвратного течения жидкости.

При удалении от выходного отверстия профиль скорости в окрестности точки перегиба изменяется из-за действия вязкости (струя «расплывается»), и оба условия (1), (2) перестают быть выполненными на расстоянии лишь половины диаметра струи от выходного отверстия. В результате в эксперименте абсолютная неустойчивость не наблюдается. Обсуждаются меры к предотвращению «расплывания» струи для экспериментального наблюдения абсолютной неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-38-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977.
2. Huerre P., Monkewitz P. A. *Absolute and convective instabilities in free shear layers*. J. Fluid Mech. 1985. V. 159. P. 151–168.
3. Abid M., Brachet M., Huerre P. *Linear hydrodynamic instability of circular jets with thin shear layers*. Eur. J. Mech., B/Fluids. 1993. V. 12, № 5. P. 683–693.
4. Pier B. *On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake*. J. Fluid Mech. 2002. V. 458. P. 407–417.
5. Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A. *Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers*. Phys. Fluids. 2018. V. 30. 043603.

ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

И. И. Вигдорович

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Построена асимптотическая теория для описания гидродинамики и теплообмена в до- и сверхзвуковом турбулентном пограничном слое на пластине при нулевом продольном градиенте давления. Рассмотрены все возможные случаи теплопередачи на обтекаемой поверхности – охлаждаемая, теплоизолированная и нагреваемая стенка при величине температурного фактора, имеющей порядок единицы (умеренные числа Маха набегающего потока).

Тот факт, что задача зависит от конечного числа определяющих параметров, позволяет сформулировать условия замыкания, связывающие турбулентное касательное напряжение и турбулентный поток тепла с градиентами усредненной скорости и энтальпии. Уравнения Рейнольдса для сжимаемого газа решены методом сращиваемых асимптотических разложений в трех характерных областях течения: вязком подслое, логарифмическом подслое и внешней области пограничного слоя.

В результате дано полное описание течения в терминах законов подобия для основных гидродинамических и тепловых величин. Установлены законы подобия для скорости и температуры, справедливые в пристеночной области пограничного слоя (законы стенки), которые позволяют представить профили скорости и температуры в потоке сжимаемого газа через профили этих величин в несжимаемом пограничном слое. Главный член асимптотики для профиля скорости соответствует известной формуле Ван Дриста. Однако полученное решение содержит еще дополнительные слагаемые порядка единицы, которые исправляют недостатки формулы Ван Дриста и обеспечивают лучшее согласование с экспериментальными данными. Аналогичную структуру имеет закон стенки для температуры, который для сжимаемого течения установлен впервые.

Кроме постоянной Кармана и турбулентного числа Прандтля в логарифмической области, известных для течения несжимаемой жидкости, в теории появляются три новые универсальные постоянные, которые не зависят от молекулярных свойств и отношения теплоемкостей газа. Их значения определены путем сопоставления законов стенки с экспериментальными данными.

Установлены законы дефекта скорости и температуры для внешней области пограничного слоя, а также законы подобия для рейнольдсовых напряжений, турбулентного потока тепла, среднеквадратичной пульсации температуры. Получены законы трения и теплопередачи и аналитические выражения для коэффициентов восстановления и аналогии Рейнольдса.

Все соотношения являются точными асимптотическими решениями уравнений Рейнольдса, а построенная теория свободна от каких-либо частных гипотез о характере турбулентного обмена и основывается только на первых принципах.

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Р. А. Вирц, А. А. Папин

Алтайский государственный университет, Барнаул

В работе рассматривается математическая модель фильтрации жидкости в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета – Леверетта, в которой пористость считается заданной функцией [1]. Рассматриваемый процесс описывается следующей системой уравнений [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi \rho_i^0 s_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho_i^0 s_i \vec{u}_i) &= 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial((1 - \phi) \rho_3^0)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi) \rho_3^0 \vec{u}_3) = 0, \\ s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) &= -\frac{K_0(\phi) k_{0i}}{\mu_i} \left(\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g} \right), \quad p_2 - p_1 = p_c(x, s_1), \quad s_1 + s_2 = 1, \quad i = 1, 2, \\ \nabla \cdot \vec{u}_3 &= -a_1(\phi) p_e - a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \\ \rho_{tot} \vec{g} + \nabla \cdot \left((1 - \phi) \eta \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) - \nabla p_{tot} &= 0, \end{aligned}$$

где ϕ – пористость, $\rho_i^0 = const$, $\vec{u}_i, p_i$ – истинная плотность, скорость, давления фаз ($i = 1, 2, 3$), s_i – насыщенность жидкой фазы ($i = 1, 2$), $p_e = p_{tot} - p_f$ – эффективное давление, $p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_3$ – общее давление, $p_f = s_1 p_1 + s_2 p_2$ – давление жидкой фазы, $\rho_{tot} = (1 - \phi) \rho_3^0 + \phi (s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0)$ – общая плотность, $K_0(\phi), k_{0i}, \mu_i, p_c(s_1), a_1(\phi), a_2(\phi), \eta$ – заданные величины.

В докладе излагаются результаты аналитического и численного исследования начально-краевых задач для указанной системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*. Новосибирск: Наука, 1983.
2. Папин А. А., Подладчиков Ю. Ю. *Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде*. Известия АлтГУ. 2015. №1. С. 131–135.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИРКУЛЯЦИЙ В ОЗЕРЕ ШИРА

О. С. Володько

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
Сибирский федеральный университет, Красноярск

Данная работа посвящена трехмерному численному моделированию течений и внутренних волн в озере Шира в летний период. Шира представляет собой неглубокое соленое озеро, стратифицированное по глубине. Исследование озера проводится по различным направлениям, включая анализ его гидрофизических характеристик, которые в значительной степени определяют химическое взаимодействие неорганических и органических составляющих живых организмов в озере. Для моделирования циркуляций в озере Шира была применена модель ROMS (Regional Ocean Modeling System) [1]. В данной модели используется система уравнений гидрофизики, основанная на приближениях Буссинеска и гидростатики. В качестве начальных данных для температуры и солёности были взяты данные натурных измерений 2009-2018 гг. Для учета рельефа дна данные батиметрии были интерполированы на равномерную сетку [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. ROMS <https://www.myroms.org/> (дата обращения 10.01.2019)
2. Shchepetkin A. F., Volodko O. S., *A method for reconstructing bottom topography for an enclosed basin from scattered, sparse measurement data*. Океанологические исследования. 2018. Т. 46, № 3. С. 67–84.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n -ГО ПОРЯДКА С n СИММЕТРИЯМИ

Р. К. Газизов^{1,2}, А. А. Гайнетдинова¹

¹Уфимский государственный авиационный технический университет

²ООО «РН-УфаНИПИнефть», Уфа

Рассматривается алгоритм интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) n -го порядка вида

$$u_i^p = f_i(t, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, u_m^{(p-1)}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

с $n = pm$ симметриями вида

$$X_\alpha = \xi_\alpha(t, u_1, \dots, u_m) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \eta_\alpha^j(t, u_1, \dots, u_m) \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Предполагается, что уравнения (1) имеют инвариантное представление в виде

$$I_p^k = F^k(I_q), \quad k = 1, \dots, m,$$

где I_p^k — дифференциальные инварианты p -го порядка, I_q — дифференциальный инвариант q -го порядка, $q < p$.

Предлагаемый метод основан на использовании оператора инвариантного дифференцирования (ОИД) λD_t (см., например, [1]) с коэффициентом вида

$$\lambda = (D_t \Phi)^{-1}, \quad \Phi \neq \text{const}, \quad (3)$$

введенного в [2], и дает конструктивный алгоритм построения первых интегралов системы (1), а также допускаемой алгебры Ли для редуцированной системы уравнений.

В докладе обсуждаются вопросы существования ОИД с коэффициентом вида (3), условия применимости предлагаемого метода, а также его модификация при применении к системам уравнений с малым параметром.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по государственному заданию № 1.3103.2017/4.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
2. Газизов Р. К., Гайнетдинова А. А. *Оператор инвариантного дифференцирования и его применение для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений*. УМЖ. 2017. Т. 9, № 4. С. 12–21.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

А. М. Гайфуллин, Д. А. Гаджиев, В. В. Жвик, А. В. Зубцов

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,
Жуковский

Представлено решение четырех задач, связанных со взаимодействием протяженных вихревых образований друг с другом и с твердыми телами. Первая задача о несимметричном течении, реализуемом около симметричного удлиненного тела при симметрии потока на бесконечности. Здесь в рамках уравнений Эйлера получено точное решение для параболического крыла. Выявлены диапазоны существования несимметричных решений. Обсуждаются вопросы устойчивости полученного решения.

Следующие две задачи решены в рамках ламинарного течения. Это задача о нестационарном течении сжимаемого газа около вращающегося нагретого кругового цилиндра и взаимодействие двух закрученных струй в несжимаемой жидкости. Вокруг вращающегося цилиндра при определенных условиях может образоваться

область, в которой газ вращается по круговому контуру с большей циркуляцией скорости, чем циркуляция по контуру цилиндра. Для взаимодействующих струй определен сценарий превращения продольной завихренности из двух круговых областей в четырехлепестковую структуру. Выявлена асимптотика затухания продольной завихренности на большом расстоянии от источников.

Четвертая задача – исследование одного из основных механизмов поддержания турбулентного течения – явления растяжения вихря. Рассматривается модельная задача, в которой процесс растяжения вихря происходит в стационарных условиях на масштабах от колмогоровского до масштаба турбулентности. Оказалось, что сценарий растяжения вихря зависит от масштаба вихря.

СТАЦИОНАРНЫЕ СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ НАД КОМБИНИРОВАННЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

М. А. Галичкина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается двумерная задача о стационарных стратифицированных течениях в поле силы тяжести над неровным дном. Базовой математической моделью является нелинейное уравнение Дюбрей-Жакотэн – Лонга для функции тока, которое исследуется методом возмущений по малому параметру в сочетании с методом нормальных мод. В настоящее время исследование интерференции подветренных волн в дальнем поле над пологим комбинированным препятствием в виде системы нескольких возвышений является актуальной задачей и основной целью данной работы. С помощью полуаналитических методов было исследовано влияние формы дна и параметров набегающего потока на возникающие волновые структуры в ближнем поле. Проведены серии численных экспериментов, в которых рассмотрены формы рельефа, отличающиеся количеством препятствий, их высотой и расстоянием между ними. Показано, что взаимное расположение препятствий существенно влияет на структуру течения в придонном слое и общую интерференционную картину волн.

СИЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ СОЛИТОННЫЙ ГАЗ

А. А. Гелаш¹, Д. С. Агафонцев²

¹*Новосибирский государственный университет*

²*Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва*

Статистическое поведение ансамблей солитонов является важным разделом общей проблемы под названием интегрируемая турбулентность [1, 2]. В этой работе мы рассматриваем одну из самых известных и фундаментальных интегрируемых моделей физики нелинейных волновых процессов – нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Мы предлагаем новый подход к моделированию солитонного газа высокой пространственной плотности или, иными словами, сильно взаимодействующего

солитонного газа [3]. Для того, чтобы моделировать такой солитонный газ мы используем N -солитонные решения НУШ с $N \sim 100$. Прямое использование точных N -солитонных формул приводит к численным ошибкам уже при $N \sim 10$ по причине плохой обусловленности задачи. Эта неустойчивость носит исключительно численный характер, и о физической неустойчивости решений речь не идет. Для того чтобы преодолеть проблему плохой обусловленности задачи, мы используем для построения N -солитонных решений метод одевания, комбинированный с арифметикой произвольной точности. Насколько нам известно, N -солитонные решения интегрируемых уравнений с таким большим числом солитонов ранее не конструировались и не исследовались. Мы используем ансамбли N -солитонных решений в качестве начальных условий для дальнейшего численного моделирования статистических характеристик волнового поля сильно взаимодействующего солитонного газа, таких как функция плотности вероятности волновых амплитуд, спектр волнового действия, кинетическая и потенциальная энергии. Также изучается динамика волнового поля такого солитонного газа, например, профиль формирующихся волн-убийц.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-10128).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zakharov V. E. *Turbulence in integrable systems*. Studies in Applied Mathematics. 2009. V. 122, № 3. P. 219–234.
2. Zakharov V. E., Agafontsev D. S. *Integrable turbulence and formation of rogue waves*. Nonlinearity. 2015. V. 28, № 8. P. 2791.
3. Gelash A. A., Agafontsev D. S. *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*. Physical Review E. 2018. V. 98. P. 042210.

КРИТЕРИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ СНИЖЕНИЯ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ЭНЕРГОВКЛАДА В НАБЕГАЮЩИЙ ПОТОК

П. Ю. Георгиевский, В. А. Левин

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Ранее показано [1], что снижение волнового сопротивления тел при помощи локализованного в набегающем потоке энерговклада в первую очередь обусловлено формированием передних отрывных зон в результате взаимодействия с высокотемпературным следом за областью энерговклада. В соответствии с [2] форма изобарических отрывных зон определяется поперечным распределением локальных чисел Маха в следе, а давление внутри – полным давлением за прямым скачком в следе.

В настоящей работе численно исследовано сверхзвуковое обтекание тел при наличии в набегающем потоке областей энерговклада эллипсоидальной формы. Сформулирован критерий эквивалентности для снижения волнового сопротивления тел,

связывающий параметры энергоисточника и набегающего потока: произведение интенсивности энергоисточника на его продольный размер должно быть пропорционально числу Маха набегающего потока. Физически данное условие означает, что каждая жидкая частица за время движения через область энерговклада получает при разных скоростях набегающего потока примерно одинаковое количество тепла.

Показано, что выполнение данного физического критерия обеспечивает сохранение отношения мощности энергоисточника к потоку энтальпии через поперечное сечение области энерговклада при изменении размера, удлинения, интенсивности энергоисточника и числа Маха набегающего потока. Кроме того, при выполнении критерия распределения в поперечном направлении плотности и относительного числа Маха в области дальнего высокотемпературного следа почти совпадают. В численных расчетах обтекания тел установлено, что в этих условиях при различных числах Маха формируются примерно одинаковые передние отрывные зоны и, соответственно, достигается примерно одинаковое снижение сопротивления. В этом случае коэффициент эффективности снижения сопротивления (определяется как отношение сэкономленной и вложенной мощностей) пропорционален числу Маха набегающего потока в квадрате и отношению площадей миделевых сечений тела и области энерговклада. Для обтекания сферы снижение волнового сопротивления составило 35%, а коэффициент эффективности при числе Маха 5 превысил 1000.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-29-01092, 18-01-00793).

ЛИТЕРАТУРА

1. Георгиевский П. Ю., Левин В. А. *Управление обтеканием различных тел с помощью локализованного подвода энергии в сверхзвуковой набегающий поток*. Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 152–165.
2. Гувернюк С. В., Савинов К. Г. *Отрывные изобарические структуры в сверхзвуковых потоках с локализованной неоднородностью*. ДАН. 2007. Т. 413, № 2. С. 188–192.

ЭФФЕКТ ФОКУСИРОВКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ ВОЛН И БЫСТРОЛЕТЯЩИХ ТЕЛ С ГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЯМИ

П. Ю. Георгиевский¹, В. А. Левин^{1,2}, О. Г. Сутырин¹

¹ НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

² Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Обсуждается эффект фокусировки, реализующийся при взаимодействии распространяющихся в газах ударных волн и летящих со сверхзвуковой скоростью затупленных тел с газовыми пузырями пониженной или повышенной плотности.

Динамика быстропротекающего процесса фокусировки при взаимодействии ударных волн с газовыми пузырями эллипсоидальной формы описана в [1]. В случае пониженной плотности приосевая часть ударной волны ослабляется и ускоряется внутри газового пузыря, а на периферии течения формируется зона повышенного давления, от которой распространяется усиливающаяся по мере приближения к оси симметрии фокусирующаяся тороидальная ударная волна. В случае повышенной плотности приосевая часть ударной волны усиливается и тормозится внутри газового пузыря, а периферийная – преломляется, огибая пузырь. При этом в зависимости от удлинения пузыря возможны случаи, когда проходящая по пузырю и огибающая ударные волны фокусируются в очень малом объеме в режиме близком к гудерлеевскому.

Эффект фокусировки позволяет объяснить аномальные всплески давления и плотности при взаимодействии затупленных тел с газовыми пузырями в набегающем сверхзвуковом потоке [2]. Установлено, что взаимодействие головной ударной волны с газовыми пузырями соответствует описанным сценариям с учетом некоторой специфики, обусловленной наличием поверхности тела в непосредственной близости от зоны фокусировки. Аномальный всплеск давления в критической точке тела обусловлен воздействием кумулятивных струй, формирующихся при фокусировке и маховском отражении тороидальных ударных волн.

Выполнено исследование инициирования детонации при взаимодействии ударных волн с газовыми пузырями, заполненными пропано-воздушной смесью с добавками тяжелого инертного газа. Показано, что наряду с прямым инициированием детонации при числах Маха ударной волны, превышающих некоторую критическую величину, возможно инициирование детонации при существенно подкритических числах Маха за счет эффектов преломления и фокусировки ударных волн.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-29-01092, 18-01-00793).

ЛИТЕРАТУРА

1. Георгиевский П. Ю., Левин В. А., Сутырин О. Г. *Эффект кумуляции при взаимодействии скачка уплотнения с локальной областью газа повышенной или пониженной плотности*. Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 6. С. 146–154.
2. Георгиевский П. Ю., Левин В. А. *Нестационарное взаимодействие сферы с атмосферными температурными неоднородностями в сверхзвуковом потоке*. Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 174–183.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ИНИЦИАЦИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ ЗАКАНЧИВАНИЯ СКВАЖИНЫ

С. В. Головин^{1,2}, А. А. Латышев^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается задача определения предельного давления жидкости в скважине, при котором происходит инициация трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Задача решается для трех систем заканчивания скважины: открытый ствол, открытый ствол в окрестности пакера, цементированный ствол с перфорациями. Элементы скважины и горная порода рассматриваются как линейный упругий материал. Для каждой из систем заканчивания, поставленная задача решается численно в области, представляющей собой параллелепипед с расположенной внутри скважиной. Для случаев открытого ствола и ствола с пакером, скважина представляет собой цилиндрическое отверстие в горной породе. В случае обсаженного ствола с перфорациями, скважина состоит из стальной трубы; соосной оболочки цементного камня и окружающей породы. От скважины отходят перфорации, представленные цилиндрами, ортогональными оси скважины. Кончики перфораций задаются в виде полусфер.

Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) системы требуется решить уравнение равновесия упругого тела в рассматриваемой области. На внутренней поверхности скважины и перфораций задано нормальное давление жидкости, заполняющей скважину. На внешней границе области ставится условие заданного напряжения в соответствии с точным решением для скважины без перфораций [1], [2].

На текущем этапе рассматриваемая задача решена с помощью метода конечных элементов в программном пакете FreeFem++ [3]. Построение геометрии осуществляется при помощи генератора трехмерной конечноэлементной сетки Gmsh [4]. Программа, получив на вход требуемый набор параметров, для выбранной системы заканчивания проводит расчет НДС и проверку критериев разрушения.

В результате проделанной работы разработан программный модуль, осуществляющий расчет потенциальных зон разрушения породы в прискважинной зоне во время инициации ГРП. Модуль учитывает сложную геометрическую структуру области, различие между физическими параметрами материалов, а также произвольный постоянный тензор преднапряженного состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант 14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ching H. Yew, Xiaowei Weng *Mechanics of Hydraulic Fracturing*. Gulf Professional Publishing. 2015. Second edition. P. 69–88.
2. Timoshenko S., Goodier J.N. *Theory of elasticity*. McGraw-Hill book company, 1951.
3. Hecht F. *New development in Freefem++*. J. Numer. Math. 2015. V. 20, № 3-4. P. 251–265.
4. Geuzaine C., Remacle J.-F. *Gmsh reference manual*, 2018.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СЦЕНАРИЯ ЭМБОЛИЗАЦИИ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ МАЛЬФОРМАЦИИ

Т. С. Гологуш¹, А. А. Черевко¹, И. А. Петренко², В. В. Остапенко¹

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Владимирский государственный университет

Артериовенозная мальформация (АВМ) является сложным и опасным пороком развития сосудов головного мозга. Одним из методов лечения АВМ является эмболизация – внутрисосудистое заполнение клубка сосудов АВМ специальной эмболизирующей композицией. Данный метод широко применяется, но до сих пор в некоторых случаях сопровождается интраоперационным разрывом сосудов.

АВМ может адекватно моделироваться пористой средой в силу неупорядоченного расположения вырожденных сосудов малых диаметров, осуществляющих прямой сброс крови из артерии в вену. Для описания процесса эмболизации в одномерном приближении используется уравнение Баклея – Леверетта, которое решается численно с помощью новой модификации схемы КАБАРЕ [1].

В данной работе изучается оптимальный с точки зрения безопасности и эффективности сценарий эмболизации. Процесс эмболизации описывается как процесс оптимального управления, где, управляя концентрацией эмболизирующего вещества на вход АВМ, нужно добиться максимальной эмболизации за конечное время при выполнении следующих ограничений, вытекающих из нейрохирургической практики: доля эмболизата в АВМ не должна превышать 60% во все моменты времени, эмболизирующая композиция не должна попасть в вену во время операции.

Другими словами, необходимо подобрать такой режим подачи эмболизирующего вещества, чтобы решение задачи Баклея – Леверетта доставляло минимум функционалу:

$$(1 - \alpha) \frac{1}{L} \int_0^L S(T, x) dx + \alpha \min_{x \in [0, L]} S(T, x), \quad \alpha \in (0, 1]$$

с ограничениями:

$$\frac{1}{L} \int_0^L S(t, x) dx \geq 0.4, \quad t \in [0, T]; \quad S(t, L) = 1, \quad t \in [0, T].$$

Здесь $S(x, t)$ – концентрация крови, L – длина АВМ, T – момент окончания подачи эмболизирующего вещества.

На основе клинических данных построены модели для нескольких реальных пациентов. Для специального закона подачи эмболизата рассчитаны допустимые и оптимальные сценарии эмболизации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 17-08-01736) и гранта Правительства РФ (грант № 14.W03.31.0002.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cherevko A. A., Gologush T. S., Petrenko I. A., Ostapenko V. V. *Numerical modeling process of embolization arteriovenous malformation*. AIP Conf. Proc. 2017. V.1893. 030123.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАВЯЩЕЙСЯ ЧАСТИЦЫ

А. Н. Голубятников, О. О. Иванов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В гидромеханике давно известно о действии ускоряющей реактивной силы на источник массы, которое легко рассчитывается в рамках идеальной жидкости. По существу это связано с механизмом движения в жидкости точки переменной массы. На этом пути еще Л. И. Седовым [1] была указана также возможность снижения сопротивления тела, движущегося в вязкой жидкости. Дальнейшие исследования движения плавящейся частицы в собственном расплаве [2] показали, что реактивная сила может даже превосходить силу вязкого сопротивления в случае достаточно перегретого расплава. Решение задачи о движении источника массы может применяться в самых различных областях механики и физики: моделирование гравитационного взаимодействия [3, 4], движение плавящихся броуновских частиц [5], динамика расплава с примесью плавящихся частиц как теория смесей.

В докладе в линейном приближении рассматривается автомодельная задача о движении плавящейся сферической твердой частицы в собственном несжимаемом вязком расплаве. Ранее было дано решение этой задачи в более простых постановках: в идеальной жидкости с квазистатическим полем температуры [4], при квазистационарном движении вязкой жидкости и автомодельном распределении температуры [2]. Эти решения указывают на преобладание реактивной силы над силой вязкого сопротивления при достаточно большой относительной разности температуры расплава вдали от частицы и температуры плавления. В более точной постановке задача о движении, как и задача о плавлении, может рассматриваться как автомодельная, определяемая одной размерной постоянной — кинематическим коэффициентом вязкости. При этом число Рейнольдса остается постоянным и может быть малым: радиус частицы уменьшается, а скорость увеличивается. Вычислена гидродинамическая сила, действующая на частицу, также постоянная в силу автомодельности. Решение задачи ближе к стационарному решению Стокса, чем к нестационарному движению сферы постоянного радиуса, содержащему запаздывание, но приводит к дополнительным слагаемым.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00037).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. *Об обтекании идеальной жидкостью тела со встречной струей*. Доклады АН СССР. 1972. Т. 206, № 1. С. 41–42.
2. Иванов О. О. *К движению плавящейся частицы*. Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018. № 6. С. 74–78.
3. Golubiatnikov A. N. *On a model of gravitation as mass exchange with vacuum*. Gravitation and Cosmology. 2003. V. 9, № 4. P. 262–264.
4. Голубятников А. Н. *О взаимодействии плавящихся частиц и моделировании гравитации*. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 4, № 3. С. 728–729.
5. Ivanov O. O., Golubiatnikov A. N. *On Brownian motion of melting particle*. J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1129. 012013.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И РЕЗОНАНСНЫЕ РЕШЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

А. Н. Голубятников, Д. В. Украинский

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Развивается экономичный метод аналитического, в частности, точного, построения решений уравнений адиабатического движения идеального совершенного газа, периодических по времени, которые, в свою очередь, могут возмущаться ограниченной силой, создающей резонансную ситуацию. Используется разложение по степеням периодической функции по времени, желательной, связанной с каким-либо точным решением близкой задачи. Периодические решения могут реализовываться как за счет действия специальных краевых условий (поршней), так и за счет массовых сил, например, собственной или внешней силы тяжести. К возмущающим силам можно отнести действие на заряженный газ внешнего электрического поля. Такого рода задачи встречаются в динамике атмосферы и астрофизике. В качестве уравнений принимается форма Вебера, как проекция уравнений Эйлера на лагранжеву систему координат, а также дифференциальное сохранение энтропии, наиболее удобные для перемножения рядов. Начальные условия задаются в виде функций от лагранжевых переменных — удельных энтропии, энтальпии и скорости движения. Полное решение строится только путем дифференцирования и целых алгебраических операций. Доказывается сходимость метода в определенном классе начальных данных.

Метод апробирован на периодических решениях уравнений газовой динамики с плоскими волнами [1]. В этом случае решение использует только операцию перемножения рядов второго порядка. В случае увеличения размерности уравнения Вебера сохраняют порядок умножения, но в уравнении для энтропии приходится при вычислении удельного объема использовать произведения третьего и четвертого порядков для плоской и пространственной задач соответственно. В качестве приложения рассматривается задача о сферических колебаниях цефеид [2], допускающая точное решение при однородном распределении начальной плотности и линейной скорости по пространственной координате, даже с учетом резонанса. Здесь представляет интерес исследование решения и при других различных классах начальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00037).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ukrainskii D. V., Golubiatnikov A. N. *On the periodical solutions for single-dimensional gas dynamics*. J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1129. 012035
2. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике*. М.: Наука, 1981.

МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ КАВИТАЦИИ НА СКОРОСТЬ ПОЛУЧЕНИЯ БИОЭТАНОЛА ИЗ ПОРОШКОВОЙ ЦЕЛЛЮЛОЗЫ

Р. Н. Голых, В. Н. Хмелев, Р. А. Лопатин, В. Д. Минаков

Бийский технологический институт (филиал) АлтГТУ им. И. И. Ползунова

Предложена модель влияния ультразвуковой кавитации на скорость получения биоэтанола из порошковой целлюлозы в ходе реакции ферментативного гидролиза. Модель позволяет выявить зависимости скорости убыли массы целлюлозы, находящейся в твердом состоянии, от частоты и интенсивности ультразвуковых колебаний, размеров частиц целлюлозы и концентрации фермента в растворе.

Модель основана на вероятностном подходе, позволяющем учесть вклад ударных волн, генерируемых каждым схлопывающимся кавитационным пузырьком, в образование новых свободных радикалов (за счет электрических разрядов вблизи поверхности пузырьков), активацию пар молекул «раствор фермента–целлюлоза» (за счет возрастания дисперсии кинетической энергии молекул раствора) и увеличение межфазной поверхности «раствор фермента–целлюлоза» (за счет ультразвукового диспергирования частиц целлюлозы) [1, 2].

Численный анализ модели позволил установить:

- степень влияния каждого из перечисленных факторов на ускорение процесса получения биоэтанола;
- существование оптимальной интенсивности, при которой скорость получения биоэтанола максимальна, для каждой частоты ультразвукового воздействия;
- возможность ускорения процесса получения биоэтанола наложением ультразвуковых колебаний более чем в 7 раз.

Результаты, полученные на основе анализа модели, подтверждены экспериментально, и служат основой для проектирования технологических линий производства биоэтанола с применением ультразвукового воздействия.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00094).

ЛИТЕРАТУРА

1. Margulis M. A. *Sonochemistry and Cavitation*. London: Gordon and Breach Publishers, 1995.
2. Khmelev V. N., Tsyganok S. N., Shakura V. A., Kuzovnikov Y. M., Abramenko D. S., Kopanitsyn V. M. *Research of the Process of Ultrasonic Dispersing on the Example of Brown Coal and Peat*. EDM. 2018. P. 292–296.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКОГО ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ

О. Н. Гончарова

Алтайский государственный университет, Барнаул

Изучаются режимы совместных течений теплопроводных сред (испаряющейся жидкости и газопаровой смеси) в трехмерном прямоугольном канале. Двухслойные течения с испарением/конденсацией описываются с помощью частично инвариантного решения ранга 2 и дефекта 3 уравнений Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска. При моделировании тепломассообмена в газопаровой фазе в определяющих уравнениях дополнительно учитываются эффекты термодиффузии и диффузионной теплопроводности. Пар считается пассивной примесью; диффузия пара в газе описывается уравнением, являющимся следствием закона Фика. Постановка задачи включает соотношения на термокапиллярной поверхности раздела: кинематическое и динамическое условия, уравнения баланса массы и энергии, условия непрерывности температуры и касательных скоростей, а также соотношение для концентрации пара на границе раздела. Внешними границами канала являются твердые теплоизолированные стенки, на которых заданы условия прилипания и отсутствия потока пара. Структура точного решения, являющегося обобщением решения Остроумова – Бириха, позволяет редуцировать исходную трехмерную задачу к цепочке двумерных задач. Для определения искомых функций разработан численный алгоритм, основанный на безусловно устойчивой продольно-поперечной конечно-разностной схеме второго порядка аппроксимации, и реализован авторский код.

Численное моделирование трехмерных течений в условиях нормальной гравитации и микрогравитации было выполнено для систем этанол – азот, HFE-7100 – азот и FC-72 – азот. Построенное решение позволяет описать наблюдаемые в экспериментах явления: формирование тепловых и концентрационных валов, термокапиллярных продольных валов, образование тепловых «рогов» вблизи боковых стенок за счет пристеночной конденсации, возникновение горячей пленки на поверхности жидкости.

Исследовано влияние тепловой нагрузки на структуру течений и характеристики испарения. Результаты, полученные в работе, позволяют разработать классификацию трехмерных режимов, аналогичную классификации Наполитано для двумерных потоков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Красноярского края (грант № 18-41-242005).

МИКРОМАСШТАБНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОСНОВНОГО СТРУКТУРНОГО ЭЛЕМЕНТА КЕРОГЕН-ГЛИНИСТО-КАРБОНАТНО-КРЕМНИСТЫХ ПОРОД БАЖЕНОВСКОЙ СВИТЫ

А. С. Григорьев, Е. В. Шилько, С. Г. Псахье

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Предложена микромасштабная модель основного структурного элемента пород баженовской свиты, характеризующихся композиционным минерально-органическим составом с высоким содержанием органических компонентов. Модель описывает структуру «несущего» слоя как композиционного материала на основе неорганической глинистой матрицы с различным (от $<5\%$ до $20-25\%$ [1]) содержанием органических «включений» и микропорами, заполненными легкими фракциями углеводородов. В рамках предложенной модели проведено исследование механического поведения основного элемента микроструктуры «несущего» слоя пород баженовской свиты путем компьютерного моделирования трехосного сжатия микромасштабных образцов. Величина приложенного давления варьировалась в соответствии с типичными P –условиями залегания породы [2]. Моделирование проводилось с использованием оригинального численного метода гибридных клеточных автоматов. Результаты компьютерного моделирования показали, что для «несущих» слоев породы характерна ярко выраженная анизотропия неупругих механических свойств. Наиболее важным результатом является то, что анизотропия свойств выражается лишь в количественных характеристиках (параметрах функции текучести), в то время как закономерности неупругого поведения являются общими для различных направлений деформирования. Так, механическое поведение образца при давлениях, отвечающих условиям залегания, удовлетворительно описывается на основе использования моделей горных пород с двухпараметрическими функциями текучести. В качестве такой функции предложено использование функции текучести в форме Мизеса – Шлейхера, учитывающей вклады локального давления и интенсивности напряжений в линейном приближении.

Работа выполнена в рамках Комплексной программы П.1 фундаментальных исследований СО РАН «Междисциплинарные интеграционные исследования» на 2018–2020 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немова В. Д., Панченко И. В. *Локализация приточных интервалов баженовской свиты и их емкостное пространство на Средне-Назымском месторождении*. Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2017. Т. 12, № 1. http://www.ngtp.ru/rub/4/11_2017.pdf
2. Немова В. Д., Панченко И. В., Ильин В. С., Смирнова М. Е. *Обзор результатов разработки баженовской свиты в связи с ее геологическим строением и пластовыми условиями (на примере средне-назымского и салымского месторождений)*. Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2017. № 1. С. 38–45.

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ В УСЛОВИЯХ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ И ВЯЗКОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

Ю. Н. Григорьев¹, И. В. Ершов²

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный аграрный университет

В докладе на основе численного моделирования и асимптотического подхода рассматривается устойчивость сверхзвукового пограничного слоя (ПС) колебательно возбужденного газа на плоской пластине. Линейные уравнения устойчивости получены из системы уравнений двухтемпературной релаксационной аэродинамики линеаризацией относительно стационарного течения, в качестве которого использовалось решение автомодельных уравнений ПС Дородницына–Хоурта для совершенного газа. При этом исключается влияние объемной вязкости и релаксация связана только с колебательным возбуждением молекул газа. Учитывались возмущения коэффициентов переноса, которые могли существенно повлиять на результаты расчетов. Рассматривались двумерные дозвуковые возмущения в виде бегущих плоских волн.

Асимптотическое разложение линеаризованной системы по малому параметру Re_δ^{-1} выделяет «невязкие» и «вязкие» линейно независимые решения. В нулевом приближении система уравнений для невязких возмущений сводится к линейному уравнению второго порядка для возмущения давления, имеющему регулярную особую точку в критическом слое. Из него численным интегрированием находились значения «невязкого» решения на пластине. В качестве начального условия использовалось асимптотическое разложение в окрестности критического слоя, построенное методом Фробениуса. Для «вязких» решений система после ряда упрощений была приведена к системе шестого порядка, аналогичной системе Дана–Линя. Входящие в нее уравнения импульсов и температур сводились к уравнениям Эйри. В результате убывающие к верхней границе ПС «вязкие» решения были представлены через обобщенные функции Эйри 1-го рода нулевого, первого и второго порядков.

Найденные асимптотические решения подставлялись в секулярное уравнение, выражающееся через определитель 3-го порядка однородной системы линейных алгебраических уравнений. Использование функций Эйри позволило выразить «вязкую» часть секулярного уравнения через табулированные функции Титьенса и ее производную, которые обычно используются в асимптотических теориях устойчивости.

Для конечных чисел Рейнольдса спектральная задача в полной постановке решалась численно с использованием QZ-алгоритма. Рассчитанные на основе асимптотического подхода кривые нейтральной устойчивости хорошо согласуются с результатами прямого численного решения исходной спектральной задачи. Показано, что при максимальном уровне возбуждения критическое число Рейнольдса Re_{cr} превышает соответствующее значение для совершенного газа примерно на 10%. Полученные из асимптотической теории критические числа Рейнольдса превышают соответствующие значения численных расчетов на 10–15%, что подтверждает ее адекватность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00209).

АНАЛИЗ ГРУППОВЫХ СВОЙСТВ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО И ЕГО СЛЕДСТВИЙ

Ю. Н. Григорьев¹, С. В. Мелешко², А. Суриявичитсерани²

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

²Математический колледж, Институт науки, Технологический университет
им. Суранари, Накхон Ратчасима, Таиланд

В работе методы группового анализа применяются к нелокальным уравнениям теории коагуляции. Наряду с интегро-дифференциальным уравнением Смолуховского рассматриваются эквивалентные подходы, включая уравнение для Лаплас-преобразования исходного уравнения, бесконечную систему уравнений для степенных моментов его решения, уравнение для производящей функции степенных моментов.

Для уравнения Смолуховского на основе решения определяющего уравнения вычислена полная допустимая группа Ли. Для частных случаев простейших однородных ядер подтверждена полнота ее расширений, полученных ранее на основе альтернативного метода «покрытий». Для этих случаев получены представления инвариантных решений и фактор-уравнения для них, а также проанализирована их совместимость с законом сохранения полной массы коагулянта.

Для Лаплас-преобразования уравнения Смолуховского построена полная допустимая группа Ли, а также ее расширения для частных случаев простейших однородных ядер. Исследовано их соответствие допустимым группам исходного уравнения. Как и для уравнения Смолуховского с простыми однородными ядрами, для уравнения Лаплас-преобразования получены представления инвариантных решений, фактор-уравнения для них, и изучена их совместимость с законом сохранения полной массы.

В случае бесконечной системы уравнений для степенных моментов функции распределения на основе допустимой группы Ли для частного случая уравнения для производящей функции распределения вычислены операторы допустимой группы и ее оптимальная система подалгебр. Найдены соответствующие подалгебрам представления инвариантных решений и фактор-уравнения для них. Рассмотрено их соответствие закону сохранения полной массы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00209-а).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТАЯНИЯ ЛЬДА В ОДНОФАЗНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С УЧЕТОМ СЕЛЕКТИВНОГО ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ

М. А. Гришин, С. Д. Слепцов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Моделирование таяния льда необходимо для понимания процессов, протекающих как в природе, так и для обеспечения безопасности строительных конструкций, техники и населения в северных широтах. В данной работе поставлена задача верификации нашей постановки задачи и метода численного решения радиационной части [1], учитывающего объемное селективное поглощение излучения слоем льда и селективный источник излучения, сравнением с опытными данными, представленными в [2].

Лед представляет собой нерассеивающий излучение материал с двумя полосами селективного поглощения ($\alpha_\lambda = 0.001 \text{ м}^{-1}$ в диапазоне $0.3 < \lambda < 1.2 \text{ мкм}$ и 1.0 м^{-1} в диапазоне $1.2 < \lambda < 3.0 \text{ мкм}$), закрепленный на вертикальную подложку из бакелита и находящийся в климатической камере при постоянной температуре 0°C . На лед падает излучение от галогенной лампы с температурой филамента 3200 К . Спектр излучения от такой лампы приходится большей частью на участок спектра до 1.2 мкм , поэтому необходимо учесть селективность источника излучения. Решение задачи включает два этапа. На первом этапе решается радиационно-кондуктивный теплообмен до достижения правой границей температуры фазового перехода. На втором этапе с фиксированной температурой правой границы решается задача Стефана, где на облучаемой поверхности предполагается появление пленки воды, стекающей под влиянием сил тяготения. Сравнение расчетов с экспериментальными данными [2] показывает удовлетворительное согласие и, тем самым, подтверждая верификацию однофазной постановки задачи Стефана с учетом излучения.

Работа выполнена за счет средств, полученных от Минобрнауки России (код проекта АААА-А17-117022850029-9) и при частичной поддержке РФФИ (проект 18-49-140011).

ЛИТЕРАТУРА

1. Segi N., Sugawara M., Fukusaki S. *Radiative Melting of Ice Layer Adhering to a Vertical Surface*. Wärme- und Stoffübertragung. 1979. V. 12, № 2. P. 137–144.
2. Rubtsov N.A., Savvinova N.A., Sleptsov S.D. *Simulation of the One-Phase Stefan Problem in a Layer of a Semitransparent Medium*. Journal of Engineering Thermophysics. 2015. V. 24, № 2. P. 123–138.

О РОЛИ ПЛАЗМЫ В ПРОЦЕССЕ ИНТЕНСИВНОГО ИСПАРЕНИЯ АЛЮМИНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕРИИ КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ ND:YAG ЛАЗЕРА

М. А. Гришин¹, С. Д. Слепцов¹, В. П. Бессмельцев²

¹Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск

В наше время лазерные установки широко применяются в науке и промышленных приложениях. Лазерное излучение используют при производстве наноматериалов и кластеров, в спектроскопии, при импульсном лазерном напылении. Особенно эффективным является использование наносекундных лазеров для удаления тонких слоев вещества с поверхностей металлов механизмом импульсной лазерной абляции (ИЛА) [1]. Удаление производится вследствие поглощения лазерного излучения «газом» электронов, которые содержатся в тонком приповерхностном слое металла. Электроны рассеиваются на кристаллической решетке металла, передавая энергию ионам, что приводит к нагреву и последующему плавлению металла [2, 3]. Плотности энергии в импульсе падающего на поверхность металла лазерного излучения 1-20 Дж/см² вызывают интенсивное испарение. Атомы вещества образуют газовое облако над поверхностью металла, которое частично ионизируется в процессе поглощения лазерного излучения. Возникшее плазменное облако может существенно влиять на эффективность удаления вещества [1, 4]. Таким образом, целью данной работы является изучение роли плазмы в ходе ИЛА на глубину абляции при различных частотах следования импульсов и при различных количествах импульсов.

Для анализа влияния плазменной экранировки на глубину абляции был выбран алюминий, поскольку данный металл широко применяется в промышленности, и его теплофизические и оптические характеристики известны в широком интервале температур. На основании уравнений энергии, Клапейрона-Клаузиуса и соотношения Герца-Кнудсена была поставлена и решена краевая задача. Для численной реализации алгоритма решения была использована неявная схема Кранка-Николсона. Авторами получены данные по глубине абляции и оптической толщине плазменного облака, предложена упрощенная математическая модель динамики разлета плазменного облака в промежутках между импульсами.

Работа выполнена за счет средств, полученных от Минобрнауки России (код проекта АААА-А17-117022850029-9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Stafe M., Negutu C., Popescu I. M. *Combined experimental and theoretical investigation of multiple-nanosecond laser ablation of metals*. J. Optoelectronics and Advanced Materials. 2006. V. 8. № 3. P. 1180–1186.
2. Lutey A. H. *An improved model for nanosecond pulsed laser ablation of metals*. J. Appl. Phys. 2013. V. 114, № 8. P. 083108.
3. Gragossian A., Tavassoli S., Shokri B. *Laser ablation of aluminum from normal evaporation to phase explosion*. J. Appl. Phys. 2009. V. 105, № 10. P. 103304.

4. Bulgakova N. M., Bulgakov A. V. *Thermal model of pulsed laser ablation under the conditions of formation and heating of a radiation-absorbing plasma*. Quantum Electronics. 1999. V. 29, № 5. P. 433–437.

ПРОНИЦАЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ МИКРОНЕОДНОРОДНОСТЯМИ

А. А. Губайдуллин, А. С. Губкин, П. А. Игнатьев, Д. Е. Игошин

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН

Разработка методов и моделей построения цифровых кернов является актуальной для повышения эффективности процессов добычи углеводородов. В [1] предложена модель пористой среды со случайно расположенными перекрывающимися дисками. Алгоритм построения среды включает в себя два модельных параметра: δ_{in} и δ_{out} , задающих минимальное наложение перекрывающихся дисков и минимальное расстояние между неперекрывающимися дисками. Форма зерен скелета определяется параметром δ_{in} , размер сужения порового канала – δ_{out} . При $\delta_{in} \ll 1$ гранулы скелета имеют «ветвистую» форму, при $\delta_{in} \sim 1$ – округлую форму. При $\delta_{out} \ll 1$ поровые каналы имеют ширину, значительно меньшую размеров гранул скелета, при $\delta_{out} \sim 1$ ширина каналов сопоставима с размерами гранул.

В данной работе проведен параметрический анализ проницаемости пористой среды во всем диапазоне изменения модельных параметров δ_{in} и δ_{out} от 0 до 1. Проведена серия расчетов. Геометрия задачи и расчетная сетка построены в открытом пакете Salome. Численное решение системы уравнений Навье–Стокса для моделирования течения несжимаемой ньютоновской жидкости при заданном перепаде давления реализовано в открытом пакете OpenFOAM. Вычислены объемные расходы жидкости через модельную пористую среду, по значениям которых с помощью уравнения Дарси определены коэффициенты проницаемости. Анализ результатов показал, что проницаемость растет с увеличением обоих параметров, причем параметр δ_{out} имеет большее влияние, чем δ_{in} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Gubaidullin A. A., Gubkin A. S., Igoshin D. E., Ignatev P. A. *Permeability of model porous medium formed by random discs*. AIP Conf. Proc. 2018. V. 1939. 020035.

К УСТОЙЧИВОСТИ РАДИАЛЬНОГО СХЛОПЫВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ю. Г. Губарев^{1,2}, Д. А. Фурсова²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В настоящем докладе рассмотрена задача нелинейной устойчивости радиального схлопывания цилиндрической оболочки, которая заполнена однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкостью, относительно радиальных же возмущений. Данная задача решалась в рамках нескольких уточняющих ее формулировку допущений, а именно: 1) внутри изучаемой оболочки пустота; 2) снаружи ее охватывает слой сжатого политропного газа, являющегося продуктом мгновенной детонации мощного конденсированного взрывчатого вещества и действующего на внешнюю поверхность оболочки с ненулевым постоянным давлением; 3) за слоем газа опять вакуум. Прямым методом Ляпунова обнаружена абсолютная устойчивость цилиндрически симметричного схлопывания исследуемой вязкой цилиндрической же оболочки по отношению к конечным возмущениям того же типа симметрии. Конкретно, построена функция Ляпунова, которая отвечает всем условиям первой теоремы Ляпунова об устойчивости, при этом независимо от того либо иного режима радиального схлопывания оболочки. Значит, в подтверждение гипотезы Тришина, кумуляция кинетической энергии однородной по плотности вязкой несжимаемой жидкости в процессе цилиндрически симметричного схлопывания рассматриваемой цилиндрической же оболочки к своей оси симметрии действительно отсутствует.

С физической точки зрения финальный вывод настоящего доклада о том, что кумуляции кинетической энергии вязкой жидкости в ходе радиального схлопывания полой цилиндрической оболочки не будет ни при каких обстоятельствах, несомненно, удивителен и парадоксален. В самом деле, получается, что, вне зависимости от величин начальной кинетической энергии и наружного постоянного давления, вязким силам всегда удастся прекратить движение изучаемой оболочки при достижении ее внутренней поверхностью того или другого ненулевого радиуса. Правда, Тришин объясняет эту остановку внутренней поверхности оболочки не только вязкостью, но и быстрым нагревом за счет нее части материала исследуемой вязкой цилиндрической оболочки вплоть до его «взрывного» испарения. Однако, что еще более удивительно и парадоксально, в определяющем уравнении математической модели рассматриваемого процесса радиального схлопывания коэффициент динамической вязкости есть, а вот температуры нет – иными словами, нет ни нагрева, ни испарения! Так что прекращение движения внутренней поверхности цилиндрической оболочки действительно обеспечивается исключительно вязкими силами.

Все вышеизложенное бесспорно свидетельствует о том, что цилиндрически симметричное схлопывание цилиндрической же оболочки, содержащей в себе однородную по плотности вязкую несжимаемую жидкость, заслуживает самого пристального внимания со стороны специалистов, требует кропотливого изучения в будущем и обладает огромными перспективами для широкого круга актуальных приложений в науке, технике и промышленности.

ПЕРЕНОС ТЕПЛА В ОДНОМЕРНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЦЕПОЧКЕ ЧАСТИЦ

М. А. Гузев

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

В работе исследуется перенос тепла в материале с учетом его внутренней структуры. Параметризация микроструктуры выполнялась в рамках дискретной одномерной модели взаимодействующих частиц. Такая постановка задачи типична при исследовании процессов в неоднородных средах методами молекулярной динамики.

Рассмотрена модель, для которой потенциал взаимодействия является квадратичным, что позволило получить аналитическое решение системы уравнений, описывающих смещение частиц. Показано, что спектральные характеристики базисной матрицы вычисляются через полиномы Чебышева. Построенное фундаментальное решение записывается в терминах функций Бесселя и обобщает решение Шредингера для гармонической бесконечной цепочки [1]. Различные интегральные представления решения получены на комплексной плоскости и с помощью преобразования Лапласа. Точное решение используется для расчета распределения температуры и теплового потока.

Эти характеристики определялись через их дискретные аналоги [2]. Выполнение дальнейших вычислений было основано на использовании некоторых гипотез о начальных смещениях и скоростях частиц. В частности, предполагалось, что начальное смещение равно нулю, а скорости имеют максвелловское распределение. Для этого случая получена общая формула для температуры в зависимости от номера элемента. При большом числе элементов системы вычислена асимптотика температуры и показано, что ведущий вклад в формуле не зависит от номера частицы, а поведение по времени определяется функцией Бесселя нулевого порядка.

Для теплового потока получено аналитическое представление, которое допускает анализ при большом числе частиц системы, что соответствует переходу к длинноволновому пределу. В этом приближении тепловой поток вычислен через функции Бесселя, порядок которых зависит от номера частицы. Используя асимптотическую формулу для температуры при большом числе частиц, в работе показано, что поток тепла не определяется через разность температур между соседними частицами. Таким образом, для рассмотренной дискретной системы классический закон Фурье нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schrödinger E. *Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme*. Annalen der Physik. 1914. V. 349. P. 916–934.
2. Lepri S., Livi R., Politi A. *Thermal conduction in classical low-dimensional lattices*. Phys. Reports. 2003. V. 377. P. 1–80.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ НАД ДВУХСЛОЙНЫМИ ПОДАТЛИВЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

А. Э. Даржаин^{1,2}, А. В. Бойко^{1,3}, А. П. Чупахин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

В последнее время интенсивно развиваются исследования различных сдвиговых течений с податливыми стенками. Это связано как с построением адекватных математических моделей, так и с такими практическими приложениями, как флаттер в авиации и снижение сопротивления трения в судостроении. К настоящему времени существует много работ, в которых рассматриваются идеализированные модели вязкоупругих покрытий.

В данной работе анализируется гидродинамическая устойчивость открытых сдвиговых течений над двухслойным податливым покрытием. Слой покрытия, соприкасающийся с жидкостью, предполагается более жестким с целью защиты внутреннего более мягкого слоя от внешних факторов. Покрытие обладает конечной толщиной, что позволяет рассматривать динамику возмущений и внутри покрытия. Предполагается, что вязкоупругие свойства материала описываются моделью Кельвина–Фойгта. В этой модели должны быть заданы эмпирические зависимости модуля упругости и коэффициента потерь от частоты возмущений. Такие данные для актуального диапазона частот были получены лишь в последние годы для некоторых типов резин. Расчет для однослойного покрытия был получен в работе [1].

Течение жидкости и динамика возмущений внутри покрытия описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнениями Навье, соответственно. В качестве возмущений основного потока рассматриваются бегущие волны, с фиксированным волновым числом и частотой. При расчете устойчивости используется метод коллокаций. Эмпирические зависимости были взяты для реальных покрытий.

В результате были получены собственные значения для волнового числа, распределения амплитуды скорости возмущений и деформаций в покрытии для ведущей моды, соответствующей неустойчивому течению, кривые нейтральной устойчивости в плоскости частота – число Рейнольдса для различных параметров покрытия, а также вычислены критические числа Рейнольдса в зависимости от параметров задачи. Проведен анализ влияния различных параметров покрытия на устойчивость и показано сравнение результатов со случаем жесткого покрытия. Чаще всего, податливость двухслойных покрытий существенно влияет на устойчивость пограничного слоя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойко А.В., Кулик В. М., Филимонов В. А. *Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над податливыми покрытиями повышенной прочности*. Вестник НГУ. Сер.: Физика. 2011. Т. 6, № 4. С. 103–115.

МОДЕЛЬ НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В АРТЕРИАЛЬНЫХ СОСУДАХ

Н. С. Денисенко^{1,2}, А. А. Черевко^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Задача об изучении течения крови в артериях является одной из основных задач гемодинамики [1]. Поскольку процессы в живых системах являются периодическими, то их можно описывать при помощи модели осциллятора. В данной работе для моделирования течения крови в артерии используется модель нелинейного осциллятора, а именно нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка (обобщенное уравнение Ван-дер-Поля – Дуффинга) с правой частью. Неизвестными в модели являются коэффициенты уравнения, которые вычисляются по клиническим данным и определяют индивидуальные характеристики кровеносного сосуда [2, 3, 4].

Задача о пульсирующем течении вязкой несжимаемой жидкости в трубе с жесткими или упругими стенками была исследована аналитически в работах [5, 6]. В этих работах представлены формулы для скорости и давления, полученные путем решения линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса.

В данной работе исследуются свойства уравнения Ван-дер-Поля – Дуффинга. Получены аналитические формулы для коэффициентов уравнения нелинейного осциллятора при гармонической зависимости расхода от времени. Исследована зависимость коэффициентов уравнения от различных механических параметров, определяющих течение в трубе. При помощи методов теории обратных задач исследована точность восстановления коэффициентов уравнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-01736) и гранта Правительства Российской Федерации (код проекта 14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Caro C. G., Pedley T. J., Schroter, R. C., Seed W. A. *The Mechanics of the Circulation*. Oxford University Press. New York, 1978.
2. Khe A. K., Cherevko A. A., Chupakhin A. P., Krivoschapkin A. L., Orlov K. Yu., Panarin V. A. *Monitoring of Hemodynamics of Brain Vessels*. J. App. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 5. P. 7–16.
3. Khe A. K., Cherevko A. A., Chupakhin A. P., Krivoschapkin A. L., Orlov K. Yu., *Endovascular blood flow measurement system*. J. Physics: Conf. Series. 2016. V. 722. P. 012041.
4. Mikhaylova A. V., Chupakhin A. P., Ufimtseva I. V., Krivoschapkin A. L., Orlov K. Yu. *Relaxation oscillation model of hemodynamic parameters in the cerebral vessels*. J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722. P. 012045.
5. Womersley J. R. *Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic-tube - I: linear approximation for long waves*. Phil. Mag. 1955. V. 46. P. 199–221
6. Zamir M. *The Physics of Pulsatile Flow*. Springer-Verlag. New York, 2000.

ВОЛНЫ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ В НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫХ СРЕДАХ

О. Г. Держсо

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе, Новосибирск

В работе в рамках асимптотических моделей показано, как конкурирующие нелинейности приводят к многомасштабным волновым структурам для внутренних уединенных волн в стратифицированных жидкостях. Эти уединенные волны существуют только для больших амплитуд, выходящих за пределы применимости уравнения Кортевега–де Фриза (KdV) или его обычных расширений. Феномен мультимасштабирования существует или не существует для почти идентичных профилей плотности. Захваченная область жидкости внутри волны предотвращает появление таких множественных масштабов в пределах области ядра захваченной жидкости. Обсуждается структурная устойчивость волн больших амплитуд. Волны больших амплитуд, отображающие квадратичные, кубические и нелинейные члены более высокого порядка, имеют устойчивые и неустойчивые ветви. Показано, что волны без вихревого ядра структурно неустойчивы. Явления многомасштабности в структуре уединенных волн существуют в различных физических ситуациях когда сложная нелинейность конкурирует с дисперсией.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ФОРМУЛЫ ОПИСАНИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ВОДЕ В РАМКАХ ГИДРОУПРУГОЙ МОДЕЛИ

С. Ю. Доброхотов

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва
Московский физико-технический институт*

Рассматривается задача Коши для системы уравнений, описывающая согласованное распространение волн в слое жидкости и упругом полупространстве. Предполагается, что начальные данные задаются локализованным в упругом полупространстве вектором перемещений. Задачи в такой и близкой постановках изучались в работах Г. С. Подъяпольского, В. К. Гусякова, Л. Б. Чубарова, Л. И. Лобковского, Н. Kanamori, Т. Yamashita, R. Sato, P. C. Sabatier, А. К. Fragela, С. Ю. Доброхотова, О. Л. Толстой, Р. О. Гринива, А. А. Шкаликова, Н. В. Зволинского, С. Я. Секерж-Зеньковича и др. Наш основной результат – очень простое выражение для приближенного дисперсионного соотношения, описывающего распространение водяных поверхностных волн и учитывающее влияние упругого основания, а также явные формулы, связывающие параметры распространяющихся по поверхности воды волн с формой и параметрами возмущения в упругой среде. Полученные формулы позволяют, в частности, проверить вывод Г. С. Подъяпольского о значительном уменьшении

за счет влияния упругого основания скорости распространения океанических длинных волн и связать характерную длину этих волн с размерами и глубиной залегания источника в упругом основании.

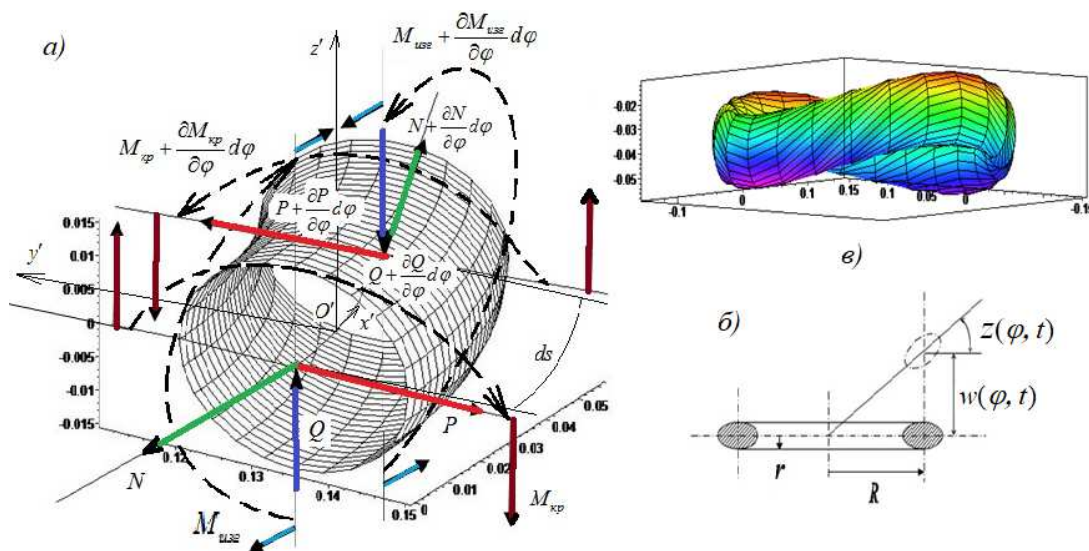
Работа выполнена совместно с К. А. Варгасом, Х. Х. Ильясовым, О. Л. Толстой и С. Я. Секерж-Зеньковичем при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00644).

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА УПРУГОГО КОЛЬЦА

Н. А. Докукова, П. Н. Конон

Белорусский государственный университет, Минск

Рассматривается задача изгиба плоскости кольца и кручения его поперечных сечений, положение которых в процессе движения характеризуется смещением центра тяжести $w(\varphi, t)$ и углом поворота сечения $z(\varphi, t)$ (см. рис. а, б). В поперечных сечениях возникают изгибающие, крутящие моменты и поперечная сила, перпендикулярная плоскости кольца.



Выведены уравнения движения напряженно-деформируемого состояния кольца нагруженного в продольной плоскости и закрученного в поперечных сечениях неравномерно-распределенными моментами. По сравнению с представленными в литературе разработанная математическая модель в виде системы двух связанных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами четвертого порядка имеет существенные уточнения и дополнена специальным внешним нагрузочным режимом. Полученные аналитические решения полностью удовлетворяют поставленной начальной, краевой задачам и частотному уравнению. Установлены закономерности собственных значений и собственных форм упругого кольца от физических, геометрических параметров и свойств устойчивости динамических систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Механика, металлургия диагностика в машиностроении» (задание № 1.36).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. М: Высш. школа, 1980.
2. Dokukova N. A., Konon P. N. *General laws governing in mechanical vibratory systems*. JERT. 2006. V. 79, № 4. P. 824–831.

О ДВУХСЛОЙНОМ КОНВЕКТИВНОМ ТЕЧЕНИИ С УЧЕТОМ ЭНЕРГИИ МЕЖФАЗНОГО ТЕПЛООБМЕНА

М. В. Ефимова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Математическое моделирование конвективных течений включает построение точных решений и исследование влияния различных физических факторов на характер течения.

Рассматривается краевая задача, описывающая двумерное стационарное движение бинарной смеси и вязкой жидкости с общей поверхностью раздела [1]. Система ограничена твердыми непроницаемыми стенками, на которых задано квадратичное распределение температуры. На поверхности раздела полагаются выполненными кинематическое и динамическое условия; скорость и температура удовлетворяют условиям непрерывности. Условие переноса тепла с учетом межфазного теплообмена имеет вид: $k_2\theta_{2y} - k_1\theta_{1y} = \sigma_T\theta_1 u_{1x}$, где σ_T – температурный коэффициент поверхностного натяжения, k_j – коэффициент теплопроводности слоев. Кроме этого, считается, что поток вещества через границу раздела отсутствует.

Для описания течения вблизи критических значений температуры на твердых стенках используется анзац, соответствующий решению типа Хименца:

$$u_j = U_j(y)x, \quad v_j = V_j(y), \quad p_j = P_j(x, y);$$

$$\theta_j = A_j(y)x^2 + B_j(y), \quad c = H(y)x^2 + R(y).$$

В работе построено точное решение задачи конвекции, которое позволяет описать влияние физических факторов на структуру течения и распределение температуры в канале с учетом энергии межфазного теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. *Термокапиллярная неустойчивость*. Новосибирск: Наука, 2000.

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ ПОТОКОМ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. А. Жалнина, Н. А. Кучер

Кемеровский государственный университет

Обтекание тела потоком жидкости моделируется, как правило, посредством неоднородной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику потока. Большая часть известных результатов для уравнений Навье–Стокса сжимаемых вязких газов и тем более для уравнений смесей таких сред касается потоков в областях, ограниченных непроницаемыми стенками, в то время как результаты исследований неоднородных граничных задач остаются достаточно скромными. Из работ посвященных последней проблеме укажем статью [1], в которой доказана теорема существования для нестационарных уравнений Навье–Стокса вязкой сжимаемой жидкости при постоянных граничных условиях, и работу [2], в которой установлено существование слабого решения в выпуклых областях с выходным отверстием, не зависящим от временной переменной. Важные результаты о существовании сильных решений неоднородных краевых задач для стационарных уравнений Навье–Стокса в случае малых чисел Рейнольдса и Маха получены в работе [3].

В докладе предполагается представить результаты о существовании и единственности сильного решения неоднородной краевой задачи для уравнений движения смеси вязких жидкостей с тремя пространственными переменными [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Novo S. *Compressible Navier-Stokes model with inflow-outflow boundary conditions*. J. Math. Fluid Mech. 2005. V. 7. P. 485—514.
2. Girion V. *Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions in a bounded three-dimensional domain*. 2011. J. Math. Fluid Mech. V. 13. P. 309—339.
3. Plotnikov P. *Compressible Navier-Stokes equations: theory and shape optimization*. Basel: Birkhauser, 2012.
4. Жалнина А. А., Кучер Н. А. *О корректности неоднородной краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2015. Т. 18, № 3(63). С. 26–39.
5. Жалнина А. А., Кучер Н. А. *Зависимость от области решений краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 1(69). С. 41–52.

ФОКУСИРОВКА ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ ТОНКОГО СЛОЯ МНОГОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

Е. С. Журавлева, В. К. Кедринский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Постановка имеет непосредственное отношение к физической модели начального этапа взрывных извержений открытых вулканических систем. Рассматривается цилиндрическая симметрия численной модели формирования и фокусировки волны разрежения (ВР) при ударно-волновом (УВ) нагружении слоя жидкости со свободной поверхностью. Инициирование УВ выполняется заданием поршнем, соосным оси симметрии, импульса массовой скорости в форме экспоненты с диапазоном максимальных скоростей в интервале от 20 до 100 м/с и постоянной экспоненты до 30 мкс. Радиус слоя жидкости изменялся от 1 до 15 см. Численный анализ выполнялся для двух состояний жидкости – чистой и дистиллированной воды с микропузырьками свободного газа. Согласно экспериментальным данным радиус микропузырьков имеет порядок в несколько микрон, а их плотность достигает миллиона в кубическом сантиметре. Двухфазная математическая модель представлена в виде системы Иорданского – Когарко – ван Вийнгаардена для средних значений массовой скорости, плотности и давления, которая включает уравнение для концентрации свободного газа (типа уравнения Рэлея), а также уравнения состояния для жидкой, газовой и двухфазной среды. Численный расчет выполнялся в два этапа: 1 – расчет формирования, распространения, отражения УВ от свободной поверхности и фокусировка ВР на ось симметрии в однофазной чистой жидкости, 2 – в процесс фокусировки ВР на ось симметрии в расчет включалась модель Иорданского – Когарко – ван Вийнгаардена (ИКВ), которая рассчитывала и формирование кавитационной пузырьковой зоны за фронтом ВР, и динамику структуры ВР. Для чистой жидкости рассчитывались распределения максимальных амплитуд УВ и ВР вдоль радиуса от оси симметрии для УВ и от свободной поверхности до оси симметрии для ВР. Оказалось, что полученные распределения максимальных амплитуд практически симметричны относительно радиуса. После формирования ВР в окрестности свободной поверхности ее распространение к оси симметрии носит кумулятивный характер. При этом за ее фронтом регистрируется интенсивный рост объемной концентрации газовой фазы вплоть до 1 процента для начальных значений параметров микронеоднородностей, указанных выше, и до 10 процентов при увеличении начального радиуса в 3 раза, при сохранении плотности зародышей и максимальной скорости заданного импульса в 100 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kedrinskiy V. K. *Hydrodynamic aspects of explosive eruptions of volcanoes: simulation problems*. Shock Waves. 2009. V. 18, № 6. P. 451–464.
2. Большакова Е. С., Кедринский В. К. *Динамика разрыва в кавитирующем слое жидкости при ударно-волновом нагружении*. ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 93–101.

ВЫБОР ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВТЕКАНИЯ СТРУЙ В СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК

В. П. Замураев^{1,2}, А. П. Калинина^{1,2,3}, Д. В. Федорова^{1,4}, Д. С. Попова^{1,4},
О. Н. Иванова^{3,5}

¹ИТПМ им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Сибирский университет потребительской кооперации, Новосибирск

⁴Новосибирский государственный технический университет

⁵Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск

Область применения струй для управления сверхзвуковыми течениями непрерывно расширяется. В частности, при достаточно высоком перепаде давления, дросселирующая струя может работать аналогично твердотельному уступу, благодаря чему создаются вихревые зоны, в которых может происходить воспламенение и горение. В работе [1] предложено использовать дросселирующую струю сжатого воздуха для интенсификации горения в камере сгорания ПВРД. Однако в результате воспламенения смеси давление вблизи отверстия для струи может измениться настолько резко, что истечение может стать дозвуковым. Кроме того, предварительно не перемешанное топливо также подается с помощью струй выше по потоку от дросселирующей струи при значительно меньшем перепаде давления. Изменение перепада давления в результате воспламенения топлива может привести к прекращению его втекания. Таким образом, в условиях значительных изменений давления в основном потоке возникает необходимость учета этого обстоятельства при выборе граничных и начальных условий для струй. При численном моделировании системы, аналогичной [1], используется два типа граничных условий: либо постоянная скорость втекающей в канал струи, либо постоянство давления и температуры торможения, а также статического давления [2]. Второй случай позволяет получить большее разнообразие режимов и более близкую к реальности картину течения. При нестационарном численном моделировании системы, подобной [1], показано, что применение граничных и начальных условий, соответствующих условиям распада произвольного разрыва, позволяет получить структуру потока в канале, качественно совпадающую с экспериментальной.

Работа выполнена в рамках проекта СО РАН III.22.6.2 и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-00183).

ЛИТЕРАТУРА

1. Третьяков П. К., Забайкин В. А., Прохоров А. Н. *Высокоскоростной ПВРД с пульсирующим режимом запуска*. XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теор. и прикл. мех. Казань: Изд-во Казанского ун-та. 2015. С. 3778–3780.
2. Замураев В. П., Калинина А. П. *Воздействие втекающей через щель струи с переменными параметрами на сверхзвуковой поток газа в расширяющемся канале*. Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер.: Физика. 2015. Т. 10, № 3. С. 26–30.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕХНОЛОГИИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛА УСТАЛОСТНОМУ РАЗРУШЕНИЮ

К. В. Захарченко^{1,2}, В. И. Капустин², А. Ю. Ларичкин^{1,3}, Г. А. Раевская⁴

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный технический университет

³Новосибирский государственный университет

⁴Научно-технический центр «НТЦ-Ползучесть», Новосибирск

В работе представлены результаты исследования влияния параметров технологии формообразования толстых плит (40 мм) из высокопрочных сплавов (НАЗ им. В. П. Чкалова) В-1461 (Al-Cu-Li-Zn) и В95 (Al-Zn-Mg-Cu) [1] на сопротивление материала усталостному разрушению.

Соблюдение технологии [1] обеспечило установившуюся ползучесть в процессе деформирования, полную релаксацию напряжений и отсутствие пружинения. Контроль теоретического контура обеспечивался бесконтактной системой MV 224. Отклонения геометрии полученной поверхности лежат в поле допусков на механическую обработку. В заводской лаборатории выполняли металлографические исследования структуры сплава В-1461, которые позволили оценить влияние деформации при температуре 470°C на структуру материала плиты и показали, что после формообразования материал имеет однородную структуру с более мелким зерном, чем исходный.

При помощи ускоренного неразрушающего метода [2] получены диаграммы необратимых деформаций исследуемых материалов, которые позволили рассмотреть кинетику отклика материала при циклической ступенчато увеличивающейся нагрузке и определить условные пределы упругости материала, а также дать консервативную оценку предела ограниченной выносливости и назначить уровни напряжений для усталостных испытаний.

Представлены результаты прямых усталостных испытаний образцов, изготовленных из плит сплавов В-1461 и В95, которые предварительно были подвержены технологической операции формовки и термической обработке, свидетельствующие о том, что выбранные параметры технологического процесса для материала В95 не ухудшают сопротивление усталостному разрушению, а для материала В-1461 оказывают упрочняющее действие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Raevskaya G. A., Zakharchenko K. V., Larichkin A. Yu. *Determination of optimum parameters of the technological process for plates forming from V95 and V-1461 alloys in creep applied in aircrafts constructed by "SUKHOI DESIGN BUREAU"*. J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894, № 1. 012078.
2. Захарченко К. В., Капустин В. И. *Влияние поверхностных слоев образцов на деформационные характеристики сплава Д16АТ*. Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81, № 7. С. 51–56.

ДИНАМИКА РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, Е. А. Кочурин

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

Рассматривается динамика развития неустойчивости свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости с поверхностным зарядом в нормальном электрическом поле. Ранее [1] на примере жидкого гелия с заряженной электронами границей была продемонстрирована интегрируемость соответствующих уравнений движения в предельном случае, когда заряд полностью экранирует электрическое поле над поверхностью жидкости, а его величина существенно превышает пороговое для неустойчивости значение (т.е. не учитывались капиллярные и гравитационные силы).

В настоящей работе анализируются нелинейные стадии развития неустойчивости в околоскритическом электрическом поле, когда влияние электростатических сил сравнимо с влиянием капиллярных и гравитационных сил. Используется подход, основанный на конформном отображении занимаемой жидкостью области в полуплоскость (отметим, что в нестационарных задачах идея использования конформных отображений высказывалась Л. В. Овсянниковым [2]). Для плоского течения это позволяет свести исходные $(2+1)$ -мерные уравнения движения жидкости к $(1+1)$ -мерным интегро-дифференциальным уравнениям на движение ее границы. Решение этих уравнений продемонстрировало тенденцию к формированию пузырей на сильно нелинейных стадиях развития неустойчивости границы: за конечное время поверхность жидкости становится самопересекающейся. Примечательно, что электрический заряд стекает в формирующийся пузырь, обуславливая развитие его вторичной электрогидродинамической неустойчивости, параметры которой можно оценить, используя точные решения для равновесных конфигураций заряженной искривленной границы жидкости, полученные в работе [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-08-00098 и 17-08-00430).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубарев Н. М. Точные решения уравнений движения жидкого гелия со свободной заряженной поверхностью. ЖЭТФ. 2002. Т. 121, № 3. С. 624–636.
2. Овсянников Л. В. Плоская задача о неуставившемся движении жидкости со свободными границами. ДСС. 1971. В. 7. С. 22–26.
3. Zubarev N. M., Zubareva O. V. Exact solutions for equilibrium configurations of charged conducting liquid jets. Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 016307.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Н. М. Зубарев¹, Е. А. Карабут², Е. Н. Журавлева²

¹Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается плоская нестационарная задача о течениях идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в отсутствии внешних сил и капиллярности. Предлагается метод, позволяющий находить решения такой задачи. Получены некоторые примеры точных решений.

Отметим, что до недавнего времени по существу был известен только один класс нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Это течения с линейным полем скоростей, открытые Дирихле в 1860 году. Подробно они изучались в работе Л. В. Овсянникова [1].

В работе [2] были получены решения с использованием метода, основанного на нахождении комплексной скорости, удовлетворяющей комплексному уравнению Хопфа. В работе [3] была выявлена возможность реализации режима движения жидкости, при котором давление является квадратичной функцией компонент скорости. В этом случае жидкость в плоскости годографа занимает полуплоскость. Если компоненты скорости выбрать в качестве независимых переменных, то уравнения линеаризуются, а затем легко решаются аналитически.

В настоящей работе рассматривается случай, когда в плоскости годографа жидкость занимает круг. Решение содержит произвольную функцию, задающую начальную исходную форму жидкости. Развиваемый подход позволил локально описать формирование и эволюцию различных особенностей на поверхности жидкости.

Найдено точное решение, которое является аналогом известного течения Хеле – Шоу, найденного Полубариновой – Кочиной и Галиным (1945). Первоначально жидкость занимает круг, внутри которого расположен сток. С течением времени площадь жидкостного круга уменьшается, форма свободной границы превращается в кардиоиду. Отметим, что для построенного решения область, занимаемая жидкостью, в отличие от течений, найденных в работах [2] и [3], не содержит бесконечно удаленной точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Общие уравнения и примеры. В книге Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей*. Новосибирск: Наука, 1967, С. 5–75.
2. Karabut E. A., Zhuravleva E. N. *Unsteady flows with a zero acceleration on the free boundary*. J. Fluid Mech. 2014. V. 754. P. 308–331.
3. Зубарев Н. М., Карабут Е. А. *Точные локальные решения для формирования особенностей на свободной поверхности идеальной жидкости*. Письма в ЖЭТФ. 2018. Т. 107, № 7. С. 434–439.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАВИТАЦИИ И СОПРОВОЖДАЮЩИХ ЯВЛЕНИЙ В ЖИДКОСТЯХ, СОДЕРЖАЩИХ РАСТВОРЕННЫЙ ГАЗ

У. Ибен¹, А. В. Махнов², Н. В. Петров³, А. А. Шмидт^{2,3}

¹*Robert Bosch GmbH Corporate Research, Санкт-Петербург*

²*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

³*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург*

Работа посвящена исследованию высокоскоростных кавитационных течений, выделения растворенного газа, распространения волн сжатия и волн разрежения в сжимаемых средах с целью выяснения ключевых механизмов, лежащих в основе данных явлений. Детальная информация о параметрах кавитационных течений имеет решающее значение для прогноза эффективности работы технических устройств в широком диапазоне промышленных приложений. На практике жидкость может содержать существенное количество растворенного газа. Этот газ диффундирует в паровые полости, возникающие из-за фазового перехода (кавитации). Выделившийся газ в значительной степени влияет на эволюцию кавитационных пузырьков. Уравнения, выражающие законы сохранения массы и количества движения, решаются для двухфазной смеси, состоящей из жидкости, растворенного газа, пара и выделившегося газа. Выделение газа (переход из растворенного состояния в пузыри) определяется диффузией газа через межфазную поверхность на основе законов Генри и Фика.

Исследование основано на численном моделировании явлений, сопровождающих кавитацию в жидкостях, содержащих растворенный газ. Такой подход обеспечивает гибкий и удобный инструмент исследования и позволяет получить детальную информацию об изучаемых процессах. Расчеты проводятся на базе открытой вычислительной среды OpenFOAM, а также с использованием оригинального программного кода [1]. В рамках сформулированной математической модели проведено численное исследование нестационарного кавитационного течения в микроканале, а также коллапса (схлопывания) одиночного парогазового пузыря вблизи твердой стенки.

Результаты исследования течения жидкости в микроканале, показывают существенную роль растворенного газа в формировании структуры течения. В частности, растворенный газ, выделяющийся вначале внутри паровых полостей, затем, в результате конденсации пара, может занимать объемы полостей целиком, образуя не только парогазовые пузыри, но и газовые пузыри. При исследовании распространения волны сжатия в среде жидкость – твердое тело показано, что в процессе взаимодействия волны с границей раздела происходит ускорение распространения волны по жидкости. Этот эффект важен для анализа эрозии.

Махнов А. В. и Петров Н. В. благодарят научный центр G-RISC и Германскую службу академических обменов (DAAD) за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Petrov N., Schmidt A. *Multiphase phenomena in underwater explosion*. Experimental Thermal and Fluid Science. 2015. V. 60. P. 367–373.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ БАЛОК ТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ С РАЗЛИЧНЫМИ СВОЙСТВАМИ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

С. В. Иявойнен

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Реализован алгоритм моделирования чистого изгиба балки симметричного сечения в условиях ползучести при действии постоянного по модулю момента. Алгоритм применен к экспериментальным данным по чистому изгибу тавровых балок из сплава Ti-Al-Sn-V (аналога ВТ5-1) при температуре $T=700^\circ$. Алгоритм учитывает накопление поврежденности материала, влияние температурной выдержки и разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию. Основан на кинетической теории ползучести Ю. Н. Работнова. Разработан и написан на языке программирования C++ в среде разработки Microsoft Visual Studio.

Реализован поиск изгибающего момента M по целевой кривизне κ балки путем получения набора значений (d_i, M_i) для некоторого шага разбиения d . Из уравнения, связывающего M и κ , определяются приближенные значения $M_i = M(d_i)$. Реализован алгоритм поиска момента по заданной кривизне балки. Поиск внешних усилий проводится путем решения последовательности прямых задач чистого изгиба балок при фиксированных параметрах модели и заданном интервалом времени. На каждом шаге производится сравнение полученных прогибов с требуемым. Далее вычисляется разность между ними и проводится уточнение значений прогибов с использованием метода оптимизации Нелдера – Мида с добавлением ограничений по времени формообразования элементов конструкций.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ИНТЕНСИФИКАЦИИ МАССОПЕРЕНОСА УПРАВЛЯЕМЫМ ПОВОРОТНО-ДИВЕРГЕНТНЫМ ПОТОКОМ

*И. К. Кабардин¹, Н. И. Яворский¹, В. Г. Меледин¹, М. Х. Правдина¹,
М. Р. Гордиенко¹, Д. П. Езендеева¹, С. В. Какаулин¹, Э. В. Усов², И. А. Климонов²*

¹*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

²*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва*

Фундаментальная научная проблема такого рода возникает в механике, в химии и катализе при оптимизации массопереноса за счет управления потоком. Эффективность массопереноса обусловлена равномерностью полей скорости и мелкомасштабной турбулентности в реагирующем потоке. Потоки реагентов в реальных установках и реакторах работают в условиях сложной геометрии с поворачивающимися и расширяющимися участками, в которых формируются пристенные струи, происходят

отрывы и присоединения потока, формируются зоны возвратного течения. Подобные эффекты увеличивают гидродинамическое сопротивление потока и ухудшают равномерность турбулентного массопереноса. При численном моделировании таких явлений требуется верификация и модернизация моделей турбулентности для адекватного описания массопереноса.

В работе проведен анализ характеристик турбулентного массопереноса в поворотно-дивергентном течении при управлении потоком с возможностью формирования различной интенсивности турбулентности набегающего потока. При диагностике характеристик турбулентного массопереноса применены методы лазерной доплеровской анемометрии и цифровой трассерной визуализации. Проведена верификация численных расчетов методами вычислительной гидродинамики по результатам экспериментальных исследований. При численном моделировании поворотно-дивергентного течения использованы различные модели турбулентности с рекомендованными диапазонами параметров, лежащими в границах применимости для данного типа течения. Моделирование основано на применении полуэмпирических моделей турбулентности на основе уравнений Навье – Стокса осредненных по Рейнольдсу и метода моделирования крупных вихрей. Анализ результатов численного моделирования показал формирование ярко выраженной пристенной струи в поворотно-дивергентном течении и формирование зон возвратного течения. Верификация численного моделирования показала, что все модели турбулентности адекватно моделируют поворотно-дивергентное течение только до формирования отрывов потока и образования зон возвратного течения. Особенно расхождение с экспериментом возникает при управлении потоком для выравнивания профилей скорости и при изменениях интенсивности турбулентности набегающего потока.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-20036 и в части экспериментальных исследований при поддержке проекта ФНИ ГАН 2017-2020, проект III.22.7.3.

СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДИЗАЙНА СКВАЖИНЫ С МНОЖЕСТВЕННЫМ ГИДРОРАЗРЫВОМ ПЛАСТА

Е. А. Кавунникова^{1,2}, Б. Н. Старовойтова¹, С. В. Головин^{1,2}

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

²*Новосибирский государственный университет*

Одним из наиболее эффективных методов повышения нефтеотдачи является процедура проведения многостадийного гидроразрыва пласта (МГРП). Ввиду высокой стоимости операции МГРП большой интерес представляет задача оптимизации дизайна МГРП для обеспечения экономической эффективности. При этом большую роль играет выбор быстрого и устойчивого метода оптимизации.

В работе рассматривается следующая задача. Требуется подобрать такие параметры гидроразрыва пласта (длину горизонтального ствола скважины, число трещин и их геометрические характеристики), при которых достигаются целевые показатели: максимальный уровень добычи, максимальный уровень доходов на основе расчета чистой дисконтированной стоимости (NPV) и минимальные затраты на МГРП.

В работе использован подход к решению задачи оптимизации МГРП, учитывающий взаимосвязи трех подзадач: определение геометрических характеристик трещины, определение дебита скважины после проведения МГРП и вычисление экономических показателей [1].

Рассматриваются задачи как одноцелевой оптимизации, где максимизируется только NPV, так и многоцелевой оптимизации, где одновременно ищется экстремум дебита, NPV и затрат. Задача оптимизации решается с использованием наиболее популярных методов: генетический алгоритм NSGA-II [2], метод роя частиц и метод имитации отжига.

Был проведен анализ эффективности рассмотренных алгоритмов тестированием на ряде модельных задач. Предложенный подход был проиллюстрирован на примере слабо проницаемого нефтяного коллектора. Проведенные расчеты показали, что из рассмотренных алгоритмов наибольшую устойчивость и лучшую сходимость показал NSGA-II. Метод роя частиц показал наименьшее время расчетов и хорошую сходимость. Наименьшую устойчивость показал метод имитации отжига, что связано с сильной зависимостью алгоритма от входящих в него параметров.

Результаты исследования могут быть использованы при разработке проекта МГРП и при выборе скважин на его проведение.

Работа поддержана Минобрнауки РФ (грант № 14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Starovoitova B. N., Golovin S. V., Paderin G. V., Shel, E. V., Kavunnikova E. A., Krivtsov A. M. *Design optimization of hydraulic fracturing*. IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2018. V. 193. P. 012011.
2. Deb K., Agrawal S., Pratap A., Meyarivan T. *A fast elitists multionjective genetica algoirothm: NSGA-II*. IEEE Trans. Evol. Comp. 2002. V. 6. P. 182–197.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ

А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, А. А. Лемперт

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
Иркутск

В работе строятся аналитические решения специальных краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью (уравнения нелинейной фильтрации [1]) вида

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{\nu uu_{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\sigma} u_{\rho}^2 + F(u) \quad (1)$$

в случаях плоской ($\nu = 0$), круговой ($\nu = 1$) и сферической ($\nu = 2$) симметрии. Функция источника $F(u)$ такова, что $F(0) = 0$; $\sigma > 0 - \text{const}$. Исследуемые задачи

относятся к классу задач об инициировании тепловых волн, движущихся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью (см. [1, 2]).

Рассмотрим краевое условие

$$u(t, \rho)|_{\rho=R} = f(t), \quad R > 0 - \text{const}, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0. \quad (2)$$

Для задачи (1), (2) об инициировании тепловой волны заданным краевым режимом справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $R(t)$, $f(t)$ и $F(u)$ – функции, аналитические в окрестностях $t = 0$ и $u = 0$ соответственно. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение, аналитическое в окрестности $t = 0$, $\rho = R(0)$.

Также исследована аналитическая разрешимость задачи с заданным тепловым фронтом, когда краевое условие имеет вид

$$u(t, \rho)|_{\rho=a(t)} = 0, \quad a(t) > 0, \quad a'(0) \neq 0. \quad (3)$$

Теорема 2. Пусть $a(t)$ и $F(u)$ – функции, аналитические в окрестностях $t = 0$ и $u = 0$ соответственно. Тогда задача (1), (3) имеет единственное ненулевое решение, аналитическое в окрестности $t = 0$, $\rho = a(0)$.

Теорема 2 обобщает ранее полученный авторами в случае $\nu = 0$ результат [2].

Плоскосимметричная ($\nu = 0$) задача (1), (3) с квадратичным источником, когда $F(u) = \alpha u^2$, $\alpha - \text{const}$, рассмотрена особо. Показано, что при линейном и логарифмическом способах задания фронта $\rho = a(t)$ она имеет точные решения типа обобщенной бегущей волны. В обоих случаях построение сводится к решению задач Коши для нелинейного ОДУ второго порядка с вырождением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф. *Избранные труды: Математика. Механика*. М.: Физматлит, 2001.
2. Баутин С. П. *Аналитическая тепловая волна*. М.: Физматлит, 2003.
3. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. *Об аналитических решениях задачи о движении теплового фронта для нелинейного уравнения теплопроводности с источником*. Известия ИГУ. Сер. Математика. 2018. Т. 24. С. 37–50.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕННО-АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ИСТОЧНИКОМ

А. Л. Казаков¹, Л. Ф. Спевак²

¹Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск

²Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Рассматривается краевая задача для одномерного нелинейного параболического уравнения с источником [1] при заданном законе движения фронта фильтрации (теплового фронта)

$$u_t = u \left(u_{\rho\rho} + \frac{\nu u_\rho}{\rho} \right) + \frac{1}{\sigma} u_\rho^2 + F(u), \quad (1)$$

$$u(t, \rho)|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma > 0$, $F(0) = 0$.

Исследуются случаи, когда решение задачи (1), (2) может быть представлено в виде

$$u = \lambda(t) w(z), \quad z = 1 - \frac{\rho}{a(t)}, \quad (3)$$

где функция $w(z)$ является решением на некотором отрезке $z \in [0, L]$ задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с вырождением следующего вида:

$$ww'' + G(z, w, w') = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = w'_0. \quad (4)$$

Точные решения такого вида иногда называют частично-автомодельными [3] или обобщенно-автомодельными [2].

Задача (4) интегрируется в квадратурах только в отдельных примерах. Поскольку стандартные численные методы в здесь неприменимы из-за наличия вырождения, для построения решений в остальных случаях разработан итерационный алгоритм решения задачи (4) методом граничных элементов.

С помощью построенного алгоритма проведен вычислительный эксперимент: задача (1), (2) решена для различных видов функции источника $F(u)$ и числовых параметров задачи. Анализ результатов расчетов был сопоставлен с качественным анализом решений [2]. Полученные результаты позволили дополнить представления о свойствах решений уравнения (1).

Работа выполнена при частичной поддержке Комплексной программы УрО РАН, проект № 18-1-1-5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vazquez J. L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. *Трехмерная тепловая волна, порожденная краевым режимом, заданным на подвижном многообразии*. Известия ИГУ. Серия Математика. 2018. Т. 26. С. 37–50.
3. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. *Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения*. М.: Изд-во Юрайт, 2017.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ КРАЕВЫМ РЕЖИМОМ, ЗАДАННЫМ НА ПОДВИЖНОМ МНОГООБРАЗИИ

А. Л. Казаков¹, Л. Ф. Спевак², О. А. Нефедова²

¹Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск

²Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Рассматривается краевая задача для нелинейного параболического уравнения с вырождением [1] в случае двух пространственных переменных

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma} (\nabla u)^2 \quad (1)$$

с краевым условием

$$u|_{\rho=a(\varphi)} = f(t, \varphi). \quad (2)$$

(1), (2) – это задача об иницировании тепловой волны краевым режимом, заданным на подвижном многообразии [2].

Решение проводится в два этапа. На первом этапе (1), (2) производится специальная замена переменных: искомой функцией становится радиальная координата ρ , а независимыми пространственными координатами в новой полярной системе координат становятся переменные $v = u + 1$ и φ . В результате решение задачи (1), (2) на каждом шаге по времени сводится к решению следующей краевой задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta \rho = P(v, \rho, \rho_t, \rho_v, \rho_\varphi, \rho_{\varphi\varphi}, \rho_{v\varphi}), \quad \rho|_{v=f(t, \varphi)+1} = a(\varphi). \quad (3)$$

Задача решается итерационно на основе метода граничных элементов (МГЭ). Пошаговое решение (3) позволяет определить неизвестный закон движения фронта тепловой волны – функции $\rho = b(t, \varphi)$ такой, что

$$u|_{\rho=b(t, \varphi)} = 0. \quad (4)$$

На втором этапе решения применяется пошаговый алгоритм на основе МГЭ для решения задачи о движении фронта тепловой волны (1), (4) [3].

Алгоритм был реализован в виде программы. Сравнение результатов расчетов с известным точным решением задачи показало эффективность разработанного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vazquez J. L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах. СибЖИМ. 2018. Т. 21, № 2(74). С. 56–65.
3. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф., Нефедова О. А. Решение двумерной задачи о движении фронта тепловой волны с использованием степенных рядов и метода граничных элементов. Известия ИГУ. Сер. Математика. 2016. Т. 18. С. 21–37.

ОБ ЭФФЕКТЕ ОРИЕНТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

А. Г. Калугин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Нематической жидкокристаллической фазой (мезофазой) как правило обладают среды, молекулы или другие структурные единицы которых имеют сильновытянутую форму. При этом для каждой индивидуальной частицы среды молекулы в мезофазе в среднем ориентированы в одном направлении, которое описывается дополнительным макроскопическим параметром – единичным вектором (директором) $\vec{n}$. Такое свойство анизотропии среды приводит к появлению дополнительной части свободной энергии – энергии Франка, которую в самом общем случае с учетом свойств симметрии среды и постоянства длины директора можно записать в виде

$$F_V = \frac{1}{2} K_1 (\operatorname{div} \vec{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{n})^2 + \frac{1}{2} K_3 |[\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{n}]|^2 + \frac{1}{2} K_{24} \nabla_i (n^k \nabla_k n^i - n^i \operatorname{div} \vec{n}). \quad (1)$$

Для нематических жидких кристаллов характерна ориентационная неустойчивость, наблюдаемая и в статических [1], и в динамических экспериментах [2], когда в случае однородных внешних воздействий и граничных условий поле директора из однородного переходит в неоднородное периодическое.

В работе показано, что причиной такой неустойчивости может быть знаконеопределенность энергии Франка (1), которая возможна при достаточно больших значениях коэффициента K_{24} . Получены нетривиальные периодические поля директора как решения линеаризованной задачи о слабых возмущениях для однородного поля вектора ориентации нематика в случае статического состояния и сдвигового течения. Исследована зависимость условий существования таких решений от величины K_{24} по сравнению с другими константами Франка. Предложен метод для определения величины K_{24} на основе анализа полученных периодических решений и известных экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Delabre U., Richard C., Cazabat A. M. *Thin nematic films on liquid substrates*. Phys. Chem. B. 2009. V. 113, № 12. P. 3647–3652
2. Пасечник С. В., Крехов А. П., Шмелева Д. В., Насибуллаев И. Ш., Цветков В. А. *Ориентационная неустойчивость в нематическом жидком кристалле в затухающем пуазейлевском потоке*. ЖЭТФ. 2005. Т. 127, № 4. С. 907–914.

ВЫРОЖДЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. И. Капранов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются вопросы, связанные с перемещением в пористых средах жидкостей, различающихся между собой плотностью и вязкостью. Исследования особенностей подобных режимов играют важную роль для оценки последствий создания подземных хранилищ вредных отходов. Принципиальным становится изучение рассматриваемого класса течений для стадии срабатывания упругих запасов пласта, когда поддержание в нем давления осуществляется путем закачки в него воды через нагнетательные скважины. Широко известны также проблемы экономического и экологического плана, связанные с удалением отработанного бурового шлама. Применительно к разработке глубоководных месторождений указанные проблемы обостряются многократно. В качестве преодоления указанных трудностей на практике часто используют закачку отработанного бурового шлама в соседние с эксплуатируемым пласты.

В докладе в рамках гидравлического приближения строятся точные решения ряда соответствующих задач. Изучаются напорные режимы типа вытеснения из пласта одной жидкости другой, когда имеет место вырождение границы раздела в одном из ее концов. Рассмотрены также примеры течений типа растекания бугра более плотной жидкости в менее плотной или обратно, когда граница раздела вырождается в обоих своих концах.

Описан класс безнапорных нестационарных режимов, где одновременно присутствуют свободная граница и граница раздела между жидкостями. Применительно к соответствующей системе уравнений Буссинеска строятся примеры точных решений, иллюстрирующие возможные варианты частичного или полного вырождения одной или же одновременно обоих подвижных границ.

ВОЛНЫ И СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

О. В. Капцов, Д. О. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В данной докладе развиваются исследования, начатые в [1]. С помощью линейных дифференциальных связей четвертого порядка находится решение уравнения Буссинеска, зависящее от нескольких произвольных констант и выражающееся через элементарные функции. Из бризерных решений выделяются специальные типы волн, такие как волновые пакеты, «танцующие» волны и волны на солитонах. Представляется удобная форма принципа суперпозиции, позволяющая получать из специальных типов волн более сложные структуры. В частности, среди них имеются структуры, описывающие взаимодействие волновых пакетов с «танцующими»

солитонами и между собой. Найдены новые решения уравнения Буссинеска, которые удовлетворяют модифицированным дисперсионным соотношениям и стремятся к другой константе при $|x| \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00332-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Капцов О. В. *Построение точных решений уравнения Буссинеска*. ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 74–78.

ДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВЫХ ВОЛН ОБРАЩЕНИЯ СПИНА В МОЛЕКУЛЯРНЫХ МАГНИТАХ

А. Р. Касимов

Сколковский институт науки и технологий, Москва

Мы исследуем динамику сверхзвуковых волн обращения спина в молекулярных магнитах в континуальном приближении, обобщая стационарную модель, введенную в [1] с учетом нестационарных эффектов. Теория основана на реагирующих уравнениях Эйлера для среды с неидеальным уравнением состояния, в которой реакция представляет собой экзотермическую инверсию спина, высвобождающую Зеемановскую энергию спиновых состояний во внешнем магнитном поле. В слабонелинейном приближении получено уравнение Бюргерса с источником членом, которое имеет много общего как с нелокальной игрушечной моделью детонации, предложенной в [2], так и с асимптотической моделью [3]. Показано, что решения модели в виде бегущих ударных волн могут стать неустойчивыми, когда начальная температура среды и напряженность внешнего магнитного поля достаточно низки по величине. За порогом неустойчивости динамика волны оказывается либо периодической либо нерегулярной.

Данная работа проведена в соавторстве с L. M. Faria (INRIA, Франция) и R. R. Rosales (MIT, США).

ЛИТЕРАТУРА

1. Modestov M., Bychkov V., Marklund M. *Ultrafast spin avalanches in crystals of nanomagnets in terms of magnetic detonation*. Phys. Rev. Let. 2011. V. 107, № 20. P. 207208.
2. Kasimov A. R., Faria L. M., Rosales R. R. *Model for shock wave chaos*. Phys. Rev. Let. 2013. V. 110, № 10. P. 104104.
3. Faria L. M., Kasimov A. R., Rosales R. R. *Theory of weakly nonlinear self-sustained detonations*. J. Fluid Mech. 2015. V. 784. P. 163–198.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР НА ПОВЕРХНОСТИ ГЛУБОКОЙ ВОДЫ

Д. И. Качулин¹, А. А. Гелаш¹, А. И. Дьяченко², В. Е. Захаров²

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка

Взаимодействие когерентных структур (различных видов солитонных волновых групп) на поверхности глубокой воды является важным нелинейным волновым процессом, который изучается как теоретически, так и экспериментально [1, 2].

В работе [3] численно исследована динамика парных взаимодействий когерентных структур (бризеров) на поверхности глубокой воды в рамках модели Дьяченко–Захарова. Были выявлены существенные различия в динамике столкновений бризеров компактного уравнения Дьяченко–Захарова по сравнению поведением солитонов нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Обнаружено, что в более точной модели гравитационных поверхностных волн, в отличие от НУШ, величина максимальной амплитуды волны, возникающей при столкновении когерентных структур, может превышать сумму начальных амплитуд бризеров. Выявлено, что важным параметром, определяющим динамику парных столкновений бризеров является относительная фаза этих объектов в момент взаимодействия. Так, например, в зависимости от значения относительной фазы, бризеры могут как забирать, так и отдавать энергию, что приводит к увеличению или уменьшению их амплитуды после столкновения. Также нами обнаружено, что в отличие от модели НУШ пространственные сдвиги когерентных структур в более точной модели могут быть как положительными, так и отрицательными.

Использование бризерных решений приближенной модели Дьяченко–Захарова и канонического преобразования к физическим переменным – профилю свободной поверхности и потенциалу на поверхности жидкости позволили найти приближенные решения в виде бризеров в точных нелинейных уравнениях для потенциальных течений несжимаемой жидкости. Изучено влияние относительной фазы найденных решений в полной нелинейной модели на динамику их парных взаимодействий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-00079).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyachenko A.I., Kachulin D.I., Zakharov V.E. *Collisions of two breathers at the surface of deep water*. Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2013. V. 13. P. 3205–3210.
2. Slunyaev A., Klein M., and Clauss G. *Laboratory and numerical study of intense envelope solitons of water waves: Generation, reflection from a wall, and collisions*. Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 047103.
3. Kachulin D., Gelash A. *On the phase dependence of the soliton collisions in the Dyachenko–Zakharov envelope equation*. Nonlin. Processes Geophys. 2018. V. 25. P. 553–563.

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТИ НА КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

М. А. Кашина, А. А. Алабужев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Пермский государственный национальный исследовательский университет

В данной работе рассматриваются вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости, окруженной другой жидкостью. В равновесном состоянии капля имеет форму кругового цилиндра и ограничена в осевом направлении двумя параллельными проводящими пластинами, покрытыми диэлектрическим слоем. К пластинам подводится переменное напряжение, создающее внешнюю периодическую силу, которая приводит к изменению краевого угла [1]. В результате можно с помощью электрического поля менять краевой угол, т. е. изменять эффективное поверхностное натяжение – электросмачивание. В большинстве работ, посвященных электросмачиванию, обычно используется условие Юнга–Липмана [1], которое хорошо работает только для малых значений напряжения и стационарного краевого угла. В работе [2] было предложено другое эффективное граничное условие: скорость движения контактной линии пропорциональна сумме отклонения краевого угла и скорости быстрых релаксационных процессов, частоты которых пропорциональна удвоенной частоте электрического поля.

Предполагается, во-первых, что поверхность пластин неоднородная, т. е. коэффициент взаимодействия линии контакта с подложкой является функцией координат, во-вторых, свойства поверхности пластин отличаются друг от друга. В работе [3] рассматривался случай одинаковых неоднородных пластин, а в работе [4] – разных однородных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 19-42-04120).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mugele F., Baret J.-C. *Electrowetting: from basics to applications*. J. Phys.: Condens. Matter. 2005. V. 17. P. 705–774.
2. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. *The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field*. J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 681. 012042.
3. Kashina M. A., Alabuzhev A. A. *The dynamics of oblate drop between heterogeneous plates under alternating electric field*. Microgravity Sci. Technol. 2018. V. 30. P. 11–17.
4. Алабужев А. А., Кашина М. А. *Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле* Известия вузов. Радиофизика. 2018. Т. XLI, № 8-9 (принято к печати).

МОДЕЛЬ УДАРНО-ВОЛНОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПОРОШКОВЫЕ СМЕСИ

С. А. Кинеловский, К. К. Маевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассмотрена основанная на законах сохранения модель ударно-волнового воздействия на многокомпонентные порошковые смеси, позволяющая наиболее просто получить оценки термодинамических характеристик смесей. Полагается, что все компоненты смеси, включая газ в порах, за фронтом ударной волны находятся в термодинамическом равновесии, то есть имеют одинаковые скорости, давления и температуры; это дает основание называть данную модель ТЕС - thermodynamic equilibrium components. Выписываются условия динамической совместности на фронте волны: условия сохранения потока массы для каждого компонента смеси и сохранения потоков импульса и энергии для смеси в целом. Полученных уравнений в совокупности с уравнениями состояния каждого компонента достаточно для нахождения зависимостей типа $P(U)$ или $D(U)$ (P , U , D – давление, массовая и волновая скорости), которые можно трактовать как ударную адиабату многокомпонентной смеси (пористая среда является частным случаем модели).

Проведено сравнение результатов расчетов по модели ТЕС со значительным числом известных экспериментальных данных для различных смесей и пористых тел. Показано, что модель хорошо соответствует эксперименту в широких диапазонах давлений и температур, в том числе адекватно описывает известные экспериментальные результаты для различных материалов с высокой пористостью в диапазоне значений давления от 5 ГПа до 5 ТПа. При этом она позволяет оценивать термодинамические параметры каждого компонента смеси при ударно-волновом нагружении и тем самым позволяет варьировать состав смеси для получения необходимых значений термодинамических параметров (давление, температура) при ударно-волновом нагружении.

Модель ТЕС, изначально ориентированная на невысокие значения пористости, показала весьма хорошее согласие с экспериментальными результатами и расчетами по «химической модели плазмы» для аэрогелей, т. е. в диапазоне пористости, где она и не предполагалась работоспособной.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В РАДИАЛЬНЫХ СОПЛАХ

С. П. Киселев^{1,2}, В. П. Киселев¹, В. Н. Зайковский¹

¹*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

²*Новосибирский государственный технический университет*

В работе представлены результаты исследования сверхзвуковых течений газа в радиальных соплах. Постановка задачи представлена в работах [1,2]. Радиальное сопло представляет собой два параллельных диска, скрепленных центральным

стержнем. В окрестности оси по цилиндрическому каналу подается газ под большим давлением, который расширяется между пластинами и ускоряется до сверхзвуковой скорости. Показано, что при уменьшении ширины сопла до некоторого критического размера в течении возникает стационарный псевдоскачок, который образуется за счет трения газа о стенки сопла. При наличии ступеньки на внешней поверхности сопла также возникает псевдоскачок, который имеет более сложную волновую структуру. Если ступенька расположена вблизи выходного сечения сопла, то псевдоскачок является нестационарным. Было исследовано истечение сверхзвуковой струи в щелевое пространство между двумя дисками. Показано, что вытекающая сверхзвуковая струя приобретает веерную форму, если расстояние между дисками становится меньше некоторого критического размера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00292а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kiselev S. P., Kiselev V. P., Zaikovskii V. N. *Gas flows in radial micro-nozzles with pseudo-shocks*. Shock Waves. 2018. V. 28, № 4. P. 829–849.
2. Kiselev S. P., Kiselev V. P., Zaikovskii V. N. *Supersonic gas flows in radial nozzles*. J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58. P. 1021–1032.

СВЯЗАННЫЕ МОДЕЛИ СИНТЕЗА ПОКРЫТИЙ НА ПЛОСКОЙ ПОДЛОЖКЕ

А. Г. Князева

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Синтез материалов и покрытий из смесей компонентов, вступающих в экзотермические реакции с образованием интерметаллидов или композитов с включениями карбидов, боридов и силицидов представляет значительный интерес для различных приложений. Для управления такими процессами используют добавки инертных частиц, предварительную механоактивацию, постоянно действующие подвижные внешние источники тепла (лазер или электронный луч, электрическая дуга). Если синтез идет в твердой фазе (или преимущественно в твердой фазе, что наблюдается, например, после механоактивации), режим распространения реакции в значительной степени зависит от сопутствующих механических процессов. Напряжения и деформации, вызванные высокими градиентами температуры и изменением свойств в ходе реакции, могут стать причиной появления особых режимов распространения термоупругих волн [1], что требует специального исследования. При синтезе покрытия непосредственно на плоской подложке, последняя отнимает тепло из зоны реакции, с одной стороны, но, с другой стороны, способствует более быстрому прогреву перед зоной реакции. Реагенты и остающиеся за фронтом продукты реакции находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии [2], которое определяет характер распространения фронта реакции, когда внешний источник, способствовавший

инициированию реакции, уже перестал действовать. Учет характера напряженно-деформированного состояния реагентов и продуктов приводит к так называемым связанным моделям. Пример связанной модели синтеза в твердой фазе представлен в [3].

В настоящей работе построено решение типа бегущей волны в приближении малых деформаций для условий распространения реакции по тонкому плоскому слою, делается простое обобщение полученного решения на случай синтеза композита из реакционной смеси, содержащей инертные включения, и для синтеза композита на подложке, отнимающей тепло из зоны реакции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 17-19-01425).

ЛИТЕРАТУРА

1. Князева А. Г. *Решение задачи термоупругости в форме бегущей волны и его приложение к анализу возможных режимов твердофазных превращений*. ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 26–38.
2. Князева А. Г. *Термомеханическая устойчивость фронта твердофазного превращения к двумерным возмущениям*. Вестник ПермГТУ, Механика. 2011, № 4. С. 88–123.
3. Князева А. Г., Дюкарев Е. А. *Стационарная волна химической реакции в деформируемой среде с конечным временем релаксации теплового потока*. ФГВ. 1995. Т. 31, № 3. С. 37–46.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ ВЯЗКИХ ПАЛЬЦЕВ В ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ – ШОУ

П. В. Ковтуненко¹, В. Е. Ермишина²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В работе изучается образование и развитие вязких пальцев – пальцеобразных структур, возникающих при развитии неустойчивости Саффмана – Тейлора. Такие неустойчивости возникают на границе раздела двух жидкостей при вытеснении более вязкой жидкостью менее вязкой жидкостью в ячейке Хеле – Шоу или пористой среде.

Рассматривается двумерная осредненная модель течения слабосжимаемой жидкости в ячейке Хеле – Шоу [1]. Проводится расширение модели на класс жидкостей со степенной реологией, исследуются математические свойства модели. Используя подход, предложенный в [2], производится переход от двумерной модели к многослойной одномерной модели течения. При этом в полученной модели учитывается трение между слоями, которое отражает неоднородности, возникающие вследствие формирования пограничных слоев на границах разделов жидкостей.

Для проведения численных экспериментов используется сопряженный нелинейный алгоритм решения уравнения Пуассона для давления и уравнения переноса для

маркера жидкости. Для решения уравнение Пуассона используется метод конечных объемов с пятиточечным шаблоном, а для уравнения переноса – алгоритм, основанный на работе [3]. С помощью данного алгоритма осуществляется моделирование двумерной задачи о вытеснении жидкости в ячейке Хеле–Шоу. Проводится сравнение результатов двумерного моделирования с результатами, предсказанными одномерной многослойной моделью.

Выполнена серия численных экспериментов, включающих моделирование течений ньютоновской жидкости и жидкости со степенной реологией. Проведены численные эксперименты для ячейки с ровными стенками, с учетом шероховатости стенок, неровными стенками, проведен анализ влияния силы тяжести на развитие неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант №14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chesnokov A., Liapidevskii V. *Viscosity-stratified flow in a Hele–Shaw cell*. Int. J. Non-Linear Mech. 2017. V. 89. P. 168–178.
2. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. Leveque R. J. *High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow*. SIAM J. Numer. Anal. 1996. V. 33. P. 627–665.

ЗАДАЧА О ПОДЪЁМЕ ИЗ МЕЛКОЙ ВОДЫ СИММЕТРИЧНОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

О. А. Ковыркина¹, В. В. Остапенко^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Изучены плоскопараллельные течения, возникающие при вертикальном подъеме пологого симметричного выпуклого тела, частично погруженного в мелкую воду, заполняющую бесконечный прямоугольный призматический канал с горизонтальным дном (случай подъема прямоугольного бруса рассмотрен в [1]). Моделирование таких течений выполнено в рамках первого приближения теории мелкой воды без учета влияния трения, вязкости жидкости и ее поверхностного натяжения. Течение жидкости в области, примыкающей к нижней поверхности тела, получено аналитически, а вне этой области – путем численного расчета уравнений мелкой воды по схеме CABARET второго порядка [2]. Получены уравнения, задающие движения границы области контакта жидкости с нижней поверхностью тела. Показано, что вид этих уравнений определяется знаком пространственной производной давления на этой границе. На рис. 1 приведены результаты численного расчета, демонстрирующие подъем жидкости вслед за выходящим из воды телом.

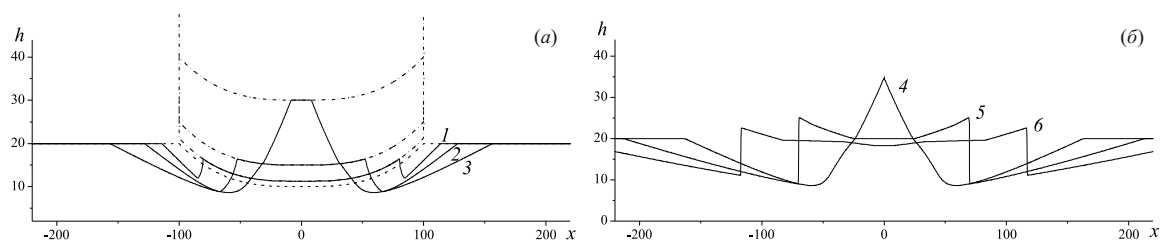


Рис. 1. Уровни жидкости на шесть последовательных моментов времени при подъеме с ускорением $H'' = 250 \text{ см/с}^2$ параболического тела: $t = 0.1 \text{ с}$ (1), $t = 0.2 \text{ с}$ (2), $t = 0.4 \text{ с}$ (3), $t = 0.45 \text{ с}$ (4), $t = 0.8 \text{ с}$ (5), $t = 1.2 \text{ с}$ (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ostapenko V. V., Kovyrkina O. A. *Wave flows induced by lifting of a rectangular beam partly immersed in shallow water*. J. Fluid Mech. 2017. V. 816. P. 442–467.
2. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. *Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics*. J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ В ПРОЦЕССЕ НАГРУЖЕНИЯ

В. А. Колотилов

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Вязкоупругие материалы получили широкое распространение в различных областях деятельности человека. Математические модели вязкоупругих материалов хорошо описывают пористые, волокнистые вещества, пропитанным вязким наполнителем. Одним из актуальных вопросов исследования свойств таких сред является учет микроструктуры в процессе нагружения. Задача нагружения гетерогенной системы с последующим распространением волн в фазах создает вычислительные трудности для представления сдвиговых и вязкоупругих деформаций сжимаемого многокомпонентного материала.

Настоящая работа представляет собой развитие идей [1] для гомогенизированных вязко-упругих сред. Процедура гомогенизации проводится с учетом микроструктуры среды. Рассматриваются модели сред, предложенные в обзорной работе [2], проводится верификация с работой [3]. Материал описывается континуальным подходом с использованием Максвелловской модели. Система законов сохранения аппроксимирована двухслойной по времени схемой Кабаре, зарекомендовавшей себя в задачах деформирования упругопластических тел [4]. В ходе выполнения расчета были получены ударные адиабаты материалов, проведен сравнительный анализ с экспериментальными работами. Получены затухания ударных волн и профили скорости в

гетерогенном материале. Тест проводился на задачах нагрузки среды внешней силой и на задаче ударно-волнового нагружения в результате соударения тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колотилов В. А. *Применение схемы Кабаре в задачах ударно-волнового нагружения материалов*. Тез. междунар. науч.-техн. молодеж. конф. «Перспективные материалы конструкционного и медицинского назначения», Томск, 2018. С. 64–65.
2. Lin Y. C., Chen Xiao-Min *A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working*. Materials and Design. 2011. V. 32. P. 1733–1759.
3. Rodriguez M., Jonhsen E. *A high-order accurate five-equations compressible multiphase approach for viscoelastic fluids and solids with relaxation and elasticity*. J. Comput. Phys. 2019. V. 379. P. 70–90.
4. Зайцев М. А., Карабасов С. А. *Схема Кабаре для численного решения задач деформирования упругопластических тел*. Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 11. P. 53–70.

РАСЧЕТ НДС В СОЕДИНЕННЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ ДВУХМАСШТАБНЫМ МЕТОДОМ

А. Г. Колпаков¹, С. И. Ракин²

¹Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Новосибирск

²Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск

Предложена методология для расчета локального напряженно-деформированного состояния (НДС) в соединенных упругих телах, основанная на двухмасштабном методе [1] в предположении, что соединительная область имеет небольшой размер по сравнению с соединяемыми объектами и имеет неоднородное периодическое строение. Показано, что задача сопряжения допускает асимптотическое разложение. На макроскопическом уровне (приближение нулевого порядка) возникает задача идеального контакта с соответствующими условиями на контакте. На этом уровне все индивидуальные свойства соединительной области игнорируются. Свойства соединительной области проявляются в следующем члене асимптотического разложения – в локальной задаче, которая имеет вид «локального возмущения» (см. подробнее [2],[3]), учитывает все индивидуальные свойства, как механические, так и геометрические, соединительной области и использует решение макроскопической задачи как параметры. Локальное НДС в соединении и вблизи него состоит из НДС в собственно соединительной области и быстро затухающих пограничных слоев в соединенных элементах. Детальное выяснение НДС в соединительной области является важным отличием этой работы от предыдущих исследований соединенных тел.

Вводится понятие «представительного элемента» соединения, состоящего из собственно соединительной области и примыкающих к ней фрагментов соединенных тел. Условие: НДС в «представительном элементе» соединения, помещенном в исходное

тело и в макроскопическое поле деформаций, близки. Оценивается необходимый для выполнения этого условия размер примыкающих фрагментов.

На основе асимптотического анализа разработан численный метод для одновременного расчета НДС как в соединенных телах, так и в соединительной области и около нее. Представлен иллюстративный пример – вычисление НДС в волнообразном сварном шве, образующемся при сварке взрывом. Другие примеры расчетов по предлагаемой методике можно найти в [2, 3, 4].

Обсуждается вопрос появления реальных и паразитных погранслоев, возникающих при решении задач типа «соединения дискретных и непрерывных структур».

Работа выполнена при финансовой поддержке, предоставленной London Mathematical Society (код проекта 21513) А.Г. Колпакову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б. Д., Каламкарров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З. *Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций*. Новосибирск: Наука, 1993.
2. Kolpakov A. G., Andrianov I. V., Prikazchikov D. A. *Asymptotic strategy for matching homogenized structures. Conductivity problem*. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2018. V. 71, № 4. P. 519–535.
3. Kolpakov A. G., Andrianov I. V., Rakin S. I., Rogerson G. A., *An asymptotic strategy to couple homogenized elastic structures*. International Journal of Engineering Science. 2018. V. 131, № 4. P. 26–39.
4. Колпаков А. Г., Ракин С. И. *Оценка концентрации напряжений в сварном шве, возникающем при сварке взрывом*. ПМТФ. 2018. Т. 59, № 3. С. 213–220.

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ СЛОЕВ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

П. Н. Конон, А. И. Ермоленко

Белорусский государственный университет, Минск

В работе исследуется плоское возмущенное движение двух тонких несмешивающихся слоев вязких жидкостей на внешней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле центробежных сил, гравитации и поверхностного натяжения. Подобного рода течения можно использовать в технологии нанесения двухслойных покрытий на цилиндрические поверхности при умеренном вращении цилиндра и образовании композиционных металлических волокон из расплава при быстром его вращении. В работе [1] решена плоская задача определения вида поверхностей двух слоев в случае установившегося движения жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра.

В данной работе дана общая многопараметрическая трехмерная постановка задачи движения двух несмешивающихся слоев вязких жидкостей в поле центробежных, поверхностных и гравитационных сил. С помощью основных постулатов теории

тонкого слоя [2] система уравнений, представляющая собой постановку двумерной нестационарной плоской задачи, была упрощена. В случае медленного и умеренного вращения цилиндра, пренебрегая инерционными членами уравнений Навье – Стокса, получены выражения для давления, окружных и радиальных компонент скорости как функции координат и неизвестных границ течений, а из уравнений поверхностей найдена взаимосвязанная система двух уравнений эволюции для определения вида наружного и внешнего слоев в гравитационном и поверхностном поле. Разработан и реализован численный метод ее исследования, основанный на методе прямых и интегрированием по формулам Рунге – Кутты. Получены и проанализированы форма раздела двух слоев и свободная поверхность внешнего слоя в зависимости от начальных возмущений пленок и пяти характерных безразмерных критериев. При умеренном вращении цилиндра с менее плотной и вязкой внешней средой поверхности имеют вид слабо возмущенного устойчивого состояния с одним максимумом поверхности на подъеме жидкости и одним минимумом при ее спуске. Наблюдается определенная повторяемость видов поверхностей через один полный оборот цилиндра.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект Ф18Р-225) и ГПНИ РБ «Энергетические системы, процессы и технологии» (задание № 2.48).

ЛИТЕРАТУРА

1. Конон П. Н., Ермоленко А. И. *Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра*. Теоретическая и прикладная механика. 2017. № 32. С. 46–51.
2. Пухначев В. В. *Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести*. ПМТФ. 1977. Т. 18, № 3. С. 78–88.

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОГО ЖИДКОГО СЛОЯ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

П. Н. Конон¹, А. В. Жук¹, В. Я. Шкадов²

¹Белорусский Государственный Университет, Минск

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В работе исследовано неизотермическое плоское движение слоя вязкой жидкости на внешней поверхности горизонтального вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра в поле сил поверхностного натяжения, гравитации и инерции. Подобного рода течения встречаются при образовании минеральных и металлических волокон из расплавов центробежно-валковым способом, нанесении покрытий на цилиндрические поверхности. Решение нестационарной изотермической задачи рассмотрено в [1, 2, 3].

Получена, численно решена и проанализирована система дифференциальных уравнений в частных производных для определения эволюции свободной поверхности плоского слоя в поле центробежных сил с учетом изменяющегося температурного

поля в жидкости. Полученная система позволяет исследовать движение слоев любой толщины при произвольных числах Рейнольдса Re . Проведены сравнения с экспериментами и результатами исследования изотермической задачи по формам поверхности. Найдена зависимость времени распада слоя на цилиндре от числа Re . При умеренных и малых числах Re имеет место гравитационная неустойчивость. Далее существует интервал чисел Re , когда устойчивое состояние движения сохраняется длительное время. Учет инерционных членов уравнений движения позволил проследить за развитием нелинейных возмущений слоя на внешней поверхности цилиндра при $Re \gg 1$. Основной причиной распада слоя является гидродинамическая неустойчивость Тейлора.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф18Р-225) и ГПНИ Республики Беларусь «Энергетические системы, процессы и технологии» (задание № 2.48) и РФФИ (проекты 18-01-00762 и 18-51-00006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Епихин В. Е., Конон П. Н., Шкадов В. Я. *О возмущенном движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося цилиндра*. ИФЖ. 1994. Т. 66, № 6. С. 689–694.
2. Пухначев В. В. *Движение жидкой пленки на поверхности вращающегося цилиндра в поле тяжести*. ПМТФ. 1977, № 3. С. 78–88.
3. Конон П. Н., Жук А. В. *Напряжения на внешней и внутренней поверхности вращающейся цилиндрической оболочки частично заполненной жидкостью*. Механика машин и механизмов. 2013. № 4. С. 32–37.

ДЕФОРМАЦИОННО-СИЛОВОЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ УСТАЛОСТИ ПРИ ОХРУПЧИВАНИИ МАТЕРИАЛА

В. М. Корнев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается распространение трещины скачками в квазихрупких материалах при циклическом нагружении. За модель деформируемого тела выбрана модель упруго идеально пластического материала, имеющего предельное относительное удлинение. Предлагается использовать сдвоенный критерий разрушения, когда реализуется маломасштабная текучесть в окрестности вершины реальной трещины и частично сохраняется сингулярность поля напряжений в вершине модельной трещины. Перед вершиной реальной трещины расположена зона пластичности. Зона предразрушения, примыкающая к вершине реальной трещины, занимает только часть зоны пластичности. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения. Модификация полученных диаграмм при пульсирующем приложении нагрузки связана с учетом накопления повреждений при неупругом деформировании материала зоны предразрушения. Предложены два пороговых значения критических параметров для описания процесса скачкообразного продвижения вершин усталостных трещин. Второе

пороговое значение – переменная величина, оно непосредственно связывается с поврежденностью материала в зоне предразрушения. Из-за нелинейного деформирования материала зоны предразрушения расходуются запас пластичности материала при охрупчивании материала при каждом цикле нагружения. При учете охрупчивания материала зоны предразрушения используется уравнение Коффина – Мэнсона. Получены аналитические выражения, связывающие скачкообразное продвижение вершины усталостной трещины с числом циклов. Выполнен подробный анализ трех стадий процесса продвижения вершин трещин и их зависимости от длин трещин, характеристик материала и интенсивности усталостного нагружения при пульсирующем приложении нагрузки. Получены достаточно простые аналитические выражения для описания всего процесса, в том числе, когда некоторые из стадий процесса отсутствуют. Все построения выполнены в терминах трещин. Установлена связь между константой Коффина и осредненной скоростью продвижения вершин трещин для второй стадии процесса, когда задана постоянная интенсивность нагружения. Критические параметры разрушения при малоциклового усталости получены в замкнутой форме. Оценки осредненной скоростью продвижения вершин трещин позволили построить N-S диаграммы, характеризующие время жизни образцов с начальными трещинами. Вместо диаграммы Китагава – Такахаши предлагается использовать критерий, допускающий эксплуатацию поврежденной конструкции. Такой подход, допускающий эксплуатацию конструкции с растущей трещиной, позволяет выделить три подобласти на плоскости нагрузка – длина трещины. Эти подобласти соответствуют безопасному, относительно безопасному и опасному (недопустимому) режимам эксплуатации поврежденной конструкции. Постоянные предлагаемой модели подбираются по трем лабораторным экспериментам, основываясь на отыскании 1) аппроксимации реальной диаграммы напряжения-деформации, 2) критического КИН, 3) константы Коффина или характеристической скорости продвижения вершины трещины для второй стадии процесса.

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ИЗОТРОПНОЙ ГИПОУПРУГОСТИ, ОСНОВАННЫХ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОРОТАЦИОННЫХ СКОРОСТЕЙ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ КИРХГОФА

С. Н. Коробейников

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Проведен анализ определяющих соотношений для моделей изотропных гипопругих материалов [1], сгенерированных с использованием коротационных скоростей тензоров напряжений $\bar{\tau}^\Omega$, τ^ω с ассоциированными тензорами-спинами Ω , ω из семейства материальных тензоров-спинов в следующих лагранжевых и эйлеровых формах [2]:

$$\bar{\tau}^\Omega = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{D} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad \Leftrightarrow \quad \tau^\omega = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{d} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d}.$$

Здесь $\bar{\tau}$, τ – лагранжевы и эйлеровы тензоры напряжений Кирхгофа; $\mathbf{D}$, $\mathbf{d}$ – лагранжевы и эйлеровы тензоры скорости деформаций; $\mathbf{I}$ – единичный тензор; λ , μ – параметры Ламе.

Получены явные выражения лагранжевых и эйлеровых тензоров четвертого порядка касательной жесткости для рассматриваемых гипотупругих материалов. Основным новым результатом исследования состоит в доказательстве того, что эти тензоры четвертого порядка имеют полную симметрию только для моделей материалов, сгенерированных с использованием двух коротационных скоростей тензоров напряжений Кирхгофа: скоростью Зарембы – Яуманна и логарифмической скоростью (см., например, [2]). Причем в последнем случае модель изотропного гипотупругого материала является одновременно и моделью Генки изотропного гиперупругого материала. Получены свободные от выбора базиса выражения материального и пространственного тензоров касательной жесткости для рассматриваемых моделей материалов, подходящих для их имплементации в конечно-элементные коды. В частности, получены новые свободные от выбора базиса выражения для тензоров касательной жесткости (тензоров упругости) для модели Генки изотропного гиперупругого материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-08-00358) и правительства РФ (проект № P220-14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Truesdell C., Noll W. *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Handbuch der Physik, V. III/3. N.Y.: Springer, 1965.
2. Korobeynikov S. N. *Families of continuous spin tensors and applications in continuum mechanics*. Acta Mechanica. 2011. V. 216, № 1-4. P. 301–332.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЗЫРЬКОВОЙ ГАЗОВОЙ СТРУИ В ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

К. Б. Кошелев, М. В. Крапошин, С. В. Стрижак

Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва

Моделирование газового плюма при выбросе природного газа со дна моря актуально в связи с прокладкой газопроводов, освоением месторождений на шельфе морей в РФ. При выбросах газа на дне моря из-за аварий и утечек возникает необходимость оперативного глушения подводных скважин. Недавно инициировано применение подходов двухфазной вычислительной гидродинамики к моделированию морского газового плюма [1, 2]. Для изучения случайного выделения газа, характерного для нефтегазовой промышленности, разработан Эйлерово – Лагранжев подход, где пузырьки газа рассматриваются как лагранжевы частицы и объединены в разные группы, но по отдельности не отслеживаются из-за их огромного числа. Движение пузырьков газа связано с водной фазой через силу сопротивления в уравнении импульса. В данной работе была использована модель на базе двухсвязанного Эйлера – Лагранжева подхода. Для моделирования динамики частиц в струе использовался

метод частиц в ячейке, а для моделирования поверхности раздела фаз вода-воздух модель VOF. Модель также включала расчет размера и плотности пузырьков, расчет силы сопротивления. Результаты вычислений сопоставлены с данными эксперимента по значениям скорости в струе, радиусу струи, высоте фонтана [1, 2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Cloete S., Olsen J.E., Skjetne P. *CFD modeling of plume and free surface behavior resulting from a sub-sea gas release*. Appl. Ocean Res. 2009. V. 31. P. 220–225.
2. Skjetne P., Olsen J.E. *A parcel based modelling concept for studying subsea gas release and the effect of gas dissolution*. Prog. Comput. Fluid Dyn. 2012. V. 12. P. 187–195.
3. T.K. Fannelop, M. Bettelini *A Very Large Deep-Set Bubble Plumes From Broken Gas Pipelines*. Report. 18th November 2007.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГЕНЕРАЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В БИКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

А. С. Кравченко¹, А. А. Жилин^{1,2}

¹Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск

²Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Математическое моделирование физических процессов в технических устройствах представляет большой интерес, связанный с разработкой новых перспективных технологий. В ряде производственных процессов применяются высокоинтенсивные акустические воздействия, направленные на интенсификацию процессов тепло- и массопереноса. Одним из примеров может служить разрабатываемая ИТПМ СО РАН технология акусто-конвективной сушки капиллярно-пористых материалов [1].

Ранее проводимые эксперименты [2] позволили получить амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) рабочего потока в тракте биканальной системы. В данной работе проводится математическое моделирование картины течения возникающей в тракте акусто-конвективной сушильной установки (АКСУ) вовремя ее работы. Рассматривается ряд конфигураций геометрии с тремя диаметрами дозвукового конического сопла.

Для математического описания модели привлекаются уравнения Навье – Стокса, осредненные по Рейнольдсу и дополненные $k - \omega$ моделью турбулентности Wilcox.

Процесс численного моделирования осуществлялся в пакете ANSYS Fluent 18.0. Было спроектировано три геометрических модели для соответствующих диаметров сопла. Геометрически расчетная модель представляет собой точную копию реальной геометрии АКСУ. Для более точного описания геометрии установки и повышения качества расчетной сетки расчетная область была разделена на сегменты и строилась относительно плоскости симметрии, проведенной вдоль рабочего тракта АКСУ. Так, в основе модели лежит многоблочная структурированная гексаэдральная сетка, а в области пересечения каналов – тетраэдральная.

Моделирование процесса работы биканальной системы с различными диаметрами сопла запускалось при соответствующих полном и статическом давлении на входном сечении форкамеры, более высокое давление для сопла с наименьшим диаметром и меньшее – для большего диаметра.

В результате моделирования была получена картина течения, описывающая поведение потока газа, истекающего в рабочую часть АКСУ, при различных диаметрах дозвукового конического сопла.

Изменение диаметра привело к увеличению частоты заполнения-опорожнения цилиндрического резонатора от d_1 к d_3 , при этом интенсивность осталась неизменной и составила $I \approx 173$ Дб.

Выполненное сопоставление полученных численных результатов и экспериментальных данных показало удовлетворительное совпадение по интенсивности и АЧХ нестационарных процессов, формирующихся в тракте АКСУ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Новосибирской области в рамках научного проекта № 17-48-540805.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhilin A., etc. *Dynamics of acousto-convective drying of sunflower cake compared with drying by a traditional thermo-convective method*. Food and Raw Materials. 2018. №2.
2. Zhilin A., Golubev E. *Experimental study of the amplitude-frequency characteristics in a two-channel system*. AIP Conf. Proc. 2018. V.1939. 020016

ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ С ПРЯМОЙ ЗВУКОВОЙ ЛИНИЕЙ

А. Н. Крайко

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова,
Москва

Изучены особенности двумерных (плоскопараллельных и осесимметричных) течений идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с прямой звуковой линией. Исследуемые течения реализуются в плоских симметричных и несимметричных соплах и в осесимметричных соплах с круглыми и кольцевыми поперечными сечениями. Наряду с изучением разгона и торможения потоков при подходе к прямой звуковой или отходе от нее решены задачи построения изобарических (звуковых) линий тока, в том числе, контура звукового центрального тела – звуковой линии тока, начинающейся в точке прямой звуковой линии на оси симметрии. Возможности развитых подходов иллюстрируют примеры, представляющие и самостоятельный интерес.

Прямая звуковая линия – один из интереснейших предметов изучения классической теоретической газовой динамики. В таком качестве результаты выполненного исследования представляются наиболее полными из всего, что было получено ранее, прежде всего в осесимметричном случае. К принципиально новым результатам можно отнести построение примыкающих к прямой звуковой линии сверхзвуковых течений, одна из границ которых – звуковая линия тока. Из них особенно интересно реализующееся при обтекании остроконечного звукового центрального тела, начинающегося на оси симметрии. Успех выполненного исследования обеспечило сочетание

аналитических подходов с численными методами, включающими не только решение обыкновенных дифференциальных уравнений и метод характеристик, но и решение краевой задачи для уравнения Чаплыгина и построение решений полной системы уравнений Эйлера с установлением по времени и сквозным счетом разрывов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00126).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ СВАРКИ В SPS

В. В. Крижановский, В. И. Мали

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В современных способах получения композиционных материалов, например, при искровом плазменном спекании (SPS), использует нагрев за счет непосредственного протекания импульсного тока через образец, который может быть порошком или состоять из пакета пластин свариваемых металлов [1]. Сцепление происходит благодаря разрушению оксидных пленок в момент протекания тока через нагретые границы частиц металла и приложения внешнего давления. Экспериментально исследовать все параметры состояния материалов в процессе спекания не представляется возможным, особенно в случае пористых образцов. В нашей работе рассматривается моделирование SPS [2] в случае прохождения тока через разнородные сплошные материалы. Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \nabla \vec{j} = 0 \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \vec{q} = Q, \end{cases} \quad (1)$$

где $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ – плотность тока с напряженностью электрического поля $\vec{E}$, $\vec{q} = k \nabla T$ тепловой поток: σ – удельная электропроводность, k – теплопроводность, ρ – плотность, c_p – теплоемкость, T – температура. $Q = \vec{j} \vec{E}$ – тепло, генерируемое протекающим током на единицу объема.

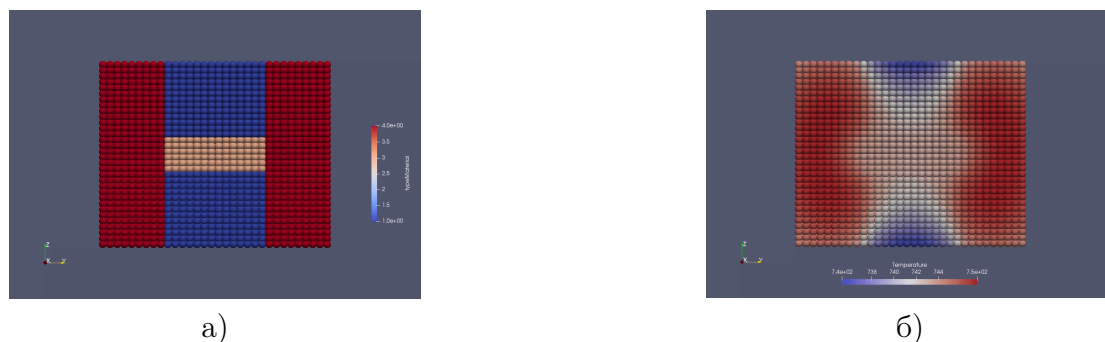


Рис. 1: а) Структура модели: красный – графитовая матрица, синий – стальные плунжеры, рыжий – медный образец; б) Температурное распределение при включенном электрическом поле для $t=100$ с.

Решая систему дифференциальных уравнений, можно численно получить распределение температуры, изображенное на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vanmeensel K., Laptev A., Hennicke J., Vleugels J., Van der Biest O. *Modelling of the temperature distribution during field assisted sintering*. Acta Materialia. 2005. V. 53. P. 4379–4388.
2. Anselmi-Tamburini U., Gennari S., Garay J.E., Munir Z.A. *Fundamental investigations on the spark plasma sintering/synthesis process II. Modeling of current and temperature distributions*. Materials Science and Engineering A. 2005. V. 394. P. 139–148.

ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ УЛЬТРА-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

И. В. Кузнецов^{1,2}, С. А. Саженов^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В настоящей работе рассматривается ультра-параболическое уравнение в нецилиндрической области:

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}_x \mathbf{f}(u) = \Delta_y u, & (\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \in G, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{\Gamma_T} \approx u_\Gamma, \\ u|_{\Xi_T} = 0, \end{cases}$$

где $Q_T = \bigcup_{0 < t < T} \Omega_t \times Y \times \{t\}$, $\Gamma_T = \bigcup_{0 < t < T} \partial\Omega_t \times Y \times \{t\}$, $\Xi_T = \bigcup_{0 < t < T} \Omega_t \times \partial Y \times \{t\}$; области $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ имеют границы $\partial\Omega_t$ и ∂Y класса C^2 , знак $\approx$ означает, что равенство выполняется только на части границы. Пусть функция $\mathbf{f} \in (C^1[-M, M])^d$ удовлетворяет условию истинной нелинейности:

$$\operatorname{mes}\{\lambda \in \mathbb{R} : \xi_0 + \xi_1 f'_1(\lambda) + \dots + \xi_d f'_d(\lambda) = 0\} = 0$$

для любых $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{S}^d$. Тогда данная начально-краевая задача имеет энтропийное решение.

Отметим, что именно в нецилиндрических областях энтропийные решения гиперболических законов сохранения были изучены в [1, 2], а слабые решения ультра-параболических уравнений были рассмотрены в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00649).

ЛИТЕРАТУРА

1. Neves W. *Scalar multidimensional conservation laws IBVP in noncylindrical Lipschitz domains*. Journal of Differential Equations. 2003. V. 192, № 2. P. 360–395.

2. Neves W. *Compactness of solutions for scalar viscous conservation laws in noncylindrical domains*. *Tend. Mat. Appl. Comput.* 2003. V. 4, № 3. P. 347–356.
3. Процах Н.П. *Мишана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння в нециліндричній області*. Науковий вісник Чернівецького університету. 2010. В. 501, С. 74–81.

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВА СВЕРХНОВОЙ ТИПА Ia С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИВНЫХ ВЛОЖЕННЫХ СЕТОК НА СУПЕРЭВМ

И. М. Куликов, И. Г. Черных, В. А. Протасов

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск*

В статье представлены результаты математического моделирования процесса взрыва сверхновой типа Ia на массивно-параллельных суперкомпьютерах с использованием технологии адаптивных вложенных сеток. Построена гидродинамическая модель белых карликов, замкнутая звездным уравнением состояния и дополненная уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. В модели учтено ядерное горение углерода, для которого построено аналитическое решение. Для решения используется многоуровневая организация вычислений на основе вложенных сеток. На основе метода Годунова, схемы Рунге-Кутты и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне построен новый численный метод высокого порядка точности, адаптированный для организации вычислений на вложенных сетках. Параллельная реализация основана на идее распределенных вычислений, где на архитектуре с общей памятью происходит счет гидродинамической эволюции белых карликов (базовые вычисления), при достижении критических значений температуры и плотности происходит запуск новой задачи на архитектуре с распределенной памятью, в которой моделируется развитие гидродинамической турбулентности, приводящей к сверхзвуковому ядерному горению углерода (спутниковые вычисления). Проведено моделирование взрыва сверхновых типа Ia на основе сценариев слияния двух белых карликов и турбулизации отдельного белого карлика. В основе обоих сценариев лежит достижение критических температур и плотностей на периферии звезды с последующим ядерным горением углерода – источником взрыва звезды как сверхновая типа Ia (SNIa).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-11-00044).

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ К РАСЧЕТУ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ДЛЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА

В. Д. Кургузов, А. Г. Демешкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Большинство нелокальных критериев прочности основано на представлении о формировании в материале зоны предразрушения, в которой происходит локальное перераспределение напряжений, в то время как основной материал деформируется упруго вплоть до разрушения. Разрушение рассматривается как физический процесс, происходящий не в математической точке, в которой достигается максимальное значение эквивалентного напряжения, а в некоторой ее малой окрестности (зоне предразрушения). Общим свойством этих критериев является введение внутреннего размера материала, характеризующего его структуру, что позволяет расширить область применения по сравнению с традиционными критериями.

Экспериментально исследовано разрушение искусственных материалов (оргстекло, эбонит) в неоднородных полях напряжений. Проведено испытание одной партии образцов по различным методикам: трехточечный и чистый (четырёхточечный) изгиб балок прямоугольного поперечного сечения, бразильская проба (метод раскалывания цилиндра по образующей). Выполнено сравнение прочностных характеристик, полученных методом бразильской пробы, с прочностью на одноосное растяжение, а также с пределом прочности при испытаниях на изгиб. Эксперименты по разрушению балок на трехточечный изгиб обнаружили более высокие значения предельного растягивающего напряжения, чем аналогичные при четырехточечном изгибе. Обработка экспериментальных данных, полученных методом бразильской пробы, проводилась с помощью различных нелокальных критериев прочности. Проведен последовательный анализ возможности применения использованных критериев при определении разрушающих нагрузок.

Выполнено компьютерное моделирование методом конечных элементов разрушения цилиндра раскалыванием по образующей, трех- и четырехточечного изгиба балки в геометрически нелинейной постановке с учетом нелинейности диаграммы деформирования материала. Задача решалась в текущей лагранжевой постановке с учетом физической и геометрической нелинейности на основе определяющих уравнений гипотетического материала. Выполнен сравнительный анализ численных, аналитических и экспериментальных результатов. Получено качественное соответствие данных эксперимента и результатов численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-08-00528).

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Н. А. Кучер, А. А. Жалнина, О. В. Малышенко

Кемеровский государственный университет

Многие технологические процессы (сжигание топлива, выращивание кристаллов) протекают с участием многокомпонентных химически активных потоков. Моделирование, например, образования загрязняющих веществ, угасания ламинарного пламени или диссоциации газов требует от нас учета сложных химических механизмов и явлений переноса. Таким образом, существует потребность исследования уравнений, описывающих многокомпонентные химически активные потоки, и анализа их математической структуры и свойств.

Для описания движения многокомпонентной химически реагирующей смеси сжимаемых вязких жидкостей (газов) используется полная система уравнений Навье–Стокса, дополненная уравнениями реакции-диффузии [1, 2, 3]. Эти уравнения выражают физические законы сохранения массы, импульса, полной энергии смеси, а также баланса масс компонентов.

Результаты о свойствах математических моделей таких смесей в настоящее время сильно не дотягивают до результатов, полученных для классической модели Навье–Стокса вязкой сжимаемой жидкости и моделях многоскоростной смеси [4]. В работах [5, 6] представлены отдельные результаты на эту тему.

В докладе предполагается представить результаты о существовании глобально определенных слабых обобщенных решений начально-краевой задачи для указанной системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chapman S., Cowling T. *The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases*. London: Cambridge University Press, 1970.
2. Giovangigli V. *Multicomponent flow modeling. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. Boston: Birkhauser Boston Inc., 1999.
3. Waldmann L., Trubenbacher E. *Formale kinetische Theorie von Gasgemischen aus anregbaren Molekulen*. Z. Naturforsch. 1962. V. 17a. P. 363–376.
4. Kucher N. A., Zhalnina A. A. *On the existence of global solutions to equations for mixtures of compressible viscous fluids*. J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894, № 1. P. 012048.
5. Zatorska E. *On a steady flow of multicomponent, compressible, chemically reacting gas*. Nonlinearity. 2011. V. 24. P. 24.
6. Zatorska E. *On the flow of chemically reacting gaseous mixture*. J. Differential Equations. 2012. V. 253, №12. P. 3471–3500.

АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ ГЕМОДИНАМИКИ ПРИ ДЕСТРУКТИВНЫХ ОПЕРАЦИЯХ

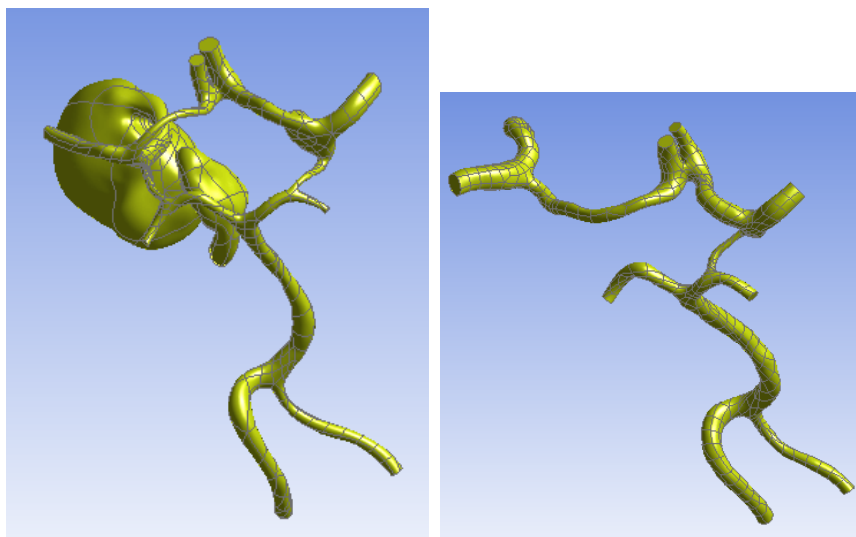
Ю. О. Куянова^{1,2}, Д. В. Паршин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В ряде случаев при нейрохирургических операциях хирургам приходится перекрывать ключевые артерии и прибегать к техникам создания дополнительного кровотока – сосудистым анастомозам. Проблема определения необходимости наложения сосудистого анастомоза является актуальной в современной нейрохирургии.

В данной работе рассматривается клинический случай с анастомозом, сформированным с помощью соединения височной артерии (экстракраниальной) с интракрантальной средней мозговой, которые были соединены мостом из вены. В ходе исследования с помощью программы ITK-Snap была восстановлена геометрия сосудов до и после операции. Реализованы численные расчеты в пакете ANSYS-CFX в построенных моделях. Также были рассмотрены виртуальные модели альтернативного лечения (без сформированного анастомоза). В качестве входных данных в задаче используются литературные данные о массовом расходе в церебральных сосудах [1].



В результате исследования было показано, что на бифуркации левой сонной и передней мозговой артерии образуется застойная зона, в которой возможно формирование тромба. Так же исследование показало, что после перекрытия левой внутренней сонной артерии вместе с патологией происходит серьезное перестроение кровотока, при котором пропадает реальная необходимость в формировании анастомоза.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта правительства Российской Федерации № 14.W03.31.0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zarrinkoob L., Ambarki K., Wahlin A., Birgander R., Eklund A., Malm J. *Blood flow distribution in cerebral arteries*. Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism. 2015. V. 35. P. 648–654.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИРТУАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ СТЕНТА В ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ СОСУДАХ С АНЕВРИЗМОЙ

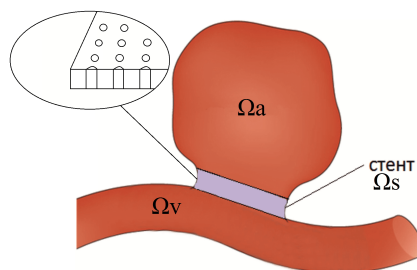
Ю. О. Куянова^{1,2}, Д. В. Паршин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В последнее десятилетие в нейрохирургии получили широкое распространение малоинвазивные способы лечения [1]. В частности, установка поток-перенаправляющего стента при лечении церебральных аневризм явилась заменой техники микрохирургических операций, требующих трепанации черепа или лицевых костей. В настоящее время идет борьба за повышение эффективности проведения подобных операций и внедрение пациент специфичного подхода при операциях.

Данная работа рассматривает виртуальную установку поток-перенаправляющего стента, как элемент предоперационного моделирования. Целью работы является определение возможных причин дислокации (смещения) стента в сосуде.



Трехмерная область была получена реконструкцией DICOM-изображений конкретного пациента с церебральной аневризмой. При численном моделировании область стента в сосуде имитируется пористой прослойкой [2]. Поскольку процесс эмболизации с помощью стента занимает от 3 до 6 месяцев, в расчете используется стационарная постановка.

В результате установлено, что при заданных параметрах пористости (80%), что соответствует производственному эталону стент существенно уменьшает поток через область аневризмы. Показано, что при установке поток-перенаправляющего стента появляется область повышенных касательных напряжений в области контакта стента с шейкой аневризмы. Мы предполагаем, что именно эта область зоны повышенных касательных напряжений и является инициатором дислокации стента, однако не предельная величина, при которой такой сдвиг происходит – этот вопрос требует дальнейшего рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта правительства Российской Федерации № 14.W03.31.0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pierot L., Wakhloo A. K. *Endovascular Treatment of Intracranial Aneurysms*. Stroke. 2013. V. 44. P. 2046–2054. DOI:10.1161/STROKEAHA.113.000733
2. Паршин Д. В., Куянова Ю. О., Кислицин Д. С., Виндбергер У., Чупахин А. П. *О влиянии потокперенаправляющего стента на гемодинамику церебральных аневризм*. ПМТФ. 2018. № 6. С. 5–14.

ОДНОЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СУСПЕНЗИИ В ВЫСОКОПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Н. Е. Леонтьев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Предлагается модель медленного течения малоконцентрированной суспензии в высокопористой среде, например в волокнистой среде или в трещине гидроразрыва. Для описания течения вводятся поля давления, средней скорости суспензии и объемной концентрации частиц (аналогично известным диффузионным моделям течений высококонцентрированных суспензий [1, 2]). Замкнутая система уравнений состоит из уравнения неразрывности для суспензии в целом, уравнения баланса импульса для суспензии (закон фильтрации Бринкмана) и уравнения баланса массы для взвешенных частиц. В последнем уравнении среди прочих эффектов учитывается дрейф частиц из-за пространственной переменности числа столкновений частиц с волокнами скелета в единице объема. Этот механизм переноса эвристически описывается вектором потока частиц пропорциональным градиенту произведения концентрации и модуля скорости фильтрации. Для сравнения отметим, что в известных моделях для чистой суспензии в некотором смысле аналогичный поток из-за пространственной переменности числа межчастичных столкновений определяется иным образом (пропорционален градиенту произведения концентрации и скорости сдвига основного течения). На непроницаемых стенках ставятся условие проскальзывания Навье (или его обобщение) и отсутствия нормального потока частиц. Для некоторых стационарных течений для решения задачи требуется дополнительно задавать интегральное условие на распределение концентрации (интегральный баланс массы взвешенных частиц). Предлагаемая модель, как и известные диффузионные модели, не является универсальной и применима к простейшим сдвиговым течениям. Модель может быть обобщена на случай учета засорения пористой среды из-за оседания взвешенных частиц на пористый скелет (deep bed filtration) [3].

В рамках модели рассмотрены течения с простейшей геометрией (течение в плоском пористом канале с непроницаемыми стенками под действием перепада давления, течение в цилиндрическом пористом канале). В рассмотренных случаях модель предсказывает увеличение концентрации частиц около стенок.

Автор благодарит А. П. Волчанского за обсуждение задачи. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00037).

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips R. J., Armstrong R. C., Brown R. A. et al. *A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration*. Phys. Fluids A. 1992. V. 4, № 1. P. 30–40.
2. Гаврилов А. А., Шебелев А. В. *Одножидкостная модель смеси для ламинарных течений высококонцентрированных суспензий*. Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 84–98.

3. Капранов Ю.И. *Модели кольтматации пористых сред*. Математические модели фильтрации и их приложения. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 1999. С. 89–97.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В УСЛОВИЯХ СЛАБОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

И. И. Липатов

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,
Москва*

Исследованы эффекты распространения возмущений в пограничных слоях в условиях слабого вязко-невязкого взаимодействия. Показано, что полученные ранее соотношения для определения скорости распространения возмущений для режима сильного гиперзвукового взаимодействия справедливы и для описания режима слабого гиперзвукового взаимодействия. Определены зависимости скорости распространения возмущений при различных величинах температурного фактора. Полученные данные могут быть использованы при определении характеристик аэродинамических органов управления.

Можно отметить, что с ростом температурного фактора величина скорости распространения возмущений растет. Этот эффект объясняется ростом температуры в пристеночной области и относительным увеличением области дозвукового течения в пограничном слое. Отметим, что при относительном уменьшении области дозвукового течения скорость распространения возмущений стремится к нулю, если стремится к нулю температурный фактор.

Даны примеры решения ряда задач, в которых процессы распространения возмущений играют существенную роль.

Исследованы эффекты перехода в условиях повышения давления (псевдоскачка) для модели тонкого слоя

ИЕРАРХИЯ ГИПЕРУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СТЕНКИ ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ АНЕВРИЗМЫ

А. И. Липовка¹, А. В. Дубовой², Д. В. Паршин³

¹Новосибирский государственный университет

²Федеральный центр нейрохирургии, Новосибирск

³Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Церебральная аневризма – достаточно широко распространенная патология среди взрослого населения. Основную опасность представляет ее разрыв, что влечет за собой тяжелые последствия. Между тем статистика наблюдения аневризм головного мозга показывает, что лишь 1 из 200 аневризм разрывается. Операции по выключению аневризм из кровотока сопряжены с риском развития постоперационных осложнений – таким образом возникает задача оценить риск разрыва конкретной аневризмы и необходимость проведения оперативного вмешательства. Ткань аневризмы по своему строению является более сложной, чем ткань здорового сосуда. Следовательно, моделирование подобных систем имеет определенные затруднения, в частности, выбор модели материала. Одним из наиболее распространенных подходов является использование моделей гиперупругого материала (Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Yeoh)[1].

В работе рассматриваются 3-х и 5-ти параметрические модели Муни – Ривлина, а также модель Йо применительно к моделированию материала стенки церебральных аневризм на основе лабораторных тестов клинических материалов. В результате работы[2] нами были обозначены границы применимости рассмотренных моделей. Проанализированы преимущества и недостатки каждой из моделей а также влияние накладываемых на коэффициенты ограничений обусловленных физическим смыслом моделей.

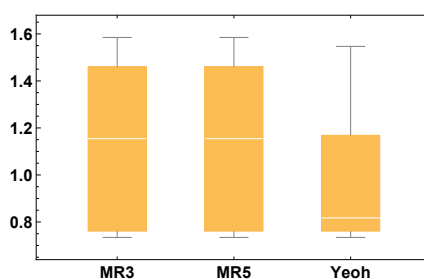


Рис.1: По вертикали откладывается величина предельного относительного удлинения материала для которого модель сохраняет аппроксимацию экспериментальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Brunel H., Ambard D., Dufour H., Roche P.H., Costalat V., Jourdan F. *Rupture limit evaluation of human cerebral aneurysms wall: Experimental study*. Journal of Biomechanics. 2018. V. 77. P. 76–82.
2. Lipovka A.I., Ovsyannikov K.S., Dubovoy A.V., Parshin D.V. *On the mechanics of a fusiform cerebral aneurysm: Mooney-Rivlin mathematical model for the experimental data*. J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1045.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ИЗВЛЕЧЕНИЯ ЦЕННЫХ МЕТАЛЛОВ ИЗ МЕТАЛЛСОДЕРЖАЩИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ

Н. А. Луценко^{1,2}, Е. А. Салганский³

¹Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

²Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

³Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка

В последние десятилетия в различных областях техники во всевозрастающих масштабах находят применение редкие и ценные металлы. Дефицит редкоземельных металлов является мировой проблемой. В то же время в тяжелых нефтях, битумах и углях может содержаться значительное количество различных ценных металлов, которые на сегодняшний момент, как правило, не используются, а остаются в отходах нефтепереработки и углеотходах.

Извлечение металлов из минерального и техногенного сырья в настоящее время проводится в основном следующими способами: механическим (измельчение материала с извлечением компонентов в соответствии с их плотностью, магнитными и прочими свойствами); пирометаллургическим (обжиг материала с разделением компонентов по температурам кипения с последующей их химической или металлургической переработкой); гидрометаллургическим (обработка материала растворами кислот или щелочей и перевод извлекаемых компонентов в раствор с последующим извлечением целевых компонентов экстракцией или ионным обменом); комбинированном (комбинация указанных выше способов). Настоящая работа посвящена применению фильтрационного горения для извлечения стратегически важных металлов из отходов нефтепереработки, углеотходов и бедных руд. Для описания распространения нестационарных одномерных волн гетерогенного горения металлосодержащих смесей предложены математическая модель и численный метод. Математическая модель основана на классических подходах механики сплошных гетерогенных сред [1] и фильтрационного горения [2] и является развитием разработанной ранее модели, описывающей распространение одномерных [3, 4] и двумерных волн горения пористых сред [5, 6]. Численный метод основан на комбинации явных и неявных конечно-разностных схем. Проведенные расчеты показали работоспособность предложенного подхода.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-29-24029-мк).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. *Основы механики гетерогенных сред*. М.: Наука, 1978.
2. Алдушин А. П., Мержанов А. Г. *Теория фильтрационного горения: общие представления и состояние исследований*. Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука, 1988. С. 9–52.
3. Lutsenko N. A. *Modeling of Heterogeneous Combustion in Porous Media under Free Convection*. Proceedings of the Combustion Institute. 2013. V. 34, № 2. P. 2289–2294.
4. Lutsenko N. A., Levin V. A. *Effect of Gravity Field and Pressure Difference on Heterogeneous Combustion in Porous Media*. Combustion Science and Technology. 2014. V. 186, № 10-11. P. 1410–1421.
5. Левин В. А., Луценко Н. А. *Двумерные течения газа при гетерогенном горении твердых пористых сред*. ДАН. 2017. Т. 476, № 1. С. 30–34.
6. Lutsenko N. A. *Numerical model of two-dimensional heterogeneous combustion in porous media under natural convection or forced filtration*. Combustion Theory and Modelling. 2018. V. 22, № 2. P. 359–377.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КРИВОЙ ПАДЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ МИНИ-ГРП ОТ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОРОУПРУГОГО ПЛАСТА

Е. В. Льготина^{1,2}, А. Н. Байкин^{1,2}, С. В. Головин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Гидроразрыв пласта (ГРП) представляет собой технологию, применяемую для интенсификации нефтедобычи, и включает в себя создание в продуктивном пласте протяженной трещины под давлением закачиваемой жидкости. Применение ГРП основывается на предварительном моделировании, задающем сценарий закачки различных жидкостей и пропантов для достижения желаемых характеристик трещины. Для проведения расчетов необходимо иметь информацию о физических свойствах горной породы, преднапряженном состоянии и параметрах утечек жидкости в пласт.

Одним из способов определения физических характеристик пласта является анализ кривой падения давления (КПД) после нагнетательного теста при создании небольшой тестовой трещины (мини-ГРП). Стандартные методы интерпретации КПД опираются на множественные упрощения модели, что сказывается на точности интерпретации. Кроме того, применяемые алгоритмы разделяют состояния во время закачки, до и после смыкания трещины.

В данной работе предпринята попытка интерпретации КПД на основе более полной модели развития трещины ГРП в пороупругой среде [1], точнее описывающей процессы, происходящие в системе «пласт–трещина». Модель основывается на уравнениях пороупругости Био [2] и учитывает взаимное влияние давления поровой жидкости и фильтрации жидкости на напряженно-деформированное состояние пласта.

В частности, она позволяет объединить состояния до, во время и после закрытия трещины в рамках единого подхода. Для упрощения использовано предположение о дисковой геометрии трещины.

В рамках описанной пороупругой модели был выполнен анализ чувствительности кривой падения давления к входящим функционально-емкостным параметрам и эффектам пороупругости. Полученные зависимости служат основой для дальнейшей разработки методики интерпретации КПД на основе прямого численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00410-мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Golovin S. V., Baykin A. N. *Influence of pore pressure on the development of a hydraulic fracture in poroelastic medium*. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. 2018. V.108. P.198–208.
2. Coussy O. *Poromechanics*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2004.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОУДАРА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ

В. Ю. Ляпидевский^{1,2}, В. В. Неверов^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Проблема гидроудара при движении жидкости в длинных трубопроводах является классической. Под гидроударом понимается развитие интенсивных волновых возмущений, обусловленных упругостью канала и сжимаемостью транспортируемой жидкости, при резком изменении скорости течения на одной из границ. Влияние гидроудара на работу нагнетательных скважин при добыче нефти и газа стало изучаться относительно недавно [1]. Например, закрытие клапана или выключение насоса при проведении гидравлического разрыва пласта (ГРП) часто генерирует гидроудар и распространяющуюся вниз по стволу скважины волну понижения давления, которая затем взаимодействует с трещиной через тонкие каналы (перфорации) и, отразившись от конца скважины, возвращается к поверхности. Сформировавшийся в результате этого профиль давления состоит из серии затухающих колебаний.

В данной работе была построена простая математическая модель гидроудара в вертикальной скважине, позволяющая полностью описать фазовые и амплитудные характеристики волнового пакета. Основное внимание уделено вопросу о том, какими физическими и геометрическими параметрами определяется регистрируемое на различных глубинах возмущение давления, возникающее при внезапной остановке насосов. На основе сравнения расчетов с экспериментальными данными [2] для определенного типа скважин с резким изменением поперечного сечения было показано, что волновой пакет в основном стволе определяется только конструкцией верхней части скважины, а течение в нижней части скважины зависит как от колебаний в основном стволе, так и от наличия в этой части перфораций и трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Holzhaugen C., Gooch R., *Impedance of hydraulic fracture: its measurement and use for estimating fracture closure and dimensions*. Paper SPE 13892 presented at the SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium, 1985.
2. Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y., *Water hammer effects on water injection well performance and longevity*. Paper SPE 112282 presented at the SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control, 2008.

ВОЛНОВОЙ БОР В МНОГОСЛОЙНОЙ МЕЛКОЙ ВОДЕ

В. Ю. Ляпидевский^{1,2}, И. О. Ярощук³, Ф. Ф. Храпченков^{2,3}, В. Ф. Кукарин⁴

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Воронежский государственный университет

³Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток

⁴Институт неорганической химии им. А.В. Николаева СО РАН, Новосибирск

Нелинейные внутренние волны являются одним из важных гидродинамических факторов, влияющих на водообмен и подводную акустику в шельфовой зоне морей. Эффективным инструментом исследования нестационарных волновых процессов в прибрежной зоне является использование классических математических моделей многослойной мелкой воды для описания динамики внутренних волн большой амплитуды [1, 2]. Учет дисперсионных эффектов в длинноволновом приближении приводит к новым классам полностью нелинейных и слабо нелинейных моделей распространения внутренних волн, которые адекватно воспроизводят структуру уединенных внутренних волн и волновых боров, наблюдаемых в лабораторных и натурных экспериментах [3]. В настоящей работе построена математическая модель многослойной мелкой воды с учетом негидростатических эффектов, проявляющихся в одном из слоев. Эта модель позволяет описать структуру уединенных волн и волновых боров большой амплитуды и может быть использована для интерпретации реальных данных о распространении придонных внутренних волн в шельфовой зоне Японского моря.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № П.1.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Модели двухслойной «мелкой воды»*. ПМТФ. 1979. № 2. С. 3–14.
2. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*. Новосибирск: Наука, 1985.
3. Ляпидевский В. Ю., Новотрясов В. В., Храпченков Ф. Ф., Ярощук И. О. *Внутренний бор в шельфовой зоне моря*. ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 60–71.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ СЛАБО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

З. В. Макридин^{1,2}, Н. И. Макаренко^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В работе исследуется ветвление параметрических семейств периодических решений системы слабо связанных уравнений, возникающей при описании сильного взаимодействия мод внутренних волн в трехслойной жидкости [1]. Такое взаимодействие оказывается возможным в том случае, когда фазовые скорости мод являются близкими [2]. Хорошо известно, что в таких волновых системах при определенных условиях возникают связанные структуры – сдвинутые по фазе волны, распространяющиеся с почти одинаковой скоростью. Возникновение этих структур является частным случаем синхронизации, а упомянутые условия можно трактовать как условия, гарантирующие сохранение синхронизованных мод при малом возмущении системы. Использование конструкции Ляпунова – Шмидта позволяет свести исходную задачу к системе нелинейных уравнений разветвления, при анализе которой возникают достаточные условия существования возмущенных орбит решений. Указанные условия на параметры формулируются на этапе понижения размерности системы уравнений разветвления, использующего групповую симметрию и косимметрию исходных уравнений [3]. На основе указанной конструкции в докладе анализируется асимптотика нелинейных периодических решений двухмодовой системы в пределе гармонических и уединенных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00648).

ЛИТЕРАТУРА

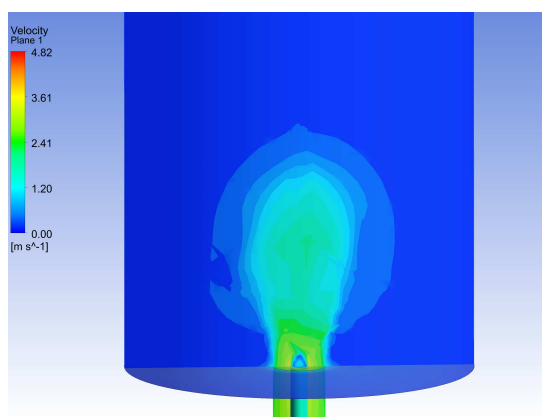
1. Gear J. A., Grimshaw R. *Weak and strong interactions between internal solitary waves*. Stud. Appl. Math. 1984. V. 70, № 3. P. 235–258.
2. Eckart C. *Internal waves in the ocean*. Phys. Fluids. 1961. V. 4, № 7. P. 791–799.
3. Макаренко Н. И., Макридин З. В. *Периодические колебания и волны в нелинейных слабо связанных системах с дисперсией*. Тр. МИАН. 2018. Т. 300. С. 158–167.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

С. Ю. Маламанов

БГТУ "ВОЕНМЕХ" им. Д. В. Устинова, Санкт-Петербург

Изучение взаимодействия гидродинамического и электромагнитного полей с помощью математического моделирования является актуальной и важной гео- и гидрофизической задачей [1,2]. Максимальный эффект взаимодействия полей достигается, когда вектор скорости потока ортогонален вектору индукции магнитного поля. В наиболее общем случае таких вариантов два – линейное магнитное поле при круговом движении проводящей жидкости, а также тороидальное магнитное поле при прямолинейном движении жидкости. Наиболее простой моделью, в которой можно обеспечить взаимную перпендикулярность векторов скорости и индукции магнитного поля, является течение в ограниченном кольцевом зазоре двух соосных цилиндров, между поверхностями которых поддерживается разность потенциалов, обуславливающая электрический ток, и прикладывается тороидальное магнитное поле. Действие магнитного поля на ток приводит к электромагнитной силе, выталкивающей жидкость из кольцевого зазора. Движущаяся вверх жидкость попадает в расширительный бак с той же жидкостью. Получающееся в результате этого течение представляет собой коаксиальную струю, что хорошо видно из рисунка:



Приведенная картина течения является результатом численного решения трехмерных, нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. При этом, разность потенциалов между поверхностями цилиндров поддерживалась постоянной, и прикладывался импульс магнитного поля, который моделировался линейным нарастанием индукции поля от 0 до 1 Тл в течении 0,5 с и последующим линейным падением до 0 Тл за 0,5 с. Проводящей жидкостью является морская вода (удельная проводимость 5 См/м).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жмур В. В. *Мезомасштабные вихри океана*. М.: ГЕОС, 2010.
2. Семкин С. В. *Генерация возмущений магнитного поля при подводном взрыве*. Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 1. С. 138–141.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ УИЛЛМОРА ДЛЯ КРОВЕНОСНОГО СОСУДА С ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ АНЕВРИЗМОЙ

М. Ю. Маматюков^{1,2}, А. К. Хе¹, Д. В. Паршин¹, А. П. Чупахин¹

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

При математическом моделировании патологий системы кровообращения головного мозга возникает задача вычисления полной энергии потока вязкой жидкости (крови), движущегося внутри упругой оболочки типа трубы с пузырем (кровеносный сосуд с центральной аневризмой). Упругая энергия оболочки (стенки сосуда) складывается из энергии растяжения и энергии изгиба. Последняя сводится к функционалу Уиллмора: интегралу от квадрата средней кривизны поверхности, задающей оболочку, по ее площади. Для определения энергии изгиба поверхностных сеток, полученных в результате 3D реконструкции сосудов реальных пациентов, необходимо уметь вычислять этот функционал по данным томографии.

Были проанализированы готовые программные продукты MeshLab и Amira for Life Sciences, которые позволяют вычислять главные кривизны в узлах заданной сетки. Целью работы является автоматизация вычисления энергии Уиллмора для реальных систем сосудов с аневризмами, полученных при моделировании в пакете Ansys. В связи с этим использование готовых продуктов для вычисления только кривизн было отменено из-за возникающей проблемы сопряжения с пакетом Ansys. Поэтому была написана программа вычисления кривизны по данной сетке, основанная на алгоритме, предложенном в [1]. Проведен анализ сходимости и достоверности вычислений по данной программе для набора тестовых поверхностей по сравнению с аналитическими. Анализ показал положительные результаты.

Далее было осуществлено сопряжение написанной программы с пакетом Ansys. Это дает возможность рассчитывать энергию Уиллмора для области с аневризмой, взятой из расчетной сетки для моделирования потока крови в системе сосудов с аневризмой. Прodelывая эту операцию с сетками каждого расчетного шага, мы находим энергию Уиллмора для каждого момента времени и состояния входящего потока крови [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. Garimella R. V., Swartz B. K. *Curvature estimation for unstructured triangulations of surfaces*. Technical Report LA-UR-03-8240, Los Alamos National Laboratory, Nov 2003.
2. Хе А. К., Черевко А. А., Чупахин А. П., Кривошапкин А. Л., Орлов К. Ю., Панарин В. А. *Мониторинг гемодинамики сосудов головного мозга*. ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 7–16.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА НАВЬЕ-СТОКСА-ФУРЬЕ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЯ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Е. Мамонтов, Д. А. Прокудин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В работе проведено исследование системы уравнений движения смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей [1, 2, 3, 4], состоящей из дифференциальных законов сохранения массы, импульса для каждой компоненты и закона сохранения энергии для смеси в целом и представляющей собой обобщение модели Навье–Стокса–Фурье для вязких сжимаемых теплопроводных однокомпонентных сред. В рамках модели предполагается, что в каждой точке пространства присутствуют все составляющие, которые имеют каждая свою локальную скорость движения, а взаимодействие между ними осуществляется через обмен импульсом, вязкое трение и посредством теплообмена. Особенностью исследуемых уравнений помимо их нелинейности является наличие в законах сохранения импульса и энергии старших производных от полей скоростей всех компонент в силу составной структуры тензоров вязких напряжений, что делает невозможным автоматическое распространение теории однокомпонентных вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей на случай смесей. Доказана теорема существования слабых решений начально-краевой задачи для нестационарных уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей в общем случае трех пространственных переменных. В изотермическом случае существование слабых решений соответствующих начально-краевых задач доказано в работах [5], [6].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-00024).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред*. М.: Наука, 1987.
2. Rajagopal K. L., Tao L. *Mechanics of mixtures*. Singapore.: World Scientific, 1995.
3. Mamontov A. E., Prokudin D. A. *Modeling viscous compressible barotropic multi-fluid flows*. J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894. 012058.

4. Mamontov A. E., Prokudin D. A. *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory*. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. V. 14. P. 388–397.
5. Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. *Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений политропного движения смесей вязких сжимаемых жидкостей*. Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 541–583.
6. Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. *Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей*. Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82, № 1. С. 151–197.

О ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СПУТНЫХ ПОТОКАХ С ОБЩИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

В. Г. Марков, С. В. Попов

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

Краевые задачи для противоположных спутных потоков в случае линейных уравнений, в основном модельных, рассматривались в работах М. С. Боуенди, П. Гривара, К. Д. Пагани, С. А. Терсенова, А. М. Нахушева, И. Е. Егорова, Н. В. Кислова, С. Г. Пяткова, А. И. Кожанова, С. В. Потаповой и других авторов. Отметим, что подобные задачи возникают во многих областях физики, механики и некоторых других их приложениях [1].

Интерес к нелинейным уравнениям переменного типа был инициирован статьей Н. Н. Яненко, В. А. Новикова (1973), где они пришли к выводу, что эти уравнения должны быть основой построения строгой модели автоколебательных и турбулентных гидродинамических течений. Изучению таких уравнений посвящены работы многих авторов: Т. И. Зеленьяка, В. С. Белоносова, П. И. Плотникова, А. И. Подгаева, С. Г. Пяткова, Х. Х. Ахмерова, М. М. Лаврентьева (мл.), В. Н. Гребенева и других.

Краевые задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа в весовых пространствах Соболева рассматривались в работе [2].

Рассмотрены новые корректные краевые задачи для неклассических уравнений второго, третьего и четвертого порядков, моделирующие противоположные спутные потоки, в гильбертовых пространствах вида $H_{x,t}^{p,p/2n}$ при $p \geq 2n$. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения гильбертовским пространствам.

Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений высокого порядка с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий сопряжения рассматривались в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания НИР на 2017-2019 гг. (код проекта 1.6069.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов В. Н., Попов С. В. *Контактные краевые задачи математической физики*. ДСС. 2000. № 116. С. 58–73.
2. Pyatkov S. G., Popov S. V., Antipin V. I. *On Solvability of Boundary Value Problems for Kinetic Operator-Differential Equations*. Integral Equations and Operator Theory. 2014. V. 80. P. 557–580.
3. Popov S. V., Markov V. G. *Boundary value problems for parabolic equations of high order with a changing time direction* J. Phys.: Conf. Series. 2017. V. 894. 012075.

ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОДОБИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЛАБОРАТОРНЫХ УСТАНОВКАХ

А. Г. Марчук

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск*

В геофизике зачастую масштаб явлений таков, что невозможно поставить физический эксперимент, где пространственные размеры были бы меньше хотя бы на порядок. Чаще всего речь идет о нескольких порядках. Возьмем, например, процесс распространения волн цунами в океане. Здесь длина реальных волн достигает сотен километров, а глубина океана – до десяти тысяч метров. Поэтому максимум, чего можно добиться, это создание экспериментальной установки в тысячи раз меньше реального масштаба этого явления. Надо сказать, что именно в бассейнах размером до ста метров проводятся исследования процессов воздействия цунами на берег. Одномерное распространение длинных волн в экспериментальных установках (бассейнах) достаточно хорошо описывается системой нелинейных уравнений мелкой воды. В работе найдено преобразование переменных в уравнениях мелкой воды, позволяющее переносить результаты моделирования в уменьшенном масштабе на реальные волны цунами.

О ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССАХ В СЛОЖНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

Б. С. Марышев^{1,2}, Л. С. Клименко^{1,2}

¹*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

²*Пермский государственный национальный исследовательский университет*

Работа посвящена изучению транспорта примеси в сложных потоках, возникающих при течении жидкости в трубе под действием внешней силы, а так же при обтекании препятствий. Поскольку скорость жидкости в таком потоке очень неоднородна,

то перенос примеси таким потоком обладает нетривиальными свойствами. Частицы примеси задерживаются в тех областях, где течение более медленное, что приводит к отставанию большого числа частиц от основной массы. В результате транспортный процесс может стать аномальным. Подобные течения наблюдаются в пористой среде, где наличие аномального транспорта примеси не редкость, что подтверждено множеством экспериментов. Обычно такой транспорт связывают с оседанием частиц на стенки пор. Однако, как показано в настоящей работе, сложный характер течения сам по себе может приводить к аномальному транспорту.

Рассмотрено стационарное течение через трубу в двумерном и трехмерном случаях с различными профилями, навязанными внешней силой. Показано, что в случае слабой молекулярной диффузии наблюдается аномальный перенос примеси со степенной зависимостью концентрации от времени. Показатель степени определяется профилем течения. Так же показано, что даже в случае значительного влияния молекулярной диффузии (числа Пекле меньше единицы), кривая выхода примеси представляет собой стандартный вид. Этот вид совпадает с предсказаниями линейной ММ модели, учитывающей прилипание частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-31-00297 мол-а).

РАСЧЕТ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ ОБРАЗУЮЩИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Расчеты по методу конечных элементов (МКЭ) трехмерного напряженного состояния упругих композитных оболочек вращения и цилиндрических оболочек сложной формы при произвольном статическом нагружении сводятся к построению дискретных моделей высокой размерности. Для понижения размерности дискретных моделей эффективно применяются многосеточные конечные элементы (МнКЭ) [1]. При построении m -сеточного конечного элемента (КЭ) используются m вложенных сеток, $m \geq 2$. Мелкая сетка порождена базовым разбиением МнКЭ, которое учитывает его сложную неоднородную структуру и форму. На остальных $m - 1$ крупных сетках определяются функции перемещений, применяемые для понижения размерности базового разбиения, что позволяет проектировать МнКЭ малой размерности. Напряженно-деформированное состояние в МнКЭ описывается уравнениями трехмерной задачи теории упругости (без введения дополнительных гипотез).

В данной работе предложен метод (образующих КЭ) построения трехмерных композитных и однородных МнКЭ сложной формы двух типов, суть которого состоит в следующем [2]. Область МнКЭ 1-го типа получается путем поворота заданного плоского образующего (односеточного) КЭ вокруг заданной оси на заданный угол, область МнКЭ 2-го типа – путем параллельного перемещения образующего КЭ в заданном направлении на заданное расстояние. Перемещения в МнКЭ представляются степенными и (по направлению движения образующего КЭ) лагранжевыми полиномами. Метод образующих КЭ позволяет проектировать МнКЭ, у которых один характерный размер значительно больше (меньше) двух других размеров. МнКЭ 1-го

типа применяются для расчета композитных оболочек вращения (конических оболочек) сложной формы, МнКЭ 2-го типа – для расчета композитных цилиндрических оболочек (с переменным радиусом кривизны) сложной формы. Достоинства предлагаемых МнКЭ состоят в том, что они учитывают неоднородную структуру оболочек, порождают дискретные модели малой размерности и решения с малой погрешностью. Приведенный пример расчета по МКЭ композитной цилиндрической оболочки сложной формы с помощью двухсеточных КЭ показывает высокую эффективность их применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев А. Д. *Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных композитных пластин и балок сложной формы*. Вестник КрасГАУ. 2017. № 11. С. 131–140.
2. Матвеев А. Д. *Метод многосеточных конечных элементов в расчетах композитных оболочек вращения и двоякой кривизны*. Вестник КрасГАУ. 2018. № 3. С. 126–137.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ГРУППА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

А. Г. Меграбов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск
Новосибирский государственный технический университет

Ниже групповые термины понимаются в смысле книги [1]; часть результатов опубликована в [2, 3, 4, 5, 6].

1. Рассматриваем семейство $\{L_\tau\}$ кривых L_τ с базисом Френе (τ, ν, β) (τ – единичный вектор касательной, ν – главной нормали, β – бинормали), кривизной k и кручением $\varkappa$, а также семейство $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с единичной нормалью τ , главными направлениями l_1, l_2 , главными кривизнами k_1, k_2 и гауссовой кривизной K .

В двумерном случае получен закон сохранения для семейства плоских кривых вида $\operatorname{div} \mathbf{S}(\tau) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{S}^* = 0$, $\mathbf{S}(\tau) = \operatorname{rot} \tau \times \tau - \tau \operatorname{div} \tau$, $\mathbf{S}(\tau) = \mathbf{S}^*$, где $\mathbf{S}^* = \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_\nu = \operatorname{rot} \tau \times \tau + \operatorname{rot} \nu \times \nu$ – сумма векторов кривизны плоских кривых L_τ с ортами Френе τ, ν и ортогональных к ним кривых L_ν . В трехмерном случае получены его аналоги двух видов: 1) тождества $\operatorname{div} \mathbf{S}(\tau)/2 = \varkappa[\varkappa - (\tau \cdot \operatorname{rot} \tau)] - (\tau \cdot [\operatorname{rot} \nu \times \operatorname{rot} \beta])$, $\operatorname{div} \mathbf{S}(\tau) = 2(\tau \cdot \operatorname{rot} \mathbf{R}^*)$ для семейства $\{L_\tau\}$, где $\mathbf{R}^* = \varkappa \tau + k\beta + \beta \operatorname{div} \nu - \nu \operatorname{div} \beta$, $\mathbf{S}^*$ – сумма трех векторов кривизны векторных линий полей τ, ν, β ; $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}(\tau) + \tau \times \mathbf{R}^*$; 2) законы сохранения вида $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ для семейства $\{L_\tau\}$ кривых и для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей. Поле $\mathbf{F}$ выражается соответственно через характеристики кривых и поверхностей (в конечном итоге – через поле τ). Часть из них имеет вид $\operatorname{div} \{\mathbf{S}(\tau) - \Phi\} = 0$ или $\operatorname{div} \{\mathbf{S}^* - \Phi\} = 0$, где $\operatorname{div} \Phi \equiv 0$ в плоском случае. Например, $\Phi = \Phi_1 = 2\{\cos \alpha_3 \operatorname{rot}(\cos \alpha_2 \mathbf{i}) + \cos \alpha_1 \operatorname{rot}(\cos \alpha_3 \mathbf{j}) + \cos \alpha_2 \operatorname{rot}(\cos \alpha_1 \mathbf{k})\}$, $\tau = \cos \alpha_1 \mathbf{i} + \cos \alpha_2 \mathbf{j} + \cos \alpha_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты по осям x, y, z . Другие законы имеют более высокий порядок.

2. С помощью этих общих геометрических формул получены дифференциальные законы сохранения и другие формулы в плоском и в трехмерном случаях для решений ряда классических уравнений математической физики. Для уравнения эйконала $\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = n^2(x, y, z)$ имеем $\boldsymbol{\tau} = \text{grad } \tau/n$, $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{T} = \text{grad } \ln n - \Delta \tau \text{ grad } \tau/n^2$, τ – поле времен, n – показатель преломления; в плоском случае ($\tau_z = 0$, $n = n(x, y)$) получен закон сохранения $\text{div } \mathbf{T} = 0$ с геометрическим смыслом: сумма $\mathbf{S}^*$ векторов кривизны лучей и фронтов есть соленоидальное поле ($\text{div } \mathbf{S}^* = 0$). Для гидродинамических уравнений Эйлера имеем $\mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{G} = |\mathbf{v}|^{-2} \{ \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{v} + \text{grad } p/\rho - \mathbf{F} \}$, где $\mathbf{v}$ – скорость, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{F}$ – массовая сила; в плоском случае получен закон сохранения $\text{div } \mathbf{G} = 0$ с геометрическим смыслом: сумма $\mathbf{S}^*$ векторов кривизны линий тока и ортогональных к ним кривых есть соленоидальное поле ($\text{div } \mathbf{S}^* = 0$); и др.

3. Изучена 10-параметрическая группа Ли G_{10} , являющаяся расширением группы конформных преобразований евклидова пространства x, y, z на пространство x, y, z, t , $u^1 = u(x, y, z, t)$, $u^2 = n^2(x, y, z)$ и группой эквивалентности уравнения эйконала $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = n^2(x, y, z)$, уравнения акустики $\Delta u/\rho + (\text{grad } u \cdot \text{grad } \ln \rho)/2\rho = u_{tt}$ ($u^2 = \rho$) и других дифференциальных уравнений с переменным параметром u^2 . Вычислены операторы инвариантного дифференцирования группы G_{10} и ее дифференциальные инварианты вплоть до 3-го порядка; найден геометрический смысл некоторых из них и их связь с вышеупомянутыми формулами и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
2. Меграбов А. Г. *Дифференциальные тождества, связывающие лапласиан скалярной функции, модуль ее градиента и угол его направления*. ДАН. 2009. Т. 424, № 5. С. 599–603.
3. Меграбов А. Г. *Дифференциальные тождества, связывающие модуль и направление векторного поля, и гидродинамические уравнения Эйлера*. ДАН. 2010. Т. 433, № 3. С. 309–313.
4. Меграбов А. Г. *Некоторые дифференциальные тождества и их приложения к уравнению эйконала*. ДАН. 2010. Т. 433, № 4. С. 461–465.
5. Меграбов А. Г. *Дивергентные формулы (законы сохранения) в дифференциальной геометрии плоских кривых и их приложения*. ДАН. 2011. Т. 441, № 3. С. 313–317.
6. Megrabov A. G. *On some formulas for families of curves and surfaces and Aminov's divergent representations*. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39, № 1. P. 114–120.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ГРУППОВЫМ АНАЛИЗОМ И МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

С. В. Мелешко

*Математический колледж, Институт науки, Технологический университет
им. Суранари, Накхон Ратчасима, Таиланд*

В работе приводятся примеры взаимных связей между двумя методами. В качестве первого примера рассматриваются решения обобщающие простые волны уравнений газовой динамики. Показывается, что эти решения, полученные методом дифференциальных связей, также являются частично инвариантными решениями, но в продолженном пространстве. В качестве другого примера представлены новые результаты по построению законов сохранения уравнений газовой динамики. Так, при групповой классификации одномерных уравнений политропного газа в лагранжевых переменных выделяются три вида энтропии, тогда как при записи этих соотношений в эйлеровых координатах эти виды выделяются дифференциальными связями, что приводит к новым законам сохранения. Немного другая ситуация имеет место при построении законов сохранения для двумерных уравнений политропного газа. Но как и в одномерном случае групповая классификация в лагранжевых координатах приводит к новым законам сохранения в эйлеровых координатах с необходимостью добавления дополнительного уравнения к исходным уравнениям газовой динамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-11-00238).

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

В. Е. Миренков, А. В. Савченко

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск

В механике известно большое число некорректных задач, и количество их продолжает увеличиваться. Аналитические решения таких задач были получены и широко тиражировались, когда численные методы были в зачаточном состоянии. Сюда относятся сингулярные решения задач для областей с угловыми точками, для которых нарушались условия малости деформаций, имели место бесконечные напряжения в угловых точках и, вообще, при этом рассматривались области с нулевыми граничными условиями. Возникал соблазн поставить такое некорректное аналитическое решение в соответствие сосредоточенной силе, что и было реализовано. Некорректные решения для математического разреза, моделирующего трещину, широко используются в механике разрушения и различных областях техники. Произвольные формулировки граничных условий на контактах взаимодействующих тел (идеальное проскальзывание, жесткое сцепление, контакт с абсолютно жестким телом и т. п.) никак не контролируются в процессе численного счета, искажают результат и увеличивают число некорректных задач. Число некорректных задач резко возросло, когда

появилась возможность покупать коммерческие программы с реализованным в них методе конечных элементов и использовать их без контроля за формулировкой граничных условий. Решения таких задач публикуются во всем мире, и представить их общее количество не представляется возможным. В основе их лежит аналитическое решение для плоскости с круговым отверстием и сжимаемой на бесконечности постоянными условиями, которое можно найти в любом учебнике по теории упругости. Это так называемый класс задач Коши для области счета, имеющий бесконечно удаленную точку (плоскость с отверстием, пространство с полостью). Все некорректные задачи представляют несоответствие математического и физического аспектов проблемы. В такой ситуации необходимо вернуться к формулировке задачи и, учитывая нелинейность проблемы, искать возможность новой формулировки, обеспечивающей ограниченное решение, производя то или иное ограничение (усреднение) процесса нелинейного деформирования. В докладе обсуждается получение корректного решения задач Коши и возможность учета собственного веса материала сооружения при расчете смещений. Предлагается корректное решение для трещины в рамках упруго-пластической постановки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-05-00533) в части построения ограниченного решения для трещины.

ОБОСНОВАНИЕ ЗАКОНА ДАРСИ МЕТОДОМ УСЛОВНЫХ МОМЕНТОВ

А. В. Мишин

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО
РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Одна из основных проблем аналитического описания гетерогенных сред заключается в определении параметров полей каждой фазы и среды в целом на основе учета физических, топологических и геометрических характеристик фаз. Предложенное решение данной проблемы базируется на методе условных моментов (МУМ) в трактовке Л. П. Хорошуна [1] и демонстрируется на примере фильтрационного поведения. Выкладки в рамках этой модели включают в себя построение решения стохастических уравнений методом функции Грина, последующее условное осреднение этого решения, прямое и обратное преобразование Фурье с целью выделения интегралов, содержащих структуру среды, и получения искомых осредненных уравнений соответственно. В итоге данным методом найдены осредненные уравнения вязкоупругости с определенными коэффициентами, учитывающие как среду в целом, так и каждую фазу отдельно. Микроструктура среды содержится как в эффективных коэффициентах, так и других коэффициентах, полученных МУМ, и влияет на различное поведение фаз.

Помимо МУМ методами: вариационным, самосогласованного поля, статистическими моделями получены идентичные эффективные коэффициенты. Анализ этих параметров позволяет установить понятия несущей фазы (связной) и структурного фазового перехода, исходя из чего устанавливается возможность протекания жидкой

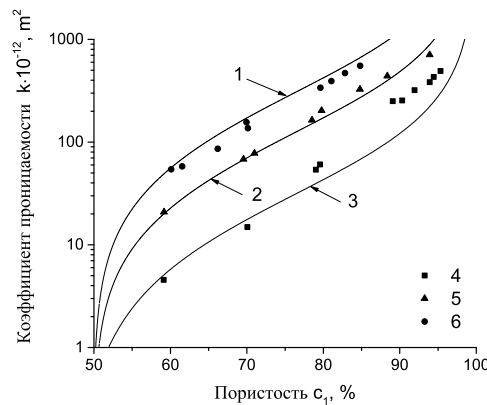


Рис. 1: Проницаемость медных волокнистых материалов для жидкости в зависимости от концентрации пористости. Расчет: $d = 70(1), 40(2), 20(3)$ мкм; эксперимент: $d = 20(4), 40(5), 70(6)$ мкм.

фазы сквозь связный пористый каркас. На основе анализа осредненных МУМ уравнений, с учетом полученных коэффициентов, предложено теоретическое обоснование закона Дарси – нахождение его структурного вида и коэффициента пропорциональности, отражающего микроструктуру высокопористых сред. Представленные аналитические результаты применимы для высокопористых сред и неплохо согласуются с экспериментом.

Из результатов анализа осредненных уравнений с входящими коэффициентами следует возможность описания других типов гетерогенных сред. На примере деформирования пористого каркаса в работе также показывается механизм возникновения нелинейных свойств гетерогенной системы исходя из эволюции ее микроструктуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошун Л. П. *О математической модели неоднородного деформирования композитов*. Прикладная механика. 1996. Т. 32, № 5. С. 22–29.

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Р. М. Мнухин¹, В. В. Дударев^{1,2}

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ

В качестве объекта исследования рассмотрен полый цилиндр конечной длины с неоднородными упругими свойствами, которые описываются переменными по радиальной координате параметрами Ламе и плотностью. Цилиндр находится в режиме установившихся колебаний, вызываемых распределенной по продольной координате нагрузкой на внешней поверхности.

Сформулирована новая обратная коэффициентная задача об определении законов изменения параметров Ламе $\lambda(r)$, $\mu(r)$ по данным об амплитудно-частотной характеристике $F(\omega)$, измеренной на внешней границе срединного поперечного сечения на заданном частотном диапазоне $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Эта задача является существенно нелинейной и для ее решения использована процедура линеаризации. В результате получены системы операторных соотношений относительно неизвестных функций поправок к $\lambda(r)$, $\mu(r)$ [1]. Эти соотношения представляют собой интегральные уравнения Фредгольма первого рода с положительными ядрами. Учитывая свойства таких уравнений, построение их решений реализовано численно с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова [2]. Используя полученные соотношения, построен итерационный процесс, на каждом шаге которого вычисляются значения искомых поправок. Процесс останавливается при достижении наперед заданного минимального значения функционала невязки

$$J = \int_{\omega_1}^{\omega_2} |f(\omega) - F(\omega)|^2 d\omega,$$

где $f(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика, вычисленная при найденном текущем приближении решения задачи. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению различных законов $\lambda(r)$, $\mu(r)$. Дана оценка точности полученных результатов.

Предложенный метод решения обратной нелинейной задачи о восстановлении законов изменения параметров Ламе может быть использован при реализации неразрушающей диагностики реальных свойств функционально-градиентного цилиндра после окончания производственных процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-71-10045).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А. О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. М.: Физматлит, 2007.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1986.

ВЛИЯНИЕ МАЛОГО РЕЛЬЕФА СТЕНКИ НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ

Е. И. Могилевский, В. Я. Шкадов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В настоящей работе рассматривается стекание тонкой пленки вязкой жидкости по наклонной плоскости с нанесенным на нее периодическим рельефом малой амплитуды. Для описания движения используется метод Капицы – Шкадова.

Решается задача о линейной устойчивости стационарного течения. Выведено обыкновенное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами, определяющее эволюцию малых возмущений фиксированной частоты. Коэффициенты уравнения зависят от формы свободной поверхности при стационарном течении.

Применяется два метода определения характеристик развития малых возмущений. Для произвольного значения амплитуды рельефа численно находятся компоненты матрицы монодромии и ее собственные значения, таким образом находятся мультипликаторы Флоке и коэффициенты нарастания возмущений. При условии малости амплитуды рельефа стационарное решение раскладывается в ряд по степеням отношения амплитуды неровностей к средней толщине пленки. Такой же подход применяется для нахождения приближенного решения задачи устойчивости.

Доказано, что поправки к коэффициентам усиления пропорциональны второй степени амплитуды рельефа. Найдена формула, позволяющая приближенно вычислить эти поправки.

Отдельно рассмотрены возмущения малой частоты, так как на гладкой стенке неустойчивость относительно низкочастотных возмущений наступает при наименьшем числе Рейнольдса. Показано, что и на гладкой, и на слабоволнистой стенке коэффициент усиления пропорционален второй степени частоты.

Проанализирована эволюция топологии нейтральной кривой при возрастании значения амплитуды неровностей. С помощью полученных аналитических формул дана исчерпывающая классификация типов эволюции. Метод применяется к однопараметрической модели Шкадова [1] и к двухпараметрической модели для сильновязких жидкостей [2]. Результаты сопоставляются с экспериментальными данными [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00762, 18-51-00006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Могилевский Е. И., Шкадов В. Я. *Анализ устойчивости стекающей пленки на плоскости с синусоидальными неровностями*. Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 3. С. 40–53
2. Шкадов В. Я. *Двухпараметрическая модель волновых режимов течения пленки вязкой жидкости*. Вест. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 4. С. 56–61.
3. Schörner M., Aksel N., *The stability cycle — A universal pathway for the stability of films over topography*. Phys. Fluids. V. 30. P. 012105 (1–15).

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ МАКСВЕЛЛА ОКОЛО КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Н. П. Мошкин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

В предлагаемой работе рассматривается вязкоупругая жидкость Максвелла с верхней конвективной производной. Жидкость натекает на стенку, перпендикулярную к направлению течения, и растекается вдоль стенки. Рассмотрены плоский и

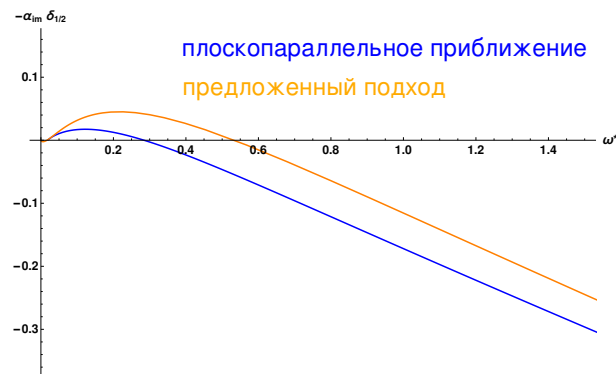
осесимметричный случай. В стационарном случае система уравнений сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных, которая решается численно. Показана возможность построения асимптотических решений при малых числах Вайнсенберга. В нестационарном случае построен численный алгоритм решения с использованием полных уравнений.

ЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДАЛЬНОГО ПОЛЯ СТРУИ: ЭФФЕКТЫ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПОТОКА

Р. И. Мулладжанов

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

Ламинарные и турбулентные затопленные струи проявляют свойства автомодельности при достаточном удалении от источника движения. Скорость на оси затухает как обратная величина расстояния R , в то время как ширина струи δ линейно растет с R . Основываясь на соображениях размерности, поле скорости представляется в виде $\mathbf{u} = \nu \mathbf{u}_L(\theta)/R + \nu \mathbf{v}_m(\theta, \psi)e^{im\phi}/R$, где ν обозначает кинематическую вязкость, (R, θ, ϕ) соответствуют сферической системе координат. Для ламинарных струй безразмерная функция $\mathbf{u}_L(\theta)$ соответствует точному решению Ландау – Сквайра, которое используется как основное течение, в то время как $\mathbf{v}_m(\theta, \psi)$ представляет собой возмущение, зависящее от θ и $\psi = R/\sqrt{\nu t}$. Благодаря осевой симметрии возмущение представляется в виде разложения Фурье относительно угла ϕ , где m – азимутальное волновое число. Точное решение линеаризованных уравнения на возмущение в случае ползучего течения указывает на следующий вид возмущения: $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m0}(\theta)e^{ik\xi - i\omega \log \tau}$, где $\xi = \log(R/R_0)$, $\tau = \nu t/R_0^2$, k – радиальное (продольное) волновое число, R_0 играет роль некоторого локального масштаба. Подстановка такого представления поля скорости в линеаризованные уравнения Навье – Стокса приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система представляет собой задачу на собственные значения для комплексного k и действительного $\Omega = \omega R^2/(\nu t)$ – обобщенной частоты.



Мы сравниваем полученные результаты описанного выше метода с результатами классического анализа устойчивости, использующего плоскоструйное приближение, в рамках которого возмущение в цилиндрической системе координат (x, r, ϕ)

представляется как $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_{m0}(r)e^{i\alpha x - i\omega^* t}$, где α и ω^* обозначают продольное волновое число и частоту, обезразмеренную при помощи осевой скорости и полуширины струи $\delta_{1/2}$. Рисунок демонстрирует сравнение локального инкремента роста возмущения против частоты при числе Рейнольдса $Re_\delta = 36.3$ для азимутального волнового числа $m = 1$, указывая на дестабилизирующий эффект непараллельности потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-38-20167).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГИДРАТООБРАЗОВАНИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ СО СКАЧКОМ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ФРОНТЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Н. Г. Мусакаев^{1,3}, М. К. Хасанов²

¹Тюменский филиал ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН

²Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

³Тюменский индустриальный университет

Для участков нефтяных месторождений, необорудованных системами сбора попутного нефтяного газа, можно использовать способ консервации данного газа в пористых коллекторах в газогидратной форме. Для реализации вышеупомянутой технологии необходимы предварительные теоретические исследования.

В этой связи в работе изучен процесс образования газового гидрата в результате нагнетания газа в природный пласт, частично насыщенный водой. Для описания фильтрационного течения с учетом физико-химических превращений записана система нелинейных дифференциальных уравнений. Построено аналитическое решение задачи об образовании газогидрата в пористой среде. При получении такого решения использован анализ результатов расчетов, который показал, что с увеличением проницаемости пласта распределение температуры в пласте приближается к ступенчатому со скачком температуры на фронте гидратообразования [1]. Это обусловлено выделением скрытой теплоты образования газового гидрата на фронте фазовых переходов, а также тем, что при высоких значениях проницаемости пласта преобладающим является конвективный механизм теплопереноса в пласте. Поэтому при высоких значениях проницаемости пористой среды можно использовать модель со ступенчатым распределением температуры в пласте. С учетом этого построено приближенное аналитическое решение со скачком температуры на фронте образования газогидрата в виде явной функциональной зависимости координаты границы гидратообразования от параметров инжектируемого газа и пористой среды. Установлено, что решение без учета кондуктивного механизма теплопереноса (за счет теплопроводности) хорошо описывает движение границы образования газогидрата при достаточно высоких значениях проницаемости ($k > 10^{-11} \text{ м}^2$). При снижении проницаемости пористой среды необходимо учитывать оба механизма переноса тепла (конвективный и кондуктивный). Так, при достаточно низких значениях проницаемости ($k < 10^{-14} \text{ м}^2$) решение, учитывающее только теплопроводность, практически совпадает с решением, учитывающим оба механизма переноса тепла в пласте. Для описания движения

границы фазового перехода при значениях проницаемости $10^{-11} \text{ м}^2 > k > 10^{-14} \text{ м}^2$ необходимо использовать решения, учитывающие оба механизма переноса тепла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10023).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shagapov V. Sh., Musakaev N. G., Khasanov M. K. *Formation of gas hydrates in porous medium during an injection of cold gas*. Int. J. Heat Mass Transfer. 2015. V.84. P. 1030–1039.

АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ

Р. Д. Недин

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича,
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В настоящее время модели деформирования неоднородных пластин, являющихся распространенными конструкционными элементами, весьма актуальны при решении задач, возникающих в современном строительстве, при создании военных и гражданских технических систем широкого назначения. В производстве предварительные (остаточные, технологические) напряжения часто внедряют в конструкции намеренно для улучшения их механических характеристик и свойств.

В настоящей работе описана модель предварительно напряженного тела, не учитывающая в явном виде начальную деформацию [1]. На ее основе рассмотрена частная задача о планарно-изгибных колебаниях перфорированной пластины, выполненной из неоднородного функционально-градиентного материала, и находящейся в условиях начального напряженно-деформированного состояния. Сформулирована слабая постановка задачи для пяти неизвестных функций — компонент вектора планарных перемещений, прогиба пластины и углов поворота нормалей к поверхности пластины. Построено численное решение прямой задачи с помощью метода конечных элементов на основе построенной слабой постановки, исследовано влияния уровней предварительных напряжений в пластине с круглыми отверстиями на амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты. Исследовано изменение динамических характеристик в зависимости от типа сложного предварительно напряженного состояния. Полученная постановка удобна для решения большого класса обратных коэффициентных задач, в которых требуется определить уровень или неоднородные поля предварительных напряжений при известной информации о поле смещения на части границы тела [2].

Исследована задача по идентификации предварительного напряженного состояния в рассмотренной пластине на основе данных измерения ее частотных характеристик. Считается, что плоское начальное напряженное состояние вызвано приложением предварительной механической нагрузки. При этом в качестве зондирующей

нагрузки использована равномерно-распределенная периодически меняющаяся нагрузка, приложенная к части свободной границы и действующая в плоскости пластины. Также рассмотрена частная постановка задачи для функционально-градиентной пластины, находящейся в однородном предварительном напряженном состоянии. Получена формула, позволяющая восстановить уровень предварительного состояния пластины по изменению собственной частоты. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции различных типов предварительного напряженного состояния, выявлены эффективные режимы акустического зондирования пластины, определены наиболее благоприятные частотные диапазоны для реконструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-71-10045).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. *Предварительные напряжения: моделирование и идентификация*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014.
2. Nedin R. D., Dudarev V. V., Vatulyan A. O. *Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress*. Engineering Structures. 2017. V. 151. P. 391–405.

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М. В. Нещадим

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Обобщенными функционально-инвариантными решениями (ОФИР) волнового уравнения

$$\sum_{j=1}^n w_{x_j x_j} = w_{tt},$$

называются [1] решения вида

$$w = g(x, t)f(\theta),$$

где функции $\theta = \theta(x, t)$ и $g = g(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, – соответственно фаза и амплитуда – фиксированы, а форма волны f – произвольная функция одного переменного.

Данное определение, очевидно, переносится на случай волнового уравнения с переменными коэффициентами и, более того, определение ОФИР может быть дано для любой системы дифференциальных уравнений. Также отметим задачу, поставленную Р. Курантом [2]: найти все линейные гиперболические уравнения второго порядка, для которых существуют семейства ОФИР. В двумерном случае найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, при которых существуют ОФИР. В больших размерностях известны только отдельные классы таких уравнений, а в общем случае эта задача остается нерешенной.

В данном докладе приводятся новые результаты связанные с ОФИР для волнового уравнения, а также для системы уравнений Максвелла [3–6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. *Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений*. Дифф. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 853–865.
2. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964.
3. Нецадим М. В. *Классы обобщенных функционально инвариантных решений волнового уравнения*. I Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 418–435. <http://semr.math.nsc.ru>
4. Нецадим М. В. *Сферические обобщенные функционально инвариантные решения волнового уравнения*. Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, № 2. С. 42–48.
5. Нецадим М. В. *Обобщенные функционально инвариантные решения волнового уравнения в размерности 2*. Вестник НГУ, сер. математика, механика, информатика. 2017. Т. 17, № 3. С. 59–67.
6. Нецадим М. В. *Функционально инвариантные решения системы Максвелла*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 66–74.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВИНТОВЫХ ВИХРЕЙ

В. Л. Окулов^{1,2}, Я. Фукумото³

¹Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Ветроэнергетический факультет ДТУ, Люнгбю, Дания

³Институт математики для индустрии, Кусю университет, Фукуока, Япония

Начало теоретических исследований винтовых вихрей восходит к знаменитой работе лорда Кельвина 1880 года о спиральных возмущениях осесимметричного вихря. Повышенный интерес к их изучению вызван тем, что винтовые вихри имеют фундаментальное значение для механики жидкости, поскольку они описывают одно из основных состояний закрученных потоков в природе и технике. Теория винтовых вихрей активно стала развиваться в связи созданием вихревой теории ротора Жуковским [1]. В результате были получены различные аналитические решения: (i) для вихревой нити через ряды Каптейна [2] и в форме с аналитическим выделением сингулярности [3, 4]; (ii) для винтовой вихревой пелены [5]; (iii) для винтовых вихревых трубок с равномерным распределением завихренности в круговых сечениях ядра [6]; (iv) для мультиплетов из винтовых вихрей при обобщении задачи Кельвина об устойчивости N-угольника точечных вихрей [4] и т.д.

Настоящая работа обобщает перечисленные аналитические исследования винтовых вихрей, сопоставляет различные представления решений для вихревых нитей и вихревых мультиплетов с равномерным распределением завихренности в сечениях их ядер. В дополнение к данному анализу были получены новые решения для винтовых вихрей с гауссовым распределением завихренности в ядре. В отличие от равномерного такое распределение завихренности обнаружено в экспериментальных исследованиях [7] и при численном моделировании винтовых вихрей [8]. Полученные

решения являются существенным вкладом в развитие вихревой динамики несжимаемой жидкости и дают новый импульс к решению прикладных задач с генерацией винтообразных вихревых структур в интенсивно закрученных потоках.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке JSPS (грант № S17119).

ЛИТЕРАТУРА

1. Okulov V. L., Sorensen J. N., Wood D. H. *The rotor theories by Professor Joukowski, Vortex Theories*. Prog. Aerosp. Sci. 2015. V 73. P. 19–46.
2. Fukumoto Y., Okulov V. L., Wood D. H. *The contribution of Kawada to the analytical solution for the velocity induced by a helical vortex filament*. ASME. Appl. Mech. Rev. 2015. V. 67(6). P. 060801-060801-6.
3. Kawada S. *Induced velocity by helical vortices*. J. Aeronautical Sciences. 1936. V. 3. P. 86–87.
4. Okulov V. L. *On the stability of multiple helical vortices*. J. Fluid Mech. 2004. V. 521. P. 319–342.
5. Goldstein S. *On the vortex theory of screw propellers*. Proc R Soc London A. 1929. V. 123. P. 440–465.
6. Boersma J., Wood D. H. *On the self-induced motion of a helical vortex*. J. Fluid Mech. 1999. V. 384. P. 263–280.
7. Quaranta H. U., Bolnot H., Leweke T. *Long-wave instability of a helical vortex*. J. Fluid Mech. 2015. V. 780. P. 687–716.
8. Ali M., Abid M. *Self-similar behaviour of a rotor wake vortex core*. J. Fluid Mech. 2014. V. 740 (R1). P. 1–11.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ОНДУЛЯРНЫХ БОРОВ

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Следствием длинноволнового приближения $H/L \ll 1$, где H – характерная глубина потока, а L – характерная длина поверхностных волн [1, 2], является неравенство $|h_x| \ll 1$, где $h(x, t)$ – глубина плоскопараллельного потока. Обоснование получаемых при этом уравнений первого приближения теории мелкой воды в классе их аналитических решений дано в [3]. Однако уравнения теории мелкой воды используются не только для описания медленно меняющихся течений с гладкой свободной поверхностью (таких как паводковые течения в реках), но также успешно применяются для моделирования быстро протекающих волновых процессов, связанных с распространением гидравлических боров, на фронтах которых $h_x \geq O(1)$. В работах [4, 5] для обоснования применения первого приближения теории мелкой воды при моделировании волновых течений с гидравлическими борами базисные законы сохранения этого приближения были получены из двумерных интегральных законов сохранения массы и полного импульса, описывающих плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости. При этом в [5] было использовано понятие локального гидростатического приближения, которое обобщает понятие длинноволнового приближения. В настоящей работе локальное гидростатическое приближение применяется

для вывода базисных законов сохранения модели Грина-Нагди второго приближения теории мелкой воды и анализа применимости этой модели для численного расчета волновых течений жидкости с ондулярными борами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. O. *On the derivation of shallow water theory*. Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. P. 109–134.
2. Стокер Дж. Дж. *Волны на воде. Математическая теория и приложения*. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Овсянников Л. В. *К обоснованию теории мелкой воды*. Динамика сплошной среды. 1973. № 15. С. 104–125.
4. Остапенко В. В. *О законах сохранения теории мелкой воды*. Докл. АН. 2015. Т. 464, № 5. С. 558–561.
5. Остапенко В. В. *К обоснованию теории мелкой воды*. Докл. АН. 2018. Т. 478, № 2. С. 158–163.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ РОЛЬ КРИВИЗНЫ И МЕХАНИЗМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДИСТОРСИИ В ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРОЧНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В. Е. Панин^{1,2}, В. Е. Егорушкин¹, С. В. Панин^{1,2}

¹Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

²Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Модели дислокаций и других деформационных дефектов, описанные в литературе, построены для трансляционно-инвариантных кристаллов. Теоретически показано, что зародить дислокацию в трансляционно-инвариантном кристалле энергетически невозможно. Данную проблему необходимо решать только в рамках многоуровневого подхода с учетом рассмотрения планарной подсистемы (поверхностный слой и границы раздела различных типов). Первичными в нагруженном твердом теле являются структурные превращения именно в планарной подсистеме, где нет трансляционной инвариантности. Эти структурные трансформации создают в поверхностных слоях 3D-кристалла области кривизны, где в междоузлиях возникают новые структурные состояния. Именно туда переходят ионы из планарной подсистемы, образуя ядра дислокаций и других деформационных дефектов. Такой эффект получил название пластической дисторсии. Он играет фундаментальную роль, как в генерации, так и в распространении деформационных дефектов всех видов, включая трещины [1].

Разработана калибровочная теория нелинейных волн локализованного пластического течения механизмом пластической дисторсии, когда движение дислокаций подавлено. В этих условиях пластическое течение связано с движением неравновесных точечных дефектов, сопровождающих механизм пластической дисторсии. Теоретически показано, что если пластическая дисторсия является доминирующим механизмом во всем объеме деформируемого материала, то развиваются эффекты

сверхпластичности. Экспериментально показано, в частности в условиях ползучести, что механизм пластической дисторсии осуществляется на первых стадиях только в зонах зернограничного скольжения. Это описывается теорией Набарро-Херринга, в рамках которой, однако, должно рассматриваться движение неравновесных точечных дефектов по механизму пластической дисторсии. При этом четвертая стадия ползучести поликристаллов, которая завершается разрушением материала, обусловлена развитием механизма пластической дисторсии в приграничных зонах 3D-зерен. Данный эффект связан с развитием кривизны кристаллической структуры в объеме 3D-зерен, вызванной зернограничным скольжением.

Зарождение усталостных трещин в поверхностных слоях материалов конструкций в условиях циклического нагружения связано с зонами кривизны кристаллической структуры, которые возникают при сопряжении пластически деформируемого поверхностного слоя и упруго нагруженной подложки. Разрабатывается теория усталостного разрушения с учетом кривизны кристаллической структуры в циклически деформируемом твердом теле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Panin V. E., Egorushkin V. E., Elsukova T. F., Surikova N. S., Pochivalov Y. I., Panin A. V. *Multiscale Translation-Rotation Plastic Flow in Polycrystals*. Hand-book of Mechanics of Materials, C.H. Hsueh et al., Eds., Singapore: Springer Nature, 2018.

УСРЕДНЁННАЯ НЕРАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ДВУМЯ МАСШТАБАМИ НЕОДНОРОДНОСТИ

Л. С. Панкратов¹, А. В. Конюхов^{1,2}, А. С. Волошин¹

¹Московский физико-технический институт (государственный университет)

²Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

В данной работе мы получаем усредненную модель двухфазного течения несжимаемых жидкостей в многомасштабной пористой среде, состоящей из непересекающихся неоднородных низкопроницаемых пористых блоков, окруженных высокопроницаемой связной системой трещин. Неоднородность пористых блоков означает контрастность свойств включений. Процесс усреднения состоит из двух шагов. На первом шаге мы получаем неравновесную ε -периодическую модель течения Кондауровского типа на мезоскопическом уровне. Данная модель учитывает капиллярную неравновесность течения в блоках и трещинах. Усредняя мезоскопическую модель методом формальных асимптотических разложений, мы приходим к макроскопической (усредненной) модели Кондауровского типа (см., например, [1, 2]). Процесс усреднения, осуществленный на втором шаге, подтверждается численными расчетами. Численное тестирование проводилось на примере задачи двухфазного вытеснения в неоднородном пористом блоке. На рис. 1 показана сходимость к решению на основе усредненной модели при уменьшении ε .

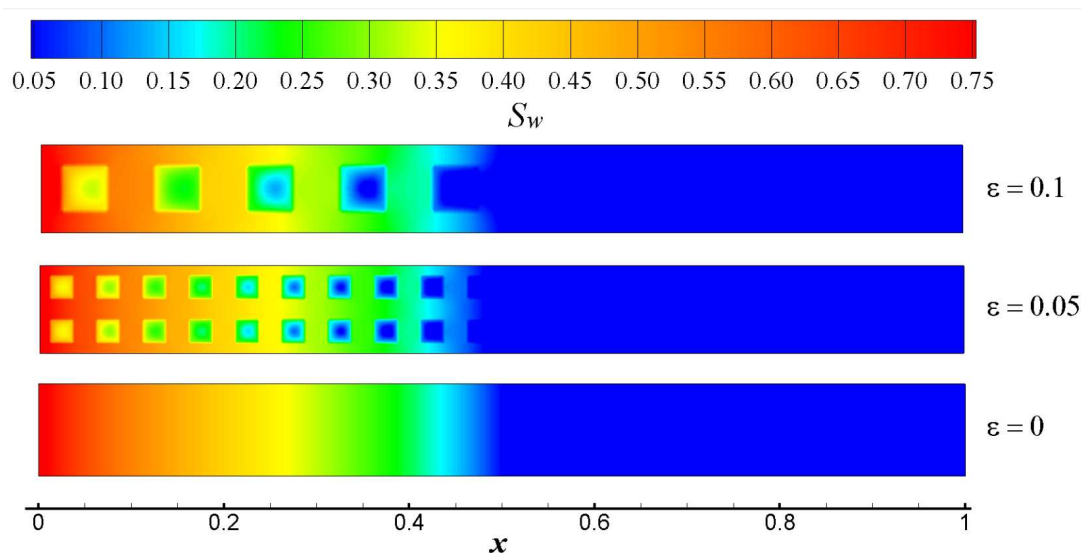


Рис. 1: Распределение насыщенности смачивающей фазы для мезоскопической модели при $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 0.05$ и осредненной модели ($\varepsilon = 0$)

ЛИТЕРАТУРА

1. Voloshin A., Pankratov L., Konyukhov A. *Homogenization of Kondraurov's non-equilibrium two-phase flow in double porosity media*. Applicable Analysis. 2018. DOI: 10.1080/00036811.2018.1430777.
2. Konyukhov A., Pankratov L., Voloshin A. *Homogenized non-equilibrium models of two-phase flow in fractured porous media*. Moscow: Fizmatkniga, 2017.

О ПЕРВОМ ЧЛЕНЕ АСИМПТОТИКИ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗОВЗВЕСИ

А. В. Панов, М. М. Туров

Челябинский государственный университет

Рассматривается система уравнений динамики газовзвеси [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \rho_1 + \rho_1 \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \rho_2 + \rho_2 \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u}_1 \right) + m_1 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \\ \rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \vec{u}_2 \right) + m_2 \nabla P(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_2}{\tau} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2). \end{cases}$$

В докладе исследуются стационарные сферически симметричные движения газозвеси. Для таких движений выписана система уравнений на первые слагаемые в

асимптотических разложениях решений. Исследованию данной системы и посвящен доклад.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-00041).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. *Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред*. ПММ. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.

ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. А. Папин, М. А. Токарева

Алтайский государственный университет, Барнаул

Рассматривается модель фильтрации вязкой жидкости в деформируемой поропругой среде. Данный процесс описывается законами сохранения масс для каждой фазы без учета фазовых переходов, законом Дарси для жидкости, учитывающим движение скелета, реологическим уравнением для пористости, в котором учитываются вязкоупругие свойства твердой фазы, уравнением сохранения импульса системы в целом [1], [2], [3].

Для настоящей модели получены следующие результаты:

- доказана локальная по времени однозначная разрешимость в гладких классах задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой сжимаемой жидкости в вязкой пористой среде;
- доказана глобальная разрешимость в гладких классах задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде;
- установлено свойство конечного времени стабилизации решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в упругой пористой среде, а также свойство конечной скорости распространения возмущений;
- доказано существование автомодельного решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в вязкоупругой пористой среде;
- получено решение в квадратурах для двумерной линеаризованной задачи о движении несжимаемой вязкой жидкости в вязкоупругой пористой среде [4].

Прикладные аспекты модели рассмотрены в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Fowler A. *Mathematical Geoscience*. Springer-Verlag London Limited, 2011.
2. Morency C. *A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability*. Journal of Geophysical Research. 2007. V. 112.
3. Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier, New York, 1972.

4. Токарева М.А. *Корректность начально-краевых задач для уравнений фильтрации в порупругих средах*: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Токарева Маргарита Андереевна. Новосибирск, 2018.
5. Papin A.A., Tokareva M.A. *Problems of heat and mass transfer in the snow-ice cover*. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. 2018. V. 193. 012055.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ, СВЯЗАННЫХ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ДИФфуЗИИ И МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТИ МАТЕРИАЛА ПОТОКОМ ЧАСТИЦ

Е. С. Парфенова^{1,2}, А. Г. Князева^{1,2}

¹Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

²Национальный исследовательский Томский политехнический университет

В настоящее время активно исследуются процессы взаимодействия потоков частиц с материалами. Эти методы обработки позволяют получать новые материалы с уникальными свойствами, которые отвечают современным технологическим требованиям. В основном обработка поверхностей металлических материалов с использованием импульсных низкоэнергетических пучков достигается быстрым нагревом до температур, превышающих температуру плавления материала, и быстрым охлаждением поверхностных слоев. Но в работе [1] показано, что изменения в поверхностных слоях и объеме металлических материалов могут происходить и при воздействии на поверхность потока частиц в режиме отсутствия плавления, то есть при достаточно низких температурах. При этом также наблюдаются значительные изменения состава и структуры.

На процесс перераспределения внедряемых частиц в поверхностном слое обрабатываемого металла влияет ряд факторов, например, нагрев, распыление, перемешивание, фазовые переходы и т.д. В момент столкновения частиц с поверхностью мишени происходит генерация упругих волн механических возмущений, которые также оказывают влияние на диффузию внедряемой примеси. Экспериментально выявить взаимовлияние определенных процессов независимо от остальных достаточно трудно ввиду их совместного протекания. Кроме того, эксперимент ориентирован на конечный результат воздействия и не позволяет исследовать процессы, протекающие на достаточно малых временах. Преимущество перед экспериментом в данном случае имеет математическое моделирование, позволяющее изучить роль каждого возникающего процесса в отдельности и отследить его динамику с момента внедрения в поверхность мишени.

В работе представлена математическая модель начальной стадии процесса взаимодействия потока заряженных частиц с поверхностью металла. Модель позволяет изучать взаимодействие нелинейных волн разной физической природы, распространяющихся совместно в неизотермических условиях.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, направление III.23.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанова Е. Н., Грабовецкая Г. П., Тересов А. Д., Мишин И. П. *Эволюция структуры и спектра разориентировок границ зерен субмикрористаллического молибдена при облучении импульсным электронным пучком*. Изв. Вузов. Физика, 2018. Т.61, № 1 (721). С. 3–8.

КОМПЛЕКСНОЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ МАТЕРИАЛА СТЕНОК ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ АНЕВРИЗМ

Д. В. Паршин^{1,2}, А. И. Липовка^{1,2}, А. С. Юношев^{1,2},
А. В. Дубовой³, Н. А. Маслов⁴, А. П. Чупахин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Федеральный центр нейрохирургии, Новосибирск

⁴Институт теоретический и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Церебральные аневризмы являются широко распространенным заболеванием сосудов головного мозга. Они встречаются у 20 человек на каждую 1000. Последствия разрыва церебральных аневризм зачастую приводят к инвалидизации или летальному исходу, однако риск их разрыва не столь высок (около 0.5) и сопоставим с риском развития послеоперационных осложнений (около 0.6) [1]. Поэтому задача оценки риска разрыва церебральной аневризмы актуальна и имеет большое практическое значение для современной нейрохирургии. Существует два основных подхода оценки таких рисков. Первый – это оценка гемодинамических характеристик сосудов с аневризмой [2]. Второй – это оценка механических свойств разорвавшихся и не разорвавшихся аневризм [3]. В последнее время получили распространение и смешанные подходы, когда пациент-специфичные свойства материала стенки аневризмы используются в гидроупругих расчетах гемодинамики [5]. Однако, используемые в таких случаях модели чрезвычайно наивны и не в полной мере описывают истинное поведение рассматриваемых биоматериалов.

В нашей работе описывается подход комплексного исследования материала стенки церебральной аневризмы. Исследование проводится в два этапа. На первом этапе проводится исследование белкового состава стенки аневризмы методами лазерно-индуцированной флуоресценции. На втором этапе проводится исследование механических свойств стенки аневризмы на одноосное растяжение на разрывной машине. Проведено математическое моделирование стенки церебральной аневризмы как гиперупругого материала на основе полученных экспериментальных данных. Был проведен корреляционный анализ данных механического эксперимента с данными белкового анализа тканей. В результате были обнаружены существенные различия как

в механических свойствах, так и в белковом составе семейств разорвавшихся и не разорвавшихся аневризм.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект №17-11-01156.

ЛИТЕРАТУРА

1. International Study of Unruptured Intracranial Aneurysms Investigators *Unruptured intracranial aneurysms—risk of rupture and risks of surgical intervention*. New England Journal of Medicine. 1998. V. 339.
2. Cebal J.R. et al. *Clinical application of image-based CFD for cerebral aneurysms*. Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng. 2011. V. 27. P. 977–992.
3. Brunel H. et al. *Rupture limit evaluation of human cerebral aneurysms wall: Experimental study*. Journal of Biomechanics. 2018. V. 77. P. 76–82.
4. Cebal J.R. et al. *Wall Mechanical Properties and Hemodynamics of Unruptured Intracranial Aneurysms*. AJNR Am. J. Neuroradiol. 2015. V. 36, №9. P. 1695–1703.
5. Lipovka A.I. et al *On the mechanics of a fusiform cerebral aneurysm: Mooney-Rivlin mathematical model for the experimental data*. J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1045. 012028.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ПУЗЫРЬКОВОМ ПОЛИДИСПЕРСНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ В ТРУБЕ

М. А. Пахомов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Пузырьковые восходящие потоки в каналах или трубах широко распространены в химической технологии, в энергетике и других областях техники. Как правило, такие течения являются турбулентными со значительным межфазным взаимодействием между жидкостью и пузырьками; они могут быть также осложнены межфазным теплообменом и полидисперсностью. Целью настоящей работы является разработка эйлеровой двухжидкостной модели для описания процессов переноса импульса и теплоты в вертикальных газожидкостных полидисперсных течениях с учетом дробления и коалесценции.

В модели используется система осесимметричных стационарных RANS уравнений, записанная с учетом обратного влияния пузырьков на осредненные и пульсационные характеристики течения. Турбулентность несущей жидкой фазы рассчитывается с применением уравнений переноса компонент рейнольдсовых напряжений [1], модифицированной на случай наличия воздушных пузырьков [2]. Для описания распределения пузырьков по размерам используется аппроксимация непрерывного распределения пузырьков в виде суммы нескольких δ -функций, согласно подходу [3].

В работе выполнен численный расчет динамики и теплопереноса восходящего пузырькового потока в трубе. Исследовано влияние изменения объемного расходного

газосодержания и их начального распределения, начальной температуры жидкости и ее скорости на структуру течения и теплоперенос в двухфазном потоке. Структура течения в неизотермическом потоке при добавлении воздушных пузырьков, в целом, аналогична двухфазному газожидкостному потоку без теплообмена. Добавление газовой фазы в турбулентную жидкость вызывает возрастание теплообмена более чем в 2.5 раза, причем этот эффект становится более заметным с ростом газосодержания.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проектов 18-58-45006 и 18-08-00477).

ЛИТЕРАТУРА

1. Fadai-Ghotbi A., Manceau R., Boree J. *Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics.* Flow, Turbulence Combust. 2008. V. 81. P. 395–410.
2. Lopez de Bertodano M., Lee S. J., Lahey R. T., Jr., Drew D. A. *The prediction of two-phase turbulence and phase distribution using a Reynolds stress model.* ASME J. Fluids Eng. 1990. V. 112. P. 107–113.
3. Mukin R. V. *Modeling of bubble coalescence and break-up in turbulent bubbly flow.* Int. J. Multiphase Flow. 2014. V. 62. P. 52–66.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКИ И ХИМИИ ДЛЯ ПРИРОДООХРАННЫХ ЗАДАЧ

В. В. Пененко^{1,2}, А. В. Пененко^{1,2}, Е. А. Цветова¹, Э. А. Пьянова¹

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Разработка методов оценивания экологической перспективы и полученные с их помощью результаты для объектов различного масштаба актуальны в связи с большим государственным и социальным запросом на качество окружающей среды. Специфика этого класса задач состоит в том, что каждая ситуация в исследуемой природной системе уникальна, ее невозможно повторить. Поэтому, чтобы приблизить результаты прогнозирования к реальным условиям, имеет смысл строить технологии моделирования с совместным использованием математических моделей и данных мониторинга реальных процессов в режиме усвоения. Для этих целей мы используем 4D модели геофизической термогидродинамики (атмосфера и водные объекты) объединенные с моделями переноса и трансформации газо-аэрозольных субстанций в климато-экологической системе Земли как в глобальном масштабе, так и в пределах ее конкретных регионов. Данные мониторинга могут быть представлены различными типами контактных и дистанционных наблюдений.

В докладе представлены результаты наших недавних исследований по решению прямых и обратных задач природоохранного прогнозирования и экологической безопасности. Так как модели и данные наблюдений могут содержать различного рода неопределенности и ошибки, мы используем вариационный принцип со слабыми

ограничениями. Его организация строится так, чтобы обеспечить согласованный учет многомасштабных и мультивариантных процессов в единой системе, а в процессе решения задач получать количественные оценки неопределенностей по отношению к усваиваемым данным мониторинга. Построение численных моделей осуществляется на основе вариационного принципа и методов декомпозиции/расщепления с использованием концепции сопряженных интегрирующих множителей и техники конечных элементов.

В результате применения такой технологии моделирования получается совокупность фундаментальных пространств: функции состояния моделей процессов, сопряженные функции, функции неопределенности, а также функции чувствительности моделей и целевых функционалов к вариациям параметров моделей и к вариациям данных наблюдений. Эти функции используются для решения обратных задач по заданным целевым функционалам, для выявления центров действия в исследуемой системе, для организации стратегий направленного мониторинга и т.д.

Приводятся результаты решения типичных прямых и обратных задач природоохранного направления и экологической безопасности для индустриально нагруженных регионов и городов.

Работа выполнена в рамках темы госзадания ИВМиМГ СО РАН 0315-2016-004 и проектов Российского фонда фундаментальных исследований №17-01-00175 и №17-29-05044.

О КРУПНОМАСШТАБНЫХ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ МАГНИТНОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

С. И. Перегудин¹, Э. С. Перегудина², С. Е. Холодова³

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²Санкт-Петербургский горный университет

³Санкт-Петербургский университет информационных технологий, механики и оптики

В представленном исследовании производится построение математической модели динамики пространственных крупномасштабных квазигеострофических движений во вращающемся слое идеальной несжимаемой электропроводящей жидкости переменной глубины при произвольных значениях магнитного числа Рейнольдса.

Результаты проведенных исследований представляют интерес для астрофизики и геофизики, например, при изучении процессов, происходящих в недрах звезд и жидком ядре Земли, и, кроме того, могут быть использованы при определении магнитогидродинамических характеристик морской среды, при оценке параметров источника волновых возмущений по электромагнитному полю, индуцированному соответствующим гидродинамическим волнением, содержащему важную информацию о геофизических характеристиках шельфовой зоны, что, несомненно, является важным аспектом знаний для морских геологоразведочных изысканий и исследований.

Рассматривается вращающийся слой идеальной электропроводной несжимаемой жидкости, ограниченной снизу твердой непроницаемой поверхностью $z = -Z(x, y)$, а сверху – поверхностью $z = -h_b(x, y, t)$. В постановке задачи используется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Под объемной силой понимается вектор $\mathbf{g}$, перпендикулярный поверхности $z = 0$ и направленный в сторону, противоположную вертикальной оси. Ось вращения жидкости совпадает с осью z , то есть, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}\omega$, где ω – угловая скорость вращения слоя.

Система уравнений для описания движения невязкой электропроводящей несжимаемой вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ жидкости в магнитной гидродинамике представляет совместную систему уравнений гидродинамики и электродинамических уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями на ограничивающих жидкий слой поверхностях, является нелинейной, неавтономной и имеет высокую размерность. Представление аналитических, в частности, точных решений возможно лишь в отдельных частных случаях, в связи с чем исходная система на основе анализа масштабов квазигеострофических движений аппроксимируется более простой нелинейной системой, с достаточной степенью достоверности описывающей свойства решений исходной системы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Перегудин С. И., Холодова С. Е. *Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах*. Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2009.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМЫ МГД УРАВНЕНИЙ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОЙ СРЕДЕ ПРИ ЛЮБЫХ ЗНАЧЕНИЯХ МАГНИТНОГО ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

С. И. Перегудин¹, Э. С. Перегудина², С. Е. Холодова³

¹ Санкт-Петербургский государственный университет

² Санкт-Петербургский горный университет

³ Санкт-Петербургский университет информационных технологий, механики и оптики

В представленном исследовании изучается динамика крупномасштабных волновых процессов во вращающемся слое невязкой проводящей несжимаемой жидкости переменной глубины. Проблема генерации магнитного поля – классическая. Теория бурно развивается приблизительно с середины двадцатого века усилиями, прежде всего, английских ученых. Первое упоминание о возможности возбуждения магнитного поля небесных тел принадлежит Дж. Лармору, который считал, что магнитное поле Солнца поддерживается аксиально – симметричным движением вещества в меридиональных плоскостях. Однако Каулинг сформулировал теорему о том, что ограниченное движение не способно генерировать осесимметрическое или двумерные

поля. Следует отметить, что Каулинг не отрицал способности двумерных скоростных полей генерировать магнитное поле. С тех пор гидромагнитное динамо изучалось теоретически многими учеными в связи с исследованием магнитных полей в астрофизике и геофизике, но известно, что это явление имеет и более общее значение в магнитной гидродинамике.

Значительный вклад в развитие магнитной гидродинамики внесли Х.Альфвен, Т. Каулинг, И.М. Кирко, А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов, Дж. Шеркли, Дж. Гартман, В.М. Конторович и другие исследователи. Первые работы в этой области связаны с исследованием распространения малых возмущений в идеальных средах и представлением решений классических для гидродинамики задач течения проводящих жидкостей в каналах и трубах. Влияние волн на поверхности жидкого натрия в напорной камере реактора ВН - 600 отмечалось в работе И.М. Кирко [1].

В общем случае магнитные силовые линии частично переносятся потоком жидкости и частично диффундируют через нее. Этот общий случай и рассматривается в представленном исследовании, то есть, задача решается при произвольных значениях магнитного числа Рейнольдса, причем построение математической модели производится на основе полной системы уравнений магнитной гидродинамики, при этом учитываются инерционные силы в уравнениях движения, которыми в известных исследованиях с применением теории быстрого вращения пренебрегается; в предельном случае бесконечно больших значений магнитного числа Рейнольдса полученные результаты сводятся известным и полученным ранее.

С помощью введения вспомогательных функций исследуемая система приведена к одному скалярному уравнению в частных производных. Представлено точное аналитическое решение задачи о малых возмущениях. В результате получено, что, если внешнее магнитное поле параллельно оси вращения слоя, при конечных значениях магнитного числа Рейнольдса наблюдается процесс затухания магнитного поля.

При достаточно больших значениях магнитного числа Рейнольдса обнаруживается существование периодического процесса.

Если же вектор внешнего магнитного поля имеет только отличную от нуля нормальную составляющую у граничной поверхности жидкости, доказано существование волнового режима, вызванного не только магнитными силами, но и силами гравитации, Кориолиса и соответствующими граничными эффектами, а также возможность существования индуцированного магнитного поля на достаточно длительном временном промежутке и его существование в отсутствие внешнего фонового поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирко И. М., Кирко Г. Е. *Волны Альфвена и генерация колебаний магнитного поля в реакторе на быстрых нейтронах с жидкометаллическим теплоносителем.* ДАН СССР. 1988. Т. 303, № 4. С. 865–868.

ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Г. Петров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва

Рассматриваются линейные операторы, действующие на функции, определенные на замкнутых гладких контурах. Для их вычисления приведен алгоритм построения численных схем без насыщения (по Бабенко К.И. [1]). На его основе получены формулы без насыщения для вычисления производных, интегралов, интерполяции и интегралов с логарифмической особенностью. Приведены численные схемы без насыщения для решения краевых задач для гармонических и бигармонических уравнений. В качестве приложений рассмотрены примеры решения задач потенциального обтекания одиночных контуров и периодических решеток, задачи течений со свободной границей. Также приведены примеры решений краевых задач течений вязкой жидкости в двухсвязных областях в приближении Стокса и другие задачи механики.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-19-00373).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
2. Petrov A. G. *Numerical Schemes without Saturation for Periodic Functions Doklady Mathematics*. 2018 V. 98, № 1. P. 348–352.
3. Петров А. Г., Байков Н. Д. *Деформация цилиндрических полостей в плоскопараллельных потенциальных течениях с циркуляцией и под влиянием массовых сил. Вычислительные методы и программирование*. 2018. Т. 19. С. 207–214.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. Г. Петров¹, А. О. Казакова²

¹Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

²Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары

В докладе представлен алгоритм численного исследования плоской задачи течения вязкой жидкости в приближении Стокса в двусвязной области с применением схемы без насыщения [1]. При малых числах Рейнольдса функция тока определяется из краевой задачи для бигармонического уравнения с граничными условиями

основной краевой задачи. К такой же математической модели приводит плоская задача теории упругости, численное решение которой с применением метода линейных граничных элементов рассмотрено, например, в [2]. В настоящее время в литературе аналитически изучено движение жидкости между двумя круговыми цилиндрами, которые движутся произвольным образом. В частности, работа авторов [3] посвящена построению точного аналитического решения для эксцентрично расположенных цилиндров.

Математическая модель рассматриваемой задачи описывается бигармоническим уравнением. Бигармоническая функция тока представлена в виде комбинации двух гармонических функций и для них сформулированы краевые условия, соответствующие основной краевой задаче для бигармонического уравнения. Получена система интегральных уравнений для нахождения указанных гармонических функций, через которые выражаются компоненты скорости. Для аппроксимации системы интегральных уравнений системой линейных уравнений применены квадратурные формулы без насыщения. Получены дополнительные интегральные уравнения для определения неизвестных постоянных, содержащихся в граничных условиях для бигармонической функции тока, проведена дискретизация указанных уравнений. Точность численной схемы проверена на известном решении задачи течения вязкой жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами. Рассмотрены решения некоторых оригинальных задач, в частности, получена картина линий тока в математической модели миксера.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00373).

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. Г. *Численные схемы без насыщения для периодических функций*. ДАН. 2018. Т. 481, № 4. С.
2. Терентьев А. Г., Казакова А. О. *Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области*. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 2 (28). С. 35–48.
3. Казакова А. О., Петров А. Г. *О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно*. Известия РАН. МЖГ. 2016. № 3. С. 16–25.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ВОДНОГО РАСТВОРА ПОЛИМЕРОВ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

А. Г. Петрова

Алтайский государственный университет, Барнаул

В рамках феноменологической модели движения слабых водных растворов полимеров в случае малые значения релаксационной вязкости [1] исследуется краевая задача, описывающая стационарное течение вблизи критической точки [2]. Эта краевая задача для нелинейного уравнения 4-го порядка на полубесконечном интервале имеет вид:

$$(q')^2 - q \cdot q'' - 1 - q''' = \delta(q' \cdot q''' - q \cdot q''''), y > 0; q(0) = q'(0) = 0, q' \rightarrow 1, y \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Здесь δ является малым положительным параметром, отвечающим малым значениям релаксационной вязкости. Очевидно, при $\delta = 0$ приходим к классической задаче Хименца о течении вязкой несжимаемой жидкости вблизи критической точки.

Исследуется возможность представления решения задачи (1) в виде асимптотического ряда

$$q = q_0 + \delta q_1 + \dots + \delta^n q_n + \dots, \quad (2)$$

где q_0 является решением Хименца. Такое предположение было высказано в работе [3], где также были численно найдены q_1 и q_2 .

Доказывается утверждение об однозначной классической разрешимости задачи (1) при любом $\delta \in [0, 1]$ в классе функций, производные которых удовлетворяют неравенству

$$1 - e^{-y} \leq q' \leq 1.$$

Показывается, что, несмотря на наличие малого параметра при старшей производной в уравнении (1), задача не имеет погранслоя вблизи нуля.

Устанавливается однозначная разрешимость краевых задач для q_i из формулы (2), а также тот факт, что формула (2) дает асимптотическое представление решения задачи (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00096).

ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский В. А. *К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров*. Доклады Академии Наук СССР. 1971. Т. 200. С. 809–812.
2. Божков Ю. Д., Пухначев В. В. *Групповой анализ уравнений движения водных растворов полимеров*. ДАН. 2015. Т. 460, №5. С. 636–539.
3. Пухначева Т. П. *Задача об осесимметричном течении водного раствора полимеров вблизи критической точки*. Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. Алтайский государственный университет. Барнаул. 2016. С. 75–80.

ВОЛНОВЫЕ АТТРАКТОРЫ В ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Г. Пийе¹, Е. В. Ерманыук², Л. Маас³, И. Н. Сибгатуллин⁴, С. Сюлин⁴, Т. Доксуа¹

¹Лаборатория физики Высшей Нормальной школы г. Лиона, Франция

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

³Институт морских и атмосферных исследований, Университет Утрехта, Нидерланды

⁴Институт океанологии им. П. П. Ширшова, Москва

Задача об аттракторах внутренних волн в плоском случае достаточно хорошо изучена теоретически, численно и экспериментально [1, 2, 3, 4]. Для конкретных геометрий двумерных областей известна классификация наблюдаемых билиардов волновых лучей, построены решения в рамках модели идеальной однородно стратифицированной жидкости, изучена структура ветвей аттракторов при наличии вязкой диссипации, описаны основные особенности каскада триадных взаимодействий. В пространственном случае задача осложняется нетривиальным законом отражения на наклонной твердой границе [5]: при отражении происходит фокусировка в вертикальной плоскости и поворот пучка волн в горизонтальной плоскости.

В настоящей работе выполнено экспериментальное и численное исследование формирования аттракторов в трехмерных областях. Показано, что при распространении внутренних волн вдоль канала после многократных отражений возможно формирование аттракторов в поперечном сечении канала. Выполнено также численное и экспериментальное исследование аттракторов инерционных волн в кольцевом канале, имеющем трапециевидное поперечное сечение в радиальной плоскости, исследованы сценарии развития неустойчивости при различных способах внесения возмущений в систему. Более подробно полученные результаты описаны в работах [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Maas L. R. M., Benielli D., Sommeria J., Lam F. P. A. *Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid*. Nature. 1997. V. 388. P. 557–561.
2. Lam F. P. A., Maas L. R. M. *Internal wave focusing revisited; a reanalysis and new theoretical links*. Fluid Dyn. Res. 2008. V. 40. P. 95–122.
3. Brouzet C., Sibgatullin I. N., Scolan H., Ermanyuk E. V., Dauxois T. *Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations*. J. Fluid Mech. 2016. V. 793. P. 109–131.
4. Brouzet C., Ermanyuk E. V., Joubaud S., Sibgatullin I. N., Dauxois T. *Energy cascade in internal wave attractors*. EPL. 2016. V. 113. 44001.
5. Maas L. R. M. *Wave attractors: linear yet non linear* Intl J. Bifurcation Chaos. 2005. V. 15. P. 2757–2782.
6. Pillet G., Ermanyuk E. V., Maas L. R. M., Sibgatullin I. N., Dauxois T. *Internal wave attractors in three-dimensional geometries: trapping by oblique reflection* J. Fluid Mech. 2018. V. 845. P. 203–225.
7. Sibgatullin I., Ermanyuk E., Maas L., Xiulin X., Dauxois T. *Direct Numerical Simulation of Three-Dimensional Inertial Wave Attractors*. IEEE Xplore. Proc. 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS), 30 Nov.-1 Dec. 2017, Moscow, Russia. P. 137–143.

ВЛИЯНИЕ СИЛ СЖАТИЯ В ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ НА ЕЕ ПРОГИБЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

А. В. Погорелова¹, В. Л. Земляк²

¹*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре*

²*Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема, Биробиджан*

Рассматривается упругая пластина, плавающая на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Движение жидкости потенциальное. Под пластиной в жидкости нестационарно движется тонкое тело. Анализируется влияние сил предварительного сжатия (растяжения) в пластине на трехмерную картину изгибно-гравитационных волн в зависимости от скорости движения тела. Задача решается с использованием интегральных преобразований и последующего численного интегрирования с использованием метода Гаусса. Получено, что сжатие пластины приводит к росту высоты волны для малых докритических скоростей движения тела, по сравнению с изначально ненапряженной пластиной. Растяжение пластины приводит к тому, что для докритических и критических скоростей движения высота волны мала, по сравнению с изначально ненапряженной пластиной. Но для сверхкритических скоростей движения высота волны растянутой пластины начинает резко возрастать и превышает высоту волны изначально ненапряженной пластины. Наибольших значений высота волны достигает у пластины, подверженной растяжению, при движении тела со скоростями, превышающими критические скорости для изначально ненапряженной пластины.

Теоретическое исследование режимов сверхкритического сжатия пластины приводит к тому, что высота волны при движении подводного тела увеличивается на несколько порядков, что не соответствует реальности. В реальности такие значения высоты волны соответствуют разрушению пластины. Анализ трехмерной картины прогибов сверхсжатой пластины показывает, что гравитационные волны, идущие за движущимся телом, при этом не наблюдаются ввиду их малой амплитуды по сравнению с изгибными волнами. При этом изгибные волны распространяются и в положительном, и в отрицательном направлении относительно движения подводного тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-19-10097).

ВЛИЯНИЕ ПОДЛЕДНОГО ТЕЧЕНИЯ НА ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СВПА

А. В. Погорелова, В. М. Козин

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре

Рассматривается нестационарное движение амфибийного судна на воздушной подушке (СВПА) по ледяному покрову в условиях подледного потока жидкости. Ледяной покров моделируется упругой пластиной, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. СВПА моделируется прямоугольной областью давления, движущейся с переменной скоростью $u(t)$. В начальный момент времени СВПА покоится. Совмещенная с движущейся нагрузкой система координат $Oxuz$ расположена таким образом, что ось Ox совпадает с направлением движения СВПА, ось Oz направлена вертикально вверх. Вектор скорости потока жидкости имеет координаты $(U, V, 0)$ и не зависит от времени.

Задача решается с использованием интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Полученные несобственные интегралы вычисляются методом Гаусса с использованием 40 узлов. Получено, что течение, направленное поперек движения судна, слабо влияет на волновое сопротивление СВПА. Если течение направлено вдоль движения судна, то оно может привести к существенному изменению волнового сопротивления. Наибольшее влияние на волновое сопротивление продольное течение оказывает в режимах ускоренного и замедленного движения судна, для малой глубины водоема, для малой толщины льда и при движении на околокритических скоростях. Для случая равномерного движения судна с постоянной скоростью получено, что значения критических скоростей сдвигаются в сторону больших значений при наличии течения, сонаправленного движению судна, и в сторону меньших значений для противоположно направленного течения.

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Н. С. Попов

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова, Якутск

В последнее время активно изучаются нелокальные краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с интегральными условиями на боковой границе [1]. Отметим, что исследования для псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка с интегральным условием на боковой границе рассматривались в работе [2].

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ , Q – цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $S = \Gamma \times (0, T)$, $f(x, t)$ заданная в цилиндре $\overline{Q}$ функция, $u_0(x)$, $u_1(x)$ – на множестве $\overline{\Omega}$ функции, $N(t)$ – при $t \in [0, T]$ и $K(x, y, t)$ – при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$.

Ищется функция $u(x, t)$, являющаяся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu \equiv (Au)_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad Au = \int_0^t N(t - \tau)u(x, \tau) d\tau, \quad (1)$$

и такая, что для нее выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K(x, y, t)u(y, t)dy|_{(x,t) \in S}. \quad (3)$$

Методами перехода к нагруженному уравнению с однородными краевыми условиями, продолжения по параметру доказывается регулярная разрешимость краевой задачи (1)–(3) [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания НИР на 2017-2019 гг. (код проекта 1.6069.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А. И. *Задачи с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений*. ДАН. 2014. Т. 457, № 2. С. 152–156.
2. Popov N. S. *Solvability of a Boundary Value Problem for a Pseudoparabolic Equation with Nonlocal Integral Conditions*. Differential Equations. 2015. V. 51, № 3. P. 362–375.
3. Попов С. В. *О разрешимости нелокальных краевых задач для интегродифференциальных уравнений склеивания*. Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 4. С. 76–85.

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЖЕСТКОГО И ПОЛУЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЙ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

Т. С. Попова

Северо-Восточный федеральный университет, Якутск

В работе рассмотрена задача о равновесии двумерного упругого тела, имеющего жесткие и полужесткие тонкие включения. Предполагается, что включения имеют общую точку, целью исследования является анализ сопряжения включений в этой точке. Исследованы два случая: для цельного тонкого включения, состоящего из жесткой и полужесткой части, а также включения с изломом в точке сопряжения. Доказано существование решения задачи равновесия в обоих случаях, приведены различные эквивалентные формулировки. В частности, найдены условия сопряжения в точке стыка. Рассмотрена задача об отслоившемся тонком включении. Постановка задачи предполагает наличие трещины, на одном из берегов которой расположено тонкое включение. На берегах трещины задано граничное условие, имеющее вид неравенства и исключающее взаимное проникание берегов трещины [1–3]. Обоснован предельный переход при стремлении к нулю и бесконечности параметра жесткости для полужесткого включения и проводится анализ предельных задач [4].

ЛИТЕРАТУРА

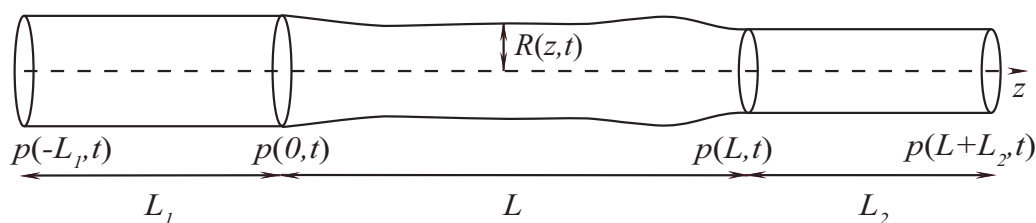
1. Faella L., Khludnev, A. M., Popova T. S. *Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies*. Mathematics and Mechanics of Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 737–750.
2. Хлуднев А. М. *Задачи теории упругости в негладких областях*. М.: Физматлит, 2010.
3. Khludnev A. M., Leugering G. R. *On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies*. Mathematics and Mechanics of Solids. 2015. V. 20, N 5. P. 495–511.
4. Khludnev, A. M., Popova T. S. *Junction problem for rigid and semi-rigid inclusions in elastic bodies*. Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86, N 9. P. 1565–1577.

ВЛИЯНИЕ СУЖЕНИЯ И РАСШИРЕНИЯ ТРУБКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ ТРУБОК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

А. Б. Порошина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Изучению устойчивости упругих трубок посвящен ряд работ в биологическом приложении [1, 2]. В основном в литературе рассматриваются течения крови как Ньютоновской жидкости в упругих трубках. Однако, большинство биологических жидкостей могут проявлять неньютоновские свойства. В данной работе численно исследовалось влияние сужения и расширения трубки на устойчивость течения степенных жидкостей в осесимметричной тонкостенной трубке конечной длины L , закрепленной на жестких трубках длины L_1 и L_2 .



Трехмерная система уравнений (уравнение Навье-Стокса для степенной жидкости и уравнение движения трубки) сводится к пространственно-одномерной системе дифференциальных уравнений в частных производных путем интегрирования по поперечному сечению трубки.

При протекании в цилиндрических трубках псевдопластичных жидкостей, точнее при $n < 0.611$, осесимметричные возмущения могут расти. При этом абсолютная неустойчивость бесконечно длинных трубок, при которой неустойчивость гарантированно имеет место и в трубках конечной длины, возможна только при показателе степенного закона $n < 1/3$ [3].

При изменении геометрии трубки, то есть при учете слагаемого, отвечающего за сужение и расширение трубки вдоль ее длины, область неустойчивости уменьшается

в сравнении с ранее полученными результатами. Кроме того, в работе проведен сравнительный анализ влияния числа Рейнольдса, продольного натяжения и слагаемого, отвечающего за сужение и расширение трубки, на область неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10020).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grotberg J. B., Jensen O. E. *Biofluid mechanics in flexible tubes*. Ann. Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 121–147.
2. Heil M., Hazel A. L. *Fluid-structure interaction in internal physiological flows*. Ann. Rev. Fluid Mech. 2011. V. 43. P. 141–162.
3. Веденеев В. В., Порошина А. Б. *Устойчивость упругой трубки, содержащей текучую неньютоновскую жидкость и имеющей локально ослабленный участок*. Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 2018. Т. 300. С. 42–64.

ЭВОЛЮЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ

А. В. Проскурин¹, А. М. Сагалаков²

¹Алтайский государственный технический университет, Барнаул

²Алтайский государственный университет, Барнаул

Исследования устойчивости течений электропроводящей вязкой жидкости в магнитном поле представляют значительный интерес. Такой интерес обусловлен реализацией планов по строительству ядерных и термоядерных реакторов, охлаждаемых жидкими металлами. Такие установки включают бланкеты и вспомогательные устройства: трубопроводы, клапаны, насосы. Магнитное поле оказывает существенное влияние на течение жидких металлов во всех этих устройствах, вносится ли оно намеренно (МГД-генераторы, МГД-насосы) или появляется при работе установки (бланкеты термоядерных реакторов). При движении электропроводящей жидкости могут реализовываться разные режимы течения. Нелинейные закономерности развития возмущений, обусловленные влиянием вязкости и магнитного поля, играют определяющую роль в реализации того или иного режима течения.

Мы будем исследовать возмущения вязкой электропроводящей жидкости, описываемые при помощи системы уравнений магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + St (-\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \Delta \varphi &= \nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ – скорость жидкости, $\mathbf{H}$ – внешнее магнитное поле, $Re = \frac{L_0 V_0}{\nu}$ – число Рейнольдса, $St = \frac{\sigma H_0^2 L_0}{\rho V_0}$ – число Стюарта, определяющее величину магнитных сил, σ –

электропроводность жидкости, L_0 , V_0 , and H_0 – характерные величины длины, скорости и внешнего магнитного поля. Эволюция нелинейных возмущений в областях сложной геометрии может исследоваться в помощью спектрально-элементного метода [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Proskurin A. V., Sagalakov A. M. *A spectral/hp element solver for magnetohydrodynamics*. preprint. arXiv:1707.08957. 2017.

ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИИ ВЯЗКОГО СЛОЯ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

В 1964 г. Л.В. Овсянников ввел понятие частично инвариантного решения системы дифференциальных уравнений. Он же привел примеры таких решений для уравнений газовой динамики и идеальной несжимаемой жидкости, среди которых – знаменитый вихрь Овсянникова (1995). В.О. Бытев (1971) нашел семейство частично инвариантных решений уравнений Навье-Стокса, которые описывают нестационарное движение вблизи критической точки. В докладе рассматривается еще один пример частично инвариантного решения уравнений Навье-Стокса. С его помощью описано осесимметричное решение задачи о деформации вязкого слоя, одна или обе плоских границ которого свободны (задачи А и Б соответственно). Плоский аналог этих задач был изучен автором (1997), В.А. Галактионовым и Х.-Л. Васкесом (2000) и Е.Н. Журавлевой (2016). В задаче Б сформулированы достаточные условия существования решения в целом по времени или его разрушения за конечное время. Задача А служит аналогом решения Л.В. Овсянникова уравнений Эйлера («брус под штампом», 1968). Здесь возможны три режима движения: стабилизация к состоянию покоя, разрушение за конечное время и промежуточный автомодельный режим, в котором слой неограниченно расширяется за бесконечное время. Задачи А и Б допускают три эквивалентных формулировки: в переменных Эйлера, в переменных Лагранжа и в переменных Крокко, которые первоначально были введены в теории пограничного слоя. Каждая из этих постановок удобна для той или иной цели. Так, переменные Лагранжа позволяют свести задачи со свободной поверхностью к задачам в фиксированной области. Переменные Крокко используются для редукции исходной системы третьего порядка к вырождающемуся квазилинейному параболическому уравнению второго порядка. Здесь осуществляется процедура группового расслоения исходной системы уравнений, допускающей бесконечную группу Ли, по аналогии с той, которую реализовал Л.В. Овсянников в системе уравнений Прандтля (1969).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00096).

О РАВНОВЕСИИ ДВУХ ПЛАСТИН КИРХГОФА-ЛЯВА, ЖЕСТКО СОЕДИНЕННЫХ ВДОЛЬ ОТРЕЗКА

Е. В. Пяткина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследована задача равновесия двух упругих пластин, расположенных параллельно друг другу без зазора и жестко заземленных по своим внешним краям. Пластины жестко соединены вдоль прямолинейного отрезка, не выходящего на их внешние границы. Рассмотрен случай, когда на контактной поверхности пластин действует упругая сила как в плоскости контакта, так и перпендикулярно ей [1,2]. Величина этой упругой силы характеризуется некоторым параметром, который назовем параметром повреждаемости [1]. Усилия, действующие перпендикулярно поверхности контакта, препятствуют удалению пластин относительно друг друга по толщине, но не мешают их сближению, в отличие от работы [2], где усилия, действующие между пластинками препятствуют их сближению. Найдены вариационная и дифференциальная постановки задачи и показана ее однозначная разрешимость.

Рассмотрены предельные случаи, когда параметр повреждаемости оказывается равным нулю или бесконечности. В первом случае получаем задачу контакта без трения двух пластин, жестко соединенных вдоль отрезка. Во втором случае пластины оказываются соединены друг с другом по всей поверхности контакта. Для задачи контакта без трения двух пластин найден главный член асимптотики решения вблизи одного из концов отрезка, вдоль которого соединены пластины [3,4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Khludnev A. M. *On modelling elastic bodies with defects*. Sib. Electr. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 153–166.
2. Ржаницын А. Р. *Составные стержни и пластинки*. М.: Стройиздат, 1986.
3. Bach M., Khludnev A. M., Kovtunen V. V. *Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under Singorini and friction condition*. Math. Meth. Appl. Sci. 2000. V. 23. P. 515–534.
4. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. *Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity*. ZAMM. 2012. V. 92, № 9. P. 716–730.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ МЕТАНА ИЗ ГАЗОГИДРАТНОГО ПЛАСТА ПРИ ИНЖЕКЦИИ ДВУОКИСИ УГЛЕРОДА

Г. Р. Рафикова^{1,2}, М. К. Хасанов²

¹Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

²Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

В настоящее время большое внимание уделяется проблеме поиска и разработки альтернативных источников энергии. Одними из таких источников являются природные газогидраты, потенциальные запасы метана в которых превышают величину $1.5 \cdot 10^{16}$ м³ [1–3]. Одним из последних инновационных способов извлечения метана из состава гидрата является его замещение диоксидом углерода в газогидрате [4, 5]. Преимуществами данного метода является возможность: одновременного извлечения метана из пласта и консервации углекислого газа в гидратное состояние; частичного сохранения энергозатрат в связи с выделением тепла вследствие фазового перехода; сохранения механической прочности породы в результате газозамещения [4, 5].

В работе представлена математическая модель для описания процесса вытеснения метана диоксидом углерода из метангидратного пласта. Для кинетики газозамещения предложена схема, при которой интенсивность процесса лимитируется диффузией углекислого газа через образовавшийся гидратный слой между потоком газовой смеси и гидратом метана.

В результате исследования выделено три характерных этапа процесса: начальный этап процесса характеризуется вытеснением свободного метана из пласта и началом процесса газозамещения в составе гидрата; на втором этапе извлекается метан, полученный в результате замещения метана диоксидом углерода в составе гидрата; последний этап характеризуется полным переходом гидрата метана в гидрат диоксида углерода и полным извлечением метана из газогидратного пласта. Также выявлено, что диффузионное перемешивание метана и углекислого газа оказывает влияние на время полного замещения во всем пласте только в случае низкопроницаемых сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №17-79-20001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Макогон Ю. Ф. *Газогидраты. История изучения и перспективы освоения*. Геология и полезные ископаемые Мирового океана. 2010. № 2. С. 5–21.
2. Макогон Ю. Ф. *Гидраты природных газов*. М.: Недра, 1974.
3. Шагапов В. Ш., Мусакаев Н. Г. *Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа*. М.: Наука, 2016.
4. Jung J. W., Espinoza N. D., Santamarina C. J. *Properties and phenomena relevant to CH₄-CO₂ replacement in hydrate-bearing sediments*. Journal of geophysical research. 2012. V. 115. DOI 10.1029/2009JB000812.
5. Yang J., Okwananke A., Tohidi B., Chuvilin E., Maerle K., Istomin V., Bukhanov B., Cheremisin A. *Flue gas injection into gas hydrate reservoirs for methane recovery and carbon dioxide sequestration*. Energy Conversion and Management. 2017. V. 136. P. 431–438.

ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЖИДКОСТИ С ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫМ РАСПЛАВОМ

С. А. Рашковский, С. Е. Якуш

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

Проблемы взаимодействия горячей и холодной жидкостей с существенно различными теплофизическими свойствами возникают в атомной энергетике при рассмотрении тяжелых аварий, связанных с попаданием расплава активной зоны (кориума), имеющего температуру порядка 3000 К, в воду. Известно, что при таком взаимодействии возможны взрывные режимы вскипания, приводящие к возникновению разрушительных волн давления (явление парового взрыва [1, 2]). В недавних экспериментах [3] было установлено, что высокоэнергетическое взаимодействие расплава с водой возможно не только в классическом случае, когда струя расплава поступает в глубокий объем воды, фрагментируясь в нем с образованием капель, но и в стратифицированной конфигурации, когда расплав растекается по дну бассейна. Иницирование взрыва происходит вследствие коллапса паровой пленки, приводящего к прямому контакту расплава с водой.

В работе рассматривается модель трехфазной среды (вода, пар и горячие частицы). Вода и горячие частицы считаются несжимаемыми, сжимаемость среды вызвана сжимаемостью пара в паровых пузырях, скорости воды и пара считаются одинаковыми. Решена задача о распространении волны давления, вызывающей взаимное движение парогазовой среды и горячих капель расплава, обладающих высокой инерционностью. В качестве механизмов, интенсифицирующих теплообмен за фронтом волны давления, рассмотрены коллапс паровой пленки, а также фрагментация капель расплава, увеличивающая удельную площадь поверхности теплообмена, однако снижающая время скоростной релаксации частиц. Данная модель является упрощенной по сравнению с полной трехфазной трехскоростной моделью механики многофазных сред, позволяя провести анализ относительной роли различных факторов в переходе от медленного вскипания («термическая дефлаграция») к взрывным режимам. Модель реализована численно в одномерной постановке. Проведены расчеты для равномерного начального распределения капель расплава по пространству в области предварительного перемешивания, получены профили давления и объемных долей фаз, продемонстрирован переход к взрывному вскипанию жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 18-19-00289).

ЛИТЕРАТУРА

1. Berthoud G. *Vapor explosion*. Annual Rev. Fluid Mech. 2000, V. 32. P. 573–611.
2. Meignen R., Raverdy B., Buck M., Pohlner G., Kudinov P., Ma W., Brayer C., Piluso P., Hong S.W., Leskovar M., Uršič M., Albrecht G., Lindholm I., Ivanov I. *Status of steam explosion understanding and modelling*. Annals of Nuclear Energy. 2014. V. 74, P. 125–133.
3. Kudinov P., Grishchenko D., Konovalenko A., Karbojian A. *Premixing and steam explosion phenomena in the tests with stratified melt-coolant configuration and binary oxidic melt simulant materials*. Nucl. Engineering and Design. 2017. V. 314. P. 182–197.

РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ДИФфуЗОРЕ С МАЛЫМИ УГЛАМИ РАСКРЫТИЯ

А. И. Решмин, С. Х. Тепловодский, В. В. Трифонов

НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва

В работе исследовалось явление ламинарно-турбулентного перехода в диффузоре в зависимости от угла раскрытия и степени расширения канала (отношение входного диаметра диффузора к выходному).

При расчете использовалась трехпараметрическая модель турбулентности [1]. Расчеты проводились при числах Рейнольдса на входе в канал от 1000 до 10000. На вход в канал подавалось либо развитое турбулентное течение, либо течение с равномерным профилем скорости с разной степенью турбулентности. Угол раскрытия варьировался от 0.01° до 4° , при этом течение в канале происходило при положительном, отрицательном или нулевом продольном градиенте давления. Полученные при расчете характеристики течения на выходе диффузора и различных сечениях вдоль диффузора сравнивались с экспериментальными данными [2].

При заданном угле раскрытия и степени расширения течение в диффузоре зависит только от локального числа Рейнольдса и не зависит от условий на входе, пока эти условия достаточны для формирования турбулентного течения. Было показано, что при увеличении длины диффузора турбулентное течение затухает и плавно переходит в ламинарное.

Получены зависимости критического числа Рейнольдса от угла раскрытия для диффузоров с разной степенью расширения 6.8, 3.4, 2.5 и 1.65.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. *Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности*. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1978. № 3. С. 13–25.
2. Reshmin A. I., Trifonov V. V., Teplovodskii S. Kh. *Turbulent flow in a conical diffuser with a small divergence angle at Reynolds numbers less than 2000*. ASME. 2014. FEDSM2014–21597.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, АССОЦИИРОВАННОЙ С УРАВНЕНИЯМИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

О. С. Розанова, М. К. Турцынский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Рассмотрим уравнения идеального политропного газа в равномерно вращающейся системе координат (простейшую модель динамики атмосферы):

$$\varrho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathcal{L} \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \quad \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad \partial_t S + (\mathbf{u} \cdot \nabla S) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}$, ϱ , p и S – двумерный вектор скорости, плотность, давление и энтропия, $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$. Уравнение состояния имеет вид $p = C(S)\rho^\gamma$, $\gamma \geq 1$ – показатель адиабаты, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}$, $l = \operatorname{const} > 0$ – параметр Кориолиса. Если предположить, что $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = Q(t)\mathbf{x}$, $Q(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, то с системой (1) можно несколькими способами связать матричную систему уравнений

$$\dot{R} + RQ + Q^T R + (\gamma - 1) \operatorname{tr} Q R = 0, \quad \dot{Q} + Q^2 + lLQ + 2c_0 R = 0, \quad (2)$$

где $R = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2}B(t) \\ \frac{1}{2}B(t) & C(t) \end{pmatrix}$, $c_0 = \operatorname{const}$. Исследование подобного вида решений (решений с однородной деформацией) для уравнений газовой динамики было начато в [1] в лагранжевых координатах для $l = 0$ в пространственной размерности, равной трем, и породило большую серию работ (см. обзор [2]). В последнее время к подобным задачам возрос интерес, причем многие результаты переоткрываются (например, [3]).

Система (2) имеет однопараметрическое (с параметром b^*) семейство особых точек, отвечающее вихревому движению: $a = d = 0$, $b = -c = b^*$, $A = C = A^* = b^*(b^* - l)/2c_0$, $B = 0$. При $l = 0$ эти положения равновесия являются неустойчивыми. Мы показываем, что вращение системы координат оказывает стабилизирующее влияние на вихревые движения с однородной деформацией. А именно, при $k = \frac{b^*}{l} \in (0, 1)$ положение равновесия устойчиво по Ляпунову при всех $\gamma \geq 1$, при $k \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right]$ оно неустойчиво, а в оставшейся паре полуинтервалов устойчивость зависит от γ : при $\gamma = 2$ положение равновесия устойчиво при $k \in \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)$, а при $\gamma \rightarrow 1$ и $\gamma \rightarrow \infty$ этот интервал стремится к $(0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Новое решение уравнений гидродинамики*. ДАН СССР. 1956. Т. 111. С. 47–49.
2. Борисов А. В., Мамаев И. С., Кишин А. А. *Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов*. Нелинейная динам. 2008. Т. 4, № 4. С. 363–407.

3. Sideris T. C. *Global existence and asymptotic behavior of affine motion of 3D ideal fluids surrounded by vacuum*. Arch. Ration. Mech. Anal. 2017. V. 225. P. 141-176.

ОБРАТНАЯ БЕЗФАЗОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. Г. Романов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается система уравнений Максвелла, отвечающая периодическим по времени колебаниям с временным фактором $e^{-i\omega t}$.

$$\operatorname{rot} H = -i\omega \varepsilon(x) E, \quad \operatorname{rot} E = i\omega \mu_0 H. \quad (1)$$

В этих уравнениях коэффициент диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$ представляет собой гладкую положительную функцию всюду в $\mathbb{R}^3$, совпадающую с положительной постоянной ε_0 вне некоторой компактной выпуклой области Ω , а носитель разности $\varepsilon(x) - \varepsilon_0$ содержится строго внутри Ω , $\mu_0 > 0$ – постоянная магнитная проницаемость. Постоянные ε_0 и μ_0 предполагаются известными.

Пусть $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – значение индекса рефракции в однородной среде. В однородной среде существует решение уравнения (1) типа плоской волны

$$E^0(x, \omega, \nu, j^0) = e^{i\omega n_0 x \cdot \nu} j^0, \quad H^0(x, \omega, \nu, j^0) = e^{i\omega n_0 x \cdot \nu} (j^0 \times \nu) n_0 / \mu_0,$$

в котором ν и j^0 – произвольные единичные векторы, ортогональные друг другу. Это решение описывает гармоническую волну, распространяющуюся из бесконечности в направлении ν и поляризованную в направлении j^0 . Решение уравнения (1) в неоднородной среде имеет вид

$$\begin{aligned} E(x, \omega, \nu, j^0) &= E^0(x, \omega, \nu, j^0) + E_{sc}(x, \omega, \nu, j^0), \\ H(x, \omega, \nu, j^0) &= H^0(x, \omega, \nu, j^0) + H_{sc}(x, \omega, \nu, j^0), \end{aligned}$$

в котором совокупность векторов (E_{sc}, H_{sc}) описывает волну, рассеянную на неоднородности, и удовлетворяет условиям излучения при $|x| \rightarrow \infty$.

Пусть S – граница области Ω и $S^+(\nu) = \{x \in S \mid n(x) \cdot \nu > 0\}$, где $n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к S точке x . Изучается

Обратная задача. Найти $\varepsilon(x)$ в Ω по заданной функции

$$f(x, \omega, \nu, j^0) = |E(x, \omega, \nu, j^0) + E(x, \omega, -\nu, j^0)|^2, \quad \forall \nu \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S^+(\nu), \quad \omega \geq \omega_0 > 0.$$

Основной результат работы состоит в сведении этой задачи к известной обратной кинематической задаче. Это открывает путь к ее конструктивному решению.

Результаты работы опубликованы в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-17-00120).

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г. *Обратные задачи без фазовой информации, использующие интерференцию волн*. Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 494–504.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О СКЛЕЙКЕ УПРУГИХ ТЕЛ

Е. М. Рудой^{1,2}, А. И. Фурцев¹

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается задача о равновесии двух тел, соединенных (склеенных) друг с другом вдоль части их общей границы. На остальной части имеется трещина отслоения. К обоим телам приложены поверхностные нагрузки. Предполагается, что слой склейки является «интерфейсом пружинного типа», моделирующим мягкий и тонкий материал между телами. Накладываются условия непроникновения и трения как в зоне склейки, так и на трещине. Условие непроникновения исключает взаимное проникновение тел друг в друга. Строится математическая модель, описывающая равновесие структуры, и обосновывается ее корректность (существование и единственность решения вариационной и краевой задач).

В работе также выводится формула для производной функционала энергии по длине трещины. Показано, что производная может быть представлена в виде независимого от пути интегрирования J -интеграла.

Наконец, для численного решения задачи равновесия строится итерационный алгоритм, основанный на методе декомпозиции области и алгоритме Удзавы. Исследуется сходимость алгоритма. Численные эксперименты показывают эффективность предложенного метода и важность условия непроникновения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10007).

НОВЫЕ АНАЛОГИ УРАВНЕНИЙ ЧАПЛЫГИНА

А. И. Рылов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассмотрим уравнения на плоскостях годографа и потенциала [1]

$$\varphi_z + k\psi_\theta = 0, \quad \varphi_\theta - \psi_z = 0, \quad \left(z = \int \frac{\rho}{q} dq, k = \frac{1 - M^2}{\rho^2}\right), \quad (1)$$

$$kz_\varphi + \theta_\psi = 0, \quad z_\psi - \theta_\varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь φ – потенциал, ψ – функция тока, q, θ – модуль и угол наклона вектора скорости, ρ – плотность.

Система (1) имеет бесконечно много частных решений и, согласно [2], каждому из этих решений отвечает своя однородно-дивергентная система (аналог уравнений Чаплыгина), при этом в указанный список входит и сама система (1). В частности, широко известному течению типа потенциальный вихрь как раз и отвечает система (1), в то время как не менее известному течению от источника отвечает также отмеченный в [2] другой аналог уравнений Чаплыгина, в которых вместо z используется $R = R(z) = \int k dz$

$$k\psi_R - \varphi_\theta = 0, \quad \varphi_R + \psi_\theta = 0 \quad (3)$$

$$k\theta_\varphi - R_\psi = 0, \quad \theta_\psi + R_\varphi = 0 \quad (4)$$

Итак, система (3), также как и система (1) порождает бесконечно много новых и отличных от [2] частных решений и, согласно [2], каждому из этих решений отвечает свой аналог уравнений Чаплыгина.

Отметим также принципиальное отличие очевидных решений систем (1) и (3). В первом случае таковыми являются $\varphi = \theta, \psi = z$, а во втором: $\varphi = R, \psi = -\theta$.

Приведенные выше факты допускают различное развитие, что будет учтено в дальнейшем. Остается открытым и вопрос о связи различия между системами (1) и (3) и неоднозначностью решениями уравнений газовой динамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.: Наука, 1981.
2. Рылов А. И. *Уравнения С. А. Чаплыгина и бесконечное множество однородно-дивергентных уравнений газовой динамики*. ДАН. 2002. Т. 383, № 1. С. 34–36.

ИССЛЕДОВАНИЕ СУШКИ И ЗАМОРОЗКИ СФЕРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. В. Сальников, А. В. Федосеев, Г. И. Сухинин

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Капиллярно-пористые материалы очень часто встречаются в природе и в промышленности. В список подобных материалов входят: почвенные, глинистые минералы, дерево, фрукты, овощи, а также различные технологические продукты. Пористая среда представляет собой твердую матрицу, в которой материал самого минерала чередуют пустоты или поры. Эти поры всегда заполнены влагой, водяным паром или воздухом. Влагосодержание в пористых средах определяет свойства пористого тела, его механические и термофизические свойства, такие как плотность, пластичность, вязкоупругость, набухание, растрескивание и тому подобное. Во время сушки или замораживания в таких телах происходят комплексные процессы тепло- и массообмена [1]. Их ход зависит в главной степени от физико-химического состава пористого тела.

При нагреве пористых тел внутри них происходит тепло- и массообмен. Эффект диффузии массы подобных материалов намного меньше эффектов температуропроводности. Поэтому диффузия массы значительно отстает от изменений в распределении тепла. Это дает возможность изучить изменение температуры в результате процесса теплообмена, где тепло распространяется только через теплопроводность. Распределение тепла в данном случае можно описать уравнением теплопроводности [2]:

$$c_{eff}\rho\frac{\partial T}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\lambda\operatorname{grad}(T)) \pm q, \quad (1)$$

где $c_{eff} = c_{eff}(T)$ – эффективная теплоемкость, $\lambda = \lambda(T)$ – температуропроводность, $\rho = \rho(T)$ – текущая плотность материала, q – внешний поток тепла.

Цель данного исследования – определение численными методами распределения температуры в сферическом капиллярном пористом теле, где учитываются процессы плавления и замораживания. Решение включает нелинейное распределение температуры для каждого момента времени при нагреве и охлаждении тела при заданной температуре поверхности, равной температуре внешней среды.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Идентификатор проекта: RFMEFI60417X0193.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luikov A. V. *Mass and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying. Advances in Heat Transfer*. Advances in Heat Transfer. 1997. Т. 12. С. 119–203.
2. Deliiski N. T. *Transient Heat Conduction in Capillary Porous Bodies, Convection and Conduction Heat Transfer* InTech, 2011.

О РАЗЛОЖЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

И. Е. Светов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Известно [1], что в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет место однозначное разложение любого симметричного m -тензорного поля $\mathbf{u} \in H^k(S^m(\Omega))$ на сумму соленоидального и потенциального полей:

$$\mathbf{u} = {}^s\mathbf{w} + d\mathbf{v}; \quad \operatorname{div} {}^s\mathbf{w} = 0; \quad \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

где ${}^s\mathbf{w} \in H^k(S^m(\Omega))$ и $\mathbf{v} \in H^{k+1}(S^{m-1}(\Omega))$. Здесь через $H^k(S^m(\Omega))$ обозначено пространство симметричных m -тензорных полей, компоненты которых принадлежат пространству Соболева $H^k(\Omega)$; d – оператор внутреннего дифференцирования (поле $d\mathbf{v}$ является потенциальным); div – оператор дивергенции (поле ${}^s\mathbf{w}$ является соленоидальным при условии $\operatorname{div} {}^s\mathbf{w} = 0$).

В пространстве $\mathbb{R}^2$ автором ранее было получено более детальное разложение [2] на сумму соленоидального и m потенциальных полей, каждое из которых строится с использованием комбинации операторов внутреннего дифференцирования и ортогонального внутреннего дифференцирования, действующей на функцию.

В данной работе предлагается вариант разложения симметричных m -тензорных полей в $\mathbb{R}^3$ на сумму соленоидальных и потенциальных полей, каждое из которых строится с использованием комбинации операторов внутреннего дифференцирования и операторов, являющихся обобщениями оператора ротора, действующей на функцию. Продемонстрируем на примере трехмерных векторных (1-тензорных) полей. Введем операторы $\text{rot}_i : H^{k+1}(\Omega) \rightarrow H^k(S^1(\Omega))$, $i = 1, 2, 3$, которые действуют на функции по правилам: $\text{rot}_1 \varphi = \text{rot}(\varphi, 0, 0)$, $\text{rot}_2 \varphi = \text{rot}(0, \varphi, 0)$, $\text{rot}_3 \varphi = \text{rot}(0, 0, \varphi)$. Таким образом разложение (1) трехмерного векторного поля $\mathbf{u} \in H^k(S^1(\Omega))$ может быть переписано в виде суммы трех соленоидальных и одного потенциального полей, каждое из которых строится с использованием одной функции

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \text{rot}_i \varphi_i + d\varphi_4; \quad \varphi_i \in H^{k+1}(\Omega), \quad i = 1, \dots, 4; \quad \varphi_4|_{\partial\Omega} = 0.$$

Полученные разложения представляют как фундаментальный, так и прикладной интерес.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-51-12008-НННО_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарафутдинов В. А. *Интегральная геометрия тензорных полей*. Новосибирск: Наука, 1993.
2. Derevtsov E. Yu., Svetov I. E. *Tomography of tensor fields in the plain*. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Application. 2015. V. 3, № 2. P. 24–68.

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

С. И. Сенашов, О. В. Гомонова, И. Л. Савостьянова

Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск

В работе сделан обзор основных результатов, которые получены авторами при изучении уравнений пластичности с помощью симметрий и законов сохранения с 1975 г. по настоящее время.

Начало применения точечных симметрий в решении уравнений механики сплошных сред заложил Л. В. Овсянников. Основываясь на фундаментальных трудах С. Ли, он разработал эффективные методы, которые позволили исследовать и решать уравнения МСС. В теории пластичности точечные симметрии впервые использовал Б. Д. Аннин [1] для построения точных решений. Позднее в работах [1, 2] эти методы были использованы для построения новых классов точных решений уравнения пластичности. Авторами работ [3, 4] было показано, как можно «деформировать» одно точное решение уравнений пластичности в другое, при этом получая новые классы точных решений. Вычисление законов сохранения для дифференциальных

уравнений пластичности [5] дало возможность решить основные краевые задачи для двумерных уравнений идеальной пластичности. В настоящее время они используются для нахождения границы между упругой и пластической зоной при решении упруго-пластических задач [6, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. *Групповой анализ уравнений упругости и пластичности*. Новосибирск: Наука, 1985.
2. Сенашов С. И. *Пластическое течение среды Мизеса со спирально-винтовой симметрией*. ПММ. 2004. Т. 68, № 1. С. 150–154.
3. Senashov S. I., Yakchno A. N. *Deformation of characteristic curves of the plane ideal plasticity equations by point symmetries*. Nonlinear analysis. 2009. V. 71. P. 1274–1284.
4. Senashov S. I., Yakchno A. N. *Reproduction of solutions for bidimensional ideal plasticity*. Journal of Non-Linear Mechanics. 2007. V. 42. P. 500–503.
5. Senashov S. I., Vinogradov A. M. *Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity*. Proc. of Edinb. Math. Soc. 1988. V. 31. P. 415–439.
6. Senashov S. I., Gomonoova O. V. *Construction of elastoplastic boundary in problem of tension of a plate weakened by holes*. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2019. V. 108. P. 7–10.
7. Senashov S. I., Cherepanova O. N., Kondrin A. V. *Elasto-plastic bending of a beam*. Journal of Siberian Federal University. Math and Physics. 2014. V. 7, №2. P. 203–208.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СМЕСИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ И ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ СУФФОЗИИ

А. Н. Сибин

Алтайский государственный университет, Барнаул

Процесс эрозии почвогрунтов имеет большое значение при решении прикладных задач в сельском хозяйстве: ирригация и дренаж сельскохозяйственных полей [1] и процесс внутренней эрозии, сопутствующий каналному орошению почвогрунтов [2]. Процесс эрозии необходимо учитывать в исследованиях, связанных с прогнозом распространения загрязнений, фильтрацией вблизи водохранилищ и других гидротехнических сооружений [3]. Более того, аналогичные проблемы, связанные с процессом эрозии грунта, возникают и в других областях, включая добычу нефти и газа [4].

В работе рассматривается математическая модель изотермической внутренней эрозии грунта без учета деформации пористой среды. При достижении определенной величины скорости фильтрации происходит вынос частиц грунта из области течения. В качестве математической модели используются уравнения сохранения массы для воды, подвижных твердых частиц и неподвижного пористого скелета, а также

аналог закона Дарси для воды и подвижных твердых частиц и соотношение для интенсивности суффозионного потока. Подвижные частицы грунта рассматривались как отдельная фаза, имеющая свою скорость фильтрации, которая определяется в ходе решения задачи [5]. Данное предположение позволило построить замкнутую модель. Предложен алгоритм численного решения начально-краевой задачи фильтрации грунтовых вод с учетом внутренней эрозии грунта и проведены тестовые численные расчеты. Результаты расчетов хорошо коррелируют с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vieira D. A. N., Dabney S. M. *Modeling edge effects of tillage erosion*. Soil Tillage Research. 2011. V. 111, № 2. P. 197–207.
2. Wilson G. *Understanding soil-pipe flow and its role in ephemeral gully erosion*. Hydrol Process. 2011. V. 25, P. 2354–2364.
3. Einstein H. A. *Der Geschiebetrieb als wahrscheinlichkeits Problem*. Zurich: Mitt. d. Versuchsanstaltf Wasserbau, Eidg. T. H., 1937.
4. Wang J., Walters D. A., Settari A., Wan R. G. *Simulation of cold heavy oil production using an integrated modular approach with emphasis on foamy oil flow and sand production effects*. 1st Heavy Oil Conference 2006.
5. Papin A. A., Sibin A. N. *Model isothermal internal erosion of soil*. J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722. P. 1–8.

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СЖАТИИ ПЛОСКОГО ИЛИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОРОУПРУГОГО СЛОЯ

С. С. Сизова¹, С. В. Головин²

¹Новосибирский государственный университет

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Большинство современных моделей гидроразрыва пласта (ГРП) основаны на предположении об упругости породы и не учитывают пороупругих эффектов. Однако теоретические расчеты показывают, что пороупругость оказывает существенное влияние на давление раскрытия трещины, утечки в пласт и, как следствие, на длину трещины. В частности, фильтрационные утечки жидкости гидроразрыва меняют напряжение в пласте, что приводит к дополнительному обратному напряжению на стенке трещины, которое необходимо преодолеть для раскрытия трещины. Оценка величины обратных напряжений в зависимости от зоны фильтрации, геометрии задачи и параметров пласта является целью настоящей работы.

Обратное напряжение формально определяется в данной работе в терминах напряжений, генерируемых в упругом образце с фиксированными границами под действием заданной объёмной силы, совпадающей с вкладом порового давления в напряжения. Вычисление описанных напряжений на границе области позволяет выделить

вклад обратного напряжения в давление внутри трещины и оценить его величину в сравнении с напряжениями, необходимыми для преодоления упругости пласта.

Данная задача решается точно для двух модельных заданных геометрий: плоской и цилиндрической. В первом случае рассматривается сжатие плоского конечного или бесконечного слоя под действием давления жидкости с одной стороны слоя. В цилиндрической геометрии рассматривается задача о сжатии ограниченного или бесконечного пространства с цилиндрическим отверстием, нагруженным давлением заполняющей его жидкости [1]. Внешнее давление может быть равномерным или иметь различные напряжения по двум ортогональным направлениями.

Во всех случаях получены точные формулы для обратного напряжения в терминах интегралов от порового давления. Данные точные формулы позволяют трактовать обратное напряжение как некоторое усреднение порового давления внутри пласта, что дает возможность строить приближенные формулы для вычисления обратного напряжения без точного моделирования процесса фильтрации. На основании введенного безразмерного параметра, характеризующего скорость фильтрации в пороупругой среде, даны оценки величины обратного напряжения в сравнении с прикладываемым давлением жидкости [2]. Показано, что для физических величин, характерных для нефтесодержащих горных пород, время перехода в режим существенного влияния обратного напряжения может составлять несколько минут, что говорит о важности учета обратного напряжения при моделировании процесса гидроразрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (код проекта 14.W03.31.0002)

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Cheng *Poroelasticity*. Springer, 2015.
2. O. Coussy. *Poromechanics*. John Wiley & Sons, 2004.

О КАНОНИЧЕСКОМ ВИДЕ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМОДЕЛЕЙ РАНГА 2 УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Д. Т. Сираева

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова ОСП УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа [1]

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad Dp + \rho f' \operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad (1)$$

где $t, \vec{x} = (x, y, z)$ – независимые переменные; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ – градиент;

$$D = \partial_t + (\vec{u} \cdot \nabla)$$

является оператором полного дифференцирования; $\vec{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости; ρ – плотность; p – давление; S – энтропия;

$$p = f(\rho) + h(S) \quad (2)$$

представляет собой уравнение состояния специального вида. Из (2) определяется энтропия S . Последнее уравнение системы (1) может быть записано следующим образом:

$$DS = 0.$$

Уравнения (1) инвариантны относительно группы преобразований, допускающих 12-мерную алгебру Ли. Оптимальная система неподобных подалгебр для 12-мерной алгебры Ли построена в работе [2]. По подалгебрам оптимальной системы можно построить инвариантные подмодели, позволяющие найти точные решения исходных уравнений (1). Исследуемые системы уравнений необходимо записывать в виде, максимально упрощающем их интегрирование. Таким может быть вид, называемый каноническим. С помощью представлений решений для подмоделей 11-мерной алгебры Ли [3] и алгоритма, описанного в работе [4], построены инвариантные подмодели ранга 2 в каноническом виде рассматриваемой 12-мерной алгебры Ли. В дальнейшем полученные подмодели могут быть исследованы с групповой точки зрения [5].

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2018-0005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика*. ПММ. 1994. Т. 58, №. 4. С. 30–55.
2. Сираева Д. Т. *Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов*. Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, №. 1. С. 94–107.
3. Мамонтов Е. В. *Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики*. ПМТФ. 1999. Т. 40, №. 2. С. 50–55.
4. Хабиров С. В. *Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду*. Математические заметки. 1999. Т. 66, №. 3. С. 439–444.
5. Сираева Д. Т., Хабиров С. В. *Инвариантная подмодель ранга 2 на подалгебре из линейной комбинации переносов для модели гидродинамического типа*. Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, №. 1. С. 38–57.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОЙ ДИНАМИКИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА И ПЕРЕНОСА ПРОППАНТА (МОДЕЛЬ ENHANCED PSEUDO3D)

А. М. Скопинцев^{1,2}, А. Н. Байкин^{1,2}, П. В. Ковтуненко^{1,2}, Е. В. Донцов³

¹Новосибирский государственный университет

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

³W. D. Von Gonten Laboratories, Houston, USA

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) является основным способом интенсификации работы нефтяных и газовых скважин при освоении как традиционных, так и трудноизвлекаемых запасов углеводородов. Технология ГРП заключается в создании высокопроводимой трещины в нефтеносном пласте с помощью подаваемой под

давлением вязкой жидкости, разрушающей горную породу. Во избежание смыкания породы под влиянием сжимающего напряжения в жидкость гидроразрыва добавляются расклинивающий агент – проппант. Для обеспечения эффективной и оптимальной операции гидроразрыва пласта при разработке месторождений необходимо предварительное математическое моделирование, описывающее совокупный физический процесс распространения трещины с закачкой проппанта.

В докладе описывается развитие сопряженной модели распространения трещины гидроразрыва и транспорта проппанта с использованием псевдотрехмерной модели раскрытия трещины [1]. Гидравлика течения несжимаемой жидкости в трещине основана на законе сохранения массы в приближении тонкого слоя. Динамика геля с проппантом описывается двумерной моделью переноса с утечками чистой жидкости в пласт и использованием эффективной вязкости, растущей с увеличением концентрации проппанта.

Приводится обсуждение вопросов, связанных с численной реализацией сопряженной модели, тестированием алгоритмов (относительно аналитических моделей, расчетов на модели Planar3D), нахождению оптимальных численных схем для решения гиперболического уравнения переноса, влияния расписания закачки жидкости на образование или закупорку высокопроводящего канала в трещине. На основании проведенных численных экспериментов представлены примеры характерных сценариев взаимного влияния переноса проппанта и роста трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dontsov E. V., Peirce A. P. *An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness*. J. Engineering Fracture Mechanics. 2015. V. 142. P 116–139.

ФУРЬЕ-ПОРТРЕТЫ НЕЛИНЕЙНЫХ МОРСКИХ ВОЛН

А. В. Слюняев

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

На основе численного моделирования потенциальных уравнений Эйлера для поверхностных гравитационных волн на глубокой воде построены пространственно-временные спектры Фурье для ряда ключевых конфигураций модельных и реалистичных для морских условий волн, в том числе для условий сильной нелинейности и трехмерных волн.

Показано, что динамика когерентных нелинейных волновых групп значительно отличается от классического сценария слабо нелинейных волновых взаимодействий. Когерентные группы генерируют нерезонансные (связанные) волны, которые могут быть синхронизированы с другими линейными волнами. В силу выявленного механизма группы могут излучать волны со схожей или сильно отличными длинами, которые распространяются в том же или противоположном направлении [1].

Исследован вопрос о наличии точного аналога *бризерного* «сепаратрисного» решения нелинейного уравнения Шредингера, описывающего нарастание модуляции из бесконечно малой с последующим полным исчезновением (трактуемого в современных математических работах как решение типа «волны-убийцы», *rogue wave solution*). Предприняты особые усилия для различения ошибок численного моделирования от слабых физических эффектов и, тем самым, «численного доказательства» формулируемых утверждений. Показано, что на этапе сильной модуляции, сопровождаемом сильным уширением спектра, возбуждаются другие волны различной длины. Этот процесс предотвращает полное повторение и, в конечном итоге, приводит к квазипериодической динамике модуляций [2]. Между тем, обнаруженные эффекты довольно малы по величине, так что цикл модуляции-демодуляции может составлять тысячи периодов волн. Таким образом, полученное решение близко к бризерному.

Поскольку свободные и связанные компоненты волн оказываются довольно хорошо разнесенными в пространстве Фурье, с помощью спектральной фильтрации возможно их разделение и анализ без использования предположений о структуре волн [3], что представляет интерес в связи с актуальной задачей вероятностного описания экстремальных морских волн.

Исследования поддержаны Программой фундаментальных исследований президиума РАН «Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения».

ЛИТЕРАТУРА

1. Slunyaev A. V. *Group-wave resonances in nonlinear dispersive media: The case of gravity water waves*. Phys. Rev. E. 2018. V. 97. P. 010202.
2. Slunyaev A., Dosaev A. *On the incomplete recurrence of modulationally unstable deep-water surface gravity waves*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2019. V. 66. P. 167–182.
3. Slunyaev A., Kokorina A. *The method of spectral decomposition into free and bound wave components. Numerical simulations of the 3D sea wave states*. Geophys. Research Abstracts. 2019. V. 21. P. 546.

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ РАЗНОГО ТИПА: СЖИМАЕМОЙ И НЕСЖИМАЕМОЙ

В. А. Солонников

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Работа посвящена задаче о нестационарном движении двух вязких жидкостей: сжимаемой и несжимаемой, разделенных свободной границей и содержащихся в ограниченном сосуде. Предполагается, что на жидкости действуют массовые и капиллярные силы. Доказывается локальная по времени разрешимость задачи в пространствах Соболева-Слободецкого и устойчивость состояния покоя при малых начальных скоростях, поверхности раздела близкой к сфере и малых убывающих при $t \rightarrow \infty$ массовых силах.

О НЕКЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФфуЗИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

И. В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В работе исследуются уравнения термодиффузионной конвекции

$$\begin{aligned}u_t &= \nu u_{yy} - \frac{1}{\rho_0} p_x^*, & g(\beta_1 \theta + \beta_2 c) &= \frac{1}{\rho_0} p_y^*, \\ \theta_t + u \theta_x &= \chi (\theta_{xx} + \theta_{yy}), \\ c_t + u c_x &= D (c_{xx} + c_{yy}) + D^\theta (\theta_{xx} + \theta_{yy}),\end{aligned}\tag{1}$$

где $u = u(y, t)$ – горизонтальная компонента скорости, $\theta = \theta(x, y, t)$ – температура, $c = c(x, y, t)$ – концентрация легкой компоненты, $p^*(x, y, t) = p(x, y, t) - g\rho_0 y$ – модифицированное давление. Постоянные ν , χ , D , D^θ – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии соответственно. Система (1) описывает конвективное движение бинарной смеси под действием эффекта термодиффузии с уравнением состояния $\rho = \rho_0(1 - \beta_1 \theta - \beta_2 c)$, где β_1 , β_2 – коэффициенты теплового и концентрационного расширения, ρ_0 – средняя плотность смеси.

Проведенный анализ совместности уравнений (1) показывает, что ее решение существует, если функция температуры является полиномом по переменной x степени не выше третьей. В случае стационарного квадратичного распределения температуры возможно три разных решения. Одно из них является обобщением известного решения Бириха [1], другое представляет собой квадратуры от гипергеометрических функций. Для третьего решения, состоящего для всех искомых величин из линейных комбинаций произведений экспоненциальных и тригонометрических функций, поставлена и решена краевая задача, описывающая течение бинарной смеси между двумя твердыми стенками. Исследование обобщает результаты, полученные в [2] для случая конвекции в однородной жидкости, и расширяет результаты работы [3].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Правительства Красноярского края (грант 18-41-242005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирих Р. В. *О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости*. ПМТФ. 1966. Т. 3. С. 69–72.
2. Пухначев В. В. *Нестационарные аналоги решения Бириха*. Изв. АлтГУ: математика и механика. 2011. 1-2(69). С. 62–69.
3. Андреев В. К., Степанова И. В. *Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека-Буссинеска*. Изв. РАН: МЖГ. 2016. В. 2. С. 13–24.

ДВИЖЕНИЕ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ ПО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ЛЕДОВОМ КАНАЛЕ

И. В. Стурова, Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В настоящее время достаточно полно исследована задача о генерации волн на свободной поверхности жидкости различными динамическими возмущениями, в частности, при движении судна на воздушной подушке. Однако в полярных районах Мирового океана движение такого судна может происходить в приграничной зоне ледяного покрова или в канале, образованном в ледяном покрове при прохождении ледокола. Решение задачи о равномерном движении области внешнего давления вблизи прямолинейного края ледяного покрова по полубесконечной свободной поверхности рассмотрено ранее в [1], [2].

В данной работе представлено аналитическое решение стационарной задачи о поведении ледяного покрова и жидкости под действием локальной области внешнего давления, равномерно движущейся по свободной поверхности между двумя полубесконечными ледовыми пластинами (ледовый канал). Задача решается в линейной постановке, жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, а ее движение – потенциальным. Ледяной покров моделируется тонкой изотропной вязкоупругой пластиной, плавающей на поверхности жидкости постоянной глубины. Решение строится с помощью преобразования Фурье и метода Винера-Хопфа. При различных скоростях движения нагрузки: докритических и сверхкритических относительно минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове, определены вертикальные смещения свободной поверхности и ледяного покрова, деформации ледовых пластин, а также волновое сопротивление, действующее на движущееся судно. Показано, что при некоторых значениях скорости движения, толщины льда и величины действующего давления возможно разрушение ледяного покрова вблизи кромки. Особое внимание уделено характеристикам краевых волн, существование которых в данной задаче было показано в [3]. Отмечается, что влияние ледового канала на волновое сопротивление судна проявляется не только вблизи критической скорости, но и при докритических режимах, где образуются краевые волны перед нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sturova I. V., Tkacheva L. A. *The motion of pressure distribution over a free surface near the edge of ice sheet*. Journal of Physics: Conference Series: Earth and Environmental Science. 2018. V. 193. P. 1–7. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/193/1/012065>
2. Ткачева Л. А. *Волновые явления при движении нагрузки по свободной поверхности жидкости вдоль кромки ледяного покрова*. ПМТФ (в печати).
3. Марченко А. В. *Резонансное взаимодействие волн в ледовом канале*. ПММ. 1997. Т. 61. № 6. С. 963–974.

ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ НАД КРЫЛОМ САМОЛЕТА И УПРАВЛЕНИЕ ИМ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ НЕСУЩИХ СВОЙСТВ

В. Г. Судаков, А. В. Воеводин, Е. Е. Мамонова

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского,
Жуковский*

В настоящей работе рассмотрено вихревое течение над крылом магистрального самолета в посадочной конфигурации, возникающее при относительно больших углах атаки. Исследован диапазон режимов, когда зависимость подъемной силы от угла атаки носит нелинейный характер, включая режимы с максимальной подъемной силой. Задача решалась численно в рамках решения уравнений Рейнольдса при числе Маха набегающего потока 0.2 и числах Рейнольдса (посчитанным по средней аэродинамической хорде крыла), соответствующих трубным экспериментам ($Re=3$ миллиона) и полетным условиям ($Re=16$ миллионов). Для этого была построена многоблочная структурированная сетка с 100 миллионами расчетных ячеек.

Детально изучены характеристики вихревых структур и отрывов, возникающих над крылом. При разных условиях отрывы могут наблюдаться: в области разрыва предкрылка для установки пилона, на стыке крыла с фюзеляжем, на законцовке крыла, на предкрылке и закрылке.

В работе рассмотрены пассивные и активные методы управления обтеканием, способные повлиять на вихревые структуры над крылом самолета. В качестве пассивных методов рассмотрены механические вихрегенераторы, устанавливаемые в разных положениях для уменьшения отрыва с поверхности крыла. Они затягивают возникновение срыва потока и, как следствие, несколько увеличивают подъемную силу крыла.

В качестве активных (энергетических) методов управления вихревыми структурами и отрывам на верхней поверхности крыла рассмотрены струйные методы. При этом струя сжатого воздуха выдувается под небольшим углом к поверхности крыла. В этом случае удастся полностью подавить отрывы в области выдува струи и существенно увеличить несущие характеристики крыла.

Проведено сравнение рассмотренных методов управления обтеканием. Показано, что механические вихрегенераторы имеют ограниченную область применимости и возможности. Струйные методы имеют более значительные перспективы и позволяют достичь большего улучшения аэродинамических характеристик.

Исследования проведены при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России (идентификатор проекта RFMEFI62817X0007).

О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПУАНКАРЕ

А. А. Талышев

Новосибирский государственный университет

При построении моделей, инвариантных относительно некоторой группы преобразований, выбираются пространства зависимых и независимых переменных, представление группы в декартовом произведении этих пространств, продолжение группы в пространство полилинейных отображений (на производные зависимых от независимых переменных) до заданного порядка, и, наконец, строится система уравнений – инвариантное многообразие в продолженном пространстве [1].

Описанный способ решения задачи для модели динамики материальных точек в случае преобразований Лоренца не проходит, потому что в качестве зависимых переменных здесь следует взять пространственные координаты материальных точек, а в качестве независимой временную переменную. Но в рамках точечных преобразований пара разноместных и одновременных событий относительно подвижной системы отсчета будет неодновременной, то есть здесь не удастся построить представление группы в выбранном пространстве. В работе [2] эту проблему удалось преодолеть в рамках преобразований Ли-Беклунда. В работе [3] предпринята попытка приближенного решения определяющей системы, построенной в [2].

В работе [4] рассматривалась задача расширения представления группы Пуанкаре с пространства независимых переменных (t, x, y, z) на зависимые переменные (полевые переменные). Показано, что для (нетривиальных расширений) векторных переменных должно быть четное число. При этом при подходящем выборе базиса переменные могут быть разбиты на независимые пары и каждая пара преобразуется как электромагнитное поле.

В настоящей работе, в частности, построен пример нелинейной системы в частных производных, допускающей группу Пуанкаре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1978.
2. Талышев А. А. *О построении инвариантных относительно группы Пуанкаре моделей динамики частиц*. Современный групповой анализ, МФТИ. 1993. С. 84–88.
3. Talyshev A. A. *On Models of Dynamics of Material Points that are Invariant with Respect to the Poincare Group*. Abstracts of the International Conference ‘Modern Treatment of Symmetries, Differential Equations and Applications (Symmetry 2019)’ dedicated to the 100th anniversary of L. V. Ovsyannikov, Thailand, Nakhon Ratchasima, January 14–18, 2019.
4. Талышев А. А. *О расширениях группы Пуанкаре*. Тезисы доклада на Международной школе-конференции «Соболевские чтения», посвященной 110-летию со дня рождения С. Л. Соболева, Россия, Новосибирск, 10–16 декабря 2018, С. 170.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЖНОЙ СЕТИ КАНАЛОВ

Е. А. Уткина^{1,2}, Д. В. Паршин^{1,2}, А. П. Чупахин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Исследование течения вязкой жидкости в сети каналов сложной геометрии имеет важное значение как для фундаментальной гидродинамики, так и для приложений в гемодинамике, гидравлике и пр. При течении крови в сети сосудов именно узлы ветвления сосудов, бифуркации, являются очень часто местами возникновения аномалий типа бляшек или церебральных аневризм. В местах изменения геометрических параметров сети сосудов (бифуркации, сужения, расширения) характерно образование вихрей, экстремумов давления, касательных напряжений.

В настоящее время вопрос о постановке адекватных краевых условий для задачи протекания вязкой жидкости через бифуркацию упругих сосудов является открытым. В качестве одного из условий выдвигается минимизация потерь энергии потока на развилке: закон Мюррея и его аналоги [1].

В работе исследуется течение жидкости через бифуркацию каналов на основе мониторинга гемодинамики, проводимого во время нейрохирургических операций [2]. Анализируются значения скорости, давления, расходов и потока энергии на бифуркациях церебральных кровеносных сосудов. Экспериментальные данные используются для 3D моделирования течения крови в сосудах с патологиями кровеносной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. Baharoglu M.I., Lauric A., Wu C., Hippelheuser J., Malek A.M. *Deviation from Optimal Vascular Caliber Control at Middle Cerebral Artery Bifurcations Harboring Aneurysms*. J Biomech. 2014 Oct 17. V. 47, №13. P 3318–3324.
2. Хе А. К., Черевко А. А., Чупахин А. П., Кривошапкин А. Л., Орлов К. Ю., Панарин В. А. *Мониторинг гемодинамики сосудов головного мозга*. ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 7–16.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ, ОДНО ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ ТРЕЩИНУ

И. В. Фанкина

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследуется задача о равновесии двух контактирующих упругих тел. Множество контакта представляет собой линию, на которой задается условие совпадения перемещений. Контактная линия для одного из упругих тел является частью края; в другом теле вдоль линии имеется трещина, выходящая на внешнюю границу под нулевым

углом. На берегах трещины задается нелинейное краевое условие, исключающее их взаимное проникание.

С помощью метода фиктивных областей доказана разрешимость контактной задачи. Рассмотрено семейство аналогичных задач равновесия, снабженных параметром, отвечающим за упругость тела без трещины. Установлена сходимость решений семейства задач при стремлении параметра к нулю и к бесконечности. Получены формулировки задач равновесия в обоих предельных случаях.

НЕЛИНЕЙНАЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

В. Е. Федоров

Челябинский государственный университет

Система уравнений Х. А. Рахматулина [1]

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \\ F_2 &= \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \\ F_3 &= \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2)}{\partial x} + m_1 \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho_2(u_1 - u_2)}{\tau} = 0, \\ F_4 &= \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2)}{\partial x} + m_2 \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\rho_2(u_1 - u_2)}{\tau} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

описывает динамику двухфазной среды в предположении конечности объемной концентрации дискретных частиц при отсутствии температурных эффектов. Здесь $\rho_i = m_i \rho_{ii}$ – средняя плотность i -й фазы, m_i , ρ_{ii} , u_i – объемная концентрация, истинная плотность, скорость и давление i -й фазы, $i = 1, 2$, $P = P(\rho_1, \rho_2)$ – давление.

В данной работе в предположении, что P – непостоянная функция, показано, что система (1) является нелинейно самосопряженной [2] с подстановкой

$$R_1 = A(tu_1 - x) + Bu_1 + C, \quad R_2 = A(tu_2 - x) + Bu_2 + D,$$

$$U_1 = At\rho_1 + B\rho_1, \quad U_2 = At\rho_2 + B\rho_2,$$

где R_1, R_2, U_1, U_2 – сопряженные функции к ρ_1, ρ_2, u_1, u_2 соответственно, определяющие формальный лагранжиан [2] $L = R_1 F_1 + R_2 F_2 + U_1 F_3 + U_2 F_4$. Здесь A, B, C, D – произвольные константы.

С помощью найденной подстановки и известных симметрий этой системы уравнений [3] нами получен ряд законов ее сохранения.

Аналогичные результаты получены для системы уравнений Т. Б. Андерсона [4] с двумя функциями давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, задание № 1.6462.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. *Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред*. Приклад. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.
2. Ibragimov N. H. *Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws*. Archives of ALGA. 2010–2011. V. 7–8. P. 1–99.
3. Федоров В. Е., Панов А. В. *Инвариантные и частично инвариантные решения системы уравнений механики двухфазной среды*. Вестник Челяб. гос. ун-та. Физика. 2011. В. 11, № 38. С. 65–68.
4. Anderson T. B. *A fluid mechanical description of fluidized beds*. Edinburgh: University of Edinburgh, 1967.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И ВЛАГОПЕРЕНОСА В ГЛИНИСТОМ ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ

А. В. Федосеев, М. В. Сальников, Г. И. Сухинин

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Промышленная сушка является одной из самых старых и технологичных операций, применяемых при производстве широкого спектра материалов. Процесс сушки можно рассматривать как процесс одновременного переноса энергии и массы, происходящий как внутри, так и снаружи материала. Для контроля процессов тепло- и массопереноса внутри пористого глинистого материала была разработана одномерная численная модель, основанная на одновременном решении уравнений переноса тепла (1) и влаги (2) [1]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}[\lambda_{eff} \cdot \operatorname{grad}(T)], \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}[D_{eff} \cdot \operatorname{grad}(U)], \quad (2)$$

Механизм распределения тепла в пористом теле может быть описан обычным уравнением теплопроводности (1), также известным как уравнение Фурье-Кирхгофа. Перенос влаги (2) в пористых материалах в большей степени определяется обычной диффузией Фика. В модели плотность $\rho(U, T)$, теплоемкость $c(U, T)$, коэффициенты теплопроводности $\lambda_{eff}(U, T)$ и диффузии $D_{eff}(U, T)$ взаимосвязаны и являются функциями локальных температуры $T(r)$ и влагосодержания $U(r)$, где r – радиальная координата. Считается, что в начальный момент времени $t = 0$, температура и влагосодержание распределены однородно по сферическому пористому телу: $T(r) = T_0, U(r) = U_0$. В качестве граничных условий на поверхности сферического тела учитывались конвективный перенос тепла в/от окружающей среды, скрытая теплота при испарении или конденсации влаги на поверхности тела.

В результате численного моделирования были рассчитаны радиальные зависимости $T(r, t)$ и $U(r, t)$ в различные моменты времени для различных начальных и

граничных условий. Полученные данные хорошо согласуются с результатами интегральной модели [2].

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Идентификатор проекта: RFMEFI60417X0193.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luikov A. V. *Mass and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying. Advances in Heat Transfer*. Advances in Heat Transfer. 1997. V. 12. P. 119–203.
2. Heydari M. Khalili K. Ahmadi Y. *Simulation of Stresses Induced by Heat and Mass Transfer in Drying Process of Clay-like Material*. Journal of Computational Applied Mechanics. 2017. V. 48 P. 171–184.

О ДВУМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ГАЗА В ГРАНУЛИРОВАННЫХ ТЕПЛОАККУМУЛИРУЮЩИХ МАТЕРИАЛАХ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

С. С. Фецов

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

Возрастающий мировой спрос на электроэнергию приводит к необходимости ее рационального использования, в связи с чем развиваются технологии аккумулирования энергии [1]. Перспективный способ хранения энергии – воздушно-аккумулирующие газотурбинные электростанции (ВАГТЭ) [2]. В этих устройствах при сжатии воздуха для его последующего хранения происходят значительные потери тепла [3], поэтому дальнейшим развитием являются адиабатические ВАГТЭ, в которых тепло сжатого воздуха сохраняется и используется при его расширении. Этого можно достичь за счет использования в ВАГТЭ накопителей тепловой энергии на основе гранулированных теплоаккумулирующих материалов (ТАМ) с фазовым переходом, в частицах которого протекают плавление либо кристаллизация без нарушения их целостности [4].

Гранулированные материалы могут моделироваться как пористые среды. В работах [5, 6] предложена и апробирована численная модель одномерных нестационарных течений газа через гранулированные ТАМ с фазовыми переходами. Эта модель базируется на методах механики гетерогенных сред [7] и является развитием результатов [8, 9], где исследовались нестационарные режимы охлаждения пористых сред с источниками саморазогрева. Для отслеживания фазового перехода используется функция, обозначающая долю расплавленного вещества по аналогии с теорией двухфазной зоны [10]. Сравнение численных расчетов с экспериментальными данными показало их хорошее совпадение.

В настоящей работе предлагается численный метод для моделирования двумерных плоских течений газа через слой ТАМ с фазовым переходом. Исследуется влияние боковых теплопотерь на процесс плавления материала. Показано, что при наличии интенсивных теплопотерь скорость фазового перехода у боковых стенок может

значительно снижаться по сравнению с центральной зоной, что приводит к искривлению границ двухфазной зоны и к неравномерному расплавлению материала внутри слоя. Кривизна этих границ зависит от коэффициента теплопроводности ТАМ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы «Дальний Восток» 2018–2020 (проект 18-5-064). Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. Луценко Н. А. за помощь при проведении исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luo X., Wang J., Dooner M., Clarke J. *Overview of current development in electrical energy storage technologies and the application potential in power system operation*. Applied Energy. 2015. V. 137. P. 511–536.
2. Ольховский Г. Г., Казарян В. А., Столяревский А. Я. *Возушно-аккумулирующие газотурбинные электростанции*. Ижевск: ИКИ, 2011.
3. Sciacovelly A., Li Y., Chen H., Wu Y., Wang J., Garvey S., Ding Y. *Dynamic simulation of Adiabatic Compressed Air Energy Storage (A-CAES) plant with integrated thermal storage – Link between components performance and plant performance*. Applied Energy. 2017. V. 185. P. 16–28.
4. Zalba S., Marin J. M., Gabeza L. F., Mehling H. *Review of thermal energy storage with phase change: materials, heat transfer analysis and applications*. Applied Thermal Engineering. 2003. V. 23. P. 251–283.
5. Левин В. А., Луценко Н. А., Фецов С. С. *Моделирование движения газа через слой гранулированного материала с фазовым переходом*. ДАН. 2018. Т. 479, № 4. С. 386–389.
6. Lutsenko N. A., Fetsov S. S. *Influence of gas compressibility on the gas flow through bed of granular phase change material*. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. V. 130. P. 693–699.
7. Нигматулин Р. И. *Основы механики гетерогенных сред*. М.: Наука, 1978.
8. Луценко Н. А. *Нестационарные режимы охлаждения пористого тепловыделяющего элемента*. Математическое моделирование. 2005. Т. 17, № 3. С. 120–128.
9. Левин В. А., Луценко Н. А. *Численное моделирование двумерных нестационарных течений газа через пористые тепловыделяющие элементы*. Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 44–58.
10. Александров Д. В., *К теории затвердевания с квазиравновесной двухфазной зоной*. Доклады Академии наук. 2000. Т. 375, № 2. С. 172–176.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫМИ РЯДАМИ С РЕКУРРЕНТНО ВЫЧИСЛЯЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Ю. Филимонов

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбу-
бург

Уральский федеральный университет, Екатеринбург

Одним из аналитических методов представления решений нелинейных уравнений в частных производных является метод специальных рядов по степеням специально выбираемых функций. Коэффициенты таких рядов находятся последовательно как решения линейных дифференциальных уравнений. При этом рекуррентность нахождения коэффициентов достигается за счет выбора базисных функций [1] (см. также раздел II в монографии [2]). Сходимость специальных рядов исследована для различных нелинейных уравнений в частных производных [3, 4, 5, 6, 7]. В работе основное внимание уделено применению специальных рядов к решению краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН № 18–1–1–8.

ЛИТЕРАТУРА

1. Filimonov M. Yu., Korzunin L. G., Sidorov A. F. *Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series*. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1993. V. 8, № 2. P. 101–125.
2. Сидоров А. Ф. *Избранные труды: Математика. Механика*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
3. Filimonov M. Yu. *Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations*. AIP Conf. Proc. 2014. V. 1631. P. 218–224.
4. Filimonov M. Yu. *Representation of solutions of nonlinear evolution equations in the form of special series with recurrent calculating coefficients*. AIP Conf. Proc. 2015. V. 1690, № 040012.
5. Filimonov M. Masih A. *Presentation of special series with computed recurrently coefficients of solutions of nonlinear evolution equations*. Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 722, № 012040.
6. Filimonov M. Yu. *Application of Method of Special Series for Representation of Solutions Describing Stationary Gas Flow*. Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 820, № 012009.
7. Filimonov M. Yu. *Representation of solutions of initial boundary value problems for nonlinear equations of mathematical physics by special series*. AIP Conf. Proc. 2018. V. 2025, № 080003.

О НЕКОТОРЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

А. В. Фурсиков

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Воронежский государственный университет

Одной из важнейших нерешенных математических проблем гидромеханики является проблема существования нелокальных гладких решений краевых задач для трехмерной эволюционной системы Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости. Ее решение позволило бы более успешно использовать математический аппарат при исследовании задач гидромеханики. Однако оказывается, что из-за ряда отличий в структуре задач управления и краевых задач, для некоторых задач управления гидродинамическими системами удается доказать существование нелокальных гладких решений. В докладе будут приведены такие примеры среди задач оптимального управления [2], точной управляемости [1] и стабилизации [3],[4].

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (грант 14.Z50.31.0037).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фурсиков А. В. *Обтекание тела вязкой несжимаемой жидкостью: краевые задачи и минимизация работы жидкости*. Современная математика. Фундаментальные направления. 2010. Т. 37. С. 83–130.
2. Фурсиков А. В., Эмануилов О. Ю. *Точная управляемость уравнений Навье-Стокса и Буссинеска*. УМН. 1999. Т. 54, № 2–3(327). С. 93–146.
3. Fursikov A. V., Shatina L. S. *Nonlocal stabilization of the normal equation connected with Helmholtz system by starting control*. Discrete and Continuous Dynamical Systems (DCDS-A). 2018. V. 38, № 3. P.1187–1242.
4. Fursikov A. V., Osipova L. S. *On the nonlocal stabilization by starting control of the normal equation generated from Helmholtz system*. Science China Mathematics. 2018. V. 61, № 11. P.2017–2032.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ ПО ПАРАМЕТРАМ В ЗАДАЧАХ О КОНТАКТЕ ПЛАСТИН И БАЛОК

А. И. Фурцев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В докладе будут изложены результаты исследования задач, описывающих контакт пластин Кирхгофа–Лява и балок Бернулли–Эйлера. Указанные задачи ставятся в областях с разрезами, на которых, в свою очередь, задаются условия контакта. Балки при этом могут служить как включениями в пластине, так и тонкими препятствиями. Соответственно считается, что искомые функции перемещений удовлетворяют либо условиям скрепления вида равенств, либо условиям непроникания вида неравенств на множестве возможного контакта.

Упругие тела и их взаимодействие характеризуются числовыми параметрами: параметром жесткости, параметром сцепления и параметром длины отслоения (множества точек, в которых перемещения тел могут не совпадать). Исследование предельных переходов по перечисленным параметрам является одним их трудных вопросов.

Контактные задачи сначала сформулированы в вариационном виде, установлена их разрешимость при фиксированных значениях параметров. Далее показана эквивалентность вариационных и дифференциальных формулировок контактных задач, в частности, найден полный набор краевых условий, выполняющихся на множестве возможного контакта. Основным результатом является исследование предельных переходов по перечисленным выше параметрам задач: доказана сходимости решений, для предельных случаев найдены вариационные и дифференциальные формулировки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17-71-10171).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фурцев А. И. *О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение*. Сиб. журн. чист. прикл. математики. 2017. Т. 17, № 4. С. 94–111.
2. Фурцев А. И. *Дифференцирование функционала энергии по длине отслоения в задаче о контакте пластины и балки*. Сиб. электрон. матем. известия. 2018. Т. 15. С. 935–949.
3. Фурцев А. И. *Задача о контакте пластины и балки при наличии сцепления*. Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 2(78). С. 105–117.

АВТОМОДЕЛЬНЫЙ УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ПОДВИЖНУЮ ГРАНИЦУ

С. В. Хабиров, С. С. Хабиров

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Одним из действенных способов интенсификации работы нефтяных и газовых скважин, а также увеличения приемистости нагнетательных скважин, является гидроразрыв пласта (ГРП). В течении ГРП в скважину подается жидкость под давлением большим, чем давление разрыва пласта, что приводит к образованию высоко проводимой трещины в породе. Во время роста трещины происходит частичная потеря жидкости гидроразрыва из-за ее фильтрации в пористую среду пласта. Рассматривается упругий режим фильтрации, который определяется линейными уравнениями состояния относительно равновесного давления p_0 для плотности, пористости и коэффициента в законе Дарси

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_\rho} \right), \quad m = m_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_m} \right), \quad \frac{k}{\mu} = \frac{k_0}{\mu_0} \left(1 + \frac{p - p_0}{K} \right).$$

Уравнение пьезопроводности

$$p_t = \varkappa [p_{xx} + \sigma p_x^2], \quad \varkappa = \frac{k_0}{\mu_0 m_0} \left(\frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K_m} \right)^{-1}, \quad \sigma = \frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K}$$

линеаризуется заменой

$$\sigma p = \ln |u(\tau)|, \quad \varkappa t = \tau.$$

Найдено семейство автомодельных решений линеаризованного уравнения с различными показателями.

На двигающейся границе трещины получено соотношение для любого автомодельного режима фильтрации

$$q_a(t) u_a(a(t) + \alpha) = C \left(u_a - e^{-\sigma E' a} \right),$$

$$u_a = \exp(\sigma(p_l - p_0)), \quad p = p_l + E' a, \quad q_a(t) = -\frac{k}{\mu} p_x(t, a(t)), \quad E' = E(1 - \nu^2)^{-1},$$

где p_l – давление жидкости в трещине, a – полуширина трещины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $E' a$ – давление упругой силы скелета, k – проницаемость, μ – динамическая вязкость жидкости, C – эмпирическая постоянная, α – начальное раскрытие.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-29-10071 мк.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хабиров С. В., Хабиров С. С. *Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу*. Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 1. С. 64–72.

МОДЕЛИ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИНЫ ПО РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

С. В. Хабиров¹, С. С. Хабиров²

¹*Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа*

²*Уфимский государственный авиационный технический университет*

При закачке жидкости в пласт при больших давлениях образуется трещина. В раскрывающейся трещине течет вязкая жидкость, которая фильтруется в пласт через подвижную границу трещины. Трещина стремится схлопнуться по закону упругой пористой среды при понижении давления в жидкости. В точной постановке задача сложна, поэтому разрабатывают приближенные модели раскрытия (схлопывания) трещины. В основе приближенной модели лежит закон сохранения массы жидкости в выделенном объеме трещины. Из закона сохранения выводится уравнения мгновенного схлопывания сечения при понижении давления. Эти уравнения определяют изменение длины трещины. Раскрытие сечения трещины, давление и расход в сечении определяются из точного простого решения уравнений движения вязкой жидкости (Навье–Стокса), условий на подвижной границе (отсутствие касательных движений, закона фильтрации Дарси и закона Гука упругой силы). В качестве простого решения обычно выбирают стационарные решения с квадратичной зависимостью от координат. Предлагается выбрать инвариантные решения в качестве простых. В результате получены различные модели раскрытия трещины в виде параболических квазилинейных уравнений второго порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-22-10071 мк).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЖЕКЦИИ ДИОКСИДА СЕРЫ В ПЛАСТ, НАСЫЩЕННЫЙ МЕТАНОМ И ВОДОЙ

М. К. Хасанов¹, М. В. Столповский²

¹*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета*

²*Уфимский государственный нефтяной технический университет*

Одним из способов снижения эмиссии двуокиси серы в атмосферу является утилизация вырабатываемого промышленными объектами диоксида серы в истощенных месторождениях газа. Поскольку при долгосрочном подземном хранении диоксида серы в виде флюида существует риск его утечки на поверхность, то рассматривается возможность перевода двуокиси серы в газогидратное состояние. В данной работе на основе уравнений механики многофазных сред [1, 2] построена математическая модель образования газогидрата диоксида серы при инъекции жидкой двуокиси серы в пористую среду, насыщенную метаном и водой. Установлено, что в зависимости от интенсивности инъекции двуокиси серы возможен как полный переход диоксида серы в газогидратное состояние на фронтальной поверхности, так и образование газогидрата двуокиси серы в протяженной зоне. Исследована зависимость предельных

значений давлений инъекции, разделяющих различные режимы протекания процесса, от проницаемости и начальной температуры пласта. Установлено, что режим с протяженной зоной образования газогидрата диоксида серы реализуется при высоких значениях давления инъекции, проницаемости и исходной температуры пласта.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-08-00967.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. *Основы механики гетерогенных сред*. М.: Наука, 1978.
2. Нигматулин Р. И. *Динамика многофазных сред*. Ч. 2. М.: Наука, 1987.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ В МОДЕЛЯХ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ МРТ

А. К. Хе^{1,2}, В. С. Ванина², А. А. Черевко^{1,2}, Д. В. Паршин^{1,2}, А. В. Чеботников¹,
А. А. Тулупов^{3,2}, А. В. Бойко⁴, А. П. Чупахин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Международный томографический центр, Новосибирск

⁴Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

В работе проводится анализ экспериментальных данных для исследования вращательно-поступательного характера течения крови в сосудах человека с помощью магнитно-резонансной томографии. Набор экспериментальных данных получен в ходе изучения течения в силиконовых моделях кровеносных сосудов с помощью МР томографа Philips Ingenia 3T с полем 3 Тл. Течение жидкости создавалось с помощью программируемого насоса CompuFlow 1000MR, позволяющего воспроизводить нестационарные профили расхода жидкости, аналогичные течению в кровеносных сосудах. Для моделирования крови использовался 40% раствор глицерина с водой. В качестве моделей были взяты трубка с закручивателем и бифуркация общей сонной артерии (Shelley Medical Imaging Technologies). Размеры данных моделей были взяты в соответствии со средними значениями сосудов человека. Для каждой модели было проведено несколько съемок, различающихся областью съемки и разрешением.

Для обработки данных МРТ было создано программное обеспечение, позволяющее визуализировать линии тока исследуемого течения, строить графики компонент поля скоростей в различных проекциях и вычислять расход через заданное сечение. По снимкам МРТ проведена сегментация и построена трехмерная геометрия области течения. Проведен численный расчет, который позволил оценить достоверность полученных выводов об экспериментальных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01156).

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. М. Хлуднев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Рассматриваются задачи равновесия упругих неоднородных тел с тонкими волокнами. Тонкие волокна могут отслаиваться от матрицы, образуя тем самым трещины. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, обеспечивающие взаимное непроникание противоположных берегов. Кроме того, предполагается, что волокна могут пересекать внешнюю границу упругого тела. Исследуются обратные задачи, в которых одним из неизвестных выступает физический параметр модели, а в качестве дополнительных данных задается информация о перемещении волокна внешней части включения. Обсуждаются вопросы разрешимости обратных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10007).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлуднев А. М. *Задачи теории упругости в негладких областях*. М.: Физматлит, 2010.
2. Khludnev A. M. *Thin inclusions in elastic bodies crossing an external boundary*. ZAMM. 2015. V. 95. № 11. P. 1256–1267.
3. Khludnev A. M., Popova T. S. *Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle*. Acta Mechanica Solida Sinica. 2017. V. 30. P. 327–333.
4. Khludnev A. M. *Rigidity parameter identification for thin inclusions located inside elastic bodies*. J. Opt. Theory Appl. 2017. V. 172. №1. P. 281–297.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА МАССОПЕРЕНОС В ПРОЦЕССАХ, РЕАЛИЗУЕМЫХ НА ГРАНИЦЕ ГАЗ-ЖИДКОСТЬ

В. Н. Хмелев, Г. А. Боброва, Р. Н. Голых, А. В. Шалунов, Г. А. Титов

Бийский технологический институт (филиал) АлтГТУ им. И. И. Ползунова

Предложена математическая модель, позволяющая определить скорость массопереноса в процессах, протекающих в системах «газ-жидкость», в зависимости от режимов ультразвукового воздействия. Модель основана на уравнениях диффузии газа в жидкости с учетом возникающих кавитационных пузырьков [1] и позволяет определить макроскопические характеристики процессов, такие как площадь поверхности взаимодействия газа и жидкости; эквивалентный объемный коэффициент массопереноса (эквивалентный коэффициент диффузии); эквивалентный коэффициент концентрационного взаимодействия, пропорциональный площади поверхности.

Путем численного анализа разработанной модели на примере процесса абсорбции установлено, что наибольшее влияние ультразвуковое воздействие оказывает на площадь поверхности взаимодействия газа и жидкости, увеличивая ее более чем в 3 раза. В то время как воздействие ультразвуковых колебаний увеличивает эквивалентный коэффициент диффузии лишь на 27 % даже при оптимальной частоте и интенсивности.

Полученные результаты означают, что, в первую очередь, необходимо равномерно озвучивать всю поверхность, на которой протекает процесс в системе «газ-жидкость» (межфазную поверхность). Для этого были разработаны волноводы с расширенной излучающей поверхностью [2]. Данные волноводы обеспечивают гораздо более равномерное озвучивание межфазной поверхности по сравнению с цилиндрическими ультразвуковыми рабочими инструментами [3]. Это достигается за счет увеличенной ширины и равномерности колебаний излучающей поверхности волноводов [2].

Разработка волноводов выполнена за счет средств гранта Президента РФ № МК-2813.2018.8.

Теоретические исследования процесса выполнены за счет средств гранта РФФИ № 17-08-00227 А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khmelev V. N., Golykh R. N., Shalunov A. V., Bobrova G. A., Kozhevnikov I. S., Zorin S. S. *Determination of optimum construction of the ultrasonic radiator for cavitation-acoustic intensification of the absorption processes by mathematical and computer modeling methods*. EDM. 2017. P. 227–232.
2. Хмелев В. Н., Боброва Г. А., Голых Р. Н. *Повышение производительности процессов в системах "газ-жидкость" методами высокоинтенсивных ультразвуковых воздействий*. Известия ВУЗов. Прикладная химия и биотехнология. 2017. Т. 7, № 4. С. 95–101.
3. Хмелев В. Н., Цыганок С. Н., Лебедев А. Н. *Исследование и разработка полуволновых пьезоэлектрических ультразвуковых колебательных систем*. Техническая акустика. 2005. № 5. С. 318–330.

О СПОСОБЕ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ЦЕРЕБРАЛЬНЫХ СОСУДОВ ИЗ СИЛИКОНА

А. В. Чеботников^{1,2}, Д. В. Паршин^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Лабораторные эксперименты в области гемодинамики играют важную роль в понимании фундаментальных основ движения крови в организме. Лабораторные эксперименты позволяют отработать множество режимов кровотока, которые невозможно отследить в клинических условиях или реализовать в экспериментах с лабораторными животными.



В мировой практике распространено применение силиконовых моделей для подобных экспериментов [1]. Ранее нами уже проводились исследования течения в силиконовых моделях сторонних производителей [2]. На данном этапе мы представляем методику изготовления силиконовых моделей в основе которой лежит метод нанесения силикона на структуру из легкоплавкого сплава и его последующее выплавление.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 17-08-01736.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frolov S. V. et al. *CFD and MRI studies of hemodynamic changes after flow diverter implantation in a patient-specific model of the cerebral artery*. Experiments in Fluids. 2018. V. 59. Issue 11. doi:10.1007/s00348-018-2635-8.
2. Chupakhin A. P. et al. *ON a haemodynamics of the brain in laboratory experiments*. XIX International conference on the methods of aerophysical research (ICMAR 2018) abstracts.

ВИХРЬ ОВСЯННИКОВА В КЛАССИЧЕСКОЙ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

А. А. Черевко^{1,2}, А. П. Чупахин^{1,2}, А. А. Янченко¹

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

Вихрь Овсянникова (особых вихрь) был открыт Л. В. Овсянниковым в [1]. Он представляет собой частично инвариантное решение относительно группы вращений $SO(3)$, действующей в пространстве координат и скоростей $\mathbb{R}^3(\vec{x}) \times \mathbb{R}^3(\vec{u})$. Это решение имеет место для широкого класса моделей механики сплошной среды и обладает интересными математическими и физическими свойствами. Ему отвечает завихренное движение потока жидкости или газа с поверхности шара. Его принципиальной особенностью является наличие поперечной компоненты скорости, закрутки потока.

В докладе дается обзор результатов по исследованным ранее моделям вихря Овсянникова и приводятся новые результаты, касающиеся свойств этого решения для уравнений релятивистской гидродинамики [2–7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. *Особый вихрь*. ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
2. Чупахин А. П. *Инвариантные подмодели особого вихря*. ПММ. 2003. Т. 67, № 3. С. 390–405.
3. Черевко А. А., Чупахин А. П. *Стационарный вихрь Овсянникова*. Препринт №1–05. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН 2005.
4. Павленко А. С. *Проективная подмодель вихря Овсянникова*. ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 3–16.
5. Golovin S. V. *Singular vortex in magnetohydrodynamics*. J. Phys. A: Math. Gen. 2005. V. 38. P. 4501–4516.
6. Черевко А. А., Чупахин А. П. *Об автомодельном вихре Овсянникова*. Труды МИАН. 2012. Т. 278. С. 276–287.
7. Chupakhin A. P., Yanchenko A. A. *Special vortex in relativistic hydrodynamics*. J. Phys.: Conference Series. 2017. V. 894. Art. 012114.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ
С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИОННЫХ И ВИХРЕВЫХ ЭФФЕКТОВА. А. Чесноков^{1,2}, Ч. Х. Нгуен²¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск²Новосибирский государственный университет

Предложена гиперболическая система уравнений, аппроксимирующая двухслойную дисперсионную модель теории мелкой воды для сдвиговых течений [1]. Использование гиперболических уравнений для моделирования эволюции поверхностных волн позволяет избежать основных трудностей численного решения дисперсионных уравнений, связанных с необходимостью обращения эллиптического оператора на каждом шаге по времени и постановки не отражающих граничных условий. Кроме того, это позволяет ускорить проведение расчетов, что особенно актуально для пространственных задач. Построение гиперболической модели, описывающей двухслойное течение с перемешиванием между слоями и учетом эффекта негидростатичности давления в нижнем слое основано на оригинальном подходе [2], состоящем в использовании дополнительных “внутренних” переменных, моделирующих дисперсионные слагаемые в исходной модели.

На основе предложенных гиперболических уравнений движения выполнено моделирование распространения и обрушения поверхностных волн. Показано, что данные уравнения правильно описывают волны Фавра (отражение равномерного потока от неподвижной стенки) в широком диапазоне чисел Фруда набегающего потока, соответствующих формированию ондулярного или монотонного бора, а также переходного режима течения. Сравнение с результатами расчета по исходным уравнениям [1] показывает сходимость решений гиперболических уравнений к соответствующим решениям дисперсионной модели. Проведен анализ стационарных решений уравнений

движения и определена асимптотика потока, приводящая к образованию квазипериодических волн с медленно расширяющейся приповерхностной турбулентной прослойкой или к формированию монотонного турбулентного бора. Выполнено моделирование течений над локальным препятствием для сверхкритического набегающего потока. При определенной высоте препятствия в его окрестности формируется область докритического течения, переходящая в сверхкритический поток в окрестности выходного сечения канала. В этом случае наглядно проявляются преимущества гиперболической модели, связанные с простотой постановки граничных условий. Более детальное изложение проведенных исследований содержится в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-01-00498).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gavriluk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A. *Spilling breakers in shallow water: applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves*. J. Fluid Mech. 2016. V. 808. P. 441–468.
2. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
3. Chesnokov A. A., Nguyen Hai Trieu *Hyperbolic model for free surface shallow water flows with effects of dispersion, vorticity and topography*. arxiv.org/abs/1901.02168

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДИФфуЗИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ ИЛИ ИСТОЧНИКОМ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Изучается модель, описывающая нелинейный диффузионный процесс в неоднородной среде с нестационарным поглощением или источником. Получены три подмодели исходной модели, обладающие различными групповыми свойствами. Найдены все инвариантные подмодели. Все существенно различные инвариантные решения, описывающие эти инвариантные подмодели, найдены либо явно, либо их поиск сводится к решению нелинейных интегральных уравнений. Например, получены: инвариантное решение, описывающее нелинейный диффузионный процесс с двумя фиксированными “черными дырами” и инвариантное решение, описывающее нелинейный диффузионный процесс с фиксированной “черной дырой” и движущейся “черной дырой”. Наличие произвольных постоянных в интегральных уравнениях, определяющих эти решения, открывает новые возможности для аналитического и численного изучения краевых задач для полученных подмоделей и, таким образом, для исходной модели нелинейного диффузионного процесса. Для инвариантных подмоделей исследованы диффузионные процессы, для которых в начальный момент времени в фиксированной точке указаны или концентрация и ее градиент, или концентрация и

ее скорость изменения. Решение краевых задач, описывающих эти процессы, сводится к решению нелинейных интегральных уравнений. Установлены существование и единственность решений этих краевых задач при некоторых дополнительных условиях. Полученные результаты могут быть использованы для изучения диффузии веществ, диффузии электронов проводимости и других частиц, диффузии физических полей, распространения тепла в неоднородной среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16-01-00446 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A. *Submodels of model of nonlinear diffusion with non-stationary absorption*. Int. J. Non-Linear Mech. 2017. V. 91. P. 86–94.
2. Chirkunov Yu. A. *Invariant submodels and exact solutions of the generalization of the Leith model of the wave turbulence*. Acta Mechanica. 2018. V. 229, № 10. P. 4045–4056.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ ЛЕЙТА ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Исследуется обобщение модели Лейта феноменологической теории волновой турбулентности. Получены базовые модели, обладающие нетривиальными симметриями. Для каждой модели найдены все инвариантные подмодели. В явном виде найдены некоторые инвариантные решения (не связанные точечными преобразованиями), описывающие инвариантные подмодели. Указан физический смысл полученных решений. В частности, с помощью этих решений описаны турбулентные процессы, для которых существуют турбулентные волны как с фиксированными волновыми числами, так и с переменными волновыми числами, которые были названы “деструктивными волнами” (“destructive waves”). Эти волны, обладающие очень большой кинетической энергией, были применены для обоснования возникновения известных “rogue waves” или, как их еще называют, “freak waves”. А именно: турбулентные “деструктивные волны” следующим образом связаны с “rogue waves” или “freak waves”.

Сильное нестационарное подводное течение во время обтекания неровностей на дне океана создает турбулентные зоны. При определенных сочетаниях характеристик этого нестационарного подводного течения и неровностей на дне океана может возникнуть подводная “деструктивная волна”, имеющая очень большую кинетическую энергию. Эта волна генерирует “rogue wave” или “freak wave” на поверхности океана. Действительность этой гипотезы может быть установлена только экспериментальными исследованиями.

На примере инвариантного решения ранга 1 показано, что поиск инвариантных решений ранга 1, которые нельзя найти явно, можно свести к решению интегральных

уравнений. Для этого решения исследованы турбулентные процессы, для которых в начальный момент времени при фиксированном значении волнового числа даны либо энергия турбулентности, и скорость ее изменения, либо энергия турбулентности, и ее градиент. При определенных условиях установлены существование и единственность решений краевых задач, описывающих эти процессы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16-01-00446 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A. *Submodels of the generalization of the Leith's model of the phenomenological theory of turbulence and of the model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous media without absorption*. J. Phys. A: Math and Theor. 2015. 395501. V. 48, № 39. P. 1–22.
2. Chirkunov Yu. A. *Invariant submodels and exact solutions of the generalization of the Leith model of the wave turbulence*. Acta Mechanica. 2018. V. 229, №. 10. P. 4045–4056.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАССЕЯНИЯ ЛОКАЛЬНЫМИ ОБЪЕКТАМИ (ОБЛАСТЯМИ) В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ СО СФЕРИЧЕСКОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ВНЕШНИМИ КОМПАКТНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Исследована проблема рассеяния локальными объектами (областями) в неоднородной среде со сферической стратификацией акустического поля, генерируемого внешними компактно распределенными источниками. Найдено фундаментальное решение трехмерного основного дифференциального уравнения как решение, инвариантное относительно удвоения его основной группы. С помощью сплетающих операторов для дифференциального оператора, порождаемого основным трехмерным уравнением, изучена структура собственных колебаний исследуемой среды. Установлено, что при условии, что во внешней среде происходят акустические колебания с волновыми числами, которые не совпадают с волновыми числами собственных колебаний этой внешней среды, существуют локальные неоднородности (области), для которых не существует рассеянного поля, индуцированного падением на эти неоднородности акустического поля, создаваемого внешними компактно распределенными источниками. Это означает, что эти неоднородности не могут быть обнаружены акустическим полем, генерируемым из внешних компактно распределенных источников. Получены формулы, определяющие основные параметры таких локальных неоднородностей.

Проблема существования наличия локальных нерассеивающих (или замаскированных) акустических неоднородностей в сферически-симметричной среде возникает, например, когда промышленные изделия испытываются на прочность акустическим полем, создаваемым внешними компактными распределенными источниками. Некоторые из этих неоднородностей могут привести к разрушению изделия. Знание характеристик таких локальных неоднородностей потребует использовать другие (не акустические) методы для проверки таких изделий на прочность. Полученные результаты можно также использовать в случае падения электромагнитного поля, создаваемого внешними компактно распределенными источниками, на объект, расположенный в неоднородной среде со сферической стратификацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16-01-00446 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A. *Nonscattering acoustic objects in a medium with a spherical stratification*. Acta Mechanica. 2017. V. 228, № 7. P. 2533–2539.
2. Romanov V. G., Chirkunov Yu. A. *Nonscattering acoustic objects in an anisotropic medium of special kind*. Doklady Mathematics. 2013. V. 87. № 1. P. 73–75.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ВЕСТЕРВЕЛЬТА НЕЛИНЕЙНОЙ ГИДРОАКУСТИКИ

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Изучается трехмерная модель Вестервельта нелинейной гидроакустики. При наличии диссипации эта модель описывается нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными 3-его порядка. При отсутствии диссипации – нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными 2-ого порядка. Получены все ее инвариантные подмодели. Все инвариантные решения, описывающие инвариантные подмодели ранга 0 и 1, найдены либо явно, либо их поиск сводится к решению нелинейных интегральных уравнений. С помощью этих инвариантных решений исследовано: 1) распространение интенсивных акустических волн (автомоделных, осесимметричных, плоских и одномерных), для которых акустическое давление и скорость его изменения, или акустическое давления, и его производные в направлении одной из осей заданы в начальный момент времени в фиксированной точке, 2) сферически-симметричное ультразвуковое поле, для которого звуковое давление и скорость его изменения, или акустическое давление, и его радиальная производная заданы в начальный момент времени в фиксированной точке. Решение краевых задач, описывающих эти процессы, сводится к решению нелинейных интегральных уравнений. Установлены существование и единственность решений краевых задач при некоторых дополнительных условиях. Для модели без диссипации найдены все законы сохранения первого порядка. Механическая значимость полученных решений заключается в следующем: 1) решения описывают нелинейные и

дифракционные эффекты в ультразвуковых полях специального вида; 2) решения и законы сохранения могут быть использованы в качестве тестовых решений при численных расчетах, выполняемых в исследованиях ультразвуковых полей, генерируемых мощными излучателями. Учитывая проверенную на практике высокую адекватность модели Вестервелта реальным процессам, полученные результаты могут быть использованы для расчета параметрических антенн сонаров на подводных лодках и морских судах, а также для расчета ультразвуковых полей в неинвазивной ультразвуковой хирургии с использованием высокоинтенсивных фокусированных пучков и в ультразвуковой диагностике в медицине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16-01-00446 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A. *Invariant submodels of the Westervelt model with dissipation*. Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 84. P. 139–144.
2. Chirkunov Yu. A. *Invariant solutions of the Westervelt model of nonlinear hydroacoustics without dissipation*. Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 85. P. 41–53.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ХОХЛОВА-ЗАБОЛОЦКОЙ-КУЗНЕЦОВА НЕЛИНЕЙНОЙ ГИДРОАКУСТИКИ

Ю. А. Чиркунов¹, Н. Ф. Бельмецев²

¹Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

²Тюменский государственный университет

Трехмерная модель Хохлова-Заболотской-Кузнецова (ХЗК) нелинейной гидроакустики с диссипацией описывается нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными 3-его порядка. Получено, что уравнение (ХЗК) допускает бесконечную группу Ли преобразований, зависящую от трех произвольных функций. Исследованы существенно различные инвариантные решения ранга 0 и 1 этого уравнения. Также рассматривались инвариантные решения ранга 2 и 3. Инвариантные решения ранга 0 и 1 найдены либо явно, либо их поиск сводится к решению нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Например, получены инвариантные решения, которые мы назвали “Ультразвуковым ножом” и “Ультразвуковым разрушителем”. Подмодель “Ультразвуковой нож” обладает следующим свойством: в каждый фиксированный момент времени в области существования решения вблизи некоторой плоскости давление неограниченно возрастает и на этой плоскости становится бесконечным. Подмодель “Ультразвуковой разрушитель” содержит счетное количество “Ультразвуковых ножей”. С помощью инвариантных решений исследовано распространение интенсивных акустических волн (одномерных, осесимметричных и плоских), для которых акустическое давление, скорость и ускорение его изменения или акустическое давление, скорость и ускорение его изменения в радиальном

направлении или акустическое давление, скорость и ускорение его изменения в направлении одной из осей заданы в начальный момент времени в фиксированной точке. При некоторых условиях установлено существование и единственность решений краевых задач, описывающих эти волновые процессы. Механическая значимость полученных решений заключается в следующем: 1) решения описывают нелинейные и дифракционные эффекты в ультразвуковых полях специального вида; 2) решения могут быть использованы в качестве тестовых решений в численных расчетах, выполняемых при исследованиях ультразвуковых полей, генерируемых мощными излучателями. Учитывая проверенную на практике высокую адекватность модели (ХЗК) реальным процессам, полученные результаты могут быть использованы для расчета параметрических антенн сонаров на подводных лодках и морских судах, а также для расчета ультразвуковых полей в неинвазивной ультразвуковой хирургии с использованием высокоинтенсивных фокусированных пучков и при ультразвуковой диагностике в медицине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16-01-00446 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A., Belmetsev N. F. *Invariant submodels and exact solutions of Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov model of nonlinear hydroacoustics with dissipation*. Int. J. Non-Linear Mech. 2017. V. 95. P. 216–223.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. А. Чиркунов, Е. О. Пикмуллина

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Модель, описывающая тепловое движение газа в сильно разреженном пространстве, получила несчастливый номер 13 в списке моделей движения газа в трехмерном пространстве, полученном Л.В. Овсянниковым. Актуальность исследования этой модели обусловлена исследованием процессов, происходящих в космическом пространстве и внутри торнадо, при изучении состояния среды за фронтом ударной волны после очень сильного взрыва. Для заданного начального распределения давления специальный выбор массовых лагранжевых переменных приводит к редукции дифференциальных уравнений, описывающих это движение к нелинейной системе параболического типа, для которой число независимых переменных меньше на единицу. Это означает, что в сильно разреженном пространстве при заданном начальном распределении давления все частицы газа локализованы на двумерной поверхности. Для полученной системы найдены все нетривиальные законы сохранения первого порядка. В дополнение к классическим законам сохранения система имеет еще один закон сохранения, который обобщает закон сохранения энергии. Получены следующие

точные решения системы: 1) решение, описывающее состояние среды за фронтом ударной волны после очень сильного взрыва, 2) решение, которое зависит от времени по экспоненциальному закону и описывает следующие динамические процессы в сильно разреженном пространстве: либо рассеяние частиц газа до бесконечности, либо локализацию частиц газа вблизи неподвижной поверхности, 3) решение, которое описывает в сильно разреженном пространстве динамический процесс, в котором каждая частица совершает периодические колебания, 4) решение, которое описывает состояние среды после проведения серии очень сильных взрывов, 5) решения, которые описывают процессы, происходящие внутри торнадо. Исследованы групповые свойства этой нелинейной системы. Для инвариантных подмоделей ранга 1 получены основные механические характеристики описываемого ими теплового движения газа в разреженном пространстве. Указаны условия существования этих подмоделей. Для инвариантных подмоделей ранга 2 получены интегральные уравнения, описывающие подмодели. Для некоторых подмоделей исследована проблема описания потока газа из исходного положения его частиц и распределения их скоростей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16-01-00446 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A. *Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space*. Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 83. P. 9–14.
2. Chirkunov Yu. A., Pikhullina E. O. *Invariant submodels of the model of thermal motion of gas in a rarefied space*. Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 95. P. 185–192.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДИФфуЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю. А. Чиркунов, Ю. Л. Сколубович

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

Для общей трехмерной нелинейной диффузионной модели пористой среды с нестационарным источником или поглощением найдены девять основных моделей с нестационарным источником или поглощением, имеющих разные групповые свойства. Для модели, допускающей самую широкую группу Ли преобразований, получены явно все существенно различные инвариантные решения, описывающие ее инвариантные подмодели ранга 0. В частности, получены решения, которые мы назвали «слоистый круговой пирог», «слоистый спиральный пирог», «слоистый плоский пирог» и «слоистый сферический пирог». «Слоистый круговой пирог» описывает движение жидкости или газа в пористой среде, для которого в каждый фиксированный момент времени во всех точках каждой окружности из семейства концентрических окружностей давление одно и то же. «Слоистый спиральный пирог» описывает движение жидкости или газа в пористой среде, для которого в каждый фиксированный момент времени во всех точках каждой логарифмической спирали из полученного семейства логарифмических спиралей давление одинаковое. Решение «слоистый сферический

пирог» описывает движение жидкости или газа в пористой среде, для которого в каждый фиксированный момент времени во всех точках каждой сферы из семейства концентрических сфер давление одно и то же. Набор решений «слоистый круговой пирог», «слоистый спиральный пирог» и «слоистый сферический пирог» содержит решения, описывающие распределение давления в пористой среде после точечного взрыва или точечного гидравлического удара, а также решения, описывающие стратифицированное по отношению к давлению движение жидкости или газа в пористой среде с очень высоким давлением на бесконечности в присутствии очень сильного поглощения в точке. Решение «слоистый плоский пирог», описывает движение жидкости или газа в пористой среде, для которого в каждый фиксированный момент времени во всех точках каждой плоскости из семейства параллельных плоскостей давление одно и то же. Набор решений «слоистый плоский пирог» содержит решения, описывающие движение жидкости или газа в пористой среде с очень высоким давлением вблизи неподвижной плоскости в присутствии очень сильного поглощения на бесконечности, а также решения, описывающие движение жидкости или газа в пористой среде с очень высоким давлением на бесконечности в присутствии очень сильного поглощения на фиксированной плоскости. Полученные результаты могут быть использованы для изучения процессов, связанных с подземным потоком жидкости или газа, с фильтрацией воды, а также со сланцевой добычей нефти и газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16-01-00446 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chirkunov Yu. A., Skolubovich Yu. L. *Nonlinear three-dimensional diffusion models of porous medium in the presence of non-stationary source or absorption and some exact solutions*. Int. J. Non-Linear Mech. 2018. V. 106. P. 29–37.

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ НАГРЕВА И МЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ФАЗОВЫЙ СОСТАВ ПРОДУКТА В РЕАКЦИОННОЙ ЯЧЕЙКЕ ПРИ СИНТЕЗЕ ПОРИСТЫХ КЕРАМИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ

Ю. А. Чумаков, Т. А. Крылова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Синтез пористых керамических материалов сопровождается эволюцией состава и структуры. Все процессы, протекающие на разных структурных уровнях, оказываются взаимосвязанными, их интерпретация оказывается неоднозначной и требует привлечения математического моделирования. В настоящее время существует несколько подходов к моделированию синтеза композитов с учетом гетерогенной структуры. Среди них в макрокинетике получил распространение подход с выделением так называемых реакционных ячеек, когда структура продукта заменяется

некоторым идеализированным объектом, в котором последовательность реакций задается в соответствии с равновесными диаграммами состояния [1, 2]. Возможность распространения этого подхода на многокомпонентные материалы, а также на смеси, содержащие инертные включения, не очевидна. Тем не менее, изучим такую возможность.

В настоящей работе для теоретического исследования процесса синтеза интерметаллидного композита с инертными включениями предложена модель, в которой используется обобщение понятия реакционной ячейки. На примере системы Ti-Al+частицы в зависимости от размеров частиц и концентраций компонентов проанализированы два варианта: 1) инертные микровключения не взаимодействуют друг с другом, однако влияют на эквивалентные свойства выделенных мезо реакционных ячеек; 2) наноразмерные инертные включения влияют на активность наиболее подвижного легкоплавкого компонента. В результате макроскопические свойства и состав композита изменяются различным образом.

Расчеты показали, что неоднородное распределение температуры и состава в волне гетерогенного горения приводит к формированию неоднородного поля напряжений, в свою очередь, влияющего на динамику синтеза.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 гг., направление III.23.

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов Е. А., Максимов Ю. М., Алдушин А. П. *Расчет критических условий теплового взрыва систем гафний-бор, тантал-углерод на основе диаграмм состояния*. ФГВ. 1980. Т. 16, № 3. С. 113–120.
2. Ковалев О. Б., Беляев В. В. *Математическое моделирование металлохимических реакций в двухкомпонентной реагирующей дисперсной смеси*. ФГВ. 2013. Т. 49, № 5. С. 64–76.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛЕНКИ РАСПЛАВА ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА

В. И. Чухно^{1,2}, Э. В. Усов¹, А. А. Бутов¹

¹Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Новосибирский филиал

²Новосибирский государственный университет

Анализ процессов, которые сопровождают разрушение тепловыделяющих элементов активной зоны ядерных реакторов, является важной и актуальной задачей для обоснования безопасности выбранной конструкции реактора. Одним из основных методов такого анализа является математическое моделирование. При разрушении тепловыделяющего элемента одним из важных процессов является движение расплава

оболочки по поверхности твэла. Уравнения движения расплава решаются в приближении пленочного течения [1] расплава под действием силы тяжести и силы трения с набегающим газовым потоком в цилиндрической геометрии. Для моделирования движения расплава решается система уравнений сохранения массы, энергии и импульса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S U}{\partial z} = R_m, \\ \frac{\partial \rho h S}{\partial t} + \frac{\partial \rho h S U}{\partial z} = R_h, \\ \frac{\partial \rho S U}{\partial t} + \frac{\partial \chi \rho S U^2}{\partial z} = R_u. \end{cases}$$

В настоящей работе представлено детальное описание системы уравнений, проведен анализ системы на гиперболичность и устойчивость к малым возмущениям, исследованы различные численные схемы сквозного счета для моделирования движения расплава с использованием представленной системы уравнений.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант №18-79-10013).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. *Волновое течение пленок жидкости*. Новосибирск: Наука, 1992.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ И МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В. П. Шапеев^{1,2}, С. К. Голушко^{2,3}, Л. С. Брындин^{1,2}, В. А. Беляев¹

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

На основе разработанного подхода к повышенному порядку аппроксимации краевых задач для уравнений с частными производными в нерегулярных и многосвязных областях предложены и реализованы новые h- и p- версии метода коллокации и наименьших квадратов (КНК) решения краевых задач для различных уравнений математической физики. В качестве приложения решение неоднородного бигармонического уравнения использовано для моделирования напряженно-деформированного состояния изотропной упругой тонкой пластинки нерегулярной формы, находящейся под действием поперечной нагрузки [1]. В реализованных вариантах метода предусмотрена возможность задания границы области кусками аналитических кривых, а также дискретно в виде множества точек, расположенных на границе.

В p-версии метода с целью достижения высокого порядка аппроксимации дифференциальная задача проектируется в пространство полиномов достаточно высоких

степеней. В качестве базисных элементов различных пространств рассматриваются многочлены Чебышева, Лагранжа и мономы.

В h -версии нерегулярная область заключается в прямоугольник, который покрывается регулярной сеткой с прямоугольными ячейками. На границе области возникает «одинарный» слой нерегулярных ячеек (n -ячеек), отсеченных границей области от прямоугольных граничных ячеек начальной регулярной сетки. В основном варианте h -версии метода с целью повышенной глобальной аппроксимации задачи используются "законтурные" части граничных ячеек и перестройка малых и вытянутых n -ячеек.

В обеих версиях метода КНК граничные условия для приближенного решения задач выписываются точно на границы расчетной области, что теоретически позволяет неограниченно повышать его точность.

В реализованных итерационных h -версиях метода применены операция продолжения на многосеточном комплексе по Федоренко и на промежуточных сетках комплекса ускорение сходимости итерационного процесса с использованием метода Крылова. В численных экспериментах по сходимости приближенного решения различных задач на последовательности сеток установлено, что оно сходится с повышенным порядком и с высокой точностью совпадает с аналитическим решением задачи в случае, когда оно известно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапеев В. П., Беляев В. А. *Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов*. Вычислительные методы и программирование. 2018. Т. 19, № 41. С. 340–355.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ И ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

А. И. Шафаревич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Описаны асимптотические решения задачи Коши для гиперболической системы с переменными коэффициентами и начальными условиями, локализованными вблизи подмногообразия положительной коразмерности. Показано, что старшая часть решения локализуется в окрестности фронтов – проекций изотропных поверхностей в фазовом пространстве соответствующих гамильтоновых систем. Описаны формулы для решений, основанные на его представлении в виде модификаций канонического оператора Маслова на лагранжевых многообразиях, содержащих изотропные поверхности; обсуждается возможность различного выбора таких многообразий. Приведены примеры из гидродинамики, магнитной гидродинамики и газовой динамики.

РЕОЛОГИЯ И МИКРОСТРУКТУРА КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ СУСПЕНЗИЙ

В. В. Шелухин^{1,2}, В. В. Неверов^{1,2}

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

²*Новосибирский государственный университет*

Рассматриваются течения двухфазной жидкости. Первая, гранулированная, фаза представляет собой микрополярную жидкость, а вторая фаза является неньютоновской вязкой жидкостью. Фазы различаются по скоростям, плотностям и вязкостям. Гранулированная фаза описывается в рамках континуума Коссера. Модель согласована с законами термодинамики, распространяется на течения с учетом потоков тепла, и на ее основе решен ряд задач.

Исследовано влияние вращения частиц на поперечную миграцию частиц для течений в трубах; в частности, обоснован эффект Зегре-Зильберберга, состоящий в том, что частицы концентрируются в кольцевой области. Определяющую роль при этом играет обобщенный закон Фика для потока концентраций.

Хорошо известно, что для сплошных сред с внутренними моментами количества движений тензор напряжений Коши не является симметричным. Применительно к жидкостям это сводится к тому, что вклады симметричной и антисимметричной частей обобщенного тензора скоростей деформаций в напряженное состояние различны. Вес вкладов выражается в терминах «симметричной» и «антисимметричной вязкостей». Симметричная вязкость совпадает с обычной. Что касается антисимметричной вязкости, то установлено, что ее можно выразить из формулы Кригера-Дугерти для вязкости суспензий. Показано, что увеличение эффективной вязкости суспензий с ростом концентрации обязано вращению частиц.

Исследовано течение в ячейке Хеле-Шоу для случая, когда гранулированная фаза является вязкопластической. Для течений в трубах установлены корреляции между расходами фаз и градиентом давления. Если несущая фаза течет при любом перепаде давления, то гранулированная фаза начинает двигаться лишь при достаточно больших градиентах давления в зависимости от предельного напряжения сдвига гранулированной фазы.

В пренебрежении вращением частиц решена 2-D задача о седиментации. Проведено сравнение с экспериментом. Вычисления показывают, что фронт седиментации всегда перпендикулярен направлению гравитации, каким бы ни был наклон сосуда.

Модель допускает обобщение на случай несферических частиц. Для иллюстрации исследовано однофазное течение такой анизотропной жидкости в трубе для стержнеобразных частиц. Анизотропия проявляется в том, что тензор напряжений зависит не только от вращения частиц, но и от их ориентации, то есть от тензора микроинерции. Вычисления показывают, что постоянный градиент давления не обеспечивает постоянный расход. Пульсации расхода зависят от размеров частиц. Кроме того, для указанного течения характерно появление зоны одинаковой ориентации частиц, причем число таких зон со временем возрастает.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства России (код проекта 14.W03.31.0002.).

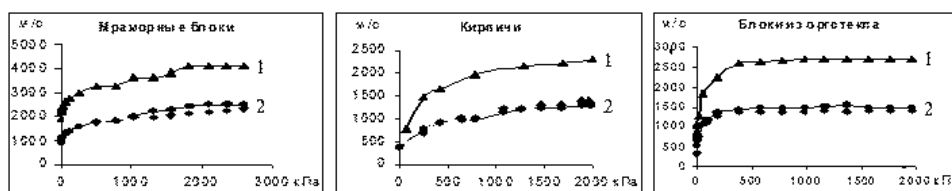
МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В БЛОЧНЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНЕГО СЖАТИЯ

Е. Н. Шер, А. Г. Черников

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск

Согласно концепции М.А. Садовского породный массив представляет собой систему вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня [1], разделенных прослойками. Часто прослойки между блоками представлены более слабыми трещиноватыми породами. Наличие таких податливых прослоек приводит к тому, что деформирование блочного массива происходит в основном за счет деформации прослоек, что приводит к выделению в сейсмическом отклике на импульсное воздействие низкочастотных волн маятникового типа. В настоящей работе приводятся результаты экспериментальных исследований влияния внешнего сжатия блочной среды на скорость распространения волн деформации при ударном нагружении в сборках блоков из мрамора, оргстекла и силикатных кирпичей.

Эксперименты проводились на вертикальных сборках блоков, помещенных в гидравлический пресс. Возбуждение колебаний производилось ударом по верхнему блоку. Для регистрации колебаний блоков использовались акселерометры КД91, сигналы с которых в цифровом виде записывались в компьютер. В результате обработки данных для каждого усилия сжатияборок определялись скорость распространения сигнала вдоль сборки и скорость распространения маятниковой волны (кривые 1-2 на графиках).



Анализ полученных данных показал, что наблюдаемый рост скоростей распространения волн объясняется увеличением с ростом сжатия числа работающих контактов на границах блоков, их суммарной площади и деформационных свойств.

Исследование выполнено в рамках проекта ФНИ № гос. регистрации АААА-А17-117122090002-5

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М. А. *Естественная кусковатость горной породы*. ДАН СССР. 1979. Т. 247, № 4. С. 829–832.

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛООВОГО ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ С ИСПАРЕНИЕМ

И. А. Шефер

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В рамках модели испарительной конвекции [1] исследуется устойчивость совместного течения вязкой теплопроводной жидкости и спутного парогазового потока в плоском горизонтальном канале. Стационарное течение в рассматриваемой двухслойной системе описывается с помощью точного решения уравнений Обербека–Буссинеска. Используемое решение является аналогом решения Остроумова–Бириха и позволяет дополнительно учесть влияние прямого и обратного термодиффузионных эффектов в газопаровом слое в определяющих уравнениях и соотношениях на межфазной границе и верхней стенке канала [1].

Поверхность раздела жидкость–газопаровая смесь является термокапиллярной границей, допускающей фазовый переход за счет испарения/конденсации. На ней справедливы кинематическое, динамическое и энергетическое условия (последнее получено как классическое обобщение условия Стефана на межфазной границе с учетом диффузионного характера испарения/конденсации), обычные условия непрерывности полей скорости и температуры, а также соотношение для концентрации пара, являющееся следствием уравнений Менделеева–Клапейрона и Клапейрона–Клаузиуса. На внешних границах канала задано условие прилипания для функции скорости, на нижней стенке – линейное по продольной координате распределение температуры. При этом рассматриваются два разных типа граничного теплового режима на верхней стенке – линейное распределение температуры и условие теплоизоляции, и анализируется их влияние на основные характеристики течения (распределения скорости и температуры в слоях и паросодержания в газе).

В рамках линейной теории исследуется устойчивость точного решения относительно плоских нормальных возмущений при двух указанных типах граничных условий для функции температуры на верхней стенке канала. Приводятся типичные формы характеристических возмущений (термокапиллярные, ячеистые, вихревые), порожденных различными механизмами и их взаимными комбинациями, нейтральные кривые и карты режимов неустойчивости для системы HFE-7100 – азот с различной толщиной жидкого слоя. Показано, что в результате взаимодействия с основным течением, возмущения сносятся вдоль канала и направление дрейфа зависит от типа основного течения. Изменение граничного теплового режима не приводит к возникновению новых типов неустойчивости, но может влиять на пороговые характеристики устойчивости, которые определяют интенсивность и тип (нагрев/охлаждение) внешней тепловой нагрузки, приложенной на нижней стенке канала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 17-08-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. *Stability of the exact solutions describing the two-layer flows with evaporation at interface*. Fluid Dynamics Research. 2016. V.48, № 6. 061408.

КОЛЕБАНИЯ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА В КАНАЛЕ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ СИЛ

К. А. Шишмарев¹, Т. И. Хабахпашева^{2,3}, А. А. Коробкин³

¹Алтайский государственный университет, Барнаул

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

³Университет Восточной Англии, Норидж, Великобритания

Рассматривается нестационарная задача о вынужденных колебаниях ледового покрова в канале. Канал имеет прямоугольное сечение и заполнен идеальной жидкостью. Ледовый покров на поверхности жидкости моделируется тонкой упругой или вязкоупругой пластиной (модель Кельвина-Фойгта), примороженной к стенкам канала. Вынужденные колебания ледового покрова вызваны локализованным пятном давления, движущимся по поверхности льда с постоянной скоростью из состояния покоя. Течение, вызванное движением нагрузки и прогибом льда считается потенциальным. Есть несколько основных подходов к решению рассматриваемой задачи, использованных в данной работе: построение решения в виде бегущей волны в системе координат, движущейся вместе с пятном давления [1]; исследование поведения прогибов льда при больших временах, причем параметры вынужденных колебаний определяются асимптотическими методами как предельные характеристики нестационарных волн [2]; решение нестационарной задачи при конечных временах. Задача решается методом преобразования Фурье вдоль канала и разложением прогибов льда на собственные колебания ледового покрова в канале [3]. В первом подходе задача сводится к системе алгебраических уравнений, во втором и третьем к поиску решения задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Решение получено в виде квадратур с помощью обратного преобразования Фурье. В докладе приводятся результаты численного и аналитического исследования вынужденных колебаний льда и напряжений в ледовом покрове. Рассмотрен случай битого льда, который моделируется тонкой пластиной с нулевой жесткостью при отсутствии краевых условий на стенках канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A. *The response of ice cover to a load moving along a frozen channel*. Applied Ocean Research. 2016. V.59. P.313–326.
2. Khabakhpasheva T., Shishmarev K., Korobkin A. *Large-time response of ice cover to a load moving along a frozen channel*. [Submitted to Applied Ocean Research]
3. Коробкин А. А., Хабахпашева Т. И., Папин А. А. *Математические модели снежно-ледового покрова*. Изд-во АлтГУ, 2013.

ТЕЧЕНИЕ ПЕНЫ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

Н. Д. Шмакова¹, Н. А. Пеньковская¹, С. Сантуччи^{1,2}, Е. В. Ерманюк¹¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск²Лаборатория физики Высшей Нормальной школы г. Лиона, Франция

Неньютоновское поведение пены, ведущей себя как упругая либо текучая среда в зависимости от приложенного напряжения, обусловлено ее многомасштабной двухфазной структурой. Это поведение лежит в основе использования пен в различных областях применения: от продуктов повседневной жизни (пищевая, фармацевтическая промышленность) до крупномасштабных промышленных процессов (гидроразрыв пласта) [1, 2].

В данной работе представлены результаты экспериментального исследования течения монослоя пены в ячейке Хеле-Шоу при наличии изолированного препятствия в терминах усредненного по времени поля скорости. Препятствие представляло собой локальное сужение зазора ячейки, имевшее круглую либо квадратную в плане форму. При исследовании проводилась систематическая вариация одного из параметров (высоты препятствия, доли жидкой фракции в пене и т.д.) при фиксированных значениях всех прочих параметров.

Присутствие препятствия в потоке пены приводит к деформации пузырьков. При этом поверхностная энергия накапливается вследствие увеличения поверхности пузырьков в области локального сужения зазора и ее окрестности, затем высвобождается, вследствие чего за препятствием наблюдается так называемый отрицательный след [3], в котором происходит ускорение пузырьков до скоростей, превышающих скорость набегающего потока. Показано, что при некотором значении высоты препятствия в ячейке Хеле-Шоу эффект отрицательного следа максимизируется. Существование максимума эффекта при некоторой высоте препятствия можно объяснить балансом между ростом поверхностной энергии при деформации пузырьков и ростом вязких потерь при движении пузырьков в узком зазоре.

Изучен характер изменения поля скорости пены в окрестности препятствия в зависимости от доли жидкой фракции, продемонстрирован плавный переход от течения так называемой сухой пены, имеющей сильно выраженные неньютоновские свойства, к течению пузырьковой жидкости, поведение которой близко к ньютоновскому. Полученные экспериментальные данные сопоставлены с численными расчетами на основе классической пузырьковой модели [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МОН РФ № 14.W03.31.0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kraynik A. M. *Foam flows*. Annu. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 325–357.
2. Cohen-Addad S., Höhler R., Pitois O. *Flow in foams and flowing foams*. Annu. Rev. Fluid Mech. 2013. V. 45. P. 241–267.
3. Hassager O. *Negative wake behind bubbles in non-newtonian fluids*. Nature. 1979. V. 279. P. 402–403.
4. Durian D. J. *Foam mechanics at the bubble scale*. Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 4780–4783.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ТОРА

Н. Д. Шмакова^{1,2}, Я.-Б. Флер²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels (LEGI), CNRS–Université Grenoble Alpes, F38000, Grenoble, France

Фокусировка волн может быть рассмотрена как возможный сценарий локальной концентрации энергии и последующего обрушения волн. В лаборатории фокусировку можно смоделировать колебаниями тора в однородно-стратифицированной жидкости. Для внутренних волн, генерируемых горизонтальными колебаниями тора, было показано, что при небольших амплитудах колебания тора амплитуда волны в зоне фокусировки существенно увеличивается [1]. Увеличение амплитуды колебаний тора ведет к локальному обрушению волн в таких зонах. В случае инерционных волн, генерируемых вертикальными колебаниями тора во вращающейся жидкости, в зоне фокусировки возникает турбулентность [2].

В настоящей работе представлены экспериментальные данные, полученные с помощью PIV измерений для средних и больших амплитуд колебания тора и направленные на изучение нелинейных аспектов внутренних волн. Для описания поведения волн в зоне фокусировки представлен новый безразмерный параметр (фокусное число) который основан на теоретических расчетах волновой энергии в зоне фокусировки. Получена линейная зависимость угла наклона волны от фокусного числа для торов с разными радиусами, что в дальнейшем позволяет предсказать обрушение волн при небольших числах Стокса $O(100)$. При умеренных фокусных числах наблюдается вертикальное среднее течение и возникновение исчезающих высших гармоник в зоне фокусировки. В случае обрушения, наблюдаемого при больших фокусных числах, в зоне фокусировки возникают субгармоники, которые вместе с фундаментальной волной порождают триадный резонанс. В данном исследовании впервые продемонстрирован механизм возникновения триадного резонанса в трехмерном случае [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ermanyuk E. V., Shmakova N. D., Flór J.-B. *Internal wave focusing by a horizontally oscillating torus*. J. Fluid Mech. 2017 V. 813. P. 695–715.
2. Duran-Matute M., Flór J.-B., Godeferd F.S., Jause-Labert C. *Turbulence and columnar vortex formation through inertial-wave focusing*. Phys. Rev. E. 2013 V. 87. P. 041001.
3. Shmakova N.D., Flór J.-B. *Nonlinear aspects of focusing internal waves*. J. Fluid Mech. 2019. V. 862. P. R4.

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В ДАЛЬНОМ ЗАКРУЧЕННОМ БЕЗЫМПУЛЬСНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ СЛЕДЕ

А. В. Шмидт

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Для описания течения в дальнем закрученном безымппульсном турбулентном следе привлекается следующая полуэмпирическая модель турбулентности [1]:

$$\begin{aligned} U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_u r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{W^2}{r'} dr', \\ U_0 \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_w r^3 \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial (W/r)}{\partial r} \right), \\ U_0 \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_e r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial e}{\partial r} \right) + C_u r^2 \frac{e^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial (W/r)}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon, \\ U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(C_\varepsilon r \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + C_{\varepsilon 1} C_u r^2 e \left(\frac{\partial (W/r)}{\partial r} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \end{aligned}$$

Здесь U_0 – скорость набегающего на тело невозмущенного потока, $U_1 = U - U_0$ – дефект осредненной продольной компоненты скорости, W – осредненная тангенциальная компонента скорости, e – кинетическая энергия турбулентности, ε – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности.

С помощью теоретико-группового подхода [2] найдено автомодельное представление для решения, позволяющее редуцировать исходную модель к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача для редуцированной системы решалась численно с помощью модифицированного метода стрельбы. Дополнительные трудности при решении краевой задачи связаны с тем, что коэффициенты системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют особенности. Использовалось асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. Построенные решения хорошо согласуются с результатами численных расчетов по полной модели [1].

Автор выражает благодарность Капцову О. В. и Черных Г. Г. за внимание к работе и предоставленные материалы. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00332).

ЛИТЕРАТУРА

1. Деменков А. Г., Черных Г. Г. *Автомодельное вырождение безымппульсного закрученного турбулентного следа*. Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 6. С. 891–896.
2. Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М.: Наука, 1972.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ОБРАЗЦОВ НА КРУЧЕНИЕ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ

А. В. Шутов, А. А. Кайгородцева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

Так как ряд параметров, содержащихся в современных феноменологических моделях упругопластичности, не подлежит непосредственному определению из эксперимента, упомянутые параметры идентифицируются из решения обратной задачи. При этом, как правило, требуется минимизировать функционал ошибки, отражающий среднее отклонение результатов расчетов по исследуемой модели от имеющихся экспериментальных данных [1]. На практике встает вопрос о надежности указанной процедуры идентификации параметров. Проблема оценки надежности может быть сформулирована следующим образом. Если предположить, что на имеющиеся экспериментальные данные накладывается стохастический шум, то как сильно указанный шум отразится на результатах идентификации? Процедура идентификации будет считаться надежной (устойчивой), если результаты идентификации лишь незначительно зависят от наложенного шума. В противном случае, определенный набор параметров следует признать ненадежным, а саму процедуру идентификации – неустойчивой [2], [3].

В настоящей работе исследуется задача идентификации параметров моделей упругопластичности на основе экспериментальных данных с неоднородным НДС. Поведение материала описывается моделью, предложенной Шутовым и Крайссигом (Shutov and Kreißig). В качестве экспериментальной базы выступают синтетические данные по кручению стержней: сплошного стержня, толстостенной трубы и стержня квадратного сечения. Показана принципиальная возможность идентификации параметров. Указаны экспериментальные программы, позволяющие добиться наибольшей устойчивости идентифицируемых параметров к ошибкам измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-01020) и интеграционного проекта СО РАН (код проекта 0308-2018-0018).

ЛИТЕРАТУРА

1. Beck J. V., Arnold K. J. *Parameter Estimation in Engineering and Science*. John Wiley and Sons, 2007.
2. Harth T., Schwan S., Lehn J., Kollmann F. G. *Identification of material parameters for inelastic constitutive models: statistical analysis and design of experiments*. International Journal of Plasticity. 2004. V. 20. P. 1403–1440.
3. Shutov A. V., Kaygorodtseva A. A., Dranishnikov N. S. *Optimal error functional for parameter identification in anisotropic finite strain elasto-plasticity*. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2017. V. 894. P. 012133.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГИДРОДИНАМИКИ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

А. В. Шутов^{1,2}, В. С. Ключанцев²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

В работе исследуются особенности метода гидродинамики сглаженных частиц в применении к решению динамических задач о плоском деформировании твердых тел. Особое внимание уделяется таким аспектам, как технология снижения краевых эффектов путем введения скорректированных ядер и их градиентов [1], методика максимально точного вычисления тензора градиента деформации, методика расчета вектора внутренних сил по заданному полю напряжений в узловых точках, методика регуляризации решения для подавления паразитических мод и нефизичных режимов потери устойчивости [2], методика задания граничных условий на перемещения. В качестве модельных материалов рассматриваются гиперупругое тело нео-Гука а также модель вязкоупругости, основанная на применении определяющих соотношений тела Максвелла в формулировке Симо-Мие (Simo and Miehe). Для интегрирования эволюционных уравнений последней модели применяются эффективные и надежные вычислительные алгоритмы из [3] и [4].

Представлено решение ряда тестовых задач по явным схемам. В некоторых из тестовых задач качество применяемых алгоритмов оценивается путем контроля сохранения первых инвариантов системы. Решения краевых задач сравниваются с эталонными, полученными с помощью вычислительного комплекса метода конечных элементов MSC.MARC.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bonet J., Lok T.-S.L. *Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. V. 180. P. 97–115.
2. Lee C.H., Gil A.J., Greto G., Kulasegaram, S., Bonet J. *A new Jameson–Schmidt–Turkel Smooth Particle Hydrodynamics algorithm for large strain explicit fast dynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2016. V. 311. P. 71–111.
3. Shutov A. V., Landgraf R., Ihlemann J. *An explicit solution for implicit time stepping in multiplicative finite strain viscoelasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2013. V. 256. P. 213–225.
4. Shutov A. V. *Efficient time stepping for the multiplicative Maxwell fluid including the Mooney–Rivlin hyperelasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2018. V. 113, №12. P. 1851–1869.

ЭФФЕКТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВОЛОКНИСТОГО ТЕЛА МАКСВЕЛЛА

А. В. Шутов, И. И. Тагильцев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет

В работе рассматривается модель волокнистого композитного материала, обладающего вязкоупругими свойствами. Составной частью модели является система определяющих соотношений волокнистого тела Максвелла. Следуя [1], кинематика исследуемого тела Максвелла задается мультипликативным разложением тензора градиента деформации, модель объективна и термодинамически совместна. Важным преимуществом модели является возможность применения различных гиперупругих потенциалов [1] для более точного описания эффекта локальной потери устойчивости волокна. В настоящей работе исследуется семейство потенциалов, обобщающее потенциал Хольцапфеля (Holzapfel) [2], популярный в технике и биомеханике.

Дискретизация эволюционных уравнений приводит к нелинейному алгебраическому уравнению относительно неизвестного значения актуальной упругой (либо неупругой) части кратности удлинения волокна. Для рассматриваемого нелинейного уравнения строится безитерационная вычислительная схема. В работе представлены результаты тестирования устойчивости и точности рассматриваемой схемы. Кроме того, характеристики алгоритма сравниваются с характеристиками классического алгоритма, основанного на применении итерационного метода Ньютона.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-08-01020) и интеграционного проекта СО РАН (код проекта 0308-2018-0018).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tagiltsev I. I., Laktionov P. P., Shutov A. V. *Simulation of fiber-reinforced viscoelastic structures subjected to finite strains: multiplicative approach*. MECCANICA. 2018. V. 53, №15. P. 3779–3794.
2. Holzapfel G. A., Gasser T. C., Ogden R. W. *A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models*. Journal of elasticity and the physical science of solids. 2000. V. 61. P. 1–48.

МЕТОД ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН В УПРУГИХ ТЕЛАХ

В. В. Щербakov

Университет Касселя, Кассель, Германия

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается эволюционная задача о квазистатическом распространении трещины в двумерном линейно-упругом теле. Основная особенность модели заключается в том, что траектория трещины не задана заранее, а выбирается из подходящего множества допустимых кривых класса $C^{1,1}$. При помощи метода исчезающей вязкости доказано существование решения, удовлетворяющего критерию разрушения Гриффитса, и выписан энергетический баланс для него.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (код проекта МК-52.2019.1).

ТЕЧЕНИЕ ДЖЕФФРИ-ГАМЕЛЯ ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Н. И. Яворский

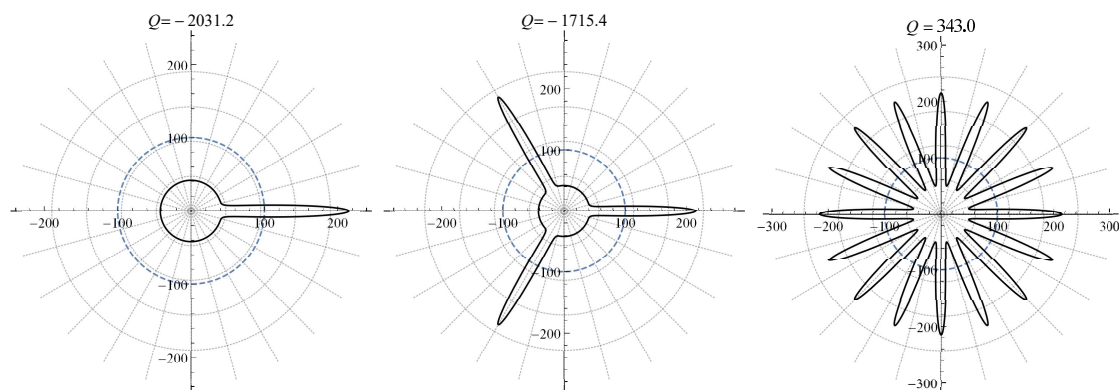
Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

Течение Джеффри-Гамеля более 100 лет изучается разными авторами и содержится в учебниках, но полное его решение до сих пор не получено, хотя с самого начала было известно, что оно имеет аналитическое решение в виде эллиптических функций. Особенностью задачи является неединственность решений, которые носят многоячеистый характер [1].

В настоящей работе получено бесконечное семейство точных решений задачи Джеффри-Гамеля для класса конических течений, соответствующих течению от точечного источника. Решения возникают в результате обратных бифуркаций поля скорости точечного источника при критических значениях интенсивности источника $q = \pi\nu(n^2 - 4)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ [2], и при каждом q существует бесконечное число решений [3]. При этом, как показано в настоящей работе, поле скорости приобретает характер n -струйного течения от источника, а решения отличаются количеством этих струй и n меняется от 1 до ∞ . Ниже на рисунках приведены профили радиальной скорости для $n = 1, 3, 16$ (пунктирная линия соответствует нулевому значению скорости), $Q = q/\nu$ – безразмерная обильность источника (число Рейнольдса).

Получено точное решение задачи устойчивости для поля скорости точечного источника в виде квадратур от гипергеометрических функций. Показано, что течение от точечного источника неустойчиво при всех числах Рейнольдса, при этом неустойчивость в отличие от имеющихся ранее приближенных результатов имеет степенной или логарифмический характер.



ЛИТЕРАТУРА

1. Shtern V. N. *Counterflows: paradoxical fluid mechanics phenomena*. Cambridge; New York: Cambridge University Press. 2012. 470 p.
2. Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И. *Вязкие течения с парадоксальными свойствами*. Новосибирск: Наука. 1989. 336 с.
3. Шверак В. *О решениях Ландау уравнений Навье-Стокса* Проблемы математического анализа. 2011. Вып. 61. С. 175–191.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭМБОЛИЗАЦИИ МИКРОКАНАЛА

А. А. Ягодницына^{1,2}, А. В. Ковалев^{1,2}, Д. В. Паршин^{2,4}, И. К. Шундрин³,
А. П. Чупахин^{2,4}, Бильский А. В.^{1,2}

¹Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Институт органической химии им. Н. Н. Ворожцова СО РАН, Новосибирск

⁴Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Система церебральных сосудов представляет собой разветвленную сеть каналов различного сечения. Одним из прогрессивных методов внутрисосудистой нейрохирургии является эмболизация артерио-венозной мальформации – заклепка ее специальным клеящим составом, эмболизатором[1]. Оптимизация процедуры эмболизации очень важна для практической нейрохирургии и, кроме того, представляет значительный интерес как задача многофазной гемодинамики.

Разработан эмболический состав на основе сополимера этилена и винилового спирта (EVOH) и исследовано его течение в микроканале. Визуализация процесса полимеризации проводилась в Т-образном микроканале прямоугольного сечения с характерными размерами входных каналов 200x200 мкм и выходного канала 200x400 мкм. Длина входных и выходного участков равнялась 5 мм.

Эксперименты проводились в диапазоне расходов эмболизатора Q_e и воды Q_w от 2,5 до 100 мкл/мин. В результате визуализации было выявлено два режима процесса полимеризации, приводящих к существенно разным картинам эмболизации микроканала. В первом режиме реакция полимеризации проходит в тонком слое на границе

между эмболизатом и водой; при этом осаждение полимеризованного эмболизата происходит вверх по потоку в виде нитевидной структуры [2] (рис. 1а). Вторым режимом характеризуется более высокая степень перемешивания на границе между эмболизатом и водой, что приводит к полной эмболизации микроканала (рис. 1б).

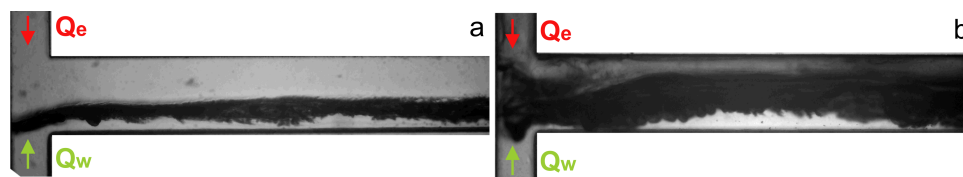


Рис 1. Эмболизация микроканала при различных режимах (а-частичная, б-полная)

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта правительства Российской Федерации № 14.W03.31.0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fennell V.S. *Hemodynamics Associated With Intracerebral Arteriovenous Malformations: The Effects of Treatment Modalities. Neurosurgery. 2018. V. 83. P. 611–621.*
2. Hakansson Karl M. O. et al. Hydrodynamic alignment and assembly of nanofibrils resulting in strong cellulose filaments. *Nature Communications. 2014. DOI: 10.1038/ncomms5018*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ С ОБРУШЕНИЕМ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ПРЕПЯТСТВИЕМ

С. Н. Яковенко¹, Г. Ю. Евтушок¹, А. В. Бойко¹, Н. В. Гаврилов²

¹Институт теоретической и прикладной механики им С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

²Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Проведено совместное физическое и математическое моделирование стратифицированных течений с плохообтекаемым телом, генерирующим внутренние волны. Развитые вычислительные технологии методов решения уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска [1] верифицированы в расчетах при различных параметрах геометрии препятствий (тонкого вертикального барьера, холмов различной формы), исходных полей плотности, чисел Рейнольдса Re , Фруда Fr , Шмидта Sc . Для распределения плотности в виде пикноклина (рис. 1) результаты показывают развитие зоны обрушения волн размера, намного большего высоты пикноклина (рис. 2).

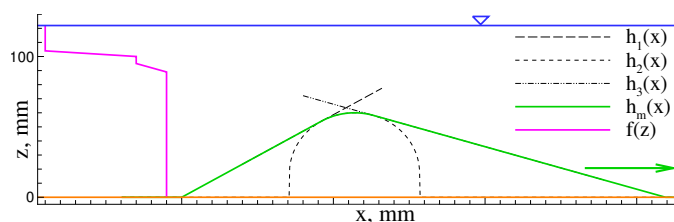


Рис. 1: Схема вычислений с буксируемым треугольным телом при $Re = hU/\nu \simeq 783$, $Sc = \nu/d \simeq 2000$, $Fr = U/(Nh^*) \simeq 0,19$, где $N^2 \simeq g(\rho_3 - \rho_1)/(\rho_3 h^*)$, h^* – высота пикноклина, $h_m(x)$ – форма тела, $f(z)$ – скаляр (отклонение плотности) при $t = 0$

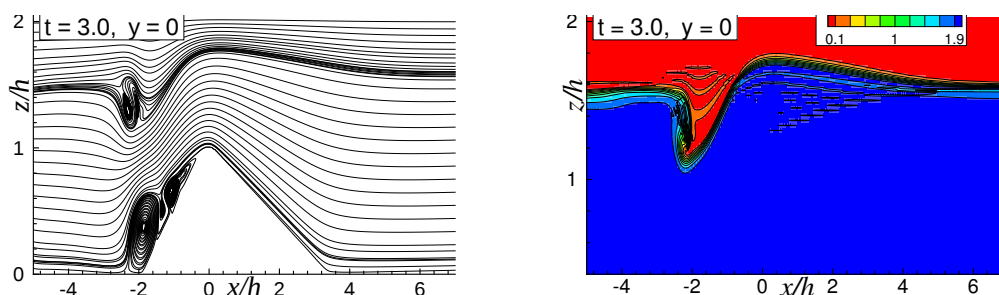


Рис. 2: Линии тока (слева) и изолинии скаляра в течении с «холмом» и стратификацией (вид сбоку): показано начало обрушения внутренней волны и развития вихрей

Работа выполнена при поддержке Проекта № 2 Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН II.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakovenko S.N., Thomas T.G., Castro I.P. *Transition through Rayleigh–Taylor instabilities in a breaking internal lee wave*. J. Fluid Mech. 2014. V. 760. P. 466–493.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ УПРУГИЙ ПОРИСТЫЙ СКЕЛЕТ

А. А. Янченко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Модель течения сжимаемой жидкости сквозь упругий пористый скелет выводится с применением метода гиперболических термодинамически согласованных систем законов сохранения, что обеспечивает правильную постановку задачи как с математической, так и с физической точки зрения. Данный подход успешно применялся для построения моделей течения двухфазных жидкостей. В общем виде такая система записывается в терминах порождающего термодинамического потенциала и порождающих переменных. При использовании этого подхода все уравнения системы принимают дивергентный вид, она может быть приведена к симметричной форме и является гиперболической при условии выпуклости порождающего потенциала [1, 2],

что позволяет применять уже разработанные методы для исследования и моделирования описываемого этой системой процесса.

Разработанный численный метод основан на методе конечных объемов. Для дискретизации по пространству применяется WENO/THINC (Tangent of Hyperbola for INterface Capturing)-алгоритмы, для дискретизации по времени — метод Рунге-Кутты. Для реализации граничных условий применяется метод характеристической декомпозиции [3].

В качестве модельной задачи рассматривается течение жидкости в упругой трубке, погруженной в другую трубку с жидкостью/пористой средой. Такая постановка является важной при исследовании распространения волн в артериальных системах, когда течение крови в сосуде оказывает воздействие на окружающую сосуд среду/ткань [4]. Для моделирования течения жидкости в упругой трубке, погруженной в другую трубку рассматривается двумерная по пространству начально-краевая задача для системы уравнений описывающих течение жидкости сквозь упругий пористый скелет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. Роменский Е. И. *Термодинамически согласованная система законов сохранения течения сжимаемой жидкости в пористой упругой среде*. Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 48.
2. Годунов С. К., Роменский Е. И. *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*. Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. Yanchenko A. A., Romenski E. and Khe A. K. *Numerical modeling of compressible fluid flow through elastic porous medium*. Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 894.
4. Cirovic S., Walsh C., Fraser W. D. *Wave propagation in a system of coaxial tubes filled with incompressible media: A model of pulse transmission in the intracranial arteries*. Journal of Fluids and Structures. 2002. V. 16, № 8. P. 1029–1049.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕМО- ЛИКВОРОДИНАМИКИ НА ПРИМЕРЕ ГИДРОЦЕФАЛИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МРТ

Г. С. Янькова^{1,3}, А. А. Черевко^{1,3}, А. К. Хе^{1,3}, А. А. Тулунов^{2,3}, О. Б. Богомякова²,
А. П. Чупахин^{1,3}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Международный томографический центр СО РАН, Новосибирск

³Новосибирский государственный университет

Гемо- и ликвородинамика играют важную роль в обеспечении нормальной работы головного и спинного мозга. Изменения в ликворной системе вызывают многие неврологические заболевания, а ее всестороннее исследование носит комплексный характер и является актуальной современной проблемой.

Одним из основных методов прижизненного изучения ликворной системы человека является магнитно-резонансная томография (МРТ). С помощью различных методик МРТ можно оценить структурное состояние вещества головного мозга, визуализировать ток цереброспинальной жидкости (ликвора) и количественно оценить его скоростные показатели [1]. С помощью фазо-контрастной МР-томографии в МТЦ СО РАН были проведены исследования ликвороциркуляции и церебрального кровотока у пациентов с гидроцефалией – заболеванием, при котором происходит патологическое расширение ликворных пространств в результате дисбаланса между продукцией и абсорбцией ликвора.

На основе интегральных данных МРТ о потоках ликвора и крови (как артериальной, так и венозной) предложена комплексная модель церебральной ликворогемодинамики человека. Модель включает в себя описание потоков крови и ликвора в среде (паренхиме) головного мозга. Данная модель описывает градиенты внутричерепного давления, динамику крови и ликвора и смещения стенок желудочков мозга в нормальных и патологических состояниях, таких как гидроцефалия [2]. Для проверки динамической модели полученные результаты сравнивались с физиологическими данными фазо-контрастной магнитно-резонансной томографии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 17-11-01156).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахметзянов Б.М., Кремнева Е.И., Морозова С.Н., et al. *Возможности магнитно-резонансной томографии в оценке ликворной системы в норме и при различных заболеваниях нервной системы*. Russian Electronic Journal of Radiology. 2018. Т. 8, №1. С. 145–166.
2. Tully B., Ventikos Y. *Cerebral water transport using multiple-network poroelastic theory: application to normal pressure hydrocephalus*. J. Fluid Mech. 2011. V. 667. P. 188–215.

NEW INVARIANTS AND CONSERVED INTEGRALS IN INVISCID FLUID FLOW

S. C. Anco

Department of Mathematics & Statistics, Brock University, Canada

Vorticity invariants and conserved helicity integrals have long been recognized to be important in the study of inviscid fluid flow, especially for understanding topological aspects of vortex flows and for studying existence, uniqueness, and stability of initial-value flows. For a general hydrodynamical system, an *invariant* is a material quantity constructed from the fluid variables (and possibly their spatial derivatives) such that it is advected by the flow. Physically, this means that the quantity is frozen into the flow. Geometrically, an invariant has the property that its advective Lie derivative vanishes.

Only a few basic local vorticity invariants are known for inviscid fluid flow [4] in three dimensions (although more invariants exist in higher dimensions [1, 2]). These include the densitized vorticity vector $(1/\rho)\vec{\omega}$ in isothermal flow, and Ertel's invariant $(1/\rho)\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} S$ in

adiabatic flow. Here $\vec{u}$ is velocity, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ is vorticity, ρ is density and S is entropy. There also exist nonlocal invariants, such as the Ertel-Rossby invariant for barotropic flow and the Hollmann invariant for adiabatic non-barotropic flow, which arise from Clebsch variables related to Weber transformations.

Building on the work in Refs.[4, 5], an explicit method is presented [3] for recursively deriving a complete set of invariants starting from the basic known local and nonlocal invariants. The method utilizes a small number of algebraic and differential material operations that can be applied to any set of scalar, vector, tensor invariants to yield further invariants. Formulation of such operations is a non-trivial problem because the vector dot product and cross product are *not advected* in fluids.

These material operations are used to obtain infinite hierarchies of local and nonlocal invariants for both adiabatic fluids and isentropic fluids that are either incompressible, or compressible with barotropic and non-barotropic. Each hierarchy is complete in the sense that no further invariants can be generated from the basic local and nonlocal invariants. All of the resulting new invariants are related to Ertel's invariant, the Ertel-Rossby invariant, and Hollmann's invariant. The physical meaning of these new invariants and the resulting conserved integrals are discussed, and their relationship to conserved helicities and cross-helicities is described.

REFERENCES

1. Anco S. C. *New conserved vorticity integrals for moving surfaces in multi-dimensional fluid flow*. J. Math. Fluid Mech. 2013. V. 15. P. 439–451.
2. Anco S. C., Dar A., Tufail N. *Conserved integrals for inviscid compressible fluid flow in Riemannian manifolds*. Proc. Roy. Soc. A 2015. V. 471. 20150223 (24 pages).
3. Anco S. C., Webb G. *Hierarchies of new invariants and conserved integrals in inviscid fluid flow*. To appear, J. Fluid. Mech. 2019.
4. Tur A. V., Yanovsky V. V. *Invariants in dissipationless hydrodynamic media*. J. Fluid Mech. 1993. V. 248. P 67–106.
5. Webb G. M., Dasgupta B., McKenzie J. F., Hu Q., Zank G. P. *Local and nonlocal advected invariants and helicities in magnetohydrodynamics and gas dynamics I: Lie dragging approach; ibid, II. Noether's theorems and Casimirs*. J. Phys. A: Math. Theor. 2014. V. 47. 095501 (33 pages); 095502 (31 pages).

GENERALIZED KELVIN-VOIGT EQUATIONS FOR NONHOMOGENEOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

S. N. Antontsev^{1,2}, H. B. De Oliveira³, K. Khompysh⁴

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, SB RAS, Novosibirsk, Russia*

²*CMAF-CIO, University of Lisbon, Lisbon, Portugal*

³*Universidade do Algarve, Faro, Portugal*

⁴*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

This talk is devoted to study the generalized Kelvin-Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms for incompressible and nonhomogeneous fluid, that is, with a

variable density. Existence of solutions and large time behavior properties are considered for the following initial-boundary value problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \\ \nabla \pi + \operatorname{div} \left(\kappa |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^{q-2} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{v})}{\partial t} + \mu |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^{p-2} \mathbf{D}(\mathbf{v}) \right) + \gamma |\mathbf{v}|^{m-2} \mathbf{v} + \rho \mathbf{f} \quad \text{in } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{and} \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } Q_T, \\ \rho \mathbf{v}|_{t=0} = \rho_0 \mathbf{v}_0 \quad \text{and} \quad \rho|_{t=0} = \rho_0 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_T \end{aligned}$$

where $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = 1/2(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $d \geq 2$. Here the unknowns are the vector field $\mathbf{v}$, the density ρ and the scalar field of pressure π . The coefficients κ , μ and γ and the exponents p , q and m are given constants. A fundamentally new point here is the presence of the hyperbolic transport equation for the density ρ and nonlinear terms describing the presence of sources or absorption and the case $p \in (1, \infty)$. Two different cases are considered. In the case $\gamma < 0$ (with an absorption term), we prove that the solution of the associated problem exists globally in time and exponentially and power decay. In the case $\gamma > 0$ (with nonlinear source term), we analyze local existence under suitable assumptions on the exponents p , q , m , on the coefficients μ , κ , γ , and for certain initial data. The detailed proofs can be found in [1, 2]. The first author was partially supported by Grant №14.W03.31.0002 of Russian Federation government, Russia.

REFERENCES

1. Antontsev S, Khompysh Kh. *Kelvin-Voigt equation with p -Laplacian and damping term: Existence, uniqueness and blow-up*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. V. 446. P. 1255–1273.
2. Antontsev S, Khompysh Kh. *Generalized Kelvin-Voigt equation with p -Laplacian and source/absorption terms*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2017. V. 456. P. 99–116.

STRUCTURE OF THE HYDRAULIC JUMP IN CONVERGENT RADIAL FLOWS

S. L. Gavrilyuk

Aix Marseille Univ, CNRS, IUSTI, Marseille, France

We are interested in the modelling of multi-dimensional turbulent hydraulic jumps in convergent radial flow. To describe the formation of intensive eddies (rollers) at the front of the hydraulic jump, a new model of shear shallow water flows is used. The governing equations form a non-conservative hyperbolic system with dissipative source terms. The structure of equations is reminiscent of generic Reynolds-averaged Euler equations for barotropic compressible turbulent flows.

Two types of dissipative term are studied. The first one corresponds to a Chézy-like dissipation rate, and the second one to a standard energy dissipation rate commonly used in compressible turbulence. Both of them guarantee the positive definiteness of the Reynolds stress tensor. The equations are numerically solved by using an original splitting procedure. Numerical results for both types of dissipation are presented and qualitatively compared with the experimental works. The results show both experimentally observed phenomena (cusp formation at the front of the hydraulic jump) as well as new flow patterns (the shape of the hydraulic jump becomes a rotating square).

This is a joint talk with Kseniya Ivanova (Institut für Mathematik, Zurich).

PERIODIC TRAJECTORIES IN GENE NETWORKS MODELS

V. P. Golubyatnikov

Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk

We study “positive” trajectories of 5-dimensional block-linear dynamical system

$$\dot{x}_1 = L(x_5) - x_1; \quad \dot{x}_j = L(x_{j-1}) - x_j, \quad j = 2, 3, 4, 5 \quad (1)$$

where $L(x) = A > 1$ for $x \in [0, 1]$ and $L(x) = 0$ for $x > 1$. This system simulates gene network functioning, cf. [1, 2]. We do not consider this system at the point $E = (1, 1, 1, 1, 1)$ where all right-hand sides of the equations (1) have discontinuities.

The cube $Q^5 = [0, A]^5$ is an invariant domain of the system (1). The planes $x_j = 1$, $j = 1, 2, \dots, 5$ decompose it by 32 parallelepipeds (blocks). We enumerate these blocks by boolean multi-indices: $\{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5\}$, so that $\varepsilon_j = 0$ if for all points of the block $x_j < 0$, and $\varepsilon_j = 1$ otherwise. The diagonal $\Delta := \{x_1 = x_2 = \dots = x_5\}$, $x_j \neq 1$, of Q^5 consists of positive trajectories of its two vertices $(0, 0, 0, 0, 0)$ and (A, A, A, A, A) .

It was shown in [2] that for $A > 1$ the system (1) has a cycle $\mathcal{C}_1$ which passes through the sequence of the blocks (let W_1 be their union)

$$\rightarrow \{101010\} \rightarrow \{00101\} \rightarrow \{01101\} \rightarrow \{01001\} \rightarrow \{01011\} \rightarrow \{01010\} \rightarrow \{11010\} \rightarrow \dots$$

Now, we show that for $A^2 > 5(A - 1)$, the system (1) has one more cycle $\mathcal{C}_2$ which passes through the different sequence of the blocks (let W_2 be their union)

$$\rightarrow \{11100\} \rightarrow \{11000\} \rightarrow \{11001\} \rightarrow \{10001\} \rightarrow \{10011\} \rightarrow \{00011\} \rightarrow \{00111\} \rightarrow \dots$$

Each of the cycles $\mathcal{C}_k$, $k = 1, 2$, is contained in an invariant 2-dimensional polyhedral surface S_k , each of these surfaces has a single vertex E . We decompose the cube Q^5 by invariant subsets $Q^5 = E \cup \Delta \cup (\mathcal{C}_1 \times B^4) \cup (\mathcal{C}_2 \times B^1)$. Here B^m is an m -dimensional open ball, $W_1 \subset \mathcal{C}_1 \times B^4$, and $\mathcal{C}_2 \times B^1 = S_2$. Moreover, W_1 is an invariant domain of the system (1), and W_2 is not invariant.

The cycle $\mathcal{C}_2$ is unstable. It follows from [3] that the cycle $\mathcal{C}_1$ is stable.

The work was supported by RFBR (grant 18-01-00057).

REFERENCES

1. Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. *On two classes of nonlinear dynamical systems: The four-dimensional case*. SMJ. 2015. V. 56, № 2. P. 231–236.
2. Gaidov Yu. A., Golubyatnikov V.P. *On cycles and other geometric phenomena in phase portraits of some nonlinear dynamical systems*. In: “Geometry and Applications” *Proceedings in Mathematics & Statistics*. NY.: Springer. 2014. V. 72. P. 225–233.
3. Golubyatnikov V.P., Ivanov V.V. *Cycles in the odd-dimensional models of circular gene networks*. Journ. of Applied and Industrial Math. 2018. V. 12, № 2. P. 648–657.

CONFORMAL INVARIANCE OF THE ZERO-VORTICITY ISOLINES IN 2D TURBULENCE

V. N. Grebenev^{1,2}, M. Waclawczyk³, M. Oberlack^{4,5}

¹*Institute of Computational Technologies, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*Institute of Mathematics and Statistics, University of Sao Paulo, Brazil*

³*Institute of Geophysics, Faculty of Physics, University of Warsaw, Warsaw, Poland*

⁴*Chair of Fluid Dynamics, Department of Mechanical Engineering, TU Darmstadt, Darmstadt, Germany*

⁵*Center for Computational Engineering, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, Germany*

It was clearly validated experimentally in [1] that the zero-vorticity isolines in 2D turbulence belongs to the class of conformal invariant SLE_κ (Schram–Löwner evolution) curves with $\kappa = 6$. The diffusion coefficient κ classifies the conformally invariant random curves. With this motivation, we performed a Lie group analysis in [2] of the first equation (i.e. for the evolution of the 1-point probability density function (PDF) $f_1(\mathbf{x}_{(1)}, \omega_{(1)}, t)$) of the inviscid Lundgren-Monin-Novikov (LMN) equations for 2D vorticity fields. We proved that the conformal group (CG) is broken for the 1-point PDF but the CG is recovered for the equation restricted on the characteristics with zero-vorticity. As for the zero-vorticity isolines, it implicitly leads to their CG invariance. The main focus of the present work is directed to a Lie group analysis of the characteristic equations of the inviscid LMN hierarchy truncated to the first equation. With this, the CG invariance of the characteristics with zero-vorticity is explicitly derived. Actually, this chain describes the motion of Lagrangian fluid particles that are moving within the conditionally averaged velocity fields. We also show the CG invariance of the separation and coincidence properties of the PDFs. Besides the derivation of the CG invariance of the zero-vorticity isolines, we demonstrate that the infinitesimal operator admitted by the characteristic equations forms a Lie algebra which is the Witt algebra, whose central extension represents exactly the Virasoro algebra. The numerical value of the central charge c occurring here could not be calculated exactly without additional impact into the mathematical tools. But from the

previous DNS results performed by Bernard *et al* the value $c = 0$ is given and corresponds to $\kappa = 6$ for the SLE_κ .

VG acknowledges the financial support of FAPESP Foundation, Brazil (Grant № 2018/21330-2) and partially DAAD (German Academic Exchange Service, 2017 grant number 57314018). MW acknowledges the financial support of the National Science Centre, Poland (project № 2014/15/B/ST8/00180).

REFERENCES

1. Bernard D., Boffetta G., Celani A., Falkovich G. *Conformal invariance in two-dimensional turbulence*. Nature Physics. 2006. V. 2, №2. P. 124–128.
2. Grebenev V.N., Waławczyk M., Oberlack M. *Conformal invariance of the Lundgren-Monin-Novikov equations for vorticity fields in 2D turbulence*. J. Phys. A: Math. Theor. 2017. V. 50, №43. P. 435502-44.

UNIVERSAL PARABOLIC REGULARIZATION OF THE GRADIENT CATASTROPHES FOR THE BURGERS-HOPF EQUATION AND JORDAN CHAIN

B. Konopelchenko

University of Salento and INFN, Lecce, Italy

Non-standard parabolic regularization of gradient catastrophes for the Burgers- Hopf equation and integrable hydrodynamic type systems with the most degenerate Jordan blocks is considered. An approach is based on the analysis of the generic and all higher order gradient catastrophes and their step by step regularization by embedding the Burgers-Hopf equation and Jordan systems into integrable multi-component parabolic systems of quasi-linear PDEs with the most degenerate Jordan blocks. Probabilistic realization of such procedure is discussed. The complete regularization is achieved by embedding into infinite Jordan chain. It is shown that the Burgers equation, Korteweg-de Vries equation and other nonlinear PDEs are particular reductions of the Jordan chain.

REFERENCES

1. Konopelchenko B., Ortenzi G. *Parabolic regularization of the gradient catastrophes for the Burgers-Hopf equation and Jordan chain*. J. Phys. A: Math. Theor. 2018. V. 51. 275201.

ON A MATHEMATICAL MODEL OF BREAKING WATER WAVE

N. Koshkarbayev^{1,2}, B. Torebek^{1,2}

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

²*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

This note is devoted to the initial boundary value problem for the third order shallow water equation in a finite domain. This particular problem arises from the phenomenon of long wave with small amplitude in fluid [1]. For certain initial-boundary problems for the third order shallow water equation, we obtain the conditions of blowing-up of global solutions in finite time. The proof of the results is based on the nonlinear capacity method [2]. In closing, we provide the exact and numerical examples.

This research is financially supported by a grant № AP05131756 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

1. Sarpkaya T., Isaacson M. *Mechanics of wave forces on offshore structures*. Van Nostrand Reinhold. 1981.
2. Mitidieri E., Pokhozhaev S. I. *A priori estimates and blow-up of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities*. Proc. Steklov Inst. Math. 2001. V. 234. P. 1—362.

RECONSTRUCTION OF TSUNAMI SOURCE BY A PART OF WAVE TIME SERIES BEFORE THE FIRST MAXIMUM

D. A. Kuzakov¹, M. M. Lavrentiev^{1,2}, A. G. Marchuk³

¹*Novosibirsk State University, Novosibirsk*

²*Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk*

³*Institute of Computational Mathematics and Math Geophysics, Novosibirsk*

Time is a very important parameter for any tsunami warning system. The earlier realistic danger of the wave is obtained, the better are safety measures, which lead to less casualties and economy loss. From only 20 minutes (typical time for the wave to approach nearest coast after earthquake offshore Japan) nearly a half is required for the wave to reach the bottom pressure sensor. Extra minute or even two-three minutes (depending on the size of initial sea bed displacement area) are needed for the wave to pass over the sensor. After that the wave profile (time series) is available for analysis.

We propose to determine the basic parameters of tsunami source by a quarter of the wave period, say, the part from beginning until the first maximum and slightly beyond. This would save 1-2 minutes for the safety measures.

Source parameters are determined by the orthogonal decomposition approach, described in [1]. The method is based on “Calculation in Advance” strategy, so a reasonable approximation of the source parameters are calculated by the data from just one sensor. In [2]

the authors observe that depending on mutual positions of the tsunami source and the sensor, up to 20% of the wave period is enough for the source reconstruction. However, it was not clear in advance, which part of the wave period is enough for particular pair source-sensor. Moreover, having only a part of wave profile one can only guess about the ratio of such part to the entire wave period.

Part of the wave until the first maximum is clearly identified during the measurements. So, for the given sensor location we determine location of tsunami source (moving it along the given subduction zone), for which a part of the wave period until the first maximum provides a correct approximation of tsunami source.

To calculate the wave profile at sensor we use special hardware accelerator, based on Field Programmable Gates Array microchip, [2].

REFERENCES

1. Romanenko A., Tatarintsev P. *Algorithm for reconstruction of the initial surface disturbance at the tsunami epicenter*. Proc. of Novosibirsk State University, Information Technologies. 2013. V. 11. № 1. P. 113–123.
2. Kuzakov D., Lavrentiev M., Marchuk An. *Determination of Initial Sea Surface Displacement at Tsunami Source by a Part of Wave Profile*. Proc. OCEANS'18 MTS/IEEE Kobe, Japan May 28-31, 2018.
3. Lavrentiev M. M., Romanenko A. A., Oblaukhov K. K., Marchuk An. G., Lysakov K. F., Shadrin M. Yu. *FPGA Based Solution for Fast Tsunami Wave Propagation Modeling*. The 27th International Ocean and Polar Engineering Conference, San Francisco, California, USA. 2017. P. 924–929.

EXPANSION OF THE STRONGLY INTERACTING SUPERFLUID FERMIONIC GAS: SYMMETRY AND SELF-SIMILAR REGIMES

E. A. Kuznetsov

P. N. Lebedev Physical Institute RAS, Moscow

L. D. Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Chernogolovka

Skolkovo Institute of Science and Technology, Skolkovo

We consider an expansion of the strongly interacting superfluid Fermion gas in the vacuum in the so-called unitary regime when the chemical potential $\mu \propto \hbar^2 n^{2/3}/m$ where n is the density of the Bose-Einstein condensate of Cooper pairs of fermionic atoms. Such expansion can be described in the framework of the Gross-Pitaevskii equation (GPE) [1]. Because of the chemical potential dependence on the density $\sim n^{2/3}$ the GPE has additional symmetries resulting in existence of the virial theorem connected the mean size of the gas cloud and its Hamiltonian. It leads asymptotically at $t \rightarrow \infty$ to the ballistic expansion of the gas. We carefully study such asymptotics and reveal a perfect matching between the quasi-classical self-similar solution and the ballistic expansion of the non-interacting gas [2]. This matching is governed by the virial theorem derived in [3] utilizing the Talanov transformation [4] which was first obtained for the stationary self-focusing of light in the media with cubic nonlinearity due to the Kerr effect. In the

quasi-classical limit the equations of motion coincide with 3D hydrodynamics for the perfect gas with $\gamma = 5/3$ which, as it was demonstrated by L.V. Ovsyannikov [5] and S.I. Anisimov and Yu.I. Lysikov [6], have additional symmetry. Just this symmetry provides one to find self-similar solution which describes, on the background of the gas expansion, the angular deformations of the gas shape in the framework of the Ermakov–Ray–Reid type system.

The work of E.K. was performed under support of the Russian Science Foundation (grant 19-72-30028).

REFERENCES

1. Pitaevskii L. P. *Superfluid Fermi liquid in a unitary regime*. Physics Uspekhi. 2008. V. 51. P. 603–608.
2. Kuznetsov E. A., Kagan M. Y., Turlapov A. V. *Expansion of the strongly interacting superfluid Fermi gas: symmetries and self-similar regimes*. arXiv:1903.04245 2019. Phys. Rev. A (submitted).
3. Kuznetsov E. A., Turitsyn S. K. *Talanov transformation in self-focusing problems and instability of stationary waveguides*. Phys.Lett. 1985. V. 112. P. 273–276.
4. Talanov V. I. *On the self-focusing of light in the cubic media*. Pis'ma Zh.Eksp.Teor.Fiz. 1970. V.11. P. 303.
5. Ovsyannikov L. V. *New solution of the hydrodynamic equations*. Sov. Doklady. 1956. V. 111(1). P. 47–49.
6. Anisimov S. I., Lysikov Y. I. *Expansion of a gas cloud in vacuum*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1970. V. 34. P. 882–885.

DEPENDENCE OF TSUNAMI WAVE MAXIMAL HEIGHTS ALONG A COASTLINE ON THE SOURCE LOCATION

*M. M. Lavrentiev^{1,2}, K. F. Lysakov^{1,2}, A. G. Marchuk³,
K. K. Oblaukhov², M. Y. Shadrin^{1,2}*

¹*Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk*

²*Novosibirsk State University, Novosibirsk*

³*Institute of Computational Mathematics and Math Geophysics, Novosibirsk*

The authors address an important problem of timely evaluation of tsunami danger after offshore underwater earthquake. In case of Japan it takes nearly 20 minutes for the wave to approach the nearest coast after the seismic event. In this paper we provide the instrument for allocation of dangerous areas along the given coast line for a particular position of the earthquake epicentre.

Tsunami wave propagation is simulated by a version of the shallow water system [1]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(Hu)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

where $H(x, y, t) = \eta(x, y, t) + D(x, y)$ – is the entire height of water column, $\eta(x, y, t)$ – being the sea surface disturbance (wave height), $D(x, y)$ – depth (which is supposed to be known for all grid points), t – time, $u(x, y, t)$ and $v(x, y, t)$ – components of velocity vector, g – acceleration of gravity.

Using the proposed the authors accelerates dramatically numerical treatment of tsunami wave propagation, see [2]. As was shown by comparison with the known analytic form of solution (for selected special bathymetry), precision of numerical results are the same when using the MOST software.

In this paper we move the typical initial seabed disturbance at tsunami source along the given subduction zone to track the dangerous tsunami maximal heights at the coastline under consideration.

As the result, for the given point (or even area of the coast) we will specify the earthquake epicentre location, which would result in dangerous large tsunami wave heights. In the future it will help local authorities, as well as to the national tsunami warning centres, to improve the quality of the safety measures after the offshore seismic events.

REFERENCES

1. Titov V. V., Gonzalez F. I. *Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model*. NOAA Technical Memorandum ERL PMEL-112, Seattle, WA. 1977.
2. Lavrentiev M. M., Romanenko A. A., Oblaukhov K. K., Marchuk An. G., Lysakov K. F., Shadrin M. Yu. *FPGA Based Solution for Fast Tsunami Wave Propagation Modeling*. The 27th International Ocean and Polar Engineering Conference, San Francisco, California, USA. 2017. P. 924–929.

ON A NEW INFINITE DIMENSIONAL HIERARCHY OF MULTIPOINT CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF TURBULENCE

D. Plumacher¹, M. Oberlack^{1,2}

¹*Chair of Fluid Dynamics, Department of Mechanical Engineering, TU Darmstadt, Darmstadt, Germany*

²*Center for Computational Engineering, Technische Universitat Darmstadt, Darmstadt, Germany*

There are three well known and mutual equivalent mathematical models for the statistical description of turbulent flow, the multipoint correlation approach (MPC), the famous Hopf functional approach and the Lundgren-Monin-Novikov (LMN) hierarchy. The latter consists of an infinite hierarchy of equations for the n -point probability distribution functions f_n (pdf) of the velocity field, whereas the Hopf approach is based on the characteristic functional Φ associated to the (conceptual) probability measure $\mathcal{P}$ on all solenoidal flow fields.

A symmetry analysis for the MPC approach was conducted in [1] and first steps towards the group analysis for the LMN hierarchy was started in [2]. Due to the nature of the LMN hierarchy, i.e. each equation contains non-local integral terms, such an analysis is difficult because a complete symmetry theory of integro-differential equations is still missing. Though first attempts have been made e.g. in [3], a similar task for the Hopf functional approach also possesses some serious technical difficulties rendering it highly impractical at this moment.

Therefore we propose a new model which can be considered as an intermediate step between the LMN hierarchy and the Hopf functional approach. Instead of considering the full characteristic functional Φ on the phase space of all flow fields, we introduce a hierarchy of characteristic functions associated to the finite dimensional projections f_n of the measure $\mathcal{P}$ on full function space. The advantage of this approach is the possibility to transform the non-local terms of the LMN hierarchy into local terms in this new hierarchy, rendering it more accessible to the standard tools of group analysis. We present some first results of the symmetry analysis of this new hierarchy.

REFERENCES

1. Andreas M. Rosteck, *Scaling Laws in Turbulence - A Theoretical Approach Using Lie-Point Symmetries*. 2014. PhD. Thesis
2. M. Waclawczyk, et.al. *Lie symmetry analysis of the Lundgren–Monin–Novikov equations for multi-point probability density functions of turbulent flow*. J. Phys. A: Math. Theor. 2017. V. 50, № 17. P. 175501.
3. Janocha, Waclawczyk, Oberlack *Lie Symmetry Analysis of the Hopf Functional-Differential Equation*. Symmetry. 2015. V. 7, № 3. P. 1536–1566.

BASINS OF ATTRACTION OF NONLINEAR SYSTEMS' EQUILIBRIUM POINTS: STABILITY, BRANCHING AND BLOW-UP

N. Sidorov¹, D. Sidorov^{1,2}, Y. Li³

¹*Irkutsk State University*

²*Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk*

³*Hunan University, Changsha*

This talk presents a nonlinear dynamical model which consists of the following system of differential and operator equations

$$A \frac{dx}{dt} = F(x, u), \quad (1)$$

$$0 = G(x, u). \quad (2)$$

Here differential equation contains a nonlinear operator acting in Banach space, a nonlinear operator equation with respect to two elements from different Banach spaces.

This system is assumed to enjoy the stationary state (rest points or equilibrium). The Cauchy problem with the initial condition with respect to one of the desired functions is

formulated. The second function controls the corresponding nonlinear dynamic process, the initial conditions are not set. The sufficient conditions of the global classical solution's existence and stabilization at infinity to the rest point are formulated [2]. It is demonstrated that a solution can be constructed by the method of successive approximations under the suitable sufficient conditions. If the conditions of the main theorem are not satisfied, then several solutions may exist. Some of solutions can blow-up in a finite time, while others stabilize to a rest point. The special case of considered dynamical models are nonlinear differential-algebraic equation (DAE) have successfully modeled various phenomena in circuit analysis, power systems [1], chemical process simulations and many other nonlinear processes. Three examples illustrate the constructed theory and the main theorem. Generalization on the non-autonomous dynamical systems concludes the article.

This work is fulfilled as part of the programm for Irkutsk State University development for 2015–2019 under the project “Singular operator-differential systems of equations and mathematical models with parameters”. It is partly supported by NSFC grant № 61673398 and programm of fundamental research of SB RAS, reg. № 17-117030310442-8, research project III.17.3.1. The results of this manuscript were partly reported on the Russian-Chinese Workshop Mathematical Modeling of Renewable and Isolated Hybrid Power Systems, lake Baikal, 26 August 2017 [3].

REFERENCES

1. Machowski J., Bialek J. W., Bumby J. R. *Power system dynamics. Stability and control*. Oxford: John Wiley, 2008.
2. Sidorov N., Sidorov D., Li Y. *Basins of attraction of nonlinear systems' equilibrium points: stability, branching and blow-up*. 2018. arXiv:1807.05487. P. 1–13.
3. Сидоров Д. Н., Ли Ю. *Российско-китайский семинар “Математическое моделирование электроэнергетических систем на возобновляемых источниках энергии и изолированные гибридные системы электроснабжения”*. 2017. Изв. ИГУ. Серия Математика. Т. 21. С. 122–126. DOI: 10.26516/1997-7670.2017.21.122

COMPUTING OF INTENSE INTER-PHASE INTERACTION IN GAS-SOLID MIXTURES FOR SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS: UNIFORM METHOD FOR EPSTEIN AND STOKES DRAG MODES

O. P. Stoyanovskaya^{1,3}, T. A. Glushko^{3,3}, F. A. Okladnykov³, V. N. Snytnikov^{2,3}

¹*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk*

²*Boreskov Institute of Catalysis SB RAS, Novosibirsk*

³*Novosibirsk State University*

Simulation of gas-solid mixtures is crucial in many applications: design of chemical reactors with dispersed catalysts, understanding the evolution of circumstellar discs and planet formation, etc. Modeling of circumstellar disc dynamics has some features: e.g. the typical size of dust particles varies significantly – from 1 micron to a few centimetres. It means that in one simulation run different drag modes take place: Epstein mode where

drag force is linearly dependent on the relative velocity between the gas and solid bodies, and Stokes mode where the drag force term is nonlinear[1]. An additional point is that velocity relaxation time between gas and solid bodies t_{stop} can be much less than dynamical timescale of the problem. It happens with small particles moving in linear Epstein drag mode. As a result - cross factors in computing of inter-phase interaction in gas-solid mixtures are stiffness of the problem (if the interaction is intense) and nonlinearity of the drag term. These factors place high requirements on the numerical methods for such simulations, especially when mutual momentum exchange between gas and dust particles must be taken into account.

In this paper we introduce a novel non-iterative algorithm based on Smoothed Particle Hydrodynamics for simulation of dust-gas media including ones with intense inter-phase interaction. This algorithm implicitly approximates drag force, whilst other forces (like pressure gradient) are approximated explicitly. For the drag term approximation relaxation time t_{stop} is obtained from gas and dust values from previous time step, while relative velocity is found from the current time step. This method is a natural extension of algorithm [2] developed for Epstein drag mode.

The developed algorithm was tested on several problems: (1) computing of trajectory of dust grain under gravitation of the central body and drag force which passes from linear to non-linear drag mode, (2) problem of sound wave propagation in gas-dust medium, (3) shock tube problem for loaded mixture of gas and dust. We found that developed algorithm is uniform, i.e. suitable for stiff problems with a short relaxation time t_{stop} and for nonlinear drag term computing.

REFERENCES

1. Rice W.K.M., Lodato G., Pringle J.E., et al. *Accelerated planetesimal growth in self-gravitating protoplanetary discs*. MNRAS. 2004. V. 355. P. 543–552.
2. Stoyanovskaya O.P., Glushko T.A., Snytnikov N.V., Snytnikov V.N. *Two-fluid dusty gas in smoothed particle hydrodynamics: Fast and implicit algorithm for stiff linear drag*. Astronomy and Computing. 2018. V. 25. P. 25–37.

CLASSICAL SOLVABILITY OF RADIAL VISCOUS FINGERING PROBLEM IN A HELE-SHAW CELL: VISCOUS NORMAL STRESS EFFECTS AND WETTING FILM EFFECTS

A. Tani

Department of Mathematics, Keio University, Yokohama, Japan

We discuss two-phase radial viscous fingering problem in a Hele-Shaw cell, which is a nonlinear problem with a free boundary for elliptic equations. Unlike the Stefan problem for heat equations Hele-Shaw problem is of hydrodynamic type. In this communication, we are concerned with the classical solvability of two-phase Hele-Shaw problem with radial geometry, which is established by applying the same method as for the Stefan problem and justifying the vanishing the coefficients of the derivative with respect to time in parabolic equations. In order to provide a more satisfactory agreement between theoretical and experimental results, we consider the above problems under the following two effects: the viscous normal stress effects; and the wetting film effects.

STUDIES OF FREE SURFACE EVOLUTION IN A DAM-BREAK FLOW ABOVE HORIZONTAL BOTTOM

S. N. Yakovenko¹, K. C. Chang², C. Lin³

¹*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk*

²*National Cheng Kung University, Tainan*

³*National Chung Hsing University, Taichung*

A dam-break flow of water above horizontal bottom is studied in numerical and physical experiments. Computational methods are formulated in [1]. The results are compared with the measurement data [2, 3]. According to [1], similar actions of both viscosity and surface tension effects lead to the motion suppression and, therefore, to acceleration decrease. This effect is clearly seen in Fig. 1 where values of $x_f(t)$ are closer to experimental points when the surface tension is taken into account.

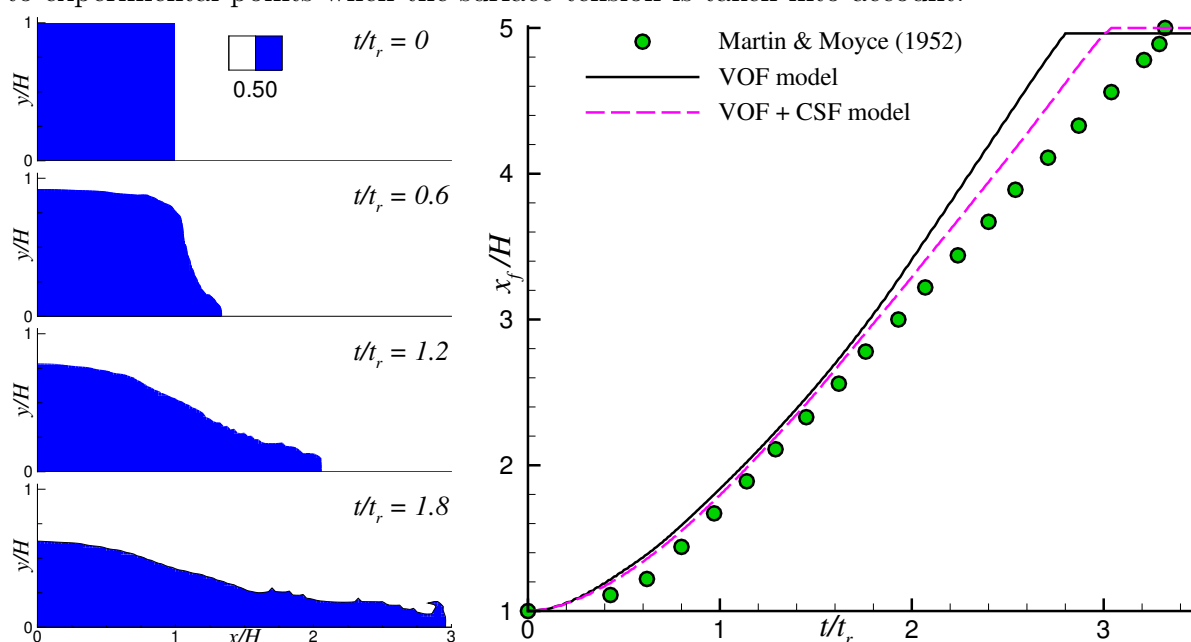


Fig. 1: Evolution of water volume fraction contours for dam-break flow over dry bed computed with CSF model (left), surge front position with and without CSF model (right).

REFERENCES

1. Yakovenko S.N. *The effects of density difference and surface tension on the development of Rayleigh–Taylor instability of an interface between fluid media*. Fluid Dynamics. 2014. V. 49, № 6. P. 748–760.
2. Martin J. C., Moyce W. J. *An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane*. Phil. Trans. Royal Soc. of London, Ser. A. 1952. V. 224.
3. Lin C., Kao M. J., Wong W. Y., Shao Y. P., Fu C. F., Yuan J. M., Raikar R. V. *Effect of leading waves on velocity distribution of undular bore traveling over sloping bottom*. European Journal of Mechanics B. Fluids. 2019. V. 73. P. 75–99.

Авторский указатель

А

Абенов М. М., 17
Агафонцев Д. С., 62
Агишева У. О., 18
Адиуллин Б. Р., 19
Аксаков А. В., 20
Аксенов А. В., 21, 22
Алабужев А. А., 23, 102
Алексеев Г. В., 24, 25
Аллилуева А. И., 26
Амосова Е. В., 26, 27
Андреев В. К., 28, 29
Аннин Б. Д., 30
Архипов Д. Г., 32
Афанасьев А. А., 33

Б

Багдерина Ю. Ю., 34
Байкин А. Н., 34, 54, 127, 184
Байков В. А., 20
Банщикова И. А., 35
Батищев В. А., 36
Баутин С. П., 37–39
Бекежанова В. Б., 40, 41
Белоносов В. С., 42
Белых В. Н., 43
Бельмещев Н. Ф., 210
Беляев В. А., 215
Бердников В. С., 44
Бессмельцев В. П., 76
Бильский А. В., 228
Блинов В. А., 45
Боброва Г. А., 202
Богданов А. Н., 46
Богомякова О. Б., 231
Бойко А. В., 80, 201, 229
Болотнова Р. Х., 47
Боровских А. В., 48
Борщук О. С., 20
Бризицкий Р. В., 24, 49
Брындин Л. С., 215
Бублик В. В., 50
Бугаенко А. А., 51
Бузник В. М., 52

Булатов В. В., 53
Бутов А. А., 214

В

Валов А. В., 54
Ванина В. С., 201
Вахитова Р. Д., 55
Вдовенко И. И., 18
Веденеев В. В., 56, 57
Вигдорович И. И., 58
Вирц Р. А., 59
Владимиров Ю. В., 53
Воеводин А. В., 189
Володько О. С., 60
Волошин А. С., 151

Г

Гаврилов Н. В., 229
Гаджиев Д. А., 61
Газизов Р. К., 60
Гайнетдинова А. А., 60
Гайнуллина Э. Ф., 47
Гайфуллин А. М., 61
Галимзянов М. Н., 18
Галичкина М. А., 62
Гареев Л. Р., 56
Гелаш А. А., 62, 101
Георгиевский П. Ю., 63, 64
Головин С. В., 66, 93, 127, 182
Гологуш Т. С., 67
Голубятников А. Н., 68, 69
Голушко С. К., 52, 215
Голых Р. Н., 70, 202
Гомонова О. В., 180
Гончарова О. Н., 40, 71
Гордиенко М. Р., 92
Григорьев А. С., 72
Григорьев Ю. Н., 73, 74
Гришин М. А., 75, 76
Губайдуллин А. А., 77
Губарев Ю. Г., 78
Губкин А. С., 77
Гузев М. А., 79
Гусельникова О. О., 44

Д

Даржаин А. Э., 80
 Демешкин А. Г., 119
 Денисенко Н. С., 81
 Держо О. Г., 82
 Доброхотов С. Ю., 21, 82
 Доксуа Т., 164
 Докукова Н. А., 83
 Донцов Е. В., 54, 184
 Дружков К. П., 21, 22
 Дубовой А. В., 125, 155
 Дударев В. В., 141
 Дьяченко А. И., 101

Е

Евтушок Г. Ю., 229
 Егорушкин В. Е., 150
 Езендеева Д. П., 92
 Ерманык Е. В., 164, 221
 Ермишина В. Е., 105
 Ермоленко А. И., 109
 Ершов И. В., 73
 Ефимова М. В., 84

Ж

Жалнина А. А., 85, 120
 Жвик В. В., 61
 Жилин А. А., 114
 Жук А. В., 110
 Журавлева Е. Н., 90
 Журавлева Е. С., 86

З

Зайко Ю. С., 56, 57
 Зайковский В. Н., 103
 Замураев В. П., 87
 Захаров В. Е., 101
 Захарченко К. В., 88
 Земляк В. Л., 165
 Зубарев Н. М., 89, 90
 Зубарева О. В., 89
 Зубцов А. В., 61

И

Ибен У., 91
 Иванов О. О., 68
 Иванова Н. А., 40
 Иванова О. Н., 87

Игнатъев П. А., 77
 Игошин Д. Е., 77
 Иявойнен С. В., 35, 92

К

Кабардин И. К., 92
 Кавунникова Е. А., 93
 Казаков А. Л., 94, 96, 97
 Казакова А. О., 161
 Казачинский А. О., 51
 Кайгородцева А. А., 224
 Какаулин С. В., 92
 Калинина А. П., 87
 Калугин А. Г., 98
 Капранов Ю. И., 99
 Капустин В. И., 88
 Капцов Д. О., 99
 Капцов О. В., 99
 Карабут Е. А., 90
 Касимов А. Р., 100
 Качулин Д. И., 101
 Кашина М. А., 102
 Кедринский В. К., 86
 Кинеловский С. А., 103
 Киселев В. П., 103
 Киселев С. П., 103
 Клименко Л. С., 135
 Климонов И. А., 92
 Ключев Д. С., 40
 Ключанцев В. С., 225
 Князева А. Г., 104, 154
 Ковалев А. В., 228
 Ковтуненко П. В., 105, 184
 Ковыркина О. А., 106
 Козин В. М., 166
 Колотилов В. А., 107
 Колпаков А. Г., 108
 Коновалова С. И., 20
 Конон П. Н., 83, 109, 110
 Кононов С. Н., 38
 Конюхов А. В., 151
 Корнев В. М., 111
 Коробейников С. Н., 112
 Коробкин А. А., 220
 Кочурин Е. А., 89
 Кошелев К. Б., 113
 Кравченко А. С., 114

Крайко А. Н., 115
Крапошин М. В., 113
Крижановский В. В., 116
Крутова И. Ю., 51
Крылова Т. А., 213
Кузнецов И. В., 117
Кузнецов П. А., 94
Кукарин В. Ф., 129
Куликов И. М., 118
Кургузов В. Д., 119
Кучер Н. А., 85, 120
Куянова Ю. О., 121, 122

Л

Ларичкин А. Ю., 35, 88
Латышев А. А., 66
Левин В. А., 63, 64
Левунина Э. С., 38
Леган М. А., 45
Лемешкова Е. Н., 28
Лемперт А. А., 94
Леонтьев Н. Е., 123
Липатов И. И., 124
Липовка А. И., 125, 155
Лопатин Р. А., 70
Луценко Н. А., 126
Льготина Е. В., 127
Ляпидевский В. Ю., 128, 129

М

Маас Л., 164
Магденко Е. П., 29
Маевский К. К., 103
Макаренко Н. И., 130
Макридин З. В., 130
Маламанов С. Ю., 131
Мали В. И., 116
Малышенко О. В., 120
Маматюков М. Ю., 132
Мамонова Е. Е., 189
Мамонтов А. Е., 133
Марков В. Г., 134
Марчук А. Г., 135
Марышев Б. С., 135
Маслов Н. А., 155
Матвеев А. Д., 136
Махнов А. В., 91
Меграбов А. Г., 137

Меледин В. Г., 92
Мелешко С. В., 74, 139
Минаков В. Д., 70
Миренков В. Е., 139
Михайленко К. И., 19
Мишин А. В., 140
Мнухин Р. М., 141
Могилевский Е. И., 55, 142
Мошкин Н. П., 143
Мулляджанов Р. И., 144
Мусакаев Н. Г., 145

Н

Нгуен Ч. Х., 205
Неверов В. В., 128, 217
Недин Р. Д., 146
Нефедова О. А., 97
Нещади́м М. В., 147
Нужный Г. А., 52

О

Овчарова А. С., 41
Окулов В. Л., 148
Опрышко О. В., 51
Остапенко В. В., 67, 106, 149
Остросаблин Н. И., 30
Очиров А. А., 52

П

Панин В. Е., 150
Панин С. В., 150
Панкратов Л. С., 151
Панов А. В., 152
Папин А. А., 59, 153
Парфенова Е. С., 154
Паршин Д. В., 121, 122, 125, 132, 155, 191,
201, 203, 228
Пахомов М. А., 156
Пененко А. В., 157
Пененко В. В., 157
Пеньковская Н. А., 221
Перегудин С. И., 158, 159
Перегудина Э. С., 158, 159
Петренко И. А., 67
Петров А. Г., 161
Петров Н. В., 91
Петрова А. Г., 163
Пийе Г., 164

Пикмуллина Е. О., 211
 Платонова К. С., 48
 Погорелова А. В., 165, 166
 Попов Н. С., 166
 Попов С. В., 134
 Попова Д. С., 87
 Попова Т. С., 167
 Порошина А. Б., 168
 Правдина М. Х., 92
 Прокудин Д. А., 133
 Проскурин А. В., 169
 Протасов В. А., 118
 Псахье С. Г., 72
 Пухначев В. В., 170
 Пьянова Э. А., 157
 Пяткина Е. В., 171

Р

Раевская Г. А., 88
 Ракин С. И., 108
 Рафикова Г. Р., 172
 Рашковский С. А., 173
 Решмин А. И., 56, 174
 Розанова О. С., 175
 Романов В. Г., 176
 Рудой Е. М., 177
 Рылов А. И., 177

С

Савостьянова И. Л., 180
 Савченко А. В., 139
 Сагалаков А. М., 169
 Саженов С. А., 117
 Салганский Е. А., 126
 Сальников М. В., 178, 193
 Сантуччи С., 221
 Сарицкая Ж. Ю., 49
 Светов И. Е., 179
 Сенашов С. И., 180
 Сибгатуллин И. Н., 164
 Сибин А. Н., 181
 Сизова С. С., 182
 Сираева Д. Т., 183
 Сколубович Ю. Л., 212
 Скопинцев А. М., 184
 Слепцов С. Д., 75, 76
 Слюняев А. В., 185
 Солонников В. А., 186

Спевак Л. Ф., 96, 97
 Старовойтова Б. Н., 93
 Степанова И. В., 187
 Столповский М. В., 200
 Стрижак С. В., 113
 Стурова И. В., 188
 Судаков В. Г., 189
 Суриявичитсерании А., 74
 Сутырин О. Г., 64
 Сухинин Г. И., 178, 193
 Сюлинь С., 164

Т

Тагильцев И. И., 226
 Талышев А. А., 190
 Тепловодский С. Х., 174
 Терешко Д. А., 25
 Титов Г. А., 202
 Ткачева Л. А., 188
 Токарева М. А., 153
 Трифонов В. В., 56, 174
 Тулупов А. А., 201, 231
 Туров М. М., 152
 Турцынский М. К., 175

У

Украинский Д. В., 69
 Усов Э. В., 92, 214
 Уткина Е. А., 191

Ф

Фанкина И. В., 191
 Федоров В. Е., 192
 Федорова Д. В., 87
 Федосеев А. В., 178, 193
 Фецов С. С., 194
 Филимонов М. Ю., 196
 Филин М. А., 39
 Флер Я.-Б., 222
 Фукумото Я., 148
 Фурсиков А. В., 197
 Фурсова Д. А., 78
 Фурцев А. И., 177, 198

Х

Хабахпашев Г. А., 32
 Хабахпашева Т. И., 220
 Хабиров С. В., 199, 200

Хабиров С. С., 199, 200
Хасанов М. К., 172, 200
Хасанов М. О., 145
Хе А. К., 132, 201, 231
Хлуднев А. М., 202
Хмелев В. Н., 70, 202
Холодова С. Е., 158, 159
Храпченков Ф. Ф., 129

Ц

Цветова Е. А., 157

Ч

Чеботников А. В., 201, 203
Черевко А. А., 67, 81, 201, 204, 231
Черников А. Г., 218
Черных И. Г., 118
Чесноков А. А., 205
Чиркунов Ю. А., 206–212
Чумаков Ю. А., 213
Чупахин А. П., 80, 132, 155, 191, 201, 204, 228, 231
Чухно В. И., 214

Ш

Шалунов А. В., 202
Шапеев В. П., 215
Шафаревич А. И., 216
Шелухин В. В., 217
Шер Е. Н., 218
Шефер И. А., 219
Шилько Е. В., 72
Шишмарев К. А., 220
Шкадов В. Я., 110, 142
Шмакова Н. Д., 221, 222
Шмидт А. А., 91
Шмидт А. В., 223
Шундрин И. К., 228
Шутов А. В., 224–226

Щ

Щербаков В. В., 227

Ю

Юношев А. С., 155

Я

Яворский Н. И., 92, 227
Ягодницына А. А., 228

Яковенко С. Н., 229
Якуш С. Е., 173
Янченко А. А., 204, 230
Янькова Г. С., 231
Ярощук И. О., 129

A

Anco S. C., 232
Antontsev S. N., 233

C

Chang K. C., 245

D

De Oliveira H. B., 233

G

Gavrilyuk S. L., 234
Glushko T. A., 242
Golubyatnikov V. P., 235
Grebenov V. N., 236

K

Khompysh K., 233
Konopelchenko B., 237
Koshkarbayev N., 238
Kuzakov D. A., 238
Kuznetsov E. A., 239

L

Lavrentiev M. M., 238, 240
Li Y., 242
Lin C., 245
Lysakov K. F., 240

M

Marchuk A. G., 238, 240

O

Oberlack M., 236, 241
Oblaukhov K. K., 240
Okladnykov F. A., 243

P

Plumacher D., 241

S

Shadrin M. Y., 240
Sidorov D., 242
Sidorov N., 242

Snytnikov V. N., 243
Stoyanovskaya O. P., 243

T

Tani A., 244
Torebek B., 238

W

Wacławczyk M., 236

Y

Yakovenko S. N., 245

Выход в свет 22.04.2019.	Формат 60×84 1/8.	Офсетная печать.
Усл. печ. л. 18,5	Уч.-изд. л. 17,0	Тираж 225 экз. Заказ № 254.

Лицензия ПД N 12-0143 от 22.10.2001
Отпечатано на полиграфическом участке
Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, проспект акад. Лаврентьева, 15.