



**Денис Николаевич Сидоров**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИСЭМ СО РАН, доцент ИМЭИ ИГУ. Окончил математический факультет ИГУ в 1996г., аспирантуру ИСЭМ СО РАН в 2000г. В 2001 - 2004гг. и в 2010 - 2012гг. работал в рамочных проектах ЕС в колледже Тринити Дублинского университета (Ирландия), в технологическом университете Компьени (Франция), в Институте

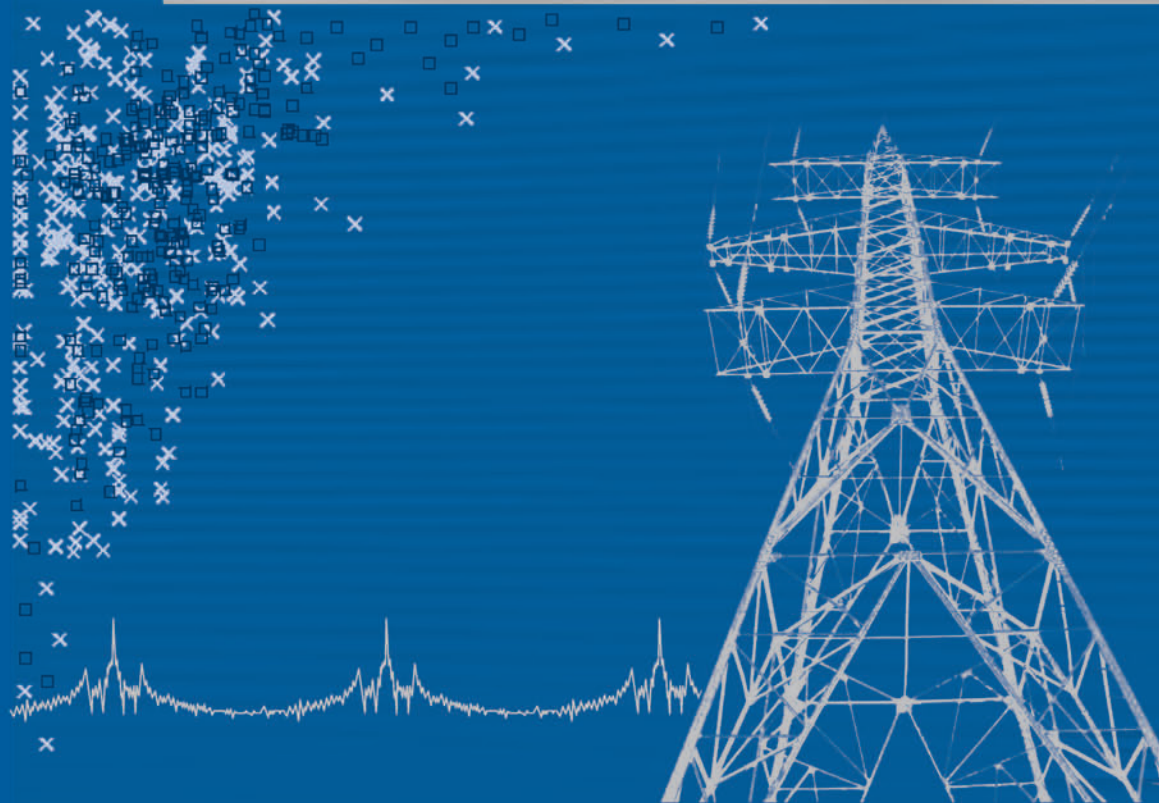
систем энергетики СО РАН руководил интеграционным научным проектом NATO "Numeric and Imaging Methods of Identification in Uncertain Enviroment". С 2005-2009гг. работал в ряде проектов компании VisionXtreme Pte Ltd холдинга ASTI (Сингапур). В 2012 - 2013 гг. — руководитель проекта «Сингулярные интегральные модели и преобразования: теория и приложения» в рамках ФЦП «Кадры». Член редколлегии журналов International Journal of Energy Optimization and Engineering, International Journal of Artificial Intelligence, член SIAM, IEEE, референт международных реферативных журналов по математике Zentralblatt MATH и Mathematical Reviews.

Д. Н. Сидоров **МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Д. Н. Сидоров

# МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Иркутский государственный университет»

Институт математики, экономики и информатики

**Д. Н. Сидоров**

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЕЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Монография



УДК 517.968  
ББК 22.161.6  
С34

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ  
Рекомендовано к печати Иркутским региональным отделом  
научно-методического совета по математике  
Министерства образования и науки Российской Федерации

**Издание выходит в рамках Программы  
стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ»  
на 2012–2016 гг., проект Р121-02-00&**

**Рецензенты:**

профессор *В. К. Горбунов*, профессор *А. Лоренци*  
профессор *В. С. Сизиков*

**Научный редактор** профессор *М. В. Фалалеев*

**Сидоров Д. Н.**

С34

Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения : монография / Д. Н. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.

**ISBN 978-5-9624-0813-2**

Излагаются методы анализа интегральных динамических моделей и их приложения. Даны основы теории линейных и нелинейных интегральных уравнений, используемых в моделировании динамических развивающихся систем. Доказаны теоремы существования и единственности гладких и обобщенных решений соответствующих уравнений. Предложены приближенные методы построения решений в нерегулярных случаях. Изложены методы обучения полиномиальных регрессионных интегральных моделей Вольтерра с приложениями в энергетике. Рассмотрены примеры использования интегральных моделей в реставрации и распознавании изображений.

Книга рассчитана на специалистов в области прикладной математики, интересующихся теорией и приложениями интегро-дифференциальных моделей. Отдельные главы могут быть использованы при подготовке магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области математического моделирования, дифференциальных уравнений, вычислительной математики, машинного обучения и обработки многомерных сигналов.

УДК 517.968  
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-9624-0813-2

© Сидоров Д. Н., 2013  
© ФГБОУ ВПО «ИГУ», 2013

## Введение

Интегральные модели позволяют изучать поведение динамических систем и процессов. Соответствующие процессы описываются интегральными динамическими моделями, в основе которых лежат интегральные и дифференциальные уравнения, интегральные преобразования, используется теория и методы обратных задач.

История развития теории интегральных уравнений и интегральных преобразований насчитывает более полутора столетий. Впервые такие системы привлекли внимание в конце XIX века в связи с фундаментальными вопросами, связанными с задачами естествознания. В наше время теория интегральных динамических моделей стала самостоятельной областью с приложениями не только в классических областях естественных и технических наук, но и в экономике, экологии, энергетике и в других областях.

Имеется большое количество статей и монографий, посвященных интегральным моделям и их приложениям в индустриальной математике, физике, биологии, экономике и в других областях науки, см. библиографию в [5; 58; 140; 192; 201–203; 223; 242; 276; 310]. Однако среди такого многообразия источников отсутствует изложение математических основ многих последних результатов и их приложений в моделировании динамических систем, использующих методы как непрерывной, так и дискретной математики, методы компьютерных наук. Цель данной монографии — частично восполнить такой пробел. Большое внимание уделено доказательству теорем существования и приближенным методам решения интегральных уравнений в нерегулярных случаях, интегральным отображениям и их приложениям.

Интегральными отображениями можно описывать большое многообразие процессов. Например, рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\int_a^b K(t, s)x(s) ds = f(t). \quad (1)$$

В случае известной функции  $f(t)$  и ядра  $K(t, s)$  данное уравнение — суть уравнение Фредгольма I рода относительно  $x(s)$ . С другой стороны, равенство (1) можно рассматривать как общее интегральное преобразование. Например, если положим  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ ,  $K(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-its}$ , а функ-

ции времени  $x$  и  $f$  – соответственно входным сигналом и выходным, то получим известное преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-its} x(s) ds = \hat{f}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) дает нам обратное преобразование Фурье. Подобным образом задается косинус преобразование

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(ts) x(s) ds = f(t)$$

– широко известный инструмент в обработке изображений, лежащий в основе формата сжатия JPEG. Преобразование Лапласа, преобразование Гильберта с сингулярным ядром, вейвлет преобразование, преобразование Радона – это далеко не полный ряд широко используемых на практике интегральных преобразований с различными ядрами.

Полагая в (1)  $a = -\infty$ ,  $b = t$ , получаем известное представление конечномерных линейных динамических систем в виде явной интегральной динамической модели с бесконечным запаздыванием

$$\int_{-\infty}^t K(t, s) x(s) ds = f(t),$$

где ядро Вольтерра  $K(t, s)$  – импульсная характеристика системы,  $x(t)$  входной вектор,  $f(t)$  – отклик системы.

Множество реальных физических и экономических систем описываются системами с обратной связью. Ряд экономических и технических систем в энергетике также являются системами с памятью. Обозначая через  $A(t, s)$  функцию, описывающую связь откликов системы с входными возмущениями, получаем

$$\int_{-\infty}^t K(t, s) A(t, s) f(s) ds = f(t).$$

Такие модели берут во внимание эффект памяти динамических систем, когда прошлое воздействует на развитие в будущем.

Эффект памяти может проявляться в существующей технологической и финансовой структуре физического капитала (оборудования). Продолжительность памяти определяется исходя из возрастных характеристик старшей единицы капитала (оборудования), находящейся в эксплуатации.

Матрица управления  $A(t, s)$  в экономической литературе обычно представляется в виде произведения  $\Lambda(t, s)Y(s)$ , где  $Y$  – распределение про-

дукции и матрица управления  $\Lambda(t, s)$  отражают динамику загрузки различного оборудования в производстве различной продукции. В конкретных интегральных моделях матрица  $\Lambda$  может принимать определенный вид и, например, описывать ситуацию, когда более эффективное оборудование замещает устаревающее. Таким образом, мы получаем модель Вольтерра

$$\int_{t_0}^t K(t, s)x(s) ds = f(t), \quad t \in [t_0, T] \quad (3)$$

с кусочно-заданными ядрами  $K(t, s)$ , претерпевающими разрывы I рода на эндогенных кривых запаздывания<sup>1</sup>. Примерами таких моделей являются макроэкономические модели, изучаемые в монографии<sup>2</sup>, интегральные модели Р. М. Солоу<sup>3</sup>. Такие интегральные модели берут начало от работ Л. В. Канторовича<sup>4</sup>. В 1973 Л. В. Канторович предложил новую интегральную макроэкономическую модель<sup>5</sup>, являющуюся развитием модели Солоу<sup>3</sup>. Независимо от Л. В. Канторовича, В. М. Глушков<sup>6</sup> ввел двухсекторную интегральную модель, использующую интегральные операторы вида  $Kx = \int_{a(t)}^t K(t, s)x(s) ds$ , в которых ядро  $K(t, s)$  определяет динамику старения системы, а функция  $a(t)$  – время жизни старейшей единицы капитала, находящейся в эксплуатации в момент времени  $t$ . Отметим, что при построении оптимальных стратегий (см., например, библиографию в [205]) обновления капитала необходим синтез макро и микроэкономических моделей, что в свою очередь требует агрегирования экономических субъектов, в том числе потребительского спроса [47]. Интегральные уравнения Вольтерра используются для моделирования причинных динамических систем с памятью.

Наряду с линейными моделями, в последнее время в прикладной математике интенсивно развиваются методы математического моделирования нелинейных интегральных динамических систем. Нелинейные системы позволяют глубже понять описываемый процесс, проследить и предсказать его развитие во времени. Достаточно общим подходом к математическому моделированию нелинейных динамических систем типа вход-выход (выход непрерывно зависит от входа) является представление отклика системы на

<sup>1</sup> N. Hritonenko and Yu. Yatsenko. Turnpike and Optimal Trajectories in Integral Dynamic Models with Endogenous Delay. Journal of Optimization Theory and Applications. Vol. 127, No. 1, 2005, pp. 109–127

<sup>2</sup> N. Hritonenko and Yu. Yatsenko. "Modeling and Optimization of the Lifetime of Technologies," Kluwer Academic Publishers, 1996

<sup>3</sup> R. M. Solow. "Investment and Technical Progress," in Mathematical Methods in the Social Sciences, 1969, ed. K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes. (Stanford, California: Stanford University Press, 1960), pp. 89–104

<sup>4</sup> Л. В. Канторович, Л. И. Горьков. «Функциональные уравнения одно-продуктовой модели». ДАН СССР, 129, No.4, 732–736 (1959)

<sup>5</sup> Л. В. Канторович, В. И. Жиянов. «Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса». ДАН СССР, 211, No.6, 1280–1283 (1973)

<sup>6</sup> В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яценко. Моделирование развивающихся систем. Москва: Наука, 1983. 350 с.

внешнее воздействие в виде интегро-степенного ряда Вольтерра, введённого в начале прошлого столетия Вито Вольтерра.

Разработка алгоритмов управления нелинейными динамическими системами с памятью является одной из актуальных производственных задач в индустриальной математике. В связи с этим, существенная часть настоящей монографии посвящена теории моделей на основе рядов Вольтерра с обратной связью, описывающих причинные нелинейные динамические системы с управляемой обратной связью. Такие интегральные модели возникают в результате обобщения интегро-функциональных рядов Вольтерра<sup>7</sup>, когда оценка переходных характеристик моделируемой системы уже проведена.

Хорошо известно, что нелинейные системы относятся к наиболее важным инструментам в моделировании реальных систем. Поэтому в главах 2 и 3 монографии большое внимание уделяется теории ряда общих классов нелинейных систем, в том числе исследованию режимов «blow-up» (разрушения решения) и так называемых «главных» решений в смысле Л. В. Канторовича<sup>8</sup>. Эти вопросы рассмотрены и для абстрактного нелинейного уравнения относительно непрерывной функции  $u(t) \rightarrow u_0$  при  $t \rightarrow 0$

$$\Phi\left(\int_0^t K_1(t, s, u(s)) ds, \int_0^t \int_0^t K_2(t, s, s_1, s_2, u(s_1), u(s_2)) ds_1 ds_2, \dots \dots \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n, u(s_1), \dots, u(s_n)) ds_1 \dots ds_n, u(t), t\right) = 0,$$

где  $t \in [0, T)$ ,  $\Phi : E_1 \times \dots \times E_1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow E_2$  — нелинейный непрерывный оператор со значениями в банаховом пространстве  $E_1$ ,  $\Phi(0, \dots, 0, u_0, 0) = 0$ ,  $K_i : \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1}_{i+1} \times \underbrace{E_1 \times \dots \times E_1}_i \rightarrow E_2$ . Примером такого уравнения является нелинейное интегральное уравнение

$$\sum_{m=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_m(t - s_1, \dots, t - s_m) \prod_{i=1}^m x(s_i) ds_i - f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

часто встречающееся в приложениях [146; 154]. Метод построения обобщенных решений такого уравнения также отражен в данной монографии.

<sup>7</sup>В. Вольтерра. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Пер с англ. Москва: Наука. 1982.

<sup>8</sup>Л. В. Канторович, В. З. Вулих, А. Г. Пинскер. Функциональный анализ полупорядоченных пространствах. Москва: Наука. 1950.

Стоит отметить, что теория операторов Вольтерра является одной из активно развивающихся областей функционального анализа (см. библиографию в [178]).

В дискретной математике и в теории обработки сигналов подобные модели классифицируются как континуальные аналоги обобщенных полиномиальных регрессионных моделей. Проведен анализ регрессионных моделей в электроэнергетике с целью распознавания неустойчивых межсистемных колебаний. Особое внимание уделено обработке многомерных сигналов (изображений). Двумерное интегральное уравнение Фредгольма I рода

$$\mathcal{K}I \equiv \int_{\Omega} \int K(x, y, x', y') I(x', y') dx' dy' = \tilde{I}(x, y) \quad (3)$$

является одной из базовых математических моделей в обработке изображений. Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченное множество,  $I \in L^2(\Omega)$  – исходное (искомое) изображение, ядро  $K$  интегрального уравнения в этой модели является функцией рассеяния точки (ФРТ, point spread function, PSF). Результатом воздействия такого интегрального оператора на изображение является  $\tilde{I}(x, y)$ . Например, ФРТ гауссовского типа – ядро типа свертки

$$K(x - x', y - y') = \frac{1}{2\pi\omega\tilde{\omega}} \exp\left(-\frac{1}{2\omega^2}(x - x')^2 - \frac{1}{2\tilde{\omega}^2}(y - y')^2\right)$$

описывает влияние атмосферных турбулентностей на регистрируемое изображение. Такая обратная задача в операторном виде имеет вид  $TI = \tilde{I}$ , где  $T$  – линейный ограниченный оператор с незамкнутой областью значений  $\mathcal{R}(T)$ ,  $\tilde{I}$  – экспериментальные данные (изображение). Известно, что в такой постановке решение уравнения I рода (3) является некорректной в смысле Адамара [118; 191]. Потеря корректности связана с неограниченностью псевдообратного (Мура – Пенроуза) обратного оператора  $T^{-1}$ . Таким образом, задача восстановления исходного изображения – суть задача обращения свертки (деконволюция, deconvolution). Эффективным подходом к задаче восстановления изображений, сформулированной в терминах решения интегральных уравнений I рода (3), является регуляризация Тихонова [118; 250] и регуляризация Лаврентьева [60; 236]. В работе [241] демонстрируется эффективность регуляризованных интегральных моделей в задачах восстановления изображений в случае атмосферных турбулентностей и в медицинских изображениях конфокальной микроскопии.

Совокупность одномерных интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования (см. уч. пособие [109, с. 66, ур-



ие (2.8)] является ключевой моделью в задаче восстановления смазанных изображений. Интегральные преобразования и методы машинного обучения используются нами в пятой главе для решения практических задач в энергетике, в обработке изображений, связанных с восстановлением видеопоследовательностей и с автоматизацией контроля качества на производстве с помощью систем машинного зрения.

Среди нелинейных уравнений, изучаемых в монографии, отметим уравнение Гаммерштейна

$$u(x) = \int_a^b K(x, s)(u(s) + f(s, u, \lambda)) ds$$

и абстрактное нелинейное уравнение Вольтерра с необратимым оператором в главной части.

Монография состоит из двух частей. Первая часть состоит из трех глав и посвящена элементам анализа интегрооператорных моделей и иллюстративных приложений в моделях механики и математической физики. В первой главе изложена теория классов линейных уравнений Вольтерра, связанных с моделированием развивающихся динамических систем<sup>6,2</sup>. В п. 1.1 и 1.3 соответственно рассмотрены классические и обобщенные решения таких уравнений. В п. 1.2 исследованы модели, названные автором интегральными уравнениями Вольтерра I рода с кусочно-заданными ядрами. В п. 1.1 рассмотрены методы численного решения линейного уравнения Вольтерра с кусочно-заданным ядром.

Вторая глава посвящена анализу нелинейных моделей. В п. 2.1 гл. 2 исследовано нелинейное уравнение Гаммерштейна. В п. 2.2 для ряда нелинейных моделей Вольтерра изучена проблема существования и разрушения непрерывных решений. В п. 2.4 построены обобщенные решения для полиномиальных уравнений Вольтерра. В п. 2.3 второй главы рассмотрены малые решения нелинейных дифференциальных уравнений и исследованы вопросы ветвления их решений.

В третьей главе построена теория ряда классов интегро-операторных и дифференциально-операторных моделей. А именно, в п. 3.1 рассмотрены линейные операторные уравнения Вольтерра с кусочно-заданным ядром. Далее, в п. 3.1 исследованы проблемы существования и разрушения решений нелинейных операторно-интегральных уравнений Вольтерра, частным случаем которых являются полиномиальные уравнения Вольтерра, теория которых подробно изложена в п. 2.2. В п. 3.3 исследованы нелинейные

дифференциально-операторные уравнения с вырождением. В п. 3.4 изучено нелинейное уравнение Вольтерра второго рода с необратимым оператором в главной части. Здесь построена асимптотика ветвей решений и указан метод последовательных приближений, равномерно сходящийся в окрестности точки ветвления. В случае, когда такое уравнение не имеет непрерывных решений, предложен способ построения обобщенных решений в пространстве распределений Соболева – Шварца. В п. 3.5 изучено нелинейное операторное уравнение с фредгольмовым линейным оператором в главной части. Предполагается, что нелинейная часть такого уравнения зависит от функционалов, определенных на открытом множестве линейного нормированного пространства. Изложенный в п. 3.5 метод последовательных асимптотических приближений искомых решений применен для исследования нелинейной краевой задачи, описывающей колебания спутника в плоскости его эллиптической орбиты.

Вторая часть монографии посвящена теории и приложениям интегральных моделей в электроэнергетике, в обработке многомерных сигналов и в машинном зрении. Она состоит из двух глав (см. гл. 4 и 5). В главе 4 изложены основные этапы моделирования нелинейных динамических систем на основе полиномиальных моделей Вольтерра. Здесь представлены результаты использования интегральных полиномиальных моделей Вольтерра для моделирования теплофизических процессов. Заключительная глава 5 описывает использование интегральных моделей при обработке сигналов и изображений с приложениями в электроэнергетике (п. 5.1 и п. 5.1), видеообработке (п. 5.2) и в производственных задачах дефектоскопии (п. 5.3). Связь представленных в книге моделей на основе интегро-функциональных рядов Вольтерра с полиномиальными регрессионными моделями излагается в п. 5.1.

Отметим, что в главах 1, 2 и 3 используются преимущественно методы теории интегральных, дифференциальных и функциональных уравнений. В главах 4 и 5 в силу специфики соответствующих моделей и реальных приложений широко используются также вероятностные методы, интегральные преобразования и методы машинного обучения.

Таким образом, монография предназначена для достаточно широкого круга специалистов в области прикладной математики, а также представляет интерес для магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области математического моделирования, интегральных уравнений и преоб-

разований, дифференциальных уравнений, вычислительной математики, машинного обучения и обработки изображений.

Часть результатов, представленных в данной монографии, получены при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», проект «Сингулярные интегральные модели и преобразования: теория и приложения» (госконтракт No. 14.В37.21.0365), 7-ой рамочной программы ЕС (проект ICOEUR), 6-ой рамочной программы ЕС (проект BRAVA), проекта Германской службы межакадемических обменов (грант No. A1200665), интеграционным грантом НАТО, проект «Numeric and Imaging Methods of Identification in Uncertain Environment» (грант No. RIG981276) и РФФИ (грант No. 12-01-00722 и No. 11-08-00109). Часть теоретических результатов была мотивирована решением прикладных проблем в рамках контрактов автора с компаниями ASTI Holdings Pte Ltd (Сингапур), Smiths Detection Ireland (Ирландия). Результаты монографии обсуждались на ряде семинаров и конференций. Это не только стимулировало, но и помогло автору написать монографию, изложив с единой точки зрения ряд последних конструктивных результатов (см. работы [9–11; 24; 67; 69; 72; 81; 82; 84–86; 88–92; 96–99; 101–105; 108; 114; 145; 147–149; 174; 209; 210; 265; 280; 281; 291–300; 302–306]). Книга не ориентирована на полный библиографический обзор работ, посвященных рассматриваемым проблемам. Изложение материала определяется, в основном, точкой зрения и опытом работы автора в вышеперечисленных проектах в течение ряда лет.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить А. С. Апарцина, И. Л. Васильева, Н. И. Воропая, В. К. Горбунова, В. И. Зоркальцева, В. Г. Курбацкого, Е. В. Маркову, Д. А. Панасецкого, В. В. Пухначева, А. В. Савватеева, И. В. Сидлер, Н. А. Сидорова, В. С. Сизикова, С. В. Солодуша, В. А. Спиряева, Н. В. Томина, В. А. Треногина, О. В. Хамисова, М. В. Фалалеева, В. М. Brown, А. С. Kokaram, J.-F. Lerralut, R. Plato, V. Šmídl за внимание, полезные обсуждения и советы. Я рад возможности высказать благодарность профессору Н.-J. Reinhardt и профессору А. Lorenzi за прекрасные условия, созданные ими для работы над этой монографией и обсуждение изложенных результатов во время моей стажировки в университете Зигена (Германия) и в Миланском университете (Италия) в 2012 г.

В заключение хочу выразить особую признательность рецензенту профессору А. Lorenzi за конструктивные замечания, позволившие существенно улучшить содержание главы 1 и главы 4.

## Часть I

# Интегральные динамические модели: элементы анализа

Первая часть монографии посвящена проблемам существования и построения решений различных классов линейных и нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных систем первого и второго рода. Особое внимание уделяется случаю, когда решение не единственно. Даны методы построения как классических, так и обобщенных решений.

## Глава 1

# Линейные модели с кусочно-заданными ядрами

В гл. 1 изложена теория линейных уравнений Вольтерра с кусочно-заданными ядрами. Такие уравнения возникают при моделировании развивающихся динамических систем и имеют приложения в различных областях, в том числе в экономике, экологии и энергетике.

Фундаментальные результаты и приложения в этой области получены в работах В. М. Глушкова [33], А. М. Денисова и А. Lorenzi [172], А. С. Апарцина [5], Ю. П. Яценко и Н. В. Хритonenко [202; 203], [133], и развивались рядом авторов (см. также библиографию в работах [5; 8; 67; 75; 201; 204; 245] и др.)

Глава 1 построена следующим образом. Классические решения интегральных уравнений Вольтерра с кусочно-заданными ядрами исследованы в п. 1.1. Показано, что в теории таких уравнений важную роль играет

характеристическое алгебраическое уравнение и методы функциональных и разностных уравнений. Доказаны теоремы существования и дан способ построения параметрических семейств решений с логарифмо-степенными асимптотиками. В п. 1.2 исследован случай систем интегральных уравнений Вольтерра с кусочно-заданными ядрами. В п. 1.3 рассмотрены обобщенные решения таких уравнений. Наконец в п. 1.1 исследован вопрос численного решения линейного уравнения Вольтерра с кусочно-заданным ядром. Проведено тестирование построенного численного метода на синтетических данных.

## 1.1 Уравнения Вольтерра I рода (скалярный случай)

### Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^t K(t, s)x(s) ds = f(t), \quad f(0) = 0, \quad 0 < s < t < T, \quad (1.1.1)$$

где ядро определено формулой

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), & 0 < s < \alpha_1(t), \\ K_2(t, s), & \alpha_1(t) < s < \alpha_2(t), \\ \dots & \dots\dots\dots \\ K_n(t, s), & \alpha_{n-1}(t) < s < t, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

$$0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t, \quad |\alpha'_i(t)| < 1.$$

Функции  $K_i(t, s), i = \overline{1, n}, f(t)$  — непрерывны и допускают достаточно гладкие продолжения в окрестности областей своего определения.

Уравнения первого рода, в том числе уравнения Вольтерра, играют важную роль в теории обратных и некорректных задач, созданной в трудах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и их учеников. Такие уравнения возникают и в других моделях фундаментальной и прикладной математики, в частности, в современных исследованиях по дифференциально-операторным уравнениям с вырождением (см. библиографию в монографиях [242; 310]).

Уравнения Вольтерра с кусочно-заданным ядром были впервые рассмотрены в работе [296] и более полно в монографии [87]. Следуя [87] такое уравнение для краткости будем называть *слабо регулярным*. Подробная классификация и изложение приближенных методов вычисления слабосин-

гулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегралов и интегральных уравнений приведена в монографиях И. В. Бойкова [15; 16].

Интегральные уравнения с разрывными ядрами представляют теоретический интерес и возникают во многих физических и биологических моделях. Например, некоторые интегральные модели прикладной математики (см., например, [5; 201–203]) можно трактовать как уравнения Вольтерра с кусочно-непрерывными ядрами. Первые результаты в области интегральных уравнений с разрывными ядрами были получены Г. С. Evans в начале XX века. А именно, в работе [182] доказана теорема существования единственного непрерывного решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с разрывным ядром и при определенных условиях методом мажорант обоснована сходимость метода последовательных приближений. Отметим, что сингулярные и слабо регулярные интегральные уравнения обладают саморегуляризацией, что подтверждено в обзорной статье В. С. Сизикова [112], см. также [110]. Результаты в спектральной теории классов интегральных операторов с разрывным ядром получены в работах А. П. Хромова [221]. Асимптотические приближения решений интегральных уравнений Вольтерра I рода с аналитическим ядром  $K(t, s)$  строил Н. А. Магницкий в работе [65]. В отличие от работы [65], дифференцирование уравнения (1.1.1) с ядром вида (1.1.2) приводит не к интегральным уравнениям Вольтерра II (III рода), а к интегро-функциональным уравнениям. Поэтому рассмотрение этого класса уравнений типа Вольтерра потребовало специальных исследований. Решения уравнений (1.1.1) могут содержать произвольные постоянные и быть неограниченными при  $t \rightarrow 0$ . Например, если

$$K(t, s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s < t/2, \\ -1, & t/2 \leq s \leq t, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

$f(t) = t$ , то уравнению (1.1.1) удовлетворяет функция  $x(t) = c - \frac{\ln t}{\ln 2}$ , где  $c$  – произвольная постоянная.

Изложим метод построения непрерывных решений уравнения (1.1.1) в следующем виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^N x_i (\ln t) t^i + t^N u(t). \quad (1.1.4)$$

В общем случае функциональные коэффициенты  $x_i(\ln t)$  строятся в виде полиномов по степеням  $\ln t$  и зависят от определенного числа произвольных постоянных. Число  $N$  определяет требуемую гладкость функций

$K_i(t, s), f(t)$ . Излагаемый метод дает способ построения функции  $u(t)$  в представлении искомого решения (1.1.4) последовательными приближениями, равномерно сходящимися на промежутке  $[0, T]$  при фиксированных значениях вышеуказанных произвольных постоянных.

### Структура решения и теорема существования

Для простоты выкладок будем предполагать, что  $\alpha_i(t) \equiv \alpha_i t$ , где

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 1.$$

Введем условие

(A)  $K_n(t, t) \neq 0$  при  $t \in [0, T]$  и  $N$  выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} |K_n(t, t)|^{-1} \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i^{1+N} |K_i(t, \alpha_i t)| + \alpha_{i-1}^{1+N} |K_i(t, \alpha_{i-1} t)| \right) \leq 1 + q, \quad (1.1.5)$$

где  $q < 1, \alpha_0 = 0, \alpha_n = 1$ .

**Лемма 1.1.1.** Пусть выполнено условие (A), все функции  $K_i(t, s), i = \overline{1, n}$  дифференцируемы по  $t$  и непрерывны по  $s$ . Тогда в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, T]}$  однородное уравнение

$$\int_0^t K(t, s) s^N u(s) ds = 0 \quad (1.1.6)$$

имеет только тривиальное решение.

*Доказательство.* Дифференцируя уравнение (1.1.6) с учетом (1.1.2), перейдем к эквивалентному интегро-функциональному уравнению

$$Lu + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1} t}^{\alpha_i t} \frac{K_i'(t, s)}{K_n(t, t)} \left( \frac{s}{t} \right)^N u(s) ds = 0. \quad (1.1.7)$$

Здесь

$$Lu = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i^{1+N} K_i(t, \alpha_i t) u(\alpha_i t) - \alpha_{i-1}^{1+N} K_i(t, \alpha_{i-1} t) u(\alpha_{i-1} t) \right) (K_n(t, t))^{-1}.$$

В силу условия (A) в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, T]}$  справедлива оценка

$$\|Lu - u\| \leq q \|u\|.$$

Поэтому на основании теоремы об обратном операторе (см. [120, с. 134]) с учетом неравенств  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 1$  существует ограниченный обратный оператор  $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]} \rightarrow \mathcal{C}_{[0,T]})$ . При этом

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q} \quad (1.1.8)$$

и уравнение (1.1.6) приводится к виду

$$u(t) = -L^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}t}^{\alpha_i t} \frac{K'_i(t,s)}{K_n(t,t)} (s/t)^N u(s) ds \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}u, \quad (1.1.9)$$

$0 \leq t \leq T$ . Введем в пространстве  $\mathcal{C}_{[0,T]}$  эквивалентную норму

$$\|u\|_l \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq t \leq T} e^{-lt} |u(t)|, \quad l > 0.$$

В этой норме неравенство (1.1.8) сохранится и при достаточно большом  $l$  оператор  $\mathbf{A}$  будет сжимающим, так как  $\|\mathbf{A}\| \leq \frac{1}{1-q} m(l)$ , где  $m(l) \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow +\infty$ . Следовательно, однородное уравнение (1.1.9) имеет только тривиальное решение.  $\square$

**Следствие 1.1.1.** Пусть выполнены условия леммы 1.1.1,

$$g(t) \in \mathcal{C}_{[0,T]}^{(1)}, \quad |g'(t)| = \mathcal{O}(t^N)$$

при  $t \rightarrow 0$ . Тогда неоднородное уравнение  $\int_0^t K(t,s) s^N u(s) ds = g(t)$  имеет единственное решение.

Доказательство очевидно, т.к. дифференцируя это уравнение можно перейти к эквивалентному уравнению

$$u(t) = \mathbf{A}u + t^{-N} L^{-1} g'(t) \quad (1.1.10)$$

со сжимающим оператором  $\mathbf{A}$  и непрерывной свободной функцией.

**Теорема 1.1.1.** Пусть в пространстве  $\mathcal{C}_{(0,T]}$  существует функция  $x^N(t)$  такая, что при  $t \rightarrow 0$

$$\left( - \int_0^t K(t,s) x^N(s) ds + f(t) \right)' = \mathcal{O}(t^N).$$

Тогда уравнение (1.1.1) в классе  $\mathcal{C}_{(0,T]}$  имеет решение

$$x(t) = x^N(t) + t^N u(t), \quad (1.1.11)$$



где функция  $u(t) \in \mathcal{C}_{[0,T]}$  строится единственным образом методом последовательных приближений.

*Доказательство.* Доказательство вытекает из следствия 1.1.1. Действительно, с помощью замены (1.1.11) уравнение (1.1.1) преобразуется к уравнению

$$\int_0^t K(t,s)s^N u(s) ds = g(t), \quad (1.1.12)$$

где функция

$$g(t) = - \int_0^t K(t,s)s^N x^N(s) ds + f(t) \quad (1.1.13)$$

удовлетворяет условию следствия 1.1.1. Поэтому в представлении (1.1.11) функция  $u(t)$  строится последовательными приближениями единственным образом из уравнения (1.1.10) при любом начальном приближении.  $\square$

**Определение 1.1.1.** Уравнение (1.1.12) с правой частью (1.1.13) назовем *регуляризацией уравнения (1.1.1)*, а функцию  $x^N(t)$  – *асимптотическим приближением решения (1.1.11) уравнения (1.1.1)*.

Введение этого определения мотивировано тем, что функцию  $u(t)$  можно строить, решая уравнение (1.1.12) численно, используя хорошо исследованные квадратурные схемы.

*Построение асимптотического приближения решения*

Пусть наряду с условием (A) выполнено следующее условие

(B) Функции  $K_i(t,s), i = \overline{1,n}, f(t)$  – дифференцируемые  $N + 1$  раз в окрестности нуля, где  $N$  выбирается согласно условию (A).

Введем вспомогательное алгебраическое уравнение относительно  $j$  из  $\mathbb{N}$

$$L(j) \triangleq \sum_{i=1}^n K_i(0,0)(\alpha_i^{1+j} - \alpha_{i-1}^{1+j}) = 0 \quad (1.1.14)$$

и назовем его *характеристическим уравнением* интегрального уравнения (1.1.1).

Так как  $f(0) = 0$ , то уравнение

$$\sum_{i=1}^n \left( \alpha_i K_i(t, \alpha_i t) x(\alpha_i t) - \alpha_{i-1} K_i(t, \alpha_{i-1} t) x(\alpha_{i-1} t) \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}t}^{\alpha_i t} K_i'(t, s)x(s) ds = f'(t)$$

эквивалентно уравнению (1.1.1).

Будем искать асимптотическое приближение его решения в виде полинома

$$x^N(t) = \sum_{j=0}^N x_j(\ln t)t^j.$$

Методом неопределенных коэффициентов с учетом неравенств  $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 1$  составим рекуррентную последовательность разностных уравнений относительно коэффициентов  $x_j(z)$ ,  $z \stackrel{\text{def}}{=} \ln t$  вида

$$K_n(0, 0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0, 0) - K_{i-1}(0, 0))x_j(z + a_i) = M_j(x_0, \dots, x_{j-1}), \quad (1.1.15)$$

$j = \overline{0, N}$ ,  $a_i := \overline{\ln \alpha_i}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Следуя [32, с. 330] будем искать решение соответствующих однородных разностных уравнений в виде  $x = \lambda^z$ . Подставляя функцию  $\lambda^z$  в однородные разностные уравнения получим  $N + 1$  характеристических уравнений для разностных уравнений (1.1.16):

$$K_n(0, 0) + \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0))\lambda^{a_i} = 0, \quad j = \overline{0, N}. \quad (1.1.16)$$

Справедливо

**Свойство 1.1.1.**  $j$ -ое уравнение (1.1.16) имеет корень  $\lambda = 1$  тогда и только тогда, когда  $j$  удовлетворяет характеристическому уравнению (1.1.14) интегрального уравнения (1.1.1). Более того, кратность корня  $j$  уравнения (1.1.16) равна  $r_j$  тогда и только тогда, когда

$$L(j) = \sum_{i=1}^n K_i(0, 0)(\alpha_i^{1+j} - \alpha_{i-1}^{1+j}) = 0, \quad (1.1.17)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0))a_i^l = 0, \quad l = \overline{1, r_j - 1}, \quad (1.1.18)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0))a_i^{r_j} \neq 0,$$

где  $\alpha_0 = 0, \alpha_n = 1, a_0 = 0, a_n = 0, a_i = \ln \alpha_i, i = \overline{1, n-1}$ , При этом кратность  $r_j \leq n - 1$ .

Доказательство вытекает из тождества

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j} K_{i+1}(0, 0) = \sum_{i=2}^n \alpha_{i-1}^{1+j} K_i(0, 0) \quad (1.1.19)$$

и структуры уравнений (1.1.14), (1.1.16). Если предположить, что при некотором  $j$  кратность  $r_j \geq n$ , то

$$K_1(0, 0) = K_2(0, 0) = \dots = K_{n-1}(0, 0) = K_n(0, 0)$$

в силу (1.1.18), так как  $\det \|a_i^l\|_{i,l=\overline{1,n}} \neq 0$ . Но тогда в силу (1.1.17)  $K_n(0, 0) = 0$ , что противоречит условию (А). При выполнении условий (А), (В) возможны два случая.

### *Регулярный и нерегулярный случаи*

Пусть  $L(j) \neq 0, j \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\lambda = 1$  не удовлетворяет ни одному из характеристических уравнений в (1.1.16). Все коэффициенты  $x_i$  асимптотики  $x^N = \sum_{i=0}^N x_i t^i$  определяются однозначно методом неопределенных коэффициентов и от  $\ln t$  не зависят. Из изложенного вытекает

**Теорема 1.1.2.** Пусть выполнены условия (А), (В) и  $L(j) \neq 0, j \in \mathbb{N}$ . Тогда уравнение (1.1.1) имеет в  $\mathcal{C}_{[0,T]}$  решение

$$x(t) = \sum_{i=0}^N x_i t^i + t^N u(t),$$

где  $x_i$  определяются однозначно методом неопределенных коэффициентов, а функция  $u(t)$  строится затем однозначно последовательными приближениями или численно из уравнения (1.1.12).

Перейдем к нерегулярному случаю. Пусть  $L(j) = 0$  только при  $j \in \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{0, 1, \dots, N\}$  и при этом кратность корня  $\lambda = 1$  соответствующего характеристического уравнения (1.1.16) равны  $r_j$ .

Пусть в  $j$ -ом разностном уравнении (1.1.15) правая часть  $M_j(z)$  оказалась полиномом от  $z$  порядка  $n_j \geq 0$ . Тогда в нерегулярном случае, т.е. при  $r_j \geq 1$ , частное решение  $j$ -го уравнения (1.1.15) следует искать в виде полинома  $\hat{x}(z) = \sum_{i=r_j}^{n_j+r_j} c_i z^i$ . Коэффициенты  $c_i$  этого полинома вычисляются

ся методом неопределенных коэффициентов последовательно, начиная со старшего  $c_{n_j+r_j}$ . Коэффициент  $x_j(z)$  искомого асимптотического приближения  $x^N$  в этом случае имеет вид

$$x_j(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{r_j-1} z^{r_j-1} + \hat{x}(z).$$

В нерегулярном случае, когда  $r_j \geq 1$ , постоянные  $c_0, \dots, c_{r_j-1}$  останутся произвольными, так как тогда функции  $z^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, r_j - 1$  удовлетворяют  $j$ -му однородному разностному уравнению, отвечающему (1.1.15).

На практике, используя свойство 1.1.1, коэффициент  $x_j(z)$  в нерегулярном случае можно строить непосредственно в виде полинома  $\sum_{i=0}^{n_j+r_j} c_i z^i$ , определяя последовательно  $c_{n_j+r_j}, \dots, c_0$  методом неопределенных коэффициентов. При этом числа  $c_{r_j-1}, \dots, c_0$  останутся произвольными. Таким образом, в нерегулярном случае, когда  $L(j) = 0$  при натуральном  $j$ , при определении коэффициента  $x_j(z)$  появляются  $r_j$  новых произвольных постоянных. Порядок полинома  $x_j(z)$  на величину кратности  $r_j$  корня  $\lambda = 1$  характеристического уравнения (1.1.16) станет больше порядка  $n_j$  правой части уравнения (1.1.15), т.е. порядка полинома  $M_j(z)$ .

Из выше изложенного вытекает основная теорема:

**Теорема 1.1.3.** Пусть выполнены условия (A), (B). Пусть характеристическое уравнение  $L(j) = 0$  интегрального уравнения (1.1.1) имеет ровно  $k$  натуральных корней  $\{j_1, \dots, j_k\}$ . Пусть при этом корень  $\lambda = 1$   $j$ -го характеристического уравнения (1.1.16) имеет кратность  $r_j$ . Тогда уравнение (1.1.1) в  $\mathcal{C}_{(0,T]}$  имеет решение

$$x = \sum_{i=0}^N x_i (\ln t) t^i + t^N u(t), \quad (1.1.20)$$

которое зависит от  $p = r_1 + \dots + r_k$  произвольных постоянных. Более того, коэффициенты  $x_i$  асимптотического приближения  $x^N(t)$  являются полиномами от  $\ln t$  возрастающих порядков, не превосходящих  $p$ . Функция  $u(t)$  по вычисленному асимптотическому приближению с фиксированными постоянными строится последовательными приближениями, равномерно сходящимися при  $t \in [0, T]$ , либо численно из уравнения (1.1.12).

**Замечание 1.1.1.** Если  $L(0) = 0$ , то в решении (1.1.20)  $x_0 = \text{const} + a \ln t$ ,  $a$  – определенная постоянная. Поэтому в этом случае  $x(t) \in \mathcal{C}_{(0,T]}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = \infty$ .

**Пример 1.1.1.** Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t, s)x(s) ds = t, \quad \text{где } K(t, s) = \begin{cases} 1 + t - 2s, & 0 \leq s < t/2, \\ -1, & t/2 \leq s \leq t, \end{cases}$$

$0 < t < \infty$ . В этом случае характеристическое уравнение

$$L(j) \equiv (1/2)^{1+j} - (1 - (1/2)^{1+j}) = 0$$

имеет единственный простой корень  $j = 0$ . Разложение решения должно содержать  $\ln t$  только в первой степени, т.е. решение раскладывается в сходящийся при  $0 < t < \infty$  ряд  $\hat{x}(t) = \ln t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n$ . Методом неопределенных коэффициентов получаем  $a_0 = a_1 = -1/\ln 2$ ,  $b_1 = 2 + 1/\ln 2$ ,  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n! \prod_{k=2}^n (1-2^k) \ln 2}$ ,  $b_n = \frac{1}{1-2^n} \left\{ a_n \ln 2 + a_{n-1} \frac{1}{n} \left( \ln 2 + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{b_{n-1}}{n} \right\}$ .

Соответствующему однородному интегральному уравнению удовлетворяет функция  $\phi(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n! \prod_{k=1}^n (2^k - 1) \ln 2}$ . В итоге получаем семейство

решений исходного уравнения в виде  $x^*(t) = c\phi(t) + \hat{x}(t)$ . На рис. 1.1 представлено решение при  $n = 2$  и постоянной  $c = 1$ .

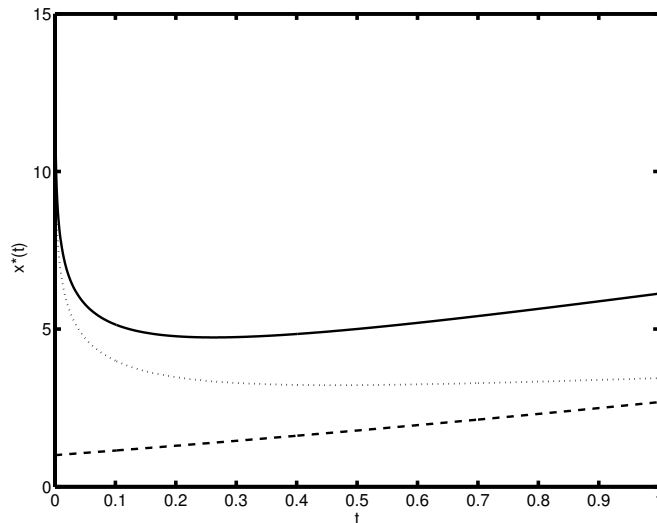


Рис. 1.1: Решение  $x^*(t)$  (сплошная линия),  $\hat{x}(t)$  (мелкий пунктир),  $\phi(t)$  (пунктир)

Рассмотрим алгоритм численного решения уравнения (1.1.1). А именно, рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int_0^{a(t)} K_1(t, s)x(s) ds + \int_{a(t)}^t K_2(t, s)x(s) ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.1.21)$$

где  $0 < a(t) < t \forall t \in (0, T]$ ,  $a(0) = 0$ , функции  $K_1(t, s)$ ,  $K_2(t, s)$ ,  $f(t)$  непрерывные и достаточно гладкие,  $f(0) = 0$ ,  $K_2(t, t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$ .

Теория и численные методы решения уравнения (1.1.21) при  $K_1(t, s) \equiv 0$  изложены в монографии [5], см. также диссертации [56; 66]. Методы численного решения линейных уравнений Фредгольма второго рода с ядрами, претерпевающими разрывы I рода на одной и более непрерывных кривых, рассматривались в работе [253]. Отметим, что универсальный численный метод проекционного типа (метод нормальной сплайн-коллокации), решающий уравнения с произвольным вырождением главной части линейных интегральных уравнений, был впервые предложен в статье [37] и развит в статье [190].

Специфика таких уравнений с кусочно гладким ядром требует, в частности, адаптации численных процедур, используемых для решения классических интегральных уравнений.

Воспользуемся методом правых прямоугольников. Введем сетку узлов  $t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $nh = T$ , и, аппроксимируя интегралы в (1.1.21) суммами, запишем сеточный аналог:

$$h \sum_{j=1}^{l-1} K_1(t_i, t_j)x^h(t_j) + (a(t_i) - t_{l-1})K_1(t_i, a(t_i))x^h(a(t_i)) + (t_l - a(t_i))K_2(t_i, t_l)x^h(t_l) + h \sum_{j=l+1}^i K_2(t_i, t_j)x^h(t_j) = f(t_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1.22)$$

где  $l = \left[ \frac{a(t_i)}{h} \right] + 1$ , где  $[\cdot]$  – целая часть. Появление слагаемых, не входящих под знак суммы, обусловлено тем, что значение  $a(t_i)$  в общем случае не попадает на узел сетки.

При этом уже для  $n = 1$  приходится решать одно уравнение с двумя неизвестными:  $x^h(a(t_1))$  и  $x^h(t_1)$ . Аналогичная проблема возникает на каждом шаге (кроме частных случаев, когда  $a(t_i)$  попадает на узел сетки).

Для решения этой проблемы используются различные способы, например комбинирование методов правых и левых прямоугольников, применение процедур интерполяции и экстраполяции, а также использование знания о решении уравнения (1.1.21) в начальной точке [67].

Численные расчеты на тестовых примерах показывают линейную сходимость адаптированных методов.

**Пример 1.1.2.** *Рассмотрим пример*

$$\int_0^{\frac{t}{3}} (1+t-s)x(s) ds - \int_{\frac{t}{3}}^t x(s) ds = \frac{t^4}{108} - \frac{25t^3}{81}, \quad t \in [0, 2],$$

с точным решением  $\bar{x}(t) = t^2$ .

В табл. 1.1.2 приведены погрешности  $\varepsilon = \max_{0 \leq i \leq n} |\bar{x}(t_i) - x^h(t_i)|$  для разных шагов.

Таблица 1.1: Погрешности численного решения для тестового примера 1.1.2.

$h$	$\varepsilon$
1/32	0,066695
1/64	0,034189
1/128	0,017371
1/256	0,008652

**Пример 1.1.3.**

$$2 \int_0^{\sin \frac{t}{2}} x(s) ds + \int_{\sin \frac{t}{2}}^t x(s) ds = \frac{1}{3} \sin^3 \frac{t}{2} + \frac{t^3}{3}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

Здесь точное решение –  $\bar{x}(t) = t^2$ .

В табл. 1.1.3 приведены погрешности  $\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} |\bar{x}(t_i) - x^h(t_i)|$  для разных шагов, а на рис. 1.2 приведено поведение погрешности для шага  $h = \frac{\pi}{64}$  для основной (сплошная линия) и вспомогательной (жирная линия) сетки узлов (вспомогательной здесь названа сетка из узлов, не входящих под знак суммы в (1.1.22)).

Таблица 1.2: Погрешности численного решения для тестового примера 1.1.3.

$h$	$\varepsilon$
1/128	0,1540369
1/256	0,0770624
1/512	0,0385212

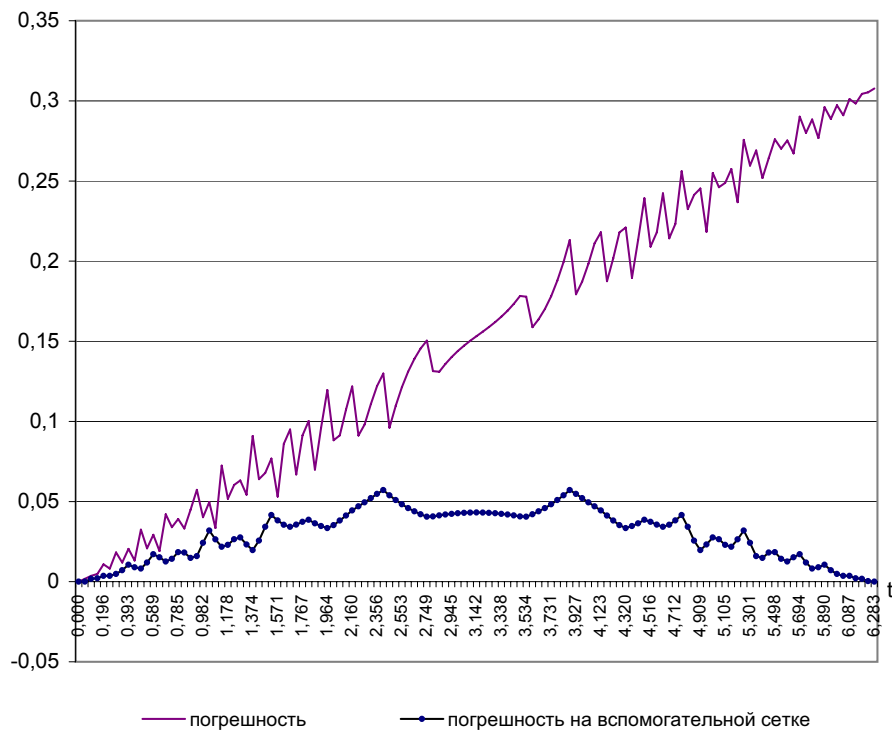
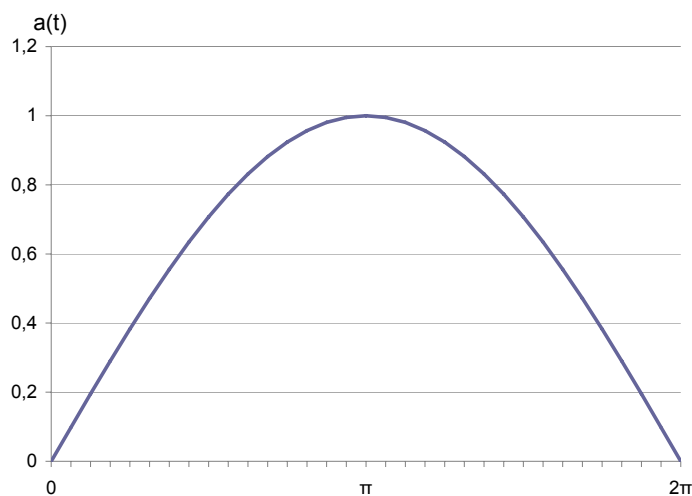


Рис. 1.2: Поведение погрешностей для примера 1.1.3.

Из табл. 1.1.2 и 1.1.3 видна линейная сходимость используемого метода. Отметим, что для сходимости численной схемы необязательно выполнение условия неубывания нижнего предела  $a(t)$ , что позволяет строить модели без жесткого требования на неубывание кривых  $\alpha_i(t)$ , описывающих момент времени, когда оборудование (единица капитала) должно выводиться из эксплуатации [204].





**Замечание 1.1.2.** Изложенные в гл. 1 результаты остаются справедливыми и при  $t < 0$ , однако в представлении коэффициентов асимптотики следует использовать  $\ln |t|$ .

## 1.2 Системы уравнений Вольтерра I рода

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\int_0^t K(t, s)x(s) ds = f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (1.2.1)$$

Предполагается, что матричное ядро  $K(t, s)$  размерности  $m \times m$  имеет в области  $0 \leq s \leq t \leq T$  разрывы I рода на кривых  $s = \alpha_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Таким образом,

$$K(t, s) := \begin{cases} K_1(t, s), & 0 \leq s \leq \alpha_1(t), \\ K_2(t, s), & \alpha_1(t) < s \leq \alpha_2(t), \\ \dots & \dots\dots \\ K_n(t, s), & \alpha_{n-1}(t) < s \leq t, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))'$ ,  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))'$ . Матрицы  $K_i(t, s)$  – размерности  $m \times m$  определены, непрерывны и имеют непрерывные производные по  $t$  в соответствующих областях

$$D_i = \{s, t | \alpha_{i-1}(t) < s \leq \alpha_i(t)\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_n(t) = t.$$

Функции  $f_i(t)$ ,  $\alpha_i(t)$  имеют непрерывные производные,  $f_i(0) = 0$ ,  $\alpha_i(0) = 0$ ,  $0 < \alpha'_1(0) < \alpha'_2(0) < \dots < \alpha'_{n-1}(0) < 1$ ,  $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$  при  $t \in (0, T]$ . Требуется построить непрерывные решения уравнения (1.2.1) при  $t \in (0, T']$ , где  $0 < T' \leq T$ ,  $\lim_{t \rightarrow +0} x(t)$  может быть и бесконечным. Предполагается, что каждая из матриц  $K_i(t, s)$ ,  $i = \overline{1, n}$  имеет непрерывно дифференцируемое по  $t$  продолжение в область  $0 \leq s \leq t \leq T$ . Однородная система может иметь нетривиальные решения. Интегральные системы с разрывными ядрами встречаются в ряде приложений (см. [5; 172; 201–203; 216] и пр.). Как уже отмечлось выше, дифференцирование системы (1.2.1) по  $t$ , в отличие от классического случая (см., например, [26]), приводит к новому классу систем Вольтерра с функционально-возмущенным аргументом. Поэтому исследование систем с матричными ядрами вида (1.2.2) представляет и теоретический интерес.

Настоящий параграф организован следующим образом. В п. 1.2 дан способ построения логарифмо-степенных асимптотик

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^N x_i(\ln t) t^i. \quad (1.2.3)$$

В случае систем алгоритмы построения таких асимптотик ввиду большого многообразия возможных вариантов существенно усложняются по сравнению с рассмотренным выше скалярным случаем. Поэтому алгоритм построения функциональных коэффициентов  $x_i(\ln t)$  асимптотики (1.2.3) в матричном случае детально описан ниже. В результате доказана теорема существования параметрических семейств решений системы (1.2.1) и приведены достаточные условия существования и единственности непрерывного решения такой системы.

*Построение асимптотического приближения решений неоднородной системы*

Пусть выполнено условие

(A) Существуют матрицы  $\mathcal{P}_i = \sum_{\nu+\mu=1}^N K_{i\nu\mu} t^\nu s^\mu$ ,  $i = \overline{1, n}$ , вектор-функция  $f^N(t) = \sum_{\nu=1}^N f_\nu t^\nu$ , полиномы  $\alpha_i^N(t) = \sum_{\nu=1}^N \alpha_{i\nu} t^\nu$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , где

$$0 < \alpha_{11} < \alpha_{21} < \cdots < \alpha_{n-1,1} < 1,$$

такие, что при  $t \rightarrow +0$ ,  $s \rightarrow +0$  справедливы оценки

$$\|K_i(t, s) - \mathcal{P}_i(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}((t+s)^{N+1}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\|f(t) - f^N(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{O}(t^{N+1}),$$

$$|\alpha_i(t) - \alpha_i^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1}), \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Разложения по степеням  $t, s$ , представленные в условии (A), далее называются «полиномами Тейлора» соответствующих элементов. Введем матрицу

$$B(j) \stackrel{\text{def}}{=} K_n(0, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} (K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0)) \quad (1.2.4)$$

и алгебраическое уравнение

$$L(j) \stackrel{\text{def}}{=} \det B(j) = 0.$$

Назовем его *характеристическим уравнением* системы интегральных уравнений (1.2.1). Так как  $f(0) = 0$ , матрицы  $K_i(t, s)$  и вектор  $f(t)$  имеют непрерывные производные по  $t$ , то дифференцирование обеих частей системы (1.2.1) приводит к эквивалентной системе интегро-функциональных уравнений

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} K_n(t, t)x(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(t) \{K_i(t, \alpha_i(t)) -$$

$$-K_{i+1}(t, \alpha_i(t))\} x(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t, s)x(s) ds - f'(t) = 0, \quad (1.2.5)$$

где  $\alpha_0 = 0, \alpha_n(t) = t$ .

Мы не предполагаем, что однородная система, отвечающая (1.2.1), имеет только тривиальное решение. Поэтому и однородная интегро-функциональная система, отвечающая (1.2.5), может иметь нетривиальные решения. Будем искать асимптотическое приближение частного решения неоднородного уравнения (1.2.5) в виде полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=0}^N x_j (\ln t) t^j. \quad (1.2.6)$$

Покажем, что коэффициенты  $x_j$  в общем нерегулярном случае зависят от  $\ln t$  и свободных параметров, что согласуется с возможностью существования нетривиальных решений у однородной системы. При вычислении коэффициентов  $x_j$  возможны регулярный и нерегулярный случаи.

### *Регулярный и нерегулярный случаи*

В регулярном случае коэффициенты  $x_j$  будут постоянными векторами из  $\mathbb{R}^m$ . Действительно, подставляя разложение (1.2.6) в систему (1.2.5), методом неопределенных коэффициентов с учетом условия (А), приходим к рекуррентной последовательности линейных систем алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно векторов  $x_j$  :

$$B(0) x_0 = f'(0), \quad (1.2.7)$$

$$B(j)x_j = M_j(x_0, \dots, x_{j-1}), \quad j = \overline{1, N}. \quad (1.2.8)$$

Вектор  $M_j$  выражается определенным образом через решения  $x_0, \dots, x_{j-1}$  предыдущих систем и коэффициенты «полиномов Тейлора» из условия (А).

Так как в регулярном случае  $\det B(j) \neq 0$ , то векторы  $x_0, \dots, x_N$  определяются единственным образом и асимптотика (1.2.6) будет построена.

Перейдем к нерегулярному случаю. Введем определения:

**Определение 1.2.1.** Число  $j^*$  — регулярная точка матрицы  $B(j)$ , если матрица  $B(j^*)$  обратима.

**Определение 1.2.2.** Число  $j^*$  — простая особая точка матрицы  $B(j)$ , если  $\det B(j^*) = 0$ ,  $\det [(B^{(1)}(j^*)\phi_i, \psi_l)]_{i,l=1}^r \neq 0$ , где  $\{\phi_i\}_1^r$  — базис в  $\mathcal{N}(B(j^*))$ ,  $\{\psi_i\}_1^r$  — базис в  $\mathcal{N}(B'(j^*))$ ,  $B'(j^*)$  — транспонированная матрица,  $B^{(1)}(j)$  — производная матрицы по  $j$ .

**Определение 1.2.3.**  $j^*$  назовем  $k + 1$ -кратной особой точкой матрицы  $B(j)$ , если  $\det B(j^*) = 0$ , производные  $B^{(1)}(j^*), \dots, B^{(k)}(j^*)$  — нулевые матрицы,

$$\det \left[ (B^{(k+1)}(j^*)\phi_i, \psi_l) \right]_{i,l=1}^r \neq 0,$$

$k \geq 1$ ,  $\{\phi_i\}_1^r$  — базис в  $\mathcal{N}(B(j^*))$ ,  $\{\psi_i\}_1^r$  — базис в  $\mathcal{N}(B'(j^*))$ .

Отметим, что

$$B^{(k)}(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

где  $a_i := \ln \alpha'_i(0)$ .

**Замечание 1.2.1.** Пусть  $m = 1$  (т.е. рассматривается одно интегральное уравнение вида (1.2.1)). Тогда  $B(j) = L(j)$ . Поэтому в случае одного уравнения определение 1.2.2 означает, что  $j$  — однократный корень характеристического уравнения  $L(j) = 0$ , а определение 1.2.3, что  $j$  является  $(k + 1)$  — кратным корнем этого уравнения.

Покажем, что в нерегулярном случае коэффициенты  $x_j$  будут полиномами по степеням  $\ln t$  и зависят от произвольных постоянных. Порядок полиномов и число произвольных постоянных связаны с кратностями особых точек матриц  $B(j)$  и рангами этих матриц.

Действительно, так как коэффициент  $x_0$  в нерегулярном случае может зависеть от  $\ln t$ , то на основании метода неопределенных коэффициентов

$x_0$  следует искать как решение разностной системы

$$K_n(0, 0)x_0(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(0)(K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0))x_0(z + a_i) = f'(0), \quad (1.2.9)$$

где  $a_i = \ln \alpha'_i(0)$ ,  $z = \ln t$ . Здесь возможны три случая:

*Случай 1.*

$L(0) \neq 0$ , т.е.  $\det B(0) \neq 0$ . Тогда коэффициент  $x_0$  от  $z$  не зависит и определится единственным образом из СЛАУ (1.2.7) с обратимой матрицей  $B(0)$ .

*Случай 2.*

Пусть  $j = 0$  — простая особая точка матрицы  $B(j)$ . Коэффициент  $x_0(z)$  будем искать из разностной системы (1.2.9) в виде линейной вектор-функции

$$x_0(z) = x_{01}z + x_{02}. \quad (1.2.10)$$

Подставляя (1.2.10) в (1.2.9), получим для определения векторов  $x_{01}$ ,  $x_{02}$  две СЛАУ

$$B(0)x_{01} = 0, \quad (1.2.11)$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (1.2.12)$$

Здесь  $\det B(0) = 0$ ,  $\{\phi_i\}_1^r$  — базис в  $\mathcal{N}(B(0))$ . Поэтому  $x_{01} = \sum_{k=1}^r c_k \phi_k$ . Вектор  $c = (c_1, \dots, c_r)'$  определится однозначно из условий разрешимости системы (1.2.12), т.е. из СЛАУ

$$\sum_{k=1}^r (B^{(1)}(0)\phi_k, \psi_i)c_k = (f'(0), \psi_i), \quad i = \overline{1, r}$$

с невырожденной матрицей. Далее коэффициент  $x_{02}$  определится из системы (1.2.12) с точностью до  $\text{span}(\phi_1, \dots, \phi_r)$ . Таким образом, в случае 2 коэффициент  $x_0(z)$  будет зависеть от  $r$  произвольных постоянных и линеен относительно  $z$ .

*Случай 3.* Пусть  $j = 0$  — особая точка матрицы  $B(j)$  кратности  $k + 1$ , где  $k \geq 1$ . Решение  $x_0(z)$  разностной системы (1.2.9) будем искать в виде полинома

$$x_0(z) = x_{01}z^{k+1} + x_{02}z^k + \dots + x_{0k+1}z + x_{0k+2}. \quad (1.2.13)$$

Подставляя полином (1.2.13) в систему (1.2.9), учитывая тождество

$$\frac{d^k}{dj^k} B(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0)),$$

где  $a_i = \ln \alpha'_i(0)$ , и приравнивая коэффициенты при степенях  $z^{k+1}, z^k, \dots, z, z^0$  нулю, получим рекуррентную последовательность СЛАУ относительно коэффициентов  $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k+2}$ :

$$B(0)x_{01} = 0,$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0) \binom{k+1}{k} x_{01} = 0,$$

$$B(0)x_{0l+1} + B^{(l)}(0) \binom{k+1}{k+1-l} x_{01} + B^{(l-1)}(0) \binom{k}{k+1-l} x_{02} + \dots$$

$$\dots + B^{(1)}(0) \binom{k+1-l+1}{k+1-l} x_{0l} = 0, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$B(0)x_{0k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} + B^{(k)}x_{02} + \dots B^{(1)}(0)x_{0k+1} = f'(0). \quad (1.2.14)$$

Так как в рассматриваемом случае согласно условиям определения 1.2.3 производные  $\left. \frac{d^i B(j)}{dj^i} \right|_{j=0}$ ,  $i = 1, \dots, k$  – нулевые матрицы, то

$$x_{0i} = \sum_{j=1}^r c_{ij} \phi_j, \quad i = 1, \dots, k+1.$$

Поэтому система (1.2.14) принимает вид

$$B(0)x_{0,k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (1.2.15)$$

Так как  $\det \left[ (B^{(k+1)}(0)\phi_i, \psi_k) \right]_{i,k=\overline{1,r}} \neq 0$ , то вектор  $c^1 \stackrel{\text{def}}{=} (c_{11}, \dots, c_{1r})'$  определится однозначно из условий разрешимости системы (1.2.15). Итак,

$$x_{0k+2} = \sum_{j=1}^r c_{k+2j} \phi_j + \hat{x}_{k+2},$$

$\hat{x}_{k+2}$  – частное решение СЛАУ (1.2.15). Вектор  $c^{k+2} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{k+2,1}, \dots, c_{k+2,r})'$ , как и векторы  $c^2, \dots, c^{k+1}$ , остается произвольным. Таким образом, в случае 3 коэффициент  $x_0(z)$  является полиномом  $k+1$ -ой степени относительно  $z$  и зависит от  $r \times (k+1)$  произвольных постоянных. Применяя метод

неопределенных коэффициентов с учетом тождества

$$\int t^j \ln^k t dt = t^{j+1} \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{k(k-1)\dots(k-(s-1))}{(j+1)^{s+1}} \ln^{k-s} t,$$

можно построить систему разностных уравнений для определения коэффициента  $x_1(z)$  ( $z = \ln t$ ). Действительно,

$$F(x) \Big|_{x=x_0+x_1 t} \stackrel{\text{def}}{=} \left[ K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^2 (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_1(z + a_i) + P_1(x_0(z)) \right] t + r(t), \quad r(t) = o(t). \quad (1.2.16)$$

Здесь  $P_1(x_0(z))$  – определенный полином от  $z$ , степень которого равна кратности особой точки  $j = 0$  матрицы  $B(j)$ . Из соотношения (1.2.16) в силу оценки  $r(t) = o(t)$  при  $t \rightarrow 0$  следует, что коэффициент  $x_1(z)$  должен удовлетворять системе разностных уравнений

$$K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^2 (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_1(z + a_i) + P_1(x_0(z)) = 0. \quad (1.2.17)$$

Если  $j = 1$  – регулярная точка матрицы  $B(j)$ , то система (1.2.17) имеет решение  $x_1(z)$  в виде полинома того же порядка, что и кратность особой точки  $j = 0$  матрицы  $B(0)$ . Если  $j = 1$  – особая точка матрицы  $B(j)$ , то решение  $x_1(z)$  строится в виде полинома степени  $k_0 + k_1$ , где  $k_0$  и  $k_1$  – кратности особых точек  $j = 0$  и  $j = 1$  матрицы  $B(j)$  соответственно. Коэффициент  $x_1(z)$  будет зависеть от  $r_0 k_0 + r_1 k_1$  произвольных постоянных, где  $r_0 = \dim N(B(0))$ ,  $r_1 = \dim N(B(1))$ .

Введем условие

**(B)** Пусть матрица  $B(j)$  в массиве  $(0, 1, \dots, N)$  имеет только регулярные точки или особые точки кратностей  $k_j$ .

Тогда аналогичным образом можно вычислить остальные коэффициенты  $x_2(z), \dots, x_N(z)$  асимптотического приближения  $\hat{x}(t)$  решения уравнения (1.2.1) из последовательности разностных уравнений вида

$$K_n(0,0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_j(z + a_i) + \mathcal{P}_j(x_0(z), \dots, x_{j-1}(z)) = 0, \quad j = \overline{2, N}.$$

Из изложенного вытекает

**Лемма 1.2.1.** Пусть выполнены условия (A), (B). Тогда существует вектор-функция  $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^N x_i(\ln t)t^i$ , такая, что при  $t \rightarrow +0$  имеет место оценка  $|F(\hat{x}(t))|_{\mathbb{R}^m} = o(t^N)$ . При этом коэффициенты  $x_i(\ln t)$  являются полиномами от  $\ln t$  возрастающих степеней, не превосходящих суммы кратностей  $\sum_j k_j$  особых точек  $j$  матрицы  $B(j)$  из массива  $(0, 1, \dots, i)$ .

Коэффициенты  $x_i(\ln t)$  зависят от  $\sum_{j=0}^i \dim N(B(j))k_j$  произвольных постоянных.

*Теорема существования непрерывных параметрических семейств решений*

Так как  $0 \leq \alpha'_i(0) < 1$ ,  $\alpha_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , то для любого  $0 < \varepsilon < 1$  найдется  $T' \in (0, T]$  такое, что  $\max_{i=\overline{1, n-1}, t \in [0, T']} |\alpha'_i(t)| \leq \varepsilon$  и

$\sup_{i=\overline{1, n-1}, t \in (0, T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon$ . Введем условие

(C) Пусть  $\det K_n(t, t) \neq 0$ ,  $t \in [0, T']$  и  $N^*$  выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{t \in [0, T']} \varepsilon^{N^*} \|K_n^{-1}(t, t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} \times \quad (1.2.18)$$

$$\times \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i^{(1)}(t)| \|K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} \leq q < 1,$$

где  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)}$  – норма матрицы размерности  $m \times m$ .

**Лемма 1.2.2.** Пусть выполнено условие (C). Пусть в классе  $\mathcal{C}_{(0, T]}$  вектор-функций, непрерывных при  $t \in (0, T']$  и имеющих предел (возможно бесконечный) при  $t \rightarrow +0$  существует элемент  $\hat{x}(t)$  такой, что имеет место оценка

$$|F(\hat{x}(t))|_{\mathbb{R}^m} = o(t^N), \quad N \geq N^*.$$

Тогда уравнение (1.2.5) в классе  $\mathcal{C}_{(0, T]}$  имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t), \quad (1.2.19)$$

где  $u(t) \in \mathcal{C}_{[0, T]}$  и определяется единственным образом последовательными приближениями.



*Доказательство.* Подставляя (1.2.19) в уравнение (1.2.5), получим для определения функции  $u(t)$  интегро-функциональную систему

$$\begin{aligned}
K_n(t, t)u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(t) \left( \frac{\alpha_i(t)}{t} \right)^{N^*} \left( K_i(t, \alpha_i(t)) - \right. \\
\left. - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)) \right) u(\alpha_i(t)) + \\
+ \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t, s) \left( \frac{s}{t} \right)^{N^*} u(s) ds + F(\hat{x}(t))/t^{N^*} = 0.
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

Введем линейные операторы

$$\begin{aligned}
Lu \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(t) \left( \frac{\alpha_i(t)}{t} \right)^{N^*} \left\{ K_i(t, \alpha_i(t)) - \right. \\
\left. - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)) \right\} u(\alpha_i(t)), \\
Ku \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t, t) K_i^{(1)}(t, s) (s/t)^{N^*} u(s) ds.
\end{aligned}$$

Тогда система (1.2.20) переписется в компактной форме

$$u + (L + K)u = \gamma(t),$$

где  $\gamma(t) = K_n^{-1}(t, t)F(x^N(t))/t^{N^*}$  – непрерывная вектор-функция. Введем банахово пространство  $X$  непрерывных вектор-функций  $u(t)$  с нормой

$$\|u\|_l = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-lt} |u(t)|_{\mathbb{R}^m}, \quad l > 0.$$

Тогда в силу неравенств  $\sup_{t \in [0, T]} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon < 1$  и условия (С) при  $\forall l \geq 0$  норма линейного функционального оператора  $L$  удовлетворяет оценке

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q < 1.$$

Кроме того, для интегрального оператора  $K$  при достаточно большом  $l$  справедлива оценка

$$\|K\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q_1 < 1 - q.$$

Следовательно, при достаточно большом  $l > 0$

$$\|L + K\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} < 1,$$

т.е. линейный оператор  $L + K$  является сжимающим в пространстве  $X$ . Поэтому последовательность  $\{u_n\}$ , где  $u_n = -(L + K)u_{n-1} + \gamma(t)$ ,  $u_0 = \gamma(t)$ , сходится. □

**Теорема 1.2.1** (Основная теорема). Пусть выполнены условия (A), (B), и (C),  $f(0) = 0$ . Пусть матрица  $B(j)$  в массиве  $(0, 1, \dots, N)$  имеет ровно  $\nu$  особых точек  $j_1, \dots, j_\nu$  кратностей  $k_i$ ,  $i = \overline{1, \nu}$ , а все остальные числа этого массива регулярны. Пусть  $\text{rank } B(j_i) = r_i$ ,  $i = \overline{1, \nu}$ . Тогда уравнение (1.2.1) при  $0 < t \leq T' \leq T$  имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t),$$

зависящее от  $\sum_{i=1}^{\nu} (m - r_i)k_i$  произвольных постоянных.

*Доказательство.* На основании леммы 1.2.1 в силу условий теоремы возможно построение асимптотического приближения  $\hat{x}(t)$  искомого решения в виде логарифмно-степенного полинома  $\sum_{i=0}^N x_i(\ln t)t^i$ . При этом по построению коэффициенты  $x_i(\ln t)$  будут зависеть от указанного числа произвольных постоянных. В силу леммы 1.2.2, применяя подстановку  $x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t)$ , непрерывную функцию  $u(t)$  можно будет построить методом последовательных приближений. □

**Замечание 1.2.2.** В условиях основной теоремы для асимптотического приближения  $\hat{x}(t)$  искомого решения имеет место асимптотическая оценка  $\|x(t) - \hat{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{O}(t^{N^*})$ ,  $t \rightarrow +0$ .

**Следствие 1.2.1.** Пусть  $\alpha_i(t) = \alpha_i t$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 1$ , элементы матриц  $K_i(t, s)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  и вектор-функция  $f(t)$  аналитически продолжаются в область  $|s| < T$ ,  $|t| < T$ ,  $f(0) = 0$ . Матрица  $K_n(t, t)^{-1}$  – аналитическая при  $|t| < T$ . Пусть  $\det B(j) \neq 0$ ,  $j \in \mathbb{N} \cup 0$ . Тогда уравнение (1.2.1) имеет единственное решение  $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i$  при  $0 \leq t < T$ .

В некоторых случаях в условиях теоремы 1.2.1 можно построить параметрическое семейство решений в замкнутой форме.

**Пример 1.2.1.** Система  $\int_0^{t/2} Kx(s) ds + \int_{t/2}^t (K - 2E)x(s) ds = dt$ ,  $0 < t < \infty$ , где  $K$  – симметрическая постоянная матрица  $m \times m$ ,  $d \in \mathbb{R}^m$ ,  $x(t) =$

$(x_1(t), \dots, x_m(t))'$ ,  $1$  – собственное число матрицы  $K$  ранга  $r$ ,  $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$  – соответствующая ортонормированная система собственных векторов, имеет параметрическое семейство решений

$$x(t) = -\ln t \sum_{i=1}^r \frac{(d, \phi_i)}{\ln 2} \phi_i + c_1 \phi_1 + \dots + c_r \phi_r + \hat{a}.$$

Здесь  $c_1, \dots, c_r$  – произвольные постоянные, вектор  $\hat{a}$  удовлетворяет СЛАУ

$$(K - E)\hat{a} = d - \sum_{i=1}^r (d, \phi_i) \phi_i.$$

*Достаточные условия существования единственного непрерывного решения*

Для простоты выкладок в этом параграфе положим  $\alpha_i(t) = \alpha_i t$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < 1$ . Введем матрицу

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i K_n^{-1}(t, t) (K_i(t, \alpha_i t) - K_{i+1}(t, \alpha_i t)).$$

Пусть выполнены условия:

(S)  $|D(0)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} < 1$ ;  $\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \|K_n^{-1}(t, t) K'_t(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} \leq c < \infty$ . Здесь и далее матрица  $K(t, s)$  определена формулой (1.2.2).

**Теорема 1.2.2** (Достаточные условия существования и единственности решения). Пусть выполнены условия (S), все матрицы  $K_i(t, s)$  в представлении (1.2.2) непрерывны, а по  $t$  имеют и непрерывные производные, вектор  $f(t)$  имеет непрерывную производную,  $f(0) = 0$ . Тогда уравнение (1.2.1) в классе непрерывных функций  $\mathcal{C}_{[0, T]}$  имеет единственное решение. Более того, решение можно найти методом шагов, сочетая его с методом последовательных приближений.

*Доказательство.* Уравнение (1.2.5), эквивалентное (1.2.1), перепишем в виде

$$x(t) + Ax + Kx = \bar{f}(t), \quad (1.2.21)$$

где введены обозначения

$$Ax \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (K_i(t, \alpha_i t) - K_{i+1}(t, \alpha_i t)) x(\alpha_i t),$$

$$Kx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1} t}^{\alpha_i t} K_n^{-1}(t, t) K_t^{(1)}(t, s) x(s) ds,$$

$$\bar{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) f^{(1)}(t).$$

Зафиксировав  $q < 1$  выберем  $h_1 > 0$  так, чтобы

$$\max_{0 \leq t \leq h_1} |D(t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} = q < 1.$$

В силу условия (S) такое  $h_1 > 0$  найдется. Положим  $0 < h < \min\{h_1, \frac{1-q}{c}\}$ , где постоянная  $c$  определена в условии (S). Разобьем интервал  $[0, T]$  на промежутки

$$[0, h], [h, h + \varepsilon h], [h + \varepsilon h, h + 2\varepsilon h], \dots \quad (1.2.22)$$

где  $\varepsilon$  выбирается из промежутка  $(0, 1]$  так, чтобы  $\alpha_{n-1} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$ . Обозначим через  $x_0(t)$  сужение искомого решения  $x(t)$  на интервал  $[0, h]$ , а через  $x_n(t)$  – его сужения на интервалы

$$I_n = [(1 + (n - 1)\varepsilon)h, (1 + n\varepsilon)h], n = 1, 2, \dots$$

В силу выше указанного выбора  $\varepsilon$  при  $t \in I_n$  «возмущенный» аргумент  $\alpha_i t \in \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$ . Это включение дает возможность при построении решения  $x(t)$  применить известный в теории функционально-дифференциальных уравнений метод шагов [179].

Для вычисления элемента  $x_0(t) \in \mathcal{C}_{[0, h]}$  построим последовательность  $\{x_0^n(t)\}$  :

$$x_0^n(t) = -Ax_0^{n-1} - Kx_0^{n-1} + \bar{f}(t),$$

$$x_0^0(t) = \bar{f}(t), t \in [0, h].$$

В силу выбора  $h$  имеем оценку  $\|A + K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0, h]} \rightarrow \mathcal{C}_{[0, h]})} < 1$ .

Поэтому при  $t \in [0, h]$  существует единственное решение  $x_0(t)$  уравнения (1.2.21). Последовательность  $x_0^n(t)$  равномерно сходится к нему. Продолжим процесс построения искомого решения при  $t \geq h$ , т.е. на промежутках  $I_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Для определенности пусть далее в (1.2.22)  $\varepsilon = 1$ .

Тогда, вычислив элемент  $x_0(t) \in \mathcal{C}_{[0, h]}$ , будем искать элемент  $x_1(t)$  в пространстве  $\mathcal{C}_{[h, 2h]}$  непрерывных вектор-функций. Найдем  $x_1(t)$  из интеграль-

ного уравнения Вольтерра II рода

$$x(t) + \int_h^t K_n^{-1}(t, t) K'_t(t, s) x(s) ds = \bar{f}(t) - Ax_0 - \int_0^h K_n^{-1}(t, t) K'_t(t, s) x_0(s) ds$$

последовательными приближениями. При этом  $x_0(h) = x_1(h)$ .

Введем непрерывную функцию

$$\bar{x}_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 \leq t \leq h, \\ x_1(t), & h \leq t \leq 2h, \end{cases} \quad (1.2.23)$$

являющуюся сужением искомого непрерывного решения  $x(t)$  на интервал  $[0, 2h]$ . Тогда элемент  $x_2(t) \in \mathcal{C}_{[2h, 3h]}$  можно будет вычислить последовательными приближениями из интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$x(t) + \int_{2h}^t K_n^{-1}(t, t) K'_t(t, s) x(s) ds = \bar{f}(t) - A\bar{x}_1 - \int_0^{2h} K_n^{-1}(t, t) K'_t(t, s) \bar{x}_1(s) ds.$$

Продолжая этот процесс за  $N$  шагов ( $N \geq \frac{T}{h}$ ) построим искомое решение  $x(t) \in \mathcal{C}_{[0, T]}$  уравнения (1.2.1). □

**Пример 1.2.2.** *Интегральное уравнение*

$$\int_0^{t/2} K_1(t-s)x(s) ds + \int_{t/2}^t K_2(t-s)x(s) ds = f(t), \quad 0 < t \leq T,$$

где  $K_1(t-s) = K_2(t-s) + E$ , — матрицы  $m \times m$ ,  $E$  — единичная матрица,  $\|K_2^{-1}(0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} < 2$ , матрица  $K_2(t)$  и вектор-функция  $f(t)$  имеют непрерывные производные по  $t$ ,  $f(0) = 0$ , удовлетворяет условиям теоремы 1.2.2 и имеет единственное непрерывное решение.

В случае одного уравнения ( $m = 1$ ) изложенный метод решения разностных систем совпадет с известным способом А. О. Гельфонда (см. [32, с. 338]) построения частных решений неоднородных разностных уравнений с полиномиальной правой частью.

### 1.3 Обобщенные решения уравнений Вольтерра I рода

При конструировании моделей на основе уравнений Вольтерра с разрывными ядрами может возникнуть ситуация, когда априорные требования на

входные данные модели, например, на функцию  $f(t)$  в правой части, не выполняются.

В частности, возможно, что  $f(0) \neq 0$ . Именно этот случай мы рассмотрим в данном параграфе.

Как и ранее, введем в плоскости  $s, t$  треугольную область

$$D = \{s, t; 0 < s < t < T\}$$

и зададим непрерывные функции  $s = \alpha_i(t), i = \overline{1, n}$ , имеющие непрерывные производные при  $t \in (0, T)$ . Предполагается, что  $\alpha_i(0) = 0$ ,

$$0 < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$$

при  $t \in (0, T)$ ,

$$0 < \alpha'_1(0) < \dots < \alpha'_{n-1}(0) < 1,$$

причем кривые  $s = \alpha_i(t), i = \overline{0, n}$ , где  $\alpha_0(t) = 0, \alpha_n(t) = t$ , разбивают область  $D$  на непересекающиеся секторы

$$D_1 = \{s, t : 0 \leq s < \alpha_1(t)\},$$

$$D_i = \{s, t : \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{2, n}\}, \quad \overline{D} = \bigcup_1^n D_i.$$

Введем непрерывные функции  $K_i(t, s)$ , определенные и дифференцируемые по  $t$  при  $\{t, s\} \in D_i, i = \overline{1, n}$ .

Введем интегральный оператор

$$\int_0^t K(t, s)u(s) ds \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t, s)u(s) ds \quad (1.3.1)$$

с кусочно-непрерывным ядром

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), & t, s \in D_1, \\ \dots & \dots \\ K_n(t, s), & t, s \in D_n. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Таким образом, в настоящем параграфе рассматривается скалярное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t K(t, s)u(s) ds = f(t), \quad 0 < t < T \leq \infty, \quad (1.3.3)$$

с кусочно-заданным ядром (1.3.2), где функции  $f(t)$ ,  $K_i(t, s)$  – дифференцируемы по  $t$ ,  $t \in (0, T)$ , но в отличие от случаев, рассмотренных в предыдущих параграфах, теперь  $f(0) \neq 0$ . Рассмотрим задачу построения обобщенных решений уравнения (1.3.3). Ограничимся изложением формализма построения обобщенных решений уравнения (1.3.3) вида  $u(t) = a\delta_r(t) + x(t)$ , где  $x(t) \in \mathcal{C}_{(0,T)}$ ,  $\delta_r(t)$  – правая  $\delta$ -функция.

С этой целью ведем правую функцию Хевисайда

$$\theta_r(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0, \end{cases} \quad (1.3.4)$$

и поставим ей в соответствие правую  $\delta_r$ -функцию со следующими свойствами

1.  $M(s)\delta_r(s) = M(+0)\delta_r(s)$  для  $\forall M(s) \in \mathcal{C}_{(0,T]}$ , где  $M(+0) = \lim_{s \rightarrow +0} M(s)$ .
2.  $\int_0^t \delta_r(s) ds = \theta_r(t)$ .

Пусть  $0 = \alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_n(t) = t$ ,  $\alpha_i(t)$  – непрерывные функции,  $\alpha_i(0) = 0$ . Тогда из свойства 2 следует, что

$$\begin{aligned} J_i(t) &\equiv \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \delta_r(s) ds = \\ &= - \int_0^{\alpha_{i-1}(t)} \delta_r(s) ds + \int_0^{\alpha_i(t)} \delta_r(s) ds = \theta_r(\alpha_i(t)) - \theta_r(\alpha_{i-1}(t)). \end{aligned}$$

Тогда

$$J_i(0) = 0, i = 1, \dots, n, J_1(t) = 1 \text{ при } t > 0, J_i(t) = 0 \text{ при } i = \overline{2, n} \text{ и } t > 0.$$

Правые и левые  $\delta$ -функции со свойствами 1 и 2 вводились в работах М. И. Иманалиева [51]), см. также работы U. Toshio, H. Imsik, T. Terashi [315].

Итак, будем искать решения уравнения (1.3.3) в виде

$$u(s) = a\delta_r(s) + x(s), \text{ где } x(s) \in \mathcal{C}_{(0,T)}. \quad (1.3.5)$$

Тогда формальная подстановка (1.3.5) в (1.3.3) в силу указанных свойств приводит к уравнению вида

$$aK_1(t, +0) + \int_0^t K(t, s)x(s) ds = f(t), t > 0.$$

Выбирая

$$a = \frac{f(+0)}{K_1(+0, +0)},$$

получаем следующее интегральное уравнение для определения регулярной компоненты  $x(t)$  искомого обобщенного решения (1.3.5)

$$\int_0^t K(t, s)x(s) ds = \hat{f}(t), \quad t > 0. \quad (1.3.6)$$

Здесь

$$\hat{f}(t) = f(t) - K_1(t, +0) \frac{f(+0)}{K_1(+0, +0)}.$$

Так как  $\hat{f}(+0) = 0$ , то вычисление правой производной от обеих частей (1.3.6), приведет к эквивалентному уравнению II рода

$$K_n(t, t)x(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(t) \{K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))\} x(\alpha_i(t)) + \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \frac{\partial}{\partial t} K_i(t, s)x(s) ds = f'(t) - \frac{d}{dt} K_1(t, +0) \frac{f(+0)}{K_1(+0, +0)}.$$

Перепишем последнее уравнение в более компактной форме, введя два линейных оператора

$$Ax := \sum_{i=1}^{n-1} K_n^{-1}(t, t) \alpha'_i(t) \{K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))\} x(\alpha_i(t)), \\ Kx := \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t, t) \frac{\partial}{\partial t} K_i(t, s)x(s) ds.$$

В результате для определения регулярной компоненты обобщенного решения уравнения (1.3.3) получим уравнение II рода

$$x(t) + Ax + Kx = K_n^{-1}(t, t) \left( f'(t) - \frac{d}{dt} K_1(t, +0) \right) \frac{f(+0)}{K_1(+0, +0)}.$$

Для его исследования применимы методы, изложенные ранее в п. 1.1.

### Пример 1.3.1.

$$\int_0^{t/2} x(s) ds + 2 \int_{t/2}^t x(s) ds = 2 + t, \quad t > 0.$$

Здесь эквивалентное уравнение имеет вид  $\frac{t}{2}x(\frac{t}{2}) + 2x(t) = 2\delta(t) + 1$ . Поэтому  $x(t) = 2\delta(t) + 2/3$  – искомое обобщенное решение.



### Пример 1.3.2.

$$\int_0^{t/2} x(s) ds - \int_{t/2}^t x(s) ds = 1 + t, \quad t > 0.$$

Здесь эквивалентное уравнение  $x(\frac{t}{2}) - x(t) = \delta(t) + 1$  имеет  $c$ -параметрическое семейство обобщенных решений  $x(t) = \delta(t) + c - \frac{\ln t}{\ln 2}$ , где  $c$  — произвольная постоянная.

*Возможные обобщения и другие подходы к построению обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерра I рода*

Предложенный нами формализм построения обобщенных решений не полностью выясняет структуру всех допустимых обобщенных решений. Кроме того, остался открытым важный для приложений вопрос ослабления условий на гладкость функций  $K_i(t, s)$ ,  $f(t)$ . Поэтому для более полного исследования полезно записать задачу в виде уравнения

$$\int_0^t K(t, s) dg(s) = f(t),$$

где  $g(s)$  — неизвестная функция ограниченной вариации. В этом случае при вычислении искомого решения  $g(s)$  можно использовать тот факт, что решение  $g(s)$  представимо в виде разложения Лебега [124]

$$g = g_c + g_d + g_s,$$

где  $g_c$  — абсолютно непрерывная функция,  $g_d$  — функция скачков и  $g_s$  — сингулярная компонента, т.е. ее производная равна нулю почти всюду. В этом случае становится естественным искать обобщенное решение, например в виде

$$g = a\mu + \nu,$$

где  $a$  — произвольная постоянная,  $\mu$  и  $\nu$  — меры, например, борелевские заряды ограниченной вариации на определенных интервалах. В такой постановке и в других интересных постановках в  $L^p$  — пространствах задачу построения обобщенных решений уравнений Вольтерра I рода недавно стал рассматривать А. Lorenzi.

## 1.4 Уравнения Вольтерра I рода с разрывной правой частью

В данном параграфе мы вновь обратимся к скалярному уравнению (1.1.1) с кусочно-заданным ядром и ослабим требование на непрерывность правой части уравнения — функции  $f(t)$ , что является особо важным в ряде приложений. Такие естественные невысшие априорные требования к гладкости входных данных полезны при моделировании развития электроэнергетических систем с учетом возрастной структуры производственных мощностей и динамики развития на предыстории (см. работы [8; 75]).

Итак, рассмотрим уравнение

$$\mathcal{K}x = f(t), \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad t < T < \infty, \quad (1.4.1)$$

где

$$\mathcal{K}x = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t, s)x(s) ds,$$

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & -\infty < t < T_1, \\ f_2(t), & T_1 < t < T_2, \\ \dots & \dots\dots\dots \\ f_m(t), & T_{m-1} < t < T < \infty, \end{cases}$$

$$0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{m-1}.$$

Как и в п. 1.1 здесь предположим, что функции  $K_i(t, s)$  определены, непрерывны и дифференцируемы в соответствующих областях  $D_i = \{t, s | \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$ , функции  $f_i(t)$  — определены, непрерывны и дифференцируемы при  $T_{i-1} < t < T_i$  соответственно,  $T_0 = 0, T_m = T$ . Таким образом, теперь мы предполагаем, что правая часть в (1.4.1) имеет разрывы I рода на интервале  $(0, T)$  в точках  $T_1, \dots, T_{m-1}$ .

Следующий результат дает достаточные условия, когда уравнение (1.4.1) с помощью замены

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \delta(t - T_k) + u(t) \quad (1.4.2)$$

сводится к рассмотренному в п. 1.1 скалярному «слабо регулярному» уравнению (1.1.1) с непрерывной правой частью. В (1.4.2)  $\delta(t - T_k)$  — функция Дирака,  $u(t)$  — регулярная функция, а  $c_1, \dots, c_{m-1}$  — постоянные, вычисленные по формуле (1.4.3).

**Лемма 1.4.1.** Пусть  $K_i(t, s)$  – определены в соответствующих областях  $D_i$ , кусочно-непрерывная функция  $f(t)$  имеет ровно  $m - 1$  точек разрыва  $I$  рода  $T_1, \dots, T_{m-1}$ . Пусть  $K_1(t, T_i) = K_2(t, T_i) = \dots = K_n(t, T_i)$  при  $t \in (0, T)$ . Тогда замена (1.4.2), где вектор  $\mathbf{c}$  определяется по формуле

$$\mathbf{c} = \mathfrak{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad (1.4.3)$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} K_1(T_1, T_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_1(T_2, T_1) & K_1(T_2, T_2) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_1(T_{m-1}, T_1) & K_1(T_{m-1}, T_2) & \dots & \dots & K_1(T_{m-1}, T_{m-1}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} f_2(T_1) - f_1(T_1) \\ f_3(T_2) - f_2(T_2) \\ \dots \\ f_m(T_{m-1}) - f_{m-1}(T_{m-1}) \end{pmatrix}$$

приведет уравнение (1.4.1) к виду

$$\mathcal{K}u = \tilde{f}(t), \quad (1.4.4)$$

где  $\tilde{f}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  – непрерывная функция.

*Доказательство.* Замена (1.4.2) приводит уравнение (1.4.1) к виду (1.4.4), где

$$\hat{f}(t) = f(t) - \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t, s)(c_1\delta(s - T_1) + \dots + c_{m-1}\delta(s - T_{m-1})) ds.$$

Замечая, что  $K_i(t, s)\delta(s - T_k) = K_i(t, T_k)\delta(s - T_k)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где по условию  $K_1(t, T_k) = \dots = K_n(t, T_k)$ , получаем равенство

$$\hat{f}(t) = f(t) - \sum_{k=1}^m K_1(t, T_k)c_k \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \delta(s - T_k) ds. \quad (1.4.5)$$

Учитывая, что  $\alpha_0(t) = 0 < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_n(t) = t$ , получим равенство

$$\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \delta(s - T_k) ds = \int_0^t \delta(s - T_k) ds = \begin{cases} 1, & t > T_k, \\ 0, & t < T_k. \end{cases}$$



Регулярная часть решения —  $u(t)$  является ограниченной функцией с одной точкой разрыва I рода  $t = 0$ ,  $\sup_{-\infty < t < \infty} u(t) = \frac{1}{4}$ .

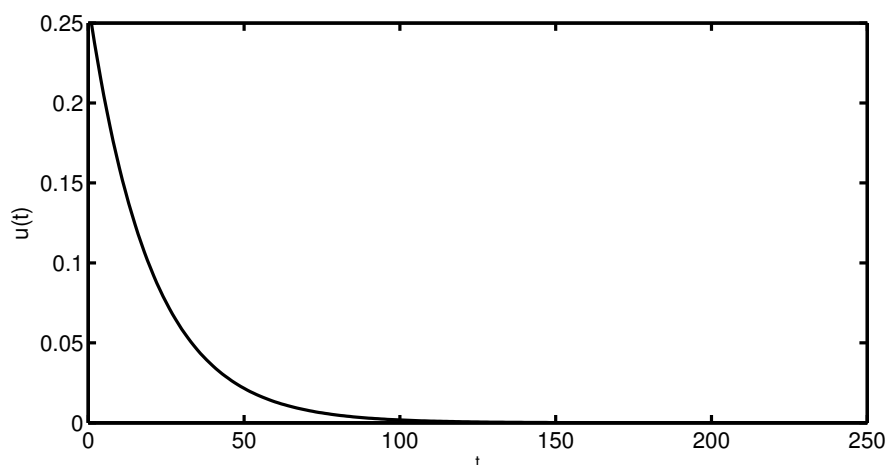


Рис. 1.3: Регулярная часть решения  $u(t)$  при  $0 < t < \infty$ .

**Пример 1.4.2.** Рассмотрим другой пример

$$\int_{t/2}^t x(s) ds = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t - 1, & t > 1. \end{cases}$$

Здесь  $f(t)$  — непрерывная дифференцируемая функция,  $f'(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$  — кусочно непрерывная функция,  $f(0) = 0$ . Поэтому решение ищем в классе ограниченных кусочно непрерывных функций. Строим эквивалентное уравнение с функционально возмущенным аргументом

$$x(t) - \frac{1}{2}x\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Применяем метод последовательных приближений

$$x_n(t) = \frac{1}{2}x_{n-1}\left(\frac{t}{2}\right) + \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases}$$

$$\text{где } x_0(t) = 0, x_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t > 1, \end{cases} x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 1 + 1/2, & 2 < t, \end{cases} \dots\dots$$

$$\dots\dots, x_n(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 1 + 1/2, & 2 < t < 2^2, \\ \dots\dots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i, & 2^{n-1} < t. \end{cases}$$

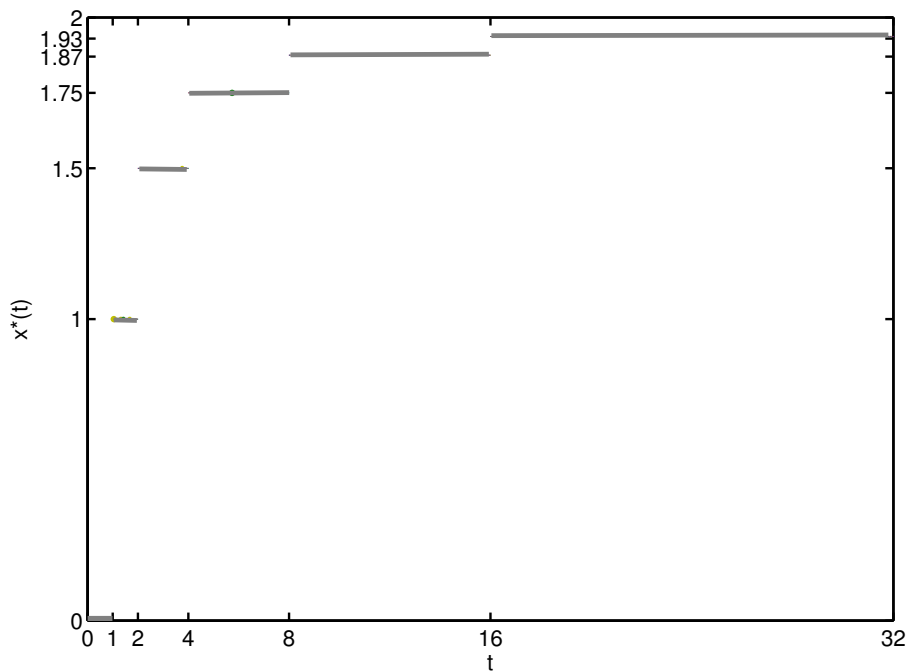


Рис. 1.4: Решение  $x^*(t)$  при  $0 < t < +\infty$ .

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$x^*(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ 1 + 1/2, & 2 < t < 2^n, \\ \dots\dots \\ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, & 2^{n-1} < t < 2^n, \\ \dots\dots \end{cases}$$

При этом  $\sup_{-\infty \leq t \leq \infty} x^*(t) = 2$ .

**Замечание 1.4.1.** В заключение отметим, что уравнения (1.4.1) с кусочно-заданным ядром, в котором функции  $K_i(t, s)$  разрывны по переменной  $t$ , также можно исследовать изложенным методом, т.е. искать решение в виде  $x(t) = \sum_k c_k \delta(t - T_k) + u(t)$ , где регулярная часть решения  $u(t)$  (как и в примере 1.4.1) является кусочно гладкой функцией и строится сочетанием метода последовательных приближений с методом шагов. Содержательные модели такого вида и их приложения в энергетике рассматривались в работе [8].

### *Возможное усиление результатов гл. 1*

С учетом результатов п. 1.4, условие на гладкость функций  $K_i(t, s)$  и правой части  $f(t)$  может быть ослаблено в теоремах гл. 1. Все основные результаты этой главы остаются справедливыми, если функции  $K_i(t, s)$  и  $f(t)$  определены и непрерывны при  $t \in [0, T]$ , а их производные по  $t \in [0, ]$  имеют конечное число точек разрыва I рода на интервале  $(0, T]$ . Однако при этом регулярная часть решений в соответствующем разложении строится в классе кусочно-непрерывных ограниченных функций на интервале  $(0, T]$ .

## Глава 2

# Нелинейные динамические модели

В гл. 2 излагаются приближенные методы построения решений в нерегулярных случаях ряда классов интегральных и дифференциальных систем. Изложенные методы применены для решения конкретных нелинейных задач механики и математической физики.

### 2.1 Нелинейное уравнение Гаммерштейна

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \int_a^b K(x, s)g(s, u(s), \lambda) ds, \quad (2.1.1)$$

где  $K(x, s), g(s, u, \lambda) = u(s) + f(s, u, \lambda)$  — непрерывные функции при  $a \leq x, s \leq b, |u| \leq r, |\lambda| \leq \rho$ ,

$$f(s, u, \lambda) = \sum_{i=2}^{\infty} q_{io}(s)u^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}(s)u^i \lambda^k. \quad (2.1.2)$$

Если единица не является характеристическим числом ядра  $K(x, s)$ , то уравнение (2.1.1) имеет единственное решение  $u \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  и для его построения можно использовать широкий спектр методов [26].

Предположим, что единица является характеристическим числом ядра  $K(x, s)$  ранга  $n$ ,  $\{\phi_i(x)\}_1^n$  — соответствующие собственные функции,  $\{\psi_i(x)\}_1^n$  — собственные функции союзного ядра  $K(s, x)$ . Тогда уравнение может иметь несколько ветвей решений.

Требуется построить в окрестности точки ветвления  $\lambda = 0$  решение  $u_\lambda(x) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Для построения разветвляющихся решений интегрального уравнения (2.1.1) можно применить классические результаты аналитической теории ветвления [20]. Кроме асимптотических методов, важной задачей при решении уравнения (2.1.1) является разработка методов последовательных приближений в окрестности точки ветвления, не рассматривавшихся в монографии [20].



Методы последовательных приближений в окрестности точек ветвления могут строиться на основе явной и неявной параметризации, в том числе в условиях групповой симметрии уравнения (2.1.1) (см. работы [62; 93]). Например, в работах [62; 93; 94; 106] приведены схемы последовательных приближений с неявной параметризацией ветвей решений операторных уравнений в банаховых пространствах. Неявную параметризацию при решении бифуркационных задач использовали также G. Moore и H. V. Keller [219; 254]. Между тем, при качественном анализе ветвей решения часто надо знать явную зависимость от бифуркационного параметра, входящего в уравнение и имеющего физический смысл. Поэтому актуальна разработка методов последовательных приближений в окрестности точек ветвления с явной параметризацией решения с учетом специфики конкретных классов нелинейных уравнений.

Результаты этого параграфа и их обобщения, изложенные в п. 3.4 и в п. 3.5, примыкают к циклу статей [62; 93; 94; 106] в области построения метода последовательных приближений ветвей решения интегрального уравнения (2.1.1) с явной параметризацией. В основе предлагаемой итерационной схемы лежит методология аналитического метода Ляпунова – Шмидта (см. монографии [120; 242]).

### *Асимптотика решения и последовательные приближения*

Введем условие

(A) *Разложение (2.1.2) может быть перегруппировано к виду*

$$f(s, u, \lambda) = \sum_{i\nu+k=\theta}^{\infty} q_{ik}(s)u^i\lambda^k,$$

где  $\nu = r/s$ ,  $\theta = \frac{r+m}{s}$ ,  $r, s, m$  – натуральные числа.

В конкретных случаях числа  $r, s, m$  легко можно вычислить методом диаграммы Ньютона (см., например, [120, с. 421-426]). Для этого достаточно нанести на координатную плоскость целочисленные точки  $(i, k)$ , отвечающие ненулевым коэффициентам  $q_{ik}$  и построить соответствующую диаграмму Ньютона. Искомые  $\nu$  выбираются неоднозначно и полагаются равными  $\text{tg}\gamma$ , где  $\gamma$  – угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательными направлениями оси абсцисс. Соответствующее  $\theta$  будет равно ординате точки пересечения продолжения этого отрезка с осью ординат.

Пусть при этом выполнено условие

(B) Система алгебраических уравнений

$$l_j(c) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \sum_{i\nu+k=\theta} q_{ik}(s)(c, \phi(s))^i \psi_j(s) ds = 0, \quad (2.1.3)$$

$j = 1, \dots, n$ , где  $(c, \phi) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(s)$ , имеет простое ненулевое решение  $c^*$ .

Если ядро  $K(x, s)$  симметричное, то условие (B) можно заменить на следующее условие:

(B') Функция

$$U(c) = \int_a^b \sum_{i\nu+k=\theta} \frac{1}{i+1} q_{ik}(s)(c, \phi(s))^{i+1} ds \quad (2.1.4)$$

имеет невырожденную критическую точку  $c^* \neq 0$ . Имеет место

**Теорема 2.1.1.** Пусть выполнены условия (A) и (B). Тогда уравнение (2.1.1) имеет решение

$$u = \lambda^\nu(c^*, \phi(x)) + r(x, \lambda), \quad (2.1.5)$$

где  $|r(x, \lambda)| = o(|\lambda|^\nu)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , функция  $r(x, \lambda)$  может быть однозначно определена методом последовательных приближений.

*Доказательство.* Введем операторы

$$Bu \stackrel{\text{def}}{=} u - \int_a^b K(x, s)u(s) ds,$$

$$\hat{B}u \stackrel{\text{def}}{=} u - \int_a^b \hat{K}(x, s)u(s) ds, \quad R(u, \lambda) = \int_a^b K(x, s)f(s, u(s), \lambda) ds,$$

где  $\hat{K}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^n \psi_i(x)\phi_i(s)$ .

Отметим, что на основании леммы Шмидта (см. [120, с. 221]) оператор  $\hat{B}$  имеет ограниченный обратный  $\Gamma = I - \int_a^b R(x, s)[\cdot]ds$ , где  $R(x, s)$  — резольвента ядра  $\hat{K}(x, s)$ .

Решение уравнения (2.1.1) будем искать в виде

$$u = (\Gamma\omega(x) + (c, \phi(x)))\lambda^\nu, \quad (2.1.6)$$

где функция  $\omega(x)$  удовлетворяет равенствам

$$(\omega, \psi_i) \equiv \int_a^b \omega(x)\psi_i(s) ds = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1.7)$$

С помощью замены (2.1.6) уравнение (2.1.1) приведем к виду

$$\omega = \lambda^{-\nu} R((\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^\nu, \lambda), \quad (2.1.8)$$

и дополним его уравнениями

$$\lambda^{-\theta} (R((\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^\nu, \lambda), \psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1.9)$$

вытекающими из равенств (2.1.7). Итак, задача свелась к отысканию функции  $\omega(x) \rightarrow 0$  и вектора  $c(\lambda) \rightarrow c^*$  при  $\lambda \rightarrow 0$  из системы (2.1.8) – (2.1.9). Отметим, что в уравнениях (2.1.9)

$$(R(u, \lambda), \psi_i) = \int_a^b f(s, u, \lambda)\psi_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Систему (2.1.8)–(2.1.9) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(\mathbf{w}, \lambda) = 0, \quad (2.1.10)$$

относительно элемента  $\mathbf{w} = (\omega, c)$  из  $\mathcal{C}_{[a,b]} \oplus \mathbb{R}^n$  с параметром  $\lambda$ . Здесь нелинейное отображение  $\Phi$  действует из банахова пространства  $E_1 = \mathcal{C}_{[a,b]} \oplus \mathbb{R}^{n+1}$  в банахово пространство  $E_2 = \mathcal{C}_{[a,b]} \oplus \mathbb{R}^n$ . В силу выбора чисел  $\nu, r, s$  оператор  $\Phi$  непрерывен в окрестности точки  $\mathbf{w}_0 = (0, c^*)$ ,  $\lambda_0 = 0$ , где  $c^*$  — ненулевое решение системы (2.1.3),

$$\lim_{\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}_0, \lambda \rightarrow 0} \Phi(\mathbf{w}, \lambda) = 0.$$

Поэтому в силу выбора чисел  $\nu, r, s$  оператор  $\Phi$  имеет непрерывную производную Фреше  $\Phi_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}, \lambda)$  по  $\mathbf{w}$  в окрестности этой точки.

Отметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \omega} (R((\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^\nu, \lambda), \psi_i) = \\ & = \lambda^\nu \int_a^b f'_u((\Gamma\omega + (c, \Phi))\lambda^\nu, \lambda)\psi_i(s)\Gamma[\cdot] ds, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial c_j}(R((\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^\nu, \lambda, \psi_i)) = \lambda^\nu \int_a^b f'_u(s, (\Gamma\omega + (c, \phi))\lambda^\nu, \lambda)\psi_i(s)\phi_j(s) ds,$$

$j = 1, \dots, n$ . Производная Фреше по  $\mathbf{w}$  оператора  $\Phi$  в точке  $(\mathbf{w}_0, 0)$  имеет вид

$$\Phi'_w(\mathbf{w}_0, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L} & \Xi \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{I}$  – тождественный оператор из  $\mathcal{C}_{[a,b]}$  в  $\mathcal{C}_{[a,b]}$ ,  $\mathbf{0}$  – нулевой оператор из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathcal{C}_{[a,b]}$ ,  $\mathbf{L}$  – векторный линейный функционал из  $\mathcal{C}_{[a,b]}$  в  $\mathbb{R}^n$ , т.е.

$\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_n)'$ , где  $L_i = \int_a^b \psi_i(s)f'_u(s, (c^*, \phi), 0)\Gamma(\cdot) ds$  – линейный функци-

онал из  $\mathcal{C}_{[a,b]}$  в  $\mathbb{R}^1$ ,  $\Xi = \left[ \frac{\partial l_i(c^*)}{\partial c_j} \right]_{i,j=1,\dots,n}$  – матрица  $n \times n$ . Оператор  $\Phi'_w(\mathbf{w}_0, 0)$

имеет ограниченный обратный, так как  $\Xi$  – невырожденная матрица в силу условия (В). Следовательно, уравнение (2.1.10) удовлетворяет условиям теоремы о неявном операторе ([120], с. 411), причем искомое решение  $\mathbf{w}$  можно найти методом последовательных приближений

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{w}_{n-1} - \Phi_w^{-1}(\mathbf{w}_0, 0)\Phi(\mathbf{w}_{n-1}, \lambda), \quad \mathbf{w}_0 = (0, c^*). \quad (2.1.11)$$

Таким образом, для построения решения уравнения (2.1.1) надо построить последовательность

$$u_n = (\Gamma w_n + (c_n, \phi))\lambda^\nu, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.12)$$

$$u_0 = (c^*, \phi)\lambda^\nu,$$

$w_0 = 0$ ,  $c_0 = c^*$ . Здесь  $w_n = w_{n-1} + \Delta_n$ ,  $c_n = c_{n-1} + \delta_n$ . Функция  $\Delta_n$  и вектор  $\delta_n$  из  $\mathbb{R}^n$  определяются формулами

$$\Delta_n(x) = \lambda^{-\nu} \int_a^b K(x, s)g(s, u_{n-1}(s), \lambda) ds - \omega_{n-1} \quad (2.1.13)$$

$$\delta_n = -\lambda^{-\theta} \int_a^b f'_u(s, u_{n-1}, \lambda)\hat{\Psi}(s) ds - \int_a^b f'_u(s, (c^*, \phi), 0)\Gamma\Delta_n\hat{\psi}(s) ds. \quad (2.1.14)$$

Вектор-функция  $\hat{\psi}(s) = (\hat{\psi}_1(s), \dots, \hat{\psi}_n(s))'$  определяется формулой  $\hat{\psi}(s) = \Xi^{-1}\psi(s)$ . Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 2.1.1.** Для построения функций  $\Gamma\omega_n, \Gamma\Delta_n$  в формулах (2.1.12), (2.1.14) можно воспользоваться представлением оператора  $\Gamma$  через резольвенту ядра  $\hat{K}(x, s)$  или решить линейное интегральное уравнение Фредгольма II рода с таким ядром.

Если  $K(x, s) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)\phi_i(s)$ , где  $\phi_i$  — ортонормированная система, то  $\Gamma$  будет тождественным оператором и последовательные приближения с помощью формул (2.1.12) – (2.1.14) сводятся к квадратурам.

**Замечание 2.1.2.** В итерационных формулах (2.1.12), (2.1.14) точка  $\lambda = 0$  в силу выбора чисел  $\nu, r, s$  является устранимой особой точкой. В случае, когда  $f$  — полином относительно неизвестной функции и можно легко провести «регуляризацию» формул (2.1.12) – (2.1.14), сократив отрицательные степени параметра  $\lambda$  после подстановки представления  $u_{n-1}$  в виде (2.1.6) в эти формулы.

В общем случае для обеспечения устойчивости вычислений при малых  $\lambda$ , следуя идее регуляризации в смысле А. Н. Тихонова [118], можно в формулах (2.1.12), (2.1.14) сделать замену  $\lambda^{-\nu} \Rightarrow (\lambda + \alpha(\delta))^{-\nu}$ ,  $\lambda^{-\theta} \Rightarrow (\lambda + \alpha(\delta))^{-\theta}$ . При этом регуляризирующий параметр  $\alpha(\delta)$  должен быть согласован с погрешностью вычислений  $\delta$ .

Отметим, что условие аналитичности функции  $f$  можно ослабить, заменив на предположение

$$\left| f(s, u, \lambda) - \sum_{\frac{i}{n_1} + \frac{k}{n_2} = 1} q_{ik}(s) u^i \lambda^k \right| = o \left( \sum_{\frac{i}{n_1} + \frac{k}{n_2} = 1} |u|^i |\lambda|^k \right)$$

при  $u \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$ . Если  $q_{n_1 0}(s) \neq 0, q_{0 n_2}(s) \neq 0$ , то очевидно точки диаграммы Ньютона функции  $f(s, u, \lambda)$  лежат не выше прямой  $\frac{i}{n_1} + \frac{k}{n_2} = 1$ .

**Пример 2.1.1.**

$$u(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos s ((1 + \lambda)u(s) - su^3(s) + \lambda^3 \cos s) ds = 0.$$

Здесь выполнены условия теоремы и замечание 2.1.1. В этом примере в представлении (2.1.6)  $n = 1, \phi = \psi = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \nu = 2$  или  $\nu = \frac{1}{2}$ . При этом оператор  $\Gamma$  является тождественным, а итерационные формулы (2.1.13) – (2.1.14) метода последовательных приближений сведутся к квадрату-

рам. Здесь существует три ветви решения с явной параметризацией:

$$u_1(x, \lambda) = -\lambda^2 \cos x + \mathcal{O}(|\lambda|^3),$$

$$u_{2,3}(x, \lambda) = \pm \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \cos x + \mathcal{O}(|\lambda|).$$

Изложенный метод последовательных приближений можно применить в нерегулярном случае и при решении нелинейных интегральных уравнений путем продолжения по длине промежутка интегрирования.

## 2.2 Существование и разрушение решений уравнений Вольтерра II рода

В настоящее время исследование режимов «blow-up» для нелинейных моделей с целью получения оценок на время разрушения является бурно развивающимся направлением математики. Однако, в этом направлении для уравнений Вольтерра получены лишь первые результаты (см. работы Н. Brunner [323], С. А. Roberts [257; 279], и Т. Malolepszy [244]). Ниже мы изложим метод определения гарантированного интервала  $[0, T_1)$  существования решения нелинейного уравнения Вольтерра II рода (2.2.1). При этом blow-up будет возможен только при продолжении решения. Итак, рассмотрим уравнение

$$x(t) = \int_0^t K(t, s, x(s)) ds, \quad x(0) = 0, \quad (2.2.1)$$

$$t, s, x \in D = \{0 \leq s \leq t \leq T, T < \infty, |x| < \infty\}.$$

**Определение 2.2.1.** ( [55], с. 467) Непрерывную функцию  $x(t)$ , удовлетворяющую уравнению (2.2.1), называют *главным по Канторовичу решением уравнения*, если последовательность  $x_n(t)$ , где

$$x_n = \int_0^t K(t, s, x_{n-1}(s)) ds, \quad x_0(t) = 0,$$

сходится к функции  $x(t)$  при  $\forall t \in [0, T)$ . Если при этом  $\lim_{t \rightarrow T_1-0} |x(t)| = +\infty, T_1 \leq T$ , то, следуя [61; 131; 303] скажем, что решение разрушается в точке  $T_1$ , а точку  $T_1$  назовем **точкой разрушения** (кратко, «blow-up») решения.

Требуется найти гарантированный интервал  $[0, T_1)$  существования главного решения, такой, что blow-up будет возможен только при продолжении

решения на интервал  $[T_1, +\infty)$ . Кроме того, требуется найти положительную непрерывную функцию  $\hat{x}(t)$ , определенную на интервале  $[0, T_1)$  такую, что для главного решения  $x(t)$  выполняется априорная оценка  $|x(t)| \leq \hat{x}(t)$  при  $t \in [0, T_1)$ .

Поставленную задачу будем решать на основе классического подхода Л. В. Канторовича [55, гл. 12], строя мажорантные уравнения по схеме, предложенной нами в работе [303] (см., также монографию [242] и близкие результаты, представленные в [4]).

Введем условия

(А) Пусть функция  $K(t, s, x)$  определена, непрерывна и дифференцируема по  $x$  в области  $D$ .

(В) Пусть построены непрерывные, положительные и монотонно возрастающие функции  $m(s)$ ,  $\gamma(x)$ , определенные при  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 \leq x < \infty$ , такие, что в области  $D$  при любых  $t$  из интервала  $[0, \infty)$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |K(t, s, x)| &\leq m(s)\gamma(|x|), \\ \left| \frac{\partial K(t, s, x)}{\partial x} \right| &\leq m(s)\gamma'(|x|). \end{aligned}$$

Случай  $\gamma(0) = 0$  далее исключается, так как тогда уравнение (2.2.1) имеет тривиальное решение. Оно и будет главным, согласно введенному Л. В. Канторовичем определению. Далее везде функции  $m(s)$ ,  $\gamma(x)$  считаются непрерывными положительными, монотонно возрастающими, а  $\gamma(x)$  и выпуклой по  $x$ .

### *Интегральные мажорирующие уравнения*

Введем мажорирующее интегральное уравнение

$$\hat{x}(t) = \int_0^t m(s)\gamma(\hat{x}(s)) ds \quad (2.2.2)$$

и соответствующую задачу Коши для дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}}{dt} = m(t)\gamma(\hat{x}(t)), \\ \hat{x}|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Разделяя переменные в (2.2.3), задачу Коши сведем к поиску положительной, монотонно возрастающей ветви неявной функции  $x = \hat{x}(t)$ ,  $\hat{x}(0) =$

0 из уравнения

$$L(x, t) \equiv \Phi(x) - M(t) = 0,$$

где  $\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\gamma(x)}$ ,  $M(t) = \int_0^t m(t) dt$ . В силу монотонного возрастания положительной непрерывной функции  $\Phi(x)$  существует обратное отображение  $\Phi^{-1}(x)$  с областью определения  $[0, \infty)$ , если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{dx}{\gamma(x)} = +\infty$  и соответственно с областью определения  $[0, T_1)$ , если  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{dx}{\gamma(x)} = l$ , где  $T_1$

определяется из условия  $\int_0^{T_1} m(t) dt = l$ .

Таким образом, в первом случае задача Коши имеет единственное положительное непрерывное решение  $\hat{x}(t)$  при  $t \in [0, \infty)$ , а во втором случае при  $t \in [0, T_1)$ .

Перейдем к построению решения  $\hat{x}(t)$  методом последовательных приближений. На основании доказательства теоремы о неявной функции (см., например, [120, с. 413]) решение  $\hat{x}(t)$  можно строить последовательными приближениями, решая уравнение  $L(x, t) = 0$ . Действительно, уравнение  $L(x, t) = 0$  определяет  $\hat{x}(t)$  как неявную непрерывную функцию  $\hat{x}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , так как

$$\left. \frac{\partial L(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0, t=0} = \frac{1}{\gamma(0)} \neq 0.$$

Поэтому на малом интервале  $[0, \Delta]$ ,  $\Delta > 0$  искомое решение  $\hat{x}(t)$  можно строить методом последовательных приближений

$$x_n(t) = x_{n-1}(t) - \gamma(0)L(x_{n-1}(t), t), \quad x_0(t) \equiv 0.$$

Построенное решение продолжается повторным применением теоремы о неявной функции на всю область определения обратного отображения функции  $\Phi^{-1}$ .

В приложениях распространен случай, когда  $\gamma(x)$  — полином с положительными коэффициентами, причем  $\gamma(0) \neq 0$ . В этом случае [50, с. 344] функция  $\Phi(x)$  строится явно через логарифмы, арктангенсы и рациональные функции, что позволяет в простых случаях найти обратную функцию  $\Phi^{-1}$  и построить решение  $\hat{x}(t)$  в явном виде.

В общем случае при построении положительной непрерывной функции  $\hat{x}(t) = \Phi^{-1}(M(t))$ , удовлетворяющей уравнению (2.2.2), можно использовать и такой результат



**Лемма 2.2.1.** Если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dx}{\gamma(x)} = +\infty$ , то мажорантное уравнение (2.2.2) имеет при  $t \in [0, \infty)$  непрерывное решение  $\hat{x}(t)$ . Более того, последовательность

$$x_n(t) = \int_0^t m(s) \gamma(x_{n-1}(s)) ds, \quad x_0(t) = 0 \quad (2.2.4)$$

сходится равномерно к функции  $\hat{x}(t)$ .

*Доказательство.* Существование непрерывного положительного решения  $\hat{x}(t)$  уравнения (2.2.2) следует из доказанного выше существования такого решения уравнения  $\Phi(x) - M(t) = 0$ , соответствующего уравнению (2.2.2). При этом последовательность (2.2.4) при  $\forall t \in [0, \infty)$  будет монотонно-возрастающей ограниченной сверху функцией  $\hat{x}(t)$  и поэтому сходится при  $\forall t \in [0, \infty)$ .

Известно (см., например, [30, с. 130]), что при этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n(t)$  будет измеримой функцией. Поэтому на основании теоремы Лебега (см. [125, с. 396]) в (2.2.4) можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить тождество

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t K(t, s, \hat{x}_n(s)) ds = \int_0^t K(t, s, \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n(s)) ds,$$

в котором справа будет абсолютно непрерывная функция равная  $\hat{x}(t)$ . Таким образом, предел монотонно-возрастающей последовательности (2.2.4) оказывается непрерывной функцией. Поэтому на основании признака Дини сходимость  $\{x_n(t)\}$  к решению  $\hat{x}(t)$  интегрального уравнения (2.2.2) оказывается равномерной. Лемма доказана.  $\square$

Аналогичным образом доказывается

**Лемма 2.2.2.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dx}{\gamma(x)} = l$ . Введем интервал  $[0, T_1)$ , где  $T_1 > 0$  определяется единственным образом из условия  $\int_0^{T_1} m(s) ds = l$ . Тогда уравнение (2.2.2) имеет положительное решение  $\hat{x}(t) \in C_{[0, T_1)}$ , последовательность  $\{x_n(t)\}$  (см. (2.2.4)) сходится к  $\hat{x}(t)$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow T_1} \hat{x}(t) = \infty$ .

Доказательство существования требуемой функции  $\hat{x}(t)$  на интервале  $[0, T_1)$  следует из ранее доказанного существования обратного отображе-

ния  $\Phi^{-1} : [0, l) \rightarrow [0, +\infty)$ . Справедливость  $\lim_{t \rightarrow T_1-0} \hat{x}(t) = +\infty$  следует из равенства  $l = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\gamma(x)} = \int_0^{T_1} m(s) ds$ , заложенного в условиях Леммы 2.2.2.

**Теорема 2.2.1.** Пусть выполнены условия (A), (B) и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dx}{\gamma(x)} = +\infty$ . Тогда интегральное уравнение (2.2.1) имеет главное решение  $x(t)$ , определенное при  $t \in [0, \infty)$  и справедлива его априорная оценка  $|x(t)| \leq \hat{x}(t)$ , где  $\hat{x}(t)$  – решение интегрального уравнения (2.2.2).

*Доказательство.* Введем последовательности

$$x_n(t) = \int_0^t K(t, s, x_{n-1}(s)) ds, \quad x_0(t) \equiv 0,$$

$$\hat{x}_n(t) = \int_0^t m(s) \gamma(\hat{x}_{n-1}(s)) ds, \quad \hat{x}_0(t) \equiv 0.$$

На основании работы [303] в условиях теоремы 2.2.1 будет выполняться неравенство  $|x_{n+p}(t) - x_n(t)| \leq \hat{x}_{n+p}(t) - \hat{x}_n(t)$ ,  $|x_n(t)| \leq \hat{x}_n(t)$  при  $t \in [0, T_1]$ ,  $T_1 < \infty$ . На основании Леммы 2.2.1 положительная монотонно-возрастающая последовательность  $\hat{x}_n(t)$  – фундаментальна по норме пространства  $\mathcal{C}_{[0, T_1]}$ , т.е.  $\max_{0 \leq t \leq T_1} (\hat{x}_{n+p}(t) - \hat{x}_n(t)) \leq \varepsilon$  при  $n \geq N(\varepsilon)$  и любых  $p$ . Следовательно,

$$\max_{0 \leq t \leq T_1} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| \leq \varepsilon \text{ при } n \geq N(\varepsilon), \forall p.$$

Таким образом последовательность  $\{x_n(t)\}$  лежит в шаре  $S(0, \hat{x}(t))$ , причем является фундаментальной. В силу полноты пространства  $\mathcal{C}_{[0, T_1]}$   $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ . При этом  $|x(t)| \leq \hat{x}(t)$ . В силу непрерывности функции  $K(t, s, x)$  по всем переменным функция  $x(t)$  удовлетворит и уравнению (2.2.1). Теорема доказана.  $\square$

Отметим, что из доказанной теоремы вытекает классическая теорема Хартмана – Уинтнера (см. монографию [131, с.21] о продолжении решения задачи Коши на полуось.

**Следствие 2.2.1.** Пусть в условии (B)  $\gamma(x) = a + bx$  – линейная функция,  $a \geq 0, b > 0$ . Тогда для главного решения уравнения (2.2.1) имеет

место априорная оценка

$$|x(t)| \leq a \int_0^t m(z) \exp \left( b \int_z^t m(s) ds \right) dz \text{ при } 0 \leq t < \infty.$$

Для доказательства достаточно проверить, что задаче Коши

$$\frac{dx}{dt} = m(t)(a + bx(t)), \quad x|_{t=0} = 0$$

удовлетворяет функция

$$\hat{x}(t) = a \int_0^t m(z) \exp \left( b \int_z^t m(s) ds \right) dz$$

при  $0 \leq t < \infty$ .

**Теорема 2.2.2.** Пусть выполнены условия (A), (B). Пусть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{dx}{\gamma(x)} = l.$$

Введем интервал  $[0, T_1]$ , где число  $T_1 > 0$  определяется единственным образом из равенства

$$\int_0^{T_1} m(s) ds = l.$$

Тогда интегральное уравнение (2.2.1) имеет в классе  $\mathcal{C}_{[0, T_1]}$  главное решение  $x(t)$ , справедлива при  $t \in [0, T_1]$  его априорная оценка  $|x(t)| \leq \hat{x}(t)$ , где  $\hat{x}(t)$  – решение задачи Коши (2.2.3),  $\lim_{t \rightarrow T_1} \hat{x}(t) = +\infty$ .

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 2.2.2 с учетом результатов Леммы 2.2.2.

**Следствие 2.2.2. 1.** Пусть выполнены условия Теоремы 2.2.2. Тогда существование точки «blow-up» решения уравнения (2.2.1) возможно лишь при  $t \geq T_1$ .

2. Пусть в условиях теоремы 2.2.2  $\gamma(x) = ax^2 + bx + c$ , где  $4ac - b^2 > 0$ ,  $a > 0, c > 0$ . Тогда главное решение  $x(t)$  уравнения (2.2.1) гарантированно существует на интервале  $[0, T_1)$ , где положительное  $T_1$  определяется из

условия

$$\int_0^{T_1} m(s) ds = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right).$$

Более того, при  $t \in [0, T_1)$  справедлива оценка  $|x(t)| \leq \hat{x}(t)$ , где функция  $\hat{x}(t)$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = & \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \operatorname{tg} \left[ \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2} \int_0^t m(s) ds \right] - \frac{b}{2a}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

*Доказательство.* В условиях Следствия 2.2.2 легко строится решение соответствующей задачи Коши (2.2.3). Действительно, (см. [41, с. 36]),

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right),$$

$$M(t) = \int_0^t m(s) ds.$$

Поэтому равенство

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\gamma(x)} = \int_0^{T_1} m(s) ds,$$

служащее для определения  $T_1$ , означает, что

$$\frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) = \int_0^{T_1} m(s) ds. \quad (2.2.6)$$

Из уравнения  $\Phi(x) = M(t)$  следует, что функция  $\hat{x}(t)$ , мажорирующая решение  $x(t)$  на интервале  $[0, T_1)$ , должна строиться по формуле (2.2.5).  $\square$

Следствие 2.2.2 можно использовать в задаче продолжения решения уравнения (2.2.1) с параметрами. Действительно, пусть в условиях Теоремы 2.2.2 функция  $K$  зависит от параметра  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\lambda\| < \delta$  (т.е.  $K = K(t, s, x, \lambda)$ ). Тогда в условии В функция  $\gamma(|x|, \|\lambda\|)$  будет зависеть от нормы этого параметра. Пусть  $\gamma(|x|, 0) = 0$ . Тогда уравнение (2.2.1) имеет при  $\lambda = 0$  тривиальное решение  $x = 0$ , так как тогда при  $\lambda = 0$  уравнение (2.2.1) вырождается в равенство  $x(t) = 0$ . Следующий результат, вытекающий из Теоремы 2.2.2, позволяет оценивать интервал существования главного решения уравнения (2.2.1) с векторным параметром  $\lambda$  при

$$0 < \|\lambda\| < \delta.$$

**Следствие 2.2.3.** Пусть в условиях Теоремы 2.2.2

$$m(s) = 1, \quad \gamma(x, \lambda) = a(\|\lambda\|)x^2 + b(\|\lambda\|)x + c(\|\lambda\|).$$

Пусть  $a(\|\lambda\|)$ ,  $b(\|\lambda\|)$ ,  $c(\|\lambda\|)$  — положительные бесконечно малые при  $\|\lambda\| \rightarrow 0$ . Пусть в проколотой окрестности  $0 < \|\lambda\| < \delta$  выполнены неравенства

$$4a(\|\lambda\|)c(\|\lambda\|) - b^2(\|\lambda\|) = \Delta(\|\lambda\|) > 0,$$

$$\sup_{\|\lambda\| < \delta} \operatorname{arctg} \frac{b(\|\lambda\|)}{\sqrt{\Delta(\|\lambda\|)}} = \sigma, \quad \sigma < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда при  $0 < \|\lambda\| < \delta$  уравнение (2.2.1) имеет главное решение  $x(t, \lambda)$ , определенное на интервале  $[0, T(\|\lambda\|)]$ , где

$$T(\|\lambda\|) = \frac{2}{\sqrt{\Delta(\|\lambda\|)}} \left( \frac{\pi}{2} - \sigma \right).$$

При этом  $\lim_{\|\lambda\| \rightarrow 0} T(\|\lambda\|) = +\infty$  и выполняется априорная оценка главного решения  $|x(t, \lambda)| \leq \hat{x}(t, \lambda)$ , где положительная мажорирующая функция  $\hat{x}(t, \lambda)$  определяется на интервале  $[0, T(\|\lambda\|)]$  по формуле (2.2.5) с коэффициентами  $a = a(\|\lambda\|)$ ,  $b = b(\|\lambda\|)$ ,  $c = c(\|\lambda\|)$ ,  $\lim_{t \rightarrow T(\|\lambda\|)} \hat{x}(t, \lambda) = +\infty$ .

Таким образом, следствие 2.2.3 дает достаточные условия существования главного решения интегрального уравнения с векторным параметром  $\lambda$ , определенным в проколотой окрестности  $0 < \|\lambda\| < \delta$ .

### Алгебраические мажоранты

При оценке гарантированного замкнутого интервала  $[0, T]$  существования главного решения уравнения (2.2.1) и оценки его нормы в  $\mathcal{C}_{[0, T]}$  удобно использовать алгебраические мажоранты.

Действительно, пусть выполнено условие (А) и следующее условие:

(С) Существует непрерывная, дифференцируемая и выпуклая по  $r$ , положительная и монотонно возрастающая по всем переменным функция  $M(\rho, s, r)$ , определенная при  $\rho, s, r \geq 0$ , такая, что в области  $D$  при

$t \in [0, \rho]$ ,  $|x| \leq r$  выполнены неравенства

$$\left| \int_0^t K(t, s, x(s)) ds \right| \leq \int_0^\rho M(\rho, s, r) ds,$$

$$\left| \int_0^t \frac{\partial K(t, s, x(s))}{\partial x} ds \right| \leq \int_0^\rho \frac{\partial M(\rho, s, r)}{\partial r} ds.$$

Введем функцию

$$M(\rho, r) = \int_0^\rho M(\rho, s, r) ds$$

и ее положительную производную

$$\frac{\partial M(\rho, r)}{\partial r} = \int_0^\rho \frac{\partial M(\rho, s, r)}{\partial r} ds.$$

**Лемма 2.2.3.** Система

$$\begin{cases} r = M(r, \rho), \\ 1 = \frac{\partial M(r, \rho)}{\partial r} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

имеет единственное положительное решение  $r^*, \rho^*$ . Более того, при любых  $\rho \in [0, \rho^*]$  уравнение  $r = M(r, \rho)$  имеет главное решение  $r(\rho)$ , т.е. монотонно возрастающая последовательность  $r_n = M(r_{n-1}, \rho)$ ,  $r_0 = 0$ , при любых  $\rho \in [0, \rho^*]$  сходится к решению уравнения  $r = M(r, \rho)$ .

Доказательство геометрически очевидно [38, с. 218], если рассмотреть на плоскости  $(y, r)$  графики кривых  $y = M(r, \rho)$  при различных  $\rho$  и биссектрису  $y = r$ . Прямая  $y = r$  касается кривой  $y = M(r, \rho^*)$  в точке  $(r^*, \rho^*)$ ,

**Теорема 2.2.3.** Пусть выполнены условия (A) и (C),  $(r^*, \rho^*)$  — положительное решение системы (2.2.7). Тогда главное решение  $x(t)$  уравнения (2.2.1) существует в классе  $\mathcal{C}_{[0, \rho^*]}$  и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq \rho^*} |x(t)| \leq r^*.$$

*Доказательство.* Введем две последовательности

$$x_n(t) = \int_0^t K(t, s, x_{n-1}(s)) ds,$$

$$r_n = M(r_{n-1}, \rho^*),$$

где  $x_0(t) = 0$ ,  $r_0 = 0$ . Тогда имеет место неравенство

$$\|x_{n+p} - x_n\|_{C_{[0, \rho^*]}} \leq r_{n+p} - r_n$$

при  $n \geq N(\varepsilon)$  и любых  $p$ . Так как на основании Леммы 2.2.3  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r^*$ , то  $r_{n+p} - r_n \leq \varepsilon$  при  $n \geq N(\varepsilon)$  и для любых  $p$ . Итак, последовательность  $\{x_n(t)\}$ , при  $x_0 = 0$  оказывается фундаментальной,  $\|x_n\| \leq r^*$  и теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим пример:

$$x(t) = \int_0^t (K_2(t, s)x^2(s) + K_1(t, s)x(s) + K_0(t, s)) s^2 ds.$$

Пусть

$$\sup_{0 \leq s \leq t < \infty, i=1,2,3} |K_i(t, s)| \leq 1.$$

Соответствующая мажорантная алгебраическая система

$$\begin{cases} r = \frac{\rho^3}{3}(1 + r + r^2), \\ 1 = \frac{\rho^3}{3}(1 + 2r) \end{cases}$$

имеет решение  $r^* = 1$ ,  $\rho^* = 1$ . Поэтому на основании Теоремы 2.2.3 интегральное уравнение имеет главное решение  $x(t) \in C_{[0,1]}$ ,  $\|x\| \leq 1$ . Используя интегральную мажоранту  $x(t) = \int_0^t (x(s)^2 + x(s)) ds + \frac{t^3}{3}$  и следствие 2.2.2, получим более полную информацию о решении. А именно, интегральное уравнение имеет непрерывное решение  $x(t)$  на интервале  $[0, 1.5365)$  и выполняется оценка  $|x(t)| \leq 0.8660 \operatorname{tg}(0.5236 + 0.2886t^3) - 0.5$  при  $0 \leq t < 1.5365$ .

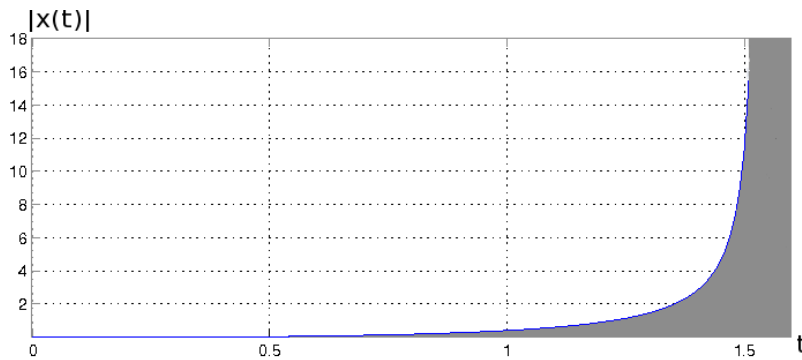


Рис. 2.1: Мажоранта решения. Серым цветом выделена зона расположения модуля решения.

Отметим, что изложенный метод можно применять и для исследования абстрактных уравнений вида (2.2.1) в банаховом пространстве  $E$ , когда

$K(t, s, x)$  — ограниченный оператор из  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$  в  $E$ , дифференцируемый по  $x$  в смысле Фреше. Этот вопрос мы подробно обсудим в третьей главе.

### 2.3 О ветвлении решений нелинейных дифференциальных уравнений

Цель данного параграфа — продемонстрировать эффективность применения асимптотического метода решения нелинейных уравнений, изложенного в п. 2.1 на примере доказательства конструктивных теорем существования семейств решений дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, не разрешенных относительно старших производных. Разработанный аналитический подход позволил построить асимптотику решений в модели магнитной изоляции вакуумного диода.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F\left(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x^{(1)}(t), x(t), t\right) = 0, \quad 0 \leq t \leq p, \quad (2.3.1)$$

где непрерывная функция  $F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x, t)$  определена в окрестности нуля. А именно,  $F = \sum_{|i|+k=1}^N F_{ik}(\bar{x})t^k + R(x, t)$ ,

$$F_{ik}(\bar{x}) = F_{i_n, i_{n-1}, \dots, i_1, i_0} x_n^{i_n} \dots x_1^{i_1} x^{i_0}, \quad |i| = i_n + i_{n-1} + \dots + i_1 + i_0.$$

Функция  $R(x, t)$  удовлетворяет оценке  $|R(x, t)| = o((|x| + |t|)^N)$ .

Требуется построить решение уравнения (2.3.1), удовлетворяющее условиям:  $t^i x^{(i)}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $i = 0, \overline{1, n}$ . Так как таких решений может быть несколько, то введем:

**Определение 2.3.1.** Если решение  $x(t)$  представимо в виде

$$x = t^\varepsilon (x_0 + v(t)), \quad (2.3.2)$$

где  $\varepsilon = \frac{r}{s}$  — рациональное положительное число,  $x_0 \neq 0$ ,  $\varepsilon, x_0$  определяются неоднозначно, функция  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и может зависеть от свободных параметров,  $t^i x^{(i)}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $i = \overline{0, n}$ , то точку  $t = 0$  назовем **алгебраической точкой ветвления** малого решения уравнения (2.3.1).

Классы дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), неразрешенных относительно старших производных, в последнее время привлекали внимание многих математиков. Различные подходы и библиографию в этой области можно найти, например, в монографии



ях [19; 242] и др. Построение решений в окрестностях точек ветвления представляет особый интерес в ряде приложений (см., например, [20; 134] и др.).

Наша цель состоит в построении малых решений уравнения (2.3.1) на основе аналитической теории ветвления (см. [120], гл. 9) и теории дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой (см. [20], [46, гл. 9] и [57, гл. 4]). Для вычисления главного члена  $t^\varepsilon x_0$  решения (2.3.2) используется метод диаграммы Ньютона (см., например, [120, гл. 9] и монографию [19]). Определение функции  $v(t)$  в решении (2.3.2) сводится к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\mathcal{L}\left(t\frac{d}{dt}\right)v = M(t^{n-1}v^{(n-1)}, \dots, tv^{(1)}, v, t^{1/s}), \quad (2.3.3)$$

где  $\mathcal{L} = t^n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(\varepsilon)t^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(\varepsilon)$  – дифференциальный оператор Эйлера. Строятся  $s$ -параметрические семейства решений  $v(t, c) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  уравнения (2.3.3). Структура семейства  $v(t, c)$  зависит от корней характеристического полинома

$$L(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - (n - 1)) + a_{n-1}(\varepsilon)\lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - (n - 2)) + \dots + a_0(\varepsilon) \quad (2.3.4)$$

дифференциального оператора Эйлера и от вида нормальной жордановой формы матрицы  $A$ , определяемой через коэффициенты оператора Эйлера.

На этой основе предложен способ построения асимптотики функции  $v$  в виде логарифмо-степенных сумм типа Фукса – Фробениуса [57, гл. 4]. Асимптотика затем используется в методе последовательных приближений в качестве начального приближения. В аналитическом случае соответствующее решение (2.3.2) раскладывается в ряд по степеням  $t^{1/s}$ ,  $t \ln t$ ,  $t^{\operatorname{Re}\lambda_i} \cos(\operatorname{Im}\lambda_i \ln t)$ ,  $t^{\operatorname{Re}\lambda_i} \sin(\operatorname{Im}\lambda_i \ln t)$ , где  $\lambda_i$  – корни характеристического полинома (2.3.4)  $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ .

Параграф организован следующим образом. Вначале строится главный член  $t^\varepsilon x_0$  решения (2.3.2) и проведена редукция к уравнению (2.3.3) для определения функции  $v$  в представлении (2.3.2). Далее рассмотрен способ построения асимптотики параметрических семейств решений уравнения (2.3.3) и приводятся теоремы существования малых решений уравнения (2.3.1).

*Редукция к системе с регулярной особой точкой*

Введем обозначение  $F^N(\bar{x}, t) = \sum_{|i|+k=1}^N F_{ik}(\bar{x})t^k$  и условие:

**A)** существуют рациональные числа  $\varepsilon = \frac{r}{s} > 0$ ,  $\theta = \frac{r_1}{s}$  такие, что разложение  $F^N$  можно перегруппировать к виду

$$F^N(\bar{x}, t) = \sum_{\varepsilon|i|+k-i_1-2i_2-\dots-ni_n \geq \theta} F_{ik}(\bar{x})t^k$$

и при этом

**B)**  $|R(t^\varepsilon x, t)| = o(t^\theta)$  при  $\forall x$  из окрестности нуля.

В конкретных случаях числа  $\varepsilon, \theta$  легко вычислить, нанеся на координатную плоскость целочисленные точки  $(|i|, k - i_1 - 2i_2 - \dots - ni_n)$ , отвечающие ненулевым  $|i|$ -однородным формам  $F_{ik}(\bar{x})$  и построив по этим точкам диаграмму Ньютона. Искомое  $\varepsilon$  полагаем равным  $\tan \phi$ , где  $\phi$  – угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси абсцисс. Соответствующее  $\theta$  будет равно ординате точки пересечения продолжения этого отрезка с осью ординат. В отличие от задач, рассмотренных в [315, гл. 9],  $\theta$  может оказаться отрицательным. В последнем случае условие B) выполняется автоматически в силу оценки  $R(x, t) = [(|x| + |t|)^N]$ . Условие B) выполняется, очевидно, и при любых положительных  $\theta$ , если диаграмма Ньютона лежит ниже прямой, проходящей через точки  $(0, N), (N, 0)$ . Так как диаграмма Ньютона может иметь несколько отрезков, то выбор  $\varepsilon, \theta$  может оказаться неоднозначным.

Введем дифференциальные операторы Эйлера  $k$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(u) = t^k u^{(k)} + c_k^1 \varepsilon t^{k-1} u^{(k-1)} + c_k^2 \varepsilon (\varepsilon - 1) t^{k-2} u^{(k-2)} + \dots \\ + \varepsilon (\varepsilon - 1) \dots (\varepsilon - (k - 1)) u, \quad k = \overline{1, n} \end{aligned}$$

и обозначение  $\mathcal{L}_0(u) = u$  для симметрии в последующих выкладках, заметив, что  $(t^\varepsilon u)^{(k)} = t^{\varepsilon-k} \mathcal{L}_k(u)$ . Тогда в силу условия A) после замены  $x(t) = t^\varepsilon u(t)$  получим разложение

$$\begin{aligned} F(x^{(n)}, \dots, x^{(1)}, x, t) = t^\theta \sum_{\varepsilon|i|+k-i_1-2i_2-\dots-ni_n=\theta} F_{ik}(\mathcal{L}_n(u), \dots, \mathcal{L}_0(u)) + \\ + r(t^n u^{(n)}, \dots, tu^{(1)}, u, t). \end{aligned}$$

В силу выбора чисел  $\varepsilon, \theta$  справедлива оценка

$$\left| r(t^n u^{(n)}, \dots, tu^{(1)}, u, t) \right| = o(t^\theta). \quad (2.3.5)$$

Для определения коэффициента  $x_0$  в искомом решении (2.3.2) введем полином

$$Q(\mathbf{l}_n(x), \dots, \mathbf{l}_0(x)) = \sum_{\varepsilon|i+k-i_1-2i_2-\dots-ni_n=\theta} F_{ik}(\mathbf{l}_n(x), \dots, \mathbf{l}_0(x)),$$

где теперь  $l_k(x) = \varepsilon(\varepsilon-1)\dots(\varepsilon-(k-1))x$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Пусть наряду с условиями А) и В) выполнено следующее условие:

С) полином  $Q(\mathbf{l}_n(x), \dots, \mathbf{l}_0(x))$  имеет корень  $x_0 \neq 0$ , причем  $\left. \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{l}_n(x)} \right|_{x=x_0} \neq 0$ .

Тогда уравнение (2.3.1) заменой (2.3.2) и сокращением на  $t^\theta$  приводится к уравнению относительно функции  $v(t)$

$$\mathcal{A}_n \mathcal{L}_n(v) + \dots + \mathcal{A}_0 \mathcal{L}_0(v) + P(t^n v^{(n)}, \dots, tv^{(1)}, v, t^{1/s}) = 0. \quad (2.3.6)$$

Здесь  $\mathcal{A}_i = \left. \frac{\partial Q}{\partial l_i} \right|_{x=x_0}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $|P| = o(1)$  при  $t \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{L}_i(v)$  – дифференциальные операторы Эйлера.

Так как  $\mathcal{A}_n \neq 0$ , то подставляя в (2.3.6) дифференциальные операторы  $\mathcal{L}_i(v)$  получим уравнение

$$t^n v^{(n)}(t) + a_{n-1}(\varepsilon) t^{n-1} v^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(\varepsilon) v(t) + \\ + \mathcal{A}_n^{-1} P(t^n v^{(n)}(t), \dots, tv^{(1)}, v(t), t^{1/s}) = 0, \quad (2.3.7)$$

где  $a_{n-1}(\varepsilon) = c_n^1 \varepsilon + \mathcal{A}_n^{-1} \mathcal{A}_{n-1}$ ,  $a_{n-k}(\varepsilon)$ ,  $k = 2, \dots, n$  – определенные полиномы порядка  $k$  от  $\varepsilon$ .

Таким образом, для определения функции  $v(t)$  получено уравнение (2.3.7) с дифференциальным оператором Эйлера  $\mathcal{L}(t \frac{d}{dt})v$   $n$ -го порядка в главной части. Отметим, что характеристический полином  $L(\lambda)$  является характеристическим полиномом именно этого дифференциального оператора Эйлера. Так как выполнена оценка  $|P| = o(1)$  при  $t \rightarrow 0$  и любых  $v$ , то из уравнения (2.3.7) элемент  $t^n v^{(n)}$  определяется в окрестности нуля методом последовательных приближений как функция от  $v(t), tv^{(1)}, \dots, t^{n-1} v^{(n-1)}, t^{1/s}$ .

В результате задача определения функции  $v$  сводится в нашей постановке к решению уравнения вида (2.3.3).

Отметим, что в уравнении (2.3.3) функция  $M$  и ее первые производные по  $v, tv^{(1)}, \dots, t^{n-1} v^{(n-1)}$  в нуле равны нулю. Уравнение (2.3.3) заменой  $v = v_1, tv^{(1)} = v_2, \dots, t^{n-1} v^{(n-1)} = v_n$  сводится к системе  $n$  нелинейных

дифференциальных уравнений с особой точкой I рода при  $t = 0$  :

$$t \frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v} + f(\mathbf{v}, t^{1/s}). \quad (2.3.8)$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)'$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 1 \\ -a_0(\varepsilon) & -a_1(\varepsilon) & -a_2(\varepsilon) & \dots & -a_{n-2}(\varepsilon) & n-1 - a_{n-1}(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (2.3.9)$$

$$f = (0, \dots, 0, M(v_n, v_{n-1}, \dots, v_1, t^{1/s}))', \quad M(0, \dots, 0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial M}{\partial v_i} \right|_{v_1=\dots=v_n=t=0} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, вычисление функции  $v$  в представлении искомого малого решения (2.3.2) уравнения (2.3.1) свелось к построению решения  $\bar{v} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  из системы (2.3.8).

**Замечание 2.3.1.** Легко проверить справедливость тождества  $\det(-\lambda E + A) = (-1)^n L(\lambda)$ , где  $L(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)\dots(\lambda - (n - 1)) + a_{n-1}(\varepsilon)\lambda(\lambda - 1)\dots(\lambda - (n - 2)) + \dots + a_0(\varepsilon)$  — характеристический полином дифференциального оператора Эйлера  $\mathcal{L}$ , стоящего в главной части уравнения (2.3.3). В силу структуры матрицы  $A \forall \lambda$  имеем

$$\text{rank}(-\lambda E + A) \geq n - 1.$$

Если  $\text{rank}(-\lambda E + A) = n - 1$ , то вектор  $\mathbf{e}$ , удовлетворяющий однородной системе  $\lambda \mathbf{e} = A\mathbf{e}$ , имеет жорданову цепочку длины  $p$ , где  $p$  — кратность корня  $\lambda$  характеристического полинома  $L(\lambda)$ .

*Теоремы существования малых решений и построение асимптотики*

**Теорема 2.3.1.** Пусть выполнены условия A), B), C). Фиксируем  $N > s\|A\|$  и предположим, что среди корней характеристического полинома

(2.3.4) нет чисел  $\frac{i}{s}, i = \overline{1, N}$ . Тогда уравнение (2.3.1) имеет решение вида

$$x(t) = \sum_{i=0}^N x_i t^{\frac{r+i}{s}} + o(t^{(r+N)/s}). \quad (2.3.10)$$

*Доказательство.* Выберем числа  $r/s, x_0$  в соответствии с условиями А), В), С) и будем искать решение уравнения (2.3.1) в виде  $x = t^{r/s}(x_0 + v(t))$ . Здесь  $v(t)$  первая компонента вектора  $\mathbf{v}$ , удовлетворяющего системе (2.3.8). Вектор  $\mathbf{v}$  ищем в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^N \mathbf{v}_i t^{i/s} + t^{N/s} \boldsymbol{\omega}(t), \quad (2.3.11)$$

где  $\boldsymbol{\omega} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ .

Подставляя (2.3.11) в (2.3.8) и учитывая, что в силу условия теоремы 2.3.1  $\det(nE - sA) \neq 0$  при  $n \in \mathbb{N}$ , определим рекуррентным образом коэффициенты  $\mathbf{v}_i$  из линейных систем

$$\left(\frac{i}{s}E - A\right)\mathbf{v}_i = m_i(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}), \quad i = \overline{1, N}.$$

Правые части строятся методом неопределенных коэффициентов. Так как  $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})'$ , то в решении (2.3.10) полагаем  $x_i = v_{i1}, i = \overline{1, n}$ . Для определения вектор-функции  $\mathbf{w}(t)$  получается система

$$t \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \left(-\frac{N}{s}E + A\right)\mathbf{w} + g(\mathbf{w}, t^{1/s}), \quad (2.3.12)$$

где  $\|g\| = \mathcal{O}(t^{1/s})$  при  $\|\mathbf{w}\| \leq r, 0 \leq t \leq p$ ,

$$\|g(\mathbf{w}_1, t^{1/s}) - g(\mathbf{w}_2, t^{1/s})\| \leq l\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|.$$

Остается показать, что система (2.3.12) при достаточно большом  $N$  имеет единственное решение  $\mathbf{w} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ . Это решение можно найти из эквивалентного интегрального уравнения

$$\mathbf{w}(t) = \int_0^t \tau^{-1} \exp\left[\left(-\frac{N}{s}E + A\right) \ln \frac{t}{\tau}\right] g(\mathbf{w}(\tau), \tau^{1/s}) d\tau \equiv \Phi(\mathbf{w}, t) \quad (2.3.13)$$

методом последовательных приближений при нулевом начальном приближении  $\mathbf{w}_0 = 0$ . Действительно, так как  $N > S\|A\|, \ln(\frac{t}{\tau}) \geq 0$  при  $\tau \leq t, \text{sign} \tau = \text{sign} t$ , то существует постоянная  $C$ , такая, что при  $\tau \leq t$  справед-

лива оценка

$$\left\| \exp\left[-\frac{N}{s}E + A\right] \ln(t/\tau) \right\|_{\mathcal{L}(R^n \rightarrow R^n)} \leq C (t/\tau)^{-\frac{N}{s} + \|A\|}. \quad (2.3.14)$$

Поэтому при  $N > s\|A\|$  справедлива оценка

$$\left\| \int_0^t \tau^{-1} \exp\left[-\frac{N}{s}E + A\right] \ln(t/\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{L}(R^n \rightarrow R^n)} \leq \frac{C}{\frac{N}{s} - \|A\|}.$$

Фиксируя  $q \in (0, 1)$ , выберем  $N$  таким, чтобы

$$\frac{cl}{\frac{N}{s} - \|A\|} \leq q. \quad (2.3.15)$$

Введем пространство  $\mathcal{C}_{[0,p]}$  непрерывных вектор-функций  $\bar{w}(t)$  с нормой

$$\|w\| = \max_{0 \leq t \leq p, 1 \leq i \leq n} |w_i(t)|.$$

В этом пространстве зададим множество

$$S = \{\|\bar{w}\| \leq r, |w_i(t)| \leq rt^{1/s}, i = 1, \dots, n\}.$$

Будем искать малое решение  $\mathbf{w}(t)$  уравнения (2.3.13) в  $S$ . При достаточно большом  $N$  в силу оценки (2.3.15)

$$\|\Phi(\bar{w}_1, t) - \Phi(\bar{w}_2, t)\| \leq q\|\bar{w}_1 - \bar{w}_2\|.$$

Поэтому оператор  $\Phi$  сжимающий при  $\|\mathbf{w}\| \leq r$ . Далее, при  $\|\mathbf{w}\| \leq r$

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbf{w}, t)\| &\leq \|\Phi(\mathbf{w}, t) - \Phi(0, t)\| + \|\Phi(0, t)\| \leq \\ &\leq qr + \max_{0 \leq t \leq p} \left\| \int_0^t \tau^{-1} \exp\left[-\frac{N}{s}E + A\right] \ln \frac{t}{\tau} g(\mathbf{w}(\tau), \tau^{1/s}) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq qr + \frac{c}{\frac{N}{s} - \|A\|} \max_{0 \leq \tau \leq p} \|g(0, \tau^{1/s})\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Так как  $g(0, \tau^{1/s}) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , то при заданных  $q, N$  можно подобрать  $p > 0$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{c}{\frac{N}{s} - \|A\|} \max_{0 \leq \tau \leq p} \|g(0, \tau^{1/s})\|_{\mathbb{R}^n} \leq (1 - q)r.$$

Поэтому оператор  $\Phi$  переводит шар  $\|\mathbf{w}\| \leq r$  самого в себя. Более того,

$$\|\Phi(\mathbf{w}, t)\| = \mathcal{O}(t^{1/s}),$$

так как

$$\|\Phi(\mathbf{w}, t)\| \leq \frac{c}{\frac{N}{s} - \|A\|} \|q(\mathbf{w}, t^{1/s})\|,$$

где

$$\|g(\mathbf{w}, t^{1/s})\| = \mathcal{O}(t^{1/s}).$$

Поэтому сжимающий оператор  $\Phi$  переводит множество  $S$  пространства  $\mathcal{C}_{[0,p]}$  в себя, а система (2.3.12) имеет единственное решение  $\mathbf{w} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , если  $N$  достаточно велико. Теорема доказана.  $\square$

Решая конкретные уравнения в условиях теоремы 2.3.1 решение можно искать непосредственно в виде ряда (2.3.10), сходящегося в аналитическом случае в окрестности нуля.

### Пример 2.3.1.

$$x^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t^5 \left( \frac{dx}{dt} \right)^5 + t^2 = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

Так как в этом примере диаграмма Ньютона имеет вершины в точках  $(0, 2)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(3, -2)$ , то решение ищем в виде  $x(t) = t^{4/3}(x_0 + v(t))$ . Здесь  $v(t)$ - малое решение уравнения

$$(x_0 + v(t))^2 \left( t^2 v^{(2)} + \frac{8}{3} t v' + \frac{4}{9} (x_0 + v) \right) + t^{14/3} \left( \frac{4}{3} (x_0 + v) + t v' \right)^5 + 1 = 0.$$

Определим  $x_0$  из алгебраического уравнения  $\frac{4}{9} x_0^3 + 1 = 0$ . Тогда для определения функции  $v$  получим уравнение вида (2.3.8), разрешенное относительно дифференциального оператора Эйлера второго порядка

$$t^2 v^{(2)} + \frac{8}{3} t v' + \frac{4}{3} v = M(t v', v, t^{1/3}).$$

Характеристический полином этого оператора  $\lambda(\lambda - 1) + \frac{8}{3}\lambda + \frac{4}{3}$  имеет ровно два комплексных корня  $\lambda_{1,2} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{23}}{6}i$ . Следовательно, на основании теоремы 1 существует решение  $x(t) = -(\frac{9}{4})^{1/3} t^{4/3} + \mathcal{O}(t^{5/3})$ . Это решение является единственным малым решением при  $t \rightarrow +0$ , так как  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .

Если условия теоремы 2.3.1 ослабить, допустив, что характеристический полином  $L(\lambda)$  имеет корни вида  $i/s$ , то результат получится более интересным. А именно, уравнение (2.3.1) в этом случае будет иметь  $s$ -параметрическое семейство решений вида (2.3.10), коэффициенты которого, начиная с некоторого  $i$ , будут функциями от  $\ln t$ , зависящими от  $p$

произвольных постоянных, где  $p$  — кратность корня  $i/s$  характеристического полинома. Укажем способ построения семейства малых решений в этом случае.

Введем вспомогательную линейную систему

$$\frac{dv}{dz} = Bv + f(z), \quad (2.3.16)$$

где  $B$  — постоянная матрица,  $f(z)$  — полином порядка  $m$ . Рассмотрим построение полиномиальных решений этой системы. Если  $\det B \neq 0$ , то система (2.3.16) в классе полиномов имеет единственное решение  $v = \sum_{i=0}^m a_i z^i$ . Коэффициенты  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0$  вычисляются в указанном порядке методом неопределенных коэффициентов.

Если  $\det B = 0$ , то для построения решения системы (2.3.16) в классе полиномов удобно использовать нормальную жорданову форму матрицы  $B$ . Действительно, пусть  $TBT^{-1} = J$ , где  $J = \{\lambda_1 E_1 + H_1, \dots, \lambda_k E_k + H_k\}$  — нормальная жорданова форма,  $\lambda_i E_i + H_i$  — жордановы клетки  $p_i$ -порядка. Среди  $\lambda_i$  могут быть одинаковые числа. Пусть  $\text{rank } B = r$ . Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ ,  $\lambda_i \neq 0, i = n - r + 1, \dots, k$ . В этом случае справедлива

**Лемма 2.3.1.** Пусть  $\text{rank } B = r$  и пусть вектор  $f(z)$  — полином порядка  $m$ . Тогда система (2.3.16) имеет полиномиальное решение порядка  $m + \max(p_1, \dots, p_{n-r})$ , зависящее от  $p_1 + \dots + p_{n-r}$  произвольных постоянных.

*Доказательство.* Полагая в системе (2.3.16)  $u = T^{-1}\omega$  и умножая результат на  $T$  приведем систему к виду

$$\frac{dw}{dz} = J\omega + Tf(z). \quad (2.3.17)$$

В соответствии со структурой матрицы  $J$  систему (2.3.17) разобьем на  $k$  независимых подсистем

$$\frac{dw_i}{dz} = (\lambda_i E_i + H_i)w_i + p_i(z), \quad i = 1, \dots, k.$$

Так как  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ , то координаты векторов  $w_i, i = \overline{1, n-r}$  вычисляются последовательным интегрированием  $p_i$  раз правых частей. Интегрирование ведется от нуля до  $z$ . Поэтому векторы  $w_i(z), i = 1, \dots, n-r$  оказываются полиномами  $m + p_i$ -го порядка и зависят от  $p_i$  постоянных интегрирования. Остальные векторы  $w_i(z), i = n-r+1, \dots, k$ , однозначно строятся методом неопределенных коэффициентов в виде полиномов порядка  $m$ , так как  $\det(\lambda_i E_i + H_i) \neq 0$  при  $i = n-r+1, \dots, k$ .  $\square$



**Теорема 2.3.2.** Пусть выполнены условия A), B) и C). Пусть среди чисел  $\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{N}{s}$ , где  $N \leq s||A||$ , есть корни характеристического полинома  $L(\lambda)$  и  $l/s$  – наименьший среди них. Тогда уравнение (2.3.1) имеет решение вида

$$x(t) = \sum_{i=0}^{l-1} x_i t^{\frac{r+i}{s}} + \sum_{i=l}^N x_i (\ln t) t^{(r+i)/s} + o(t^{\frac{r+N}{s}}). \quad (2.3.18)$$

*Доказательство.* Доказательство теоремы 2.3.2 аналогично доказательству теоремы 2.3.1, но при этом необходимо учитывать, что коэффициенты решения (2.3.18) зависят от  $\ln t$ . Поэтому применяя метод неопределенных коэффициентов кроме алгебраических систем

$$\left(\frac{i}{s}E - A\right)v_i = m_i(v_1, \dots, v_{i-1}), \quad i = 1, \dots, l-1$$

получим системы дифференциальных уравнений ( $z = \ln t$ )

$$\frac{dv_i}{dz} = \left(-\frac{i}{s}E + A\right)v_i + m_i(v_1, \dots, v_{i-1}), \quad i = l, l+1, \dots, n.$$

Так как  $\det\left(\frac{i}{s}E - A\right) \neq 0$  при  $i = \overline{1, l-1}$ , то  $v_1, \dots, v_{l-1}$  определяются однозначно и от  $z$  не зависят.

По условиям теоремы 2.3.2  $\det\left(-\frac{l}{s}E + A\right) = 0$ . При этом в силу замечания 2.3.1  $\text{rank}\left(-\frac{l}{s}E + A\right) = n-1$ . Соответствующий собственный вектор имеет жорданову цепочку длины  $p_l$ , где  $p_l$  – кратность корня  $\frac{l}{s}$  характеристического полинома  $L(\lambda)$ . Поэтому на основании леммы 2.3.1  $v_l(z)$  будет полиномом  $p_l$ -го порядка и зависит от  $p_l$  произвольных постоянных интегрирования. Коэффициенты  $v_{l+1}(z), \dots, v_N(z)$  также строятся в виде полиномов  $z$ , порядки которых устанавливаются согласно лемме 2.3.1. В этих коэффициентах могут появиться новые произвольные постоянные, если  $l/s$  – не единственный корень характеристического полинома  $L(\lambda)$  среди чисел  $(l/s, (l+1)/s, \dots, N/s)$ . Теорема 2.3.2 доказана. □

*Возможные обобщения: построение решений в случае комплексных корней характеристического полинома*

Если среди корней характеристического полинома есть корни  $\lambda$ , возможно комплексные с положительными вещественными частями, не входящие в множество  $(l/s, (l+1)/s, \dots, N/s)$ , то класс малых решений уравнения (2.3.1) не исчерпывается построенными в теоремах 2.3.1 и 2.3.2 и может

быть расширен в классе комплекснозначных функций. Так как коэффициенты характеристического полинома  $L(\lambda)$  вещественные, то у полинома  $L(\lambda)$  наряду с корнем  $\lambda$  будет сопряженный корень  $\bar{\lambda}$ . Поэтому частичные суммы соответствующих разложений малых решений могут содержать функции вида  $t^{\operatorname{Re}\lambda} \cos(\operatorname{Im}\lambda \ln t)$ ,  $t^{\operatorname{Re}\lambda} \sin(\operatorname{Im}\lambda \ln t)$ .

Рассмотрим процесс построения малых решений в этом случае. Введем вектор  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ , где  $\lambda_i$  - корни характеристического полинома,  $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ . Предположим, что отобраны корни  $\lambda_i$ , для которых  $\lambda_i \neq \sum_{j=1, j \neq i}^l m_j \lambda_j + m$  при натуральных  $m, m_j$ . Пусть для простоты функция  $R(x, t)$  в уравнении (2.3.1) бесконечно дифференцируема в окрестности нуля и в замене (2.3.2)  $s = 1$ . Будем искать решение редуцированной системы (2.3.8) в виде

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_{0j}(\ln t)t^j + \sum_{j=0, |i| \geq 1}^{\infty} v_{ij}(\ln t)t^{(\lambda, i)+j}. \quad (2.3.19)$$

Заметим, что во второй сумме нет целых показателей аргумента  $t$  вследствие выбора вектора  $\lambda$ . Методом неопределенных коэффициентов приходим к рекуррентной последовательности линейных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов  $v_{0j}(z)$ ,  $v_{ij}(z)$ , ( $z = \ln t$ ):

$$\frac{dv_{0j}}{dz} = (-jE + A)v_{0j} + m_{0i}(v_{01}, \dots, v_{0j-1}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{ij}}{dz} &= ((-\lambda, i) + j)E + A)v_{ij} + \\ &+ m_{ij}(v_{rs}), \quad |r| + s < |i| + j, \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Отметим, что  $m_{i0} = 0$  при  $|i| = 1$  и в силу замечания 2.3.1

$$\operatorname{rank}(-(\lambda, i)E + A) = n - 1 \quad \text{при } |i| = 1.$$

Поэтому коэффициенты  $v_{i0}$  при  $|i| = 1$  определяются с точностью до произвольной постоянной как решения соответствующих однородных систем

$$(-(\lambda, i)E + A)v_{i0} = 0, \quad |i| = 1.$$

Остальные коэффициенты  $v_{ij}(z)$  разложения (2.3.19) тоже строятся в виде полиномов  $z$  возрастающих порядков на основании леммы 2.3.1.

В результате получим семейство малых решений уравнения (2.3.1)

$$x(t) = t^r \left( x_0 + \sum_{j=0}^{\infty} v_{0j}(\ln t)t^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|i|=1}^{\infty} v_{ij}(\ln t)t^{(\lambda,i)+j} \right). \quad (2.3.20)$$

Коэффициенты  $v_{ij}$  являются функциями  $\ln t$  и зависят от  $l$  свободных параметров, где  $l$ - количество корней с положительными вещественными частями характеристического полинома  $L(\lambda)$  с учетом их кратности. Как и в теореме 2.3.1 с помощью принципа сжатых отображений устанавливается, что частичные суммы формального решения (2.3.20) являются асимптотическими приближениями семейства малых решений вида (2.3.2) уравнения (2.3.1). В аналитическом случае ряд (2.3.20) будет сходиться в окрестности нуля.

*О модели магнитной изоляции вакуумного диода*

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\sqrt{(1 + \phi)^2 - 1} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = j(1 + \phi), \quad (2.3.21)$$

возникающее при анализе одной модели магнитной изоляции вакуумного диода. Здесь  $\phi$ — потенциал электрического поля,  $j$ — сила тока (см. [134] и appendix A в [242]).

Будем искать малое непрерывное решение уравнения (2.3.21) с условиями  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi'(0) = 0$ . В этом примере диаграмма Ньютона имеет один отрезок с вершинами в точках  $(3/2, -2)$ ,  $(0, 0)$ . Замена (2.3.2) принимает вид

$$\phi(x) = x^{4/3}(\phi_0 + v(x)),$$

где

$$\phi_0 = \left( \frac{9}{4\sqrt{2}} j \right)^{3/2},$$

$v(x)$  удовлетворяет уравнению вида

$$x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{8}{3} x \frac{dv}{dx} + \frac{2}{3} v = M(v, x^{1/3})$$

с дифференциальным оператором Эйлера второго порядка в главной части,  $M(0, 0) = 0$ ,  $M'_v(0, 0) = 0$ . Соответствующий характеристический полином  $\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda + \frac{2}{3} = 0$  имеет два отрицательных корня  $\lambda_1 = -2/3$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Поэтому на основании теорем 2.3.1 и 2.3.2 уравнению (2.3.21) при любом  $j$

удовлетворяет в окрестности точки  $x = 0$  ровно одно малое вещественное решение  $\phi(x) = \left(\frac{9}{4\sqrt{2}j}\right)^{2/3} x^{4/3} + \mathcal{O}(x^{5/3})$ .

## 2.4 Обобщенные решения в нелинейных моделях Вольтерра I рода

В этом разделе мы рассмотрим обобщенные решения трех классов нелинейных интегральных моделей Вольтерра I рода. А именно, рассмотрим уравнения с однородными интегральными операторами, с произведениями сверток и один специальный класс классических нелинейных уравнений Вольтерра I рода. В итоге будут изложены этапы построения обобщенных решений в смысле теории распределений Соболева-Шварца определенных классов нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода, связанных с моделированием нелинейных динамических систем интегро-функциональными рядами Вольтерра.

*Уравнение Вольтерра I рода с однородными операторами:  
классические и обобщенные решения*

Введем непрерывные функции  $K_n(\mathbf{t})$ , где  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n = \overline{1, N}$ , имеющие непрерывные производные по  $t_0$  в окрестности нуля и представимые при  $|\mathbf{t}| \leq \rho$  в виде рядов  $K_n(\mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n K_{nij}(t_0, t_i)$ . Рассмотрим при  $0 \leq t \leq \rho$  нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \int_0^t K_{nij}(t, s) x(s) ds = f(t). \quad (2.4.1)$$

Левая часть уравнения (2.4.1) разложена по  $n$ -однородным интегральным операторам и является частичной суммой известного ряда Вольтерра, играющего важную роль в теории динамических систем. Оператор в левой части уравнения (2.4.1) можно рассматривать и как специальный случай интегро-степенного оператора Ляпунова – Шмидта, использованного А. М. Ляпуновым и позднее Л. Лихтенштейном [238] при исследовании классических задач механики. Проблемы моделирования нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерра рассмотрены нами в четвертой главе (см. также обзор в п. 4.1).

Как уже бы отмечено ранее, при построении модели (2.4.1) в теории динамических систем надо уметь находить ядра  $K_{nij}$ . Вопросы построения непрерывных решений уравнения (2.4.1) изучались в частных случаях. Если  $f(0) \neq 0$ , то это уравнение не имеет непрерывных решений. Исследование разрешимости уравнения (2.4.1) в пространстве распределений [28] рассмотрено в [92], но лишь для класса “степенных” уравнений

$$\sum_{n=1}^N \left( \int_0^t K_n(t-s)x(s) ds \right)^n = f(t).$$

В этом параграфе решение уравнения с однородными операторами строится в классе обобщенных функций  $\mathcal{D}'_{(-\rho, \rho)}$ . Специфика нелинейностей в (2.4.1) позволяет, используя структуру искомого решения (2.4.2), избежать проблему умножения обобщенных функций.

Показано, что число решений зависит от количества корней определенного характеристического алгебраического уравнения. Предложен метод построения искомых решений. В случае  $f(0) = 0$  при определенных условиях существует и последовательными приближениями строится непрерывное решение уравнения (2.4.1).

Ниже мы подробно рассмотрим решения с сингулярностью нулевого порядка, а также построим решения с сингулярностью  $m$ -го порядка при  $m \geq 1$ .

### *Решения с сингулярностью нулевого порядка*

Будем искать решение уравнения (2.4.1) в виде

$$x(t) = c\delta(t) + v(t), \tag{2.4.2}$$

где  $\delta(t)$  – функционал Дирака,  $v(t)$  – непрерывная функция. Решение (2.4.2) рассматривается как элемент пространства  $\mathcal{D}'_{(-\rho, \rho)}$  [101], определенного на множестве бесконечно-дифференцируемых финитных функций  $\phi(t)$  из  $\mathcal{D}'_{(-\rho, \rho)}$  с носителями на  $(-\rho, \rho)$ . Функция  $f(t)$  в правой части уравнения (2.4.1) считается продолженной нулем в левую полуплоскость точки  $t = 0$ . В пространстве  $\mathcal{D}'_{(-\rho, \rho)}$  имеет место тождество

$$\int_0^t K_{ij}(t,s)(c\delta(s) + v(s)) ds = K_{ij}(t,0)c + \int_0^t K_{ij}(t,s)v(s)ds.$$

Поэтому уравнение (2.4.1) подстановкой (2.4.2) сводится к уравнению относительно непрерывной функции  $v(t)$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (K_{nij}(t, 0)c + \int_0^t K_{nij}(t, s)v(s) ds) = f(t) \quad (2.4.3)$$

с неизвестной постоянной  $c$ . Полагая в (2.4.3)  $t = 0$ , получим алгебраическое уравнение

$$L(c) := \sum_{n=1}^N c^n \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n K_{nij}(0, 0) = f(0). \quad (2.4.4)$$

Уравнение (2.4.4) назовем *характеристическим*.

Введем следующее условие

(A)  $c^*$  – простой вещественный корень уравнения (2.4.4).

Тогда, полагая в (2.4.3)  $c = c^*$  и дифференцируя полученное равенство по  $t$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \left( K'_{nlj}(t, 0)c^* + K_{nlj}(t, t)v(t) + \int_0^t \frac{\partial K_{nlj}(t, s)}{\partial t} v(s) ds \right) \times \\ & \times \prod_{i=1, i \neq l}^n \left( K_{nij}(t, 0)c^* + \int_0^t K_{nij}(t, s)v(s) ds \right) = f'(t). \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Полагая в (2.4.5)  $t = 0$ , получим алгебраическое линейное уравнение относительно  $v(0)$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \left( K'_{nlj}(0, 0)c^* + \right. \\ & \left. + K_{nlj}(0, 0)v(0) \right) \prod_{i=1, i \neq l}^n K_{nij}(0, 0)c^* = f'(0). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Коэффициент при  $v(0)$  в уравнении (2.4.6) имеет вид

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n K_{nlj}(0, 0) \prod_{i=1, i \neq l}^n K_{nij}(0, 0)c^*.$$

Он преобразуется к виду

$$L'(c^*) = \sum_{n=1}^N n c^{*n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n K_{nij}(0, 0)$$

и поэтому в силу условия (А) не равен нулю. Следовательно,  $v(0)$  из уравнения (2.4.6) определяется единственным образом. Уравнение (2.4.5) преобразуем к виду

$$a(t)v = F(v, t) + b(t), \quad (2.4.7)$$

где

$$a(t) = \sum_{n=1}^N c^{*n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \prod_{i=1, i \neq l}^n K_{nij}(t, 0) K_{nlj}(t, t),$$

$F(v, 0) = 0$ . Таким образом, вопрос свелся к построению непрерывной функции  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , удовлетворяющей уравнению (2.4.7).

Так как  $a(0) = L'(c^*) \neq 0$ ,  $v(0) = \frac{b(0)}{L'(c^*)}$ , то существуют положительные числа  $\rho > 0, r > 0$ , такие, что уравнение (2.4.7) в пространстве  $\mathcal{C}_{[-\rho, \rho]}$  при  $v \in S(v(0), r)$  будет удовлетворять условиям принципа сжимающих отображений [120, с. 381]. При этом приближения

$$v_n(t) = \frac{1}{a(t)} (F(v_{n-1}, t) + b(t)), \quad v_0 = \frac{b(0)}{L'(c^*)}$$

при  $|t| \leq \rho$  равномерно сходятся к регулярной части  $v(t)$  обобщенного решения (2.4.2).

Если выполнено следующее условие

$$(B) \quad f(0) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} K_{11j}(0, 0) \neq 0,$$

то  $c^*$  будет простым решением уравнения (2.4.4), и уравнение (2.4.1) имеет классическое решение. Конечно, при выполнении условия (В) уравнение (2.4.4) кроме нулевого может иметь и другие простые вещественные решения. Поэтому уравнение (2.4.1) в общем случае наряду с классическим может иметь несколько обобщенных решений. Если  $f(0) \neq 0$ , то непрерывных решений у уравнения (2.4.1) нет. Из изложенного вытекает

**Теорема 2.4.1.** Пусть выполнено условие (А). Тогда уравнение (2.4.1) имеет обобщенное решение вида (2.4.2), где  $c^* \neq 0$  – простой корень уравнения (2.4.4), а непрерывная функция  $v(t)$  определяется единственным образом последовательными приближениями. Если выполнено условие (В), то уравнение (2.4.1) в классе непрерывных функций имеет единственное

решение и его можно построить последовательными приближениями в окрестности точки  $t = 0$ .

**Пример 2.4.1.**

$$\left( \int_0^t x(s) ds \right)^2 + \int_0^t x(s) ds + t = 0, t > 0.$$

В этом примере равенство  $c^2 + c = 0$  является характеристическим уравнением. Оно имеет два простых решения  $c_1 = 0, c_2 = -1$ . Поэтому на основании теоремы 2.4.1 данное интегральное уравнение имеет в пространстве  $\mathcal{D}'$  ровно два решения

$$x_1(t) = -\delta(t) - \frac{1}{\sqrt{1-4t}}, x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}.$$

Точка  $t_0 = \frac{1}{4}$  является точкой blow-up предела этих решений, т.е. при приближении к этой точке решение принимает сколь угодно большие значения по абсолютной величине.

Таким образом, регулярная часть решение нелинейного уравнения за конечное время  $t$  может уйти в  $\infty$  (или разветвиться). В конкретных примерах, сочетая результаты этого параграфа с методами работы [303], и п. 2.2 этой монографии можно вычислять нижнюю границу  $t^*$ , при прохождении которой у решений интегрального уравнения (2.4.1), могут появиться точки ветвления или явления взрыва (blow-up пределы в зарубежной литературе).

Теперь обратимся к решению нелинейного уравнения (2.4.8) в свертках с сингулярностью порядка  $m, m \geq 1$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^n K_{nij} * x = f(t), t \geq 0, \tag{2.4.8}$$

где  $K_{nij} * x = \int_0^t K_{nij}(t-s)x(s) ds$ .

Пусть выполнено следующее условие (С) функции  $K_{nij}(t), f(t)$  —  $m$ -раз дифференцируемы, причем первые  $m-1$  производных функций  $K_{nij}(t)$  в точке  $t = 0$  равны нулю, причем в окрестности нуля  $K_{nij}(t) \sim \alpha_{nij}t^m$  при  $t \rightarrow 0$ .

Будем строить решение уравнения (2.4.1) вида

$$x(t) = c_m \delta^{(m)}(t) + c_{m-1} \delta^{(m-1)}(t) + \dots + c_0 \delta(t) + v(t), \tag{2.4.9}$$



где  $c_i$  – искомые постоянные,  $v(t) \in \mathcal{C}_{[0,\rho]}$ . Подстановка функции в уравнение преобразует его в пространство  $\mathcal{D}'_n$  [101] к виду

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( K_{nij}^{(m)}(t)c_m + K_{nij}^{(m-1)}(t)c_{m-1} + \dots \right. \quad (2.4.10)$$

$$\left. \dots + K_{nij}(t)c_0 + K_{nij} * v \right) = f(t).$$

Полагая в (2.4.10)  $t = 0$  получим алгебраическое уравнение для определения  $c_m$

$$L(c) := \sum_{n=1}^N c_m^n \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n m! \alpha_{nij} = f(0). \quad (2.4.11)$$

Пусть выполнено следующее условие

(D)  $c_m^*$  – простой вещественный корень уравнения (2.4.10).

Положим в (2.4.10)  $c_m = c_m^*$ . Далее, последовательно дифференцируя уравнение (2.4.10) по  $t$  и полагая затем  $t = 0$ , придем к рекуррентной последовательности линейных алгебраических уравнений вида

$$L'(c_m^*)c_{m-i} = f^{(i)}(0) + b_i(c_m^*, c_{m-1}^*, \dots, c_{m-(i-1)}^*), \quad i = \overline{1, m}$$

для последовательного вычисления постоянных  $c_{m-1}, c_{m-2}, \dots, c_0$ . Проводя  $(m+1)$ -ое дифференцирование по  $t$ , с уже вычисленными  $c_i^*$ ,  $i = m, m-1, \dots, 0$ , получим эквивалентное нелинейное интегральное уравнение Вольтерра II рода вида (2.4.7), где теперь

$$a(t) = \sum_{n=1}^N c_m^{*n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n K_{nlj}^{(m)}(t) \prod_{i=1, i \neq l}^n m! \alpha_{nij}.$$

Отметим, что

$$a(0) = \sum_{n=1}^N n c_m^{*n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n m! \alpha_{nij}.$$

Поэтому в силу условия (D)  $a(t) \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $t = 0$ . Следовательно, соответствующее интегральное уравнение относительно функции  $v(t)$  в пространстве  $\mathcal{C}_{(0,\rho]}$  в шаре  $S(v(0), r) \in \mathcal{C}_{(0,\rho]}$  при достаточно малых  $\rho > 0, r > 0$  удовлетворит условиям принципа сжимающих отображений. Из изложенного вытекает

**Теорема 2.4.2.** Пусть выполнены условия (C) и (D). Тогда уравнение (2.4.8) в классе  $\mathcal{D}'_{(-\rho, -\rho)}$  имеет решение (2.4.9), где  $c_m^*$  – простой вещественный корень уравнения (2.4.11),  $c_{m-1}, \dots, c_0$  вычисляются однозначно

из последовательности линейных алгебраических уравнений. Непрерывная функция  $v(t)$  строится однозначно последовательными приближениями.

Итак, мы рассмотрели обобщенные решения с сингулярностью порядка  $m \geq 1$  нелинейных уравнений с ядрами типа свертки. Покажем, что обобщенные решения уравнения вида (2.4.1) можно строить и в случае ядер более общего вида. Действительно, вместо условия (С) введем следующее условие

(С') Пусть в уравнении (2.4.1) функции  $K_{nij}(t, s)$  имеют вид

$$K_{nij}(t, s) = \sum_{\nu=0}^m K_{nij}^{m-\nu} t^{m-\nu} s^{\nu} + \mathcal{O}((|t| + |s|)^{m+1})$$

и алгебраическое уравнение

$$L(c) := \sum_{n=1}^N c^n \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (-1)^m K_{nij}^0 = f(0) \quad (2.4.12)$$

имеет простое вещественное решение  $c^*$ .

Тогда решение уравнения (2.4.1) в классе  $\mathcal{D}'_{m(-\rho, \rho)}$  можно искать в виде

$$x(t) = c^* \delta^{(m)}(t) + c_{m-1} \delta^{(m-1)}(t) + \dots + c_0 \delta(t) + v(t). \quad (2.4.13)$$

Подставляя (2.4.13) в (2.4.1) и полагая  $t = 0$ , с учетом условия (С') придем к уравнению (2.4.12) относительно  $c^*$ . Аналогично доказательству теоремы 2.4.2 для определения коэффициентов  $c_{m-1}, \dots, c_0$  получим линейные алгебраические уравнения. Для вычисления непрерывной функции  $v(t)$  после необходимого числа дифференцирований придем к нелинейному интегральному уравнению вида (2.4.7), в котором теперь  $a(t) \sim \alpha t^p$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $0 \leq p \leq m$ . Напомним, что выше в соответствующем уравнении (2.4.7) выполнялось условие  $a(0) \neq 0$ , т.е. оно содержало интегральный оператор Вольтерра II рода. При выполнении условия (С') может оказаться, что  $p \geq 1$ . Тогда  $a(0) = 0$  и соответствующее интегральное уравнение вида (2.4.7) будет интегральным уравнением Вольтерра III рода. Решение интегральных уравнений Вольтерра III рода в окрестности особой точки  $t = 0$  можно строить, сочетая метод неопределенных коэффициентов для определения начального приближения с дальнейшим его уточнением последовательными приближениями.

*Полиномиальное уравнение Вольтерра I рода типа свертки*

Рассмотрим уравнение вида

$$\sum_{m=1}^N \left( \int_0^t Q_m(t-s) x(s) ds \right)^m = f(t), \quad 0 < t < T. \quad (2.4.14)$$

Уравнение вида (2.4.14) назовем *полиномиальным* интегральным уравнением I рода типа свертки.

Множество бесконечно дифференцируемых финитных функций  $s(t)$  с носителями в интервале  $(0, T)$  обозначим через  $\mathcal{D}_{(0,T)}$ . Множество линейных непрерывных функционалов  $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{(0,T)} \rightarrow (-\infty, +\infty))$  назовем *пространством обобщенных функций* и обозначим через  $\mathcal{D}'_{(0,T)}$ .

Элемент  $x$  из  $\mathcal{D}'_{(0,T)}$  назовем *обобщенным решением* уравнения  $F(x, t) = 0$ , если для  $\forall s(t) \in \mathcal{D}_{(0,T)}$  выполнено тождество  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t) s(t) dt = 0$ . Напомним, что  $\text{supp } s(t) \in (0, T)$ .

Решение уравнения (2.4.14) будем искать в классе  $\mathcal{D}'_{(0,T)}$  в виде

$$x(t) = c\delta(t) + v(t, c), \quad (2.4.15)$$

где постоянная  $c$  и непрерывная функция  $v(t, c)$  подлежат определению.

**Теорема 2.4.3.** Пусть  $c$  — простой корень полинома  $L(c) = f(0)$ , где

$$L(c) = \sum_{m=1}^N (Q_m(0)c)^m,$$

пусть в уравнении (2.4.14) все ядра и функция  $f(t)$  — дифференцируемые функции при  $0 < t \leq T$ . Тогда уравнение (2.4.14) имеет в классе  $\mathcal{D}'_{(0,T)}$  решение вида  $x(t) = c\delta(t) + v(t, c)$ , где непрерывная функция  $v(t, c)$  зависит от выбора корня  $c$  и при конкретном  $c$  определяется методом последовательных приближений единственным образом.

**Пример 2.4.2.** Для уравнения

$$\int_0^t x(s) ds + \left( \int_0^t x(s) ds \right)^2 = 2 + 2t - t^2$$

выполнены условия теоремы. Соответствующий полином  $c^2 + c - 2 = 0$  имеет простые корни  $1, -2$ , которым отвечают два обобщенных решения

$$x_1(t) = \delta(t) + \frac{2}{3} + \frac{10}{27}t + \mathcal{O}(t^2), \quad x_2(t) = -2\delta(t) - \frac{2}{3} - \frac{10}{27}t + \mathcal{O}(t^2).$$

**Замечание 2.4.1.** Если полином  $L(c) - f(0)$  имеет кратный корень, то соответствующее обобщенное решение уравнения (2.4.14) может содержать производные функций Дирака  $\delta(t)$ . Этот случай рассматривается аналогично.

**Замечание 2.4.2.** В силу нелинейности уравнения (2.4.14) регулярная часть  $v$  обобщенного решения (2.4.15) определяется, вообще говоря, лишь в малой окрестности  $(0, \rho^*]$ , где  $\rho^* \leq T$ . При продолжении регулярной части  $v(t)$  решения уравнения в область  $t > \rho^*$  даже в аналитическом случае может встретиться точка  $t^* \in (\rho, T]$ , для которой  $\lim_{t \rightarrow t^*-0} v(t, c^*) = \infty$  (явление «blow-up»).

Если  $f(t)$  и  $K_m(t)$  – аналитические функции, то регулярную часть решения можно искать в виде ряда

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} v_i t^i, \quad (2.4.16)$$

вычисляя его коэффициенты рекуррентным образом методом неопределенных коэффициентов.

Продемонстрируем на примере, что методом выпуклых мажорант [242] легко оценить снизу радиус его сходимости.

**Пример 2.4.3.** Для уравнения

$$w(t) = \left( \int_0^t t s^2 w(s) ds \right)^2 + t$$

мажорантная система

$$\begin{cases} r = r^2 \frac{\rho^4}{3} + \rho, \\ 1 = \frac{2}{3} r \rho^4 \end{cases}$$

имеет решение  $\rho^* = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/5}$ ,  $r^* = 2(3/4)^{1/5}$ . Следовательно, это интегральное уравнение при  $|t| \leq \rho^*$  имеет аналитическое решение.

Итак, в п. 2.4 и в п. 2.4 мы рассмотрели два класса нелинейных интегральных уравнений с однородными операторами (полиномиальных) Вольтерра I рода, возникающих при моделировании нелинейных динамических процессов типа «вход-выход» интегро-функциональными рядами Вольтерра. Обобщенные решения таких уравнений строятся в виде суммы сингулярной компоненты с точечным носителем и регулярной функции. Коэффициенты сингулярной части определяются из нелинейных алгебраических уравнений. Регулярная функция определяется единственным

образом методом последовательных приближений. В следующем параграфе 2.4 рассмотрим этапы построения обобщенных решений такой же структуры, но для другого важного класса нелинейных интегральных моделей типа Вольтерра вида (2.4.17).

### Нелинейные уравнения Вольтерра I рода

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$\int_0^t K(t, s) (x(s) + g(s^l x(s), s)) ds = f(t), \quad (2.4.17)$$

где ядро  $K$  и  $g$ ,  $f$  — аналитические функции в окрестности нуля, причем

$$K(t, s) = \sum_{i=0}^n K_{n-i}^n t^{n-i} s^i + \mathcal{O}((|t| + |s|)^{n+1}),$$

$$K_{n-i}^n \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad n < l.$$

Строятся обобщенные решения с точечным носителем в сингулярной части вида

$$x(t) = c_0 \delta(t) + c_1 \delta^{(1)}(t) + \dots + c_n \delta^{(n)}(t) + u(t), \quad (2.4.18)$$

где  $\delta(t)$  — функция Дирака,  $u(t)$  — регулярная функция.

Определение сингулярной составляющей.

Совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями в окрестности  $(-\rho, \rho)$  обозначим через  $\mathcal{D}_{(-\rho, \rho)}$ . Множество линейных непрерывных функционалов, определенных на  $\mathcal{D}_{(-\rho, \rho)}$ , обозначим через  $\mathcal{D}'_{(-\rho, \rho)}$ , а подмножество его элементов вида (2.4.18) с сингулярностью  $n$ -го порядка с носителем в нуле — через  $\mathcal{D}'_{n(-\rho, \rho)}$ . Таким образом, искомое решение (2.4.18) уравнения (2.4.17) строится в классе  $\mathcal{D}'_{n(-\rho, \rho)}$  и удовлетворяет уравнению (2.4.17) в смысле теории распределений Соболева–Шварца. Сразу отметим, что при  $n < l \forall x \in \mathcal{D}'_{n(-\rho, \rho)}$  произведение  $t^l x = t^l u(t)$  является регулярной функцией, что решает для уравнения (2.4.17) при  $l > n$  проблему нелинейных операций с такими обобщенными функциями. Так как в пространстве  $\mathcal{D}'$  при  $i, j = 0, 1, \dots, n, k \geq n$ , справедливы тождества

$$t^{k-i} \Theta * s^i \delta^{(j)}(s) = (-1)^j j! t^{k-j} \delta_{ij},$$

где  $\Theta$  – функция Хевисайда,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, то имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=0}^k K_{k-i}^k t^{k-i} s^i (c_0 \delta(s) + \dots + c_n \delta^{(n)}(s)) ds = \\ = \sum_{j=0}^n (-1)^j j! \sum_{k=n}^{\infty} K_{k-j}^k t^{k-j} c_j. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\partial^j K(t, s)}{\partial s^j} \Big|_{s=0} = \sum_{j=0}^n (-1)^j j! \sum_{k=n}^{\infty} K_{k-j}^k t^{k-j}.$$

Поэтому элемент  $x \in \mathcal{D}'_{n(-\rho, \rho)}$  может быть решением уравнения (2.4.17) только тогда, когда регулярная составляющая из представления (2.4.18) удовлетворяет уравнению

$$\int_0^t K(t, s)(u(s) + g(s^l u(s), s)) ds = r(t, c_0, \dots, c_n), \quad (2.4.19)$$

где

$$r(t, c_0, \dots, c_n) = f(t) - \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{\partial^j K(t, 0)}{\partial s^j} c_j.$$

Определим постоянные  $c_0, \dots, c_n$  из системы линейных алгебраических уравнений

$$r_t^{(i)}(0, c_0, \dots, c_n) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad (2.4.20)$$

с нижней треугольной матрицей с компонентами  $K_0^n, K_1^n, \dots, K_n^n$  на диагонали. Если эти числа отличны от нуля, то постоянные  $c_n, \dots, c_0$  определяются последовательно и единственным образом. Если некоторые из диагональных элементов равны нулю и вектор  $\{f(0), f'(0), \dots, f^{(n)}(0)\}'$  удовлетворяет условиям разрешимости, то в правой части уравнения (2.4.19) часть постоянных может остаться произвольной.

**Замечание 2.4.3.** Если  $f^{(i)}(0) = 0$ ,  $K_i^n = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ ,  $K_i^n \neq 0$  при  $i = k, \dots, n$ , то, полагая  $c_k = \dots = c_n = 0$ , постоянные  $c_0, \dots, c_{k-1}$  можно из системы (2.4.20) определить однозначно.

Определение регулярной составляющей.

Для построения регулярной функции  $u(t)$  решим при найденных  $c_0, \dots, c_n$  уравнение (2.4.19), применив комбинацию метода неопределен-

ных коэффициентов с методом последовательных приближений. Для краткости введем обозначение

$$\Phi(u, t) := \int_0^t K(t, s)(u(s) + g(s^l u(s), s)) ds - r(t, c) = 0. \quad (2.4.21)$$

Предположим, что однородное уравнение

$$\int_0^t \sum_{i=0}^n K_{n-i}^n t^{n-i} s^i x(s) ds = 0 \quad (2.4.22)$$

имеет только тривиальное решение. Это будет выполнено, если  $\sum_{i=0}^n K_{n-i}^n (i+j)^{-1} \neq 0$  при  $j = 1, 2, \dots$ . Тогда для любого натурального  $N$  найдутся коэффициенты  $u_i$  такие, что

$$|\Phi(u_0 + u_1 t + \dots + u_N t^N, t)| = \mathcal{O}(|t|^{n+N+1}). \quad (2.4.23)$$

Так как однородное уравнение (2.4.22) имеет только нулевое решение, то

$$\int_0^t \sum_{i=0}^n K_{n-i}^n t^{n-i} s^{i+j} ds \neq 0$$

при  $j = 0, 1, 2, \dots$  и коэффициенты  $u_i$  определяются однозначно методом неопределенных коэффициентов при подстановке полинома

$$u^0(t) = u_0 + u_1 t + \dots + u_N t^N$$

в уравнение (2.4.21). Далее подставим функцию

$$u(t) = u^0(t) + t^N v(t) \quad (2.4.24)$$

в уравнение (2.4.21) и приведем члены со степенями  $t^i$ ,  $i = n, n+1, \dots, n+N$ , с учетом равенств (2.4.20) и задания полинома  $u^0(t)$ . Полученное равенство продифференцируем по  $t$  и будем искать методом последовательных приближений функцию  $v$  из эквивалентного интегрального уравнения

$$v = F(v, t). \quad (2.4.25)$$

Здесь

$$F(v, t) = \frac{1}{K(t, t)t^N} \left\{ -K(t, t)(u^0(t) + g(t^l u^0(t) + t^{l+N} v(t), t)) - \right.$$

$$- \int_0^t K'_t(t, s)(u^0(s) + s^N v(s) + g(s^l u^0(s) + s^{l+N} v(s), s)) ds + r'_t(t, c) \Big\}.$$

Предположим, что

$$\sum_{i=0}^n K_{n-i}^n = a \neq 0.$$

Покажем, что тогда оператор  $F$  при достаточно большом  $N$  удовлетворяет в шаре  $\|x\| \leq r$  пространства  $\mathcal{C}_{[-\rho, \rho]}$  условиям принципа сжимающих отображений. Действительно,

$$|g(s^l(u^0(s) + s^N v_1(s)), s) - g(s^l(u^0(s) + s^N v_2(s)), s)| \leq |s|^{l+N} C_1 |v_1 - v_2|$$

при  $\forall v_1, v_2$  из шара  $S(0, r) \subset \mathcal{C}_{[-\rho, \rho]}$ . Далее, так как

$$|K'_t(t, s)| \leq C_2(|t| + |s|)^{n-1},$$

то

$$\left| \frac{1}{t^{n+N}} \int_0^t K'_t(t, s) s^N ds \right| \leq \frac{2^{n-1} C_2}{N+1}.$$

В силу этих оценок найдется постоянная  $c$  такая, что

$$|F(v_1, t) - F(v_2, t)| \leq \frac{c}{N+1} \|v_1 - v_2\|.$$

Зафиксируем  $q < 1$  и выберем  $N > c/q - 1$ . Тогда оператор  $F$  в шаре  $\|v\| \leq r$  пространства  $\mathcal{C}_{[-\rho, \rho]}$  будет сжимающим с коэффициентом сжатия  $q$ . Так как в силу оценки (2.4.23)

$$|F(0, t)| = \mathcal{O}(|t|),$$

то найдется такое  $\tilde{\rho} \in (0, \rho]$ , что  $\max_{|t| \leq \tilde{\rho}} |F(0, t)| \leq (1 - q)r$ . Следовательно, сжимающий оператор  $F$  переводит шар  $\|v\| \leq r$  пространства  $\mathcal{C}_{[-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}]}$  в себя. Из изложенного вытекает

**Теорема 2.4.4.** Пусть  $l > n$ ,

$$\sum_{i=0}^n K_{n-i}^n \frac{1}{i+j} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad K_{n-i}^n \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=0}^n K_{n-i}^n \neq 0.$$

Тогда уравнение (2.4.17) в классе  $\mathcal{D}'_{n(-\tilde{\rho}, \tilde{\rho})}$  имеет единственное решение (2.4.18), (2.4.24), где постоянные  $c_0, \dots, c_n$  определяются из урав-



нений (2.4.20), коэффициенты  $u_0, \dots, u_N$  вычисляются методом неопределенных коэффициентов из уравнения (2.4.21), непрерывная функция  $v(t)$  строится методом последовательных приближений из уравнения (2.4.25).

**Замечание 2.4.4.** В аналитическом случае регулярная часть  $u(t)$  в решении (2.4.18) является в окрестности нуля аналитической функцией, коэффициенты Тейлора которой можно найти методом неопределенных коэффициентов из уравнения (2.4.21).

**Замечание 2.4.5.** Вместо аналитичности  $K, g, f$  в теореме 2.4.4 можно потребовать лишь достаточную гладкость этих функций.

**Замечание 2.4.6.** Если  $f^{(i)}(0) = 0, i = 0, 1, \dots, n$ , то в решении (2.4.18) все  $c_i = 0$  и оно будет классическим.

**Замечание 2.4.7.** Если в условиях теоремы 2.4.4 некоторые из элементов  $K_i^n, i = 0, \dots, n$ , равны нулю и при этом система (2.4.20) разрешима, то решение (2.4.18), (2.4.24) будет зависеть от  $k$  произвольных постоянных, где  $k = n + 1 - r, r$  – ранг матрицы линейной системы (2.4.20).

Теорема 2.4.4 может быть усилена.

**Теорема 2.4.5.** Пусть в условиях теоремы 2.4.4  $\sum_{i=0}^n K_{n-i}^n = 0$  и при этом

$$\left. \frac{\partial^i K(t, s)}{\partial t^i} \right|_{s=t} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \quad \left. \frac{\partial^p K(t, s)}{\partial t^p} \right|_{s=t} = \mathcal{O}(t^{n-p}), \quad p \leq n.$$

Тогда утверждения теоремы 2.4.4 остаются справедливыми.

Доказательство теоремы 2.4.5 аналогичное. Надо лишь учесть, что на основании формулы Тейлора в условиях теоремы 2.4.5  $K(t, s) = (t - s)^p Q(t, s)$ , где  $|Q(t, t)| = \mathcal{O}(|t|^{n-p})$ . Поэтому при построении уравнения для определения функции  $v$  уравнение (2.4.19) надо дифференцировать  $p + 1$  раз и в соответствующем уравнении вида (2.4.25) положить

$$F(v, t) = \frac{1}{K_t^{(p)}(t, t)t^N} \left\{ -K^{(p)}(t, t)(u^0(t) + g(t^l u^0(t) + t^{l+N} v(t), t)) - \int_0^t K_t^{(p+1)}(t, s)(u^0(s) + s^N v(s) + g(s^l u^0(s) + s^{l+N} v(s), s)) ds + r_t^{(p+1)}(t, c) \right\}.$$

**Пример 2.4.4.** Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t (t^2 + ts - 2s^2)(x(s) + s^5 x^2(s)) ds = 1 + t + t^2 + t^3.$$

Для этого уравнения выполнены условия теоремы 2.4.5 при  $n = 2$ ,  $l = 5/2$ ,  $p = 1$ . В классе  $\mathcal{D}'$  существует решение

$$x(t) = \delta(t) - \delta^{(1)}(t) - \frac{1}{4}\delta^{(2)}(t) + \frac{-1 + \sqrt{1 + t^5 \cdot 24/5}}{2t^5},$$

сингулярная часть которого определена в соответствии с равенствами (2.4.20), а регулярная часть – из уравнения

$$\int_0^t (t^2 + ts - 2s^2)(u(s) + s^5 u^2(s)) ds = t^3. \quad (2.4.26)$$

Уравнение (2.4.26) имеет аналитическое решение

$$u(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + t^5 \cdot 24/5}}{2t^5}.$$

Коэффициенты Тейлора этого решения в точке  $t = 0$  вычисляются, согласно замечанию 2.4.3, из уравнения (2.4.26) методом неопределенных коэффициентов. Заметим, что, кроме этого решения, уравнению (2.4.26) удовлетворяет функция

$$u_2(t) = \frac{-1 - \sqrt{1 + t^5 \cdot 24/5}}{2t^5},$$

для которой точка  $t = 0$  является полюсом пятого порядка.

## Глава 3

# Операторные динамические модели

В этой главе теоремы существования и приближенные методы, изложенные в главах 1, 2, обобщены на случай абстрактных уравнений в банаховых пространствах. Результаты использованы при решении ряда конкретных задач механики и математической физики.

### 3.1 Линейные операторные уравнения Вольтерра I рода с кусочно заданным ядром

Введем в плоскости  $s, t$  треугольную область  $D = \{s, t; 0 < s < t < T\}$  и зададим непрерывные функции  $s = \alpha_i(t), i = \overline{1, n}$ , имеющие непрерывные производные при  $t \in (0, T)$ . Предполагается, что  $\alpha_i(0) = 0, 0 \leq \alpha'_1(0) \leq \alpha'_2(0) \leq \dots \leq \alpha'_{n-1}(0) < 1, 0 < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t, \alpha'_i(t) < 1$  при  $t \in [0, T], i = \overline{1, n-1}$ . Кривые  $s = \alpha_i(t), i = \overline{0, n}$ , где  $\alpha_0(t) = 0, \alpha_n(t) = t$ , разбивают область  $D$  на непересекающиеся секторы  $D_1 = \{s, t : 0 \leq s < \alpha_1(t)\}, D_i = \{s, t : \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{2, n}\}, \overline{D} = \bigcup_1^n \overline{D}_i$ . Введем двухпараметрическое семейство линейных непрерывных оператор-функций  $K_i(t, s)$ , определенных на компактах  $\overline{D}_i$ , дифференцируемых по  $t$  и действующих из банахова пространства  $E_1$  в банахово пространство  $E_2$ . Для простоты изложения в работе предполагается, что  $K_i(t, s)$  допускают достаточно гладкие продолжения в окрестности  $\Omega_i$  компактов  $\overline{D}_i$ , т.е. каждая точка из  $\overline{D}_i$  будет внутренней точкой множества  $\Omega_i$ .

Таким образом,  $K_i(t, s) \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)$  и  $\frac{\partial K_i(t, s)}{\partial t} \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)$  при  $t, s \in \overline{D}_i, i = \overline{1, n}$ .

Введем интегральный оператор

$$\int_0^t K(t, s)u(s) ds \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t, s)x(s) ds \quad (3.1.1)$$

с ядром

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), & t, s \in D_1, \\ \dots & \dots\dots \\ K_n(t, s), & t, s \in D_n. \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t, s)x(s) ds = f(t), \quad (3.1.3)$$

где функция  $f(t)$  и ее производная  $f'(t)$  со значениями в  $E_2$  определены и непрерывны при  $t \in [0, T]$ ,  $f(0) = 0$ . Уравнение (3.1.3) назовем операторным уравнением Вольтерра I рода с кусочно-непрерывным ядром. Обозначим через  $\mathcal{C}_{([0, T]; E_1)}$  пространство непрерывных функций  $x(t)$  определенных на  $[0, T]$  со значениями в  $E_1$ .

Требуется построить в классе  $\mathcal{C}_{([0, T]; E_1)}$  решение уравнения (3.1.3). Такая задача и ее численное решение при  $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1, n = 1$  рассматривалась в гл. 1. Здесь уравнение (3.1.3) рассматривается в общем случае с кусочно-заданным операторным ядром. Полученные результаты дают возможность применять методы, изложенные в первой главе к краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений I рода.

В данном параграфе, обобщающего и развивающего результаты, изложенные нами в гл. 1 в п.п. 1.1, 1.2, 1.3, изложены достаточные условия существования и единственности непрерывного решения абстрактного уравнения (3.1.3) (см. п. 3.1) I рода с кусочно-непрерывным операторным ядром (3.1.2) (см. также [100]). Искомое единственное решение строится сочетанием известного в теории функциональных уравнений метода шагов [179] с методом последовательных приближений. Наконец рассмотрен теоретически наиболее интересный случай, когда уравнение (3.1.3) имеет семейство решений, зависящих от свободных параметров. Здесь предложен метод построения асимптотических приближений параметрических решений и способ их уточнения последовательными приближениями.

Ниже предполагается, что оператор  $K_n(t, t)$  имеет ограниченный обратный при  $t \in [0, T]$ . Нормы  $\|K_i(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)}$ ,  $\|\frac{\partial K_i(t, s)}{\partial t}\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  линейных операторов определены и являются непрерывными функциями при  $t, s \in \overline{D}_i, t \in [0, T]$ .

Отметим, что ряд важных результатов в теории абстрактных интегро-дифференциальных уравнений I рода был недавно получен в рабо-

те А. Lorenzi [240].

### Достаточные условия существования решения

В этом параграфе получим достаточные условия существования единственного непрерывного решения. Так как  $f(0) = 0$ , то дифференцирование обеих частей уравнения (3.1.3) приводит его к эквивалентному функционально-операторному уравнению

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} K_n(t, t)x(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(t) \left\{ K_i(t, \alpha_i(t)) - \right. \quad (3.1.4)$$

$$\left. - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)) \right\} x(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t, s)x(s) ds - f'(t) = 0,$$

где  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_n(t) = t$ .

Введем функцию

$$D(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha'_i(t)| \|K_n^{-1}(t, t) \{K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))\}\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_1)},$$

где  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_1)}$  — норма линейного оператора. Пусть выполнено следующее условие:

$$(A) \quad D(0) < 1, \quad \sup_{0 < s < t < T} \|K_n^{-1}(t, t)K^{(1)}(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_1)} \leq c < \infty.$$

Очевидно, неравенство  $D(0) < 1$  выполняется, если  $|\alpha_i^{(1)}(0)|$  достаточно малы. Здесь и далее оператор  $K(t, s)$  в области  $\bigcup_1^n D_i$  определен формулой (3.1.2). Его производная по  $t$  в обычном смысле при  $t, s \in \bigcup_1^n D_i$  определяется формулой

$$K^{(1)}(t, s) = \begin{cases} K_1^{(1)}(t, s), & t, s \in D_1, \\ \dots & \dots \\ K_n^{(1)}(t, s), & t, s \in D_n. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

**Лемма 3.1.1.** Пусть функция  $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$  и имеет непрерывную производную,  $\alpha(0) = 0$ ,  $0 \leq \alpha^{(1)}(0) < 1$ . Пусть  $h \in (0, T)$ ,  $I_0 \stackrel{\text{def}}{=} [0, h]$ ,  $I_k \stackrel{\text{def}}{=} [(1 + (k-1)\varepsilon)h, (1 + k\varepsilon)h]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $[0, T] = \bigcup_{k=0}^m I_k$ .

Если при этом  $0 < \alpha(t) < t$ ,  $\alpha^{(1)}(t) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$  при  $0 \leq t \leq T$ , то

$$\alpha : I_j \rightarrow \bigcup_{k=0}^{j-1} I_k, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.1.6)$$

*Доказательство.* Доказательство проведем методом математической индукции с использованием формулы Лагранжа о конечных приращениях. Действительно, так как  $\alpha : I_j \rightarrow \bigcup_{k=0}^{j-1} I_k \Leftrightarrow \alpha(t) \leq (1 + (j-1)\varepsilon)h$  при  $\forall t \in I_j$ , то достаточно доказать справедливость неравенств

$$\alpha(t)|_{t \in J_j} \leq (1 + (j-1)\varepsilon)h, \quad j = \overline{1, m} \quad (3.1.7)$$

методом математической индукции. Докажем справедливость (3.1.7) при  $j = 1$ . Пусть  $a \in I_1$ ,  $b = I_1 \cap I_0 = h$ . Тогда  $a - b \leq \varepsilon h$ . По формуле Лагранжа найдутся  $\xi \in [0, h]$  и  $\xi_1 \in [h, a]$  такие, что  $\alpha(a) = \alpha(b) + \alpha'(\xi)(a - b) = \alpha(0) + \alpha'(\xi_1)h + \alpha'(\xi)(a - b) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}h + \frac{1}{1+\varepsilon}\varepsilon h = h$ . Итак, неравенство (3.1.7) при  $j = 1$  доказано. Пусть неравенства (3.1.7) справедливы при  $j = 2, \dots, m-1$ . Тогда при  $\forall a \in I_m$  и  $b = I_m \cap I_{m-1} = (1 + (m-1)\varepsilon)h$  получим в силу формулы Лагранжа неравенство  $\alpha(a) = \alpha(b) + \alpha'(\xi)(a - b) \leq (1 + (m-2)\varepsilon)h + \frac{1}{1+\varepsilon}\varepsilon h$ . Легко проверить, что

$$1 + (m-2)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} < 1 + (m-1)\varepsilon.$$

Поэтому при  $\forall a \in I_m$  справедливо неравенство  $\alpha(a) \leq (1 + (m-1)\varepsilon)h$ , что и требовалось доказать.

□

**Теорема 3.1.1** (Достаточные условия существования и единственности решения). Пусть выполнено условие (A), все операторы  $K_i(t, s)$  в представлении (3.1.2) и операторы  $K_i^{(1)}(t, s)$  в представлении (3.1.5) непрерывны в операторной топологии, вектор  $f(t)$  имеет непрерывную производную,  $f(0) = 0$ . Тогда уравнение (3.1.3) в классе непрерывных функций  $\mathcal{C}_{([0, T]; E_1)}$  имеет единственное решение. Более того, решение можно найти методом шагов, сочетая его с методом последовательных приближений.

*Доказательство.* Применяя к обеим частям уравнения (3.1.4) оператор  $K_n^{-1}(t, t)$ , получим уравнение

$$x(t) + Ax + Kx = \hat{f}(t), \quad (3.1.8)$$

где введены обозначения

$$A(t)x \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(1)}(t)(K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)))x(\alpha_i t),$$

$$Kx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t, t) K_i^{(1)}(t, s)x(s) ds,$$

$$\hat{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t)f^{(1)}(t).$$

Зафиксировав  $q < 1$ , выберем  $h_1 > 0$  так, чтобы  $\max_{0 \leq t \leq h_1} D(t) = q < 1$ . В силу условия (А), непрерывности оператор-функций  $K_i(t, s)$  в операторной топологии и непрерывной дифференцируемости функций  $\alpha_i(t)$ , такое  $h_1 > 0$  найдется. Положим  $0 < h < \min\{h_1, \frac{1-q}{c}\}$ , где постоянная  $c$  определена в условии (А). Разобьем интервал  $[0, T]$  на промежутки

$$[0, h], [h, h + \varepsilon h], [h + \varepsilon h, h + 2\varepsilon h], \dots \quad (3.1.9)$$

Обозначим через  $x_0(t)$  сужение искомого решения  $x(t)$  на интервал  $[0, h]$ , а через  $x_m(t)$  — его сужения на интервалы

$$I_m = [(1 + (m - 1)\varepsilon)h, (1 + m\varepsilon)h], \quad m = 1, 2, \dots$$

Пусть  $\alpha_i^{(1)}(t) < \frac{1}{1+\varepsilon}$  при  $t \in [0, T)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Тогда включение

$$\alpha_i(t) \in \bigcup_{k=1}^{m-1} I_k, \quad i = \overline{1, n-1}$$

будет выполнено на промежутке  $[0, T)$  на основании Леммы 3.1.1. Это включение дает возможность при построении решения  $x(t)$  применить известный в теории функционально-дифференциальных уравнений метод шагов (см., например, [179, с. 199]).

На первом шаге вычислим элемент  $x_0(t) \in \mathcal{C}_{([0, h], E_1)}$ , построив последовательность

$$\begin{aligned} x_0^n(t) &= -A(t)x_0^{n-1} - Kx_0^{n-1} + \hat{f}(t), \\ x_0^0(t) &= \hat{f}(t), \quad t \in [0, h]. \end{aligned}$$

Так как  $\|A(0)\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)} \leq D(0) < 1$ , то при достаточно малом  $h$  имеем оценку  $\|A + K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{([0, h], E_1)} \rightarrow \mathcal{C}_{([0, h], E_1)})} < 1$ . Поэтому при  $t \in [0, h]$  существует единственное решение  $x_0(t)$  уравнения (3.1.8), к которому последовательность  $x_0^n(t)$  сходится равномерно. Продолжим процесс построения искомого решения при  $t \geq h$ , т.е. на промежутках  $I_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Для избежания громоздкости в обозначениях индексов пусть далее  $\varepsilon = 1$ , т.е.  $I_m = [mh, (m + 1)h]$ .

Тогда, вычислив элемент  $x_0(t) \in \mathcal{C}_{([0,h];E_1)}$ , будем искать элемент  $x_1(t)$  в пространстве  $\mathcal{C}_{([h,2h];E_1)}$  непрерывных вектор-функций. Найдем  $x_1(t)$  решая соответствующее интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$\begin{aligned} x(t) + \int_h^t K_n^{-1}(t,t)K'_t(t,s)x(s) ds = \\ = \hat{f}(t) - Ax_0 - \int_0^h K_n^{-1}(t,t)K'_t(t,s)x_0(s) ds \end{aligned}$$

последовательными приближениями. При этом  $x_0(h) = x_1(h)$ .

Введем непрерывную функцию

$$\bar{x}_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 \leq t \leq h, \\ x_1(t), & h \leq t \leq 2h, \end{cases} \quad (3.1.10)$$

являющуюся сужением искомого непрерывного решения  $x(t)$  на интервал  $[0, 2h]$ . Элемент  $x_2(t) \in \mathcal{C}_{([2h,3h];E_1)}$  тоже можно вычислить последовательными приближениями из интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$\begin{aligned} x(t) + \int_{2h}^t K_n^{-1}(t,t)K'_t(t,s)x(s) ds = \\ = \hat{f}(t) - A\bar{x}_1 - \int_0^{2h} K_n^{-1}(t,t)K'_t(t,s)\bar{x}_1(s) ds. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс за  $N$  шагов ( $N \geq \frac{T}{h}$ ) построим искомого решение  $x(t) \in \mathcal{C}_{([0,T];E_1)}$  уравнения (3.1.3).  $\square$

**Пример 3.1.1** ( $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$ ). *Интегральное уравнение*

$$\int_0^{t/2} K_1(t-s)x(s) ds + \int_{t/2}^t K_2(t-s)x(s) ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$K_1(t-s) = K_2(t-s) + E$ ,  $K_1, K_2$  — матрицы  $m \times m$ ,  $E$  — единичная матрица,

$$|K_2^{-1}(0)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} < 2,$$

матрица  $K_2(t)$  и вектор-функция  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))'$  имеют непрерывные производные по  $t$ ,  $f(0) = 0$ , удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1 и имеет единственное непрерывное решение.



**Пример 3.1.2** ( $E_1 = \overset{\odot(2)}{\mathcal{C}}_{[0,1]}$ ,  $E_2 = \mathcal{C}_{[0,1]}$ ). Краевая задача

$$\begin{cases} \int_0^{t/2} \left( \frac{\partial^2 x(t,y)}{\partial y^2} + x(t,y) \right) dt + \int_{t/2}^t \frac{\partial^2 x(t,y)}{\partial y^2} dt = f(t,y), & 0 \leq t \leq T, 0 \leq y \leq 1, \\ x(t,0) = 0, \quad x(t,1) = 0, \end{cases}$$

где функция  $f(t,y)$  непрерывна по  $y$  и имеет непрерывную производную по  $t$ ,  $f(0,y) = 0$ , удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Теперь  $D(0) = \frac{1}{2} \max_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 |G(y,\xi)| d\xi < 1$ , где

$$G(y,\xi) = \begin{cases} (\xi - 1)y, & y \leq \xi, \\ (y - 1)\xi, & \xi \leq y. \end{cases}$$

Искомое непрерывное решение можно построить, решая методом последовательных приближений эквивалентное уравнение

$$x(t,y) = -\frac{1}{2} \int_0^1 G(y,\xi) x(t/2,\xi) d\xi + \int_0^1 G(y,\xi) f'_t(t,\xi) d\xi$$

со сжимающим интегральным оператором.

*Формализм построения асимптотических приближений решений*

Пусть выполнено условие

(В) Существуют операторные полиномы  $\mathcal{P}_i = \sum_{\nu+\mu=1}^N K_{i\nu\mu} t^\nu s^\mu$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $K_{i,\nu,\mu} \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)$ , – линейные непрерывные операторы, вектор-функция  $f^N(t) = \sum_{\nu=1}^N f_\nu t^\nu$ , полиномы  $\alpha_i^N(t) = \sum_{\nu=1}^N \alpha_{i\nu} t^\nu$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , где  $0 < \alpha_{11} < \alpha_{21} < \alpha_{21} < \dots < \alpha_{n-1,1} < 1$ , такие, что при  $t \rightarrow +0$ ,  $s \rightarrow +0$  справедливы оценки  $\|K_i(t,s) - \mathcal{P}_i(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)} = \mathcal{O}((t+s)^{N+1})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\|f(t) - f^N(t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(t^{N+1})$ ,  $|\alpha_i(t) - \alpha_i^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1})$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ .

Разложения по степеням  $t, s$ , представленные в условии (В), далее будем называть «полиномами Тейлора» соответствующих элементов.

Введем  $j$ -параметрическое семейство линейных операторов

$$B(j) = K_n(0,0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

$j \in [0, \infty)$ . Оператор  $B(j)$ , отвечающий главной «функциональной» части уравнения (3.1.4), назовем *характеристическим оператором* уравнения (3.1.4).

Как и выше (см п. 3.1) мы рассматриваем уравнение (3.1.4), эквивалентное уравнению (3.1.3). В отличие от п. 3.1 в п. 3.1 и далее мы не предполагаем, что однородное уравнение, отвечающее (3.1.3), имеет только тривиальное решение. Поэтому теперь решение интегрофункционального уравнения (3.1.4) может быть не единственным. Будем искать асимптотическое приближение частного решения неоднородного уравнения (3.1.4) в виде полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=0}^N x_j (\ln t) t^j. \quad (3.1.11)$$

Покажем, что коэффициенты  $x_j$  со значениями в  $E_1$  в общем нерегулярном случае зависят от  $\ln t$  и свободных параметров. Это согласуется с возможностью существования нетривиальных решений у однородного уравнения.

Как и в конечномерных случаях, рассмотренных в гл. 1, при вычислении коэффициентов  $x_j$  возможны регулярный и нерегулярный случаи.

**Определение 3.1.1.** Число  $j^*$  — *регулярная точка оператора*  $B(j)$ , если оператор  $B(j^*)$  имеет ограниченный обратный и *нерегулярная точка* в противном случае.

*Регулярный случай:* характеристический оператор  $B(j)$  имеет ограниченный обратный при  $j \in (0, 1, \dots, N)$

В этом случае коэффициенты  $x_j$  будут постоянными векторами из  $E_1$ . Действительно, подставляя разложение (3.1.11) в уравнение (3.1.4), методом неопределенных коэффициентов с учетом условия (В), приходим к рекуррентной последовательности линейных уравнений относительно векторов  $x_j$ :

$$B(0)x_0 = f'(0), \quad (3.1.12)$$

$$B(j)x_j = M_j(x_0, \dots, x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.1.13)$$

Вектор  $M_j$  выражается определенным образом через решения  $x_0, \dots, x_{j-1}$  предыдущих уравнений и коэффициенты «полиномов Тейлора» из условия (В).

Так как в регулярном случае операторы  $B(j)$  обратимы, то векторы  $x_0, \dots, x_N$  определяются единственным образом и асимптотика (3.1.11) будет построена.

*Нерегулярный случай: оператор  $B(j)$  в массиве  $(0, 1, \dots, N)$  имеет нерегулярные точки*

Введем определения:

**Определение 3.1.2.** Число  $j^*$  — особая фредгольмова точка оператора  $B(j)$ , если  $B(j^*)$  — фредгольмов оператор (см. [120, с. 219]),

$$\det[\langle B^{(1)}(j^*)\phi_i, \psi_l \rangle]_{i,l=1}^r \neq 0,$$

где  $\{\phi_i\}_1^r$  — базис в  $N(B(j^*))$ ,  $\{\psi_i\}_1^r$  — базис в  $N(B'(j^*))$ ,  $B'(j^*)$  — сопряженный оператор,  $B^{(1)}(j)$  — производная оператора по  $j$ , вычисленная при  $j^*$ .

**Определение 3.1.3.** Пусть  $B(j^*)$  — фредгольмов оператор,  $j^*$  назовем особой фредгольмовой точкой индекса  $k + 1$ , если

$$N(B(j^*)) \subset \bigcap_{i=1}^k N(B^{(i)}(j^*)), \quad \det[\langle B^{(k+1)}(j^*)\phi_i, \psi_l \rangle]_{i,l=1}^r \neq 0, \quad k \geq 0.$$

Отметим, что  $B^{(k)}(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0))$ , где  $a_i = \ln \alpha'_i(0)$ .

**Замечание 3.1.1.** Если  $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1$ , то  $B(j)$  будет обычной функцией аргумента  $j$ . В этом случае определение 3.1.2 означает, что  $j^*$  — однократный корень уравнения  $B(j) = 0$ , а определение 3.1.3, что  $j^*$  —  $(k + 1)$  кратный корень этого уравнения.

Покажем, что в нерегулярном случае коэффициенты  $x_j$  будут полиномами по степеням  $\ln t$  и зависят от произвольных постоянных. Порядок полиномов и число произвольных постоянных связаны с индексами особых точек операторов  $B(j)$  и размерностями  $N(B(j))$ .

Действительно, так как коэффициент  $x_0$  в нерегулярном случае может зависеть от  $\ln t$ , то на основании метода неопределенных коэффициентов

$x_0$  следует искать как решение разностного уравнения

$$K_n(0,0)x_0(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(0)(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_0(z + a_i) = f'(0), \quad (3.1.14)$$

где  $a_i = \ln \alpha'_i(0)$ ,  $z = \ln t$ . Здесь возможны три случая:

*Случай 1.*

Оператор  $B(0)$  имеет ограниченный обратный. Тогда коэффициент  $x_0$  от  $z$  не зависит и определится единственным образом из уравнения (3.1.12).

*Случай 2.*

Пусть  $j = 0$  — простая особая фредгольмова точка оператора  $B(j)$ . Коэффициент  $x_0(z)$  будем искать из разностного уравнения (3.1.14) в виде линейной вектор-функции

$$x_0(z) = x_{01}z + x_{02}. \quad (3.1.15)$$

Подставляя (3.1.15) в (3.1.14), получим для определения векторов  $x_{01}, x_{02}$  два уравнения:

$$B(0)x_{01} = 0, \quad (3.1.16)$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (3.1.17)$$

Пусть  $\{\phi_i\}_1^r$  — базис в  $N(B(0))$ . Тогда  $x_{01} = \sum_{k=1}^r c_k \phi_k$ . Вектор  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_r)'$  определится однозначно из условий разрешимости уравнения (3.1.17), т.е. из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^r \langle B^{(1)}(0)\phi_k, \psi_i \rangle c_k = \langle f'(0), \psi_i \rangle, \quad i = \overline{1, r}$$

с невырожденной матрицей. Далее коэффициент  $x_{02}$  определится из уравнения (3.1.17) с точностью до  $\text{span}(\phi_1, \dots, \phi_r)$  по формуле

$$x_{02} = \sum_{k=1}^r d_k \phi_k + \Gamma(f'(0) - B^{(1)}x_{01}),$$

где

$$\Gamma = (B(0) + \sum_{k=1}^r \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k)^{-1}$$

является регуляризатором В. А. Треногина (см. [120, с. 221]),  $d_1, \dots, d_r$  — произвольные постоянные. Таким образом в случае 2 коэффициент  $x_0(z)$  линеен относительно  $z$  и зависит от  $r$  произвольных постоянных.

*Случай 3.* Пусть  $j = 0$  — особая фредгольмова точка оператора  $B(j)$  индекса  $k + 1$ , где  $k \geq 1$ . Решение  $x_0(z)$  разностного уравнения (3.1.14) будем искать в виде полинома

$$x_0(z) = x_{01}z^{k+1} + x_{02}z^k + \dots + x_{0k+1}z + x_{0k+2}. \quad (3.1.18)$$

Подставляя полином (3.1.18) в систему (3.1.14), учитывая тождество

$$\frac{d^k}{dj^k}B(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0)),$$

где  $a_i = \ln \alpha'_i(0)$  и приравнивая коэффициенты при степенях  $z^{k+1}, z^k, \dots, z, z^0$  нулю, получим рекуррентную последовательность линейных операторных уравнений относительно коэффициентов  $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k+2}$ :

$$B(0)x_{01} = 0,$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0) \binom{k+1}{k} x_{01} = 0,$$

$$B(0)x_{0l+1} + B^{(l)}(0) \binom{k+1}{k+1-l} x_{01} + B^{(l-1)}(0) \binom{k}{k+1-l} x_{02} + \dots$$

$$\dots + B^{(1)}(0) \binom{k+1-l+1}{k+1-l} x_{0l} = 0, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$B(0)x_{0k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} + B^{(k)}(0)x_{02} + \dots + B^{(1)}(0)x_{0k+1} = f'(0). \quad (3.1.19)$$

В рассматриваемом случае согласно условиям определения 3.1.3 имеем включение

$$N(B(0)) \subset \bigcap_{i=1}^k N\left(\left.\frac{d^i B(j)}{dj^i}\right|_{j=0}\right).$$

Поэтому  $B^{(i)}(0)x_{0i+1} = 0$ ,  $i = \overline{0, k}$  и коэффициенты  $x_{01}, \dots, x_{0k+1}$  определяются из однородного уравнения  $B(0)x = 0$  по формулам

$$x_{0i} = \sum_{j=1}^r c_{ij} \phi_j, \quad i = \overline{1, k+1}.$$

Уравнение (3.1.19) примет вид

$$B(0)x_{0,k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (3.1.20)$$

Так как  $B(0)$  — фредгольмов оператор и

$$\det \left[ \langle B^{(k+1)}(0)\phi_i, \psi_k \rangle \right]_{i,k=\overline{1,r}} \neq 0,$$

то вектор  $c^1 \stackrel{\text{def}}{=} (c_{11}, \dots, c_{1r})'$  определится однозначно из условий разрешимости уравнения (3.1.20). Итак,

$$x_{0k+2} = \sum_{j=1}^r c_{k+2j} \phi_j + \hat{x}_{k+2},$$

$\hat{x}_{k+2}$  — частное решение уравнения (3.1.20). Вектор  $c^{k+2} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{k+2,1}, \dots, c_{k+2,r})'$ , как и векторы  $c^i = (c_{i1}, \dots, c_{ir})'$ ,  $i = \overline{2, k+1}$ , остается произвольным. Таким образом, в случае 3 коэффициент  $x_0(z)$  является полиномом  $k+1$ -ой степени относительно  $z$  и зависит от  $r \times (k+1)$  произвольных постоянных.

Методом неопределенных коэффициентов можно построить разностные уравнения для определения коэффициента  $x_1(z)$  ( $z = \ln t$ ) и последующих коэффициентов асимптотического приближения (3.1.11). Действительно, с учетом определения оператора  $F$  (см. уравнение (3.1.4)), имеем представление

$$F(x) \Big|_{x=x_0(z)+x_1(z)t} = \left[ K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^2 (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_1(z+a_i) + P_1(x_0(z)) \right] t + r(t), \quad (3.1.21)$$

с оценкой  $r(t) = o(t)$ . Здесь  $P_1(x_0(z))$  — определенный полином от  $z$ , степень которого равна индексу особой фредгольмовой точки  $j=0$  оператора  $B(j)$ . Из соотношения (3.1.21) в силу оценки  $r(t) = o(t)$  при  $t \rightarrow 0$  следует, что коэффициент  $x_1(z)$  должен удовлетворять разностному уравнению

$$K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^2 (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_1(z+a_i) + P_1(x_0(z)) = 0. \quad (3.1.22)$$

Если  $j=1$  — регулярная точка оператора  $B(j)$ , то уравнение (3.1.22) имеет решение  $x_1(z)$  в виде полинома того же порядка, что и индекс особой фредгольмовой точки  $j=0$  оператора  $B(0)$ . Если  $j=1$  тоже окажется особой фредгольмовой точкой оператора  $B(j)$ , то решение  $x_1(z)$  строится в виде полинома степени  $k_0+k_1$ , где  $k_0$  и  $k_1$  — индексы особых фредгольмовых точек  $j=0$  и  $j=1$  оператора  $B(j)$  соответственно. Коэффициент  $x_1(z)$  будет зависеть от  $r_0 k_0 + r_1 k_1$  произвольных постоянных, где  $r_0 = \dim N(B(0))$ ,  $r_1 = \dim N(B(1))$ .

Введем условие

(С) Пусть оператор  $B(j)$  в массиве  $(0, 1, \dots, N)$  имеет регулярные точки и особые фредгольмовы точки  $j_1, \dots, j_\nu$  индексов  $k_i$ ,  $\dim N(Bj_i) = r_i$ ,  $i = \overline{1, \nu}$ .

Тогда аналогичным образом можно вычислить остальные коэффициенты  $x_2(z), \dots, x_N(z)$  асимптотического приближения  $\hat{x}(t)$  решения уравнения (3.1.4) из последовательности разностных уравнений вида

$$K_n(0,0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'(0))^{1+j} (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_j(z + a_i) + \\ + \mathcal{P}_j(x_0(z), \dots, x_{j-1}(z)) = 0, \quad j = \overline{2, N}.$$

Из изложенного вытекает

**Лемма 3.1.2.** Пусть выполнены условия (В), (С). Тогда существует вектор-функция  $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^N x_i(\ln t)t^i$ , такая, что  $\|F(\hat{x}(t))\|_{E_2} = o(t^N)$ , где оператор  $F$  определен формулой (3.1.4). При этом коэффициенты  $x_i(\ln t)$  являются полиномами от  $\ln t$  возрастающих степеней, не превосходящих суммы индексов  $\sum_j k_j$  особых фредгольмовых точек  $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$  характеристического оператора  $B(j)$ . Коэффициенты  $x_i(\ln t)$  зависят от  $\sum_{j=0}^i \dim N(B(j))k_j$  произвольных постоянных.

**Замечание 3.1.2.** Если  $B(0)$  – фредгольмов оператор и  $\dim N(B(0)) \geq 1$ , то коэффициент  $x_0(\ln t)$  может оказаться линейной функцией  $\ln t$  и вектор-функция  $\hat{x}(t)$  будет неограниченно возрастать при  $t \rightarrow +0$  (кратко,  $\hat{x} \in \mathcal{C}_{((0,T];E_1)}$ ).

*Теорема существования непрерывных решений*

Сформулируем и докажем теорему существования непрерывных параметрических семейств решений. Так как  $0 \leq \alpha'_i(0) < 1$ ,  $\alpha_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , то для любого  $0 < \varepsilon < 1$  найдется  $T' \in (0, T]$  такое, что

$$\max_{i=\overline{1, n-1}, t \in [0, T']} |\alpha'_i(t)| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad \sup_{i=\overline{1, n-1}, t \in (0, T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon.$$

Введем следующее условие

(D)

Пусть оператор  $K_n(t, t)$  имеет ограниченный обратный при  $t \in [0, T']$  и  $N^*$  выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{t \in (0, T')} \varepsilon^{N^*} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \alpha_i^{(1)}(t) \right| \left\| K_n^{-1}(t, t) \left( K_i(t, \alpha_i(t)) - \right. \right. \\ \left. \left. - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)) \right) \right\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_1)} \leq q < 1.$$

**Лемма 3.1.3.** Пусть выполнено условие (D). Пусть в классе  $\mathcal{C}_{([0, T']; E_1)}$  вектор-функций, непрерывных при  $t \in [0, T']$  существует элемент  $\hat{x}(t)$  такой, что при  $t \rightarrow +0$

$$\|F(\hat{x}(t))\|_{E_2} = o(t^N), \quad N \geq N^*.$$

Тогда уравнение (3.1.3) в классе  $\mathcal{C}_{([0, T']; E_1)}$  имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t), \quad (3.1.23)$$

где  $u(t)$  определяется единственным образом последовательными приближениями.

*Доказательство.* Подставляя (3.1.23) в уравнение (3.1.4) получим для определения функции  $u(t)$  интегро-функциональное уравнение

$$K_n(t, t)u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t) \left( \frac{\alpha_i(t)}{t} \right)^{N^*} \left( K_i(t, \alpha_i(t)) - \right. \\ \left. - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)) \right) u(\alpha_i(t)) + \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t, s) \left( \frac{s}{t} \right)^{N^*} u(s) ds + F(\hat{x}(t))/t^{N^*} = 0. \quad (3.1.24)$$

Введем линейные операторы

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t) \left( \frac{\alpha_i(t)}{t} \right)^{N^*} \left\{ K_i(t, \alpha_i(t)) - \right. \\ \left. - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)) \right\} u(\alpha_i(t)),$$



$$Ku \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t, t) K_i^{(1)}(t, s) (s/t)^{N^*} u(s) ds.$$

Тогда система (3.1.24) перепишется в компактной форме

$$u + (L + K)u = \gamma(t),$$

где  $\gamma(t) = K_n^{-1}(t, t)F(\hat{x}(t))/t^{N^*}$  — непрерывная вектор-функция. Введем банахово пространство  $X$  непрерывных по  $t$  вектор-функций  $u(t)$  со значениями в банаховом пространстве  $E_1$  с нормой

$$\|u\|_l = \max_{0 \leq t \leq T'} e^{-lt} \|u(t)\|_{E_1}, \quad l > 0.$$

Тогда в силу неравенств  $\sup_{t \in (0, T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon < 1$  и условия (D) при  $\forall l \geq 0$  нормальная линейного функционального оператора  $L$  удовлетворяет оценке

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q < 1.$$

Кроме того, для интегрального оператора  $K$  при достаточно большом  $l$  справедлива оценка

$$\|K\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q_1 < 1 - q.$$

Следовательно, при достаточно большом  $l > 0$

$$\|L + K\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} < 1,$$

т.е. линейный оператор  $L + K$  является сжимающим в пространстве  $X$ . Поэтому последовательность  $\{u_n\}$ , где  $u_n = -(L + K)u_{n-1} + \gamma(t)$ ,  $u_0 = \gamma(t)$ , сходится.  $\square$

**Теорема 3.1.2** (Основная теорема). Пусть выполнены условия (B), (C) и (D),  $f(0) = 0$ . Пусть оператор  $B(0)$  имеет ограниченный обратный. Тогда уравнение (3.1.3) в пространстве  $\mathcal{C}_{([0, T]; E_1)}$  при  $0 \leq t \leq T' \leq T$  имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t),$$

зависящее от  $\sum_{i=1}^{\nu} r_i k_i$  произвольных постоянных. Более того, элемент  $\hat{x}$  строится в виде логарифмо-степенной суммы (3.1.11), затем  $u(t)$  вычисляется единственным образом последовательными приближениями, и имеет место асимптотическая оценка  $\|x(t) - \hat{x}(t)\|_{E_1} = \mathcal{O}(t^{N^*})$  при  $t \rightarrow +0$ .

*Доказательство.* На основании леммы 3.1.2 в силу условий теоремы возможно построение асимптотического приближения  $\hat{x}(t)$  искомого решения в виде логарифмо-степенного полинома

$$\sum_{i=0}^N x_i(\ln t)t^i.$$

При этом по построению коэффициенты  $x_i(\ln t)$  будут зависеть от указанного числа произвольных постоянных. В силу леммы 3.1.3, применяя подстановку  $x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*}u(t)$ , непрерывную функцию  $u(t)$  можно построить методом последовательных приближений. Теорема доказана.  $\square$

Как и в теореме 3.1.1, параметрическое семейство решений, построенное на интервале  $[0, T']$ , можно продолжить на весь интервал  $[0, T]$ , используя метод шагов. Если  $j = 0$  окажется фредгольмовой точкой оператора  $B(j)$  и  $\dim N(B(0)) \geq 1$ , то на основании замечания 3.1.2 коэффициент  $x_0(\ln t)$  в асимптотике  $\hat{x}(t)$  может оказаться линейной функцией  $\ln t$ . В этом случае решение  $x(t) \in \mathcal{C}_{((0, T]; E_1)}$  и неограниченно возрастает при  $t \rightarrow +0$  (см. пример 3.1.3).

### Пример 3.1.3. Уравнение

$$\int_0^{t/2} \int_0^1 K(y, y_1)x(s, y_1) dy_1 ds + \int_{t/2}^t \left( \int_0^1 K(y, y_1)x(s, y_1) dy_1 - 2x(s, y) \right) ds = g(y)t,$$

где  $0 < t < \infty$ ,  $0 < y < 1$ ,  $1$  — собственное число непрерывного симметрического ядра  $K(y, y_1)$  ранга  $r$ ,  $\{\phi_1(y), \dots, \phi_r(y)\}$  — соответствующая ортонормированная на отрезке  $[0, 1]$  система собственных функций,  $g(y) \in \mathcal{C}_{[0, 1]}$ , удовлетворяет условиям теоремы 3.1.2. При этом  $j = 0$  оказывается простой особой фредгольмовой точкой соответствующего характеристического оператора  $B(j)$ . Уравнению удовлетворяет параметрическое семейство решений

$$x(t, y) = -\frac{\ln t}{\ln 2} \sum_{i=1}^r \int_0^1 \phi_i(y)\phi_i(y_1)f(y_1) dy_1 + c_1\phi_1(y) + \dots + c_r\phi_r(y) + x_0(y),$$

где  $c_1, \dots, c_r$  — произвольные постоянные,  $x_0(y)$  — частное решение интегрального уравнения Фредгольма II рода

$$x(y) = \int_0^1 K(y, y_1)x(y_1) dy_1 - f(y) + \sum_{i=1}^r \phi_i(y) \int_0^1 \phi_i(y_1)f(y_1) dy_1.$$

### Усиление теоремы 3.1.2

Пусть числа  $\{j_1, \dots, j_\nu\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и являются фредгольмовыми точками характеристического оператора  $B(j)$ . Построим обобщенные жордановы наборы в смысле ([120], п.30) характеристического оператора  $B(j)$  в этих точках. Тогда теорему 3.1.2 можно усилить. Действительно, пусть  $j^*$  — особая фредгольмова точка оператора  $B(j)$ . Пусть построены элементы  $\{\phi_i^{(l)}\}, i = \overline{1, r}, l = \overline{1, p_i}$ , удовлетворяющие равенствам:

$$\begin{aligned} B(j^*)\phi_i^{(1)} &= 0, \\ B(j^*)\phi_i^{(2)} + B^{(1)}(j^*)\binom{p_i+1}{p} \phi_i^{(1)} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ B(j^*)\phi_i^{(l+1)} + B^{(l)}(j^*)\binom{p_i+1}{p_i+1-l} \phi_i^{(1)} + \dots + B^{(1)}(j^*)\binom{p_i+1-l+1}{p_i+1-l} \phi_i^{(l)} &= 0, \\ i = \overline{1, r}, l = \overline{1, p_i - 1}. \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Пусть при этом

$$\det \left[ \begin{array}{c} < B^{(p_i)}(j^*)\phi_i^{(1)} + B^{(p_i-1)}(j^*)\phi_i^{(2)} + \dots \\ + B^{(1)}(j^*)\phi_i^{(p_i)}, \psi_j > \end{array} \right]_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0, \tag{3.1.26}$$

где  $\{\phi_i\}_1^r$  — базис в  $N(B'(j^*))$ . Тогда по аналогии с известной теорией жордановых наборов линейных операторов (см. [28, п. 30]) будем говорить, что оператор  $B(j)$  в точке  $j^*$  имеет полный  $B(j^*)$  — жорданов набор (кратко ПЖН)  $(\phi_i^{(l)})_{i=\overline{1,r}, l=\overline{1, p_i}}$ . При этом числа  $p_i$  назовем *длинами жордановых цепочек*

$$\overleftarrow{p_i} \rightarrow (\phi_i^{(1)}, \dots, \phi_i^{(p_i)}), i = \overline{1, r}.$$

Отметим, что ПЖН существует в точке  $j^*$ , если  $j^*$  — особая фредгольмова точка индекса  $p$  в смысле определения 3.1.3. В этом случае  $B^{(l)}(j^*)\phi_i^{(1)} =$

$0, i = \overline{1, r}, l = \overline{0, p-1}$ , жордановы цепочки

$$\overset{\leftarrow p \rightarrow}{(\psi_i^{(1)}, \dots, \psi_i^{(1)})}, i = \overline{1, r}$$

являются стационарными, т.е. имеют одинаковую длину  $p$ , условие (3.1.26) примет вид

$$\det[\langle B^{(p)}\phi_i^{(1)}, \psi_j \rangle]_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0.$$

При этом будет выполнено и условие (C), используемое в теореме 3.1.2, то есть мы приходим к результату теоремы 3.1.2.

Вместо условия (C) введем более слабое условие:

**(C1)** Характеристический оператор  $B(j)$  в массиве  $(0, 1, \dots, N^*)$  имеет ровно  $\nu$  особых фредгольмовых точек  $(j_1, \dots, j_\nu)$  с полными обобщенными жордановыми наборами, все остальные числа этого массива регулярны.

Отметим, что в условии (C1) жордановы цепочки могут быть нестационарны.

Если условие (C1) выполняется, то требуемое в лемме 3.1.2 асимптотическое приближение  $\hat{x}$  искомого параметрического семейства решения уравнения (3.1.4) можно построить. Действительно, пусть оператор  $B(0)$  — фредгольмов,  $\{\phi_i^{(1)}\}_{i=1}^r$  — базис в  $N(B(0))$ ,  $\{\phi_i^{(l)}\}_{i=\overline{1,r}, l=\overline{1,p_i}}$  — соответствующий ПЖН, удовлетворяющий уравнениям (3.1.25) и условию (3.1.26), где положено  $j^* = 0$ . Тогда первый коэффициент  $x_0(z)$  искомого приближения  $\hat{x}$ , удовлетворяющий разностному уравнению (3.1.14), строится в виде полинома

$$x_0(z) = \sum_{i=1}^r c_i \sum_{l=1}^{p_i} \phi_i^{(l)} z^{p_i+1-l} + x_0, \quad (3.1.27)$$

где постоянные  $c_1, \dots, c_r$  и  $x_0 \in E_1$  подлежат определению. Подставляя (3.1.27) в (3.1.14) получим для определения элемента  $x_0$  линейное уравнение

$$\begin{aligned} B(0)x_0 + \sum_{i=1}^r c_i (B^{(p_i)}(0)\phi_i^{(1)} + B^{(p_i-1)}(0)\phi_i^{(2)} + \dots \\ \dots + B^{(1)}(0)\phi_i^{(p_i)}) = f'(0). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

В силу неравенства (3.1.26) при  $j^* = 0$  вектор  $(c_1, \dots, c_r)'$  определим из условия разрешимости уравнения (3.1.28). Затем с помощью регуляризатора В. А. Треногина (см. [120, с. 221]) построим решение  $x_0$  неоднородного уравнения (3.1.28) с точностью до базиса  $(\phi_1, \dots, \phi_r)$  в  $N(B(0))$ . Аналогич-

ным образом, в силу условия (C1) можно вычислить остальные коэффициенты  $x_2(z), \dots, x_N(z)$  асимптотического приближения  $\hat{x}(z)$ , удовлетворяющего лемме 3.1.2. Таким образом, на основании леммы 3.1.3 теорема 3.1.2 усилится за счет ослабления условия (C).

**Теорема 3.1.3.** *Пусть выполнены условия (B), (D), (C1),  $f(0) = 0$ . Тогда уравнение (3.1.3) при  $0 < t \leq T' \leq T$  имеет параметрическое семейство решений.*

### 3.2 Нелинейные модели Вольтерра: существование и разрушение решений

В данном параграфе метод, изложенный во второй главе (см. п. 2.2), модифицируется и используется для построения главных по Канторовичу решений нелинейных операторно-интегральных уравнений Вольтерра. Сходимость последовательных приближений устанавливается с помощью исследования мажорантных интегральных и алгебраических уравнений. Даны оценки нормы решений и интервалов, на правых концах которых решения могут иметь blow-up пределы.

Введем нелинейный непрерывный оператор

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_n, u, t) : E_1 \times \dots \times E_1 \times \mathbb{R}^1 \rightarrow E_2$$

от  $n + 1$  переменных  $\omega_1, \dots, \omega_n, u$ , являющихся абстрактными непрерывными функциями вещественного переменного  $t$  со значениями в  $E_1$ . Здесь  $E_1, E_2$  – банаховы пространства,  $\Phi(0, \dots, 0, u_0, 0) = 0$ . Пусть  $K_i : \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1}_{i+1} \times \underbrace{E_1 \times \dots \times E_1}_i \rightarrow E_2$  – нелинейные непрерывные операторы, зависящие от вектор-функции  $u(s) = (u(s_1), \dots, u(s_n))$  и вещественных переменных  $t, s_1, \dots, s_n$ . Положим

$$\omega_i(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_i(t, s_1, \dots, s_i, u(s_1), \dots, u(s_i)) ds_1 \dots ds_i, \quad i = \overline{1, n}$$

и рассмотрим при  $t \in [0, T)$  операторно-интегральное уравнение

$$F(u, t) \equiv$$

$$\equiv \Phi \left( \int_0^t K_1(t, s, u(s)) ds, \int_0^t \int_0^t K_2(t, s, s_1, s_2, u(s_1), u(s_2)) ds_1 ds_2, \dots \right) \quad (3.2.1)$$

$$\dots \int_0^t \dots \int_0^t K_n(t, s_1, \dots, s_n, u(s_1), \dots, u(s_n)) ds_1 \dots ds_n, u(t), t) = 0.$$

Искомая абстрактная непрерывная функция  $u(t)$  принимает значения в  $E_1$ . Требуется найти непрерывные решения  $u(t) \rightarrow u_0$  при  $t \rightarrow 0$ . При  $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1$  уравнение (3.2.1) в ряде случаев рассматривалось многими авторами (см., например, [4; 6; 154]). В общем случае банаховых пространств  $E_1, E_2$  уравнение (3.2.1), повидимому, ранее не изучалось.

Популярным конструктивным методом в теоретических и прикладных исследованиях является метод мажорант. Л.В. Канторович в работе [54] при исследовании функциональных уравнений в  $B_K$ -пространствах придал классическому методу мажорант абстрактную форму, что сделало едиными и прозрачными основные этапы его методологии. В своей монографии [55, с. 467] он особо выделил роль главных решений нелинейных уравнений и соответствующих им мажорант. Главные решения единственны согласно их определению и могут быть построены последовательными приближениями из эквивалентного уравнения (3.2.4), начиная с нулевого приближения. Главное непрерывное решение  $u^+(t)$  в точках интервала  $[0, T)$  удовлетворяет оценке  $\|u^+(t)\| \leq z(t)$ , где  $z(t)$  – суть непрерывное положительное решение мажорантного интегрального уравнения Вольтерра вида

$$z(t) = f\left(\int_0^t \gamma(z(s)) ds\right), \quad z(t) \in \mathcal{C}_{[0,T]}^+. \quad (3.2.2)$$

Здесь и далее  $f$  и  $\gamma$  – монотонно возрастающие непрерывные функции. Если уравнению (3.2.1) при  $t \in [0, T)$  удовлетворяет элемент  $u_0$ , то  $u_0$  и будет главным решением. Далее этот тривиальный случай исключается. При продолжении нетривиального главного решения  $u^+(t)$  правее границы  $T$  интервала  $[0, T)$ , в котором последовательные приближения сходятся, решение  $u^+(t)$  может уйти в  $\infty$  или *разветвиться* (см. [120, п. 37]). Возможен конечно случай, когда оператор  $F$  удовлетворяет условию Липшица при любых  $u$ , и главное решение продолжаемо на весь интервал  $[0, \infty)$ . Если условие Липшица не выполнено, то кроме главного решения уравнение типа (3.2.1) может иметь сколь угодно много других непрерывных решений, пересекающих главное решение.

**Пример 3.2.1.** *Рассмотрим уравнение*

$$u(t) = p \int_0^t u^{\frac{p-1}{p}}(s) ds, \quad 1 < p < \infty.$$

Здесь  $u_1(t) = 0$  – главное решение. Другие непрерывные решения:  $u_2(t) = t^p$ ,

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq t \leq c, \\ (t - c)^p, & c \leq t < \infty. \end{cases}$$

Главное решение  $u^+(t) = 0$  этого примера является особым решением соответствующей задачи Коши  $\dot{u} = pu^{\frac{p-1}{p}}$ ,  $u(0) = 0$ .

Цель данного параграфа – построение главных решений уравнения (3.2.1) на максимальном интервале  $[0, T)$ .

В данном параграфе для уравнения (3.2.1) получена теорема существования главного решения  $u(t) \rightarrow u_0$  при  $t \rightarrow 0$  с оценкой нормы  $\|u(t)\|_{E_1}$  при  $t \in [0, T)$ . Указан способ построения приближений  $u_n(t)$  и интервал  $[0, T)$  их точечной сходимости при  $\forall u_0(t)$ , если  $\|u_0(t)\|_{E_1} \leq z^+(t)$ , где  $z^+(t)$  – главное неотрицательное решение соответствующего мажорантного интегрального уравнения (3.2.2). Приведены достаточные условия, когда  $\lim_{t \rightarrow T} z^+(t) = \infty$  (или  $\lim_{t \rightarrow T} \frac{dz^+(t)}{dt} = +\infty$ ), т.е. главное решение мажорантного уравнения (или его производная) имеет blow-up предел (уходит в  $\infty$  за конечное время  $T$ ). При выполнении этих условий искомое решение  $u(t)$  уравнения (3.2.1), вообще говоря, может за конечное время  $T' \geq T$  тоже уйти в  $\infty$  (или разветвиться).

Далее мы покажем, как при построении главного решения уравнения (3.2.1) надо строить и использовать мажорантные алгебраические системы вида

$$\begin{cases} r = R(r, t), \\ 1 = R'_r(r, t), \end{cases} \quad (3.2.3)$$

в которых  $R(0, 0) = 0$ ,  $R'_r(0, 0) = 0$ ,  $R(r, t)$  – выпуклая функция относительно  $r$ . Алгебраические мажорантные системы (3.2.3) в монографии [38, гл. 5] названы мажорантами А. М. Ляпунова. Они и более общие алгебраические мажоранты использовались в [38] в задачах механики, см. также [242, с. 198-216] при построении неявных функций в  $B_K$  – пространствах. Отметим, что алгебраические мажорантные системы имеют единственное положительное решение  $r^*, T^*$ . Это позволяет определить гарантированный интервал  $[0, T^*]$ , на котором уравнение (3.2.1) имеет главное решение  $u(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и радиус шара  $S(0, r^*)$  в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, T^*]}^{E_1}$ , в котором строится главное решение равномерно сходящимися последовательными приближениями.

Введем эквивалентное (3.2.1) уравнение

$$u = \mathcal{L}(u), \quad (3.2.4)$$

где  $\mathcal{L}(u) = A^{-1}(Au - F(u, t))$ ,  $A$  – непрерывно обратимый оператор, действующий из  $E_1$  в  $E_2$ . Если оператор  $F$  имеет производную Фреше  $F_u(0, 0)$  и она обратима, то можно положить  $A = F_u(0, 0)$ .

**Определение 3.2.1.** Если приближения  $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$ ,  $u_0 = 0$  при  $t \in [0, T^*)$  сходятся к решению  $u^+(t)$  уравнения (3.2.4), то функцию  $u^+(t)$  назовем главным по Канторовичу решением уравнения (3.2.1).

Напомним, что в монографии Л. В. Канторовича [55, с. 467] именно таким образом введен термин «главное решение функционального уравнения». Далее под решением будем понимать именно главное.

Рассмотрим оператор  $F(u, t) - Au$ , как действующий из полного пространства  $\mathcal{C}_{[0, T]}^{E_1}$  в полное пространство  $\mathcal{C}_{[0, T]}^{E_2}$ . Получим в нормах пространств  $E_1, E_2$  оценку:

$$\mathbf{A)} \quad \|F(u, t) - Au\|_{E_2} \leq f\left(\int_0^t \gamma(\|u(s)\|_{E_1}) ds\right), \quad t \in [0, T].$$

Пусть в неравенстве **A)** и далее выполнено предположение:

**B)**  $\gamma, f$  – непрерывно-монотонные возрастающие выпуклые функции соответственно на отрезках  $[0, z']$  и  $[\gamma(0), \gamma(z')]$ ,  $z \leq \infty$ ;

**C)** при  $t \in [0, T)$  существует в конусе  $\mathcal{C}_{[0, T]}^+$  функция  $z'(t)$ , такая, что

$$z'(t) \geq f\left(\int_0^t \gamma(z'(s)) ds\right). \quad (3.2.5)$$

**Замечание 3.2.1.** В леммах 3.2.2 и 3.2.3 будет дан способ определения границы  $T$  такой, что при  $t \in [0, T)$  условие **C)** выполняется.

В силу условия **A)**  $f(\gamma(0)t) \geq 0$ . Поэтому нуль является нижним решением мажорантного интегрального уравнения (3.2.2), а  $z'(t)$  – верхним решением в конусе  $\mathcal{C}_{[0, T]}^+$ . Предполагая выполненными условия **C)** и **B)**

введем последовательность  $z_n(t) = f\left(\int_0^t \gamma(z_{n-1}(s)) ds\right)$ ,  $z_0 = 0$ . Тогда, на основании теоремы 2.11 Канторовича (см. [55, с. 464]) при  $\forall n, t \in [0, T)$  справедливы неравенства

$$0 = z_0(t) \leq z_1(t) \leq \dots \leq z_n(t) \leq z'(t).$$



Поэтому существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z^+(t)$ . В силу непрерывности функций  $\gamma$ ,  $f$  и теоремы Лебега (см., например, [125], с.39) существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\int_0^t \gamma(z_n(s)) ds\right) = f\left(\int_0^t \gamma(z^+(s)) ds\right).$$

Таким образом, функция  $z^+(t)$  оказывается на интервале  $[0, T)$  непрерывной и является главным решением мажорантного интегрального уравнения (3.2.2). Приближение  $z_n(t)$  в точках интервала  $[0, T)$  сходится к  $z^+(t) \in \mathcal{C}_{[0, T)}^+$ .

Перейдем к построению решения  $u^+(t)$  уравнения (3.2.1) последовательными приближениями. Пусть наряду с условиями А), В) и С) выполнено неравенство

$$\text{D)} \|F(u + \Delta u, t) - F(u, t) - Au\|_{E_2} \leq f\left(\int_0^t \gamma(\|u(s)\|_{E_1} + \|\Delta u(s)\|_{E_1}) ds\right) - f\left(\int_0^t \gamma(\|u(s)\|_{E_1}) ds\right).$$

При условии дифференцируемости по Фреше операторов

$$F(u, t), f\left(\int_0^t \gamma(z(s)) ds\right)$$

проверку неравенства D) можно заменить на проверку условия E) (см. ниже). Действительно, пусть указанные производные Фреше существуют и непрерывны при  $t \in [0, T)$  по норме линейных ограниченных операторов, соответственно в пространствах  $\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)$  и  $\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0, T)}^+ \rightarrow \mathcal{C}_{[0, T)}^+)$ . При этом мы предположим, что функции  $f$ ,  $\gamma$  имеют непрерывные монотонно возрастающие производные, и дифференциал Фреше оператора  $f$  определяется формулой

$$f'_z\left(\int_0^t \gamma(z(s)) ds\right)h \equiv f'_\gamma\left(\int_0^t \gamma(z(s)) ds\right) \int_0^t \gamma'_z(z(s))h(s) ds$$

при  $\forall h(s) \in \mathcal{C}_{[0, T)}^+$ .

Пусть в дополнение к условиям А) и В) при любых  $V(t) \in \mathcal{C}_{[0, T)}^{E_1}$  выполнено неравенство

$$\text{E)} \|(F_u(u, t) - A)V\|_{E_2} \leq f'_z\left(\int_0^t \gamma(\|u(s)\|_{E_1}) ds\right)\|V\|_{E_1}, \|V\|_{E_1} \in \mathcal{C}_{[0, T)}^+. \text{ Тогда имеет место}$$

**Лемма 3.2.1.** Пусть выполнено неравенство E) и производные  $f'_\gamma$ ,  $\gamma'_z$  монотонно возрастают. Тогда неравенство D) выполняется.

*Доказательство.* Используя формулу Лагранжа конечных приращений [120, с.367] и условия леммы 3.2.1, получим неравенство

$$\begin{aligned}
& \|F(u + \Delta u, t) - F(u, t) - A\Delta u\|_{E_2} = \\
& = \left\| \int_0^1 (F_u(u + \Theta\Delta u, t) - A) d\Theta \Delta u \right\|_{E_2} \leq \int_0^1 f'_\gamma \left( \int_0^t \gamma \left( \|u(s)\|_{E_1} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \Theta \|\Delta u(s)\|_{E_1} \right) ds \right) \int_0^t \gamma' \left( \|\Delta u(s)\|_{E_1} + \Theta \|\Delta u(s)\|_{E_1} \right) \|u(s)\|_{E_1} ds d\Theta = \\
& = f \left( \int_0^t \gamma (\|u(s)\|_{E_1} + \|\Delta u(s)\|_{E_1}) ds \right) - f \left( \int_0^t \gamma (\|u(s)\|_{E_1}) ds \right).
\end{aligned}$$

□

Построим приближения  $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$ ,  $u_0 = 0$  к решению  $u^+(t)$ . Повторяя этапы доказательства теоремы 2.22 [55, с. 466], установим оценки  $\|u_{n+p}(t) - u_n(t)\|_{E_1} \leq z_{n+p}(t) - z_n(t)$  при  $t \in [0, T)$ , где  $z_n(t) = f(\int_0^t \gamma(z_{n-1}(s)) ds)$ ,  $z_n(t) \in \mathcal{C}_{[0, T)}^+$ ,  $u_n(t) \in \mathcal{C}_{[0, T)}^{E_1}$ ,  $u_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ .

Подобные оценки в другой ситуации проводились нами при исследовании неявных отображений методом выпуклых мажорант (см. [242, гл. 4, п. 3]).

В силу А), В), С) по выше доказанному существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) = z^+(t)$  при  $\forall t \in [0, T)$ , т.е.  $z_n(t)$  – фундаментальная последовательность в каждой точке  $t \in [0, T)$ . Поэтому последовательность абстрактных функций  $u_n(t)$  со значениями в банаховом пространстве  $E_1$  при каждом  $t \in [0, T)$  сходится по норме пространства  $E_1$  к функции  $u^+(t)$ . В силу непрерывности оператора  $\mathcal{L}(u)$  справедливо тождество  $u^+(t) = \mathcal{L}(u^+)$ , т.е.  $u^+(t)$  удовлетворяет уравнению (3.2.1) и является элементом пространства  $\mathcal{C}_{[0, T)}^{E_1}$ .

Из изложенного вытекает

**Теорема 3.2.1.** Пусть при  $t \in [0, T)$  выполнены условия А), В), С), D). Тогда уравнение (3.2.1) в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, T)}^{E_1}$  имеет главное решение  $u^+(t)$ . Более того,  $\|u^+(t)\|_{E_1} \leq z^+(t)$ , где  $z^+(t)$  – главное решение мажорантного уравнения (3.2.2), приближения  $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$ ,  $u_0 = 0$  сходятся к  $u^+(t)$  по норме пространства  $E_1$  при  $\forall t \in [0, T^+)$ , приближения  $z_n(t) = f(\int_0^t \gamma(z_{n-1}(s)) ds)$ ,  $z_0 = 0$  сходятся к  $z^+(t)$ .

В теореме 3.2.1 не указана величина интервала  $[0, T^+)$ . Для определения  $T^+$  сведем мажорантное интегральное уравнение (3.2.2) к задаче Коши для ДУ с разделяющимися переменными. С этой целью мы введем дифференцируемую функцию  $\omega(t) = \int_0^t \gamma(z(s)) ds$ . Тогда  $\frac{d\omega(t)}{dt} = \gamma(z(t))$ ,  $\omega(0) = 0$ ,

где  $z(t) = f(\omega(t))$ . Поэтому эквивалентная уравнению (3.2.6) задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \gamma(f(\omega(t))), \\ \omega(0) = 0. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Леммы 3.2.2 и 3.2.3 дают оценку интервала  $[0, T^+)$ , на котором задача Коши (3.2.6) в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, T^+)}^+$  имеет единственное решение  $\omega^+(t)$  и приближения  $\omega_n(t) = \int_0^t \gamma(f(\omega_{n-1}(s))) ds$ ,  $\omega_0 = 0$  к нему сходятся.

**Лемма 3.2.2.** Пусть  $\gamma(f(\omega))$  — непрерывная, строго положительная и монотонно возрастающая функция. Пусть существует

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))} = T^+.$$

Тогда задача (3.2.6) в конусе  $\mathcal{C}_{[0, T^+)}^+$  имеет монотонно возрастающее решение  $\omega^+(t)$ . При этом приближения  $\omega_n(t) = \int_0^t \omega(f(\omega_{n-1}(s))) ds$ ,  $\omega_0 = 0$  сходятся к  $\omega^+(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow T^+} \omega^+(t) = \infty$ .

*Доказательство.* Разделяя переменные в (3.2.6), задачу Коши сведем к поиску положительной монотонно возрастающей ветви неявной функции  $\omega = \omega(t)$ ,  $\omega(0) = 0$  из уравнения  $\Phi(\omega) = t$ , где  $\Phi(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))}$ . Если  $\gamma(f(\omega))$  — рациональная дробь, то первообразная  $\Phi(\omega)$  строится в явном виде через логарифмы, арктангенсы и рациональные функции (см. [50, с. 344]). Отметим, что в условиях леммы 3.2.1 функция  $\Phi(\omega)$  непрерывна и монотонно возрастает на полуоси  $[0, \infty)$ , так как  $\Phi' = \frac{1}{\gamma(f(\omega))} > 0$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi(\omega) = 0$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = T^+$ . Поэтому отображение  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, T^+)$  является биективным, уравнение  $\Phi(\omega) = t$  при  $0 \leq t < T^+$  определяет однозначно функцию  $\omega^+(t)$ , удовлетворяющую, очевидно, и интегральному уравнению

$$\omega(t) = \int_0^t \gamma(f(\omega(s))) ds.$$

В силу монотонного возрастания функций  $f$  и  $\gamma$  приближения  $\omega_n(t) = \int_0^t \gamma(f(\omega_{n-1}(s))) ds$ ,  $\omega_0 = 0$  при  $t \in [0, T^+)$  сходятся к  $\omega^+(t)$ .  $\square$

Если  $\gamma(f(\omega))$  — рациональная дробь, то в ряде случаев решение  $\omega^+(t)$  можно построить в явном виде, в сложных случаях привлекая средства компьютерной алгебры.

**Замечание 3.2.2.** Зная  $\omega^+(t)$ , по формуле  $z^+(t) = f(\omega^+(t))$  найдем решение мажорантного интегрального уравнения (3.2.2). Отметим, что в условиях леммы 3.2.2 приближения  $z_n = f(\int_0^t \gamma(z_{n-1}(s) ds)$ ,  $z_0 = 0$  сходятся при  $t \in [0, T^+)$  к решению  $z^+(t)$ .

**Замечание 3.2.3.** Если в условиях леммы 3.2.2  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))} = \infty$ , то решение  $z^+(t)$  продолжается на всю полуось  $[0, \infty)$ .

Этот результат вытекает и из теоремы 2.7 [13, с. 148]. Например, пусть выполнено неравенство

$$\|F(u, t) - Au\|_{E_2} \leq a \int_0^t \|u(s)\| ds + b, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

при  $\forall u, 0 \leq t < \infty$ . Тогда мажорантное интегральное уравнение (3.2.2) будет линейным вида  $z(t) = a \int_0^t z(s) ds + b$  и имеет единственное решение  $z(t) = be^{at}$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Заметим, что в этом случае  $\gamma(f(\omega)) = a\omega + b$   $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega \frac{d\omega}{a\omega + b} = \infty$ . Если при этом

$$\|F(u + \Delta u, t) - F(u, t) - A\Delta u\|_{E_2} \leq a \int_a^t \|\Delta u(s)\|_{E_1} ds,$$

то условия Теоремы 3.2.1 выполняются на полуоси  $0 \leq t < \infty$ , и уравнение (3.2.1) будет иметь решение  $u^+(t)$  в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, \infty)}^{E_1}$ . При этом  $\|u^+(t)\|_{E_1} \leq be^{at}$ . Из этого результата, разумеется, не следует, что в области  $\|u(t)\|_{E_1} \geq be^{at}$  уравнение (3.2.1) не имеет других решений.

**Лемма 3.2.3.** Пусть суперпозиция  $\gamma(f(\omega))$  непрерывна и строго положительна при  $0 \leq \omega \leq \omega^*$ . Пусть существуют пределы  $\lim_{\omega \rightarrow \omega^*} \gamma(f(\omega)) = \infty$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \omega^*} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))} = T^+$ . Тогда задача Коши (3.2.6) при  $t \in [0, T^+]$  имеет в конусе  $\mathcal{C}_{[0, T^+)}^+$  непрерывное монотонно возрастающее решение  $\omega^+(t)$ , причем  $\lim_{t \rightarrow T^+} \frac{d\omega^+}{dt} = \infty$ , приближения  $\omega_n(t) = \int_0^t \gamma(f\omega_{n-1}(s)) ds$ ,  $\omega_0 = 0$  сходятся при  $0 \leq t \leq T^+$  к решению  $\omega^+(t)$ .

Доказательство леммы 3.2.3 вытекает из биективности отображения  $\Phi : [0, \omega^*] \rightarrow [0, \Phi(\omega^*)]$  при  $\Phi(\omega) = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))}$ ,  $\Phi(\omega^*) = T^+$ .

**Замечание 3.2.4.** В условиях леммы 3.2.3 точка  $T^+$  является blow-up пределом производной решения  $z^+(t)$  мажорантного уравнения (3.2.2).

*Алгебраические мажоранты в построении главного решения уравнения*

Пусть теперь в уравнении (3.2.1)  $u_0 = 0$ , т.е.  $\Phi(0, \dots, 0) = 0$ . Требуется построить непрерывное решение  $u^+(t)$  последовательными приближениями  $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$  на замкнутом интервале  $[0, T^+]$ . В пространстве  $\mathcal{C}_{[0, T^+]}^{E_1}$  введем норму  $\|u\| = \max_{0 \leq t \leq T^+} \|u(t)\|_{E_1}$ . Будем предполагать, что оператор  $F$  дифференцируем по  $u$  в смысле Фреше. Пусть при  $0 \leq t \leq T$ , где  $T \geq T^+$  и  $u \in S(0, r) \subset E_1$ , выполнены неравенства

$$\mathbf{A}') \quad \|F(u, t) - Au\|_{E_2} \leq f(r, t),$$

$$\mathbf{E}') \quad \|F'_u(u, t) - A\|_{E_2} \leq f'_r(r, t).$$

$\mathbf{G}$ ) Пусть функции  $f(r, t)$ ,  $f'_r(r, t)$  положительны при  $r > 0$ ,  $t > 0$  и монотонно возрастают,  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'_r(0, 0) \in [0, 1)$ , функция  $f(r, t)$  выпуклая по  $r$ .

Тогда алгебраическое уравнение  $r = \|A^{-1}\|f(r, t)$  согласно определению 5.1 из монографии [38, с. 205] будет мажорантой Ляпунова для оператора  $\mathcal{L}(u)$ .

В силу монотонного возрастания функций  $f(r, t)$ ,  $f_r(r, t)$  и выпуклости  $f(r, t)$  система

$$\begin{cases} r = \|A^{-1}\|f(r, t), \\ 1 = \|A^{-1}\|f'_r(r, t) \end{cases}$$

имеет единственное положительное решение  $r^+, T^+$  (см. [38, с. 218]). Более того, уравнение  $r = \|A^{-1}\|f(r, t)$  при  $0 \leq t \leq T^+$  определяет единственным образом монотонно возрастающее решение  $r^* = r(t)$ , приближения

$$r_n(t) = \|A^{-1}\|f(r_{n-1}(t), t), \quad r_0 = 0,$$

при  $0 \leq t \leq T^+$  сходятся к функции  $r(t)$ . Соответственные приближения  $r_n = \|A^{-1}\|f(r_{n-1}, T^+)$ ,  $r_0 = 0$ , сходятся к  $r^+$ . Функция  $r(t)$  является главным решением мажорантного уравнения А. М. Ляпунова. На основании леммы 5.1 [38, с. 206], если  $\|u_i(t)\|_{E_1} \leq r_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\|u_2(t) - u_1(t)\| \leq r_2 - r_1$ , то при  $0 \leq t \leq T^+$

$$\|\mathcal{L}(u_2) - \mathcal{L}(u_1)\|_{E_1} \leq \|A^{-1}\|(f(r_2, t) - f(r_1, t)).$$

Наряду с приближениями  $r_n(t)$  решения мажоранты Ляпунова, введем приближения  $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$ ,  $u_0 = 0$  главного решения уравнения (3.2.1). При произвольных  $k$  и  $l \geq k$  в силу условий А'), Е') и последнего неравенства, придем к оценке

$$\|u_l(t) - u_k(t)\|_{E_1} \leq r_l(t) - r_k(t) \leq r_l(T^+) - r_k(T^+).$$

Так как  $r_l(T^+)$  монотонно возрастающая последовательность и  $\lim_{l \rightarrow \infty} r_l(T^+) = r^+$ , то  $\|u_l(t) - u_k(t)\|_{E_1} \leq \varepsilon$  при  $l, k \geq N(\varepsilon)$ , если  $t \in [0, T^+]$ . Следовательно,  $\|u_l(t) - u_k(t)\|_{E_1} \leq \varepsilon$  при  $l, k \geq N(\varepsilon)$ . Поэтому в силу полноты пространства  $\mathcal{C}_{[0, T^+]}^{E_1}$  существует предел  $\lim_{l \rightarrow \infty} u_l(t) = u^+(t)$ . Более того,  $u^+(t)$  непрерывна по  $t$ , а приближения  $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$ ,  $u_0 = 0$  сходятся на отрезке  $[0, T^+]$  равномерно по  $t$ . Из изложенного вытекает

**Теорема 3.2.2.** Пусть  $\Phi(0, \dots, 0) = 0$ , выполнены неравенства А'), Е') при  $t \in [0, T^+]$ , пара  $r^+ > 0$ ,  $T^+ > 0$  удовлетворяет алгебраической системе

$$\begin{cases} r = \|A^{-1}\|f(r, t), \\ 1 = \|A^{-1}\|f'_r(r, t), \end{cases}$$

где функция  $f(r, t)$  удовлетворяет условию G). Тогда на отрезке  $[0, T^+]$  уравнение (3.2.1) имеет непрерывное решение  $u^+(t)$  в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, T^+]}^{E_1}$ . Более того, приближения  $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$  сходятся равномерно по  $t$ ,  $\max_{0 \leq t \leq T^+} \|u^+(t)\| \leq r^+$ .

**Пример 3.2.2.**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \int_0^t \sin(t - \tau + x) u^2(x, \tau) d\tau = t, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0. \end{cases}$$

Требуется построить классическое решение  $u \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ . Здесь  $E_1 =$

$\overset{\circ(2)}{\mathcal{C}}_{[0, 1]}$  – пространство дважды дифференцируемых по  $x$  функций, обращающихся в нуль на концах интервала  $[0, 1]$ ,  $E_2 = \mathcal{C}_{[0, 1]}$ .  $Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , оператор

$A \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)$  имеет ограниченный обратный  $A^{-1} = \int_0^1 G(x, s)[\cdot] ds$ , где

$$G(x, s) = \begin{cases} x(s - 1), & 0 \leq x \leq s \leq 1, \\ s(x - 1), & s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)} \leq 1.$$

Согласно теореме 3.2.1 соответствующее мажорантное интегральное уравнение (3.2.2) имеет вид  $z(t) = \int_0^t z^2(s) ds + t$ , тогда  $z^+(t) = \operatorname{tg} t$  при  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$  будет главным решением мажорантного интегрального уравнения.  $\frac{\pi}{2}$  является точкой, в которой имеет место blow-up предел решения  $z^+(t)$ . Краевая задача на основании теоремы 3.2.1 имеет в пространстве  $\mathcal{C}_{[0, \frac{\pi}{2})}^{E_1}$  решение  $u^+(x, t)$ , причем при  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left( \left| \frac{\partial^i u^+(x, t)}{\partial x^i} \right|, i = 0, 1, 2 \right) \leq \operatorname{tg} t.$$

С другой стороны, следуя теореме 3.2.2, составим мажорантное алгебраическое уравнение  $r = tr^2 + t$ . Функция  $r^+ = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2}}{2t}$  при  $t \in [0, 0.5]$  является главным решением мажорантного алгебраического уравнения. Согласно теореме 3.2.2 построим систему

$$\begin{cases} r = tr^2 + t, \\ 1 = 2tr, \end{cases}$$

имеющую одно положительное решение  $T^+ = 0.5$ ,  $r^+ = 1$ . Поэтому согласно теореме 3.2.2 получим гарантированный интервал по  $t$  существования решения  $u^+(x, t)$  краевой задачи с оценкой нормы решения  $u^+$  вида

$$\max_{x \in [0, 1], t \in [0, 0.5]} \left\{ \left| \frac{\partial^i u^+(x, t)}{\partial x^i} \right|, i = 0, 1, 2 \right\} \leq 1,$$

$$\|u^+\|_{E_1} \leq r^+(t), t \in [0, 0.5].$$

Так как  $0.5 < \pi/2$ , то в этом примере интегральная мажоранта дала более тонкую оценку решения  $u^+$ , чем алгебраическая.

В заключение отметим, что рассматривая уравнение (3.2.1) в  $B_K$  пространствах и вводя абстрактные нормы в смысле Канторовича, можно получить более тонкие системы мажорантных интегральных и алгебраических уравнений. Такие мажоранты будут полнее характеризовать решение уравнения (3.2.1). С помощью мажорантных алгебраических уравнений можно исследовать решения  $n$ -мерных интегральных уравнений Вольтерра вида (3.2.1), т.е. при  $t \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Мажорантные уравнения должны строиться в банаховых пространствах, допускающих частичную упорядоченность. Алгебраические мажоранты, вообще говоря, дают более грубые оценки, чем интегральные мажоранты, но их проще строить и исследовать. Так как решение мажорантного интегрального уравнения имеет blow-up предел, то при численном решении таких задач в окрестности точек, где

имеет место blow-up предел, целесообразно использовать адаптивные сетки.

### 3.3 Нелинейные дифференциально-операторные уравнения с вырождением

В этом параграфе мы рассмотрим задачу Коши

$$B \frac{du}{dt} = F(u, t), \quad (3.3.1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (3.3.2)$$

где  $B$  – замкнутый фредгольмов оператор ([120], с.219) из  $E_1$  в  $E_2$  с плотной областью определения в  $E_1$ ,  $\dim N(B) = n \geq 1$ ,  $\{\phi_i\}_1^n$  – базис в  $N(B)$ ,  $E_1, E_2$  – банаховы пространства. Нелинейный непрерывный оператор  $F$  действует из  $E_1$  в  $E_2$ , определен в окрестности  $\|u\|_{E_1} \leq r$ ,  $0 < |t| \leq \rho$  и имеет в этой окрестности непрерывную производную Фреше по  $u$ . Требуется построить непрерывное решение  $u \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  задачи (3.3.1)–(3.3.2).

Хорошо известно, что такая нелинейная задача может иметь несколько решений, но может оказаться и неразрешимой. В обширной литературе (см. библиографию в монографиях [44; 242]), посвященной теории и приложениям дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором в главной части, получено много интересных результатов. Но при этом разработке приближенных методов уделялось мало внимания. Известно, что асимптотику разветвляющихся решений задачи (3.3.1) – (3.3.2) в аналитическом случае можно строить, используя ряды Ньютона – Пьюизе (см. [120, п. 37]) и асимптотический метод неопределенных коэффициентов Некрасова – Назарова [12]. Истоки метода Некрасова – Назарова лежат в теории ветвления решений нелинейных операторных уравнений (см. [120, п. 37], и [107]). Но метод Некрасова – Назарова имеет принципиальные недостатки: 1) отсутствие способа выбора показателя  $t$  в разложении решения задачи (3.3.1)–(3.3.2) в ряд Ньютона – Пьюизе; 2) сложность обоснования; 3) требование аналитичности оператора  $F(u, t)$ .

В классической теории ветвления решений уравнений с параметрами первая трудность преодолевается с помощью исследования конечномерной системы разветвления Ляпунова – Шмидта (см. [107] и [120, с. 429]).

В случае дифференциальных уравнений с вырождением тоже можно строить уравнение разветвления. Но при этом проблема сведется к исследо-



ванию сложных нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Поэтому при построении асимптотики ветвей решений нелинейных дифференциальных уравнений в нерегулярных случаях привлекают непосредственно асимптотические разложения Ньютона – Пьюизэ – Фробениуса [242, п. 3.3], [97] по дробным степеням, логарифмам и экспонентам аргумента, методы степенной геометрии [18]. Но этот подход недостаточен, так как он мало разработан для уравнения (3.3.1) и не избавляет от указанных выше недостатков.

В силу сказанного представляет несомненный интерес построение теории последовательных приближений решений задачи Коши (3.3.1)–(3.3.2), свободной от этих недостатков. Такая теория для интегральных уравнений Гаммерштейна была нами изложена в п. 2.1. Здесь мы излагаем подобный метод последовательных приближений, равномерно сходящийся в окрестности алгебраической точки ветвления решений задачи Коши (3.3.1)–(3.3.2).

Метод использует редукцию задачи (3.3.1)–(3.3.2) к специальной регулярной системе, метод диаграмм Ньютона и регуляризатор В. А. Треногина [120, п. 21, 37] в представлении искомого решения и выборе начального приближения.

*Асимптотика решения и последовательные приближения  
в окрестности алгебраической точки ветвления*

Пусть выполнены условия:

**A)** существуют числа  $\nu = r/s, \theta = \frac{r+m}{s}$ , где  $r, s, m$  – натуральные,  $r/s$  – несократимая дробь, такие, что при  $u \rightarrow 0, t \rightarrow 0$

$$\|F(u, t) - F(0, t) - \sum_{ir+ks=r+m} F_{ik}(u)t^k\|_{E_2} = o\left(\sum_{ir+ks=r+m} \|u\|^i |t|^k\right), \quad (3.3.3)$$

где  $F_{ik}(u)$  –  $i$ -однородные операторы,  $i \geq 1$ ;

**B)**

$$\|F(0, t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(|t|^{\nu-1}); \quad (3.3.4)$$

**C)**

$$|\langle F(0, t), \psi_j \rangle| = \mathcal{O}(|t|^\theta), \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.3.5)$$

$\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  – базис в дефектном подпространстве  $\mathcal{N}^*(B)$ .

Предполагается, что функция  $F(0, t)$  допускает асимптотическое представление  $F(0, t) = \sum_{k=0}^{m-s+1} a_k t^{\frac{r-s+k}{s}} + \mathcal{O}(|t|^\theta)$  при  $t \rightarrow 0$ .

При этом должны выполняться равенства  $\langle a_k, \psi_j \rangle = 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{0, m+s-1}$ , т.е. линейные уравнения  $Bu_k = a_k$ ,  $k = \overline{0, m+s-1}$  должны быть разрешимы.

Если оператор  $F(u, t)$  достаточно гладкий в окрестности нуля, то числа  $\nu, r, s, m$  и операторы  $F_{ik}(u)$  в условии А) легко указать, нанеся на координатную плоскость точки  $(i, k)$ , отвечающие ненулевым производным

$$\frac{\partial^{i+k}}{\partial u^i \partial t^k} (F(u, t) - F(0, t)) \Big|_{u=0, t=0},$$

и построив по этим точкам диаграмму Ньютона. Искомое  $\nu$  полагается равным  $tg\gamma$ , где  $\gamma$  – угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси  $i$ . Соответствующее число  $\frac{r+m}{s}$ , равное ординате точки пересечения этого отрезка с осью  $k$ , определяет требуемую гладкость оператора  $F(u, t)$  в окрестности нуля. При этом индексы  $(i, k)$  у операторов  $F_{ik}$  соответствуют точкам, попавшим на выбранный отрезок диаграммы Ньютона.

Так как диаграмма Ньютона может иметь несколько отрезков, то выбор чисел  $r, s, m$  и операторов  $F_{ik}(u)$  в условии А) может оказаться неоднозначным. Введем регуляризатор В. А. Треногина (см. [120, с. 221], Лемма Шмидта)

$$\Gamma = \left( B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1},$$

где  $\langle \phi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$ ,  $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$ ,  $\{\phi_i\}_1^n$  – базис в  $\mathcal{N}(B)$ ,  $\{\psi_i\}_1^n$  – базис в  $\mathcal{N}^*(B)$ .

Далее будем использовать обозначения:  $\boldsymbol{\phi} := (\phi_1, \dots, \phi_n)'$ ,  $\boldsymbol{\psi} := (\psi_1, \dots, \psi_n)'$ ,  $\mathbf{c}\boldsymbol{\phi} := \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)'$ ,

$$\hat{u}_0 = \begin{cases} \frac{s}{r} \Gamma a_0, & \text{если } F(0, t) \sim a_0 t^{\frac{r}{s}-1} \text{ при } t \rightarrow 0; \\ 0, & \text{если } \|F(0, t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(|t|^k) \text{ при } t \rightarrow 0, k > \frac{r}{s} - 1. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Пусть наряду с условиями А), В), С) выполнено условие:

Д) Система алгебраических уравнений

$$L_j(\mathbf{c}) \equiv \sum_{ir+ks=r+m} \langle F_{ik}(\mathbf{c}\boldsymbol{\phi} + \hat{u}_0), \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.3.7)$$

имеет простое решение  $c^* \neq 0$ , т.е.

$$\det \left\| \frac{\partial L_j(c_1^*, \dots, c_n)}{\partial c_j} \right\|_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$$

в точке  $c^*$ .

Проекторы  $P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \phi_i$ ,  $Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$  порождают разложения пространств  $E_1, E_2$  в прямые суммы подпространств:  $E_1 = E_1^n \dot{+} E_1^{\infty-n}$ ,  $E_2 = E_{2,n} \dot{+} E_{2,\infty-n}$ . Здесь подпространство  $E_1^{\infty-n}$  состоит из тех элементов  $u \in E_1$ , для которых  $\langle u, \gamma_i \rangle = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $E_{2,\infty-n}$  из элементов  $v \in E_2$ , для которых  $\langle v, \psi_i \rangle = 0$ ,  $i = \overline{1,n}$ ,  $E_1^n = N(B)$ ,  $E_{2,n} = \text{span}(z_1, \dots, z_n)$ . Оператор  $\Gamma$  переводит подпространство  $E_{2,\infty-n}$  в подпространство  $E_1^{\infty-n}$ . Поэтому искомые решения задачи (3.3.1) – (3.3.2) можно искать в виде

$$u = \Gamma v(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t) \phi_i t^\nu \quad (3.3.8)$$

при условии

$$\langle v(t), \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1,n}. \quad (3.3.9)$$

Замена (3.3.8) в силу тождества  $B\Gamma v = v$ , вытекающего из включения  $v(t) \in E_{2,\infty-n}$ , сводит уравнение (3.3.1) к уравнению

$$\frac{dv}{dt} = F(\Gamma v(t) + \mathbf{c}(t) \phi t^\nu, t)$$

с условиями  $v|_{t=0} = 0$ ,

$$\left\langle F(\Gamma v(t) + \mathbf{c}(t) \phi t^\nu, t), \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Поэтому при выполнении условий А), В), С) неизвестные  $v(t)$  и  $c(t)$  в представлении (3.3.8) искомого решения задачи Коши (3.3.1) – (3.3.2) можно искать из системы  $n + 1$  уравнений

$$v(t) = \int_0^t F(\Gamma v(s) + \mathbf{c}(t) \phi s^\nu, s) ds, \quad (3.3.10)$$

$$t^{-\theta} \left\langle F(\Gamma v(t) + \mathbf{c}(t) \phi t^\nu, t), \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1,n} \quad (3.3.11)$$

относительно неизвестных  $v(t)$ ,  $\mathbf{c}(t)$ , где  $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))'$ ,

Таким образом, в силу условий А), В), С), замена (3.3.8) позволяет свести проблему построения решения  $u(t)$  с алгебраической точкой ветвления

$t = 0$  к отысканию функций  $v(t) \sim t^\nu \hat{u}_0$  и  $c(t) \sim c^*$  при  $t \rightarrow 0$  из системы (3.3.10)–(3.3.11), где  $\hat{u}_0$  – определяется формулой (3.3.6),  $c^*$  – простое решение алгебраической системы (3.3.7).

На основании неединственности выбора показателя  $\nu$  в представлении (3.3.8) и неединственности решения  $c^*$  точку  $t = 0$  будем называть алгебраической точкой ветвления решений задачи Коши (3.3.1) – (3.3.2), а решение (3.3.8) его ветвью.

Систему (3.3.10) – (3.3.11) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(\omega, t) = 0 \quad (3.3.12)$$

относительно непрерывной вектор-функции  $\omega(t) = (\mathbf{v}(t), \mathbf{c}(t))$  аргумента  $t$  со значениями в  $E_2 \times \mathbb{R}^n$ . Введем банахово пространство  $X$  таких вектор-функций с нормой

$$\|\omega\| = \max_{|t| \leq \rho} (\|\mathbf{v}(t)\|_{E_2}, |\mathbf{c}(t)|_{\mathbb{R}^n}).$$

В пространстве  $X$  зададим замкнутый шар  $S(\omega_0, r)$ , где  $\omega_0 = (0, c^*)$ . В шаре  $S(\omega_0, r)$  выделим замкнутое подмножество  $\Omega_{r\rho}$  непрерывных функций  $\omega(t) = (\mathbf{v}(t), \mathbf{c}(t))$ , определенных при  $|t| \leq \rho$ , таких, что  $\|\mathbf{v}(t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(t^\nu)$ ,  $|\mathbf{c}(t) - c^*|_{\mathbb{R}^n} = o(1)$  при  $t \rightarrow 0$ . Покажем, что нелинейное отображение  $\Phi$ , действующее из  $\Omega_{r\rho}$  в  $\Omega_{r\rho}$  при достаточно малых  $r > 0, \rho > 0$  удовлетворяет всем условиям принципа сжимающих отображений. Действительно, в силу выбора чисел  $\nu, \theta, m$ , вектора  $c^*$  и множества  $\Omega_{r\rho}$  оператор  $\Phi$  на этом множестве непрерывен,  $\lim_{\Omega \ni \omega \rightarrow \omega_0, t \rightarrow 0} \Phi(\omega, t) = 0$ . Более того, оператор  $\Phi(\omega, t)$  имеет в  $\Omega_{r\rho}$  непрерывную производную Фреше по  $\omega$ . При этом

$$\Phi_\omega(\omega, t) \Big|_{\omega=\omega_0, t=0} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{l} & \mathfrak{A} \end{vmatrix},$$

где  $\mathbf{I}$  – тождественный оператор из  $E_2$  в  $E_2$ ,  $\mathbf{0}$  – нулевой оператор из  $\mathbb{R}^n$  в  $E_2$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)'$ ,

$$l_j = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^* \phi + \hat{u}_0) \Gamma \cdot, \psi_j \right\rangle, j = \overline{1, n}$$

являются линейными функционалами, определенными на  $E_2$ ,

$$\mathfrak{A} = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^* \phi + \hat{u}_0) \phi_l, \psi_j \right\rangle, l, j = \overline{1, n}$$

является невырожденной матрицей  $n \times n$ .

Оператор  $\Phi_\omega(\omega_0, 0)$  имеет ограниченный обратный:

$$\Phi_\omega(\omega, t)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathfrak{A}^{-1}l & \mathfrak{A}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\|\Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0)\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq m.$$

Введем эквивалентное системе (3.3.12) операторное уравнение

$$\omega = R(\omega, t), \quad (3.3.13)$$

где оператор

$$R(\omega, t) = \omega - (\Phi_\omega(\omega_0, 0))^{-1}\Phi(\omega, t).$$

Покажем, что последовательные приближения  $\omega_n = R(\omega_{n-1}, t)$ ,  $\omega_0 = (t^\nu \hat{u}_0, c^*)$  сходятся к искомому решению уравнения (3.3.13) в окрестности точки  $t = 0$ . В силу условий А), В), С), D) существуют радиусы  $r > 0, \rho > 0$ , положительные постоянные  $m, l$  и непрерывные функции  $q_1(\rho) \rightarrow 0, q_2(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ , такие, что при любых  $\omega_1, \omega_2$  из  $\Omega_{r\rho}$  выполнены оценки:

- 1)  $\|\Phi_\omega(\omega_1, t) - \Phi_\omega(\omega_2, t)\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq l\|\omega_1 - \omega_2\|$ ;
- 2)  $m\|\Phi(\omega_0, t)\| \leq q_2(\rho), m\|\Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0, 0)\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q_1(\rho)$ .

Выбирая  $\rho > 0$  достаточно малым, обеспечим выполнение неравенства

$$2ml < \frac{(1 - q_1(\rho))^2}{q_2(\rho)}$$

и положим

$$r = \frac{1 - q_1(\rho) - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)}}{ml}. \quad (3.3.14)$$

Напомним, что в силу условий А) и В) при  $\|v(t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(t^\nu)$  справедлива оценка

$$\left\| \int_0^t F(\Gamma v(s) + c(s)\Phi s^\nu, s) ds \right\|_{E_2} = \mathcal{O}(t^\nu),$$

гарантирующая для последовательных приближений  $\omega_n(t)$  требуемую асимптотическую оценку. С учетом этого нетрудно показать, что оператор  $R(\omega, t)$  переводит замкнутое множество  $\Omega_{r\rho}$  из шара  $S(\omega_0, r)$  банахова пространства  $X$  самого в себя и является сжимающим с коэффициентом сжатия

$$1 - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)} < 1.$$

Действительно, при  $\|\omega - \omega_0\| \leq r$ , где  $\omega \in \Omega_{r\rho} \subset S(\omega_0, r)$ , в силу неравенств 1) и 2) имеем цепочку неравенств  $\|R(\omega, t) - \omega_0\| =$

$$\begin{aligned} &= \|\Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0) \left[ \Phi_\omega(\omega_0, t)(\omega - \omega_0) - \Phi(\omega, t) + \Phi(\omega_0, t) - \Phi(\omega_0, t) + \right. \\ &\quad \left. + (\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t))(\omega - \omega_0) \right]\| \leq \\ &\leq m \left\{ \left\| \int_0^1 (\Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0 + \theta(\omega - \omega_0), t)) d\theta(\omega - \omega_0) \right\| + \right. \\ &\quad \left. + \|\Phi(\omega_0, t)\| + \|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \|\omega - \omega_0\| \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} m l r^2 + q_2(\rho) + q_1(\rho) r = r. \end{aligned}$$

Поэтому существуют  $r > 0, \rho > 0$  такие, что оператор  $R(\omega, t)$  переводит множество  $\Omega_{r\rho}$  самого в себя. Далее, при  $\omega \in \Omega_{r\rho}$ , где  $r$  определено выше формулой (3.3.14) при достаточно малом  $\rho > 0$ , имеем оценку

$$\begin{aligned} \|R_\omega(\omega, t)\| &\leq m \|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega, t) + \Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \leq \\ &\leq m \|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| + m \|\Phi_\omega(\omega, t) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \leq \\ &\leq q_1(\rho) + m l r = 1 - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2 m l q_2(\rho)} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор  $R(\omega, t)$  на множестве  $\Omega_{r\rho}$  является сжимающим с коэффициентом сжатия меньшим единицы.

Искомое решение  $\omega \rightarrow \omega_0$  при  $t \rightarrow 0$  и его можно найти последовательными приближениями:

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0) \Phi(\omega_{n-1}, t), \quad (3.3.15)$$

$$\omega_0 = (t^\nu \hat{u}_0, c^*), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.16)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.3.1.** Пусть выполнены условия A), B), C) и D). Тогда существует такое  $\rho > 0$ , что при  $|t| \leq \rho$  задача Коши (3.3.1)-(3.3.2) имеет при  $t \rightarrow 0$  малое непрерывное решение

$$u(t) \sim t^\nu (c^* \phi + \hat{u}_0),$$

где  $c^*$  – простой корень системы алгебраических уравнений (3.3.7), функция  $\hat{u}_0$  определяется по формуле (3.3.6).

Построенная асимптотика может быть использована как начальное приближение при вычислении ветви решения исходной задачи Коши методом последовательных приближений в окрестности точки ветвления  $t = 0$ .

**Следствие 3.3.1.** Пусть выполнены условия теоремы 3.3.1. Тогда последовательные приближения  $\{u_n\}$ , где

$$u_n = \hat{u}_n + c_n \phi t^\nu,$$

$$\check{B} \hat{u}_n = \int_0^t F(u_{n-1}(s), s) ds, \quad (3.3.17)$$

$$\check{B} = B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z,$$

$$\mathfrak{A}(c_n - c_{n-1}) = - \sum_{ir+ks=s+m} \langle F'_{ik}(c^* \phi + \hat{u}_0)(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}), \psi \rangle - \quad (3.3.18)$$

$$-t^{-\theta} \langle F(u_{n-1}(t), t), \psi \rangle,$$

$u_0 = (\hat{u}_0 + c^* \phi) t^\nu$ , сходятся равномерно в окрестности точки  $t = 0$  к решению задачи Коши (3.3.1) – (3.3.2).

Для доказательства следствия достаточно в итерациях (3.3.15) выписать конкретный вид оператора  $\Phi(\omega, t)$  и построенной выше производной Фреше  $\Phi_\omega(\omega_0, 0)$ .

Согласно следствию при построении приближений  $u_n$  на каждом шаге необходимо решить одно линейное операторное уравнение (3.3.17) с непрерывно обратимым оператором  $\check{B}$  и одну систему линейных алгебраических уравнений (3.3.18) с невырожденной матрицей  $\mathfrak{A}$ . Оператор  $\check{B}^{-1} = \Gamma$  является ограниченным согласно [120, с. 221].

При этом мы видим, что точка  $t = 0$  оказывается устранимой особой точкой правой части СЛАУ (3.3.18). Ввиду неизбежных погрешностей вычислений это обстоятельство следует учитывать при практических вычислениях. Регуляризация вычислений в окрестности точки  $t = 0$  может быть достигнута заменой множителя  $t^{-\theta}$  в правой части (3.3.18) на  $(t + \text{sign } t \alpha)^{-\theta}$ , где  $\alpha$  — малый положительный параметр, согласованный с погрешностью вычисления  $\delta$  в соответствии с известной концепцией регуляризации (см., например, раздел 3 в [48]).

В качестве иллюстрации изложенного метода решим следующую начально-краевую задачу, возникающую в некоторых задачах механики (см. монографии [61; 140; 310]),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \right) &= \sum_{i+k=n} b_{ik}(x) u^i t^k + a_0(x) + a_1(x)t + \dots \\ &\dots + a_{n-1}(x)t^{n-1} + r(u, x, t) \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0.$$

Функции  $b_{ik}(x), a_i(x), r(u, x, t)$  непрерывны при  $x \in [0, \pi]$  в окрестности точки  $t = 0, u = 0$ . Функция  $r(u, x, t)$  имеет непрерывную производную по  $u$ , а при  $u \rightarrow 0, t \rightarrow 0$  удовлетворяет оценке  $|r(u, x, t)| = o(\sum_{i+k=n} |u|^i |t|^k)$ .

Положим

$$E_1 = \mathcal{C}_{[0, \pi]}^{\circ(2)}, \quad E_2 = \mathcal{C}_{[0, \pi]}, \quad F_{ik}(x) = b_{ik}(x) u^i.$$

Здесь оператор  $B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + I$  действует из  $E_1$  в  $E_2$  и является фредгольмовым,  $\dim \mathcal{N}(B) = 1, \phi(x) = \psi(x) = \sin x$ .

Диаграмма Ньютона, построение которой описано выше, в этом примере имеет один отрезок, и он проходит через точки  $(0, n), (n, 0)$ . Поэтому условие А) выполнено при  $r = s = 1, m = n - 1$ . Условие В) очевидно выполнено. Условие С) выполняется, если  $\int_0^\pi a_i(x) \sin x \, dx = 0, i = \overline{0, n-1}$ .

Система D) оказывается одним нелинейным алгебраическим уравнением

$$L(c) := \int_0^\pi \sum_{i+k=n} b_{ik}(x) (c \sin x + \hat{u}_0(x))^i \, dx = 0,$$

где  $\hat{u}_0(x)$  — решение линейной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + u &= a_0(x), \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому в силу теоремы каждому простому корню  $c^*$  полинома  $L(c)$  отвечает в этом примере решение  $u(t, x) \sim t(c^* \sin x + \hat{u}_0)$  при  $t \rightarrow 0$ .

В заключении параграфа отметим, что результаты теоремы и следствия при дополнительном ограничении на нелинейный оператор  $F(u, t)$  сохраняются в случае, когда оператор  $B$  не является нормально разрешимым. Действительно, пусть  $\dim \mathcal{N}(B) = \dim \mathcal{N}^*(B) = n \geq 1$ , но область значений оператора  $B$  незамкнута. Тогда указанный выше оператор  $\Gamma$  существует,



но будет неограниченным. Пусть при этом область значений непрерывного оператора  $F(u, t)$  при любых  $u, t$  принадлежит области значений оператора  $\check{B}$ . Очевидно, что тогда доказательство теоремы остается справедливым и более того, можно использовать итерационные формулы следствия, привлекая для решения соответствующих линейных уравнений (3.3.17) хорошо разработанные методы регуляризации некорректных задач (см. библиографию в [48], раздел 3).

### 3.4 Операторные уравнения Вольтерра II рода в нерегулярном случае

В этом параграфе мы изложим метод построения асимптотики непрерывных ветвей решений операторно-интегральных уравнений Вольтерра II рода (3.4.1), (3.4.15), используя методологию п. 3.3. Построим метод последовательных приближений, равномерно сходящийся в окрестности точки ветвления. В случае, когда уравнение (3.4.15) не имеет непрерывных решений, изложим способ построения обобщенных решений в пространстве распределений Соболева-Шварца. Доказанные при этом общие теоремы существования применим для решения начально-краевой задачи, возникающей при моделировании нестационарных процессов в полупроводниках.

Итак, рассмотрим уравнение

$$G(u, t) + \int_0^t K(t, s, u(s)) ds = 0, \quad 0 \leq s \leq t \leq \rho, \quad (3.4.1)$$

где

$$G(u, t) = \sum_{i+k \geq 1}^N G_{ik}(u)t^k + R_1(u, t),$$

$$K(t, s, u) = \sum_{i+k+j \geq 0}^N K_{ikj}(u)t^k s^j + R_2(u, t, s).$$

Операторы  $G$  и  $K$  действуют из банахова пространства  $E_1$  в банахово пространство  $E_2$  и определены в окрестности точки  $u = 0, t = 0, s = 0$ ;  $G_{ik}(u), K_{ikj}(u)$  —  $i$ -степенные операторы. Операторы  $R_1$  и  $R_2$  непрерывны, дифференцируемы по  $u$  в смысле Фреше и удовлетворяют оценкам

$$\|R_1(u, t)\| = o((\|u\| + |t|)^N),$$

$$\|R_2(u, t, s)\| = o((\|u\| + |t| + |s|)^N).$$

После выхода работ Вито Вольтерры, заложивших основы интегральных уравнений, впоследствии названных его именем, появилась масса публикаций, посвященных таким уравнениям, их обобщениям и приложениям. Однако в этой библиографии нет статей, посвященных нелинейному уравнению (3.4.1) с необратимым оператором в главной части. Поэтому разработка теории интегральных уравнений вида (3.4.1) в нерегулярных случаях остается нерешенной задачей.

Мы изучим нерегулярный случай, когда  $G_{10} \equiv B$  – замкнутый фредгольмов оператор из  $E_1$  в  $E_2$  с плотной областью определения в  $E_1$ . Предполагается, что  $\{\phi\}_1^n$  – базис в  $N(B)$ ,  $\{\psi_i\}_1^n$  – базис в подпространстве  $N(*B)$ . Уравнение (3.4.1) представляет интерес во многих моделях прикладной математики [29; 61; 175; 242; 310]. К таким уравнениям сводятся некоторые начально-краевые задачи для уравнений с частными производными с необратимым оператором в главной части (см., например [61; 242; 310]).

*Асимптотика решения в окрестности алгебраических точек ветвления*

Введем обозначение

$$G_N(u, t) = \sum_{i+k \geq 1}^N G_{ik}(u)t^k - G_{10}u.$$

Пусть выполнено следующее условие

(А) Существуют  $\nu = \frac{r}{s}$ ,  $\theta = \frac{r+m}{s}$ , где  $r, s, m$  натуральные числа, такие, что

$$G_N(t^\nu v, t) = t^\theta \sum_{i\nu+k=\theta} G_{ik}(v) + r(v, t), \quad (3.4.2)$$

и имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|r(v, t)\| &= o(t^\theta), \quad \|R_1(t^\nu v, t)\| = o(t^\theta), \\ \|K(t, t, t^\nu v)\| &= \mathcal{O}(t^\theta). \end{aligned}$$

В конкретных случаях числа  $r, s, m$  легко можно вычислить, нанеся на координатную плоскость целочисленные точки  $(i, k)$ , отвечающие ненулевым членам  $G_{ik}(u)$ , и построив соответствующую диаграмму Ньютона [120, гл. 9, п. 37]. Искомое  $\nu$  полагается равным  $\operatorname{tg} \gamma$ , где  $\gamma$  – угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси  $i$ . Соответ-

ствующее  $\theta$  будет равно ординате точки пересечения продолжения этого отрезка с осью  $k$ .

Так как диаграмма Ньютона может содержать несколько отрезков, то выбор  $\nu$  и  $\theta$  в представлении (3.4.2) может оказаться неоднозначным.

Пусть наряду с условием (А) выполнено следующее условие  
(В) Система алгебраических уравнений

$$l_j(c) \equiv \left\langle \sum_{i\nu+k=\theta} G_{ik}(c\phi), \psi_j \right\rangle = 0, \quad (3.4.3)$$

где  $j = \overline{1, n}$ ,  $c\phi = \sum_1^n c_i \phi_i$ , имеет простое решение  $c^* \neq 0$ .

Введем ограниченный оператор В. А. Треногина [120, с. 221]

$$\Gamma = \left( B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1},$$

где

$$\langle \phi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}, \quad \langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}.$$

Будем искать решение уравнения (3.4.1) в виде

$$u = (\Gamma v + c\phi)t^\nu. \quad (3.4.4)$$

Неизвестная функция  $v(t)$  удовлетворяет равенствам

$$\langle v, \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.4.5)$$

Уравнение (3.4.1) перепишем в виде

$$Bu = R(u, t), \quad (3.4.6)$$

где

$$R(u, t) = Bu - G(u, t) - \int_0^t K(u(s), t, s) ds.$$

С помощью замены (3.4.4) уравнение (3.4.6) приведем к виду

$$v = t^{-\nu} R((\Gamma v + c\phi)t^\nu, t), \quad (3.4.7)$$

дополнив его условиями

$$t^{-\theta} \langle R((\Gamma v + c\phi)t^\nu, t), \psi_j \rangle = 0, \quad (3.4.8)$$

$j = \overline{1, n}$ , вытекающими из (3.4.5).

Таким образом, задача построения решения  $u(t)$  с алгебраической точкой ветвления при  $t = 0$  свелась к отысканию функций  $v(t)$  и  $c = (c_1(t), \dots, c_n(t))$  из системы (3.4.7), (3.4.8).

Будем искать  $c(t) \rightarrow c^*$  и  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ , где вектор  $c^*$  — простое решение системы (3.4.3). На основании представления (3.4.4) и неединственности  $c^*$  точку  $t = 0$  будем называть алгебраической точкой ветвления решения уравнения (3.4.1). Систему (3.4.7), (3.4.8) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(\omega, t) = 0 \quad (3.4.9)$$

относительно элемента  $\omega = (v, c)$ . Введем банахово пространство  $X$  элементов  $\omega$  с нормой

$$\|\omega\| = \max_{0 \leq t \leq \rho} (\|v(t)\|_{E_2} + |c(t)|_{R^n}).$$

Тогда нелинейное отображение  $\Phi$  будет действовать из  $X$  в  $X$ . В силу выбора чисел  $\nu, \theta$  оператор  $\Phi$  непрерывен в окрестности точки  $\omega_0 = (0, c^*)$ ,  $t_0 = 0$ . При этом

$$\lim_{\substack{\omega \rightarrow \omega_0 \\ t \rightarrow 0}} \Phi(\omega, t) = 0.$$

Более того, оператор  $\Phi(\omega, t)$  имеет непрерывную производную Фреше по  $\omega$  в окрестности точки  $\omega_0, t_0 = 0$

$$\Phi'_\omega(\omega, t) \Big|_{\omega=\omega_0, t=0} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{l} & \Xi \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор из  $E_2$  в  $E_2$ ,  $\mathbf{0}$  — нулевой оператор из  $\mathbb{R}^n$  в  $E_2$ ,  $\mathbf{l} := (l_1, \dots, l_n)'$ ,

$$l_j = \left\langle \sum_{i\nu+k=\theta} G'_{ik}(c^*\phi)\Gamma \cdot, \psi_j \right\rangle, j = \overline{1, n},$$

являются линейными функционалами, определенными на  $E_2$ ,

$$\Xi = \left\langle \sum_{i\nu+k=\theta} G'_{ik}(c^*\phi)\phi_s, \psi_j \right\rangle \Big|_{s,j=\overline{1, n}}$$

является невырожденной матрицей размерности  $n \times n$ . Введем эквивалентную (3.4.9) систему

$$\omega = \mu(\omega, t), \quad (3.4.10)$$

где

$$\mu(\omega, t) = \omega - (\Phi_\omega(\omega_0, 0))^{-1} \Phi(\omega, t).$$

В силу введенных выше условий существуют радиусы  $\rho > 0$ ,  $r > 0$ , положительные постоянные  $m, l$  и непрерывные функции  $q_1(\rho) \rightarrow 0$ ,  $q_2(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$  такие, что

1.  $\|\Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0)\| \leq m$ ;
2.  $\|\Phi_\omega(\omega_1, t) - \Phi_\omega(\omega_2, t)\| \leq l\|\omega_1 - \omega_2\|$  при  $\|\omega_i - \omega_0\| \leq r$ ,  $0 \leq t \leq \rho$ ;
3.  $m\|\Phi(\omega_0, t)\| \leq q_2(\rho)$ ,  $m\|\Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0, 0)\| \leq q_1(\rho)$ .

Выбирая  $\rho > 0$  достаточно малым обеспечим выполнение неравенства

$$2ml < \frac{(1 - q_1(\rho))^2}{q_2(\rho)} \quad (3.4.11)$$

и положим

$$r = \min \left\{ R, \frac{1 - q_1(\rho) - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)}}{ml} \right\}. \quad (3.4.12)$$

Тогда оператор  $\mu$  будет переводить шар  $s(\omega_0, r)$  самого в себя и являться сжимающим с коэффициентом сжатия

$$1 - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)} < 1.$$

Действительно, при  $\|\omega - \omega_0\| \leq r$  в силу неравенств 1, 2 и 3 имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\mu(\omega, t) - \omega_0\| &= \|\Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0) \left\{ \Phi_\omega(\omega_0, t)(\omega - \omega_0) - \Phi(\omega, t) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi(\omega_0, t) - \Phi(\omega_0, 0) + (\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t))(\omega - \omega_0) \right\}\| \leq \\ &\leq m \left\| \int_0^1 (\Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0 + \Theta(\omega - \omega_0), t)) d\theta(\omega - \omega_0) \right\| + \end{aligned}$$

$$+ m\|\Phi(\omega_0, t)\| + m\|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \|\omega - \omega_0\| \leq \frac{1}{2}mlr^2 + q_2(\rho) + q_1(\rho)r = r.$$

Поэтому в силу выбора  $r$  согласно (3.4.12) при условии (3.4.11) оператор  $\mu(\omega, t)$  переводит шар  $s(\omega_0, r)$  самого в себя.

Далее, при  $\omega \in S(\omega_0, r)$  имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\mu_\omega(\omega, t)\| &\leq m\|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega, t) + \Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \leq \\ &\leq m\|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| + m\|\Phi_\omega(\omega, t) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \leq \\ &\leq q_1(\rho) + mlr \leq 1 - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор  $\mu$  на шаре  $S(\omega_0, r)$  является сжимающим с коэффициентом сжатия меньшим единицы. Поэтому искомое решение  $\omega(t) \rightarrow (0, c^*)$  при  $t \rightarrow 0$  можно найти методом последовательных приближений

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0)\Phi(\omega_{n-1}, t), \quad (3.4.13)$$

где  $\omega_0 = (0, c^*)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$$\Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ -\Xi^{-1}l, & \Xi^{-1} \end{pmatrix}.$$

Из изложенного вытекает

**Теорема 3.4.1.** Пусть выполнены условия (A) и (B). Тогда существует  $\rho > 0$ , такое, что при  $0 \leq t \leq \rho$  уравнение (3.4.1) имеет непрерывное решение

$$u(t) = t^\nu(c^*\phi) + r(t), \quad (3.4.14)$$

где  $\|r(t)\| = o(t^\nu)$  при  $t \rightarrow 0$ . Функция  $r(t)$  определяется единственным образом методом последовательных приближений.

**Замечание 3.4.1.** Теорему 3.4.1 можно уточнить, введя вместо условий (A), (B) условие (A') :

$$G(t^\nu v, t) - G(0, t) = t^\nu P(v) + o(t^\nu),$$

где  $G(0, t) = v_0 t^\nu + o(t^\nu)$  при  $t \rightarrow 0$  и введя условие следующего вида (B') система

$$\langle P(\Gamma v_0 + c\phi), \psi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

имеет простое решение  $c^*$ .

Тогда результат теоремы 3.4.1 сохраняется. Но при этом вместо (3.4.14) имеем решение вида  $u = t^\nu(\Gamma v_0 + c^*\phi) + r(t)$ , где  $\|r(t)\| = o(t^\nu)$ . Напомним, что в условиях теоремы 3.4.1  $v_0(x) \equiv 0$ . Поэтому замечание 3.4.1 уточняет теорему 3.4.1.

**Замечание 3.4.2.** Результат теоремы 3.4.1 сохраняется и для возмущенного уравнения

$$\tilde{G}(u, t) + \int_0^t \tilde{K}(t, s, u(s)) ds = 0,$$

если возмущенные операторы  $\tilde{G}, \tilde{K}$  непрерывны, дифференцируемы по  $u$  и  $u$  удовлетворяют асимптотическим оценкам

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(u, t) - G(u, t)\| &= o(t^\nu), \\ \|\tilde{K}(t, t, t^\nu v)\| &= \mathcal{O}(t^\theta), \\ \|Q(\tilde{G}(u, t) - G(u, t))\| &= o(t^\theta), \end{aligned}$$

где  $Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$  — проектор в  $E_2$ .

*Возмущение линейного уравнения с фредгольмовым оператором нелинейным Вольтерровым оператором*

Рассмотрим уравнение

$$Bu = b(t) + \int_0^t K(t, s, u(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq \rho, \quad (3.4.15)$$

где  $B$  — фредгольмов оператор,  $b(t)$  — дифференцируемая функция со значениями в  $E_2$ , отображение  $K(t, s, u)$  — дифференцируемо по  $t$ , непрерывно по  $s$  и удовлетворяет по  $u$  условию Липшица.

К уравнению (3.4.15) можно свести некоторые начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, рассмотренные в [61; 242; 310].

Сначала рассмотрим случай, когда  $b(0) \in R(B)$  и уравнение (3.4.15) может иметь непрерывные решения. Введем следующее условие

(C) Система

$$l_j(c) \equiv \langle b'(0) + K(0, 0, \Gamma b(0) + c\phi), \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.4.16)$$

имеет простое решение  $c^*$ . Тогда имеет место

**Теорема 3.4.2.** Пусть выполнено условие (C),  $b(0) \in R(B)$ . Тогда уравнение (3.4.15) имеет непрерывное решение

$$u = \Gamma b(0) + c^* \phi + r(t),$$

где функция  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и определяется единственным образом.

*Доказательство.* Используя замену  $u = \Gamma v(t) + c(t)\phi$ , где

$$\langle v(t), \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

уравнение (3.4.1) сведем к системе

$$v(t) = b(t) + \int_0^t K(t, s, \Gamma v(s) + c(s)\phi) ds, \quad (3.4.17)$$

$$\left\langle b(t) + \int_0^t K(t, s, \Gamma v(s) + c(s)\phi) ds, \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.4.18)$$

Так как  $b(0) \in R(B)$ , то равенство (3.4.18) можно заменить уравнениями

$$\left\langle K(t, t, \Gamma v(t) + c(t)\phi) + b'(t) + \int_0^t K_t(t, s, \Gamma v(s) + c(s)\phi) ds, \psi_j \right\rangle = 0, \quad (3.4.19)$$

$j = \overline{1, n}$ .

Систему (3.4.17), (3.4.19) рассмотрим в окрестности точки  $\omega_0 = (b(0), c^*)$ ,  $t_0 = 0$  как одно операторное уравнение  $\Phi(\omega, t) = 0$ . При этом оператор

$$\Phi_\omega(\omega_0, 0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \langle K_u(0, 0, \Gamma b(0) + c^*\phi)\Gamma \cdot, \Psi \rangle, & \Xi \end{bmatrix},$$

где  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)'$ ,  $\Xi = [\langle K_u(0, 0, \Gamma b(0) + c^*\phi)\phi_i, \psi_j \rangle]_{i,j=\overline{1,n}}$  — невырожденная матрица, имеет ограниченный обратный оператор. Поэтому из доказательства теоремы 3.4.1 вытекает, что последовательность  $\omega_n$ , где

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0)\Phi(\omega_{n-1}, t), \quad \omega_0 = (b(0), c^*),$$

сходится в окрестности точки  $t = 0$  к искомому решению. Теорема 3.4.2 доказана.  $\square$

Пусть теперь  $b(0) \notin R(B)$ . В этом случае уравнение (3.4.15) не может иметь непрерывных решений  $u$ . Следуя результатам второй главы (см. п. 2.4), будем искать решение в классе обобщенных функций. С этой целью рассмотрим банахово пространство  $E$  как подмножество линейных непрерывных функционалов из  $E^{**}$ , определенных на  $E^*$ . Введем

**Определение 3.4.1.** Множество бесконечно-дифференцируемых финитных функций  $s(t)$  с носителями в интервале  $(0, \rho)$  и значениями в  $E^*$  обозначим через  $(D; E^*)$ . Множество линейных непрерывных функционалов, определенных на  $(D; E^*)$  со значениями в  $E$ , назовем пространством обобщенных функций и обозначим через  $(D'; E)$ .



**Определение 3.4.2.** Элемент  $u$  из  $(D'; E_1)$  назовем обобщенным решением уравнения  $F(u, t) = 0$ , где  $F : E_1 \rightarrow E_2$ , если для  $\forall s(t) \in (D; E_2^*)$  выполнено тождество

$$\langle F(u, t), s(t) \rangle = 0.$$

Будем предполагать, что выполнено следующее условие

$$(D) \quad K(t, s, u) = Ku + g(t, s, u),$$

где

$$K \in L(E_1 \rightarrow E_2),$$

$$g(t, s, u) = \sum_{k,j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} q_{ikj}(u) t^k s^{i+j},$$

$q_{ikj}(u)$  —  $i$ -степенные операторы из  $E_1$  в  $E_2$ ,

$$\det[\langle K\phi_i, \psi_j \rangle]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0.$$

Ищем в классе  $(D'; E_1)$  обобщенное решение уравнения (3.4.15) в виде

$$u = (\alpha\phi)\delta(t) + \Gamma v(t) + \mathbf{c}(t)\phi, \quad (3.4.20)$$

где  $a\phi = \sum_1^n a_i\phi_i$ ,  $a \in R^n$ ,  $\delta(t)$  — функция Дирака,  $v(t)$  — регулярная функция  $t$  со значениями в  $E_2$ ,  $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))'$  — регулярная вектор-функция,

$$\langle v(t), \psi_j \rangle = 0, \quad (3.4.21)$$

$j = \overline{1, n}$ .

Так как согласно [28]  $s\delta(s) = 0$ , то, подставляя (3.4.20) в (3.4.15) и учитывая, что в силу (3.4.21)  $B\Gamma v = v$ , получим уравнение

$$v(t) = b(t) + Ka\phi +$$

$$+ \int_0^t \left\{ K(\Gamma v(s) + c(s)\phi) + g(t, s, \Gamma v(s) + c(s)\phi) \right\} ds \quad (3.4.22)$$

с условиями

$$\left\langle b(t) + Ka\phi + \int_0^t \{K(\Gamma v(s) + c(s)\phi) + g(t, s, \Gamma v(s) + c(s)\phi)\} ds, \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.4.23)$$

Выберем вектор  $a^*$  как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\langle b(0) + Ka\phi, \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда уравнения (3.4.23) становятся эквивалентными уравнениям

$$\left\langle b'(t) + K\Gamma v(t) + Kc(t)\phi + g(t, t, \Gamma v(t) + c(t)\phi) + \int_0^t q_t(t, s, \Gamma v(s) + c(s)\phi) ds, \psi_j \right\rangle = 0, j = \overline{1, n}. \quad (3.4.24)$$

Систему (3.4.22), (3.4.24) рассмотрим как одно операторное уравнение  $\Phi(\omega, t) = 0$  в окрестности точки  $\omega_0 = (v_0, c^*)$ ,  $t_0 = 0$ , где  $v_0 = b(0) + Ka^*\phi$ ,  $c^*$  — единственное решение системы алгебраических уравнений

$$\langle Kc\phi, \psi_j \rangle + \langle b'(0) + K\Gamma v_0, \psi_j \rangle = 0, j = \overline{1, n}.$$

При этом оператор

$$\Phi_\omega(\omega_0, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \langle K\Gamma \cdot, \Psi \rangle, & \Xi \end{pmatrix},$$

где  $\Xi = [\langle K\phi_i, \psi_j \rangle]_{i,j=\overline{1,n}}$  — невырожденная матрица, имеет ограниченный обратный. Следовательно, на основании доказательства теоремы 3.4.2 существует элемент  $\omega(t) \rightarrow (v_0, c^*)$  при  $t \rightarrow 0$  и определяется единственным образом методом последовательных приближений. Из изложенного вытекает

**Теорема 3.4.3.** Пусть выполнено условие (D),  $b(0) \notin R(B)$ . Тогда уравнение (3.4.15) имеет в классе  $(D'; E_1)$  решение

$$u = a^*\phi\delta(t) + \Gamma(b(0) + Ka^*\phi) + c^*\phi + r(t),$$

где  $a^*, c^*$  — определенные векторы из  $R^n$ , функция  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и определяется единственным образом.

**Замечание 3.4.3.** В теореме 3.4.3 предполагалось, что  $\det[\langle K\phi_i, \psi_j \rangle]_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$ . Это ограничение не существенно. Использование фундаментальных оператор-функций сингулярных операторов [122] позволяет исследовать обобщенные решения и при условии, что оператор  $B$  имеет полный  $K$ -жорданов набор, когда приведенное ограничение может не выполняться.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \right) + R \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t, x \right) = 0, \quad (3.4.25)$$

являющееся модельным в ряде приложений, в том числе при моделировании нестационарных процессов в полупроводниках (см. монографии [61], [310]).

Отметим, что такие нелинейные уравнения псевдопараболического типа лежат в основе моделей, описывающих распространение потока жидкости в пористой среде, в реологических моделях глинистых грунтов, в термодинамике, в моделировании распространения волн малой амплитуды.

Введем начально-краевые условия

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0, \quad (3.4.26)$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \right) \Big|_{t=0} = v_0(x). \quad (3.4.27)$$

Задача (3.4.25), (3.4.26), (3.4.27) преобразуется к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - v_0(x) + \int_0^t R \left( u(t, x), \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, t, x \right) dt = 0, \quad (3.4.28)$$

с граничными условиями (3.4.26). В этом уравнении согласно выше введенным обозначениям оператор  $B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1$  действует из  $\mathcal{C}_{[0, \pi]}^{(2)}$  в  $\mathcal{C}_{[0, \pi]}$  и является фредгольмовым оператором. При этом  $\dim N(B) = 1$ ,  $\phi = \psi = \sin x$ ,

$$\Gamma v = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{k=2}^\infty \frac{\sin kx \sin ks}{1 - k^2} v(s) ds.$$

Рассмотрим два случая.

### Случай 1.

Функция  $v_0(x)$  согласована с краевыми условиями (3.4.26), т.е.  $\int_0^\pi v_0(x) \sin x dx = 0$ . Тогда  $v_0 \in R(B)$  и можно применить теорему 3.4.2. Для этого введем согласно условию С теоремы 3.4.2 алгебраическое

уравнение

$$\int_0^{\pi} \sin x R \left( (\Gamma v_0)(x) + c \sin x, (\Gamma v_0)_{(x)}^{(1)} + c \cos x, \right. \\ \left. (\Gamma v_0)_{(x)}^{(2)} - c \sin x, 0, x \right) dx = 0, \quad (3.4.29)$$

предполагая, что функция  $R(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t, x)$  удовлетворяет условию Липшица по  $u, u_x, u_{xx}$  и дифференцируема по  $t$ . Тогда согласно теореме 3.4.2 каждому простому корню  $c^*$  уравнения (3.4.29) отвечает решение задачи (3.4.25), (3.4.26), (3.4.27) вида

$$u = (\Gamma v_0)(x) + c^* \sin x + r(t, x),$$

где функция  $r(t, x) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$  и определяется однозначно.

### Случай 2.

Пусть  $v_0 = 0$ . Если при этом существуют положительные рациональные числа  $\nu = \frac{r}{s}, \theta = \frac{r+m}{s}$  такие, что

$$R \left( t^\nu v, t^\nu \frac{\partial v}{\partial x}, t^\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, t, x \right) = t^\theta P \left( v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, x \right) + o(t^\theta)$$

и алгебраическое уравнение

$$\int_0^{\pi} P(c \sin x, c \cos x, -c \sin x, x) \sin x dx = 0$$

имеет простое решение  $c^* \neq 0$ , то задача (3.4.25), (3.4.26), (3.4.27) имеет решение

$$u = t^\nu c^* \sin x + o(t^\nu).$$

Случай, когда функция  $v_0(x)$  не согласована с краевыми условиями (3.4.26), требует особого рассмотрения. В этом случае, согласно теореме 3.4.3 при определенных условиях на функцию  $R$ , решение можно искать в классе обобщенных функций  $(D'; \mathcal{C}_{[0, \pi]}^{o(2)})$ .

Наконец, пусть для конкретности, как в уравнениях Осколкова-Бенжамина-Бона-Махони, моделирующих динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости типа Кельвина-Фойгта [61, с. 94]

$$R(u, u_x, u_{xx}, t, x) = \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Тогда алгебраическое уравнение (3.4.29) будет линейным вида

$$\left( -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \int_0^{\pi} \sin 2sv_0(s) ds \right) c + b = 0,$$

где  $b = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{d}{dx} (\Gamma v_0)^2 \sin x dx$ . Если при этом  $\int_0^{\pi} \sin 2sv_0(s) ds \neq 3\pi$ , то согласно теореме 3.4.2 существует решение

$$u = -b \left[ -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \int_0^{\pi} \sin 2sv_0(s) ds \right]^{-1} \sin x + \Gamma v_0 + r(t, x),$$

где  $r(t, x) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0$ .

### 3.5 Последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром в нерегулярном случае

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейное операторное уравнение (3.5.1) с фредгольмовым линейным оператором в главной части. Нелинейная часть такого уравнения зависит от функционалов  $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$ , определенных на открытом множестве линейного нормированного пространства  $\Lambda$ . Излагается метод последовательных асимптотических приближений решений, разветвляющихся при  $\lambda = 0$ . Метод применен для исследования нелинейной краевой задачи, описывающей колебания спутника в плоскости его эллиптической орбиты.

Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства,  $\Lambda$  — линейное нормированное пространство. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$Bu = F(u, \alpha(\lambda), \beta(\lambda)), \quad (3.5.1)$$

где

$$F(u, \alpha, \beta) = F_N(u, \alpha, \beta) + \mathcal{O}((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^{N+1}),$$

$$F_N(u, \alpha, \beta) = \sum_{i+k+j=1}^N F_{ikj}(u) \alpha^k \beta^j, \quad F_{100} = 0,$$

$F_{ikj}(u)$  —  $i$ -степенные отображения банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ . Замкнутый фредгольмов оператор  $B$  действует из  $X$  в  $Y$  и имеет плотную область определения в  $X$ . Предполагается, что  $\{\phi_i\}_1^n$  — базис в  $N(B)$ , а  $\{\psi_i\}_1^n$  — базис в подпространстве  $N(B^*)$ ,  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  — непрерывные функционалы параметра  $\lambda$  из открытого множества  $\Omega \subset \Lambda$ , где  $\Lambda$  — линейное нормированное пространство,  $0 \in \partial\Omega$ ,  $\alpha(0) = 0, \beta(0) = 0$ . Множество  $\Omega$  назовем секториальной окрестностью нуля.

Обратимся ко второй главе. В п. 2.1 мы строили решения различных порядков малости интегрального уравнения Гаммерштейна со скалярным параметром  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ .

Целью данного параграфа, продолжающего исследования, представленные в п. 2.1, является построение последовательных приближений непрерывных решений  $u(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$  уравнения (3.5.1) в секториальной окрестности  $\Omega$  точки  $\lambda = 0$ .

В основе излагаемого в этом параграфе метода лежит развитие результатов из п. 2.1, полученных с помощью аналитической теории ветвления решений операторных уравнений [20; 107; 120]. Метод изложен в п. 3.5, а в п. 3.5 применен для решения нелинейной краевой задачи, описывающей колебание спутника в плоскости его эллиптической орбиты.

### *Теорема существования и последовательные приближения*

Пусть выполнено следующее условие

(А) Существуют  $\nu = \frac{r}{s}, \theta = \frac{r+m}{s}$ , где  $r, m, s$  – натуральные числа, такие, что отображение  $F_N$  допускает представление

$$F_N(\alpha^\nu v, \alpha, 0) = \alpha^\theta \sum_{i\nu+k=\theta} F_{iko}(v) + r(v, \alpha), \quad (3.5.2)$$

$\|r(v, \alpha)\| = o(\alpha^\theta)$ ,  $\theta < N$ . В конкретных случаях для определения подходящих чисел  $r, s, m$  надо нанести на координатную плоскость точки  $(i, k)$ , отвечающие ненулевым членам  $F_{iko}$  в разложении отображения  $F_N(u, \alpha, 0)$  и построить соответствующую диаграмму Ньютона. Искомое  $\nu$  полагается равным  $tg\gamma$ , где  $\gamma$  – угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси абсцисс  $i$ . При этом  $\theta$  будет равно ординате точки пересечения продолжения этого отрезка с осью ординат  $k$ . Так как диаграмма Ньютона может иметь несколько отрезков, то выбор натуральных чисел  $r, s, m$  может оказаться неоднозначным.

Пусть в окрестности нуля выполнено следующее неравенство

(В)  $\|F(u, \alpha, \beta) - F(u, \alpha, 0)\| \leq L(\|u\|, |\alpha|, |\beta|)|\beta|$ , где

$$L(\|u\|, |\alpha|, |\beta|) = \mathcal{O}((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^l), \quad l \geq 0.$$

Пусть функционалы  $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$  в секториальной окрестности  $\Omega$  удовлетворяют оценке

(С)  $\beta(\lambda) = \bar{o}(\alpha^\theta(\lambda))$  при  $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$ .

**Замечание 3.5.1.** Если  $l \geq \max(\frac{r+m}{s}, \frac{r+m}{r})$ , то условие (C) можно заменить на менее ограничительное  $\beta = \bar{o}(\alpha^{\frac{\theta}{1+l}})$ .

Пусть кроме того выполнено следующее условие  
(D) Система алгебраических уравнений

$$L_j(c) \equiv \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F_{iko}(c\Phi), \Psi_j \right\rangle = 0,$$

где  $j = 1, \dots, n$ ,  $c\phi = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k$ , имеет простое решение  $c^*$ . Введем регуляризатор [120, с. 221].

$$\Gamma = (B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i)^{-1},$$

где  $\langle \phi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$ ,  $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$ . Для построения малых решений уравнения (3.5.1) будем использовать униформизацию

$$u = (\Gamma v(\lambda) + c(\lambda)\phi)\alpha(\lambda)^\nu, \quad (3.5.3)$$

где  $c(0) = c^*$ ,  $v(0) = 0$ . Неизвестная функция  $v(\lambda)$  удовлетворяет равенствам  $\langle v, \psi_i \rangle = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . С помощью замены (3.5.3) уравнение (3.5.1) приведем к виду

$$v = F((\Gamma v + c\phi)\alpha^\nu, \alpha, \beta)\alpha^{-\nu}, \quad (3.5.4)$$

дополнив его равенствами

$$\alpha^{-\theta} \langle F((\Gamma v + c\phi)\alpha^\nu, \alpha, \beta), \psi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.5.5)$$

Таким образом, задача построения ветвей (3.5.3) свелась к отысканию функций  $v(\lambda)$  и  $c(\lambda) = (c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))'$  из системы (3.5.4) – (3.5.5). Будем искать при  $\Omega \ni \lambda \rightarrow 0$  функцию  $v(\lambda) \rightarrow 0$  и  $c(\lambda) \rightarrow c^*$ . Систему (3.5.4) – (3.5.5) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(\omega, \lambda) = 0 \quad (3.5.6)$$

относительно элемента  $\omega = (v, c)$ . Введем банахово пространство  $E$  элементов  $\omega$  с нормой

$$\omega = \max_{\lambda \in \Omega_1} (\|v(\lambda)\|_Y + |c(\lambda)|_{\mathbb{R}^n}),$$

где  $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Lambda$ . Нелинейное отображение  $\Phi$ , зависящее от малого векторного параметра  $\lambda$ , действует из  $E$  в  $E$ . В силу выбора чисел  $r, s, m$  и выше указанного асимптотического согласования в области  $\Omega$  функционалов  $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$ , (см. условие (C)) оператор  $\Phi$  непрерывен при  $\lambda \in \Omega$

в окрестности точки  $\omega_0 = (0, c^*)$ . При этом  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0, \Omega \ni \lambda \rightarrow 0} \Phi(\omega, \lambda) = 0$ . Более того, оператор  $\Phi(\omega, \lambda)$  имеет непрерывную производную Фреше по  $\omega$  при  $\lambda \in \Omega$  в окрестности элемента  $\omega_0$ . При этом

$$\Phi_\omega(\omega_0, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{l} & \mathfrak{A} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{I}$  — тождественный оператор из  $Y$  в  $Y$ ,  $\mathbf{0}$  — нулевой оператор из  $\mathbb{R}^n$  в  $Y$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_n)'$ ,  $l_j(\cdot) = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^*\phi)\Gamma(\cdot), \psi_j \right\rangle$ ,  $j = 1, \dots, n$  — линейные функционалы, определенные на  $Y$ ,

$$\mathfrak{A} = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^*\phi)\phi_l, \psi_j \right\rangle \Big|_{l,j=\overline{1,n}}$$

— невырожденная матрица  $n \times n$ . Линейный ограниченный оператор  $\Phi_\omega(\omega_0, 0)$ , действующий из  $E$  в  $E$ , имеет ограниченный обратный

$$\Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathfrak{A}^{-1}\mathbf{l}(\cdot) & \mathfrak{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при  $\lambda \in \Omega$  уравнение (3.5.6) в окрестности точки  $\omega_0$  удовлетворяет условиям теоремы о неявном операторе (см. [120], стр. 411). Следовательно, существует область  $\Omega_1 \subset \Omega$ ,  $0 \in \partial\Omega_1$  такая, что искомое непрерывное решение  $\omega \rightarrow \omega_0$  при  $\Omega_1 \in \lambda \rightarrow 0$  можно найти последовательными приближениями

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0)\Phi(\omega_{n-1}, \lambda),$$

где  $\omega_0 = (0, c^*)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Из изложенного вытекает

**Теорема 3.5.1.** Пусть выполняются условия (A) – (D). Тогда существует открытая область  $\Omega_1 \subset \Omega$ ,  $0 \in \partial\Omega_1$ ,  $\overline{\Omega}_1 \subset \overline{\Omega}_1$ , такая, что при  $\lambda \in \overline{\Omega}_1$ ,  $\beta(\lambda) = o(\alpha(\lambda))$  уравнение (3.5.1) имеет непрерывное решение

$$u(\lambda) = \alpha(\lambda)^\nu(c^*\phi + r(\lambda)), \quad (3.5.7)$$

где  $c^*$  — простой корень системы (D), функция  $r(\lambda)$  определяется однозначно последовательными приближениями,  $\|r(\lambda)\| = o(1)$  при  $\Omega \in \lambda \rightarrow 0$ .

**Следствие 3.5.1.** Если выполнены условия теоремы 3.5.1, то при  $\lambda \in \Omega_1$  последовательность  $u_n = \hat{u}_n + c_n\phi\alpha^\nu$ , где функции  $\hat{u}_n$ ,  $c_n$  вычисляются из



линейных уравнений

$$\begin{aligned}\check{B}\hat{u}_n &= F(u_{n-1}, \alpha, \beta), \\ \mathfrak{A}(c_n - c_{n-1}) &= -l(\check{B}(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1})) - \alpha^{-\theta} \langle F(u_{n-1}, \alpha, \beta), \psi \rangle, \\ \hat{u}_0 &= 0, c_0 = c^*, u_0 = c^* \phi \alpha^\nu, n = 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

сходится к решению (3.5.7). Здесь  $\check{B} = B + \sum_1^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$  – обратимый оператор,  $\mathfrak{A}$  – невырожденная матрица,

$$l(\check{B}(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1})) = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^* \phi)(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}), \psi \right\rangle,$$

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)'$$

*Модель колебания спутника в плоскости его эллиптической орбиты*

Рассмотрим два примера, демонстрирующие эффективность предложенного метода.

i) Рассмотрим краевую задачу

$$(1 + e \cos x) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2e \sin x \frac{du}{dx} + \alpha \sin u - 4e \sin x = 0, \quad (3.5.8)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0, \quad (3.5.9)$$

описывающую колебания спутника в плоскости его эллиптической орбиты (см. [20, п. 36], [245]). Здесь  $e$  – эксцентриситет, параметр  $\alpha$  зависит от главных центральных моментов инерции. В [20] построено уравнение разветвления этой задачи и показано, что задача (3.5.8)–(3.5.9) может иметь три вещественных решения. Теорема 3.5.1 позволяет найти асимптотические соотношения между параметрами  $e$  и  $\alpha$ , при выполнении которых эти решения строятся последовательными приближениями. Полагая  $\alpha = \alpha_0 + \lambda$  перепишем задачу в виде операторного уравнения (3.5.1). В нашем случае линейный оператор  $B = \frac{d^2}{dx^2} + \alpha_0$  действует из пространства  $\mathcal{C}_{[0,\pi]}^{(2)}$  в  $\mathcal{C}_{[0,\pi]}$  и является фредгольмовым, причем при  $\alpha_0 = n^2$ ,  $\dim N(B) = 1$ ,  $\phi(x) = \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ . Нелинейная часть уравнения (3.5.1) имеет вид

$$F(u, \lambda, e) = -e \frac{d^2 u}{dx^2} + 2e \frac{du}{dx} - \lambda \sin u + u - \sin u + 4e \sin x.$$

Если  $e = 0$ , то при любых  $\alpha$  существует тривиальное решение  $u_0 = 0$ , причем правее критических точек (точек бифуркации)  $\alpha_0 = n^2$  от тривиального решения ответвляются два нетривиальных решения

$$u_{1,2} = \pm 2\sqrt{2\lambda} \sin x + o(\sqrt{\lambda}).$$

Если  $e$  мало, то в малой окрестности некритических точек  $\alpha$  существует одно малое решение.

Рассмотрим теперь более сложный случай построения решений при малом  $e > 0$  в окрестностях критических точек  $\alpha_0 = n^2$ . Пусть для определенности  $\alpha_0 = 1$ . Тогда кубическое уравнение

$$\xi^3 - 2\pi^2\lambda\xi + 4\pi^3e = 0 \quad (3.5.10)$$

является соответствующим приближенным уравнением разветвления (см. [20], с.508 ). Если  $D = 27e^2 - 2\lambda^3 < 0$ , то на основании формулы Кардано это уравнение имеет три вещественных решения. Используя теорему 3.5.1 докажем существование соответствующих вещественных решений краевой задачи и возможность их построения последовательными приближениями. Здесь диаграмма Ньютона оператора  $F(u, \lambda, 0)$  состоит из отрезка, проходящего через точки  $(3, 0), (1, 1)$ . Поэтому в нашем случае  $r = 1, s = 2, m = 2$ , т.е. надо согласно теореме 3.5.1 использовать унификацию

$$u = (\Gamma v + c\sqrt{2/\pi} \sin x)\lambda^{1/2} \quad (3.5.11)$$

с граничными условиями (3.5.9) при условии асимптотического согласования  $e = o(\lambda^{3/2})$  параметров задачи. Очевидно, при этом  $D < 0$ , т.е. приближенное уравнение разветвления имеет три вещественных решения. Оператор

$$\check{B} = \frac{d^2}{dx^2} + 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin s[\cdot] ds$$

с граничными условиями (3.5.9) имеет ограниченный обратный  $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,\pi]} \rightarrow \mathcal{C}_{[0,\pi]}^{(2)})$ . Методом Лагранжа вариации произвольных постоянных, с учетом вырожденности ядра в интегральной части оператора  $\check{B}$ , найдем обратный оператор:

$$\Gamma v = \sin x * (I - P)v + pv - d \sin x,$$

где  $P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin s[\cdot] ds$  – проектор,

$$d = \frac{2}{\pi} (\sin x, \sin x * (I - P)v).$$

Согласно условию (D) теоремы 3.5.1 построим алгебраическое уравнение

$$L(c) \equiv -\frac{c^3}{4\pi} + c = 0$$

для определения начального приближения коэффициента  $c$  в (3.5.11). Оно имеет три простых корня  $\pm 2\sqrt{\pi}, 0$ . Поэтому на основании теоремы 3.5.1 краевая задача имеет при выполнении асимптотической оценки  $e = o(\lambda^{3/2})$  три вещественных решения

$$u_{1,2} = \pm 2\sqrt{2\lambda} \sin x + r_{1,2}(x, \lambda, \varepsilon),$$

$$u_3 = r_3(x, \lambda, \varepsilon),$$

где функции  $r_i$  имеют оценки  $r_i(\lambda) = o(\lambda^{1/2})$  при  $e = o(\lambda^{3/2})$ . Асимптотические приближения решений  $u_1, u_2, u_3$  можно уточнить, решая линейные уравнения согласно следствию 3.5.1. Если  $e \sim c\lambda^n$ , где  $n < 3/2$ , то приближенное уравнение разветвления (3.5.10) имеет одно вещественное решение, так как тогда очевидно  $D > 0$ . Соответствующее единственное малое вещественное решение краевой задачи в этом случае имеет вид

$$u = -2(4e)^{1/3} \sin x + r(x, \lambda, e), \|r(x, \lambda, e)\| = o(e^{1/3}),$$

где  $r(x, \lambda, e)$  строится согласно следствию 3.5.1 единственным образом последовательными приближениями. Отметим, что в примере i) ветвь  $u_3$  максимального порядка малости можно искать при нулевом начальном приближении другим способом, описанным в работе [95]. А именно, если  $e = o(\lambda^2)$ , то последовательные приближения  $u_n$ , где

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + (1 + \lambda + \alpha)u_n = -e \frac{d^2 u_{n-1}}{dx^2} + 2e \frac{du_{n-1}}{dx} + (1 + \lambda)(u_{n-1} - \sin u_{n-1}) + 4e \sin x,$$

$$u_n(0) = u_n(\pi) = 0, u_0 = 0, n = 1, 2, \dots,$$

$\alpha(\delta)$  – параметр регуляризации, согласованный с погрешностью вычислений  $\delta$  (см. [242, гл. 3]), сходятся к минимальной ветви  $u_3$  решения краевой задачи (3.5.8)–(3.5.9).

ii) Интегральное уравнение

$$u(t) - 3 \int_0^1 tsu(s) ds = (\lambda_1^2 + \lambda_2^4)u(t) - u^3(t) + (\lambda_1^5 + \lambda_2^8)t \quad (3.5.12)$$

удовлетворяет условиям теоремы 3.5.1. При этом  $\phi = \psi = \sqrt{3}t$ ,  $\alpha(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^4$ ,  $\beta(\lambda) = \lambda_1^5 + \lambda_2^8$ ,  $\Omega$  – проколота окружность нуля в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $\theta = \frac{3}{2}$ . Очевидно  $\beta(\lambda) = o((\lambda_1^2 + \lambda_2^4)^{3/2})$ , поэтому  $u = (v + ct)\alpha(\lambda)^{1/2}$ , где функции  $v(t), c(t)$  удовлетворяют системе

$$v(t) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^4)[v + ct - (v + ct)^3] + \frac{\lambda_1^5 + \lambda_2^8}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^4}}t, \quad (3.5.13)$$

$$c - 3 \int_0^1 (ct + v(t))^3 t dt + \frac{\lambda_1^5 + \lambda_2^6}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^4)^{3/2}} = 0. \quad (3.5.14)$$

Фиксируем начальное приближение  $c_0$  согласно условию теоремы 3.5.1 как один из корней уравнения  $c - \frac{3}{5}c^3 = 0$ . На основании теоремы о неявной функции (см. [120, с. 411]) система (3.5.13) – (3.5.14) имеет три решения  $(v_1, c_1) \rightarrow (0, \sqrt{\frac{5}{3}})$ ,  $(v_2, c_2) \rightarrow (0, -\sqrt{\frac{5}{3}})$ ,  $(v_3, c_3) \rightarrow (0, 0)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Эти решения можно найти последовательными приближениями. Следовательно, интегральное уравнение (3.5.12) имеет при  $\lambda \rightarrow 0$  три малых решения

$$u_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{3}(\lambda_1^2 + \lambda_2^4)t} + o((\lambda_1^2 + \lambda_2^4)^{1/2}), \quad u_3 = o((\lambda_1^2 + \lambda_2^4)^{1/2}).$$

## Часть II

# Интегральные модели и преобразования в моделировании нелинейной динамики и в обработке сигналов

Вторая часть состоит из гл. 4 и гл. 5. В гл. 4 представлены методы идентификации моделей Вольтерра нелинейных нестационарных динамических систем. Используются алгоритмы обучения по прецедентам (реакций системы на тестовые возмущения), а также теория и численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра I рода. Метод апробирован на синтетических данных эталонной математической модели нелинейной динамики процесса теплообмена. В гл. 5, синтезируя подходы непрерывной и дискретной математики, разработана методология прогнозирования временных рядов и оценки рисков появления неустойчивых межсистемных колебаний в электроэнергетических системах на основе дискретных вероятностных моделей. Новизна методологии прогнозирования заключается в предобработке данных интегральным преобразованием Гильберта-Хуанга для получения значимых признаков. Полученные признаки используются для обучения нейросетевых моделей. Отметим, что нейросетевые модели, представляющие собой взвешенные сумматоры, являются по своей сути дискретными аналогами интегральных моделей Вольтерра, рассмотренных в гл. 4. В гл. 5 предложены алгоритмы обработки многомерных сигналов, а именно изображений и видео-последовательностей. Разработан режекторный фильтр, оперирующий со спектром Фурье и подавляющий нестационарный мультипликативный квази-периодический шум в видео-последовательностях. Наконец, в п. 5.3 предложена система автоматической классификации дефектов на производстве.

# Идентификация полиномиальных моделей Вольтерра

В последнее время получило интенсивное развитие теория и приложения математического моделирования нелинейных динамических систем в вопросах идентификации и обработки сигналов различной природы. При этом большую роль стали играть не только методы анализа, интегральных и дифференциальных уравнений, но и вероятностные подходы, методы машинного обучения, различные эвристические методы, методы комбинаторной оптимизации. Сочетания таких методов позволяют на практике глубже понять описываемый динамический процесс, идентифицировав структуру соответствующей математической модели, оценить риски потери устойчивости и в ряде случаев построить прогноз его развития в будущем. Одним из таких подходов, рассматриваемых нами во второй части книги, является моделирование нелинейных динамических систем типа вход-выход (выход непрерывно зависит от входа) интегро-степенными рядами Вольтерра. Методологии этого направления, использующего интегральные динамические модели, посвящена данная глава.

Теоретическое обоснование применимости ряда Вольтерра к задаче приближения нелинейных непрерывных операторов дано в работах И. Бэслера и И. К. Даугавета [14], являющихся продолжением классических работ М. Фреше [186].

Пусть  $x(t)$  – скалярный входной сигнал некоторой динамической системы,  $t \in [a, b]$  – время, а  $F[x(t)] = y(t)$  – соответственно, отклик этой системы. Тогда  $F[x(t)]$  есть оператор вида

$$y(t) = F[x(t)] = \int_a^t K_1(t, s)x(s)ds + \\ + \int_a^t \int_a^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^t \int_a^t \int_a^t K_3(t, s_1, s_2, s_3) x(s_1) x(s_2) x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots \equiv \quad (4.0.1) \\
& \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^t \dots \int_a^t K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k, \quad t \in [a, b].
\end{aligned}$$

Переменный верхний предел в (4.0.1) отражает свойство физической реализуемости системы: выходной сигнал в момент времени  $t$  зависит от возмущений системы лишь в предыдущие моменты времени  $s \leq t$ , а  $n$ -мерные ядра Вольтерра  $K_n$  играют роль переходных характеристик динамической системы.

Заметим, что такой оператор  $F$ , стоящий в правой части уравнения (4.0.1), можно рассматривать и как специальный случай интегро-степенного оператора Ляпунова – Шмидта, использованного А. М. Ляпуновым и позднее Л. Лихтенштейном (L. Lichtenstein) (см. [238]) при исследовании классических задач механики. Методы моделирования нелинейных систем, основанные на использовании рядов Вольтерра, можно встретить в самых различных областях естествознания, см., например, работы [25; 40; 43; 225]. Проблема идентификации ядер Вольтерра (переходных характеристик моделируемой системы) является основной при использовании этой методики.

В работах А.С. Апарцина [143] предложен метод идентификации, основанный на задании тестовых сигналов  $x(t)$  в виде некоторых комбинаций функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом, позволяющих свести проблему определения ядер Вольтерра к решению специальных линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода. Эффективность такого подхода обусловлена наличием явных формул обращений введённых уравнений. Дальнейшее развитие данный метод идентификации получил в работах [76; 113], см. также монографию [5] и библиографию в обзоре [146].

Данный раздел содержит обзор методов математического моделирования нелинейных динамических систем во временной и в частотной областях. Рассматриваются теоретические аспекты идентификации многомерных симметричных, несимметричных и частично-симметричных ядер Вольтерра для моделирования нестационарных динамических систем на базе кусочно-постоянных тестовых сигналов. Обсуждается проблема теоретического обоснования применимости ряда Вольтерра к задаче аппроксимации непрерывных операторов произвольной структуры, заданных на

компакте. Доказывается теорема об однородном операторе, обосновывающая возможность разделения отклика динамической системы на составляющие (слагаемые ряда Вольтерра).

Проблема идентификации симметричных ядер Вольтерра, соответствующих скалярному входному сигналу, решается методом сведения к многомерным интегральным уравнениям Вольтерра I рода, для которых получены явные формулы обращения и доказаны теоремы существования и единственности решений ( $n = 1, 2, 3$ ).

В случае, когда входной сигнал  $\bar{x}(t)$  является вектор-функцией, ядра, отражающие чувствительность системы к совместному изменению входных возмущений, уже не обязаны быть симметричными. Этот случай наиболее важен для приложений. Задача идентификации несимметричных и частично-симметричных многомерных ядер также решена путём сведения к линейным интегральным уравнениям Вольтерра I рода, для которых доказаны теоремы существования и единственности решений.

Далее в гл. 4 рассматривается задача численного решения многомерных интегральных уравнений, к которым сводится задача идентификации переходных характеристик динамических систем. Стандартную технику доказательства сходимости разностных схем демонстрируем на разностной схеме второго порядка и показываем, что соответствующие разностные схемы являются регуляризирующими алгоритмами в смысле А. Н. Тихонова, если шаг сетки согласовать с погрешностью вычислений. В заключении дано описание и приложение алгоритмов идентификации ядер Вольтерра применительно к задаче моделирования динамики теплофизических процессов на эталонной модели теплообменника [115] с независимым подводом тепла, представленной в виде объекта с сосредоточенными параметрами, который описывает алгебро-дифференциальная система. Кубичный и квадратичный отрезок ряда Вольтерра использовались для моделирования динамических процессов для произвольного возмущения расхода жидкости, причём математическая модель динамики теплообменника использовалась в качестве эталона для оценки точности модели. Альтернативным способом является использование метода интегрирования произведения, позволяющего идентифицировать интегралы от ядер, так как именно они используются в итоговых интегральных моделях Вольтерра. Подробную библиографию в этой области читатель может найти в обзорной статье [146], см. также работы [9–11; 145], [292; 293].



Приведем используемые далее известные определения и сведения о рядах Вольтерра.

Выходной сигнал  $y(t)$  в (4.0.1) в момент времени  $t$  зависит от возмущений системы лишь в предыдущие моменты времени  $s \leq t$ , но не в последующие. Функция  $K_n$  называется  $n$ -мерным ядром Вольтерра [153]. Ряд (4.0.1) называется *причинным* рядом Вольтерра. Причинный ряд Вольтерра определяет оператор, ставящий в соответствие входной функции  $x(t)$  функцию-отклик  $y(t) = F[x(t)]$ .

Рядом Вольтерра с *конечной памятью*  $\Delta$  называется разложение вида

$$\begin{aligned}
 P(x; t) = & \int_{t-\Delta}^t K_1(t, s)x(s) ds + \\
 & + \int_{t-\Delta}^t \int_{t-\Delta}^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2) ds_1 ds_2 + \\
 & + \int_{t-\Delta}^t \int_{t-\Delta}^t \int_{t-\Delta}^t K_3(t, s_1, s_2, s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots . \quad (4.0.2)
 \end{aligned}$$

Если же свойства динамической системы не меняются за исследуемый промежуток времени, то ядра Вольтерра зависят лишь от разности аргументов  $t - s_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , а слагаемые ряда (4.0.2) суть интегралы свертки. Тогда соотношение (4.0.2) представимо в форме «стационарного» ряда Вольтерра с памятью  $\Delta$

$$\begin{aligned}
 P(x; t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-\Delta}^t \dots \int_{t-\Delta}^t K_n(t - s_1, \dots, t - s_n) \prod_{k=1}^n x(s_k) ds_k = \\
 & = \int_{t-\Delta}^t K_1(t - s_1)x(s_1) ds_1 + \\
 & + \int_{t-\Delta}^t \int_{t-\Delta}^t K_2(t - s_1, t - s_2)x(s_1)x(s_2) ds_1 ds_2 + \\
 & + \int_{t-\Delta}^t \int_{t-\Delta}^t \int_{t-\Delta}^t K_3(t - s_1, t - s_2, t - s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3) ds_1 ds_2 ds_3 + \dots = \quad (4.0.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\Delta} K_1(s_1)x(t-s_1) ds_1 + \\
&+ \int_0^{\Delta} \int_0^{\Delta} K_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2) ds_1 ds_2 + \dots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\Delta} \dots \int_0^{\Delta} K_n(s_1, \dots, s_n) \prod_{k=1}^n x(t-s_k) ds_k.
\end{aligned}$$

Произвольный непрерывный оператор, заданный на компакте в некотором функциональном пространстве, может быть сколь угодно точно приближен рядом Вольтерра.

В работе [14] рассмотрены три класса операторов - причинные, с конечной памятью и стационарные с конечной памятью.

Пусть  $F$  – оператор, который каждой функции  $x(t)$ , заданной на  $[a, b]$  и принадлежащей некоторому множеству функций  $D(F)$  (область задания оператора  $F$ ), ставит в соответствие функцию  $F(x; t)$ , заданную на  $[a, b]$ .

Оператор  $F$  называется *причинным* [14], если для любого  $t_0 \in [a, b]$  сужение образа  $F(x)$  на  $[a, t_0]$  зависит лишь от значений функции  $x(t)$  на этом отрезке.

Приведём теорему [14, с. 63], которая гарантирует возможность аппроксимации рядом Вольтерра произвольного непрерывного, заданного на компакте оператора.

**Теорема 4.0.2.** Пусть  $K$  – компакт в пространстве  $X = L_p(a, b)$  или  $X = C_{[a, b]}$ . Пусть  $F : K \rightarrow L_q(a, b)$  – непрерывный оператор. Тогда по любому  $\varepsilon > 0$  найдётся такой причинный полином Вольтерра  $P$ , что для всех  $x \in K$  выполняется неравенство  $\|F(x) - P(x)\| < \varepsilon$ .

Эта теорема является ключевым результатом в работе [14] и теоретическим основанием для использования рядов Вольтерра в моделировании нелинейных динамических систем.

Результатам, изложенным в [14], предшествовала теорема Фреше [186].

**Теорема 4.0.3.** Любой непрерывный в классе непрерывных функций функционал  $\mathcal{G}[y(t)]$  может быть представлен в виде

$$\mathcal{G}[y(t)]_{t \in [a, b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{r_n}[y(t)],$$

т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[y(t)]_{t \in [a,b]} = & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ k_{n,0} + \int_a^b k_{n,1}(\xi) y(\xi) d\xi + \right. \\ & + \int_a^b \int_a^b k_{n,2}(\xi_1, \xi_2) y(\xi_1) y(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \dots \\ & \left. + \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b k_{n,r_n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r_n}) y(\xi_1), \dots, y(\xi_{r_n}) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{r_n} \right], \end{aligned}$$

где функции  $k_{n,r_n}(\xi_1, \dots, \xi_{r_n})$  суть непрерывные функции, определенные для функционала  $\mathcal{G}$  вне зависимости от функции  $y(t)$ .

Теорема 4.0.3 гарантирует сходимость ряда Вольтерра в области непрерывности соответствующего функционала и обобщает классическую теорему Вейерштрасса (о приближении непрерывных функций полиномами) на случай бесконечного числа переменных. В [317] показано, что разложение (4.0.3) равномерно сходится на любом компактном множестве непрерывных функций, т.е. для  $\forall y \in K$ ,  $K$  — компактное множество непрерывных функций, выполняется неравенство  $|\mathcal{G}[y(t)] - \mathcal{G}_{r_n}[y(t)]| < \varepsilon$  при  $r_n \geq N(\varepsilon)$ . Функционалы, представимые в виде ряда Вольтерра

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[y(t)]_{t \in [a,b]} = & k_{n,0} + \int_a^b k_{n,1}(\xi) y(\xi) d\xi + \\ & + \int_a^b \int_a^b k_{n,2}(\xi_1, \xi_2) y(\xi_1) y(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \dots \quad (4.0.4) \\ & + \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b k_{n,r_n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r_n}) y(\xi_1) \dots y(\xi_{r_n}) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{r_n} + \dots, \end{aligned}$$

являются аналитическими функционалами. Аналогично, операторы, которые представляются в виде причинного ряда Вольтерра (4.0.1), являются аналитическими операторами.

Причинный ряд Вольтерра (4.0.1) позволяет описывать нестационарные динамические системы, так как ядра Вольтерра изменяются за рассматриваемый промежуток времени.

Стационарный ряд Вольтерра (4.0.3) описывает стационарные динамические системы (ядра Вольтерра не изменяются за рассматриваемый промежуток времени) и является частным случаем причинного ряда (4.0.1).

#### 4.1 Моделирование нелинейных динамических процессов в частотной и временной областях

Разработка методов и инструментов математического моделирования линейных и нелинейных динамических систем является одним из наиболее бурно развивающихся направлений прикладной математики. Немалая часть таких исследований лежит в междисциплинарных областях знаний. Поэтому целесообразно дать аналитический обзор результатов в этой области, связанных с интегро-функциональными рядами Вольтерра.

Математическую модель, не учитывающую конкретную физическую природу динамического процесса типа вход-выход, принято называть *черным ящиком* (рис.4.1). Черный ящик, соответствующий конкретному ди-

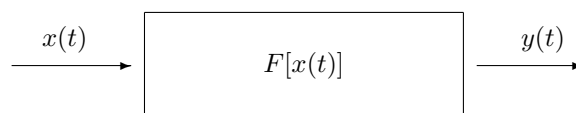


Рис. 4.1: Система типа «черный ящик»

намическому процессу, определяется набором переходных характеристик. Под идентификацией динамической системы понимается процесс нахождения переходных характеристик с помощью алгоритмов подбора и обработки массивов входных – выходных сигналов. Связь выхода  $y(t)$  и входа  $x(t)$  может носить как линейный, так и нелинейный характер. Линейные системы проще для понимания и для их анализа часто достаточно таких хорошо известных классических методов, как матричная алгебра и преобразование Лапласа. Однако хорошо известно, что в природе не существует абсолютно линейных процессов. Одним из распространенных способов «избавиться» от нелинейности являются методы линеаризации, позволяющие свести решение нелинейных задач к последовательному решению линейных задач. Например, в статье [196] рассматривается линеаризация с обратной связью для управления нелинейными системами посредством искусственных нейронных сетей.

Линеаризация не является панацеей при анализе нелинейных систем. Многие процессы являются существенно нелинейными по своей физиче-

ской природе. Так, нелинейным электрическим цепям и методам их анализа посвящена книга [40]. Проблеме бифуркации и хаоса в существенно нелинейных задачах электроэнергетики посвящены многие труды (см., например, обзор [233]). Проблемы, возникающие при синтезе нелинейных систем управления, рассмотрены в [119]. Моделирование нелинейных систем типа вход-выход с гистерезисными нелинейностями изучалось многими авторами (см. монографию [59]).

Линейные, причинные динамические системы с памятью могут описываться представлением типа свертки [282]

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)x(t - \xi)d\xi, \quad (4.1.1)$$

где  $x(t)$  – вход,  $y(t)$  – выход. Нелинейные системы без памяти описываются рядом Тейлора

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [x(t)]^n,$$

где по-прежнему  $x(t)$  – вход,  $y(t)$  – выход, а  $a_n$  – коэффициенты ряда Тейлора.

В 1930 году итальянский математик Вито Вольтерра, комбинируя эти два представления, в монографии [317] вводил понятие интегростепенного ряда вида

$$\begin{aligned} F[x(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(t, s_1, \dots, s_n) \prod_{r=1}^n x(s_r) ds_r = \\ &= \frac{1}{1!} \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(t, s_1)x(s_1)ds_1 + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_3(t, s_1, s_2, s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$t \in [a, b]$$

и доказывал, что разложение (4.1.2) «обобщает обычную формулу Тейлора для функций  $n$  переменных», причём в (4.1.2) функции  $K_m(t, s_1, \dots, s_m)$  непрерывны и не зависят от  $x(t)$ .

Как уже было отмечено выше, фундаментальным результатом оказалось то, что ряд Вольтерра (4.0.1) описывает нелинейные системы с памятью. В

(4.0.1)  $x(t)$  — вход,  $y(t)$  — выход, а функции  $K_m(s_1, \dots, s_m)$  — ядра Вольтерра [153] или переходные функции (характеристики). Для различных  $n$  ряд (4.1.2) характеризует различные порядки нелинейности. Сходимость ряда Вольтерра гарантируется теоремой Фреше [186]. Некоторые оценки сходимости можно встретить, например, в [160].

Таким образом, основная задача состоит именно в восстановлении этих переходных характеристик на основании откликов системы на специально подобранные входные сигналы.

Отметим, что задача идентификации динамических систем на основе рядов Вольтерра, является обратной задачей.

В работах [132; 170; 171] отрезок ряда Вольтерра рассматривается как уравнение Вольтерра I рода относительно входного вектора  $x(t)$  в предположении, что ядра уже восстановлены и требуется найти входной сигнал, обеспечивающий желаемый отклик. Обобщение такого подхода на произвольные (не обязательно полиномиальные) модели рассмотрено нами в п. 2.2.

Вскоре после выхода книги Вольтерра появляются работы Норберта Винера [27; 320], в которых применен ряд Вольтерра для анализа нелинейных электронных схем (спектра FM систем) посредством гауссова белого шума.

Разложение Винера [27] имеет следующий вид:

$$y(t) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \dots \sum_{k=0}^{\infty} c_{a,b,\dots,k} H_a(A_0) H_b(A_1) \dots H_k(A_n),$$

где

$$c_{a,b,\dots,k} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} M \left\{ y(t) H_a(A_0) H_b(A_1) \dots H_k(A_n) \cdot e^{-\frac{1}{2}(A_0^2 + A_1^2 + \dots + A_n^2)} \right\},$$

$A_0, A_1, \dots, A_n$  — коэффициенты разложения входного сигнала  $x(t)$  (белого шума) в ряд Лаггера. Алгоритм вычисления ядер Винера (и их оценка) для анализа нелинейных систем в частотной области рассмотрен М.А. Щербаковым в [127; 290]. Позднее исследования Винера были продолжены в работах Бриллианта [159], Сэндберга [283; 284], М.А. Щербакова [127], Шуи [167] и в работах других исследователей.

В монографиях [52; 70] группой литовских математиков были рассмотрены методы построения моделей Гаммерштейна, Винера и Винера–Гаммерштейна.

В моделях Гаммерштейна взаимосвязь между входным  $x(t)$  и выходным  $y(t)$  сигналами системы описывается оператором, являющимся частным

случае оператора Урысона и имеющим следующий вид

$$y(t) = \int_0^{+\infty} K(s)f[x(t-s)] ds,$$

где  $f(\cdot)$  – нелинейная функция.

Модель Винера–Гаммерштейна имеет вид

$$y(t) = \int_0^{+\infty} K_2(s)f[v(t-s)] ds,$$

$$v(t) = \int_0^{+\infty} K_1(s)x(t-s) ds.$$

Методика [189] построения модели нелинейного объекта непосредственно связана с разложением в ряд Вольтерра (4.1.2). Отклик системы в этом случае ищется в виде

$$y(t) = \sum_{n=0}^N f_n r_n + \sum_{n_1=0}^N \sum_{n_2=0}^N f_{n_1} f_{n_2} r_{n_1 n_2} + \dots,$$

где  $f_n$  – переходные функции в дискретные моменты времени,  $r_n$  – весовые коэффициенты, зависящие от  $x(t)$  и подбираемые из условия минимума среднеквадратичного отклонения. Более подробно с методами моделирования нелинейных систем функциональными рядами можно ознакомиться по работам [74; 78; 79; 129].

В настоящее время уже невозможно представить анализ электронных систем [167], систем телекоммуникаций [189], СВЧ-схем [243] и др.; фильтрацию и распознавание образов [206] без методов, основанных на использовании рядов Вольтерра (см., например, [262; 284; 289; 290]). В новых работах С. Diouf и др. [268] и в диссертации А. S. Soni [309] используется распространенный в последнее время способ аппроксимации ядер Вольтерра ортогональными функциями Лагерра. Другим методом снижения размерности моделей Вольтерра нелинейных динамических систем является факторный анализ [184].

Сейчас такие методы моделирования нелинейных систем можно встретить в работах по гидромеханике [220], теплофизике [31]; при описании адаптивных систем автоматического управления и фильтрации [2; 3; 39; 289]; по развивающимся (биологическим, экологическим и т.д.)

системам [133; 201–203]; по цифровой (нелинейной) фильтрации сигналов [128] и изображений [168]; по анализу и управлению химическими процессами [176; 177; 212; 274]; проблемам искусственного интеллекта и искусственным нейронным сетям (см. п. 5.1 в этой части); стохастических систем [49]; физиологических систем [68].

Ряд работ посвящён применению полинома Вольтерра для анализа искажений в радиочастотных схемах (фильтрах) типа вход-выход. Исследования и обзор литературы на эту тему приведены в монографии Т. Ларзена [235] и в диссертации Дж. А. Черри [164]. Теория и приложения методов цифровой фильтрации на основе полиномиальных приближений изложены в [129].

Для радиочастотных схем также используются подобные методы анализа, так как применение стандартных средств схемотехнического моделирования [230] часто не позволяет достигнуть желаемого результата в связи с резко возросшей вычислительной сложностью.

К таким задачам высокой сложности можно отнести необходимую для радиочастотных схем задачу определения установившихся периодических режимов в нелинейных цепях, задачу моделирования схем с сильно различающимися частотами входных сигналов. В этих задачах требуется моделирование многопериодных нелинейных колебаний на отрезке интегрирования. Практические задачи расчета даже относительно простых цепей приводят в этом случае к значительным объемам вычислений.

Таким образом, очевидна необходимость разработки специализированных средств моделирования нелинейных схем, обеспечивающих существенное ускорение в сравнении со стандартными методами моделирования [230]. Важными математическими аппаратами при этом являются многомерные интегральные (а также дискретные) преобразования.

Подобно тому, как (4.1.2) является  $n$ -мерным аналогом (4.1.1), представления

$$F_n(f_1, \dots, f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} ds_n K_n(s_1, \dots, s_n) e^{-jw_1 s_1} \cdots e^{-jw_n s_n},$$

$$L_n(f_1, \dots, f_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} ds_n K_n(s_1, \dots, s_n) e^{-p_1 s_1} \cdots e^{-p_n s_n},$$

где  $w_i = 2\pi f_i$ ,  $p_i = jw_i$ , являются обобщением преобразований Фурье и Лапласа на многомерный случай. Такое обобщение дало возможность вы-



полнять операции над ядрами в частотной области. В [139] предложена дискретная форма ряда Вольтерра и введено дискретное преобразование Лапласа для ядер. В [74] применение интегрального ряда Вольтерра комбинируется с использованием преобразования Лапласа или Фурье. Многомерные аналоги преобразований Фурье и Лапласа оказались очень полезны при анализе проблем радиофизики в частотной области [153].

Под классической моделью [153] для представления систем скалярного типа вход-выход в частотной области понимается

$$Y(f) = \frac{1}{1!}K_1(f)X(f) + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 K_2(f_1, f - f_1)X(f_1)X(f - f_1) + \\ + \frac{1}{3!} \int_{-\infty}^{+\infty} df_1 \int_{-\infty}^{+\infty} df_2 K_3(f_1, f_2, f - f_1 - f_2)X(f_1)X(f_2)X(f - f_1 - f_2) + \dots$$

Как уже было отмечено, основная задача моделирования (как во временной, так и в частотной области) состоит в определении ядер  $K_i$ .

Рассмотрим несколько таких способов. Метод гармонического входа используется в частотной области. В этом случае в качестве входного сигнала подаётся

$$x(t) = e^{jw_1 t} + \dots + e^{jw_n t},$$

где  $w_i = 2\pi f_i, i = 1, \dots, n$ . В [42; 43] ядро аппроксимируется формулой

$$K_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \dots \sum_{k=0}^N a_{nm\dots k} \varphi_n(s_1) \varphi_m(s_2) \dots \varphi_k(s_n),$$

в предположении, что  $K_n(s_1, \dots, s_n) \in L_2$ , а  $\varphi_j$  – ортогональны.

В [285] получены алгоритмы для статистического определения коэффициентов  $a_{nm\dots k}$  из условия минимума среднеквадратичной ошибки. В [43] рассматривается вопрос о выборе ортогональной системы функций  $\{\varphi\}$ .

В настоящее время метод гармонического анализа является широко распространенным средством моделирования нелинейных радиосхем. В ряде приложений метод обеспечивает относительно быстрый расчет установившихся режимов как для одночастотных, так и для многочастотных входных воздействий [307].

Метод получил широкое распространение и эффективен для схем, работающих в относительно слабом нелинейном режиме. Однако с ростом

нелинейности элементов размерность решаемых задач растет очень быстро, что ограничивает возможность применения метода на практике.

Другие методы идентификации ядер Вольтерра в частотной области и их приложения рассмотрены, например, в работах [156; 167; 282].

С. А. Маас [243] разработал алгоритмы, основанные на использовании рядов Вольтерра для САПР высокочастотных и сверхвысокочастотных устройств. Маас отмечает, что «... применение рядов Вольтерра является самым быстрым методом анализа искажений в приближенно-линейных схемах, позволяет увеличить скорость анализа в 10-100 раз по сравнению с методом гармонического анализа [96]. Уровень составляющих при этом может быть определён намного точнее. Анализ на основе рядов Вольтерра легко интегрируется с методами линейного анализа, что позволяет оптимизировать коэффициенты шума и многие линейные характеристики, что необходимо при разработке телекоммуникационных систем».

Все рассмотренные выше методы предполагают, что описываемая система имеет скалярную функцию входа и скалярную функцию выхода. Ранее Маас (см., например, работу [243]), Чуа и Энг [166] и др. рассматривали методы идентификации ядер Вольтерра систем с одним входом, сочетая частотные и временные области. Лишь некоторые авторы рассматривают обобщённые ряды Вольтерра, позволяющие описывать системы с векторным входом. Т. Ларзен [224; 225; 235] адаптировал и применил ряд Вольтерра для анализа нелинейных систем с векторными входными возмущениями и скалярными откликами в частотной области.

Согласно Ларзену, отклик  $x(f)$  (частоты  $f$ ) нелинейной системы с векторным входом  $\{x_1(f), \dots, x_N(f)\}$  может быть представлен как

$$\begin{aligned}
 v(f) = & \sum_{m_1}^{\infty} \cdots \sum_{m_N}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{1,\infty}(\|m\|) \cdot \\
 & \cdot K_{m_1, \dots, m_N}(f_{1,1}, \dots, f_{1,m_1}; \dots; f_{N,1}, \dots, f_{N,m_N}) \cdot \\
 & \cdot x_1(f_{1,1}) \cdots x_1(f_{1,m_1}) \cdots x_N(f_{N,1}) \cdots x_N(f_{N,m_N}) \cdot \\
 & \cdot \delta(f - f_{1,1} - \dots - f_{1,m_1} - \dots - f_{N,1} - \dots - f_{N,m_N}) \cdot \\
 & \cdot df_{1,1} \cdots df_{1,m_1} \cdots df_{N,1} \cdots df_{N,m_N},
 \end{aligned}$$

где

$$m = [m_1, \dots, m_N]^T \in \mathbb{Z}_{0+}^{N \times 1},$$

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma \in \{\alpha, \alpha + 1, \dots, \beta - 1, \beta\} \\ 0 & \gamma \notin \{\alpha, \alpha + 1, \dots, \beta - 1, \beta\} \end{cases},$$

$$\|m\| = m_1 + \dots + m_K.$$

Здесь  $K_{m_1, \dots, m_N}$  – по-прежнему ядра Вольтерра,  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака.

Для идентификации ядер в частотной области Ларзен предлагает подавать на вход системы следующие семейства возмущений

$$x_k(f) = \sum_{i_k=1}^{I_k} e^{(j\phi_{k,i_k})} \delta(f - \psi_{k,i_k}).$$

Алгоритм идентификации, предложенный Ларзенем, реализован в виде пакета для анализа нелинейных электронных сетей (см. документацию программного продукта *HOVSA (High Order Volterra Series Analysis)* [224]).

В ряде случаев использование тестовых сигналов в виде комбинаций функции Дирака во временной области бывает нецелесообразно или невозможно, см., например, монографию Льюнга [64]: «... Эта простая идея и составляет суть анализа импульсной реакции. Ее основной недостаток заключается в том, что многие физические процессы не допускают импульсных входов ... Более того, при таком входе система может проявить нелинейные эффекты, нарушающие линеаризованное поведение, положенное в основу модели».

Одним из важных приложений рядов Вольтерра является моделирование нелинейных (стационарных и нестационарных) динамических систем в биологии. Применению рядов Вольтерра и разложения Винера для анализа физиологических систем посвящена монография известного специалиста в области биоинженерии В.З. Мармарелиса [68]. Одна из его работ [211] посвящена моделированию нелинейных нестационарных динамических систем с помощью моделей Вольтерра. В работе доказана эквивалентность модели, основанной на новом классе искусственных нейронных сетей (ИНС) (см. монографию [123]) и служащей для моделирования широкого класса нелинейных систем типа вход-выход и модели, основанной на аппарате стационарных полиномов Вольтерра в дискретной временной области

$$y(n) = k_o + T \sum_{m_1=0}^M k_1(m_1)x(n - m_1) +$$

$$+T^2 \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M k_2(m_1, m_2)x(n - m_1)x(n - m_2) + \dots$$

Здесь, по-прежнему,  $x(n)$  – вход,  $y(n)$  – отклик,  $M$  – конечная память системы,  $T$  – выборочный интервал,  $\{k_j\}$  – ядра Вольтерра.

Для восстановления переходных характеристик нестационарных динамических систем, когда зависимость выхода от входа может быть записана в виде ряда Вольтерра

$$y(t) = k_o(t) + \sum_{m_1=0}^M k_1(t; m_1)x(t - m_1) + \\ + \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M k_2(t; m_1, m_2)x(t - m_1)x(t - m_2) + \dots$$

использовался [246] белый шум. Отметим, что в этом случае ядра уже зависят от времени  $t$ . Подробности связи рядов Вольтерра и ИНС прямого распределения описаны в [247].

Рассмотрим метод идентификации ядер Вольтерра во временной области, основанный на использовании комбинаций функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом.

Обратимся к интегростепенному ряду Вольтерра

$$y(t) = \sum_{p=1}^N f_p(t),$$

$$f_p(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t K_p(s_1, \dots, s_p) \prod_{i=1}^p x(t - s_i) ds_i, \quad t \in [0, T], \quad (4.1.3)$$

позволяющему моделировать стационарные динамические системы, т.е. такие системы, у которых динамические характеристики за время переходного процесса  $T$  остаются неизменными. При  $N = 1$  из (4.1.3), получаем стандартное в линейной теории автоматического регулирования представление выходного сигнала через интеграл типа свертки (Дюамеля)

$$f_1(t) = \int_0^t K_1(s)x(t - s)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (4.1.4)$$

В этом случае, если  $x(t)$  есть  $\delta$ -функция Дирака, то ядро  $K_1(t)$  совпадает с откликом системы на  $x(t)$ :

$$K_1(t) = f_1(t).$$

Возьмем теперь в качестве  $x(t)$  функцию Хевисайда:

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что решение уравнения (4.1.4) при  $x(t) \equiv e(t)$ ,

$f_1(t) \in C_{[0,T]}^{(1)}$ ,  $f_1(0) = 0$  имеет вид

$$K_1(t) = f_1'(t), \quad t \in [0, T].$$

Переходя к проблеме идентификации многомерных ядер Вольтерра  $K_p$ ,  $p \geq 2$ , предположим вначале, что  $x(t)$  и  $y(t)$  – скалярные функции времени. Из этого вытекает симметричность  $K_p$  по всем аргументам. При конкретном  $p \geq 2$  каждому входному сигналу  $x(t), t \in [0, T]$  интегральный оператор в (4.1.3) ставит в соответствие функцию одной переменной  $f_p(t)$ . Таким образом, (4.1.3) можно рассматривать как одномерный континуум числовых равенств относительно  $p$ -мерного континуума неизвестных значений симметричной функции  $K_p(s_1, \dots, s_m)$ . В этом случае для корректной постановки задачи решения интегрального уравнения (4.1.3) относительно  $K_p$  необходимо задание набора откликов на  $(p-1)$ -параметрическое семейство тестовых возмущений  $x_{\omega_1 \dots \omega_{p-1}}(t)$ . Способ задания такого семейства в виде

$$x_{\omega_1 \dots \omega_{p-1}}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} \delta(t - \omega_k), \quad \omega_k \in [0, T],$$

где  $\delta(t)$  – по-прежнему  $\delta$ -функция Дирака, рассматривался в [40]. Недостатки такого подхода, связанные с трудной физической реализуемостью импульсных возмущений большой амплитуды, были обсуждены выше.

В работе [143] предложен путь, являющийся обобщением на многомерный случай способа идентификации  $K_1(t)$  по паре  $(e(t), f_1(t))$  и заключающийся в подаче  $(p-1)$ -параметрического семейства тестовых сигналов

$$x_{\omega_1 \dots \omega_{p-1}}(t) = e(t) + 2 \sum_{k=1}^{p-2} (-1)^k e(t - \sum_{i=1}^k \omega_i) + (-1)^{p-1} e(t - \sum_{i=1}^{p-1} t_i), \quad (4.1.5)$$

$0 \leq t, \omega_i \leq T, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad p \geq 2$ . Таким образом, задача идентификации сводится к решению линейных многомерных уравнений Вольтерра I рода

$$V^{(p)} K_p \equiv \sum_{i_1 + \dots + i_{p-1} = p} (-1)^{\sum_{k=1}^{p-1} i_{2k}} \frac{p!}{i_1! \dots i_{p-1}!} V_{i_1 \dots i_{p-1}} K_p = f_p, \quad p \geq 2, \quad (4.1.6)$$

имеющих явные формулы обращения, справедливые на области значений интегральных операторов.

В (4.1.6) символ [...] в верхнем пределе суммирования означает целую часть числа,  $f_p \equiv f_p(t, \omega_1, \dots, \omega_p)$ , а

$$\begin{aligned} & V_{i_1 \dots i_{p-1}} K_p = \\ & = \underbrace{\int_{t-\omega_1}^t \dots \int_{t-\omega_1}^t}_{i_1 \text{ раз}} \dots \underbrace{\int_{t-\omega_1 - \dots - \omega_{p-1}}^{t-\omega_1 - \dots - \omega_{p-2}} \dots \int_{t-\omega_1 - \dots - \omega_{p-1}}^{t-\omega_1 - \dots - \omega_{p-2}}}_{i_{p-1} \text{ раз}} K_p(s_1, \dots, s_p) ds_1 \dots ds_p, \end{aligned}$$

$$t, \omega_1, \dots, \omega_{p-1} \in \Delta_p = \left\{ t, \omega_1, \dots, \omega_{p-1} / 0 \leq \sum_{k=1}^{p-1} \omega_k \leq t \leq T; \omega_k \geq 0 \right\}.$$

Для произвольного  $p \geq 3$  формула обращения уравнения (4.1.6) носит рекуррентный характер:

$$K_p(t, t - \omega_1, \dots, t - \omega_1 - \dots - \omega_{p-1}) = \mathcal{D}_p f_p(t, \omega_1, \dots, \omega_{p-1}), \quad (4.1.7)$$

где

$$\mathcal{D}_p = \frac{(-1)^{p-1}}{2p} \frac{\partial}{\partial \omega_{p-1}} [\widehat{\mathcal{D}}_{p-1} - \mathcal{D}_{p-1}]; \quad \widehat{\mathcal{D}}_p = \frac{(-1)^{p-1}}{2p} \frac{\partial}{\partial \omega_p} [\widehat{\mathcal{D}}_{p-1} - \mathcal{D}_{p-1}],$$

$$\mathcal{D}_1 f = \frac{f'_t + f'_{\omega_1}}{2}; \quad \mathcal{D}_2 = \frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathcal{D}_1; \quad \widehat{\mathcal{D}}_2 = \frac{\partial}{\partial \omega_2} \mathcal{D}_1; \quad p = 3, 4, \dots$$

Приведем формулы обращения (4.1.7) для наиболее важных для нас (с точки зрения приложений, описанных ниже) случаев  $p = 2, 3$ .

При  $n = 2$

$$V^{(2)} K_2 \equiv \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = f_2(t, \omega_1), \quad (4.1.8)$$

$$t, \omega_1 \in \Delta_2 = \{t, \omega_1 / 0 \leq \omega_1 \leq t \leq T\},$$

а формула обращения имеет вид

$$K_2(t, t - \omega_1) = \frac{f''_{2t\omega_1} + f''_{2\omega_1^2}}{2} \quad \forall t, \omega_1 \in \Delta_2. \quad (4.1.9)$$

В силу симметрии  $K_2$  (4.1.9) определяет  $K_2(s_1, s_2)$  как в области  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq T$ , так и в области  $0 \leq s_2 \leq s_1 \leq T$ .

При  $n = 3$  (4.1.7) дает

$$V^{(3)}K_3 \equiv (V_{30} - 3V_{21} + 3V_{12} - V_{03})K_3 = f_3, \quad (4.1.10)$$

где

$$V_{30}K_3 = \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3;$$

$$V_{21}K_3 = \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3;$$

$$V_{12}K_3 = \int_{t-\omega_1}^t \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3;$$

$$V_{03}K_3 = \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} \int_{t-\omega_1-\omega_2}^{t-\omega_1} K_3(s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3,$$

$$t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3 = \{t, \omega_1, \omega_2 / 0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T\},$$

а  $f_3 \equiv f(t, \omega_1, \omega_2)$ . Решение (4.1.10) определяется формулой

$$K_3(t, t - \omega_1, t - \omega_1 - \omega_2) = \frac{f'''_{t\omega_2^2} - f'''_{t\omega_1\omega_2} + f'''_{\omega_1\omega_2^2} - f'''_{\omega_1^2\omega_2}}{12} \quad (4.1.11)$$

$$\forall t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_3,$$

причем в силу симметрии  $K_3$  формула (4.1.11) определяет  $K_3(s_1, s_2, s_3)$  всюду в области  $0 \leq s_1, s_2, s_3 \leq T$ . Теоремы существования и единственности для (4.1.8), (4.1.10) приведены в [144].

Ситуация усложняется, если  $x(t)$  — вектор-функция, что имеет место во многих приложениях. В этом случае ядра Вольтерра, отражающие чувствительность стационарной динамической системы к совместному изменению двух и более компонент, уже не обязаны быть симметричными. Обобщение алгоритмов идентификации ядер Вольтерра в случае векторного входа проведено в [113]. Там же приведены результаты тестирования линейной и квадратичной интегральных моделей теплообменника, когда на основе реальных данных была построена модель нелинейной динамики теплообмена в экспериментальной установке — высокотемпературном контуре

(ВТК) института систем энергетики (ИСЭМ) СО РАН. При этом была задействована известная эталонная математическая модель [115].

Было экспериментально показано [76], что учет квадратичных составляющих ряда Вольтерра позволил существенно повысить точность моделирования динамики температуры на выходе теплообменника. См. также источники в [146], в которых изложены последние результаты, позволившие существенно повысить точность моделирования стационарных динамических систем посредством синтеза моделей, настроенных на различные уровни возмущений. Таким образом, интегральные ряды Вольтерра позволяют решать важные прикладные задачи. Поэтому далее более подробно изложим некоторые результаты в этой области, необходимые для решения этих задач.

## 4.2 Идентификация моделей Вольтерра во временной области

Рассмотрим случай, когда переходные характеристики динамической системы меняются за время переходного процесса, что является распространенным явлением при моделировании нелинейной динамики в приложениях. В этом случае естественно рассмотреть полиномиальную интегральную модель вида

$$y(t) = \sum_{p=1}^q \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq m} \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_p}(t, \nu_1, \dots, \nu_p) x_{i_1}(\nu_1) \dots x_{i_p}(\nu_p) d\nu_1 \dots d\nu_p, \quad (4.2.1)$$

где  $x_1, \dots, x_m$  — входные сигналы, а  $y(t)$  — соответствующий отклик системы,  $t \in [0, T]$ .

Задача состоит в идентификации ядер Вольтерра  $K_{i_1 \dots i_m}$  на основании известной реакции динамической системы на специально подобранное множество входных тестовых сигналов.

Основная идея ниже излагаемых алгоритмов идентификации заключается именно в использовании тестовых (обучающих) сигналов, позволяющих свести задачу идентификации ядер Вольтерра к решению интегральных уравнений Вольтерра I рода специального вида, имеющих явные формулы обращения.

Проиллюстрируем применение этого подхода к задаче восстановления переходных характеристик (ядер Вольтерра) нестационарных динамических систем при скалярном входном сигнале  $x(t)$ , ограничившись поиском



ядер  $K_1(t, s_1)$ ,  $K_{11}(t, s_1, s_2)$  и  $K_{111}(t, s_1, s_2, s_3)$ , являющихся наиболее важными для приложений.

Рассмотрим проблему разделения отклика интегральной модели на составляющие.

Алгоритмы идентификации ядер, описываемые нами в этой главе, построены в предположении, что отклик динамической системы

$$y(t) = \sum_{p=1}^q \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq m} f_{i_1, \dots, i_p}(t)$$

разделен на составляющие (слагаемые ряда Вольтерра)

$$f_{i_1, \dots, i_p}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_p}(t, \nu_1, \dots, \nu_p) x_{i_1}(\nu_1) \dots x_{i_p}(\nu_p) d\nu_1 \dots d\nu_p,$$

$$t \in [0, T].$$

Рассмотрим общий метод разделения отклика интегральной модели на составляющие, основанный на том, что ряд Вольтерра суть ряд из однородных операторов. Рассмотрим ряд из однородных операторов

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x), \quad (4.2.2)$$

где  $x \in E_1$ ,  $B_k : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $E_1$  – линейное нормированное пространство, а  $E_2$  – банахово пространство. Очевидно, что в силу однородности  $B_k(\alpha x) = \alpha^k B_k(x)$ ,  $\alpha = \text{const}$ .

Пусть

$$\|B_k(x)\|_{E_1} \leq M_k \|x\|_{E_1}^k,$$

тогда

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha x) \right\|_{E_2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^k M_k \|x\|_{E_1}^k.$$

Пусть

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha|^k M_k} = |\alpha| \beta,$$

тогда ряд (4.2.2) сходится при условии, что

$$|x| < \frac{1}{|\alpha| \beta}, \quad \alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}.$$

Если  $\beta = 0$ , то радиус сходимости ряда (4.2.2)  $R = \infty$ . Если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k(x)\|$$

при  $x = x_0$ , то очевидно, что сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k(\alpha x_0)\|, \quad |\alpha| \leq 1.$$

Пусть ряд (4.2.2) сходится в точке  $\alpha x$ . Рассмотрим соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(x) = y(x). \quad (4.2.3)$$

Покажем существование комбинации из реакций динамической системы равной  $k$ -му члену ряда (4.2.3) с точностью до  $o(\|x\|^n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha x) = \alpha^k \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x) = y(\alpha x).$$

Полагая  $\alpha = \alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , при условии, что  $\alpha_i \neq \alpha_j \neq 0 \forall i \neq j$ , получаем  $n$  равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha_j x) = \alpha_j^k \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x) = y(\alpha_j x), \quad j = \overline{1, n}.$$

Умножая на  $c_j^s$ ,  $s = \overline{1, n}$ , получаем тождество

$$c_j^s \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha_j x) = \alpha_j^k \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x) = c_j^s y(\alpha_j x), \quad j, s = \overline{1, n}. \quad (4.2.4)$$

Откуда

$$\sum_{j=1}^n c_j^s \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha_j x) = \sum_{j=1}^n c_j^s y(\alpha_j x) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_j^k B_k(x), \quad s = \overline{1, n}.$$

Распоряжаясь векторами  $\mathbf{c}^s = (c_1^s, \dots, c_n^s)^T$ ,  $s = \overline{1, n}$ , выберем их биортогональными к векторам  $\boldsymbol{\alpha}^k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)^T$ , тогда  $(\mathbf{c}^s, \boldsymbol{\alpha}^k) = \sum_{j=1}^n c_j^s \alpha_j^k =$

$$e(t) = \begin{cases} 1, & s = k, \\ 0, & s \neq k. \end{cases}$$

Следовательно, векторы  $\mathbf{c}^s = (c_1^s, \dots, c_n^s)$  являются столбцами обратной матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

Итак, окончательно получаем

$$B_i(x) = \sum_{j=1}^n c_j^i y(\alpha_j x) - \sum_{j=1}^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_j^k B_k(x), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.2.6)$$

На основании вышеизложенного справедлива

**Теорема 4.2.1.** Пусть  $E_1$  – линейное нормированное пространство,  $E_2$  – банахово пространство,  $B_i(x) : D \subset E_1 \rightarrow E_2$  –  $i$ -однородные операторы и пусть числовая последовательность  $S_n = \sum_{i=1}^n \|B_i(x)\|$  сходится при  $x = x^* \in D$ .

Тогда

- 1) существует единственный элемент  $y(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_i(x^*)$ ,

- 2) если при этом

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} B_i(x^*) \right\| = o(\|x^*\|^n),$$

то справедлива оценка

$$\|B_k(x^*) - (\mathbf{c}_k(\alpha), \mathbf{y}_\alpha(x^*))\| = o(\|x^*\|^n), \quad \forall k = \overline{1, n}, \quad (4.2.7)$$

где  $\mathbf{c}_k(\alpha)$  –  $k$ -й столбец матрицы, обратной к  $\Lambda$  из (4.2.5), а

$$\mathbf{y}_\alpha = (y(\alpha_1 x^*), \dots, y(\alpha_n x^*))^T.$$

Вывод: полученная оценка (4.2.7) показывает, что для  $\forall \alpha_k$ , попарно различных и отличных от нуля, существуют векторы  $\mathbf{c}_k$ , для которых скалярное произведение

$$(\mathbf{c}_k(\alpha), \mathbf{y}_\alpha(x^*)),$$

будет равно  $k$ -му члену ряда  $B_k(x)$  с точностью до  $o(\|x^*\|^n)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

**Замечание 4.2.1.**  $i$ -однородный оператор  $B_i$  в случае, когда  $E_1 = E_{11} \times E_{12} \times \dots \times E_{1m}$  (соответствует системе с  $m$  входами), состоит из суммы различных слагаемых одинаковой степени однородности.

Метод тестовых сигналов [143] применим для нахождения указанных ядер и в нестационарном случае. Рассмотрим модель

$$\int_0^t K_1(t, \nu) x(\nu) d\nu + \int_0^t \int_0^t K_{11}(t, \nu_1) x(\nu_1) x(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = y(t), \quad (4.2.8)$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Подадим на вход системы, описываемой моделью (4.2.8), сигналы вида  $\pm x_{\omega_1}(t) = \pm(e(t) - e(t - \omega_1))$ , (см. рис. 4.2), где  $e(t)$  — функция Хевисайда.

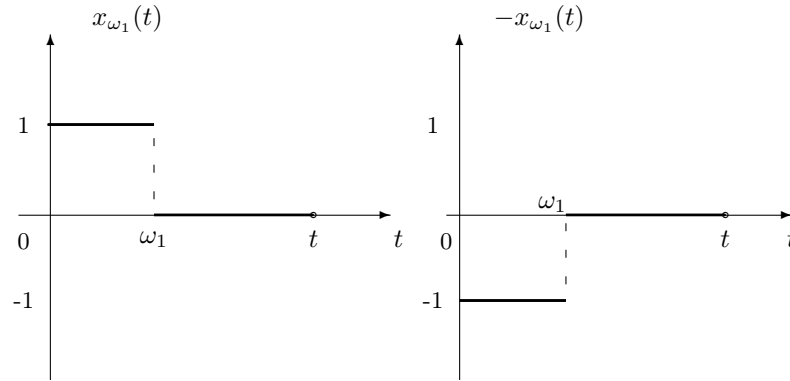


Рис. 4.2: Сигналы  $\pm x_{\omega_1}(t) = \pm(e(t) - e(t - \omega_1))$ ,

Получаем

$$\int_0^t K_1(t, \nu) x_{\omega_1}(\nu) d\nu + \int_0^t \int_0^t K_{11}(t, \nu_1) x_{\omega_1}(\nu_1) x_{\omega_1}(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = y^+(t, \omega_1), \quad (4.2.9)$$

$$- \int_0^t K_1(t, \nu) x_{\omega_1}(\nu) d\nu + \int_0^t \int_0^t K_{11}(t, \nu_1) x_{\omega_1}(\nu_1) x_{\omega_1}(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = y^-(t, \omega_1), \quad (4.2.10)$$

где  $y^+(t, \omega_1)$ ,  $y^-(t, \omega_1)$  — соответствующие выходные сигналы. Вычитая (4.2.10) из (4.2.9), получаем

$$\int_0^t K_1(t, \nu) x_{\omega_1}(\nu) d\nu = f_1(t, \omega_1) = \frac{y^+ - y^-}{2}$$

или, учитывая вид сигнала  $x_{\omega_1}$ ,

$$\int_0^{\omega_1} K_1(t, \nu) d\nu = f_1(t, \omega_1), \quad 0 \leq \omega_1 \leq t \leq T. \quad (4.2.11)$$

Полученное уравнение — суть интегральное уравнение Вольтерра I рода относительно  $K_1(t, \nu_1)$ . Дифференцируя (4.2.11) по  $\omega_1$ , получим явную формулу обращения для уравнения (4.2.11)

$$K_1(t, \omega_1) = f'_{1_{\omega_1}}(t, \omega_1), \quad 0 \leq \omega_1 \leq t \leq T. \quad (4.2.12)$$

Займемся теперь проблемой идентификации симметричного ядра  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2)$ . Подадим на вход динамической системы, описываемой

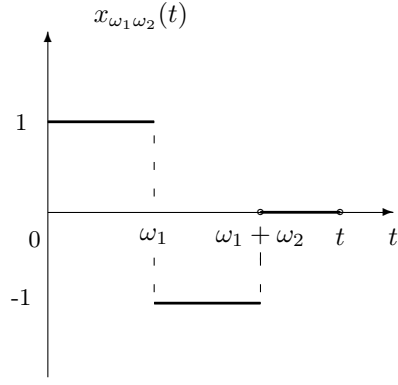


Рис. 4.3: Сигнал  $x_{\omega_1, \omega_2}(t) = \pm(e(t) - 2e(t - \omega_1) + e(t - \omega_1 - \omega_2))$

квадратичной скалярной моделью (4.2.8), обучающие (тестовые) сигналы

$$\pm x_{\omega_1, \omega_2}(t) = \pm(e(t) - 2e(t - \omega_1) + e(t - \omega_1 - \omega_2)).$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t K_1(t, \nu_1) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_1) d\nu_1 + \int_0^t \int_0^t K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_1) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = \\ = y^+(t, \omega_1, \omega_2), \\ - \int_0^t K_1(t, \nu_1) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_1) d\nu_1 + \\ + \int_0^t \int_0^t K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_1) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = y^-(t, \omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, имеем:

$$\int_0^t \int_0^t K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_1) x_{\omega_1, \omega_2}(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = f_{11}(t, \omega_1, \omega_2),$$

где

$$f_{11}(t, \omega_1, \omega_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y^+ + y^-}{2}.$$

Учитывая поведение функции  $x_{\omega_1, \omega_2}(t)$ , при  $t \in [0, T]$ , а также свойство симметрии  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2)$  по второму и третьему аргументу, приходим к двумерному интегральному уравнению Вольтерра I рода относительно  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2)$ :

$$\int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - 2 \int_0^{\omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \omega_2} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 +$$

$$+ \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = f_{11}(t, \omega_1, \omega_2), \quad (4.2.13)$$

$$0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T, \quad \omega_1, \omega_2 \geq 0.$$

С учетом замены переменных  $s_2 = \omega_1$ ,  $s_1 = \omega_1 + \omega_2$ . и обозначения  $f_{11}(t, s_2, s_1 - s_2) \equiv g(t, s_1, s_2)$ , уравнение (4.2.13) перепишется в виде

$$\int_0^{s_2} \int_0^{s_2} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - 2 \int_0^{s_2} \int_{s_2}^{s_1} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 +$$

$$+ \int_{s_2}^{s_1} \int_{s_2}^{s_1} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = g(t, s_1, s_2), \quad (4.2.14)$$

где  $t, s_1, s_2 \in \Delta_s = \{t, s_1, s_2 / 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T\}$ .

Сформулируем необходимые и достаточные условия существования и единственности решения уравнения (4.2.14)

$$K_{11}(t, s_1, s_2) = -\frac{1}{4} g''_{s_1 s_2}(t, s_1, s_2). \quad (4.2.15)$$

Непосредственным вычислением смешанной производной проверяется, что однородное уравнение отвечающее уравнению (4.2.14) в классе симметричных функций имеет только тривиальное решение. Поэтому исходное неоднородное уравнение (4.2.14) может иметь в этом классе не более одного решения.

### Теорема 4.2.2. Условия

$$g''_{s_1 s_2}(t, s_1, s_2) \in \mathcal{C}_{\Delta_s}; \quad (4.2.16)$$

$$g(t, 0, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, T]; \quad (4.2.17)$$

$$g(t, s, s) = g(t, s, 0) \quad \forall t, s \in \Delta_s; \quad (4.2.18)$$

$$g(t, 0, s) = 4g(t, s, s) \quad \forall t, s \in \Delta_s; \quad (4.2.19)$$

$$3g(t, s_2, 0) - 3g(t, s_1, 0) - g(t, s_1, s_2) + g(t, s_2, s_1) = 0 \quad \forall t, s_1, s_2 \in \Delta_s \quad (4.2.20)$$

необходимы и достаточны для существования решения уравнения (4.2.14) в классе симметричных функций, непрерывных на

$$\Pi_2 = \{t, s_1, s_2 / 0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T\}.$$

*Доказательство.* 1) Необходимость.

Пусть  $K_{11}^*$  – решение уравнения (4.2.14). Тогда

$$g(t, s_1, s_2) = \int_0^{s_2} \int_0^{s_2} K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - 2 \int_0^{s_2} \int_{s_2}^{s_1} K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 +$$

$$+ \int_{s_2}^{s_1} \int_{s_2}^{s_1} K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2. \quad (4.2.21)$$

Из (4.2.21) и непрерывности  $K_{11}^*$  вытекает (4.2.16). Положим в (4.2.21)  $s_2 = 0$ . Получаем условие (4.2.17). Пусть теперь  $s_1 = s_2 = s$ , тогда

$$\int_0^s \int_0^s K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = g(t, s, s). \quad (4.2.22)$$

Полагая  $s_2 = 0$ ,  $s_1 = s_2 = s$ , имеем

$$\int_0^s \int_0^s K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = g(t, s, 0). \quad (4.2.23)$$

Из (4.2.22), (4.2.23) вытекает (4.2.18). Теперь в (4.2.21) положим  $s_1 = 0$ .

Имеем

$$\int_0^{s_2} \int_0^{s_2} K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - 2 \int_0^{s_2} \int_{s_2}^0 K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 +$$

$$+ \int_{s_2}^0 \int_{s_2}^0 K_{11}^*(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = g(t, 0, s_2). \quad (4.2.24)$$

Из (4.2.22) и (4.2.24) вытекает (4.2.19). Учитывая, что  $s_2 \leq s_1$ , а также свойство симметрии  $K_{11}$  по второму и третьему аргументу, нетрудно видеть (4.2.20).

2) Достаточность.

Если (4.2.16) выполняется, то (4.2.15) определяет симметричную на  $\Pi_2$  функцию. Подставим в уравнение (4.2.14)  $K_{11}(t, s_1, s_2)$  из (4.2.15):

$$\int_0^{s_2} \int_0^{s_2} g''_{\nu_1 \nu_2}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - 2 \int_0^{s_2} \int_{s_2}^{s_1} g''_{\nu_1 \nu_2}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 +$$

$$+ \int_{s_2}^{s_1} \int_{s_2}^{s_1} g''_{\nu_1 \nu_2}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = -4g(t, s_1, s_2).$$

Преобразуя последнее равенство с использованием условий (4.2.17) - (4.2.20), приходим к тождеству. Итак, формула (4.2.15) действительно определяет решение интегрального уравнения (4.2.13). Теорема доказана.  $\square$

Отметим, что при подстановке в (4.2.14) формулы (4.2.15), мы пользуемся свойством симметрии функции (4.2.15) по  $s_1, s_2$ , так как интегрирование ядра  $K_{11}(t, s_1, s_2)$  ведётся по области  $\Pi_2$ , хотя формально формула (4.2.15) получена для  $s_1 \geq s_2$ .

Оценим норму обратного оператора, определённого на области, определённой условиями теоремы 4.2.2. Для этого достаточно доказать априорную оценку

$$\|V_2 K_{11}\|_Y \geq m \|K_{11}\|_X, \quad (4.2.25)$$

где оператор  $V_2$  определён выше,

$$X = \left\{ K_{11}(t, s_1, s_2) \in \mathcal{C}(\Omega) \right\},$$

$$Y = \left\{ g(t, s_1, s_2), g''_{s_1, s_2}(t, s_1, s_2) \text{ — непрерывны; } t, s_1, s_2 \in \Omega \right\},$$

$$\Omega = \{t, s_1, s_2 / 0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T\}.$$

Определим нормы в пространствах  $X$  и  $Y$  :

$$\|K_{11}\|_X = \max_{t, s_1, s_2 \in \Omega} |K_{11}(t, s_1, s_2)|, \quad (4.2.26)$$

$$\|V_2 K_{11}\|_Y = \max \left\{ \max_{t, s_1, s_2 \in \Omega} |V_2 K_{11}(t, s_1, s_2)|, \max_{t, s_1, s_2 \in \Omega} |D_2 V_2 K_{11}| \right\}. \quad (4.2.27)$$

Введём дифференциальный оператор  $D_2$

$$D_2 g \stackrel{\text{def}}{=} g''_{s_1, s_2}(t, s_1, s_2).$$

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|V_2 K_{11}\|_Y &\stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \max_{t, s_1, s_2 \in \Omega} |V_2 K_{11}(t, s_1, s_2)|, \max_{t, s_1, s_2 \in \Omega} |D_2 V_2 K_{11}| \right\} \geq \\ &\geq \max_{t, s_1, s_2 \in \Omega} |D_2 V_2 K_{11}| = 4 \max_{t, s_1, s_2 \in \Omega} |V_2 K_{11}| = \\ &= 4 \|K_{11}\|_X. \end{aligned}$$

Поэтому для искомого обратного оператора  $V_2^{-1}$  справедлива оценка

$$\|V_2^{-1}\|_{L(R(V_2) \subset Y \rightarrow X)} \leq \frac{1}{4}.$$

Теперь обратимся к восстановлению ядра  $K_{111}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ . Вначале рассмотрим случай, когда оно симметрично. Предположим, что задача разделения (см. наши рассуждения и теорему 4.2.1 выше) выходного сигнала



на составляющие решена, так что ядро  $K_{111}$  удовлетворяет соотношению

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t K_{111}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) x(\nu_1) x(\nu_2) x(\nu_3) d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = y_{111}(t), \quad (4.2.28)$$

$$t \in [0, T].$$

Ядро необходимо восстановить в области

$$\Pi_4 = \{t, \nu_1, \nu_2, \nu_3 / 0 \leq \nu_1, \nu_2, \nu_3 \leq t \leq T\}. \quad (4.2.29)$$

Введем трехпараметрическое семейство тестовых возмущений вида

$$x_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}(t) = e(t) + 2 \left( -e(t - \omega_1) + e(t - \omega_1 - \omega_2) \right) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \quad (4.2.30)$$

Подставляя (4.2.30) в (4.2.28), с учетом симметрии  $K_{111}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  по второму, третьему и четвертому аргументам приходим к интегральному уравнению Вольтерра I рода вида

$$(V_{300} - V_{030} + V_{003} + 3V_{201} - 3V_{210} + 3V_{120} + 3V_{102} - \\ - 3V_{012} + 3V_{021} - 6V_{111}) K_{111}(t, s_1, s_2, s_3) = f_{111}(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (4.2.31)$$

где оператор  $V_{i_1 i_2 i_3}$  содержит  $i_1$  – кратное интегрирование в пределах от 0 до  $\omega_1$ ,  $i_2$  – кратное интегрирование в пределах от  $\omega_1$  до  $\omega_1 + \omega_2$  и  $i_3$  – кратное интегрирование в пределах от  $\omega_1 + \omega_2$  до  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ . То есть

$$V_{300} = \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_{111}(t, s_1, s_2, s_3) ds_1 ds_2 ds_3; \\ \dots \\ V_{111} = \int_0^{\omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \omega_2} \int_{\omega_1 + \omega_2}^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} K_{111}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) ds_1 ds_2 ds_3;$$

$$t, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Delta_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{0 \leq \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \leq t \leq T, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0\}.$$

Формула обращения уравнения (4.2.31) имеет следующий вид

$$K_{111}(t, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \frac{f''_{111_{\omega_1 \omega_3^2}} - f''_{111_{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} + f''_{111_{\omega_2^2 \omega_3}} - f''_{111_{\omega_2 \omega_3^2}}}{24}, \quad (4.2.32)$$

$$t, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Delta_3.$$

С помощью замены переменных

$$s_3 = \omega_1, \quad s_2 = \omega_1 + \omega_2, \quad s_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad (4.2.33)$$

с учётом обозначения

$$f_{111}(t, s_3, s_2 - s_3, s_1 - s_2) \equiv g(t, s_1, s_2, s_3), \quad (4.2.34)$$

формула (4.2.32) приведется к виду

$$K_{111}(t, s_1, s_2, s_3) = -\frac{1}{24} \mathcal{D}_3 g, \quad (4.2.35)$$

где

$$\mathcal{D}_3 g = \frac{\partial^3 g}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3}, \quad 0 \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T.$$

Теперь для полноты представления рассмотрим обобщение метода идентификации симметричных ядер Вольтерра на  $p$ -мерный случай. Не умаляя общности, рассмотрим  $p$ -е слагаемое ряда Вольтерра (4.2.1) для  $m = 1$ , то есть соотношение вида:

$$\int_0^t \dots \int_0^t K_p(t, \nu_1, \dots, \nu_p) x(\nu_1) \dots x(\nu_p) d\nu_1 \dots d\nu_p = y(t), \quad (4.2.36)$$

$$t \in [0, T].$$

Ядра  $K_p(t, \nu_1, \dots, \nu_p)$  соответствуют ядрам  $K_{p\dots p}(t, \nu_1, \dots, \nu_p)$  в (4.2.1).

Рассмотрим  $p$ -параметрическое семейство входных возмущений [143]

$$x_{\omega_1 \dots \omega_p}(t) = e(t) + 2 \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k e(t - \sum_{i=1}^k \omega_i) + (-1)^p e(t - \sum_{i=1}^p \omega_i). \quad (4.2.37)$$

Разобьем область интегрирования в (4.2.36) на непересекающиеся части  $\Omega_{i_1, \dots, i_p} = \{[0, \omega_1], [\omega_1, \omega_1 + \omega_2], \dots, [\omega_1 + \dots + \omega_{p-1}, \omega_1 + \dots + \omega_p]\}$ .

Тогда, учитывая свойство аддитивности интегралов относительно разбиения области интегрирования и симметрии ядер

$K_p(t, \nu_1, \dots, \nu_p)$  по переменным интегрирования  $\nu_1, \dots, \nu_p$ , приходим к многомерному интегральному уравнению Вольтерра

$$V_p K_p \equiv \sum_{i_1 + \dots + i_p = p} (-1)^{i_2 + \dots + i_{2[p/2]}} \frac{p!}{i_1! \dots i_p!} V_{i_1 \dots i_p} K_p = g_p, \quad p \geq 1, \quad (4.2.38)$$

где

$$g_p \equiv g_{i_1 \dots i_p}(t, s_1, \dots, s_p) \equiv f_{i_1 \dots i_p}(t, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \dots, \omega_1 + \dots + \omega_p), \quad (4.2.39)$$

$$s_1 = \omega_1 + \dots + \omega_p, \dots, s_{p-1} = \omega_1 + \omega_2, s_p = \omega_1, \quad (4.2.40)$$

$$\begin{aligned}
V_{i_1 \dots i_p} K_p &= \\
&= \underbrace{\int_0^{s_p} \dots \int_0^{s_p}}_{i_1 \text{ раз}} \dots \underbrace{\int_{s_2}^{s_1} \dots \int_{s_2}^{s_1}}_{i_p \text{ раз}} K_p(t, \nu_1, \dots, \nu_p) d\nu_1 \dots d\nu_p, \tag{4.2.41}
\end{aligned}$$

$$t, \omega_1, \dots, \omega_p \in \Delta_p = \left\{ t, \omega_1, \dots, \omega_p / 0 \leq \sum_{k=1}^p \omega_k \leq t \leq T; \omega_k \geq 0 \right\}.$$

Уравнение (4.2.41) допускает следующую явную формулу обращения

$$K_p(t, s_1, \dots, s_p) = \frac{(-1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}}{p! 2^{p-1}} g_{p, s_1, \dots, s_p}^{(p)}(t, s_1, s_2, \dots, s_p). \tag{4.2.42}$$

Для перехода к переменным  $\omega_1, \dots, \omega_p$  используется замена переменных  $\mathbf{s} = A\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)^T$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_p)^T$  и пересчёт производных по правилу  $\nabla_{\mathbf{s}} = (A^{-1})^T \nabla_{\boldsymbol{\omega}}$ , где

$$\nabla_{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial s_p} \end{bmatrix}, \nabla_{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \omega_p} \end{bmatrix}, A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdot & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая векторного входа в полиномиальной модели Вольтерра (4.2.1). Предположим, что эта задача разделения отклика на составляющие уже решена, так что  $K_{12}$  удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int_0^t \int_0^t K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) x_1(\nu_1) x_2(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = f_{12}(t), t \in [0, T]. \tag{4.2.43}$$

Отметим, что ядро  $K_{12}(t, \nu_1, \nu_2)$ , отражающее вклад в отклик динамической системы совместного изменения как  $x_1(t)$ , так и  $x_2(t)$ , является несимметричным по  $\nu_1, \nu_2$ . Подадим на вход системы первую серию сигналов вида

$$\begin{aligned}
x_{1\omega_1\omega_2}(t) &= e(t) - 2e(t - \omega_1) + e(t - \omega_1 - \omega_2), \\
x_{2\omega_1\omega_2}(t) &= e(t) - e(t - \omega_1).
\end{aligned}$$

Тогда из (4.2.43) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \int_0^{\omega_1} \left\{ \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \omega_2} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right\} d\nu_2 = \\ & \stackrel{(1)}{=} f_{12\omega_1\omega_2}^{(1)}(t) \equiv f_{12}^{(1)}(t, \omega_1, \omega_2), \quad 0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T; \quad \omega_1, \omega_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Аналогично, меняя местами формы сигналов для  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \omega_2} \left\{ \int_0^{\omega_1} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right\} d\nu_2 = \\ & \stackrel{(2)}{=} f_{12}^{(2)}(t, \omega_1, \omega_2), \quad 0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T; \quad \omega_1, \omega_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Уравнения (4.2.44) и (4.2.45) представляют собой систему интегральных уравнений (или *парное* уравнение) Вольтерра I рода относительно  $K_{12}$ . Сделаем в уравнениях (4.2.44) и (4.2.45) замену переменных  $s_2 = \omega_1$ ,  $s_1 = \omega_1 + \omega_2$ . Тогда уравнения (4.2.44), (4.2.45) с учётом обозначения  $f_{12}^{(i)}(t, s_2, s_1 - s_2) \equiv g^{(i)}(t, s_1, s_2)$ ,  $i = 1, 2$ , примут вид

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_2} \int_0^{s_2} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \int_0^{s_2} \left\{ \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right\} d\nu_2 = \\ & \stackrel{(1)}{=} g^{(1)}(t, s_1, s_2), \quad 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_2} \int_0^{s_2} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \int_{s_2}^{s_1} \left\{ \int_0^{s_2} K_{12}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right\} d\nu_2 = \\ & \stackrel{(2)}{=} g^{(2)}(t, s_1, s_2), \quad 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.2.47)$$

Верхний индекс в правых частях (4.2.46), (4.2.47) показывает номер серии входных сигналов.

Отметим, что уравнения (4.2.46) и (4.2.47) в совокупности естественно считать парным уравнением, определяющим ядро  $K_{12}$  как в области, где второй аргумент ядра не меньше третьего, так и в области, где второй аргумент не больше третьего. Дифференцируя (4.2.46), (4.2.47) по  $s_1, s_2$  (при этом существование нужных производных предполагается), получаем соотношения

$$K_{12}(t, s_1, s_2) = -g_{s_1 s_2}^{(1)''}(t, s_1, s_2), \quad (4.2.48)$$

$$K_{12}(t, s_2, s_1) = -g_{s_1, s_2}^{(2)''}(t, s_1, s_2), \quad (4.2.49)$$

где  $s_1 \geq s_2$ . Единственность также устанавливается непосредственным вычислением смешанных производных. Непосредственным вычислением смешанных производных также проверяется, что однородное парное уравнение (4.2.46) – (4.2.47) (при  $\overset{(1)}{g}(t, s_1, s_2) = \overset{(2)}{g}(t, s_1, s_2) = 0$ ) имеет только тривиальное решение. Поэтому исходное линейное неоднородное парное интегральное уравнение Вольтеррра I рода (4.2.46) – (4.2.47) может иметь не более одного решения в указанном классе решений. По аналогии с доказательством теоремы 4.2.2 легко доказать следующую теорему существования.

**Теорема 4.2.3.** *Условия*

$$\overset{(i)''}{g}_{s_1, s_2} \in \mathcal{C}_{\Delta_s} \quad \forall t, s \in \Delta_s; \quad (4.2.50)$$

$$\overset{(1)}{g}(t, s, 0) = \overset{(2)}{g}(t, s, 0) = 0 \quad \forall t, s \in \Delta_s; \quad (4.2.51)$$

$$2 \overset{(2)}{g}(t, s, s) = 2 \overset{(1)}{g}(t, s, s) = \overset{(2)}{g}(t, 0, s) = \overset{(1)}{g}(t, 0, s) \quad \forall t, s \in \Delta_s; \quad (4.2.52)$$

$$\overset{(1)''}{g}_{s_1, s_2}(t, s_1, s_2)|_{s_1=s_2} = \overset{(2)''}{g}_{s_1, s_2}(t, s_1, s_2)|_{s_1=s_2} \quad \forall t, s_1, s_2 \in \Delta_s, \quad (4.2.53)$$

где  $i = 1, 2$ ,  $\Delta_s = \{t, s_1, s_2 / 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T\}$ , *необходимы и достаточны для существования решения уравнения (4.2.46), (4.2.47) в форме (4.2.48), (4.2.49) в классе функций, непрерывных на  $\Pi_2$ .*

Наибольшую техническую трудность представляет задача восстановления частично-симметричных ядер. Так же, как и в симметричном случае, не умаляя общности будем считать, что ядро  $K_{112}$  удовлетворяет соотношению

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) x_1(\nu_1) x_1(\nu_2) x_2(\nu_3) d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = f_{112}(t). \quad (4.2.54)$$

Ядро  $K_{112}$  симметрично только по второму и третьему аргументам и отражает чувствительность системы к возмущениям компонент  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  вектора  $x(t)$ . Ядро необходимо восстановить в области  $\Pi_4$ . Однако в силу симметрии область  $\Pi_4 = \bigcup_{i=1}^3 \Pi_4^{(i)}$  существенно сужается, здесь

$$\Pi_4^{(1)} = \{0 \leq \nu_1, \nu_2 \leq \nu_3 \leq t \leq T\},$$

$$\Pi_4^{(2)} = \{0 \leq \nu_3 \leq \nu_1, \nu_2 \leq t \leq T\},$$

$$\Pi_4^{(3)} = \{0 \leq \nu_1 \leq \nu_3 \leq \nu_2 \leq t \leq T \cup 0 \leq \nu_2 \leq \nu_3 \leq \nu_1 \leq t \leq T\}.$$

Подадим на вход три серии возмущений:

$$x_{1\omega_1\omega_2}(t) = e(t) - 2e(t - \omega_1) + e(t - \omega_1 - \omega_2), \quad (4.2.55)$$

$$x_{2\omega_1\omega_2\omega_3}(t) = e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3);$$

$$x_{1\omega_1\omega_2\omega_3}(t) = e(t - \omega_1) - 2e(t - \omega_1 - \omega_2) + e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \quad (4.2.56)$$

$$x_{2\omega_1}(t) = e(t) - e(t - \omega_1);$$

$$x_{1\omega_1\omega_2\omega_3}(t) = e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \quad (4.2.57)$$

$$x_{2\omega_1\omega_2}(t) = e(t) - e(t - \omega_1 - \omega_2).$$

Сделаем замену переменных

$$s_3 = \omega_1, \quad s_2 = \omega_1 + \omega_2, \quad s_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad (4.2.58)$$

с учётом обозначения

$$f_{112}^{(i)}(t, s_3, s_2 - s_3, s_1 - s_2) \equiv g^{(i)}(t, s_1, s_2, s_3), \quad i = \overline{1, 3},$$

получаем трёхмерное уравнение

$$\begin{aligned} & \int_0^{s_3} ds_1 \int_0^{s_3} ds_2 \int_{s_2}^{s_1} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 - 2 \int_0^{s_3} d\nu_1 \int_{s_3}^{s_2} d\nu_2 \int_{s_2}^{s_1} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 + \\ & + \int_{s_3}^{s_2} d\nu_1 \int_{s_3}^{s_2} d\nu_2 \int_{s_2}^{s_1} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 = g^{(1)}(t, s_1, s_2, s_3); \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

$$\begin{aligned} & \int_{s_3}^{s_2} d\nu_1 \int_{s_3}^{s_2} d\nu_2 \int_0^{s_3} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 - 2 \int_{s_2}^{s_1} d\nu_1 \int_{s_3}^{s_2} d\nu_2 \int_0^{s_3} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 + \\ & + \int_{s_2}^{s_1} d\nu_1 \int_{s_2}^{s_1} d\nu_2 \int_0^{s_3} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 = g^{(2)}(t, s_1, s_2, s_3); \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

$$\int_{s_3}^{s_1} d\nu_1 \int_{s_3}^{s_1} d\nu_2 \int_0^{s_2} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 = g^{(3)}(t, s_1, s_2, s_3), \quad (4.2.61)$$

дифференцируя которое, получаем явные формулы обращения:

$$K_{112}(M) = -\frac{1}{4} \mathcal{D}_3^{(1)} g, \quad M \in \Pi_4^{(1)}; \quad (4.2.62)$$

$$K_{112}(M) = -\frac{1}{4} \mathcal{D}_3^{(2)} g, \quad M \in \Pi_4^{(2)}; \quad (4.2.63)$$

$$K_{112}(M) = -\frac{1}{2}\mathcal{D}_3^{(3)} g, \quad M \in \Pi_4^{(3)}, \quad (4.2.64)$$

позволяющие восстановить ядро во всей области  $\Pi_4$ .

**Замечание 4.2.2.** Восстановить ядро  $K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  в области  $\Pi_4^{(3)}$  можно, подав на вход системы вместо сигнала (4.2.57) сигнал вида

$$x_{1_{\omega_1\omega_2\omega_3}}(t) = e(t) - e(t - \omega_1) + e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3),$$

$$x_{2_{\omega_1\omega_2}}(t) = e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2).$$

Уравнение и соответствующая формула обращения примут вид:

$$\begin{aligned} & \int_{s_2}^{s_1} d\nu_1 \int_{s_2}^{s_1} d\nu_2 \int_{s_3}^{s_2} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 - 2 \int_0^{s_3} d\nu_1 \int_{s_2}^{s_1} d\nu_2 \int_{s_3}^{s_2} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 + \\ & + \int_0^{s_3} d\nu_1 \int_0^{s_3} d\nu_2 \int_{s_3}^{s_2} K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 = \overset{(3)}{g}(t, s_1, s_2, s_3); \end{aligned} \quad (4.2.65)$$

$$K_{112}(M) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \overset{(3)}{g}}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 \overset{(2)}{g}}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3}, \quad M \in \Pi_4^{(3)}. \quad (4.2.66)$$

Интерес представляет наличие в (4.2.66) производных от откликов как на вторую, так и на третью серии сигналов.

Обратимся теперь к задаче восстановления полностью несимметричного ядра  $K_{123}$ . Также положим, что задача разделения выходного сигнала  $y$  на составляющие решена и ядро  $K_{123}$  удовлетворяет соотношению

$$\int_0^t \int_0^t \int_0^t K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) x_1(\nu_1) x_2(\nu_2) x_3(\nu_3) d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = f_{123}(t). \quad (4.2.67)$$

Ядро необходимо восстановить в области  $\Pi_4$ . Подадим на вход шесть серий возмущений:

$$\begin{aligned} x_{1_{\omega_1}}(t) &= e(t) - e(t - \omega_1), \\ x_{2_{\omega_1\omega_2}}(t) &= e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2), \\ x_{3_{\omega_1\omega_2\omega_3}}(t) &= e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3); \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

$$\begin{aligned} x_{1_{\omega_1}}(t) &= e(t) - e(t - \omega_1), \\ x_{2_{\omega_1\omega_2\omega_3}}(t) &= e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \\ x_{3_{\omega_1\omega_2}}(t) &= e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2); \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

$$\begin{aligned} x_{1\omega_1\omega_2}(t) &= e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2), \\ x_{2\omega_1}(t) &= e(t) - e(t - \omega_1), \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

$$\begin{aligned} x_{3\omega_1\omega_2\omega_3}(t) &= e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3); \\ x_{1\omega_1\omega_2}(t) &= e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2), \\ x_{2\omega_1\omega_2\omega_3}(t) &= e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \\ x_{3\omega_1}(t) &= e(t) - e(t - \omega_1); \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

$$\begin{aligned} x_{3\omega_1\omega_2\omega_3}(t) &= e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \\ x_{1\omega_1}(t) &= e(t) - e(t - \omega_1), \end{aligned} \quad (4.2.72)$$

$$\begin{aligned} x_{2\omega_1\omega_2}(t) &= e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2); \\ x_{3\omega_1\omega_2\omega_3}(t) &= e(t - \omega_1 - \omega_2) - e(t - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \\ x_{2\omega_1\omega_2}(t) &= e(t - \omega_1) - e(t - \omega_1 - \omega_2), \\ x_{1\omega_1}(t) &= e(t) - e(t - \omega_1). \end{aligned} \quad (4.2.73)$$

Тогда, с учётом замены переменных (4.2.58) и обозначения

$$f_{112}^{(i)}(t, s_3, s_2 - s_3, s_1 - s_2) \equiv g^{(i)}(t, s_1, s_2, s_3), \quad i = \overline{1, 6},$$

получаем 3!-ое (по аналогии с парным уравнением, см. также работу [81]) интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} \int_0^{s_3} d\nu_1 \int_{s_3}^{s_2} d\nu_2 \int_{s_2}^{s_1} K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 &= g^{(1)}(t, s_1, s_2, s_3), \\ \int_0^{s_3} d\nu_1 \int_{s_2}^{s_1} d\nu_2 \int_{s_3}^{s_2} K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 &= g^{(2)}(t, s_1, s_2, s_3), \\ \int_{s_3}^{s_2} d\nu_1 \int_0^{s_3} d\nu_2 \int_{s_2}^{s_1} K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 &= g^{(3)}(t, s_1, s_2, s_3), \\ \int_{s_3}^{s_2} d\nu_1 \int_{s_2}^{s_1} d\nu_2 \int_0^{s_3} K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 &= g^{(4)}(t, s_1, s_2, s_3), \\ \int_{s_3}^{s_1} d\nu_1 \int_{s_2}^{s_3} d\nu_2 \int_{s_2}^{s_1} K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 &= g^{(5)}(t, s_1, s_2, s_3), \\ \int_{s_2}^{s_1} d\nu_1 \int_{s_3}^{s_2} d\nu_2 \int_0^{s_3} K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) d\nu_3 &= g^{(6)}(t, s_1, s_2, s_3). \end{aligned}$$



Дифференцируя, получаем явную формулу обращения

$$K_{123}(M) = \mathcal{D}_3 \overset{(i)}{g}, \quad M \in \Pi_4^i,$$

где

$$\mathcal{D}_3 \overset{(i)}{g} = \frac{\partial^3 \overset{(i)}{g}}{\partial s_1 \partial s_2 \partial s_3}, \quad i = \overline{1, 6}, \quad 0 \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T$$

и причём здесь  $\Pi_4 = \bigcup_{i=1}^6 \Pi_4^{(i)}$ , где  $\Pi_4^{(1)} = \{0 \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T\}$ ,  
 $\Pi_4^{(2)} = \{0 \leq s_1 \leq s_3 \leq s_2 \leq t \leq T\}$ ,  $\Pi_4^{(3)} = \{0 \leq s_2 \leq s_1 \leq s_3 \leq t \leq T\}$ ,  
 $\Pi_4^{(4)} = \{0 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_1 \leq t \leq T\}$ ,  $\Pi_4^{(5)} = \{0 \leq s_3 \leq s_1 \leq s_2 \leq t \leq T\}$ ,  
 $\Pi_4^{(6)} = \{0 \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 \leq t \leq T\}$ . То есть ядро восстановлено во всей области  $\Pi_4$ . Доказательство критерия существования единственного решения здесь также не содержит особых трудностей.

**Замечание 4.2.3.** Если в динамическом многомерном объекте с входной и выходной вектор-функциями присутствуют внутренние перекрестные обратные связи [43], то для моделирования такого объекта в работе [83] предлагается использовать обобщение ряда Вольтерра вида

$$y_i(x_1(t), \dots, x_p(t)) = \sum_{p=1}^q \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n f_{j_1, \dots, j_p}(t), \quad t \in [0, T],$$

где

$$f_{j_1, \dots, j_p}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{i, j_1 \dots j_p}^p(t, s_1, \dots, s_p) x_{j_1}(s_1) \dots x_{j_p}(s_p) ds_1 \dots ds_p.$$

Такое уравнение является нелинейным уравнением Вольтерра II рода относительно вектора  $\mathbf{x}(t)$ . Методы анализа таких нелинейных моделей представлены в гл. 1 п. 2.2 и п. 3.2, см. также библиографию в обзоре [146] и работу [154].

### Численные методы идентификации ядер Вольтерра

Применение изложенных выше алгоритмов идентификации ядер Вольтерра для моделирования реальных физических процессов требует построения разностных аналогов соответствующих многомерных интегральных уравнений Вольтерра I рода.

Прежде чем переходить к описанию численных методов идентификации ядер Вольтерра, рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра

I рода

$$\int_0^t x(t, \nu) K(\nu) d\nu = f(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.2.74)$$

Здесь  $x(t, \nu)$  – известная функция двух переменных, определенная в области  $\Delta = \{t, \nu / 0 \leq \nu \leq t \leq T\}$ ,  $f(t)$  – известная функция, а  $K(t)$  – искомое решение. Пусть  $x'_t \in \mathcal{C}_\Delta$ ,  $f' \in \mathcal{C}_{[0,t]}$ ,  $f(0) = 0$  и, кроме того,  $x(t, t) \neq 0$ .

Особенность задачи численного решения (4.2.74) состоит в том, что при её решении необходимо использовать как классические методы вычислительной математики, так и методы решения некорректно поставленных задач.

Действительно, уравнения Вольтерра I рода являются частным случаем уравнений Фредгольма I рода, некорректно поставленных по Адамару в основных функциональных пространствах. Поэтому для численного решения интегральных уравнений Вольтерра I рода могут быть использованы методы регуляризации некорректных задач (см., например, [118; 234]). Алгоритм редукции линейных интегральных уравнений с равномерной погрешностью в правой части к конечномерной задаче квадратичного программирования предложен в работе [36].

С другой стороны, специфика операторов Вольтерра такова, что при сделанных предположениях о гладкости исходных данных уравнение (4.2.74) корректно поставлено на паре  $\left( \mathcal{C}_{[0,t]}, \mathcal{C}_{[0,t]}^{\odot(1)} \right)$ , где

$$\mathcal{C}_{[0,t]}^{\odot(1)} = \left\{ g(t) : g(t) \in \mathcal{C}_{[0,t]}^{(1)}, g(0) = 0 \right\}.$$

Это позволяет находить численное решение (4.2.74) путем прямой дискретизации исходного уравнения.

Подробную классификацию существующих численных методов, основанных на таком подходе, а также обширный список литературы по данному вопросу можно найти в монографии [162]. В [26, с. 110-114] также изложен подробный материал по специфике интегральных уравнений Вольтерра I рода.

К настоящему времени разработано достаточно большое количество численных методов решения интегрального уравнения Вольтерра I рода (4.2.74), когда ядро уравнения  $x(t, s)$  и правая часть  $f(t)$  (исходные данные) предполагаются известными без погрешностей и соответственно обладают нужной гладкостью. Если же исходные данные известны приближенно:  $\tilde{x}(t, \nu)$ ,  $\tilde{f}(t)$ , причем погрешности в информации выводят решение

за пределы множества корректности, возможен путь, объединяющий положительные стороны обоих направлений – помехоустойчивость и алгоритмическую простоту. Идея данного подхода заключается в следующем. Во-первых, использовать дискретизацию непосредственно исходного уравнения (4.2.74) с помощью выбранного «базового» метода. Во-вторых, поскольку используемый в новых условиях метод уже не дает сходимости приближенного решения к точному при  $h \rightarrow 0$ , то следует согласовать шаг сетки с уровнем погрешности так, чтобы процедура дискретизации сама обладала регуляризирующим свойством. Использовать шаг сетки в качестве параметра регуляризации было впервые предложено для уравнения Фредгольма I рода со слабой сингулярностью в ядре в [45]. В статье [7] показано, что метод квадратур, основанный на простейших квадратурных формулах (левых, правых, средних прямоугольников, а также трапеций), порождает регуляризирующий алгоритм, в котором параметром регуляризации является шаг квадратурной формулы.

Далее в настоящей главе излагаются результаты численного решения уравнений Вольтерра I рода. Используется регуляризирующее свойство процедуры дискретизации. В качестве «базового» метода использовалась квадратура (кубатура) средних прямоугольников. Такой выбор обусловлен относительной простотой реализации и получения приближённого решения с погрешностью порядка  $\mathcal{O}(h^2)$  в случае отсутствия возмущений исходных данных.

Итак, рассмотрим задачи численного решения уравнений (4.2.11) и (4.2.13) для восстановления ядер  $K_1(t, s_1)$ ,  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2)$  соответственно и докажем сходимость со вторым порядком и покажем, что данный метод порождает регуляризирующие алгоритмы в смысле А.Н. Тихонова, если шаг сетки согласовать с погрешностью вычислений.

Следуя принципу от простого к сложному, рассмотрим простейшее линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода, выведенное нами при моделировании выше, и имеющее вид

$$\int_0^{\omega} K_1(t, \nu) d\nu = f_1(t, \omega), \quad 0 \leq \nu \leq t \leq T, \quad (4.2.75)$$

где  $t, \omega \in \Delta_1 = \{t, \omega / 0 \leq \omega \leq t \leq T\}$ . Введем равномерные сетки узлов вида

$$t_j = jh, \quad \omega_i = ih, \quad \omega_{j-\frac{1}{2}} = (j - \frac{1}{2})h, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}, \quad Nh = T.$$

Применяя для аппроксимации интеграла в (4.2.75) формулу средних прямоугольников, получаем систему линейных алгебраических уравнений порядка  $\frac{N(N+1)}{2}$

$$h \sum_{k=1}^i K_{1,j,k-\frac{1}{2}}^h = f_{1,j,i}^h, \quad 1 \leq i \leq j \leq N.$$

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$K_{1,j,i-\frac{1}{2}}^h = \frac{f_{1,j,i}^h - f_{1,j,i-1}^h}{h}, \quad 1 \leq i \leq j \leq N. \quad (4.2.76)$$

Исследуем сходимость сеточной аппроксимации  $K_1^h$  к точному значению  $K_1$ .

**Утверждение 4.2.1.** Пусть существует решение интегрального уравнения (4.2.75) и  $f_1 \in \mathcal{C}_{\Delta_1}^{(3)}$ . Тогда метод квадратур, основанный на формуле средних прямоугольников, имеет второй порядок сходимости, причем справедлива следующая оценка погрешности

$$\|\varepsilon_1^h\|_{C_h} = \max_{i,j} \left| K_1(t_{jh}, \omega_{(i-\frac{1}{2})h}) - K_{1,j,i-\frac{1}{2}}^h \right| \leq \frac{1}{24} h^2 M_3,$$

$$\text{где } M_3 = \max_{t,\omega} \left| \frac{\partial^3 f_1}{\partial \omega^3} \right|.$$

*Доказательство.* Разложим правую часть интегрального уравнения (4.2.76) в ряд Тейлора в окрестности точки  $(t_j, \omega_{1_{i-\frac{1}{2}}})$ , до третьего порядка включительно. Вспоминая введенную выше сетку, получаем

$$\begin{aligned} f_1(jh, ih) &= f_1(jh, (i - \frac{1}{2})h) + \sum_{n=1}^2 \frac{h^n}{n!} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^n f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h} + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^3 f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h+\theta_1 \frac{h}{2}}, \\ f_1(jh, (i-1)h) &= f_1(jh, (i - \frac{1}{2})h) + \sum_{n=1}^2 \frac{h^n}{n!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^n f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h} + \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^3 f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h-\theta_2 \frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ . Подстановка в (4.2.76) приводит к формуле

$$K_{1,j,i-\frac{1}{2}}^h = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^2 \frac{h^n}{n!2^n} \left( \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^n - \left( -\frac{\partial}{\partial \omega} \right)^n \right) f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h} -$$

$$-\frac{h^2}{3!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^3 f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h-\theta_1 \frac{h}{2}} - \frac{h^2}{3!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^3 f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h-\theta_2 \frac{h}{2}}.$$

Вспоминая, что точное значение ядра

$$K_1(t, \omega) = f'_{1\omega}(t, \omega),$$

найдем разность значений точного ядра и приближенного, предполагая, что  $f_1$  – трижды дифференцируемая функция.

$$K_1\left(jh, \left(i - \frac{1}{2}\right)h\right) - K_{1,j,i-\frac{1}{2}}^h = f'_{1\omega}(t, \omega) \Big|_{t=jh, \omega=(i-\frac{1}{2})h} -$$

$$-\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial \omega}\right) f_1(t, \omega)\right) \Big|_{t=jh, \omega=(i-\frac{1}{2})h} -$$

$$-\frac{h^2}{3!} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega}\right)^3 f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h-\theta_1 \frac{h}{2}} + \frac{h^2}{3!} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega}\right)^3 f_1(jh, \omega) \Big|_{\omega=(i-\frac{1}{2})h-\theta_2 \frac{h}{2}}.$$

Оценивая полученную разность по модулю, получаем искомую оценку погрешности данного метода квадратур

$$\|\varepsilon^h\|_{C_h} = \max_{i,j} \left| K_1(t_{jh}, \omega_{(i-\frac{1}{2})h}) - K_{1,j,i-\frac{1}{2}}^h \right| \leq \frac{1}{24} h^2 M_3,$$

$$\text{где } M_3 = \max_{t,\omega} \left| \frac{\partial^3 f_1}{\partial \omega^3} \right|,$$

причем  $f_1$  – трижды дифференцируемая функция.  $\square$

Из этой оценки видно, что указанный метод квадратур имеет второй порядок сходимости по шагу  $h$ .

Перейдем к численному решению уравнения (4.2.13) относительно трёхмерного ядра  $K_{11}$ . Вспомним, что проблема идентификации ядра  $K_{11}(t, s_1, s_2)$  была сведена к двумерному интегральному уравнению Воль-

терра I рода

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - 2 \int_0^{\omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 + \\ & + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = f_{11}(t, \omega_1, \omega_2), \end{aligned} \quad (4.2.77)$$

где  $t, \omega_1, \omega_2 \in \Delta_2 = \{0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T, \omega_1, \omega_2 \geq 0\}$ . Рассмотрим проблему численного решения этого уравнения. Введем равномерные сетки узлов

$$\begin{aligned} t_i &= ih, \quad \omega_{1j} = jh, \quad \omega_{1_{j-\frac{1}{2}}} = \left(j - \frac{1}{2}\right)h, \quad \omega_{2k} = kh, \quad \omega_{2_{k-\frac{1}{2}}} = \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \\ i, j &= \overline{1, N}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad Nh = T. \end{aligned}$$

Применив для аппроксимации интегралов в (4.2.77) формулу средних прямоугольников, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} h^2 \left[ \sum_{l=1}^j \sum_{m=1}^j K_{i, l-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^h - 2 \sum_{l=1}^j \sum_{m=j+1}^{j+k} K_{i, l-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^h + \sum_{l=j+1}^{j+k} \sum_{m=j+1}^{j+k} K_{i, l-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}^h \right] = \\ = f_{i, j, k}, \quad 0 \leq j + k \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (4.2.78)$$

Число уравнений системы совпадает с числом неизвестных и равно

$$\sum_{n=1}^N \frac{n(n+1)}{2} = C_{N+2}^3. \quad (4.2.79)$$

Матрица полученной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 2 & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 & 1 & 2 & -2 & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -2 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Приводя матрицу системы (4.2.78) к диагональному виду, получаем явные формулы обращения

$$K_{11}^h_{i,j+k-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{f_{i,j-1,k+1}^h - f_{i,j-1,k}^h - f_{i,j,k}^h + f_{i,j,k-1}^h}{4h^2}, \quad (4.2.80)$$

$$1 \leq j+k \leq i \leq N;$$

$$K_{11}^h_{i,j-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{f_{i,j-1,1}^h - 2f_{i,j-1,0}^h + f_{i,j,0}^h}{2h^2}, \quad 1 \leq j \leq i \leq N. \quad (4.2.81)$$

Формулы (4.2.80) и (4.2.81) получены с использованием пакета для работы с аналитическими выражениями Maple.

Исследуем сходимость сеточной аппроксимации  $K_{11}^h$  к точному значению  $K_{11}$ .

**Утверждение 4.2.2.** Пусть существует решение интегрального уравнения (4.2.77) и сверх того  $f_{11} \in \mathcal{C}_{\Delta_2}^{(4)}$ . Тогда метод кубатур, основанный на формуле средних прямоугольников, имеет второй порядок сходимости, причем справедлива следующая оценка погрешности

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1^h\|_{C_h} &= \max_{i,j,k} \left| K_{11} \left( ih, \left( j+k-\frac{1}{2} \right) h, \left( j-\frac{1}{2} \right) h \right) - K_{11}^h_{i,j+k-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right| \leq \\ &\leq \frac{5}{48} h^2 M_4, \\ \text{где } M_4 &= \max_{\substack{\mu+\nu=4 \\ t,\omega_1,\omega_2}} \left| \frac{\partial^4 f_{11}}{\partial \omega_1^\nu \partial \omega_2^\mu} \right|. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Разложим правые части (4.2.80) и (4.2.81) в ряд Тейлора в окрестности точек  $(t_i, \omega_{1_{j-\frac{1}{2}}}, \omega_{2_k})$  и  $(t_i, \omega_{1_{j-\frac{1}{2}}}, \omega_{2_1})$  соответственно. Для демонстрации техники приведём вычисления лишь для (4.2.80).

$$\begin{aligned} f_{11}(ih, (j-1)h, (k+1)h) &= f_{11}(ih, (j-1/2)h, kh) + \\ &+ \sum_{n=1}^3 \frac{h^n}{n!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^n f_{11}(ih, \omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h, \omega_2=kh} + \\ &+ \frac{h^4}{4!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h-\theta(1/2), \omega_2=kh+\theta}, \\ f_{11}(ih, (j-1)h, kh) &= f_{11}(ih, (j-1/2)h, kh) + \\ &+ \sum_{n=1}^3 \frac{h^n}{n!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^n f_{11}(ih, \omega_1, kh) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^4}{4!} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, kh) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h-\theta(1/2)}, \\
& \quad f_{11}(jh, kh) = f(ih, (j-1/2)h, kh) + \\
& + \sum_{n=1}^3 \frac{h^n}{n!} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^n f_{11}(ih, \omega_1, kh) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h} + \\
& + \frac{h^4}{4!} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, kh) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h+\theta(h/2)}, \\
& \quad f_{11}(ih, jh, (k-1)h) = f_{11}(ih, (j-1/2)h, kh) + \\
& + \sum_{n=1}^3 \frac{h^n}{n!} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^n f_{11}(ih, \omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h, \omega_2=kh} + \\
& + \frac{h^4}{4!} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h+\theta(h/2), \omega_2=kh-\theta}.
\end{aligned}$$

Подставляя в (4.2.80), приходим к формуле

$$\begin{aligned}
K_{11}^h_{j+k-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4h^2} \sum_{n=1}^3 \frac{h^n}{n!} \left\{ (-1)^n \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^n - (-1)^n \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^n - \right. \\
& \quad \left. - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^n + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^n \right\} f_{11}(ih, \omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h, \omega_2=kh} + \\
& + \frac{h^4}{4!} \left\{ \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, \omega_2) \Big|_{t_i=ih, \omega_1=(j-1/2)h-\theta(1/2), \omega_2=kh+\theta} - \right. \\
& \quad - \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, kh) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h-\theta(1/2)} - \\
& \quad - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, kh) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h+\theta(h/2)} + \\
& \quad \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 f_{11}(ih, \omega_1, \omega_2) \Big|_{\omega_1=(j-1/2)h+\theta(h/2), \omega_2=kh-\theta} \right\}, \quad (4.2.82)
\end{aligned}$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Распишем выражение под знаком суммы в формуле (4.2.82) для:



$$n=1 \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} = 0;$$

$$n=2 \quad \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^2 =$$

$$= 2 \frac{\partial^2}{\partial \omega_2^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2};$$

$$n=3 \quad \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^3 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^3 - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^3 - \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^3 = 0;$$

$$n=4 \quad \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^4 - \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^4 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 \neq 0.$$

Вспоминая, что точное решение имеет вид

$$K_{11}(\cdot) = \frac{f''_{11\omega_2^2} - f''_{11\omega_1\omega_2}}{4},$$

получаем искомую оценку

$$\|\varepsilon^h\|_{C_h} = \max_{i,j,k} \left| K_{11} \left( ih, \left( j + k - \frac{1}{2} \right) h, \left( j - \frac{1}{2} \right) h \right) - K_{11}^h_{i,j+k-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right| =$$

$$= \max_{i,j,k} \left| \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial \omega_2^2} - \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \right) - \frac{1}{4h^2} \frac{h^2}{2!} \left( 2 \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial \omega_2^2} - 2 \frac{\partial^2 f_{11}}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4h^2} \frac{h^4}{4!} \left[ 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 - 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right)^4 \right] f_{11} \right| =$$

$$= \frac{h^2}{48} \max_{i,j,k} \left| \left[ \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right)^4 - \frac{1}{16} \frac{\partial^4}{\partial \omega_1^4} \right] f_{11} \right| \leq \frac{h^2}{48} 5M_4.$$

Итак, окончательно получим

$$\|\varepsilon_h\|_{C_h} = \max_{i,j,k} \left| K_{11} \left( ih, \left( j + k - \frac{1}{2} \right) h, \left( j - \frac{1}{2} \right) h \right) - \right. \quad (4.2.83)$$

$$\left. - K_{11}^h_{i,j+k-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{5}{48} h^2 M_4,$$

$$\text{где } M_4 = \max_{\substack{\mu+\nu=4 \\ t, \omega_1, \omega_2}} \left| \frac{\partial^4 f_{11}}{\partial \omega_1^\nu \partial \omega_2^\mu} \right|,$$

причем  $f_{11}$  – четырежды дифференцируемая функция. Из этой оценки видно, что данный метод кубатур также имеет второй порядок сходимости.  $\square$

Предположим теперь, что вместо точной правой части  $f_{11}(t, \omega_1, \omega_2)$  задана приближенная –  $\widetilde{f}_{11}(t, \omega_1, \omega_2)$ , причем

$$\left| f_{11}(t, \omega_1, \omega_2) - \widetilde{f}_{11}(t, \omega_1, \omega_2) \right| \leq \delta. \quad (4.2.84)$$

Используя (4.2.80), (4.2.81), (4.2.83) и неравенство треугольника, получаем оценку погрешности

$$\widetilde{\varepsilon}_h = \max_{i,j,k} \left| K_{11} - \widetilde{K}_{11}^h \right| \leq \frac{2\delta}{h^2} + \frac{5}{48} h^2 M_4, \quad (4.2.85)$$

где за  $\widetilde{K}^h$  обозначено решение (4.2.78) с правой частью  $\widetilde{f}$ .

Эта оценка отражает влияние двух видов погрешности – исходных данных (первое слагаемое) и метода (второе слагаемое). Квазиоптимальный шаг определим как

$$h_{\text{ко}} = \arg \min_h \left( \frac{2\delta}{h^2} + \frac{5}{48} h^2 M_4 \right).$$

Откуда следует, что асимптотическая оценка для шага имеет вид

$$h_{\text{ко}}(\delta) \asymp \delta^{\frac{1}{4}}, \quad (4.2.86)$$

а для погрешности

$$\varepsilon_{h_{\text{ко}}}(\delta) = \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}}). \quad (4.2.87)$$

Полученные оценки означают, что метод кубатур обладает регуляризующим свойством – при стремлении  $\delta$  к нулю и выборе шага сетки как величины порядка  $\delta^{1/4}$  погрешность сеточного решения также стремится к нулю со скоростью не меньшей, чем  $\delta^{1/2}$ .

Очевидно, что задача численного решения соответствующего многомерного интегрального уравнения для восстановления симметричного ядра  $K_{111}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ , а также частично-симметричного  $K_{112}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  и несимметричных ядер  $K_{12}(t, \nu_1, \nu_2)$ ,  $K_{123}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  не представляет особой трудности и может быть решена аналогично двумерному случаю.

Для методологических целей рассмотрим модельный пример – уравнение (4.2.77) с ядром  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) = \nu_1^2 + \nu_2^2$ :

$$\int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} (\nu_1^2 + \nu_2^2) d\nu_1 d\nu_2 - 2 \int_0^{\omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} (\nu_1^2 + \nu_2^2) d\nu_1 d\nu_2 + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} (\nu_1^2 + \nu_2^2) d\nu_1 d\nu_2 = f(t, \omega_1, \omega_2),$$

откуда

$$f_{11}(t, \omega_1, \omega_2) = -\frac{4}{3}\omega_1\omega_2^3 - 4\omega_1^2\omega_2^2 - \frac{16}{3}\omega_1^3\omega_2 + \frac{2}{3}(\omega_1 + \omega_2)^4. \quad (4.2.88)$$

Дифференцируя  $f$  по формуле (4.2.15), получаем

$$K_{11}(t, \omega_1, \omega_1 + \omega_2) = 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2. \quad (4.2.89)$$

Непосредственной подстановкой в ядро  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) = \nu_1^2 + \nu_2^2$  и, переходя к переменным  $w_1, w_2$ , получаем исходное ядро

$$K_{11}(t, \omega_1, \omega_1 + \omega_2) = 2\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2. \quad (4.2.90)$$

Для задачи идентификации ядра вида  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) = \nu_1^2 + \nu_2^2$  проведены компьютерные расчеты с применением формулы средних прямоугольников. Получены значения погрешностей в зависимости от шага сетки.

Таблица 4.1: Погрешности в зависимости от шага сетки

h	$\varepsilon^h$
1.00000	0.16666
0.50000	0.04166
0.25000	0.01041
0.12500	0.00260
0.06250	0.00065
0.03125	0.00016
0.01562	0.00004
0.00781	0.00001

Из табл. 4.1 видно, что указанный метод действительно имеет второй порядок сходимости: при уменьшении шага сетки в  $k$  раз погрешность уменьшается в  $k^2$  раз.

Асимптотические оценки для  $h_{\text{ко}}$  и  $\varepsilon_{h_{\text{ко}}}$  подтверждаются расчетами на синтетических данных. В табл. 4.2 – 4.4 для различных видов ядер подсчитаны оптимальный шаг и оптимальная погрешность при условии, что вместо точного выходного сигнала  $f$  имеем его приближенное значение  $\tilde{f}_\delta$ , причём возмущения носили наиболее неприятный пилообразный характер.

Для выбора оптимального шага использовался метод Фибоначчи (см. [121]) с числом испытаний равным 10. В таблицах приняты обозначения:  $\delta$  – погрешность исходных данных,  $h_{\text{оп}}$  – оптимальный шаг,  $\varepsilon_{\text{оп}}^h$  – погрешность оптимальная,  $\ell$  – ширина текущего интервала.

Таблица 4.2: Расчеты для ядра  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) = \nu_1^2 + \nu_2^2$

$\delta$	$h_{\text{оп}}$	$\varepsilon_{\text{оп}}^h$	$\ell$
$10^{-1}$	0.9887	0.36751	0.0112
$10^{-2}$	0.5888	0.11547	0.0111
$10^{-3}$	0.3307	0.03651	0.0066
$10^{-4}$	0.1858	0.01154	0.0037
$10^{-5}$	0.1044	0.00365	0.0020
$10^{-6}$	0.0586	0.00115	0.0011
$10^{-7}$	0.0329	0.00036	0.0006

Таблица 4.3: Расчеты для ядра  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2) = e^{\nu_1} e^{\nu_2}$ .

$\delta$	$h_{\text{оп}}$	$\varepsilon_{\text{оп}}^h$	$\ell$
$10^{-1}$	0.64044	0.72427	0.0112
$10^{-2}$	0.43896	0.16410	0.0071
$10^{-3}$	0.22687	0.05988	0.0049
$10^{-4}$	0.15550	0.01942	0.0025
$10^{-5}$	0.08037	0.00651	0.0017
$10^{-6}$	0.04515	0.00216	0.0009

Из табл. 4.2, 4.3 видно, что при уменьшении погрешности исходных данных  $\delta$  в  $10^4$  раз,  $h_{\text{оп}}$  уменьшается в 10 раз, а  $\varepsilon_{\text{оп}}^h$  в 100 раз, что согласуется с асимптотическими оценками (4.2.86), (4.2.87).

Таблица 4.4: Расчеты для ядра  $K_{11}(t, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = \nu_1 \nu_2$

$\delta$	$h_{\text{оп}}$	$\varepsilon_{\text{оп}}^h$	$\ell$
$10^{-1}$	0.9887	0.20457	0.0112
$10^{-2}$	0.9776	0.02092	0.0111
$10^{-3}$	0.9666	0.00214	0.0109
$10^{-4}$	0.9558	0.00021	0.0108
$10^{-5}$	0.9450	0.00002	0.0107
$10^{-6}$	0.9344	0.00000	0.0106
$10^{-7}$	0.9239	0.00000	0.0104

В табл. 4.4 представлены расчеты в случае, когда ядро имеет такой вид, что погрешность метода  $\frac{5}{48} h^2 M_4$  обращается в ноль и  $\arg \min_h \frac{2\delta}{h^2}$

достигается при  $h_{\text{оп}} \rightarrow \max_{t \in [0,1]} t$ .

### Тестирование на синтетических данных динамики теплообмена

Для проверки эффективности описанных алгоритмов идентификации ядер Вольтерра были выполнены численные эксперименты с использованием синтетических данных, полученных с помощью эталонной математической модели нелинейной динамики стационарного процесса теплообмена. Процесс протекает в теплообменнике (в котором при наружном обогреве движется поток жидкости), входящем в состав высокотемпературного контура (ВТК) ИСЭМ СО РАН. Данный подход был использован компанией Роснефть для повышения эффективности работы турбокомпрессора М-1 ЭП-300 [130].

Для описания динамических процессов в теплосиловых установках и их элементах наиболее часто используются дифференциальные уравнения в частных производных с большим числом замыкающих соотношений, что позволяет создавать математические модели с разной степенью детализации изучаемых процессов.

В [117] показано, что алгебро-дифференциальная система

$$\begin{aligned} \Delta D(\tau) \frac{di_o^*}{dz} + D(\tau) \frac{\partial \Delta i^*(\Delta p, \Delta t)}{\partial z} + g_v \frac{\partial \Delta i^*(\Delta p, \Delta t)}{\partial \tau} = \\ = \Delta \alpha(\tau) h(\theta_o - t_o) + \alpha(\tau) h(\Delta \theta(z, \tau) - \Delta t(z, \tau)), \end{aligned} \quad (4.2.91)$$

$$\begin{aligned} \Delta q(\tau) - g_m c_m \frac{\partial \Delta \theta(z, \tau)}{\partial \tau} = \\ = \Delta \alpha(\tau) h(\theta_o - t_o) + \alpha(\tau) h(\Delta \theta(z, \tau) - \Delta t(z, \tau)) \end{aligned} \quad (4.2.92)$$

описывает динамический теплообменный процесс.

Здесь  $\tau$  – время (с),  $z$  – осевая координата (м),  $D$  – расход вещества (кг/с);  $q$  – тепловая нагрузка (кВт),  $g$  – масса (кг/м),  $h$  – поверхность теплообмена (м), отнесенные к единице длины;  $i^*$  – энтальпия (кДж/кг) – термодинамическая функция, зависящая от давления и температуры,  $t, \theta$  – температура потока вещества и стенки (К),  $c$  – удельная теплоемкость (кДж/кг · К),  $p$  – давление (Н/м<sup>2</sup>),  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи (кВт/м<sup>2</sup> · К),  $\Delta$  – приращение, например,  $D(\tau) = D_0 + \Delta D(\tau)$ ,  $\alpha(\tau) = \alpha_0 + \Delta \alpha(\tau)$ ; индексами 0 обозначены параметры начального стационарного режима, например,  $i_0^* = i^*(\Delta p, \Delta t)|_{\tau=0}$ , «in» – значение на входе, «v» – вещество потока, «m» – материал стенки.

Начальные условия имеют вид

$$\Delta i^*(\Delta p, \Delta t)|_{\tau=0} = 0, \quad \Delta t(z, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \Delta \theta(z, \tau)|_{\tau=0} = 0.$$

Граничные условия имеют вид

$$\Delta i^*(\Delta p, \Delta t)|_{z=0} = \Delta i_{\text{in}}(\tau).$$

Параметры состояния системы  $\Delta i^*$ ,  $\Delta t$  связаны уравнением

$$\Delta i^*(\Delta p, \Delta t) = c_v \Delta t(z, \tau) + \left( \frac{\partial i^*}{\partial p} \right)_t \Delta p(\tau). \quad (4.2.93)$$

Найти точное решение (4.2.91) – (4.2.93) при произвольно заданной функции  $D(\tau)$  не представляется возможным.

Введем обозначение  $i^*(\Delta p, \Delta t) = i(\tau)$  в предположении линейности изменения по пространственной переменной  $z$ . Перейдем от модели с распределенными параметрами (4.2.91), (4.2.92) к модели с сосредоточенными параметрами

$$\begin{aligned} \Delta D(\tau)(i_0 - i_{0_{\text{in}}}) + D(\tau)(\Delta i(\tau) - \Delta i_{\text{in}}(\tau)) + G_v \frac{d\Delta i(\tau)}{d\tau} = \\ = \Delta \alpha(\tau)H(\theta_0 - t_0) + \alpha(\tau)H(\Delta \theta(\tau) - \Delta t(\tau)), \end{aligned} \quad (4.2.94)$$

$$\begin{aligned} \Delta Q(\tau) - G_m c_m \frac{d\Delta \theta(\tau)}{d\tau} = \\ = \Delta \alpha(\tau)H(\theta_0 - t_0) + \alpha(\tau)H(\Delta \theta(\tau) - \Delta t(\tau)), \end{aligned} \quad (4.2.95)$$

с начальными условиями

$$\Delta i(\tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \Delta t(\tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \Delta \theta(\tau)|_{\tau=0} = 0.$$

Здесь  $Q = q \cdot l$  – полная тепловая нагрузка ( $\kappa Bm$ ),  $G = g \cdot l$  – полная масса ( $\kappa g$ ),  $H = h \cdot l$  – полная поверхность теплообмена ( $m^2$ ),  $l$  – длина рассматриваемого участка.

В [116] при допущении, что  $\alpha = K_\alpha D$ ,  $K_\alpha$  – константа, получено решение (4.2.93) – (4.2.95). Заметим, что в начальный момент времени имеет место равенство

$$i_0 - i_{0_{\text{in}}} = \frac{\alpha_0}{D_0} H(\theta_0 - t_0) = K_\alpha H(\theta_0 - t_0) = \frac{Q_0}{D_0},$$

с учетом которого система (4.2.94), (4.2.95) преобразуется к следующему виду

$$\frac{d\Delta i(\tau)}{d\tau} + (a_1 \Delta i(\tau) + b_1 \Delta \theta(\tau)) D(\tau) = g(\tau), \quad (4.2.96)$$

$$\frac{d\Delta\theta(\tau)}{d\tau} + (a_2\Delta i(\tau) + b_2\Delta\theta(\tau))D(\tau) = \omega(\tau), \quad (4.2.97)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{1}{G_v} \left( 1 + \frac{K_\alpha H}{c_v} \right), a_2 = -\frac{K_\alpha H}{G_v c_v c_m}, b_1 = -\frac{K_\alpha H}{G_v}, b_2 = \frac{K_\alpha H}{G_m c_m},$$

$$g(\tau) = \frac{D(\tau)}{G_v} \left( \Delta i_{\text{in}}(\tau) - K_\alpha H K_p \Delta p(\tau) \right), K_p = -\frac{1}{c_v} \left( \frac{\partial i}{\partial p} \right)_t,$$

$$\omega(\tau) = \frac{1}{G_m c_m} \Delta Q(\tau) - \frac{Q_0}{D_0 G_m c_m} \Delta D(\tau) + \frac{K_\alpha H K_p}{G_m c_m} D(\tau) \Delta p(\tau).$$

Как известно [53], система (4.2.96), (4.2.97) решается путем сведения к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами

$$\frac{dR_{1,2}(\tau)}{d\tau} + s_{1,2}D(\tau)R_{1,2}(\tau) = \alpha_{1,2}g(\tau) + \beta_{1,2}\omega(\tau),$$

где  $R_{1,2}(\tau) = \alpha_{1,2}\Delta i(\tau) + \beta_{1,2}\Delta\theta(\tau)$ ;  $s_{1,2}$  — корни характеристического уравнения для системы (4.2.96), (4.2.97);  $\alpha_{1,2}$ ,  $\beta_{1,2}$  — константы, полученные в предположении выполнения равенств

$$\alpha_{1,2}a_1 + \beta_{1,2}a_2 = s_{1,2}\alpha_{1,2}, \quad \alpha_{1,2}b_1 + \beta_{1,2}b_2 = s_{1,2}\beta_{1,2}.$$

Полагая, что  $\Delta i_{\text{in}}(\tau) = 0$ ,  $\Delta p(\tau) = 0$ , и  $\Delta Q(\tau) = 0$ , отклонение эн- тальпии на выходе  $\Delta i(t)$  при произвольных законах возмущений расхода жидкости  $\Delta D(\tau)$  и стационарном значении теплоподвода  $Q_0$  (см. рис. 4.2) выражается [117] в виде:

$$\Delta i(\tau) = \frac{b_1(R_1(\tau) - R_2(\tau))}{s_1 - s_2}, \quad (4.2.98)$$

где

$$R_{1,2}(\tau) = e^{-s_{1,2} \int_0^\tau D(\eta) d\eta} \int_0^\tau \left( \frac{\Delta Q(\eta)}{G_m c_m} - \frac{Q_0 \Delta D(\eta)}{D_0 G_m c_m} \right) e^{s_{1,2} \int_0^\eta D(\xi) d\xi} d\eta.$$

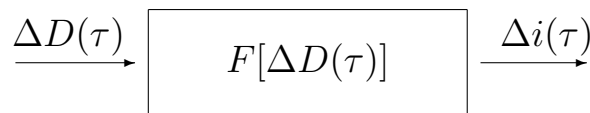


Рис. 4.2.

Отметим существенно нелинейное влияние возмущения расхода  $\Delta D(\tau)$  на динамику  $\Delta i(\tau)$ . В [113] нелинейная динамика теплообмена моделировалась первым (линейная модель) и первыми двумя слагаемыми (квадратичная модель) ряда Вольтерра

$$\int_0^{\tau} \widehat{K}_1(\nu)x(\tau - \nu) d\nu + \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \widehat{K}_{11}(\nu_1, \nu_2)x(\tau - \nu_1)x(\tau - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 = \hat{y}(\tau). \quad (4.2.99)$$

Рассмотрим аппроксимацию нелинейной динамики теплообменника тремя первыми слагаемыми ряда Вольтерра

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau} K_1(\nu)x(\tau - \nu) d\nu + \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{11}(\nu_1, \nu_2)x(\tau - \nu_1)x(\tau - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 + \\ & + \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{111}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)x(\tau - \nu_1)x(\tau - \nu_2)x(\tau - \nu_3) d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = \\ & = y(\tau), \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.2.100)$$

**Замечание 4.2.4.** Для обозначения времени задействовано  $\tau$  вместо используемого в предыдущих главах  $t$ , так как здесь  $t$  – температура потока вещества.

Применим конечный отрезок ряда Вольтерра (4.2.100) (кубичная модель) для моделирования нелинейных динамических процессов, протекающих в теплообменнике в случае произвольного возмущения расхода жидкости  $\Delta D(\tau)$ .

Для анализа и оценки точности моделирования будем использовать конечный отрезок ряда Вольтерра (4.2.99) (квадратичная модель) и модель (4.2.98) в качестве эталона. Заметим, что наличие эталонной модели позволяет оценить эффективность разработанных алгоритмов, не прибегая к реальному теплообменнику.

Задачу математического моделирования динамических систем на базе конечных отрезков ряда Вольтерра можно условно разбить на этапы:

- 1) набор откликов динамической системы на специальные входные возмущения (кусочно-постоянные функции) с целью получения откликов системы, соответствующих слагаемым ряда Вольтерра;
- 2) решение полученных на первом этапе интегральных уравнений Вольтер-



ра I рода относительно искомым переходных характеристик (ядер Вольтерра) и подстановка их в исходный отрезок ряда.

Итак, применительно к данной задаче рассмотрим

$$\int_0^{\tau} K_1(\nu)x(\tau - \nu) d\nu + \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{11}(\nu_1, \nu_2)x(\tau - \nu_1)x(\tau - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 + \quad (4.2.101)$$

$$+ \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} K_{111}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)x(\tau - \nu_1)x(\tau - \nu_2)x(\tau - \nu_3)d\nu_1 d\nu_2 d\nu_3 = y(\tau),$$

где

$$y(\tau) = \Delta i(\tau) = i(\tau) - i_0, \quad i_0 = \frac{Q_0}{D_0} + i_{in}, \quad x(\tau) = \Delta D(\tau).$$

Компьютерные эксперименты для восстановления ядер Вольтерра  $K_1$ ,  $K_{11}$ , и  $K_{111}$  проводилось при стационарном значении расхода вещества  $D_0 = 0,16$  кг/с и стационарном значении тепловой нагрузки  $Q_0 = 100$  кВт.

Тестовые входные возмущения для идентификации ядер Вольтерра имели вид

$$\Delta D_{\omega_1, \omega_2}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} x_{\omega_1, \omega_2}(\tau) = C \cdot (e(t) - 2e(t - \omega_1) + e(t - \omega_1 - \omega_2)),$$

где  $0 \leq \omega_1 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq \tau \leq T$ ,  $C \in \{0.04, 0.08\}$ ,  $T$  — время переходного процесса.

В среде C++ реализована кубичная скалярная модель нелинейных динамических теплообменных процессов, в котором реализованы оба этапа моделирования динамической системы, роль которой играло соотношение (4.2.98).

Численное решение уравнений Вольтерра I рода относительно ядер Вольтерра на втором этапе проводилось по формуле средних прямоугольников, причём были задействованы двухточечный, четырехточечный и восьмиточечный шаблоны.

На рис. 4.5 приведено возмущение  $\Delta D(\tau)$  произвольного характера (оставаясь в пределах  $\pm 50\%$ ) и соответствующие отклики эталонной, кубичной и квадратичной модели. Тесты показали, что погрешность кубичной модели в среднем на 20-40 % меньше квадратичной. Тем не менее, в некоторых случаях квадратичная модель даёт лучшее приближение. Как отмечено в [146], кубичная модель может демонстрировать даже худшее поведение в сравнении с квадратичной, что объясняется не оптимальным выбором амплитуд «обучающих» тестовых входных возмущений (см. рабо-

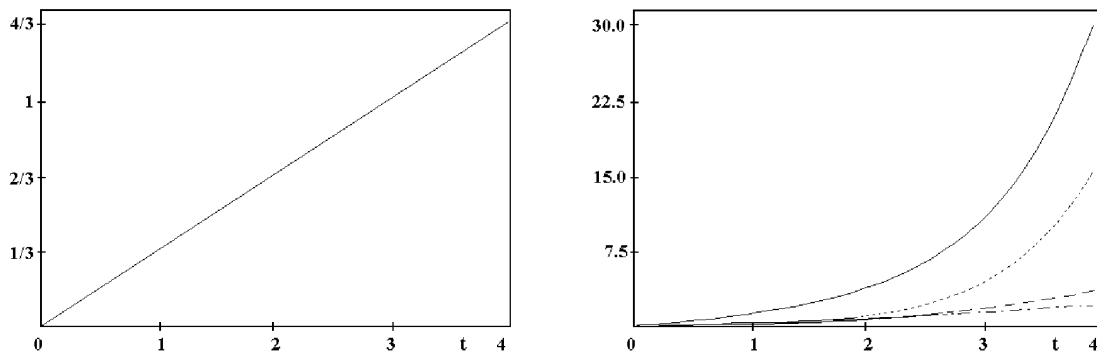


Рис. 4.4: Слева: Входной сигнал. Справа: Отклики моделей Вольтерра. Сплошная линия – эталонная модель, короткий пунктир – кубическая модель, длинный пунктир – квадратичная модель, пунктир – линейная модель.

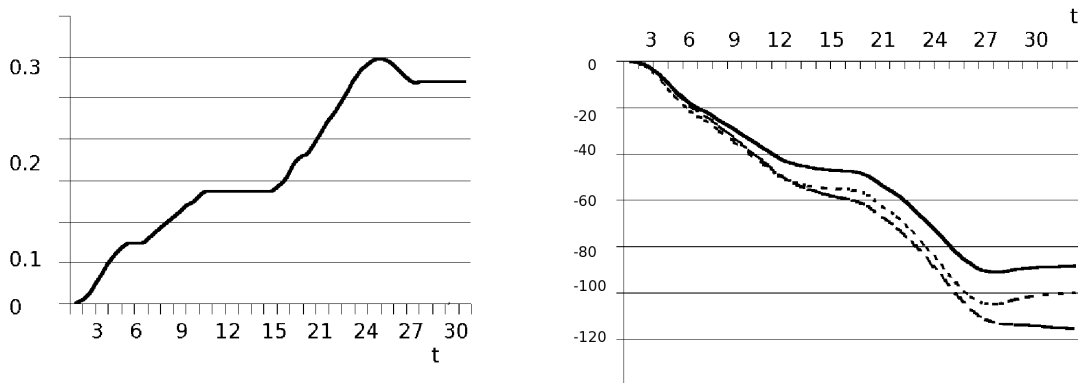


Рис. 4.5: Слева: Входной сигнал. Справа: Отклики моделей Вольтерра. Сплошная линия – эталонная модель, короткий пунктир – кубическая модель, длинный пунктир – квадратичная модель, пунктир – линейная модель.

ту [146] и библиографию в этой работе для подробностей алгоритма выбора оптимальных тестовых входных возмущений).

Резкое увеличение числа арифметических операций при переходе от моделей второго порядка к моделям более высокого порядка нередко препятствует (или даже делает невозможной) их практическую реализацию.

Идентификация ядер Вольтерра основана на процедуре дискретизации, и следовательно требует решения СЛАУ, матрицы которых имеют специальный вид, позволяющий выписать решения в явной форме. Именно этот факт позволил существенно сократить число операций и сделать задачу реализуемой на практике.

Отметим, что дискретные аналоги интегральных уравнений Вольтерра I рода относительно ядер  $K_1(\nu_1)$ ,  $K_{11}(\nu_1, \nu_2)$ , и  $K_{111}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  содержат соответственно  $Q_1 = N$ ,  $Q_2 = \frac{N(N+1)}{2}$  и  $Q_3 = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}$   $N = \frac{T}{h}$  уравнений и столько же неизвестных.

Непосредственное применение метода Гаусса к задаче идентификации ядра  $K_{111}$  (соответствует  $Q_3^3 \sim 10^{18}$ ) без учёта специальной структуры соответствующей СЛАУ, например, на ПК на базе Intel Core i7 880 3.06 GHz для  $h = 0.01$ ,  $N = 100$  потребовало бы  $\sim 10^4$  часов. То есть реализовать кубичную модель было бы невозможно. Построение квадратичной скалярной модели требовало порядка  $\Phi_1 = \mathcal{O}(N^2)$  арифметических операций. Реализация кубичной уже потребовало порядка  $\Phi_2 = \mathcal{O}(N^3)$  операций.

Построение моделей порядка выше третьего представляется затруднительным из-за плохой обусловленности матриц при численном решении многомерных интегральных уравнений Вольтерра I рода. На практике алгоритмы не будут обладать свойством устойчивости к возмущению исходных данных (необходимо проводить численное дифференцирование высокого порядка), к тому же мы неизбежно столкнёмся с «проклятием» размерности.

В заключение отметим, что полученные условия существования и единственности решений указанных классов интегральных уравнений I рода являются довольно жесткими, что может создавать определенные сложности при их практическом применении. Однако для практического использования моделей Вольтерра нет необходимости в идентификации ядер. Достаточно знать интегралы от ядер, которые несложно получить с помощью известной техники интегрирования произведения [239], приложение кото-

рой в простейшем случае для

$$\int_0^{ih} K(s)x(t-s) ds$$

дает

$$\sum_{j=1}^i x(t_{i-j+1/2}) \int_{(j-1)h}^{jh} K(s) ds, t_{i-1/2} = (i-1/2)h, i = \overline{1, n}, nh = T.$$

## Глава 5

# Интегральные модели в обработке сигналов и в машинном обучении

В гл. 5 рассматриваются интегральные модели, широко используемые в настоящее время в обработке сигналов и в алгоритмах машинного обучения. Особое внимание уделяется приложению таких моделей в электроэнергетике, в обработке видео последовательностей и других задачах индустриальной математики. Отметим, что в отличие от процессов, рассмотренных в гл. 1 – 4, математические модели этой главы не являются строго детерминированными в силу специфики решаемых прикладных задач. Поэтому методология и алгоритмы этой главы наряду с интегральными преобразованиями Гильберта, Фурье и основами теории интегральных уравнений (теоремы Мерсера-Гильберта-Шмидта о разложении симметрического ядра, см. [251]), используют статистические подходы, сведения из комбинаторной оптимизации и машинного обучения.

В приведенных расчетах использовались реальные данные, предоставленные автору компаниями British Broadcasting Company (BBC), ASTI Holdings Pte Ltd, Institut National de l'Audiovisuel (INA); биржевые данные рынков электроэнергии предоставлены Nord Pool Spot и Australian National Energy Market (ANEM). В силу специфики математических моделей, используемых на практике в этой области, в гл. 5 потребовался синтез ряда специальных дискретных подходов математического моделирования, интегральных преобразований, статистических методов и методов обработки и распознавания изображений и алгоритмов машинного обучения.

Гл. 5 состоит из трех параграфов. В п. 5.1 изложены алгоритмы прогнозирования временных рядов. Алгоритмы апробированы на биржевых данных рынков электроэнергии, межсистемных перетоков [259] и скорости ветра с целью прогноза генерации энергии, вырабатываемой ветряными фермами Ирландии (остров Valentia) [266], показав хорошие результаты. Эти результаты получены в соавторстве с P. Leahy (University College Cork), В.Г.Курбацким, Н.В.Томиным (ИСЭМ СО РАН) и др. В п. 5.2 изложены алгоритмы реставрации видеопоследовательностей. В п. 5.1 решена задача оценки риска появления неустойчивых межсистемных колебаний в

электроэнергетических системах. Одна производственная задача дефектоскопии решена в 5.3. Отметим, что в заключительном параграфе п. 5.1 изложены результаты совместных работ [299; 301] с V. Šmídl (Прага, UTIA CAS), в п. 5.3 изложены результаты совместных работ [24; 149] с И.Л. Васильевым (Иркутск, ИДСТУ СО РАН). Результаты гл. 5 демонстрируют эффективность алгоритмов, использующих сочетания различных методов непрерывной и дискретной математики при решении конкретных задач индустриальной математики.

## **5.1 Интегральные модели в анализе и прогнозировании временных рядов**

### *О преобразовании Гильберта-Хуанга в прогнозных моделях*

Проблема математического моделирования поведения нестационарных нелинейных динамических систем посредством анализа ретроспективных временных рядов, порожденных такими системами, является одной из наиболее актуальных проблем современной энергетики. Прогнозирование временных рядов наряду с задачей оценивания состояния является фундаментальной проблемой, представляющей как научный, так и прикладной интерес. Анализ и прогнозированию временных рядов посвящен большой объем литературы (см., например, библиографию в [161; 183]), включающий байесовские подходы, методы нейросетевого моделирования, методы машинного обучения, генетические алгоритмы, используемые на основе субъективных знаний экспертов. Однако хорошо известно, что в ряде задач разработанные модели не позволяют строить приемлемый прогноз для временных рядов, порожденных нестационарными нелинейными процессами.

При разработке систем мониторинга электроэнергетических систем (ЭЭС) является актуальной задача прогнозирования компонент вектора состояния. Для таких временных рядов, как правило, характерно нестационарное поведение, которое сложно прогнозировать.

Наглядным примером подобных нестационарных временных рядов могут служить изменения во времени цены на электроэнергию. В настоящее время рынок электроэнергии большинства развитых стран, в том числе и России, является нерегулируемым (т.е. аукционным), что обуславливает неустойчивость равновесной цены. Конкуренность такого рынка обуславливает ряд тенденций: прогнозирование цен становится всё более актуаль-

ным, но в то же время сама эта задача прогнозирования представляется всё более сложной ввиду повышения волатильности ценовых реализаций. Текущие рыночные реформы и особенности поведения участников рынка вносят дополнительную непредсказуемость в изменение цены, что вынуждает исследователей обращаться к новым, более сложным моделям прогнозирования.

Традиционно задача прогнозирования временных рядов выполнялась преимущественно с использованием статистических методов, основанных, например, на авторегрессии интегрированного скользящего среднего (АРПСС). Тем не менее, за последние несколько десятилетий искусственные нейронные сети (ИНС) продемонстрировали высокую производительность в задачах классификации и регрессии [73; 123], что привлекло внимание со стороны исследователей, специализирующихся в решении прогнозных задач в электроэнергетике. Отметим, что по сравнению с традиционными статистическими алгоритмами нейросетевой подход позволяет строить алгоритмы с рядом преимуществ. Ряд авторов отмечает, что соответствующие «алгоритмы обладают гибкостью и универсальностью, что даёт возможность применять их к более сложным моделям» [326].

Однако, несмотря на выделенные достоинства, многие исследователи считают, что вопрос о гарантированной эффективности ИНС в решении задачи прогнозирования всё ещё остаётся открытым [135; 199; 322] и требует дальнейших исследований. Во многом это связано со сложностями в эмпирическом выборе оптимальной архитектуры и типа прогнозной модели ИНС. Такие подходы в машинном обучении часто не приводят к оптимальному решению. При выборе архитектуры ИНС обычно тестируются несколько конфигураций с различным количеством элементов. Задача прогнозирования может быть успешно решена следующими типами нейронных сетей: многослойным персептроном, радиально-базисной сетью (РБФ), обобщенно-регрессионной сетью (ОРС, GRNN), сетью на основе интегро-функциональных рядов Вольтерра (см. также п. 4.1) и сетью Эльмана.

Наряду с ИНС в последние годы получили распространение прогноз-ные модели на основе метода опорных векторов [21–23; 123]. Современ-ный метод опорных векторов (МОВ) является нелинейным вариантом ме-тода обобщенных портретов, предложенного В.Н. Валником в 1963 г. [22], и широко используется для решения задач классификации и регрессионного анализа.

Методологически МОВ, подобно ИНС, опирается на известную теорему Ковера [169] о повышении вероятности линейной разделимости образов при преобразовании нелинейной задачи классификации образов в пространство более высокой размерности.

В работах [69; 72; 77; 147; 148; 210; 265; 265; 291] предложен адаптивный подход к прогнозированию временных рядов, подробно описанный в гл. 5. В основе подхода лежит сочетание эффективного аппарата анализа нестационарных временных рядов на базе преобразования Гильберта-Хуанга [180] и нейросетевых моделей [123]. Исходный временной ряд разлагается на эмпирические модальные функции, к которым применяется преобразование Гильберта для вычисления мгновенных амплитуд и частот в каждый момент времени. Далее полученные модальные функции и мгновенные амплитуды используются для автоматического нахождения оптимальных комбинаций входных переменных для последующего применения алгоритмов прогнозирования с использованием МОВ и ИНС. Поиск оптимальных комбинаций входных переменных прогнозной модели осуществляется при помощи метода имитации отжига и нейро-генетического отбора.

### *Прогнозирование на базе ИНС*

Под ИНС понимаются математические модели, реализованные программно или аппаратно и построенные по принципу организации и функционирования биологических нейронных сетей — сетей нервных клеток живого организма. Это понятие возникло при изучении процессов, протекающих в мозге, и при попытке смоделировать эти процессы [123].

ИНС представляют собой систему соединённых и взаимодействующих между собой простых процессоров (искусственных нейронов). Упрощенно можно считать, что биологический нейрон устроен и действует следующим образом. Нейрон имеет тело, совокупность отростков — дендритов, по которым в нейрон поступают сигналы, и отросток — аксон, передающий выходные сигналы другим нейронам. Точка соединения дендрита и аксона называется синапсом. Синапс выполняет функции весового коэффициента, усиливая или ослабляя входной сигнал. Нейрон получает от дендритов набор входных сигналов. В теле нейрона значения входных сигналов суммируются. Однако, влияние входов не равнозначно, а определяется ве-



совыми коэффициентами, которые характеризуют важность поступающей по данному входу информации.

Результативность синапса может настраиваться проходящими через него сигналами, так что синапсы могут обучаться в зависимости от активности процессов, в которых они участвуют. Эта зависимость от предыстории действует как память. Возможно, что она ответственна за память человека.

Математически нейрон представляет собой взвешенный сумматор, единственный выход которого определяется через его входы и матрицу весов следующим образом:

$$y = f(u), \quad u = \sum_{i=1}^n w_i x_i + w_0 x_0.$$

Здесь  $x_i$  и  $w_i$  — соответственно сигналы на входах нейрона и веса входов, функция  $u$  называется индуцированным локальным полем, а  $f(u)$  — передаточной функцией. Возможные значения сигналов на входах нейрона считают заданными в интервале  $[0, 1]$ . Дополнительный вход  $x_0$  и соответствующий ему вес  $w_0$  используются для *инициализации* нейрона.

Каждый нейрон ИНС имеет дело только с сигналами, которые он периодически получает, и сигналами, которые он периодически посылает другим нейронам. Будучи соединёнными в достаточно большую сеть с управляемым взаимодействием, такие локально простые нейроны вместе способны выполнять довольно сложные задачи. С точки зрения машинного обучения ИНС представляет собой частный случай методов распознавания образов, дискриминантного анализа, методов кластеризации и т. п. С математической точки зрения обучение нейронных сетей — это многопараметрическая задача нелинейной оптимизации [35; 123].

Эффективность ИНС в решении задач прогнозирования временных рядов напрямую следуют из ее способности к обобщению и выделению скрытых зависимостей между входными и выходными данными. После обучения ИНС может предсказать будущее значение некой последовательности на основе нескольких предыдущих значений и каких-то существующих в настоящий момент факторов. Следует отметить, что прогнозирование возможно только тогда, когда *предыдущие изменения в какой-то степени предопределяют будущее*.

В качестве основных типов ИНС для решения задачи прогнозирования использовались многослойный персептрон и радиальная базисная функция Гаусса (РБФ). Как показали многочисленные экспериментальные расчёты

(см., например, [17; 325]), наиболее эффективным методом обучения ИНС для задачи краткосрочного прогноза представляется квазиньютоновский метод БФГШ (BFGS, Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно) [138]. В то время как метод обратного распространения корректирует веса после обработки каждого наблюдения, квазиньютоновский алгоритм исследует средний градиент поверхности ошибок по всем наблюдениям и обновляет веса в конце каждой эпохи обучения. Метод БФГШ основывается на предположении, что по квадратичной поверхности ошибок можно двигаться непосредственно в направлении минимума, вычисляя шаг с помощью матрицы Гессе (матрицы вторых частных производных поверхности ошибок).

В данном алгоритме используется приближение обратной матрицы Гессе, которая ниже обозначена как  $H$ . Направление наискорейшего спуска обозначается через  $g$ , а вектор весов  $i$ -й эпохи обучения через  $f_i$ . Матрица  $H$  инициализируется единичной матрицей. Поэтому первый шаг осуществляется в направлении  $g$  (т.е. в том же, что и в методе обратного распространения). В каждой эпохе направление поиска определяется как  $d = -Hg$ . На последующих шагах итерации эти величины вычисляются методом БФГШ.

На квадратичной поверхности ошибок это «гарантирует» положительно определенное приближение и сходимостью к истинному обратному Гессиану за конечное число шагов, соответствующее числу весов. На практике эти теоретические положения могут быть нарушены из-за накопления ошибок вычислений, что может привести к потере сходимости метода. В этом случае рекомендуется инициализировать и снова запустить алгоритм или выбрать какой-нибудь другой способ обучения сети.

### *Регрессионная модель на основе метода опорных векторов*

Суть МОВ [21; 123] заключается в проекции исходных векторов анализируемого пространства признаков в пространство более высокой размерности и поиск разделяющей гиперплоскости в этом пространстве. Две параллельные гиперплоскости строятся по обе стороны гиперплоскости, разделяющей классы признаков. Итоговая оптимальная гиперплоскость максимизирует расстояние до двух параллельных гиперплоскостей в предположении, что чем больше расстояние между двумя параллельными гиперплоскостями, тем меньше средняя ошибка классификации и регрессии.

Регрессионная модель на основе МОВ подобно ИНС производит обучение по прецедентам (обучающая выборка исходного временного ряда)  $(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , где  $x_i \in \tilde{X} \subset X$ ,  $y_i \in \tilde{Y} \subset Y$ ,  $X$  – множество входных данных,  $Y$  – множество значений искомой целевой зависимости. МОВ решает задачу построения регрессии, оценивая неизвестную вещественную функцию

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \quad (5.1.1)$$

где  $\varepsilon_i$  – ошибка  $i$ -го наблюдения. В линейном случае

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b, \quad (5.1.2)$$

где  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  – весовые параметры и  $b \in \mathbb{R}$  – параметр смещения. Заметим, что функция  $f(\mathbf{x})$  зависит только от скалярных произведений  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle$ , а не от самих признаков описаний. Задача построения нелинейной регрессии в пространстве  $X$  сводится к задаче построения линейной регрессии в расширенном пространстве признаков  $H$ . Пространство  $H$  получается посредством нелинейного отображения  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow H$  и вместо (5.1.1) оценивается функция

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \phi(\mathbf{x}) \rangle + b.$$

Таким образом, происходит переход в так называемое спрямляющее пространство [1]. Методы выбора отображения  $\phi(\mathbf{x})$  опишем ниже. Нахождение параметров сводится к выпуклой задаче оптимизации, состоящей в минимизации регуляризованного функционала риска (см. также [118; 250; 255])

$$\min_{\mathbf{w}, b, \xi, \xi^*} \left[ \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N (\xi_i + \xi_i^*) \right] \quad (5.1.3)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} y_i - \langle \mathbf{w}, \phi(\mathbf{x}_i) \rangle - b \leq \epsilon + \xi_i, \\ \langle \mathbf{w}, \phi(\mathbf{x}_i) \rangle + b - y_i \leq \epsilon + \xi_i^*, \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0, i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Здесь  $C$  – положительный параметр (штраф ошибки),  $\xi_i$  – параметры обработки неразделимых наблюдений,  $\epsilon$  – параметр потерь. Второе слагаемое в функционале (5.1.3) штрафует любые отклонения  $f(x_i)$  от  $y_i$  согласно ограничениям (5.1.4). Отметим, что здесь использована в качестве функции потерь функция  $\epsilon$ -нечувствительности. Решается двойственная задача

к данной задаче (5.1.3) – (5.1.4)

$$f(x) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_i, x) + b, \quad (5.1.5)$$

где двойственные переменные удовлетворяют условию  $0 \leq \alpha_i, \alpha_i^* \leq C$ , а ядро  $K(x_i, x)$  удовлетворяет условиям теоремы Мерсера (Гильберта – Шмидта) [123] (условию симметрии и неотрицательности) и представимо в виде  $K(x_i, x) = \langle \phi(x_i), \phi(x) \rangle$ . Таким образом, для обучения регрессионной модели на основе МОВ можно использовать реализации эффективных алгоритмов квадратичного программирования (см., например, [71]). На основе анализа исходных данных ядро было выбрано в форме РБФ  $K(x, x') = \exp\left(-\frac{\|x-x'\|^2}{2\sigma^2}\right)$ . Как видно из разложения (5.1.5), параметры  $\mathbf{w}$  представимы через обучающую выборку  $x_i$  и сложность такого приближения не зависит от размерности всего пространства  $X$ .

Отметим, что теорема Мерсера, обосновывающая возможность разложения ядра, является одним из ключевых результатов теории линейных интегральных уравнений и их обобщений на случай самосопряженных операторов.

### *Преобразование Гильберта – Хуанга. Спектр Гильберта*

Для описания работы двухэтапного подхода кратко изложим суть преобразования Гильберта – Хуанга (ПГХ) [180]. ПГХ состоит из двух независимых частей: метода разложения на эмпирические моды (ЭМ, Intrinsic Mode Functions, IMF) и интегрального преобразования Гильберта. Основная идея ПГХ состоит в декомпозиции исходного сигнала  $x(t)$  на модальные ортогональные базисные функции с последующим применением к ним преобразования Гильберта.

Процедура разложения  $x(t)$  представляет собой итеративный процесс, который удобнее всего представить в виде блок-схемы (рис. 5.1). Алгоритм EMD (Empirical Mode Decomposition) подразумевает два цикла: внутренний цикл «отсеевания» и внешний цикл декомпозиции. Соответственно на внутреннем цикле выделяются конкретные IMF, а на внешнем определяется их количество и производится завершение работы алгоритма, если выполнен выбранный критерий останова. Каждая полученная IMF должна удовлетворять двум следующим свойствам:

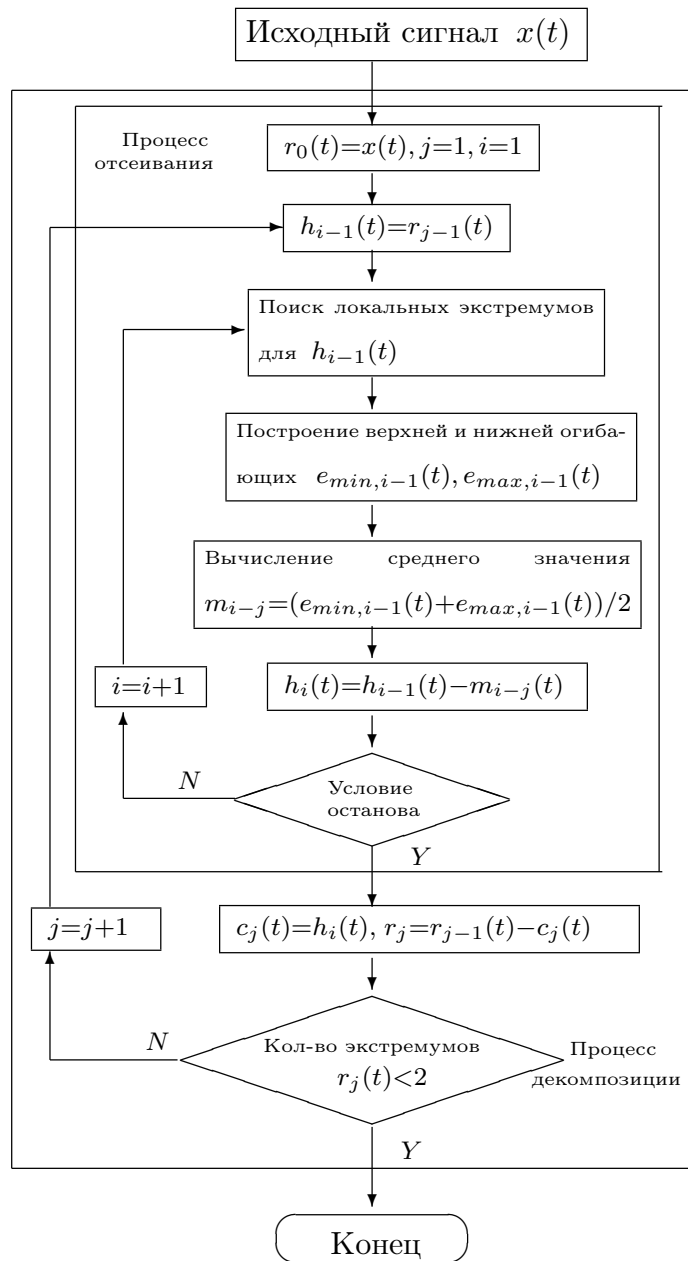


Рис. 5.1: Алгоритм разложения на эмпирические базисные функции (EMD).

- число экстремумов и число пересечений оси абсцисс на заданном интервале должно совпадать;
- для любой точки сигнала IMF среднее значение, определяемое верхней и нижней огибающими, должно быть близко к нулю.

В данной работе критерий останова алгоритма на внутреннем уровне обеспечивается свойствами IMF. Остановка на внешнем уровне осуществляется, когда количество экстремумов в последней IMF меньше двух, при этом такая IMF называется остатком разложения.

После работы алгоритма EMD любой сигнал  $x(t)$  может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{j=1}^n c_j(t) + r_n(t) = \\ &= \sum_{i=1}^q c_i(t) + \sum_{l=q+1}^p c_l(t) + \sum_{k=p+1}^n c_k(t) + r_n(t), \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

где  $q < p < n$ ,  $c_i(t)$  – высокочастотные компоненты,  $c_l(t)$  – компоненты, определяющие физические свойства ряда, и  $c_k(t)$ ,  $r_n(t)$  – трендовые компоненты. Отметим, что в отличие от стандартных методов обработки временных рядов, представленный метод получения IMF вначале выделяет высокочастотные компоненты и заканчивает монотонной функцией или функцией с одним экстремумом. Отметим, что получающиеся в результате применения алгоритма EMD функции  $c_j(t)$ ,  $r_n(t)$  являются взаимортогональными, что исключает избыточность их составляющих и позволяет их использовать в качестве признаков.

Приведенные выше свойства базисных функций  $c_i(t)$  позволяют применить к ним интегральное преобразование Гильберта для вычисления мгновенных амплитуд и мгновенных частот. Для этого дополним исходный сигнал  $x(t)$  до аналитической функции

$$z(t) = x(t) + \mathbf{i} x_H(t), \quad (5.1.7)$$

где  $\mathbf{i}$  – мнимая единица,  $x_H(t)$  – сингулярный интеграл от  $x(t)$  (преобразование Гильберта), определяемый как

$$x_H(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(s)}{t-s} ds. \quad (5.1.8)$$

Здесь ядро претерпевает разрыв II рода на диагонали (при  $t = s$ ) и соответственно интеграл в (5.1.8) понимается в смысле главного (P.V. – principal value) значения по Коши. Перепишем (5.1.7) в экспоненциальной форме

$$z(t) = A(t)e^{i\psi(t)}, \quad (5.1.9)$$

где

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + x_H^2(t)} \quad (5.1.10)$$

позволяет вычислять мгновенную амплитуду, а

$$\psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{x_H(t)}{x(t)} \quad (5.1.11)$$

позволяет вычислять фазу исходного сигнала  $x(t)$ . Тогда производная от фазы определяет мгновенную частоту

$$\omega(t) = \dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{x_H(t)}{x(t)}. \quad (5.1.12)$$

Таким образом, исходный сигнал  $x(t)$  представим в следующем виде:

$$x(t) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n a_i(t) e^{j \int_0^t \omega_i(s) ds}. \quad (5.1.13)$$

Частотно-временное распределение амплитуд определяет спектр Гильберта

$$H(\omega, t) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n a_i(t) e^{j \int_0^t \omega_i(s) ds}. \quad (5.1.14)$$

Формирование двухэтапной модели сводится к следующим трем пунктам:

1. С помощью ПГХ исходный нестационарный временной ряд раскладывается на базисные функции;
2. Полученные функции используются в качестве входных значений для интеллектуальной нейросетевой модели;
3. На основе генетического алгоритма и метода имитации отжига формируется прогнозная модель на основе метода опорных векторов, которая обучается прогнозировать соответствующие изменения параметра режима на заданный интервал упреждения.

Разработанный алгоритм протестирован на реальных данных известной европейской энергетической биржи Nord Pool Spot и Австралийской национальной энергетической биржи (Australian NEM) для Южного Уэль-

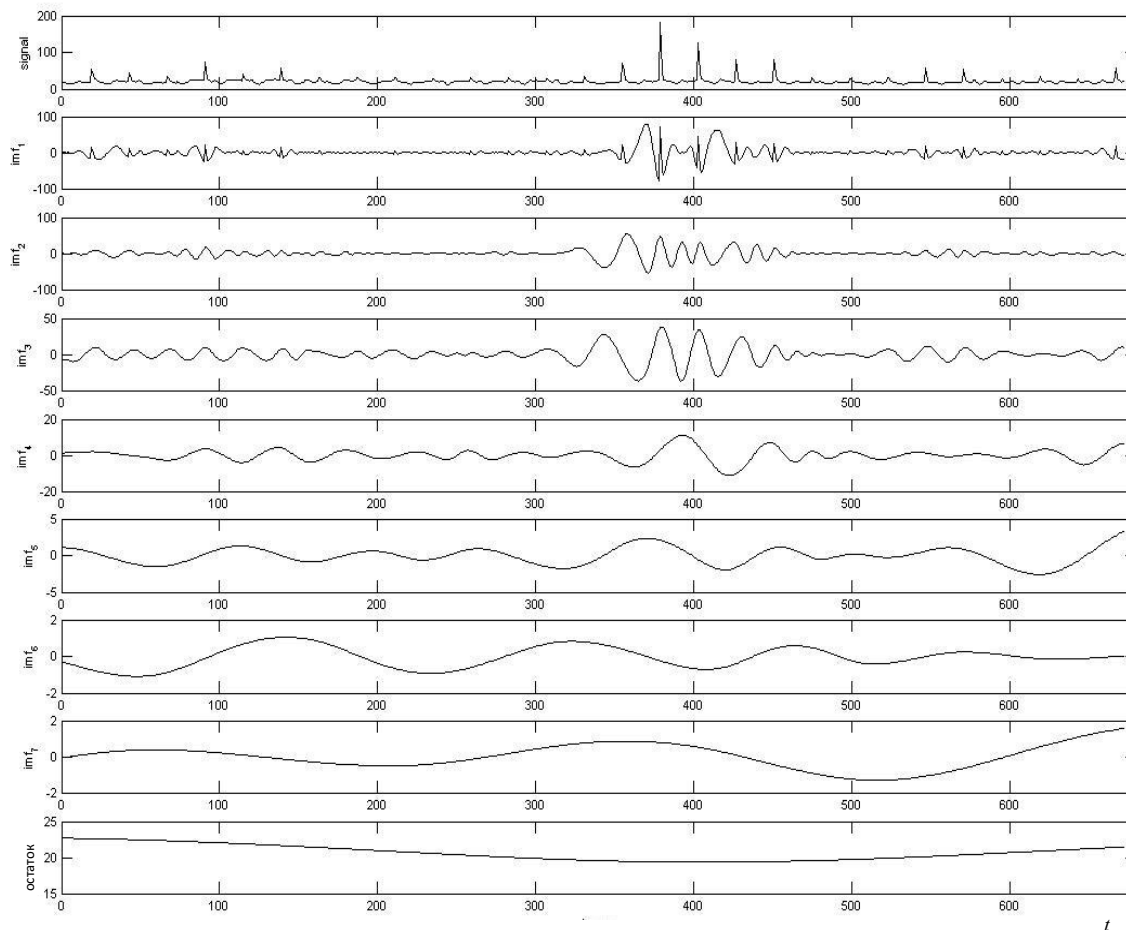


Рис. 5.2: Результаты разложения на эмпирические моды цен на электроэнергию для зоны Южного Уэльса (Австралия) для периода 23 апреля – 21 мая 2006 г.

са. Рассмотрим подробнее результаты расчётов для каждого из примеров.

*Прогнозирование цен на электроэнергию рынка Южного Уэльса (Австралия) «на 1 час вперёд»*

Отметим, что Australian NEM является дуополией с доминирующим игроком. В результате этого, изменения цен на электроэнергию, связанные с поведением доминирующих игроков, сложно предсказать даже в краткосрочной перспективе.

Для оценки эффективности гибридной модели исходный набор данных был разделён на два подмножества, отвечающих соответственно за обучение и тестирование. В качестве обучающей выборки были использованы ретроспективные данные почасовых цен за четыре недели до первого дня недели, цены на которой должны быть предсказаны.



На базе ПГХ исходный временной ряд почасовых цен был разделен на соответствующие компоненты: эмпирические моды (ЭМ), мгновенные частоты (Ч) и амплитуды (А) (см. на рис. 5.3 результаты оценки прогнозной значимости различных признаков), которые в конечном итоге отражают саму исходную выборку и некоторые её физические свойства.

На этапе предварительной оценки информации полученные компоненты были проанализированы с помощью алгоритмов интеллектуального анализа данных (Data mining) Boosting Tree<sup>1</sup> [187] и Random Forest<sup>2</sup> [158] с точки зрения их значимости для прогноза (рис. 5.3). Как видно из этого

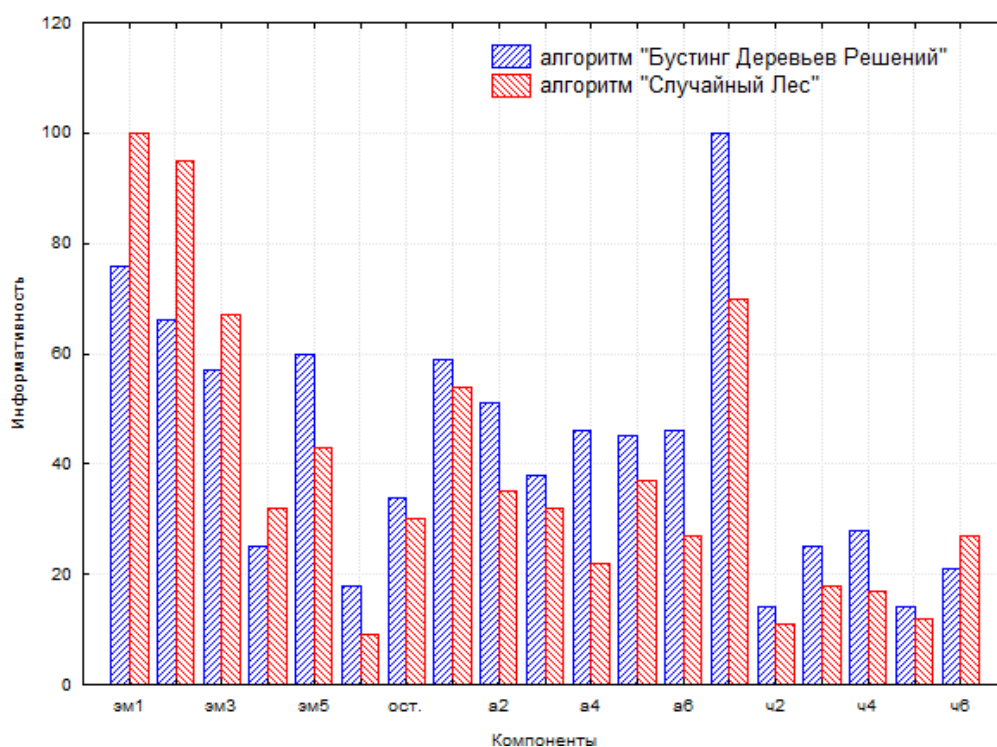


Рис. 5.3: Оценка прогнозной значимости различных компонент исходного временного ряда на базе алгоритмов Boosting Tree и Random Forest (для цен Australian NEM).

анализа, в целом оценки близки по обоим регрессионным алгоритмам, и для данного примера наибольшей значимостью при прогнозировании обладают первые две ЭМ (их показатели для Boosted Tree соответственно 100% и 95%), а также соответствующие им частоты и амплитуды. Остальные же компоненты несут меньшую информационность. Первые ЭМ, как

<sup>1</sup>Boosted Tree (англ. усиленное дерева) – общая идея использует методологию теории графов, а именно деревья принятия решений, и состоит в вычислении последовательности достаточно простых «деревьев», где каждое последующее «дерево» строится для прогнозирования остатков предыдущего «дерева».

<sup>2</sup>Random Forest (англ. случайный лес) – алгоритм машинного обучения, предложенный Лео Брейманом и Адель Катлер, заключающийся в использовании комитета решающих деревьев. Алгоритм сочетает в себе две основные идеи: метод бэггинга Бреймана и метод случайных подпространств, предложенный Тим Кан Но.

известно, отвечают за высокочастотную составляющую исходного временного ряда. Поэтому можно предположить, что особенности австралийского рынка электроэнергии с его значимой ролью доминирующих игроков и, как следствие, высокой степенью непредсказуемости изменения цены, определяют большую значимость именно высокочастотных составляющих исходного временного ряда в сравнении с другими составляющими. После

Таблица 5.1: Обобщённая информация по моделям МОВ и ИНС

Характеристики модели	Значение
Количество независимых переменных	19
Тип ядра в МОВ	РБФ
Штраф ошибки $C$	13
Количество опорных векторов	82 (55 граничных)

Характеристики модели	Значение
Ошибка обучения / ошибка тестирования, %	0,0256 / 0,0194
Тип ИНС	многослойный персептрон 19 – 5 – 1
Алгоритм обучения	BFGS
Тип активационной функции	Экспоненциальная

этого на базе гибридного генетического алгоритма (ГГА) менее значимые компоненты были отброшены, а оставшиеся были использованы в качестве входной выборки для обучения моделей ИНС и МОВ. В результате обучения были получены нейросетевая модель на основе многослойного персептрона и регрессионная модель на основе МОВ, которые впоследствии были использованы для прогнозирования цен на электроэнергию. Детальная информация о полученных моделях представлена в табл. 5.1. Выбор оптимальной архитектуры и структуры нейросетевой модели осуществлялся на базе алгоритмов имитации отжига.

Численные результаты прогнозирования цены на электроэнергию «на 1 час вперёд» на базе полученных гибридных моделей ПГХ-ИНС и ПГХ-МОВ представлены на рис. 5.4 и в табл. 5.1.2. Для сравнения эффективности предложенного подхода в табл. 5.1.2 также представлены результаты прогноза на базе модели АРПСС-ИНС, которая была предложена Р. Areekul и др. [208]. В этой работе также тестировалась гибридная модель на тех же самых австралийских данных и при тех же условиях обучения (4 недели на обучение, 1 неделя – тестирование). Как отмечают в [208], данные по австралийским ценам были тщательно изучены с огромным разнообразием линейных и нелинейных моделей временных рядов, в том числе АРПСС и ИНС. В табл. 5.1.2 представлены ошибки прогнозирования для трех моделей (гибридная АРПСС-ИНС, ПГХ-ИНС и ПГХ-МОВ) в различ-

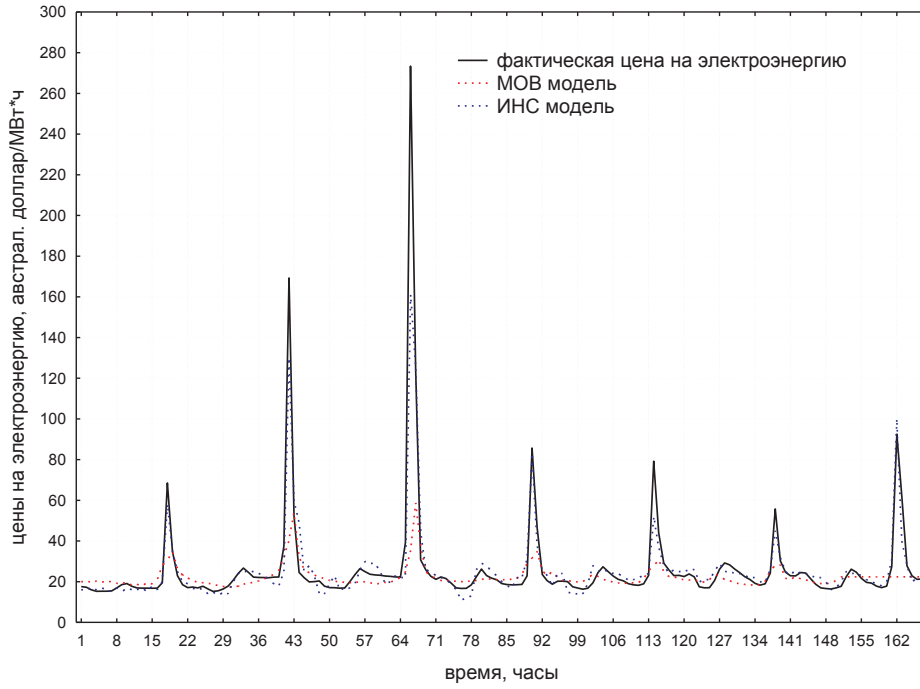


Рис. 5.4: Результаты прогнозирования цен на электроэнергию рынка Австралии «на 1 час вперёд» с использованием ПГХ-ИНС и ПГХ-МОВ гибридных моделей.

ных метриках: MAPE – средняя относительная ошибка

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|x_t - \bar{x}_t|}{x_t} \cdot 100\%, \quad (5.1.15)$$

MAE – средняя абсолютная ошибка

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |x_t - \bar{x}_t|, \quad (5.1.16)$$

и RMSE – среднеквадратичная ошибка

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x}_t)^2}, \quad (5.1.17)$$

где  $\bar{x}_t$  – предсказанная величина в момент времени  $t$ ,  $x_t$  – точное значение и  $n$  – количество отсчетов во временном интервале.

В результате видно, что наиболее точный прогноз даёт гибридная модель ПГХ-ИНС (MAPE – 12,24%) по сравнению с гибридными моделями АРСС-ИНС – 13,03% и ПГХ-МОВ – 17,16%. Отметим, что для модели ПГХ-МОВ наши эксперименты дали меньше ошибку MAE и среднеквадратичную ошибку RMSE (соответственно 7,01% и 23,74%) по сравнению с моделью АРСС-ИНС (7,12% и 28,02%).

Таб. 5.1.2.: Результаты сравнения прогнозов цен на электроэнергию рынка Австралии «на 1 час вперёд» с использованием гибридных моделей

Сезон / Период	Ошибки	АРПСС-ИНС гибридная модель [208]	ПГХ-ИНС гибридная мо- дель	ПГХ-МОВ гибридная мо- дель
Осень 21 – 27.05.2006	MAPE (%)	13.03	12.24	17.16
	MAE	7.12	3.86	7.01
	RMSE	28.02	20.12	23.74

Как видно из рис. 5.4, гибридная модель ПГХ-МОВ хуже «попадает» в пики, нежели модель ПГХ-ИНС. По мнению авторов, это может быть связано со сложностью выбора параметров модели МОВ, а также с неоптимальным выбором области для тестирования [126]. Кроме того, как известно, недостатком МОВ является неустойчивость по отношению к шуму (высокочастотным компонентам) в исходных данных. В данном случае высокочастотные составляющие изучаемого изменения цен на электроэнергию представляются важными для прогноза и не могут быть исключены.

#### *Прогнозирование цен на электроэнергию рынка Nord Pool Spot «на 1 час вперёд»*

«Nord Pool Spot» — энергетическая биржа, включающая Данию, Норвегию, Швецию, Финляндию, Литву и Эстонию. На бирже торгуют большими объемами электроэнергии, вследствие чего используются мегаватт-часы. Данная биржа состоит из сотен участников, что отражается на сложности предсказания цены на электроэнергию в краткосрочной перспективе («на 1 час вперёд» или «на 4 часа вперёд»).

По аналогии с предыдущим примером исходный набор данных был разделён на два типа: обучение и тестирование. В качестве обучающей выборки были использованы ретроспективные данные почасовых цен за 2 месяца. На базе ПГХ исходный временной ряд цен был разделен на соответствующие компоненты: эмпирические моды, мгновенные частоты и амплитуды. Полученные компоненты были проанализированы на базе регрессионных алгоритмов Boosting Tree и Random Tree с точки зрения значимости для прогноза (рис. 5.5).

В приведенном нами примере видна несколько иная картина в отношении полученных результатов оценки компонент ПГХ. Прежде всего, наиболее информативными согласно обоим подходам являются компоненты ЭМЗ

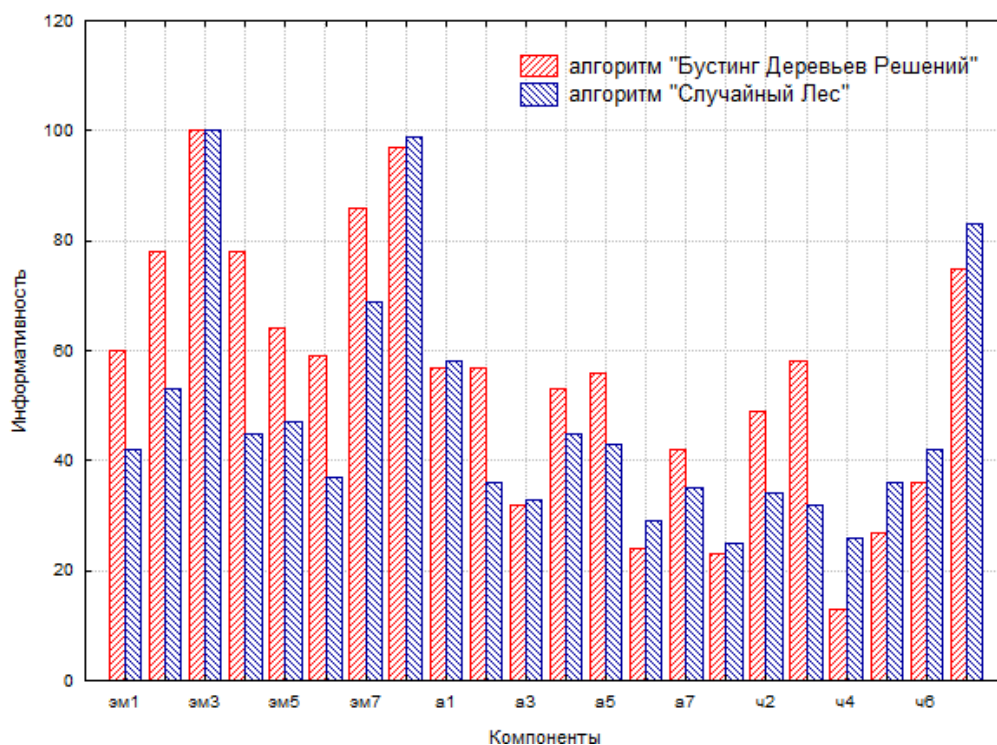


Рис. 5.5: Оценка прогнозной значимости различных компонент исходного временного ряда на базе регрессионных алгоритмов Boosting Tree и Random Tree (для цен Nord Pool).

и ОСТ (их показатели для Random Forest соответственно 100 % и 99%), а не высокочастотные компоненты ЭМ1 и ЭМ2 (как в предыдущем примере). Однако это нельзя сказать о составляющих АЗ и ЧЗ, соответствующих ЭМ3. Их показатели информативности здесь ниже. Из рис. 5.5 видно, что в отличие от предыдущего примера, значимость для прогноза амплитуд и частот ценовой реализации несколько ниже в сравнении с эмпирическими модами.

Численные результаты прогнозирования цены на электроэнергию «на 1 час вперёд» для ценовой зоны Nord Pool на базе полученных гибридных моделей ПГХ-ИНС и ПГХ-МОВ представлены на рис. 5.6 и в таб. 5.1.3.

Таб. 5.1.3.: Результаты сравнения прогнозов цен на электроэнергию рынка Австралии «на 1 час вперёд» с использованием гибридных моделей

Период	Ошибки	ПГХ-ИНС	ПГХ-МОВ
24 ч.	MAPE (%)	3,12	4,40
	MAE	1,44	1,96
	RMSE	1,92	2,57

В этом примере точность прогноза цен на базе гибридных моделей ПГХ-ИНС и ПГХ-МОВ не сильно различается. ПГХ-ИНС по всем метрикам даёт прогноз точнее на 0,5-1% по сравнению с ПГХ-МОВ.

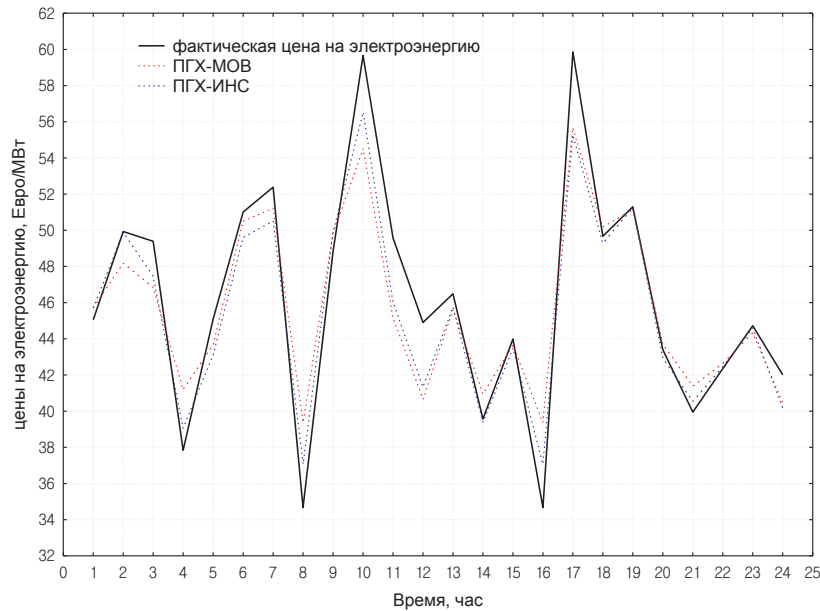


Рис. 5.6: Результаты прогнозирования цен на электроэнергию рынка Nord Pool Spot «на 1 час вперёд» с использованием ПГХ-ИНС и ПГХ-МОВ гибридных моделей.

Усложнение топологии электрических сетей, увеличение количества возобновляемых источников энергии в общей доле генерации, а также особенности либерализованного рынка электроэнергии многих стран вынуждают специалистов искать новые подходы прогнозирования с целью повышения точности предсказания резкоизменчивых, нестационарных временных рядов, которые характеризуют многие реализации режимных параметров и характеристик в современных ЭЭС. Гибридный подход прогнозирования нестационарных процессов предполагает совместное использование современной техники анализа временных рядов и методов машинного обучения. В практической реализации гибридного подхода мы предложили использовать интегральное преобразование Гильберта-Хуанга на этапе анализа и предобработки исходного ряда, и модели ИНС и МОВ в качестве моделей прогнозирования. Эффективность предложенного подхода подтверждена на временных рядах краткосрочного прогнозирования цен на электроэнергию, взятых из реальных ретроспективных данных энергетических бирж ANEM и Nord Pool Spot.

### *Модели Вольтерра, полиномальная регрессионная модель и их связь*

Обратимся вновь к материалу п. 4 и рассмотрим нелинейное дискретное отношение типа вход-выход  $y_t = f[x_t, x_{t-1}, \dots]$ , где  $x_t$  – наблюдаемый входной сигнал и  $y_t$  – отклик системы в момент времени  $t$ ,  $t = \overline{1, N}$ . Подобные

нелинейные отображения теоретически могут иметь бесконечную память. Однако на практике обычно используются соотношения с конечной памятью  $L : y_t = f[x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-L+1}]$ . В стандартных предположениях (как было отмечено в п. 4) такое отображение можно аппроксимировать конечным отрезком ряда Вольтерра порядка  $p$

$$y_t = \sum_{p=0}^P H_p[x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-L+1}] + v_t$$

где  $v_t$  обозначает немоделируемую динамику и шум измерений, который обычно предполагается независимым от  $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-L+1}$ . Здесь  $H_p$  означает отклик  $p$ -го слагаемого ряда Вольтерра с переходной функцией  $K_p[s_1, \dots, s_p]$ , представленной (см. также монографию John Mathews, Giovanni L. Sicuranza [249]) в виде

$$H_p[x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-L+1}] \equiv \sum_{s_1=0}^{L-1} \dots \sum_{s_p=0}^{L-1} K_p[s_1, \dots, s_p] \prod_{i=1}^p x_{n-s_i}. \quad (5.1.18)$$

В предыдущей главе подробно рассмотрена теория рядов Вольтерра в случае непрерывного времени в виде

$$y(t) = H_P(x(t)) \equiv \sum_{p=1}^P \int_0^t \dots \int_0^t K_p(s_1, \dots, s_p) \prod_{i=1}^p x(t-s_i) ds_i.$$

Как уже было отмечено выше, основная цель этого подхода состоит в оценке коэффициентов – переходных функций  $K_p[s_1, \dots, s_p]$  для  $p = \overline{0, P}$  и  $s_i = \overline{1, L-1}$  на основе известных входов-выходов  $\{x_t, y_t\}_{t=1}^N$ . Необходимо также уметь оценивать порядок модели  $P$  и размер памяти  $L$ . Основным недостатком полиномиальных моделей Вольтерра является их параметрическая сложность, связанная с необходимостью оценивания большого количества параметров. К настоящему времени разработано несколько подходов к снижению сложности полиномиальных моделей Вольтерра, см. [184; 262]. Адаптация моделей Вольтерра к разреженным данным проведена в работе [218].

Отметим, что в последнее время методы управления с прогнозирующими моделями (model predictive control, MPC) используют авторегрессионные и не авторегрессионные Вольтерровы модели [264]. Такие методы управления используются в основном в управлении производственными процессами (например, в химической промышленности).

Полиномиальная ядерная регрессия [80] (англ. название «polynomial kernel regression», см. статью [185]) обобщает классическую модель Вольтерра на случай динамических систем с векторным входом (multi inputs single output (MISO) system) и состоит в аппроксимации нелинейной функции  $y_t = f(\{x_{t,l}\}_{l=0}^{L-1})$  для случая векторного входа  $x_{t,0}, \dots, x_{t,L-1}$ , где  $t$  не обязательно играет роль времени. Если мы рассмотрим  $x_{t,l}$  в виде  $x_{t-l}$  для  $l = \overline{0, L-1}$ , становится очевидно, что модель Вольтерра является частным случаем полиномиальной ядерной регрессии (см. более подробные рассуждения в работах G. L. Sicuranza [249], M. Franz и B. Schölkopf [185], V. Kekatos и G. B. Giannakis [218]. В статье [185] B. Schölkopf подчеркивает, что все свойства дискретных моделей Вольтерра сохраняются при использовании полиномиальной ядерной регрессии.

*Нестационарная авторегрессионная модель оценки риска  
неустойчивых межсистемных колебаний  
электроэнергетических систем*

Рассмотрим задачу раннего распознавания появления неустойчивых межсистемных колебаний в ЭЭС, используя измерения тока, напряжения и разности фаз, измеряемых в узлах сети в реальном времени. Основная цель заключается в обеспечении системного оператора информацией о границах устойчивости ЭЭС. Нелинейную динамику ЭЭС будем моделировать нестационарной авторегрессионной моделью. Байесовское оценивание проведем на основании подхода «забывания», заключающегося в экспоненциальном убывании значимости значений временного ряда по мере удаления в прошлое от момента оценивания риска. Границы устойчивости системы определим как апостериорные вероятности устойчивости полюсов системы и продемонстрируем эффективность разработанного подхода на реальных ретроспективных данных аварии в сети 500 кВ ЭЭС Китая.

В ЭЭС постоянно возникают и затухают электромеханические колебания, вызываемые взаимодействием различных компонент систем, характеризующихся главным образом поведением генерирующих мощностей, потребителей и систем автоматики. Во время таких колебаний происходит обмен энергией между синхронными генераторами. Неустойчивые межсистемные колебания сопровождаются «раскачиванием» одной группы генераторов относительно другой. При этом группы генераторов связаны посредством слабой линии электропередачи. Это сказывается на потере устойчивости



системы в целом и проявляется в виде осцилляций переменных состояния ЭЭС: напряжения, частоты, мощности и пр. При этом доступна синхронизация данных по времени через GPS. На величины амплитуд осциллирующих переменных состояния ЭЭС оказывают влияние следующие факторы:

- положение подсистемы в ЭЭС (топология сети);
- распределение естественных демпфирующих элементов ЭЭС, таких как последовательное сопротивление линий электропередач и шунтирующее сопротивление нагрузок;
- количество и местоположение специальных демпфирующих устройств, таких как системный стабилизатор (PSS) и различные устройства FACTS (Flexible Alternative Current Transmission Systems). Например, управляемые системы статической компенсации реактивной мощности (УСКРМ), управляемые устройства продольной компенсации (УПК) и др., см., например, Messina, Mahdi [142; 151].

Различают два основных типа неустойчивых колебаний в ЭЭС: локальные и межсистемные. Локальные колебания происходят, когда генератор (один или группа) начинает осциллировать по отношению к остальной системе. Межсистемные колебания задействуют комбинации многих генераторов, расположенных в одной части системы и «раскачивающихся» в отношении генераторов, расположенных в другой части системы. Отметим, что локальные колебания как правило подавляются стандартными системными стабилизаторами. Однако неустойчивые межсистемные колебания являются серьезной угрозой устойчивости ЭЭС [327].

Рассмотрим далее задачу робастного распознавания межсистемных колебаний. Эта проблема требует основательного математического подхода для обеспечения высокой точности мониторинга нелинейной динамики ЭЭС и надежного распознавания опасных колебаний в зашумленных измерениях. Отметим, что колебания сами по себе не представляют угрозы до тех пор, пока они не теряют устойчивость [226]. Одной из целей этого параграфа является демонстрация использования нестационарных регрессионных моделей в построении алгоритма оценки границ устойчивости ЭЭС, дается мотивация данного подхода и краткое описание методов распознавания неустойчивых колебаний. Далее приведен алгоритм распознавания колебаний на основе регуляризованного забывания для анализа нестационарных данных ЭЭС. Разработанный алгоритм тестируется на реальных

ретроспективных данных о межсистемных колебаниях в сети 500 кВ ЭЭС Китая, а также для синтетических данных.

Сформулируем постановку задачи. Либерализация рынка ЭЭС является существенным вызовом энергетической науке и требует развития новых подходов к прогнозированию риска появления неустойчивых межсистемных колебаний. Много классических неадаптивных алгоритмов, таких как методы Прони, Yule-Walker, Burgs, (см., например, [181; 195; 237]) использовались на практике. Также рекурсивный и классический метод наименьших квадратов являются типичными подходами. Недавно метод на основе фильтра Калмана использовали Korba и др. [227] для предсказания неустойчивых колебаний.

### *Сравнительный анализ подходов*

Такие методы обычно трактуют моделируемую систему как линейную. Распознавание колебаний использует два известных факта из теории линейных систем:

- 1) полюсы осциллирующей линейной системы имеют ненулевые мнимые компоненты,
- 2) модули полюсов осциллирующей линейной системы превосходят единицу.

Большинство авторов используют эти факты для распознавания неустойчивых колебаний. Такие методы можно условно разбить на 4 группы:

- (i) методы, трактующие исследуемый процесс как локально линейный,
- (ii) методы, в которых оценивают параметры линейной системы,
- (iii) методы, в которых получают значения полюсов из оценок,
- (iv) методы, в которых анализируют устойчивость и поведение колебаний.

Методы, в основе которых лежит МНК обычно различаются в группах (i) и (ii). Например, используются окна фиксированного размера в предположении, что все данные в окне порождены оцениваемой линейной системой с одинаковыми весами. Альтернативой является регуляризованный МНК (РМНК) с забыванием отдаленного прошлого, предполагающий экспоненциальное убывание значимости данных временного ряда. Алгоритмы из групп (ii) и (iii) обычно различаются, известна ли дисперсия шума исходных данных (в этом случае используется фильтр Калмана) или же она не

известна (используется РМНК). Однако, как правило, все авторы используют подходы (iii) и (iv), на которых мы и сосредоточим свое внимание.

Традиционный подход обычно использует одно решающее правило для всех полюсов, не используя никаких вероятностных оценок результата. Оценка надежности таких оценок остается сложной задачей. В данном разделе мы изложим результаты работ [299; 301], использующие Байесовский подход. В результате получим полную апостериорную плотность параметров линейной системы и плотность ее полюсов. Теория вариационной Байесовской аппроксимации для обработки сигналов изложена в монографии V. Šmídl [318].

### *Алгоритм распознавания колебаний*

Представим сигнал линейной моделью с переменными коэффициентами:

$$y_t = a_t y_{t-1} + b_t y_{t-2} + c_t + \sigma_t e_t, \quad (5.1.19)$$

где  $y_t$  — наблюдаемый сигнал в момент времени  $t$ ,  $a_t, b_t, c_t, \sigma_t$  — неизвестные параметры, и  $e_t$  — гауссовский шум,  $e_t = \mathcal{N}(0, 1)$ .

В терминах теории вероятности модель (5.1.19) определяет функцию плотности вероятности наблюдаемой случайной переменной  $y_t$ :

$$p(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, a_t, b_t, \sigma_t) = \mathcal{N}(a_t y_{t-1} + b_t y_{t-2} + c_t, \sigma^2). \quad (5.1.20)$$

Оценка системы (5.1.20) со стационарными параметрами является хорошо изученной задачей математической статистики в случае апостериорной плотности нормального обратного гауссовского распределения. Обобщить этот подход на нестационарный случай можно выбрав модель вида  $p(a_t, b_t, c_t, \sigma_t | a_{t-1}, b_{t-1}, c_{t-1}, \sigma_{t-1})$ , учитывающую развитие моделируемой системы. Конкретизацию модели можно проводить в терминах задачи Байесовской фильтрации, которая в некоторых случаях может быть решена при помощи фильтра Калмана.

Отметим, что классический фильтр Калмана позволяет вычислять первый и второй моменты апостериорной плотности вероятности в рамках заданных ограничений. Математическое ожидание и дисперсионная матрица полностью задают плотность вероятности. Поэтому можно сказать, что фильтр Калмана рассчитывает апостериорную плотность вероятности вектора состояния на каждый момент времени, что соответствует полному

описанию вектора состояния как случайной векторной величины. Расчетные значения математических ожиданий при этом являются оптимальными (в смысле среднеквадратической ошибки) оценками, что и обуславливает его широкое применение.

Рассмотрим другой простой и эффективный способ, заключающийся в экспоненциальном забывании отдаленного прошлого. В этом подходе нестационарная система моделируется подобно стационарной, но достаточная статистика умножается на константу  $\phi$ , при  $0 < \phi < 1$ . В результате данные с запаздыванием  $k$ :  $y_{t-k}$  умножаются на веса  $\phi^k$ , что эквивалентно применению экспоненциального взвешивания. Однако такой простой подход становится неустойчивым, когда данные теряют информативность.

Поэтому мы применим улучшенную регуляризованную версию забывания [228] вида

$$\begin{aligned} p(a_t, b_t, c_t, \sigma_t | y_1, \dots, y_t) &\propto p(y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, a_t, b_t, c_t, \sigma_t) \\ &\times p(a_{t-1}, b_{t-1}, c_{t-1}, \sigma_{t-1} | y_1, \dots, y_{t-1})^\phi \\ &\times \bar{p}(a_{t-1}, b_{t-1}, c_{t-1}, \sigma_{t-1} | y_1, \dots, y_{t-1})^{1-\phi}. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Здесь  $\bar{p}(\cdot)$  обозначает альтернативную вероятность параметров. Эта вероятность выражает альтернативное (prior) знание о параметрах.

### *Апостериорная плотность*

Одним из преимуществ регуляризованной версии забывания (5.1.21) является сохранение для системы (5.1.19) апостериорной плотности нормального обратного гауссовского распределения

$$p(a_t, b_t, \sigma_t) = \mathcal{NiG}(V_t, \nu_t), \quad (5.1.22)$$

для которой статистика может быть получена в виде

$$\begin{aligned} V_t &= \phi V_{t-1} + [y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, 1]' [y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, 1] + \\ &+ (1 - \phi) \bar{V}, \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

$\nu_t = \phi \nu_{t-1} + 1 + (1 - \phi) \bar{\nu}$ . Здесь  $\bar{V}$ ,  $\bar{\nu}$  обозначает статистику альтернативной функции распределения.

Средние значения этой апостериорной плотности являются ее важными моментами:

$$\left[ \hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{c}_t \right]' = [V_{2,1}, V_{3,1}, V_{4,1}] C, \quad (5.1.24)$$

$$C = \begin{bmatrix} V_{2,2} & V_{2,3} & V_{2,4} \\ V_{3,2} & V_{3,3} & V_{3,4} \\ V_{4,2} & V_{4,3} & V_{4,4} \end{bmatrix}^{-1}$$

что эквивалентно применению регуляризованного метода наименьших квадратов с забыванием (при  $\bar{V} = 0$ ). Для параметров авторегрессии имеем

$$\text{cov}([a, b, c]) = \frac{V_{1,1}}{\nu_t - 7} C. \quad (5.1.25)$$

Так как нас интересуют параметры  $[a_t, b_t]$ , мы маргинализуем (5.1.22), чтобы получить маргинальные функции плотности t-распределения Стьюдента. Важным свойством этой плотности является не такая резкая «концентрация» как в гауссовском распределении, так как оно предписывает более высокие вероятности значениям далеким от среднего. Разница наиболее существенна для  $\nu_t < 20$  и начинает сказываться уже для  $\phi < 0.95$ . Так как мы обычно выбираем  $\phi > 0.95$ , то (5.1.24) - (5.1.25) является эффективной аппроксимацией. Подробности подхода изложены в работе [269].

### *Априорное распределение*

Априорное распределение должно отражать информацию недоступную в обработанных данных. Как правило это априорная (экспертно задаваемая) информация об области определения параметров, их отношениях и т.д. Тоже можно сказать и об альтернативной плотности  $\bar{p}(\cdot)$  в (5.1.21). Неинформативные данные  $y_t = y_{t-1}, \forall t$  можно описать различными комбинациями параметров  $a_t, b_t, c_t$ . В стандартном регуляризованном МНК изменение ранга матрицы (5.1.23) влечет вырождение и вычислительную неустойчивость оценок (5.1.24). В отличие от стандартного регуляризованного МНК, стабилизированное забывание позволяет обойти эту проблему, вводя положительно определенную матрицу  $\bar{V}_t$ . В случае неинформативных данных оценки полностью определяются этой матрицей. Во всех наших вычислениях мы использовали  $\bar{V}_t = \text{diag}([1e-2, 1e-3, 1e-3, 1e-5])$ . В этих предположениях  $[\hat{a}_t, \hat{b}_t, \hat{c}_t, \hat{\sigma}_t] = [0, 0, 0, 0.0033] \pm [3, 3, 36, 0.0067]$ . Тогда:

- коэффициенты  $a_t, b_t$  предполагаются ближе к нулевому значению, чем оцениваемая  $c_t$ ;
- дисперсия наблюдений  $\sigma_t$  мала;

Если данные являются информативными, то влияние этого альтернативного распределения на (5.1.23) является незначительным.

Вероятность неустойчивых колебаний мы вычислим как вероятность неустойчивости осциллирующих полюсов системы. Полюса системы (5.1.19) имеют вид

$$p_{1,2} = \frac{a_t \pm \sqrt{a_t^2 + 4b_t}}{2}.$$

Система осциллирует в случае ухода полюсов в комплекснозначную область (т.е. при  $a_t^2 < -4b_t$ ) и система не устойчива при  $|p_{1,2}| > 1$ , т.е. при

$$|p_{1,2}| = \left| \left( \frac{a_t}{2} \right)^2 - \frac{a_t^2 + 4b_t}{4} \right| = |b_t| > 1.$$

Такие неравенства определяют область интегрирования постериорной плотности (5.1.22). Эта задача решалась при помощи выборки Монте Карло, см. работу [299].

Используем тот факт, что наибольший интерес представляет распознавание колебаний вблизи границы устойчивости  $b_t = -1$ . Вдоль этой границы первое неравенство примет вид  $|a_t| < 2$ . Более того, естественно предположить, что колебания медленнее частоты дискретизации данных РМУ, т.е.  $a_t > 0$  и мы можем только проверять вероятность выполнения неравенства  $a_t < 2$ .

В таких предположениях вероятность неустойчивых колебаний вычисляется по правилу

$$\begin{aligned} Pr(\text{неуст. колеб.}) &= Pr(a_t < 2)Pr(b_t < -1) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{\hat{a}_t - 2}{\sqrt{2\operatorname{var}(a_t)}} \right) \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{\hat{b}_t + 1}{\sqrt{2\operatorname{var}(b_t)}} \right), \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

где  $\operatorname{erf}$  – функция ошибок. Такой метод дает *нижнюю границу* истинного риска колебаний, так как приближенная область интегрирования меньше реальной области. С другой стороны, вероятность неустойчивости

$$\begin{aligned} Pr(\text{неуст.}) &= Pr(b_t < -1) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \frac{\hat{b}_t + 1}{\sqrt{2\operatorname{var}(b_t)}} \right) \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

может использоваться как *верхняя граница*. Итак, представим этапы нашего алгоритма распознавания колебаний:

**Off-line:** выбор начальной альтернативной статистики  $\bar{V}, \bar{\nu}$  и коэффициент забывания  $\phi$ .

**On-line:** в каждый момент времени  $t$ :

1. обновить статистику  $V, \nu$  используя (5.1.23);
2. вычислить апостериорное математическое ожидание и дисперсию по формулам (5.1.24) – (5.1.25);
3. вычислить вероятность неустойчивых колебаний по формулам (5.1.26)–(5.1.27).

## Анализ результатов

Для оценки эффективности предложенного здесь метода, мы использовали два различных временных ряда. Первый ряд — реальные измерения с устройств PMU (phasor measurement unit). Второй ряд представлял собой синтетические данные.

### *Анализ реальных данных*

Обратимся к анализу реальных ретроспективных данных. Мы использовали данные перетока активной мощности (см. рис. 5.7), зарегистрированные устройствами PMU в сети 500 кВ ЭЭС Китая [321] с шагом дискретизации 20 мс. Условие потери устойчивости (5.1.27) позволяет системному оператору распознать неустойчивость системы, а условие появления неустойчивых колебаний (5.1.26) обеспечивает гладкие оценки без выбросов на концах зоны неустойчивости.

### *Анализ синтетических данных*

Теперь проведем анализ эффективности нашего подхода на синтетических данных, полученных при помощи численного моделирования. Использовалась классическая система с двумя областями (см. рис. 5.8), моделирующая межсистемные колебания.

Параметры тестовой системы представлены в монографии [231]. Белый шум с отношением сигнал/шум 40 дБ и шириной спектра 0.5 Гц (случайного изменения нагрузки) были учтены в нагрузке, чтобы приблизить модель к реальной. Шаг дискретизации был выбран 0.02 с.

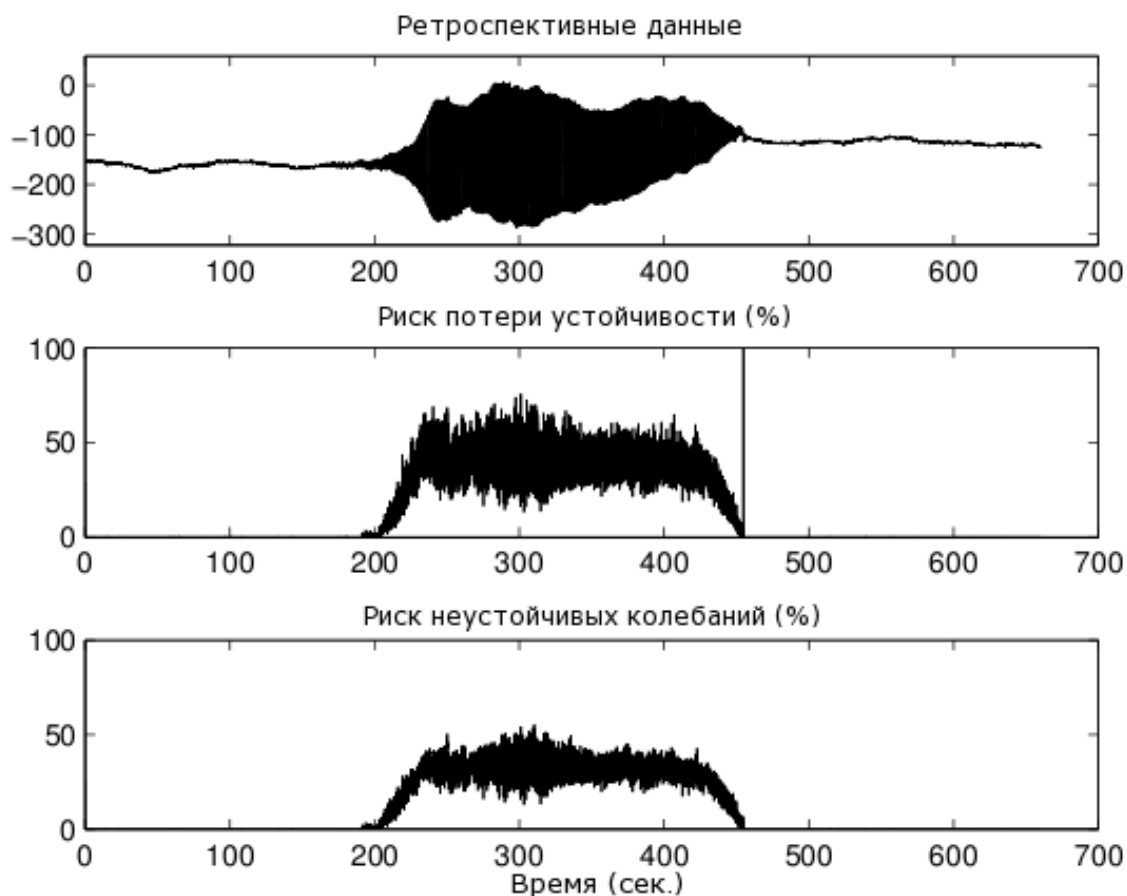


Рис. 5.7: Анализ реальных данных с  $\phi = 0.97$ . **Верхний рис.:** наблюдаемый переток в сети 500 кВ (в отн. ед.). **Центр рис.:** Риск неустойчивости (5.1.27) **Нижний рис.:** Риск неустойчивых колебаний. (5.1.26).

Моделирование перетока активной мощности было проведено по следующему сценарию:

- Начиная с 50 с. до 115 с. увеличивалась активная мощность генератора G2 от 500 МВт до 660 МВт со скоростью 2.5 МВт/с.;
- Начиная с 165 до 230 с. снижается активная мощность генератора G2 с 660 МВт до 500 МВт со скоростью 2.5 МВт/с.

На рис. 5.9 показано изменение напряжения на шине номер 8 и соответствующий риск потери устойчивости.

В настоящее время измерения в ЭЭС при помощи технологий PMU позволяют мониторить сложные процессы в режиме реального времени. Сам факт появления межсистемных колебаний может легко отслеживаться системным оператором. Однако правильная оценка, где и почему неустойчивые колебания фактически зародились, является нетривиальной задачей моделирования нелинейной динамики ЭЭС. Разработанный нами подход позволяет решать такую задачу с высокой степенью надежности в режиме



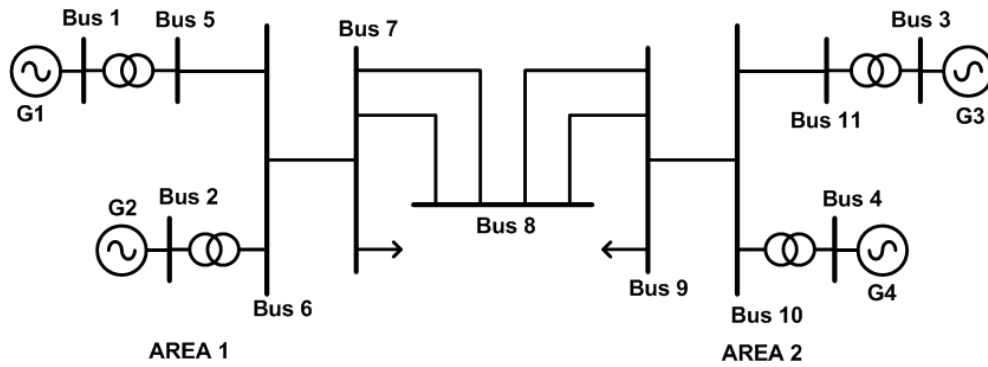


Рис. 5.8: Тестовая система

реального времени, позволяя системному оператору предпринять превентивные меры для предотвращения потери устойчивости всей системы.

Итак, в этом параграфе мы рассмотрели задачу устойчивого распознавания риска межсистемных колебаний в ЭЭС, используя динамические данные, регистрируемые РМУ. Мы применили авторегрессионную модель второго порядка. Алгоритм оценки устойчивости основан на анализе вероятности неустойчивых полюсов в построенной линейной модели.

Алгоритм апробирован на реальных ретроспективных данных перетока активной мощности в сети 500 кВ [321], при этом анализ показал, что полученные вероятности четко распознают начало неустойчивых колебаний. Мы предполагаем, что предложенный подход имеет преимущество перед стандартным подходом фильтра Калмана, так как он позволяет оценивать ковариацию наблюдений  $\sigma_t$ .

## 5.2 О подавлении квазипериодического шума (муара)

В данном параграфе излагаются результаты автора, полученные во время работы в лаб. Sigmedia в Trinity College Dublin (Ирландия) в рамках проекта шестой рамочной программы Европейского Союза BRAVA (Broadcast Restoration of Archives through Video Analysis) в соавторстве с Prof. A. C. Kokaram. Дано решение задачи подавления нестационарного мультипликативного шума (муара), возникающего при аналого-цифровом преобразовании видео-последовательностей. Предложенный режекторный фильтр использует двумерное оконного интегральное быстрое преобразование Фурье (БПФ) адаптивно подавляя периодический шум в частотной области.

Под муаром понимается явление, возникающее в результате наложения двух или более изображений, имеющих периодическую или квазипериодическую структуру (решеток линий, растров и т.д.) [141]. Муаровые

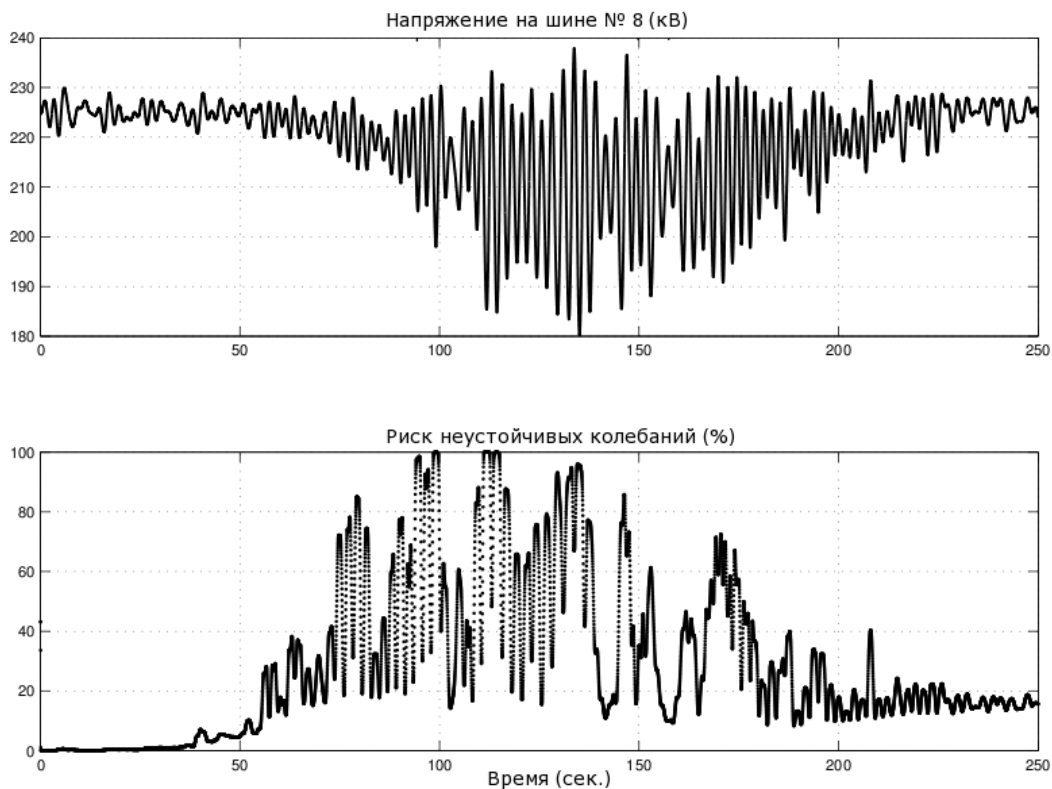


Рис. 5.9: Численное моделирование. Результаты для данных по напряжению. **Верхний рис.:** наблюдаемый временной ряд. **Нижний рис.:** Риск неустойчивых колебаний.

структуры не являются частью исходных изображений, а появляются в результате их мультипликативного наложения. Отметим, что такая модель муара не является единственно возможной и муар может иметь самую различную природу. Мы покажем, как интегральное преобразование Фурье может использоваться в подавлении муарового шума, возникающего при оцифровке видеоархивов. Природа такого явления будет обсуждаться ниже. Теория реставрации видео-последовательностей представлена в монографии [223].

Отметим, что муаровые структуры также используются в дефектоскопии (см. [260; 270; 312; 314], а также п. 5.3 с подобной постановкой задачи машинного зрения). Во многих областях ЦОС муаровый шум является сторонним, крайне нежелательным явлением. В литературе по цифровой обработке сигналов (ЦОС) [141] муаровый эффект рассматривается в рамках теории дискретизации как явление алиасинга. Отметим, что алиасинг – одна из главных проблем при аналого-цифровом преобразовании (АЦП) сигналов. Математически алиасинг можно классифицировать как простейший случай суперпозиционного муара [141].

Оцифровка и восстановление (реставрация) ретроспективных многомерных сигналов, таких как видеоархивы, созданные на рубеже XIX - XX века и хранящиеся на магнитных носителях и кинолентах, является одной из актуальных и интересных проблем как с академической, так и с практической точек зрения. Очевидно, что большие объемы видеoinформации, хранящейся в архивах таких компаний, как, например, BBC или INA, являются ценнейшим источником для будущих поколений.

Перевод аналоговых видеосигналов в цифровой формат расширяет горизонты использования и доступность видеоархивов для анализа, позволяет применять и адаптировать алгоритмы цифровой обработки сигналов, алгоритмы поиска информации и т.д.

В задаче восстановления видеоархивов под муаровым шумом (*moiré phenomenon*) понимается оптическое явление, искажающее видеосигнал посредством нелинейных преобразований сигнала в Телекинодатчике (ТКД) в виду разницы углов расположения ТВ-линий и траектории сканирования ТКД. Муаровый шум особенно характерен для видеоархивов телевизионных передач, зарегистрированных на киноленту непосредственно с телевизионного монитора (кинескопа) до появления в конце 50х годов видеотехники, использующей магнитную пленку. На рис. 5.10 изображена схема возникновения муарового шума при АЦП видеоархивов. В традиционном телевидении использовалась прямоугольная линейно-строчная периодическая чересстрочной развёртки, где сначала передаются все нечётные, а затем все чётные строки. Таким образом, ТВ-линии напрямую записывались на киноленту, см. систему на рис. 5.10. Расположение и геометрия траекторий сканирования зависели от технологий оптического проектирования, а также от геометрии мониторов, используемых в то время. Очевидно такие мониторы были далеко не плоские и ТВ-линии, записанные на киноленту имеют нелинейное искажение в виду растера кинескопа.

Чтобы конвертировать такие аналоговые сигналы, сохраненные на кинолентках в современные форматы вещания, фильм должен быть сканирован вновь используя технологию ТКД. Однако, (см., например, [215]) шаг и угол сканирования часто не совпадают с исходными ТВ-линиями. Результирующий цифровой сигнал оказывался искаженным квазипериодическим шумом. (см. рис. 5.11). Муаровый шум, как правило, представляет собой почти периодические темные линии, закругляющиеся и исчезающие

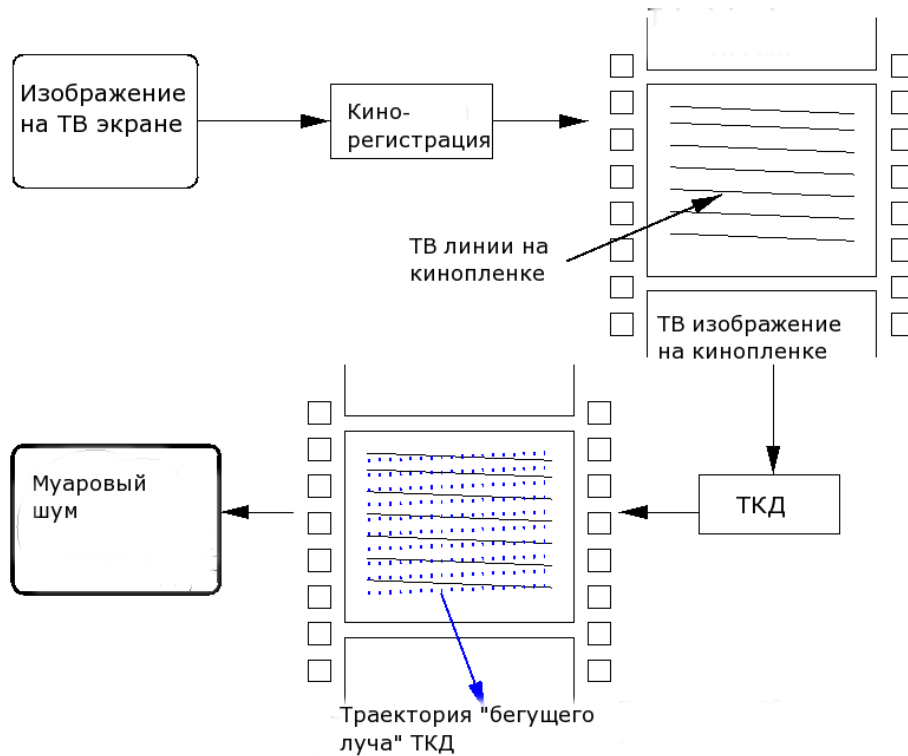


Рис. 5.10: Схема нелинейной динамической системы формирования муаровых интерференций

на краях кадров. Интенсивность и геометрия шума крайне нестационарна. Формирование такого нестационарного шума имеет пространственно-временную нелинейную природу, характеризуемую как исходными ТВ-линиями, так и параметрами ТКД. Ряд математических подходов, разработанных в рамках обратных задач в обработке изображений был предложен для анализа муара непосредственно в пространственной области изображения. Алгебраический подход, основанный на геометрических свойствах суперпозиции периодических слоев был предложен G. Oster [271] в 1964. В области цветной полиграфии муаровый шум может существенно исказить качество изображения. Алгоритм минимизации муара в цветной печати был разработан I. Amidror, см. монографию «The theory of the moiré phenomenon» [141]. Отметим, что предложенные ранее алгоритмы минимизации используют ряд предварительных операций, не доступных в задаче восстановления видеоархивов. Нелинейный фильтр для ЭЛП с высоким разрешением был предложен С. Hentschel [198]. Однако такой подход не применим для видео и выбор параметров оставался сложной задачей. Режекторный фильтр для подавления квазипериодического шума улучшения спутниковых изображений с использованием интегрального преобразования Уолша-Адамара был предложен Л. П. Ярославским [324] в 1979 г. Преобразование Уолша-Адамара являлось одним из наиболее известных



Рис. 5.11: Кадры с муаровым шумом.

несинусоидальных ортогональных преобразований в конце прошлого века. Возможен также прямой подход [165] для подавления муара, когда периодический шум удаляется напрямую из спектра Фурье с последующим применением обратного преобразования Фурье.

Обзор применения двумерного режекторного фильтра для аддитивного периодического шума дан Т. Hinamoto [173] *et al.* и S.-C. Pei и C.-C. Tseng [275]. И. Айзенберг *и др.* [137], [263] разработали медианный режекторный фильтр для подавления муаровых шумов, характерных для сканированных фотоснимков. Муаровые шумы, исследованные в этих источниках, можно характеризовать как стационарный случай нестационарного квазипериодического муара, характерного для видеоархивов. Подавление муара в частотной Фурье области также было рассмотрено R. Arthur [319]. Эффективность интегральных моделей в задачах восстановления изображений отмечена, например, в работах В. С. Сизикова [109; 111; 276], Y. Lu [241]. Однако такой подход, основанный на решении линейного урав-

нения Фредгольма I рода, не применим в случае нелинейных муаровых искажений, имеющих мультипликативную природу.

Покажем далее эффективность применения интегральных преобразований для обработки нестационарных сигналов и представим автоматический двумерный режекторный фильтр для подавления муара в видеоархивах.

### *Динамическая модель муарового алиасинга*

Рассмотрим прежде всего одномерную модель данного шума. Допустим, что сигнал сохранен в виде одномерной последовательности дискретных яркостных характеристик (интенсивностей), описывающих ТВ-линии, сохраненные на киноплёнке. Обозначим такой сигнал через  $y(x)$  и шаг (расстояние между интенсивностями) – через  $T_1$ .  $x$  – непрерывная переменная, обозначающая пространственную координату на киноплёнке.

Тогда рассматриваемый аналоговый сигнал можно определить как

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n \delta(x - nT_1). \quad (5.2.1)$$

Сигнал изображен на рис. 5.12 (верхний график).  $T_1$  моделирует расстояние между ТВ-линиями, записанными на киноплёнке,  $I_n$  – соответствует интенсивности телеизображения на каждой линии. В нашей одномерной модели каждая линия – это точка.

Мы можем представить процесс сканирования в ТКД как размытие (фильтр низких частот, ФНЧ) функции  $y(x)$  с последующей передискретизацией результирующего сигнала. Используем ФНЧ типа Гаусса  $g(x)$ , полученный сигнал  $y_l(x)$  представим в виде интеграла типа свертки с ядром Гаусса

$$y_l(x) = y(x) * g(x). \quad (5.2.2)$$

Сигнал, пропущенный через такой ФНЧ, представлен на рис. 5.12 (см. нижний график). Последний этап – это передискретизация с шагом  $T_2 = \alpha T_1$  где  $\alpha \approx 1$ . Такая повторная дискретизация моделирует тот факт, что шаг дискретизации в ТКД близок к нужному, но не всегда с ним совпадает.  $T_2$  – расстояние между траекториями сканирования в ТКД.

Чтобы сделать модель более реалистичной, можно вводить смещение, фазовый сдвиг, дисторсию, вызванную геометрическими характеристика-

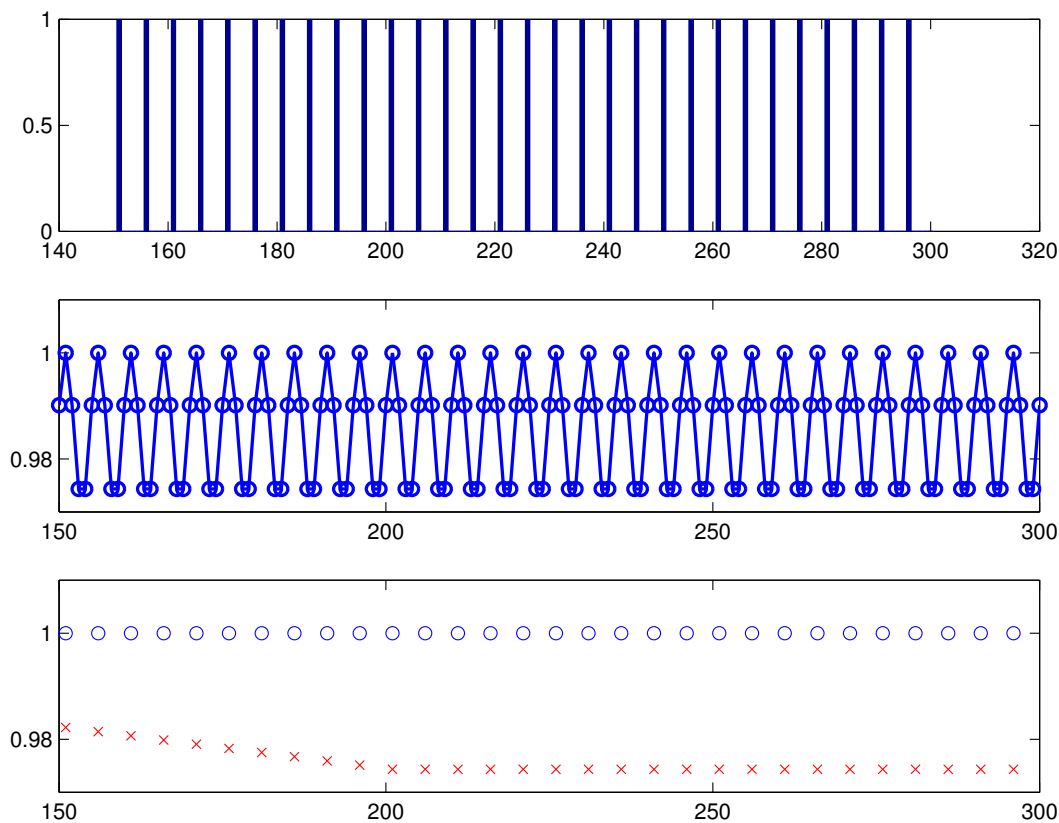


Рис. 5.12: **Верх:** Исходный 1D сигнал, сохраненный на кинолентке. **Средний:** Размытие ТКД (Flying Spot). **Нижний:** Передискретизованный сигнал отличается от исходного.

ми ЭЛТ и пр. В итоге, мы имеем сигнал  $y_k$  в виде

$$y_k = y_l(kT_2) = \int_{\tau} y(\tau)g(kT_2 - \tau) d\tau. \quad (5.2.3)$$

Используя  $T_2 = 0.99T_1$ , и Гауссовский фильтр с  $\sigma = 2.5$ , получаем сигнал, представленный на рис. 5.12 (нижний график) и на рис. 5.13. Видно, что итоговый сигнал является суперпозицией сигнала с периодическим шумом – муаром. На рис. 5.13 изображен периодический дискретный сигнал и исходный сигнал. Передискретизованный сигнал имеет явную периодическую структуру - муар.

Рис. 5.14 показывает тестовое изображение Lenna с искусственным муаровым шумом (параметры фильтра Гаусса  $\sigma = 0.6$ , окно  $9 \times 9$ ) и  $\alpha = 0.9$ . В этом случае только одна строка появляется между каждыми строками матрицы в исходном 2D сигнале. На рис. 5.14 справа изображен пример вертикального смещения сканирующей траектории с углом  $\theta = 0.5^\circ$ . Отметим, что в реальных видеопоследовательностях имеются две различные муаровые структуры в четных и нечетных ТВ-линиях, что является результатом применения аналоговой технологии в ТКД. (см. рис. 5.15).

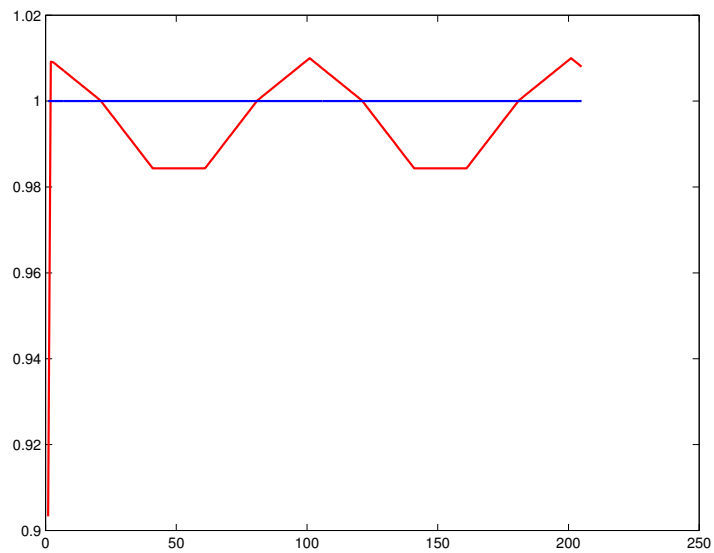


Рис. 5.13: Сплошной линией помечен исходный сигнал, периодический сигнал – муаровый эффект.



Рис. 5.14: Примеры искусственного муара. **Слева:** Вертикальное смещение в ТКД. **Справа:** Вертикальное смещение с поворотом в ТКД. SNR=22.63 [dB].



Рис. 5.15: Часть кадра с муаром. **Слева:** Четные строки. **Справа:** Нечетные строки.



Отметим, что приведенная нами модель не является единственно возможной моделью периодических интерференций. Однако, даже если визуально такие квазипериодические шумы выглядят схоже в пространстве изображения, соответствующие им образы в частотной области могут существенно отличаться.

### *Подавление муара*

Таким образом, из разработанной модели и реальных видеопоследовательностей можно заключить, что муар является синусоидальным шумом, порожденный ошибкой сканирования в ТКД. Данный шум может иметь мультипликативную природу, является нестационарным и сложен для моделирования [300]. Естественным подходом к подавлению синусоидального шума является обработка его в частотной области, используя двумерное преобразование Фурье. Ниже мы опишем адаптивный спектральный фильтр, автоматически распознающий и подавляющий частоты, соответствующие муаровому шуму.

### *Подавление муара в спектре Фурье*

Наш подход заключается в распознавании и автоматическом подавлении выбросов в спектре Фурье, соответствующих муару в пространстве изображения. Отметим, что преобразование Фурье – далеко не единственно возможное интегральное преобразование, подходящее к подавлению синусоидального шума. Определенные преимущества имеет вейвлет-преобразование, дающее пространственную локализацию интерференций. Преобразование Уолша [324] подходит для подавления интерференций, имеющих прямоугольную форму. Приведем описание нашего подхода на основе БПФ. Выделим основные шаги преобразования спектральных коэффициентов:

1. *Выделить и заблокировать область низких частот от изменений* (см. рис. 5.17). Учитывая, что муар имеет горизонтальную природу, всплески в частотной области будут располагаться вблизи оси ординат. Определим диапазон  $\pm\Omega$ , низких частот, который останется без изменений, так как основная часть энергии изображения концентрирует-

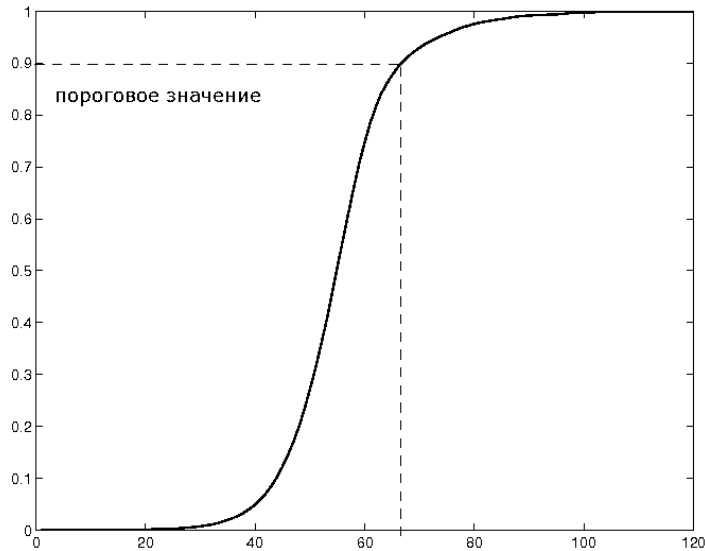


Рис. 5.16: Кумулятивная функция распределения значений  $|F(\omega_h, \omega_v)|$ . Пунктиром показана процедура выбора порогового значения.

ся в низкочастотной области, принимающей соответственно существенно большие значения в сравнении с коэффициентами, соответствующими средним и с высоким частотам, где обычно располагаются муаровые выбросы.

2. Создать маску  $B(\omega_h, \omega_v)$ , ставящую 1 в соответствие частотам, подлежащим удалению, и 0 – в противном случае —

$$B(\omega_h, \omega_v) = \begin{cases} 0, & \text{если } (|F(\omega_h, \omega_v)| > \Delta) \text{ и } (|\omega_v| > \Omega) \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

где модуль  $|F(\omega_h, \omega_v)|$  – амплитуды соответствующих частот  $\omega_h, \omega_v$ , а пороговое значение  $\Delta$  выбирается согласно анализу кумулятивной плотности распределения спектральных составляющих. Мы распознаем максимальные 10%  $|F(\omega_h, \omega_v)|$ , для  $|\omega_v| > \Omega$ . Характерный пример кумулятивной функции распределения приведен на рис. 5.16 для кадра на рис. 5.18 .

Величина  $\Omega$  выбирается в зависимости от уровня муарового шума. Экспериментальные данные показали, что  $\Omega \in (5, 15)$  покрывает широкий спектр шума для стандартных кадров телевидения ( $720 \times 576$ ).

3. Заменить значения распознанных амплитуд частот, помеченных  $B(\cdot, \cdot) = 0$ , значениями нижнего уровня шума. Значения нижнего уровня шума выбираются как среднее значение амплитуд высоких частот,

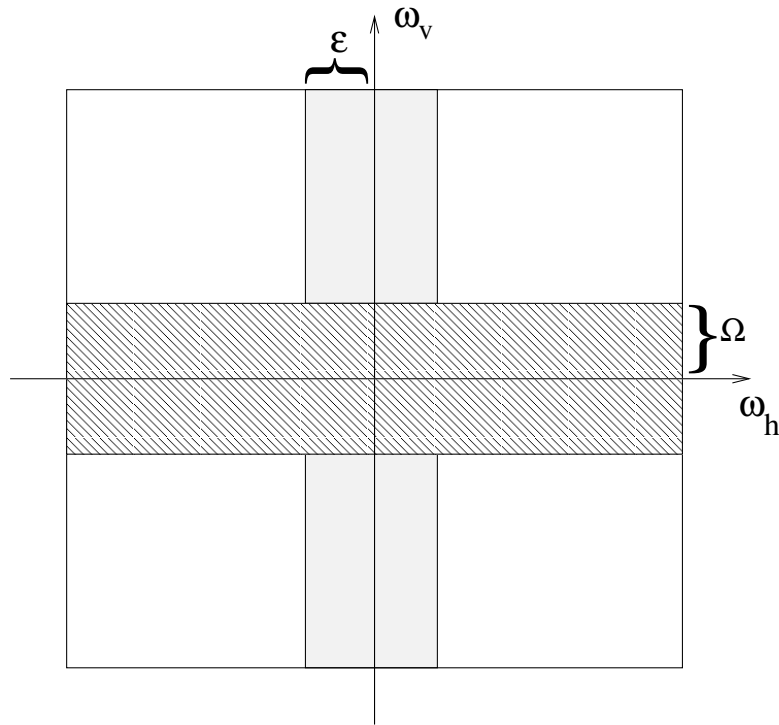


Рис. 5.17: Схема 2D модуля спектра Фурье: заштрихованная область показывает полосу пропускания фильтра, серым цветом помечена область частот, на которых может располагаться муаровый шум.

расположенных в  $\varepsilon$ - окрестности (окне) вблизи постоянной (DC) составляющей спектра (см. рис. 5.17). Экспериментальным путем было найдено оптимальное значение  $\varepsilon_{opt} = 10$ . Отметим, что амплитуды высоких частот не содержат такой объем информации, как низкочастотные компоненты. Этим объясняется устойчивость данного эвристического подхода.

Рис. 5.18 демонстрирует результат применения фильтра для реального ТВ кадра при  $\Delta = 94.4$  и  $\Omega = 25$ . Шум подавлен, но изображение искажается дополнительным шумом, связанном с явлением Гиббса – поведением частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки функции изображения.

Рис. 5.19 демонстрирует срез 2D спектра исходного, зашумленного муаром и восстановленного тестового изображения. Эффект «звона» (более заметен в динамике видео) вызван добавлением разрывов (см. рис. 5.19) в спектральные составляющие Фурье и связан с эффектом Гиббса.

Эффект «звона» является существенным артефактом, проблему удаления которого мы рассмотрим ниже.

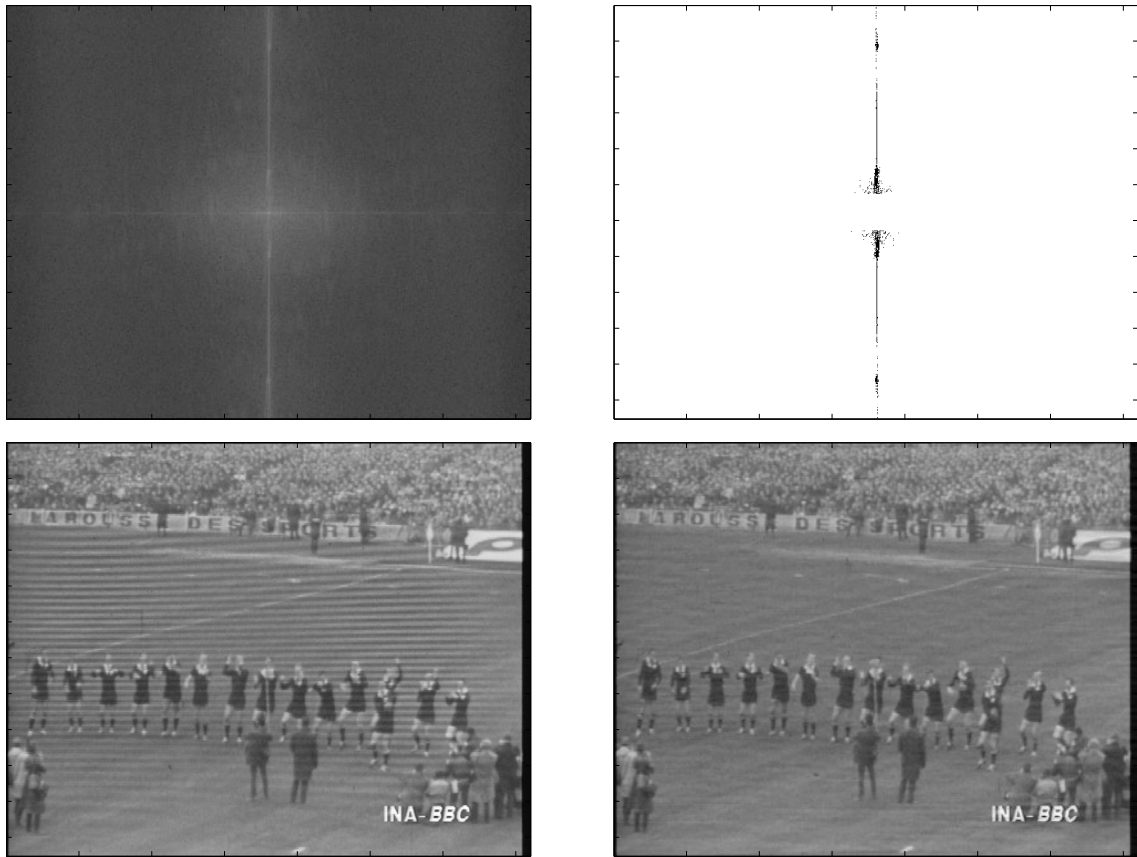


Рис. 5.18: **Нижний рисунок слева:** Изображение с муаровым шумом. **Верхний рисунок слева:** Спектр Фурье изображения. **Верхний рисунок справа:** частоты подлежащие удалению. **Нижний рисунок:** Результат.

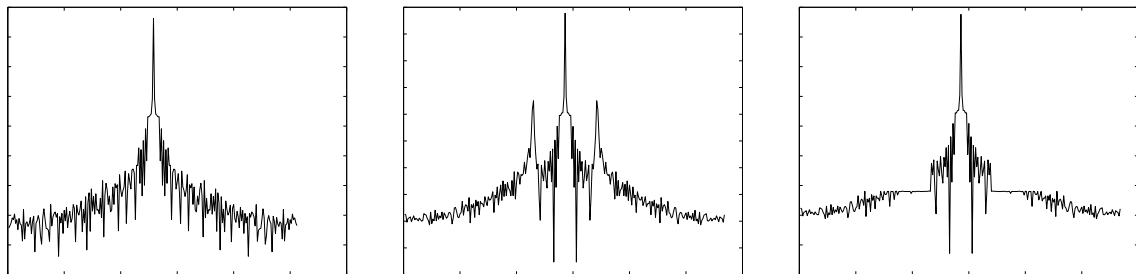


Рис. 5.19: Срезы модуля 2D спектра тестового изображения (DC область). **Слева:** Исходное изображение. **Среднее:** Зашумленное изображение. **Справа:** Восстановленное изображение.

Рассмотрим два основных подхода, позволяющих минимизировать эффект звона. Одним из подходов является адаптивный выбор порогового значения. Однако такой подход не позволяет решить проблему полностью и не решает задачу в случае (редком), когда шум начинает проявляться и в вертикальном направлении, образуя нестационарные пульсирующие вписанные эллипсы, что является наиболее тяжелым случаем на практике.

Приблизиться к решению проблемы позволил подход, получивший название блочной обработки с наложением. В рамках каждого блока муар является более регулярным, что существенно позволяет повысить эффективность нашего фильтра. Важным представляется выбор анализирующего и синтезирующего окон [223]. Анализирующее окно (см. также обзор по оконному преобразованию Фурье [197], а также пособие [63]) должно позволять хорошее разрешение спектра и по частоте. Однако необходимо помнить, что как правило невозможно одновременно получить хорошее разрешение спектра и по частоте, и по пространственным переменным, так как эти разрешения обратно пропорциональны. Анализ реального видеопотока показал, что выбор базисных блоков в виде горизонтальных полос позволяет получать наилучший результат. Анализирующее и синтезирующее окна были выбраны одинаковыми

$$h_n = \cos^2\left(\frac{\pi n}{2N}\right),$$
$$n = -\left(N - \frac{1}{2}\right), -\left(N - \frac{1}{2}\right) + 1, \dots, \left(N - \frac{1}{2}\right). \quad (5.2.5)$$

Оба окна имеют четное разрешение  $N$ . Окна применяются вертикально, так как пересекающиеся блоки являются полосами длиной, совпадающей с горизонтальным разрешением текущего кадра видеопоследовательности.

Выделим основные этапы алгоритма

1. Разбить кадр на горизонтальные полосы четной длины с пересечением в половину их вертикального разрешения.
2. Применить оконную функцию анализа к каждой полосе (применительно к каждому столбцу соответствующих матриц) в вертикальном направлении.
3. Обработать полученный блок, используя описанный выше фильтр.

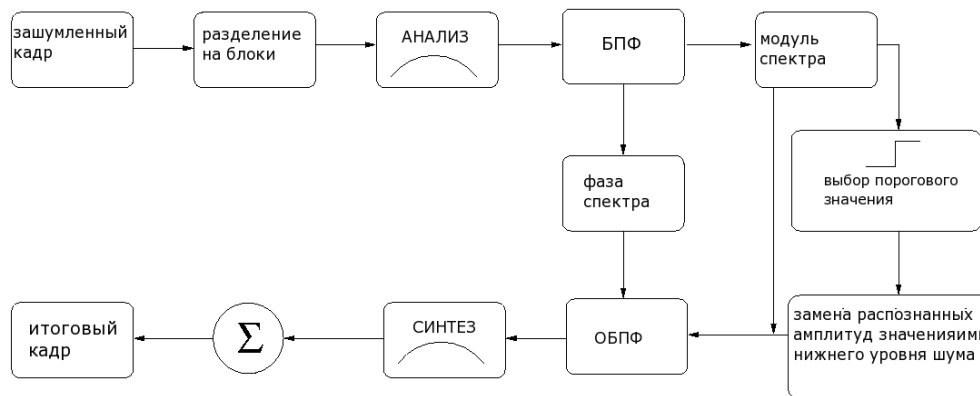


Рис. 5.20: Схема фильтра муарового шума.

4. Применить к полученной полосе оконную функцию синтеза (к каждому столбцу).
5. Просуммировать пересекающиеся полосы, получив в результате итоговый кадр.

Рис. 5.20 показывает общую схему разработанного фильтра позволившего избавиться от эффекта звона в результирующей последовательности. Рис. 5.21 демонстрирует результаты применения разработанного алгоритма. Использовались полосы высотой 128 пикселей и  $\Omega = 5$ . Из рис. 5.21 легко видеть, что применение алгоритма с наложением позволяет получать существенно лучшие результаты.

Используя модель (5.2.1) – (5.2.3) алгоритм был протестирован для различных параметров муара и показал высокую устойчивость.

В настоящем параграфе мы обсудили проблему подавления муаровых интерференций в видео, происходящую при аналого-цифровом преобразовании фильмов на телевидении. Мы представили математическую интегральную модель муарового алиазинга, позволяющую лучше понять природу этого явления. Особо отметим, что муар по своей природе является не аддитивным, а мультипликативным явлением и не может моделироваться как Гауссовский процесс.

Изложенная модель не претендует на полноту и единственность. В других приложениях могут возникать другие суперпозиции исходных сигналов и может потребоваться более сложный выбор функций окна и другие интегральные преобразования. Именно этим объясняется фундаментальная сложность фильтрации муара.

Ключевой проблемой в задаче подавления муара является задача обнаружения частотных составляющих муаровых структур и их нестационар-

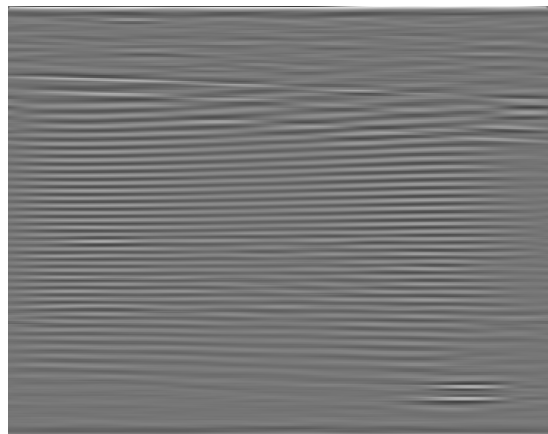
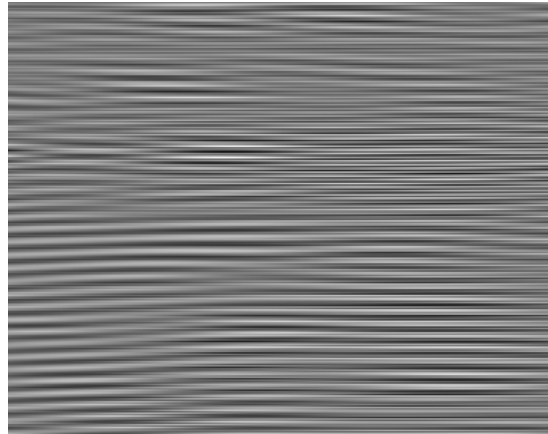


Рис. 5.21: Результаты обработки двух кадров. Слева: Зашумленные кадры. Справа: Результаты восстановления. Середина: Подавленный шум.

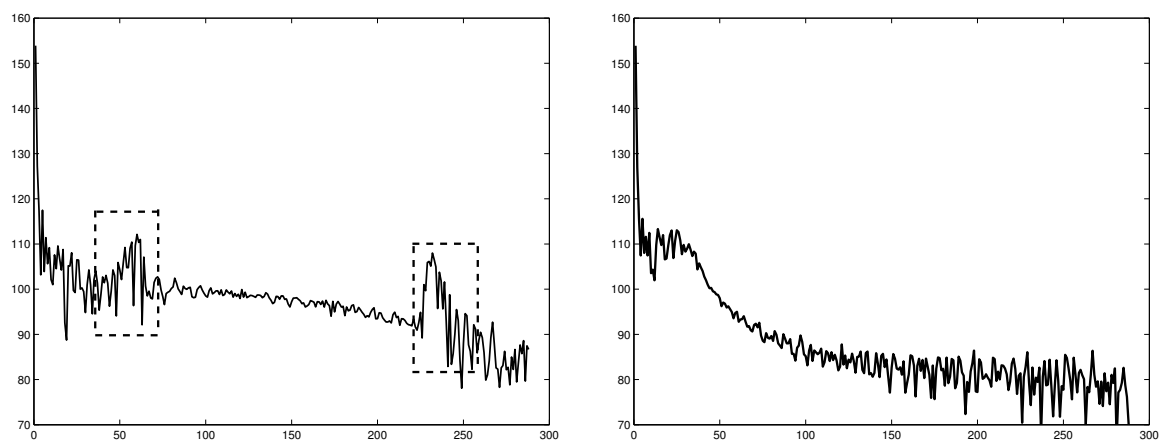


Рис. 5.22: Срез спектра видеопоследовательности Rugby. **Слева:** Зашумленный кадр. Муаровые пики помечены пунктиром. **Справа:** Восстановленный кадр.

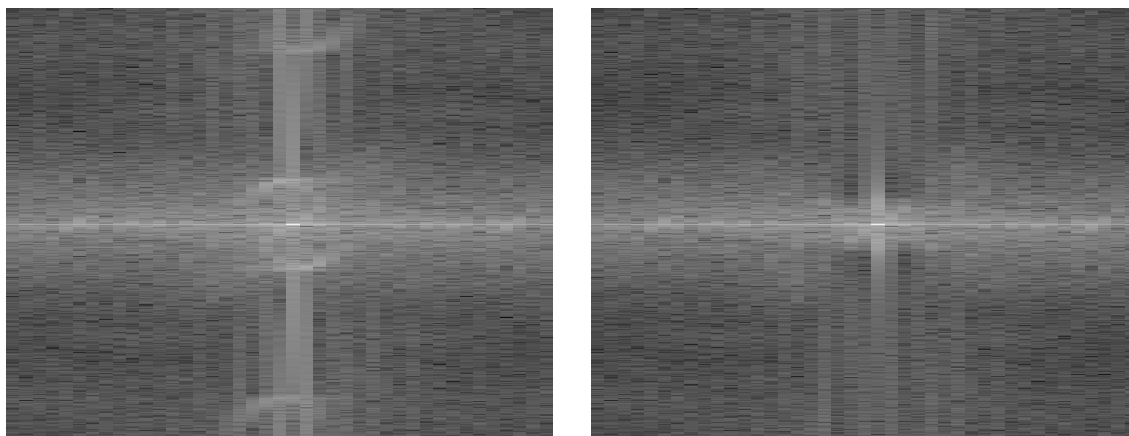


Рис. 5.23: Часть спектра видеопоследовательности Rugby. **Слева:** Зашумленный кадр. **Справа:** Восстановленный кадр.

ные нелинейные геометрические формы, вызванные геометрическими характеристиками мониторов 1950-60 годов. Отметим, что нерегулярность муаровых интерференций является существенной трудностью в ее параметрическом моделировании, как отмечено нами в статье [300]. Кроме преобразования Фурье, не дающего пространственную локализацию, другими интегральными преобразованиями для распознавания и удаления муара является вейвлет-преобразование, а также преобразование Гильберта – Хуанга (см. следующую часть настоящей монографии). Другим подходом мог бы быть Винеровский фильтр, однако сложность его применения заключается в отсутствии точной и универсальной модели муара ввиду его пространственно-временной нестационарности.



Мы обсудили эффективность применения преобразования Фурье в создании режекторного фильтра подавления муаровых интерференций, предложенного нами в [300]. В следующем параграфе мы рассмотрим приложение интегральных моделей в задаче распознавания образов в производственной задаче машинного зрения.

### 5.3 Интегральные признаки в задачах машинного зрения

Важную роль в производственных системах машинного зрения, используемых для контроля качества выпускаемой продукции, играет автоматическое распознавание и классификация объектов. Современные аппаратные средства позволяют с высокой скоростью получать и хранить изображения с высоким разрешением. В связи с этим, актуальной задачей становится разработка быстрых и эффективных методов обработки изображений, основанных на визуальной схожести объектов. На их основе возможно создание автоматических систем распознавания дефектов на производственных линиях, работающих в режиме реального времени.

Как правило, процесс классификации изображений состоит из двух этапов. На первом этапе из изображения объекта выделяются его основные признаки и характеристики. Таким образом, осуществляется переход от реального образа в пространство признаков. Существуют различные подходы, позволяющие описывать такие признаки изображений как текстура, форма, контур и цвет. В отличие от реальных изображений, данные признаки представляют собой числовые векторы и могут быть достаточно легко сравнимы. На втором этапе происходит непосредственно классификация объектов в соответствии с их признаками. То есть, осуществляется разбиение пространства признаков на соответствующие подпространства. Человеческий мозг отлично справляется с задачами классификации изображений даже в условиях больших помех и отсутствия существенных признаков. Однако искусственные классификаторы все еще далеки от идеала.

В данном параграфе мы рассмотрим, как интегральные преобразования используются в практической производственной задаче распознавания и классификации образов, которая возникает в системе реального времени автоматического распознавания дефектов (АРД) при производстве полупроводниковых микросхем. АРД система должна найти дефект на изображении объекта и определить: является ли данный дефект браком производства (например, царапина, трещина или наплыв) или же это всего лишь так называемый «оверкилл» — посторонний предмет, не влияющий на ка-

чество продукции (например, волос, волокно или пыль). Таким образом, АД система должна классифицировать входящий образец как «брак» или «оверкилл». Одно из главных требований систем реального времени является скорость работы. Поэтому только недорогие в вычислительном плане алгоритмы могут быть использованы при извлечении признаков изображений и их классификации. Примеры АД систем можно найти в энергетике (инспектирование трубопроводных систем [252]), целлюлозно-бумажном производстве [232], деревоперерабатывающей промышленности [261], производства полупроводников [200] и др.

Ряд экспериментов показал, что методы, хорошо зарекомендовавшие себя в задачах классификации, такие как нейронные сети [123] и метод опарных векторов (МОВ) [286], плохо подходят для рассматриваемого случая. При анализе ряда пространств признаков изображений было замечено, что в общем случае образцы брака и оверкиллов не могут быть разделены на два подпространства. Но тем не менее, они концентрируются в несколько слабо пересекающихся областях. Это свойство дало идею использовать кластерный анализ при классификации. Кластерный анализ заключается в разбиении исходного множества объектов на заданное количество подмножеств (кластеров) схожих объектов, и затем выбирается наиболее типичный представитель (медиана) из каждого кластера. Предлагается следующий подход, в котором на этапе обучения обучающие выборки брака и оверкиллов разбиваются на кластеры. Далее, входящий образец классифицируется в соответствии с типом ближайшей медианы.

Задача кластерного анализа может быть сформулирована как хорошо известная задача комбинаторной оптимизации: задача о  $p$ -медиане [217]. Рассмотрим граф, в котором каждой вершине сопоставлено изображение объекта. Расстояние между вершинами графа (вес дуг) определяется схожестью соответствующих изображений. Под схожестью изображений понимается расстояние между векторами признаков изображений, вычисленных по определенной метрике в пространстве признаков. Таким образом, чтобы разбить исходное множество на определенное количество кластеров (скажем,  $p$ ), необходимо найти  $p$  медианных вершин графа, минимизирующих сумму весов дуг до остальных вершин.

Задача о  $p$ -медиане – хорошо известная NP-трудная задача, сформулированная в [217]. Обширный литературный обзор по этой задаче можно найти в [272], а также в [150; 278]. Отдельно отметим последние работы, касающиеся решения задачи о  $p$ -медиане большой размерности: VNS (Variable

Neighborhood Search) [194], GRASP эвристики [278], метод ветвей, отсечений и оценок [150].

Для решения задачи кластеризации в работе используется подход, разработанный в [150] с ограничением по времени счета. В результате численного эксперимента на данных производства полупроводниковых микросхем были получены решения, уменьшающие ошибки классификации SVM и нейронных сетей на 10-20 %.

Параграф состоит из 5 пунктов. В п. 5.3 описана общая схема функционирования АРД системы. Методы вычисления признаков изображений изложены в п. 5.3. Далее мы приведем краткое описание решения задачи кластеризации. Результаты численных экспериментов приводятся в п. 5.3. Наконец, в последнем разделе сделаны общие заключения.

### *Системы автоматического распознавания дефектов*

Рассмотрим основные этапы автоматической системы распознавания дефектов (АРД). Объект снимается цифровой камерой высокого разрешения, и изображения передаются программному блоку «сегментатор». В данном блоке в изображении выделяются сегменты, отличающиеся от «идеального» изображения, т.е. от изображения объекта без дефектов. Далее, из каждого сегмента извлекаются их числовые признаки, которые передаются в блок «классификатор». Более подробное описание процесса сегментации и извлечения признаков дано в следующем разделе. Разработкой таких систем занимаются многие компании, специализирующиеся в разработке программно-аппаратных комплексов контроля качества в промышленности.

Основными компонентами классификатора является так называемая функция классификации. На ее описании остановимся более подробно.

Пусть дано  $m$  признаков изображений  $x^i$  размерности  $n_i$ , т.е.  $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Функция классификации  $f(\cdot) : \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^m n_i} \mapsto \{-1, 1\}$  определяется следующим образом:

$$f(x) = f(x^1, \dots, x^m) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \text{ соответствует оверкилли,} \\ 1, & \text{если } x \text{ соответствует браку.} \end{cases}$$

На практике в качестве функции классификации широко используются МОВ [286] и нейронные сети [123]. Процессу классификации предшествует

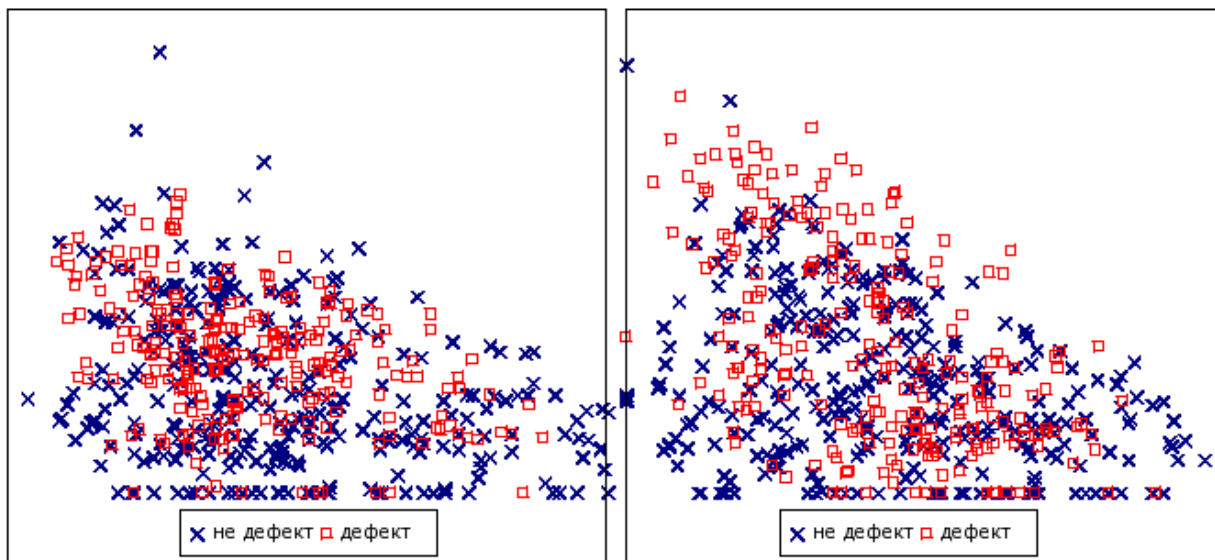


Рис. 5.24: Пространство признаков (проекция)

процесс обучения, при котором подбираются параметры функции на обучающей выборке.

В некотором смысле МОВ и нейронные сети пытаются разделить пространство признаков на два подпространства, что в рассматриваемом случае сделать невозможно. Проиллюстрируем это на примере двух проекций данных на плоскость одного из признаков. На рисунке 5.24 видно, что точки брака и оверкиллов не разделяются. Но мы можем заметить, что точки разного типа группируются в несколько кластеров.

Поэтому предлагается построение функции классификации на основе кластерного анализа. Степень схожести между изображениями будет определяться как взвешенная сумма расстояний (в определенной метрике) между соответствующими признаками, т.е.

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^m c^i \|x^i - y^i\|,$$

где  $c_i$  данные веса признаков. Брались в рассмотрение метрики  $L_1$  (Манхеттен) и  $L_2$  (Евклида). Схема процесса обучения представлена на рисунке 5.27. Обучение производится на обучающей выборке оверкиллов  $O_l$  и брака  $D_l$ . В данных выборках соответственно выбираются  $p_o$  и  $p_d$  медиан (подробности алгоритма кластеризации даны в разделе 5.3). Обозначим эти множества через  $P_o$  и  $P_d$  соответственно. Входящий образец классифицируется

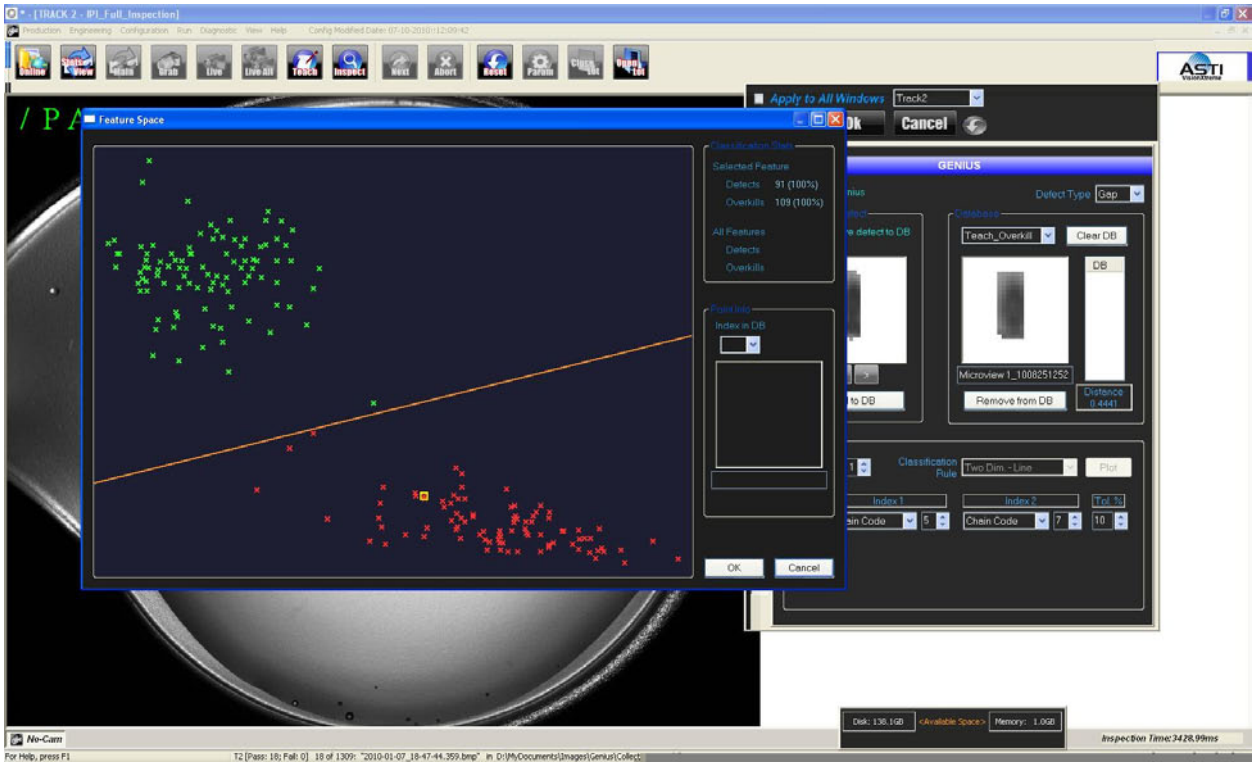


Рис. 5.25: Линейное разделимое 2D пространство признаков. (ASTI Hlds Pte Ltd, Ciba Novartis ©)

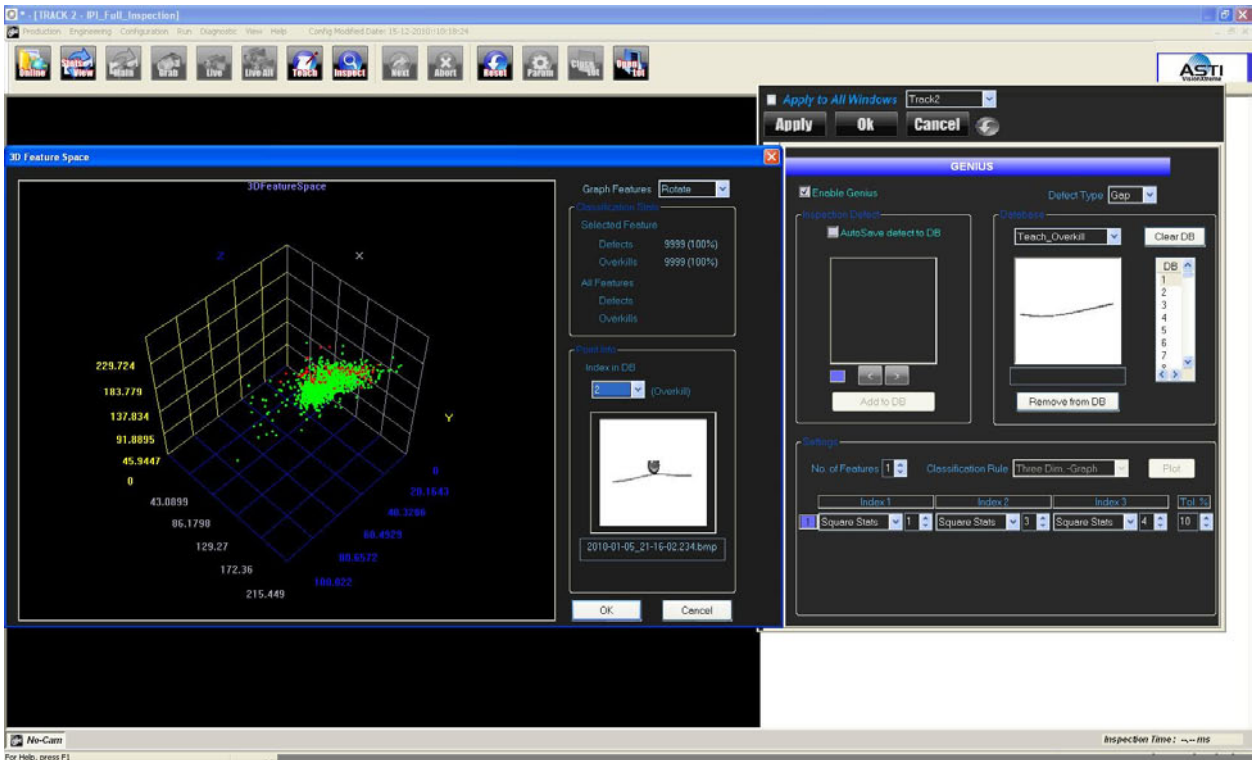


Рис. 5.26: 3D пространство признаков. (ASTI Hlds Pte Ltd, Ciba Novartis ©)

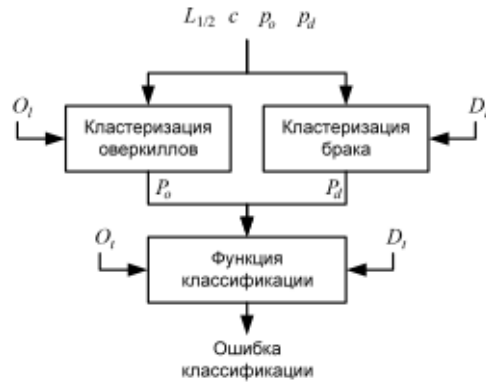


Рис. 5.27: Схема обучения

в соответствии тому к какому типу медианы он ближе, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } \min_{y \in P_o} d(x, y) \leq \min_{y \in P_d} d(x, y), \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, процесс обучения заключается в выборе метрики при подсчете расстояния между признаками изображений, подборе весов  $c = (c_1, \dots, c_m)^T$  и выборе числа медиан  $p_o$  и  $p_d$ . Качество подобранных параметров определяется по количеству ошибок классификации на тестирующих выборках оверкиллов  $O_t$  и брака  $D_t$ . Процесс обучения может производиться автономно и не имеет жестких временных ограничений. Поэтому в процессе обучения выбирались лучшие параметры по критерию качества полным перебором из дискретных ограниченных множеств параметров. Детали практических экспериментов описываются ниже.

### *Пространства признаков*

Пространства признаков (дескрипторов) формируются на этапе, следующем за сегментацией изображения на области. При их выборе возникает два основных подхода к описанию выявленной области:

- 1) по характеру границы;
- 2) по структуре расположения элементов изображения внутри области.

Отметим, что при построении признаков необходимо учитывать их инвариантность к перемещению по полю изображения (сдвиг, поворот), а в некоторых случаях – масштаб.

Имеется ряд методов, позволяющих компактно предствлять контуры областей (см., например, обзор [34; 248]). Простейшие геометрические признаки контуров, включающие периметр, кривизну, площадь и др., широко используются в приложениях (см., например, сравнительный анализ в [248]). Приближение кривой контура рядами Фурье было предложено в работе Zahn и Roskies, подробности изложены в монографии [34].

Цепной код [34] как компактный дескриптор контуров хорошо известен с середины прошлого века и получил широкое распространение в силу вычислительной простоты и инвариантности относительно поворота и сдвига. В настоящей работе мы использовали модифицированный цепной код [213] который берет во внимание длины в разных направлениях.

Различные ортогональные интегральные преобразования (Фурье, косинус, Хаара, вайвлет) использовались для поиска признаков в литературе по обработке сигналов и изображений. Мы использовали дескриптор Фурье описания контура, использующего Декартовы координаты контура, регистрируемые против часовой стрелки  $(x_n, y_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . В результате контур описывается комплекснозначной функцией  $z_n = x_n + iy_n$  и может аппроксимироваться дискретным рядом Фурье

$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} z_n \exp\left(\frac{-2\pi i k n}{N}\right), \quad -N/2 < k < N/2.$$

Используя формулу Эйлера, имеем  $|C_k| = \sqrt{R^2 + I^2}$ , где  $R$  и  $I$  соответствующие вещественная и мнимая части  $C_k$ . Тогда получаем следующее разложение

$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x_n \cos\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) + y_n \sin\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) \right\} + \quad (5.3.1) \\ + i \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ y_n \cos\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) - x_n \sin\left(\frac{2\pi n k}{N}\right) \right\}.$$

Инвариантность признака к таким аффинным преобразованиям, как поворот, перенос и масштабирование, достигается использованием следующего вектора

$$\left( \frac{|C_{-\frac{N}{2}+1}|}{|C_1|}, \dots, \frac{|C_{-1}|}{|C_1|}, \frac{|C_2|}{|C_1|}, \dots, \frac{|C_{\frac{N}{2}-1}|}{|C_1|} \right). \quad (5.3.2)$$

Следующий признак основан на теореме (см. [273, с. 153-162]), гарантирующей возможность описания кусочно-непрерывной функции последовательностью ее моментов. В качестве признака, обладающего свойством инвариантности относительно сдвига, поворота и изменения масштаба, был выбран набор из семи моментов, представляющих собой специальную комбинацию моментов второго и третьего порядков [207].

Таким образом, были выбраны следующие интегральные признаки для описания контуров: цепной код, разложение в ряд Фурье и инвариантные моменты. Теперь обратимся к признакам для описания текстурных элементов изображений.

### *Текстурные признаки*

Простейшим текстурным признаком была выбрана нормализованная гистограмма изображения, подсчитанная по всем элементам изображения, включая границу. Отметим, что гистограмма не несет никакой информации о взаимном расположении элементов изображения. Одним из способов учета подобной информации является построение матриц совместного распределения яркостей и вычисление по ним текстурных характеристик, таких как контраст, энергия, энтропия, однородность, максимум вероятности и обратный момент разности. Такие дескрипторы известны как статистические дескрипторы Харалика [34; 252]. Практическое использование дескрипторов Харалика состоит в обучении на выборке из различных текстур, состоящей в выборе способа построения матрицы совместного распределения яркостей.

Известными методами анализа текстуры изображений кроме упомянутых статистических признаков Харалика, являются также интегральные признаки Габора [34; 267], основанные на неортогональном вейвлет-преобразовании.

Стоит отметить, что признаки Габора [229] вычислительно неэффективны и, следовательно, не подходят для работы в режиме реального времени.

Наряду с признаками Харалика, был использован признак совокупной направленности внутренних элементов. Такой признак, основанный на внешнем восприятии текстуры изображения, был впервые предложен в работе [313]. На первом этапе происходит распознавание перепадов (границ) в анализируемой области, и для каждого элемента изображения подсчитывается угол и величина перепада. Далее составляется функция



распределения вероятностей перепадов (гистограмма), подсчитывающая все величины перепадов превышающие определенное пороговое значение и квантованная по значениям углов вычисленных перепадов. В итоге, острота всплесков такой функции, подсчитанная по их вторым моментам, была использована в качестве признака совокупной направленности.

### *Задача кластеризации*

Одним подходом в решении задач кластерного анализа является использование моделей дискретной оптимизации [157; 188; 193; 256; 277; 316]. На практике данный подход мало распространен, что могло быть связано с тем, что данные модели относительно сложны с вычислительной точки зрения. Действительно, задача о  $p$ -медиане, которая используется в данной работе, относится к классу NP-трудных задач, т.е. сложность задачи растет экспоненциально относительно ее размерности. Тем не менее, современный уровень развития теории, методов дискретной оптимизации и вычислительной техники позволяет успешно решать эту задачу достаточно большой размерности [150; 194; 278]. Обзор современных как точных, так и эвристических алгоритмов дан в работах Mladenović et al. [272], Avella et al. [150]. Также отметим работы Ю. А. Кочетова et al. [222], Hansen et al. [194], гибридные методы Taillard [311]. Хорошие нижние оценки с использованием релаксаций Лагранжа получены в работах [152; 155; 287; 288] для примеров с несколькими тысячами вершин. Однако их эффективность ограничена размерами памяти. Недавно Hansen et al. [308] предложили алгоритм PDVNS (Primal-Dual Variable Neighborhood Search), дающий нижние оценки для примеров с максимум до 20000 вершин и верхние оценки для 90000 вершин. Avella et al. [136] предложили эвристический алгоритм, позволяющий вычислять как верхние, так и нижние границы для примеров до 90000 вершин.

Даны множества объектов  $V = \{1, \dots, n\}$  (в нашем случае – признаки изображений) и расстояния между ними. Рассмотрим полный, взвешенный ориентированный граф  $G(V, A)$ , где  $V$  – множество вершин графа, множество

$$A = \{uv : u \in V, v \in V, u \neq v\}$$

представляет собой множество дуг графа и  $w_{uv}$  – веса дуг (расстояние между объектами). Введем бинарные переменные  $y_u(x_{uv})$ , которые будут соответствовать вершинам  $u \in V$  и дугам  $uv \in A$ . Переменная  $y_u$  равна 1, если

вершина  $u$  является медианой. Переменная  $x_{uv}$  равна 1, если вершина  $v$  относится к кластеру, определяемому медианой  $u$ . В этих обозначениях задача о  $p$ -медиане может быть сформулирована как задача целочисленного программирования:

$$\sum_{uv \in A} w_{uv} x_{uv} \rightarrow \min_{(x,y)} \quad (5.3.3)$$

$$\sum_{u \in V, u \neq v} x_{uv} + y_v = 1 \quad \forall v \in V, \quad (5.3.4)$$

$$x_{uv} \leq y_u \quad \forall uv \in A, u \in V, \quad (5.3.5)$$

$$\sum_{v \in V} y_v = p, \quad (5.3.6)$$

$$y_u \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V, \quad (5.3.7)$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall uv \in A. \quad (5.3.8)$$

Ограничения (5.3.4) гарантируют, что каждая вершина  $v$  является либо медианой, либо имеет одну входящую дугу из медианной вершины. Неравенства (5.3.5) исключают существование выходящих дуг из немедианных вершин. Количество медиан определяется уравнением (5.3.6).

Допустимая точка задачи на графе представляет из себя  $p$  «звезд», вершины которых образуют кластеры с медианами в середине.

Для решения задачи использовался подход, основанный на алгоритме ветвей, отсечений и оценок, детально описанный в [150]. Данный подход хорошо зарекомендовал себя при решении задач о  $p$ -медиане большой размерности. Здесь отметим только основные компоненты этого подхода (общая теория и методы дискретной оптимизации могут быть найдены в книге [258]):

1. *Лагранжевая эвристика.* Данный метод позволяет находить как нижние оценки, так и верхние оценки целевой функции. Кроме того, информация из этого алгоритма использовалась при оценивании переменных на следующем этапе.
2. *Методы генерации столбцов и строк* для решения ЛП-релаксации задачи (5.3.3)–(5.3.8). Данный метод позволяет рассматривать большинство переменных  $x_{uv}$  и ограничений (5.3.5) в неявном виде, тем самым значительно уменьшая объем памяти и ускоряя работу.
3. *Метод отсечений.* В ходе метода генерации столбцов и строк, так же ведется поиск специальных ограничений, не входящих в формулиров-

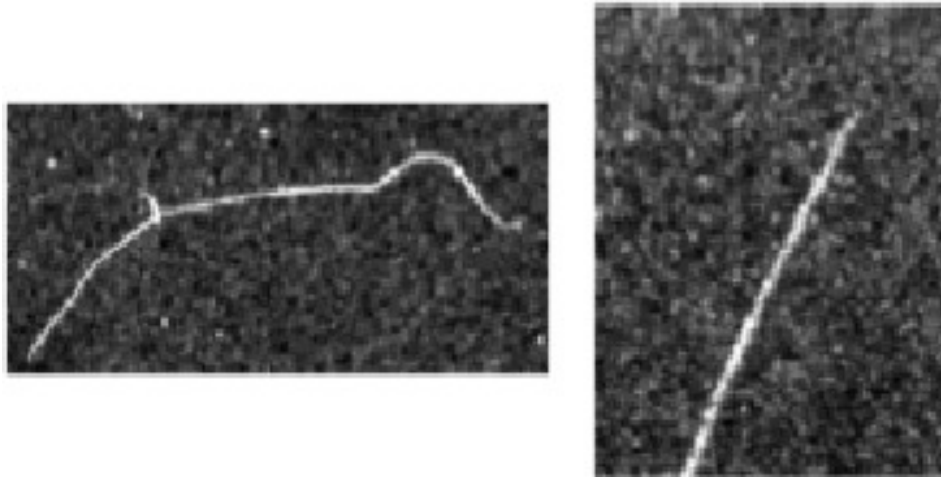


Рис. 5.28: Примеры оверкиллов и брака на печатной плате. Слева: посторонние частицы - нить и пыль. Справа: критический брак - царапина. (©Micron Inc.)

ку (5.3.3)–(5.3.8), которые позволяют улучшить нижние оценки метода ветвей и границ.

4. *Метод ветвей и границ* – хорошо известный метод неявного перебора, который широко используется при решении задач дискретной оптимизации.

Результаты, представленные в [150], показывают, что данный подход позволяет на ранних этапах вычисления находить хорошие решения. Поэтому в данной работе было установлено ограничение в 30 секунд при решении одной задачи кластеризации. Численный эксперимент показал, что в рассматриваемых задачах при таком временном ограничении относительная погрешность решения не превосходят 1%, что является допустимым на практике.

#### *Тестирование на реальных данных*

Предложенный подход классификации для АРД системы был протестирован на примере производства полупроводниковых микросхем (компания Micron Technology) и производства контактных линз (компания Ciba Novartis). Была рассмотрена база данных, состоящая из 1194 изображений дефектов. Примеры брака и оверкила представлены на рисунке 5.28. База данных была случайным образом разбита на обучающую и тестирующую выборки, как представлено в таблице 5.1. Из каждого изображения было извлечено 6 признаков:

1. Нормализованный цепной код;

Число изображений	брака	оверкиллов
в обучающей выборке	257	322
в тестирующей выборке	269	346
<b>Всего</b>	<b>526</b>	<b>668</b>

Таблица 5.1: База данных изображений

2. Признак Фурье;
3. Нормализованная гистограмма;
4. Признаки по матрице смежности;
5. Моменты;
6. Признак направленности.

На первом этапе экспериментов при обучении рассматривались все возможные варианты параметров из множеств, определенных следующим образом: метрики  $L_1$  и  $L_2$ ; веса  $c_i = 0, 1, 2$ , исключая из рассмотрения эквивалентные вектора весов (т.е. пропорциональные вектора);  $p_o$  и  $p_d$  от 5 до 20 с шагом 5.

Результаты вычислений показали, что дефекты наилучшим образом характеризуются контуром, и наиболее адекватным признаком является нормализованный цепной код. Использование различных метрик не выявило существенной разницы в результатах. Только в некоторых случаях евклидова метрика показала слегка лучшие результаты. С учетом этих замечаний на втором этапе рассматривался только цепной код, евклидова норма,  $p_o$  и  $p_d$  изменялись от 5 до 20 с шагом 1. Лучшие результаты вычислений представлены в таблице 5.2.

Предложенный подход сравнивался с результатами классификации полученными МОВ. Были использованы программные пакеты SVM-Lite [214] и LIBSVM [163]. Основным компонентом МОВ является ядро, с помощью которого определяется вид разделяющей гиперповерхности. Самыми распространенными ядрами являются:

- *линейное* – с линейным ядром  $k(x, y) = x \star y$ .
- *полином*  $k(x, y) = (x \star y + c)^d$ .
- *радиальный базис*  $k(x, y) = \exp(-\gamma \|x - y\|^2)$ .
- *сигмоид* – с нейронным ядром  $k(x, y) = \tanh(ax \star y + b)$ .

Другие пакеты, реализующие МОВ (см., например, [286]) и нейронные сети [123], не улучшают полученные ошибки классификации. Используя

$p_o$	$p_d$	Ошибка(%)	$p_o$	$p_d$	Ошибка(%)
16	11	26.5	11	10	28.3
16	9	26.8	12	9	28.3
13	11	27.0	12	10	28.3
16	10	27.2	13	7	28.3
13	9	27.3	14	10	28.3
20	11	27.5	17	9	28.3
11	11	27.6	20	10	28.3
13	10	27.6	15	10	28.5
12	11	27.8	17	10	28.5
14	11	27.8	13	8	28.6
15	11	27.8	16	8	28.6
17	11	27.8	16	12	28.6
20	9	27.8	16	13	28.6
14	9	28.0	20	13	28.6
17	12	28.0	14	7	28.8
17	13	28.0	12	7	28.9
13	12	28.1	15	12	28.9
15	9	28.1	17	7	28.9
17	14	28.1	19	13	28.9
11	9	28.3	13	6	29.1

Таблица 5.2: Ошибка классификации

Ядро МОВ	SVM-Lite	LIBSVM
Линейная	38.2	38.1
полином степени 2	38.1	43.7
полином степени 3	37.6	43.7
радиальный базис	<b>37.4</b>	43.7
сигмоид	44.3	43.7

Таблица 5.3: Ошибки классификации МОВ (%)

кластерный анализ для решения задачи классификации промышленных дефектов, нам удалось снизить ошибку классификации с 37.6% до 25.6% по сравнению с МОВ.

Таким образом, мы рассмотрели задачу автоматического распознавания и классификации образов, возникающая при разработке систем машинного зрения. Основная цель таких систем, работающих в режиме реального времени, состоит в распознавании дефекта на изображении инспектируемого продукта и в способности классифицировать дефект по определенным заранее известным признакам. Предлагается построение функции классификации на основе кластерного анализа. Подход предполагает автономный процесс обучения, предшествующий процессу инспектирования, проходящего в режиме реального времени. На этапе обучения обучающие выборки брака и оверкилов разбиваются на кластеры. Далее, входящий образец классифицируется в соответствии с типом ближайшей медианы. Сравнительный анализ относительно других методов классификации продемонстрировал эффективность изложенного подхода.

# Библиографический список

- [1] Айзерман, М. А. Метод потенциальных функций в теории обучения машин / М. А. Айзерман и др. — М.: Наука, 1970. — С. 385.
- [2] Александровский, Н. М. Методы определения динамических характеристик нелинейных объектов / Н. М. Александровский, А. М. Дейч // Автоматика и телемеханика. — 1968. — Т. 1. — С. 167–188.
- [3] Александровский, Н. М. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами / Н. М. Александровский и др. — М.: Энергия, 1973. — С. 272.
- [4] Апарцин, А. С. Эквивалентные нормы в теории полиномиальных уравнений Вольтерра первого рода / А. С. Апарцин // Известия Иркутского гос. унив. Математика. — 2010. — Т. 1, № 2. — С. 19–29.
- [5] Апарцин, А. С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода: теория и численные методы / А. С. Апарцин. — Новосибирск: Наука, 1999. — Р. 193.
- [6] Апарцин, А. С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра первого рода: элементы теории и численные методы / А. С. Апарцин // Известия ИГУ, серия математика. — 2007. — № 1. — С. 13–42.
- [7] Апарцин, А. С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра первого рода методом квадратурных сумм / А. С. Апарцин, А. Б. Бакушинский // Дифференц. и интегр. ур-ния. (Иркут. гос. ун-т). — 1972. — Т. 1. — С. 248–258.
- [8] Апарцин, А. С. Неклассические уравнения Вольтерра первого рода в моделировании развивающихся систем / А. С. Апарцин, И. В. Сидлер // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 6. — С. 3–16.
- [9] Апарцин, А. С. К идентификации ядер Вольтерра для моделирования нестационарных динамических систем / А. С. Апарцин, Д. Н. Сидоров // Тез. X Байкальской школы «Методы оптимизации и их приложения». — СЭИ СО РАН, Иркутск, Россия, 1995. — С. 235–236.
- [10] Апарцин, А. С. Новые классы многомерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, возникающие при моделировании нестационарных динамических систем / А. С. Апарцин, Д. Н. Сидоров // Тез. II Сибирского конгресса ИНПРИМ-96, 25 - 30 июня 1996, Новосибирск. — ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, 1995. — С. 4–5.
- [11] Апарцин, А. С. К теории моделирования нелинейных динамических систем на основе функциональных рядов Вольтерра / А. С. Апарцин,

- Д. Н. Сидоров // Тез. международного семинара «Нелинейное моделирование и управление», 24-27 июня, 1997, Самара. — СГУ, Самара, Россия, 1997. — С. 12–13.
- [12] Ахмедов, К. Т. Аналитический метод Некрасова-Назарова в нелинейном анализе / К. Т. Ахмедов // УМН. — 1957. — Т. 12, № 4. — С. 135–158.
- [13] Барбашин, Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. — М.: Наука, 1967. — С. 223.
- [14] Беслер, И. О приближении нелинейных операторов полиномами Вольтерра / И. Беслер, И. К. Даугавет // Тр. Ленинградского мат. общества. — 1990. — Т. 1. — С. 53–64.
- [15] Бойков, И. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. — Пенза: Изд. Пензенского гос. ун-та, 2004. — С. 297.
- [16] Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть первая. Сингулярные интегралы / И. В. Бойков. — Пенза: Изд. Пензенского гос. ун-та, 2005. — С. 377.
- [17] Боровиков, В. П. Нейронные сети. STATISTICA Neural Networks: Методология и технологии современного анализа данных / В. П. Боровиков. — М.: Горячая Линия - Телеком, 2008. — С. 392.
- [18] Брюно, А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. — М.: Наука, 1979. — С. 255.
- [19] Брюно, А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А. Д. Брюно. — М.: Физматлит, 1998. — С. 288.
- [20] Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — С. 527.
- [21] Вапник, В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В. Н. Вапник. — М.: Наука, 1979. — С. 448.
- [22] Вапник, В. Н. Узнавание образов при помощи обобщенных портретов / В. Н. Вапник, А. Я. Лернер // Автоматика и телемеханика. — 1963. — Т. 24. — С. 12–25.
- [23] Вапник, В. Н. Теория распознавания образов / В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис. — М.: Наука, 1974. — С. 416.
- [24] Васильев, И. Л. Приложение кластерного анализа к автоматическому распознаванию дефектов / И. Л. Васильев, Д. Н. Сидоров // Проблемы управления. — 2007. — Т. 4. — С. 36–42.
- [25] Веников, В. А. Кибернетические модели электрических систем / В. А. Веников, О. А. Суханов. — М.: Энергоиздат, 1982. — С. 325.

- [26] Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения. Методы. Алгоритмы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — Киев: Наукова Думка, 1986. — С. 544.
- [27] Винер, Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов / Н. Винер. — М.: ИЛ, 1961. — С. 158.
- [28] Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Мир, 1979. — С. 318.
- [29] Вольмир, А. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1967. — С. 984.
- [30] Вулих, Б. З. Краткий курс теории функции вещественной переменной / Б. З. Вулих. — М.: Физматлит, 1973. — С. 350.
- [31] Галин, Н. М. Метод решения одного класса нелинейных задач теплообмена при изменяющихся граничных условиях / Н. М. Галин // Теплоэнергетика. — 1981. — Т. 4. — С. 55–56.
- [32] Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. — М.: Физматлит, 1959. — С. 400.
- [33] Глушков, В. М. Моделирование развивающихся систем / В. М. Глушков и др. — М.: Физматлит, 1983. — С. 351.
- [34] Гонзалес, Р. Цифровая обработка сигналов / Р. Гонзалес, Р. Вудс. — Техносфера, 2005. — Р. 512.
- [35] Горбань, А. Н. Нейроинформатика / А. Н. Горбань и др. — Новосибирск: Наука. Изд. СО РАН, 1998. — С. 296.
- [36] Горбунов, В. К. Редукция линейных интегральных уравнений с равномерной погрешностью в правой части / В. К. Горбунов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1985. — Т. 25. — С. 210–223.
- [37] Горбунов, В. К. Метод нормальной сплайн-коллокации / В. К. Горбунов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1989. — Т. 29. — С. 212–224.
- [38] Гребенников, Е. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребенников. — М.: Физматлит, 1978.
- [39] Давиденко, К. Я. Представление и реализация функционалов в управляющих вычислительных машинах методом разложения в ряд Вольтерра / К. Я. Давиденко // Вопросы машинной кибернетики. — 1973. — Т. 1. — С. 42–47.
- [40] Данилов, Л. В. Теория нелинейных электрических цепей / Л. В. Данилов и др. — Ленинград: Энергоиздат, 1990. — С. 256.
- [41] Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. — М.: Наука, 1979. — С. 170.



- [42] Дейч, А. М. Некоторые вопросы представления динамических свойств нелинейных объектов рядом Вольтерра. Экспериментально – статистические методы исследования многофакторных процессов / А. М. Дейч // Труды МЭИ. — 1966. — Т. 67.
- [43] Дейч, А. М. Методы идентификации динамических объектов / А. М. Дейч. — М.: Энергия, 1979. — С. 240.
- [44] Демиденко, В. Г. Уравнения и системы не разрешенные относительно старшей производной / В. Г. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск: Научная книга, 1998. — С. 438.
- [45] Дмитриев, В. И. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода / В. И. Дмитриев, Е. В. Захарова // Вычисл. методы и программирование, Изд-во МГУ. — 1968. — Т. 10. — С. 49–54.
- [46] Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. — Минск: Наука и Техника, 1972. — С. 664.
- [47] Зоркальцев, В. И. Проблема агрегирования экономических субъектов / В. И. Зоркальцев // Вестник НГУ. Серия: социально-экономические науки. — 2010. — Т. 10. — С. 107–118.
- [48] Иванов, В. К. Избранные научные труды / В. К. Иванов. — М.: Физматлит, 2008. — С. 552.
- [49] Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем / Ю. С. Попков и др. — М.: Энергия, 1976. — С. 439.
- [50] Ильин, В. А. Математический анализ. В 2-х томах / В. А. Ильин и др. — М.: Наука, 1979.
- [51] Иманалиев, М. И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода / М. И. Иманалиев. — Фрунзе: Илим, 1981. — С. 143.
- [52] Каминскас, В. Статистические методы в идентификации динамических систем / В. Каминскас, А. А. Немура. — Вильнюс: Минтис, 1975. — С. 197.
- [53] Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1961. — С. 703.
- [54] Канторович, Л. В. О функциональных уравнениях / Л. В. Канторович // Уч. зап. ЛГУ. — 1937. — Т. 3, № 7.
- [55] Канторович, Л. В. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах / Л. В. Канторович и др. — Ленинград: ГИТТЛ, 1950. — С. 546.
- [56] Караулова, И. В. Применение интегральных моделей для исследования стратегий обновления генерирующих мощностей в электроэнергетике. Дис. работа канд. тех. наук / И. В. Караулова. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2006. — Р. 112.

- [57] Колдингтон, Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Колдингтон, Н. Левинсон. — М.: Иностранная литература, 1958. — С. 474.
- [58] Корпусов, М. О. Разрушения в неклассических нелокальных уравнениях / М. О. Корпусов. — М.: Либерком, 2011. — С. 378.
- [59] Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М.: Наука, 1983. — С. 271.
- [60] Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. — Новосибирск: Наука, 1962. — С. 91.
- [61] Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников и др. — М.: Физматлит, 2007. — С. 736.
- [62] Логинов, Б. В. Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова-Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации / Б. В. Логинов, Н. А. Сидоров // Мат. сб. — 1991. — Т. 182, № 5. — С. 681–691.
- [63] Лукин, А. Введение в цифровую обработку сигналов (математические основы). Методическое пособие / А. Лукин. — М.: МГУ, 2002. — С. 44.
- [64] Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. — М.: Наука, 1991. — С. 432.
- [65] Магницкий, Н. А. Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерра первого рода / Н. А. Магницкий // ДАН СССР. — 1983. — Т. 169, № 1. — С. 29–32.
- [66] Маркова, Е. В. Численные методы решения неклассических линейных уравнений Вольтерра первого рода и их приложения. Дис. работа канд. физ.-мат. наук / Е. В. Маркова. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1999. — Р. 100.
- [67] Маркова, Е. В. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с разрывными ядрами в теории моделирования развивающихся динамических систем / Е. В. Маркова, Д. Н. Сидоров // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2012. — № 2. — С. 31–45.
- [68] Мармарелис, В. З. Анализ физиологических систем: белый шум / В. З. Мармарелис, П. З. Мармарелис. — М.: Мир, 1981. — С. 480.
- [69] Методы прогнозирования параметров режима электроэнергетических систем для целей мониторинга и управления / А. З. Гамм и др. // Электричество. — 2011. — № 5. — С. 12–20.
- [70] Немуры, Н. Идентификация динамических систем / Н. Немуры. — Вильнюс: Минтис, 1974. — С. 284.

- [71] Нестеров, Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию / Ю. Е. Нестеров. — М.: МЦНМО, 2010. — С. 262.
- [72] О нейросетевом подходе к прогнозированию нестационарных временных рядов на основе преобразования Гильберта-Хуанга / В. Г. Курбацкий и др. // Автомат. и телемех. — 2011. — № 7. — С. 58–68.
- [73] Осовский, С. Нейронные сети для обработки информации / С. Осовский. — М.: Финансы и кредит, 2004. — С. 344.
- [74] Пинчук, В. М. Частотный подход к синтезу конечных дискретных функциональных рядов Вольтерра для целей прогноза / В. М. Пинчук, Л. М. Бойчук // Автоматика. — 1984. — Т. 2. — С. 42–47.
- [75] Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий перевооружений электроэнергетики / А. С. Апарцин и др. // Электричество. — 2005. — № 10. — С. 69–75.
- [76] Применение интегральных рядов Вольтерра к моделированию динамики теплообменников / А. С. Апарцин и др. // Изв. РАН, Энергетика. — 1994. — Т. 3. — С. 138–145.
- [77] Прогнозирование нестационарных временных рядов на основе преобразования Гильберта-Хуанга и машинного обучения / В. Г. Курбацкий и др. // Автомат. и телемех. (в печати). — 2014.
- [78] Пупков, К. А. Функциональные ряды в теории нелинейных систем / К. А. Пупков и др. — М.: Наука, 1976. — С. 448.
- [79] Пупков, К. А. Анализ и расчет нелинейных систем с помощью функциональных степенных рядов / К. А. Пупков, Н. А. Шмыкова. — М.: Машиностроение, 1982. — С. 149.
- [80] Расин, Д. Непараметрическая эконометрика: вводный курс / Д. Расин // Квантиль. — 2008. — Т. 4. — С. 7–56.
- [81] Сидоров, Д. Н. О существовании и единственности решений одного класса двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода / Д. Н. Сидоров // Приближенные методы анализа. Межвуз. Сб. научн. тр. — Иркутск: Изд-во гос. пед. ун-та, 1997. — С. 130–140.
- [82] Сидоров, Д. Н. Моделирование нелинейных динамических систем рядами Вольтерра: идентификация и приложения / Д. Н. Сидоров // Диссертация на соискание уч. ст. к.ф.-м.н. по спец. 05.13.16. — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 1999. — С. 150.
- [83] Сидоров, Д. Н. Моделирование нелинейных теплообменных процессов интегро-функциональными рядами Вольтерра / Д. Н. Сидоров // Системные исследования в энергетике. — Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 1999. — С. 208–215.

- [84] Сидоров, Д. Н. Моделирование нелинейных нестационарных динамических систем рядами Вольтерра: идентификация и приложения / Д. Н. Сидоров // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2000. — Т. 3, № 1. — С. 182–194.
- [85] Сидоров, Д. Н. Об одном классе нелинейных уравнений первого рода с однородными интегральными операторами / Д. Н. Сидоров // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2011. — Т. 4, № 1. — С. 109–117.
- [86] Сидоров, Д. Н. О разрешимости уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами в классе обобщенных функций / Д. Н. Сидоров // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2012. — Т. 5, № 1. — С. 80–95.
- [87] Сидоров, Д. Н. Слабо сингулярные уравнения Вольтерра I рода: теория и приложения в моделировании развивающихся динамических систем / Д. Н. Сидоров. Естественные науки. — Саарбрюккен: Palmarium Acad. Publ., 2012. — С. 84.
- [88] Сидоров, Д. Н. О семействах решений интегральных уравнений вольтерры первого рода с разрывными ядрами / Д. Н. Сидоров // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. — 2013. — Т. 227, № 18. — С. 44–52.
- [89] Сидоров, Д. Н. О параметрических семействах решений интегральных уравнений Вольтерры первого рода с кусочно-гладкими ядрами / Д. Н. Сидоров // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 209–213.
- [90] Сидоров, Д. Н. О разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами / Д. Н. Сидоров // Изв. вузов. Матем. — 2013. — № 1. — С. 62–72.
- [91] Сидоров, Д. Н. Метод монотонных мажорант в теории нелинейных уравнений Вольтерра / Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. — 2011. — Т. 4, № 1. — С. 97–108.
- [92] Сидоров, Д. Н. Обобщенные решения в задаче моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра / Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров // Автомат. и телемех. — 2011. — Т. 6. — С. 127–132.
- [93] Сидоров, Н. А. Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационным методом / Н. А. Сидоров // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 2. — С. 129–140.
- [94] Сидоров, Н. А. Параметризация простых разветвляющихся решений полного ранга и итерации в нелинейном анализе / Н. А. Сидоров // Изв. ВУЗов. Математика. — 2001. — № 9. — С. 59–65.

- [95] Сидоров, Н. А. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях / Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 226–237.
- [96] Сидоров, Н. А. Существование и построение обобщенных решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерры первого рода / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 9. — С. 1243–1247.
- [97] Сидоров, Н. А. О малых решениях дифференциальных уравнений в окрестностях точек ветвления / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Известия ИГУ, серия математика. — 2010. — № 5. — С. 53–61.
- [98] Сидоров, Н. А. О решениях интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // СМЖ. — 2010. — Т. 51, № 2. — С. 404–409.
- [99] Сидоров, Н. А. О малых решениях нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности точек ветвления / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Изв. ВУЗов. Матем. — 2011. — № 5. — С. 53–61.
- [100] Сидоров, Н. А. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-определенным ядром в банаховом пространстве / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч. статей, Отв. ред. А.И. Кожанов. — ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012. — Р. 405–411.
- [101] Сидоров, Н. А. О решении операторно-интегральных уравнений Вольтерры в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н. А. Сидоров и др. // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 6. — С. 882–891.
- [102] Сидоров, Н. А. Асимптотические приближения решений нелинейных краевых задач с векторным параметром в окрестности точки бифуркации / Н. А. Сидоров и др. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2011. — № 3. — С. 16–22.
- [103] Сидоров, Н. А. Последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром в нерегулярном случае / Н. А. Сидоров и др. // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2012. — Т. 15. — С. 387–392.
- [104] Сидоров, Н. А. Построение обобщенных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений / Н. А. Сидоров и др. // Вестник МАГУ. Математика. — 2005. — № 8. — С. 123–138.
- [105] Сидоров, Н. А. Существование и структура решения интегро-функционального уравнения Вольтерра первого рода / Н. А. Сидоров

- и др. // Известия Иркутского государственного университета. Серия математика. — 2007. — Т. 1, № 1. — С. 267–274.
- [106] Сидоров, Н. А. Регуляризация простых решений нелинейных уравнений в окрестности точек ветвления / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Сиб. мат. ж. — 1978. — Т. 20, № 1. — С. 180–183.
- [107] Сидоров, Н. А. Точки бифуркации решений нелинейных уравнений / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филиппов. — М.: Физматлит, 2003. — С. 464.
- [108] Сидоров, Н. А. Существование и структура решений интегро-функциональных уравнений Вольтерра первого рода / Н. А. Сидоров и др. // Изв. ИГУ, сер. математика. — 2007. — № 1. — С. 267–274.
- [109] Сизиков, В. С. Математические методы обработки результатов измерений / В. С. Сизиков. — СПб: Политехника, 2001. — С. 239.
- [110] Сизиков, В. С. О решении некорректных, неклассических, нестандартных и сингулярных интегральных уравнений / В. С. Сизиков // Труды международной конференции «Интегральные уравнения — 2009», 26–29 янв. 2009, Киев. — Институт проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины, Киев, Украина, 2009. — С. 17–21.
- [111] Сизиков, В. С. Обратные прикладные задачи и MatLab / В. С. Сизиков. — СПб: Лань, 2011. — С. 256.
- [112] Сизиков, В. С. Инфракрасная томография горячего газа: математическая модель активно-пассивной диагностики / В. С. Сизиков // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. — 2013. — Вып. 6 (88). — С. 1–17.
- [113] Солодуша, С. В. Построение интегральных моделей нелинейных динамических систем с помощью рядов Вольтерра / С. В. Солодуша // Диссертационная работа по спец. 05.13.16 на соиск. уч. ст. к.ф.-м.н., СЭИ СО РАН. — Иркутск, 1995. — С. 1–153.
- [114] Солодуша, С. В. О моделировании нелинейной динамики теплообменных процессов функциональными рядами Вольтерра / С. В. Солодуша, Д. Н. Сидоров // Труды конференции «Математическое моделирование», 3–6 декабря 1997, СПбГТИ. — СПб, 1998. — Р. 211–229.
- [115] Таиров, Е. А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале однофазного парогенератора / Е. А. Таиров // Изв. АН СССР: Энергетика и транспорт. — 1989. — Т. 1. — С. 150–156.
- [116] Таиров, Э. А. Нелинейное моделирование динамики теплообмена в канале с однофазным теплоносителем / Э. А. Таиров, В. В. Запов // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1989. — № 1. — С. 150–156.

- [117] Таиров, Э. А. Интегральная модель нелинейной динамики парогенерирующего канала на основе аналитических решений / Э. А. Таиров, В. В. Запов // Вопросы атомн. науки и техн. Сер. физика ядерных реакторов. — 1991. — № 3. — С. 14–20.
- [118] Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1974. — С. 222.
- [119] Треес, Х. В. Синтез оптимальных нелинейных систем управления / Х. Ван Треес. — М.: Мир, 1964. — С. 167.
- [120] Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — С. 494.
- [121] Уайлд, Д. Д. Методы поиска экстремума / Д. Дж. Уайлд. — М.: Наука, 1967. — С. 268.
- [122] Фалалеев, М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Сиб. мат. журнал. — 2000. — Т. 41, № 5. — С. 1167–1182.
- [123] Хайкин, С. Нейронные сети / С. Хайкин. — М.: Изд. дом Вильямс, 2006. — С. 1104.
- [124] Халмош, П. Теория меры / П. Халмош. — М.: ИЛ, 1952. — С. 291.
- [125] Шилов, Г. Е. Интеграл, мера и производная. Общая теория / Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. — М.: Физматлит, 1967. — С. 219.
- [126] Шумков, Д. С. Разработка и исследование методов прогнозирования на основе SVM-моделей: дисс. канд. тех. наук: 05.13.18. / Д. С. Шумков. — СПб: С.-Петербург. гос. ун-т информац. технологий, механики и оптики, 2009.
- [127] Щербаков, М. А. Алгоритм вычисления ядер Винера нелинейных систем в частотной области / М. А. Щербаков // Кибернетика и вычислительная техника: Респ. межвед. сб. науч. тр. — Киев: Наукова думка, 1988. — С. 51–58.
- [128] Щербаков, М. А. Параллельная реализация цифровых фильтров Вольтерра в частотной области / М. А. Щербаков // Автоматика и вычислительная техника. — 1996. — № 6. — С. 35–44.
- [129] Щербаков, М. А. Цифровая полиномиальная фильтрация: теория и приложения / М. А. Щербаков. — Пенза: Изд-во ПГТУ, 1997. — С. 35.
- [130] Щербинин, М. С. Оптимизация потребления энергоресурсов турбокомпрессором М-1 ЭП-300 с использованием программно-вычислительного комплекса / М. С. Щербинин // Науч.-технич. вестн. ОАО НК Роснефть. — 2010. — № 3. — С. 36–39.
- [131] Юдович, В. И. Математические модели естественных наук: учебное пособие / В. И. Юдович. — Ростов-на-Дону: Лань, 2011. — С. 335.

- [132] Юмова, Л. Л. О ветвлении решений одного интегрального уравнения / Л. Л. Юмова // Приближенные методы анализа. Межвуз. Сб. Научн. тр. — ИГПА, Иркутск, Россия, 1997. — С. 171–190.
- [133] Яценко, Ю. П. Интегральные модели систем с управляемой памятью / Ю. П. Яценко. — Киев: Наукова думка, 1991. — С. 220.
- [134] Abdullah, N. B. Mathematical models of magnetic insulation / N. B. Abdullah [ et al. ] // Rapport Interne, No. 97.20 MIP (Université Poul Sabatier). — Toulouse, France, 1997. — P. 1–38.
- [135] Adya, M. How effective are neural networks at forecasting and prediction? A review and evaluation. / M. Adya, F. Collopy // Int. J. Forecast. — 1998. — Vol. 17. — P. 481–495.
- [136] An aggregation heuristic for large scale p-median problem / Pasquale Avella [ et al. ] // Computers & Operations Research. — 2012. — Vol. 39, N 7. — P. 1625 – 1632.
- [137] Aizenberg, I. Frequency domain median-like filter for periodic and quasi-periodic noise removal / I. Aizenberg, C. Butakoff // Proc. SPIE: Image Processing: Algorithms and Systems 2002. — San Jose, USA, 2002. — P. 46–57.
- [138] Algorithm 778: L-BFGS-B, Fortran subroutines for large scale bound constrained optimization / C. Zhu [ et al. ] // ACM Transactions on Mathematical Software. — 1997. — Vol. 23, N 4. — P. 550–560.
- [139] Alper, P. Consideration of the discrete Volterra series / P. Alper // IEEE Trans. Atom. Control. — 1965. — Vol. 10, N 3. — P. 34–46.
- [140] Al'shin, A. B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations / A. B. Al'shin [ et al. ]. Series in nonlinear analysis and applications. — Berlin: De Gruyter Publ., 2011. — P. 648.
- [141] Amidror, I. The theory of the moiré phenomena / I. Amidror. — Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2000. — P. 462.
- [142] Analytical investigation of large-scale use of static VAR compensation to aid damping of inter-area oscillations / A. R. Messina [ et al. ] // Proceedings of the Seventh International Conference on AC-DC Power Transmission (Conf. Publ. No. 485), 28-30 November 2001. — IEEE, Washington, D.C., 2001. — P. 187–192.
- [143] Apartsyn, A. S. Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series / A. S. Apartsyn // EPRI-SEI joint seminar, Beijing, China. — Beijing, 1991. — P. 117–132.
- [144] Apartsyn, A. S. Some ill-posed problems and their application in energy research / A. S. Apartsyn // Sov. Tech. Rev. A Energy. Harwood Acad. Publ. — 1992. — Vol. 6, N 1. — P. 288–292.



- [145] Apartsyn, A. S. To identification of integral models of nonlinear dynamic systems / A. S. Apartsyn [ et al. ] // Proceedings of III International Conference "Identification of Dynamical systems and Inverse problems Moscow-St.Petersburg. — Moscow-St.Petersburg, 1998. — P. 167–175.
- [146] Apartsyn, A. S. Modeling of nonlinear dynamic systems with Volterra polynomials: elements of theory and applications / A. S. Apartsyn [ et al. ] // to appear in International Journal of Energy Optimization and Engineering, arXiv:1307.4173. — 2013.
- [147] Application of meta-heuristic optimization algorithms in electric power systems / N. I. Voropai [ et al. ] // Meta-heuristics optimization algorithms in engineering, business, economics, and finance. — Malaysia: IGI Global, 2013. — P. 564–615.
- [148] Application of two stages adaptive neural network approach for short-term forecast of electric power system / V. G. Kurbatsky [ et al. ] // Proc. of the International conference IEEEIC'11. — Rome, Italy, 2011.
- [149] Automatic defects classification with  $p$ -median clustering technique / D. N. Sidorov [ et al. ] // Control, Automation, Robotics and Vision, 2008. ICARCV 2008. 10th International Conference on. — 2008. — dec. — P. 775 –780.
- [150] Avella, P. Computational study of large-scale  $p$ -median problems / P. Avella [ et al. ] // Mathematical Programming. — 2007. — Vol. 109. — P. 89–114.
- [151] Banejad, M. Identification of damping contribution from power system controllers / M. Banejad. — Queensland: Queensland University of Technology. PhD Thesis, 2004. — P. 191.
- [152] Beasley, J. E. Lagrangean heuristics for location problems / J. E. Beasley // EJOR. — 1993. — Vol. 65. — P. 383–399.
- [153] Bedrosian, E. The output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and Gaussian inputs / E. Bedrosian, S. O. Rice // Proc. IEEE. — 1971. — Vol. 59. — P. 1688–1707.
- [154] Belbas, S. A. Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations / S. A. Belbas, Yu. Bulka // Applied Mathematics and Computation (arXiv:1101.3963v2). — 2010. — N 217. — P. 4791–4804.
- [155] Beltran, C. Solving the  $p$ -median problem with a semi-lagrangian relaxation / C. Beltran [ et al. ] // Computational Optimization and Applications. — 2006. — Vol. 35, N 2. — P. 239–260.
- [156] Boyn, S. Fading mamory and the problem of approximating nonlinear operators with volterra series / S. Boyn, L. O. Chua // IEEE Trans. Circuits and Systems. — 1985. — Vol. 32, N 11. — P. 1150–1161.

- [157] Bradley, P. S. Feature selection via concave minimization and support vector machines / P. S. Bradley, O. L. Mangasarian // Machine Learning Proceedings of the Fifteenth International Conference (ICML'98), San Francisco, California / Ed. by J. Shavlik. — 1998. — P. 82–90.
- [158] Breiman, H. Random forests / H. Breiman // Machine Learning. — 2001. — Vol. 45. — P. 5–32.
- [159] Brilliant, D. A. Theory of analysis of nonlinear systems. Technical Report 345. Research laboratory of electronics / D. A. Brilliant. — Massachusetts: MIT, 1958.
- [160] Brocken, R. W. Convergence of Volterra series on infinite intervals and bilinear approximations / R. W. Brocken // Nonlinear systems and applications / Ed. by V. Lakshmikantham. — NY: Academic Press, 1977. — P. 23–33.
- [161] Brockwell, P. J. Introduction to time series and forecasting / P. J. Brockwell, R. A. Davis. — NY: Springer-Verlag, 2002. — P. 432.
- [162] Brunner, H. The numerical solution of Volterra equations / H. Brunner, P. J. Van Der Houwen. — North-Holland: CMCS, 1986. — P. 588.
- [163] Chang, C.-C. LIBSVM: A library for support vector machines / C.-C. Chang, C.-J. Lin // ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology. — 2011. — Vol. 2. — P. 21–27.
- [164] Cherry, J. A. Distortion analysis of weakly nonlinear filters using Volterra series / J. A. Cherry. — Ottawa: Carleton University, 1994.
- [165] Cho, N. I. Adaptive line enhancement by using an IIR lattice notch filter / N. I. Cho [ et al. ] // IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing. — 1989. — Vol. 37, N 4. — P. 585–589.
- [166] Chua, L. O. Frequency domain analysis of nonlinear systems: General theory / L. O. Chua, C. Y. Ng // IEE Journal on Electronic Circuits and Systems. — 1974. — Vol. 4. — P. 165–185.
- [167] Chua, L. O. Nonlinear oscillation via Volterra series / L. O. Chua, Y. S. Tang // IEEE Trans. Circuits and System. — 1982. — Vol. 29. — P. 150–168.
- [168] Cottet, G. H. A Volterra type model for image processing / G. H. Cottet, M. E. Ayyadi // IEEE Trans. on Image Processing. — 1998. — Vol. 7, N 3. — P. 1–32.
- [169] Cover, T. Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications in pattern recognition / T. Cover // IEEE Trans. Electron. Comput. — 1965. — Vol. 14. — P. 326–334.
- [170] Crouch, P. E. Dynamical realization of finite Volterra series / P. E. Crouch // SIAM Journal of Control and Optimization. — 1981. — Vol. 19, N 2. — P. 177–202.

- [171] Crouch, P. E. Volterra series resolution of input-output differential equations / P. E. Crouch, F. Lamnabhi-Lagarrigue // Proc. European Control Conf., Grenoble, France, 1991. — Grenoble, France, 1991. — P. 1800–1802.
- [172] Denisov, A. M. On a special Volterra integral equation of the first kind / A. M. Denisov, A. Lorenzi // Boll. Un. Mat. Ital. B. — 1995. — Vol. 7, N 9. — P. 443–457.
- [173] Design of two-dimensional adaptive digital notch filters / T. Hinamoto [ et al. ] // 5th International Conference on Signal Processing (WCCC-ICSP 2000). — 2000. — P. 538–542.
- [174] Digital restoration systems: coping with reality / A. Kokaram [ et al. ] // SMPTE Journal. — 2003. — Vol. 112, N 7. — P. 225–231.
- [175] Dolezal, V. Dynamics of Linear Systems / V. Dolezal. — Prague: Academia, 1967. — P. 244.
- [176] Doyle, F. J. Nonlinear model-based control using second-order Volterra models / F. J. Doyle [ et al. ] // Automatica. — 1995. — N 31. — P. 697–714.
- [177] Doyle, F. J. Identification and control using Volterra models / F. J. Doyle [ et al. ]. — Germany: Springer Publ., 2002. — P. 314.
- [178] Edmunds, D. E. Hardy operators, function spaces and embeddings / D. E. Edmunds, W. D. Evans. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — P. 328.
- [179] Elsgoltz, L. E. Qualitative methods in mathematical analysis / L. E. Elsgoltz. — US: American Math. Soc., 1964. — P. 250.
- [180] The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis / N. E. Huang [ et al. ] // Proc. Royal Soc. London, Ser. A: Math., Phys. and Engineer. Sci. — 1998. — Vol. 454, N 1971. — P. 903–995.
- [181] Estimation electro-mechanical parameters using frequency measurements / M. Hemmingsson [ et al. ] // Power Engineering Society Winter Meeting, 2001. — Vol. 3. — IEEE, Washington, D.C., 2001. — P. 1172–1177.
- [182] Evans, G. C. Integral equation of the second kind with discontinuous kernel / G. C. Evans // Transactions of the American Mathematical Society. — 1910. — Vol. 11, N 4. — P. 393–413.
- [183] Fan, J. Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods / J. Fan, Q. Yao. — New York: Springer-Verlag, 2003. — P. 576.
- [184] Favier, G. Nonlinear system modeling and identification using Volterra-PARAFAC models / G. Favier [ et al. ] // Int. J. Adapt. Control Signal Process. — 2012. — N 26. — P. 30–53.

- [185] Franz, M. A unifying view of Wiener and Volterra theory and polynomial kernel regression / M. Franz, B. Schölkopf // *Neural Comput.* — 2006. — Vol. 18. — P. 3097–3118.
- [186] Fréchet, M. Sur les Fonctionnelles Continues / M. Fréchet // *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure.* — 1910. — Vol. 27. — P. 193–216.
- [187] Friedman, J. H. Stochastic gradient boosting / J. H. Friedman // *Comput. Statist. Data Anal.* — 2002. — Vol. 38. — P. 367–378.
- [188] Fung, G. Semi-supervised support vector machines for unlabeled data classification / G. Fung, O. L. Mangasarian // *Optimization Methods and Software.* — 2000. — Vol. 1, N 15. — P. 29–44.
- [189] Gabor, D. An universal nonlinear filter, predictor and simulator which optimizes itself by a learning process / D. Gabor [ et al. ] // *Proc. of the Inst. Electr. Engrs, Part B: Electronic and Communication Engineering, B108, No.40.* — England: IEE, 1961.
- [190] Gorbunov, V. K. A method of normal splines for linear DAEs on the number semi-axes / V. K. Gorbunov, V. Yu. Sviridov // *Applied Numerical Mathematics.* — 2009. — Vol. 59. — P. 655–670.
- [191] Hadamar, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique / J. Hadamar // *Princeton Univ. Bull.* — 1902. — Vol. 13. — P. 49–52.
- [192] Haikin, S. *Neural Networks and Learning Machines* / S. Haikin. — NY: Prentice Hall, 2009.
- [193] Hansen, P. Cluster analysis and mathematical programming / P. Hansen, B. Jaumard // *Mathematical Programming.* — 1997. — Vol. 79. — P. 191–215.
- [194] Hansen, P. Variable neighbourhood decomposition search / P. Hansen [ et al. ] // *Journal of Heuristics.* — 2001. — Vol. 7. — P. 335–350.
- [195] Hauer, J. Application of Prony analysis to the determination of modal content for measured power system response / J. Hauer // *IEEE Trans. on Power Systems.* — 1991. — Vol. 6, N 3. — P. 1062–1068.
- [196] He, S. A neural approach for control of nonlinear systems with feedback linearization / S. He [ et al. ] // *IEEE Transaction on Neural Networks.* — 1998. — Vol. 9. — P. 1409–1421.
- [197] Heinzl, G. Spectrum and spectral density estimation by the discrete Fourier transform, including a comprehensive list of window functions and some new flat-top windows / G. Heinzl [ et al. ] // *Preprint of Max Planck Institute (MPI) für Gravitationsphysik / Laser Interferometry und Gravitational Wave Astronomy.* — 2002. — Vol. ID395068.0. — P. 1–84.

- [198] Hentschel, C. Video moiré cancellation filter for high-resolution CRTs / C. Hentschel // IEEE Transactions on Consumer Electronics. — 2001. — Vol. 47, N 1. — P. 16–24.
- [199] Heravi, S. Linear versus neural network forecasts for European industrial production series / S. Heravi [ et al. ] // Int. J. Forecast. — 2004. — Vol. 20. — P. 435–446.
- [200] Ho, B. SEM ADC (Auto Defect Classification): How it improves the cost of ownership without risk of yield loss / B. Ho, M. Inokuchi // Advanced Semiconductor Manufacturing Conference, 2007. ASMC 2007. IEEE/SEMI. — IEEE, Washington, D.C., 2007. — P. 293–298.
- [201] Hritonenko, N. Modeling and optimization of the lifetime of technologies / N. Hritonenko, Yu. Yatsenko. — Holland: Kluwer Academic Publishers, 1996. — P. 252.
- [202] Hritonenko, N. Mathematical modeling in economics, ecology and the environment / N. Hritonenko, Yu. Yatsenko. — Holland: Kluwer Academic Publishers, 1999. — P. 249.
- [203] Hritonenko, N. Applied mathematical modelling of engineering problems / N. Hritonenko, Yu. Yatsenko. — Holland: Springer, 2003. — P. 286.
- [204] Hritonenko, N. Turnpike and optimal trajectories in integral dynamic models with endogenous delay / N. Hritonenko, Yu. Yatsenko // J. Optim. Theory Appl. — 2005. — Vol. 127, N 1. — P. 1371–1379.
- [205] Hritonenko, N. Technological innovations, economic renovation, and anticipation effects / Natali Hritonenko, Yuri Yatsenko // Journal of Mathematical Economics. — 2010. — Vol. 46, N 6. — P. 1064–1078.
- [206] Hsieh, M. Parameter estimation using Volterra series / M. Hsieh, P. Rayner // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'98). — Seattle, 1998. — P. 49–53.
- [207] Hu, M. Visual pattern recognition by moment invariants / M. Hu // IRE Trans. Information Theory. — 1962. — Vol. 8, N 1. — P. 179–187.
- [208] A hybrid ARIMA and neural network model for short-term price forecasting in deregulated market / P. Areekul [ et al. ] // IEEE Trans. Power Syst. — 2010. — Vol. 25. — P. 524–530.
- [209] The hybrid model based on the Hilbert-Huang transform and neural networks for forecasting short-term operation conditions of power system / V. G. Kurbatsky [ et al. ] // Proc. of the International Conference PowerTech'2011. — Trondheim, Norway, 2011.
- [210] Hybrid model for short-term forecasting in electric power system / V. Kurbatsky [ et al. ] // J. of Machine Learning and Computation. — 2011. — Vol. 2, N 5. — P. 138–147.

- [211] Iatrou, M. Modeling of nonlinear nonstationary dynamic systems with novel class of artificial neural networks / M. Iatrou [ et al. ] // IEEE Transaction on Neural Networks. — 1999. — Vol. 10. — P. 327–339.
- [212] The identification of nonlinear models for process control using tailored plant-friendly input sequences / R. S. Parker [ et al. ] // J. Proc. Control. — 2001. — N 11. — P. 237–250.
- [213] Iivarinen, J. Shape recognition of irregular objects. — In SPIE Proceedings: Intelligent Robots and Computer Vision XV. — 1996.
- [214] Joachims, T. Learning to classify text using support vector machines / T. Joachims. — Springer, 2002. — Vol. 668.
- [215] Kallenberg, R. H. Film into video: a guide to merging the technologies / R. H. Kallenberg, G. D. Cvjetnicanin. — US: Focal Press, 1994.
- [216] Karaulova, I. V. On one optimal control problem in the Glushkov integral models / I. V. Karaulova, E. V. Markova // CD Proceedings of Forth International Conference Inverse Problems: Identification, Design and Control, July 2-6, 2003. — MAI, 2003. — P. 45–55.
- [217] Kariv, O. An algorithmic approach to network location problems. ii: the  $p$ -medians / O. Kariv, L. Hakimi // Operations Research. — 1979. — Vol. 37, N 3. — P. 539–560.
- [218] Kekatos, V. Sparse Volterra and polynomial regression models: recoverability and estimation / V. Kekatos, G. B. Giannakis // IEEE Trans. on Signal Processing. — 2011. — Vol. 59, N 12. — P. 5907–5920.
- [219] Keller, H. B. Numerical solution of bifurcation and nonlinear problems / H. B. Keller. Applications of bifurcation theory. — New York: Academpress, 1977.
- [220] Khawar, J. Volterra kernel identification of MIMO aeroelastic system through multiresolution and multiwavelets / J. Khawar [ et al. ] // Computational Mechanics. — 2012. — Vol. 49, N 4. — P. 431–458.
- [221] Khromov, A. P. Integral Operators with Discontinuous Kernel on Piecewise Linear Curves / A. P. Khromov // Sbornik: Mathematics. — 2006. — Vol. 197, N 11. — P. 115–142.
- [222] Kochetov, Y. Computationally difficult instances for the uncapacitated facility location problem / Yu. Kochetov, D. Ivanenko // Metaheuristics: progress as real solvers. / Ed. by T. Ibaraki et al. — Springer, 2005. — P. 351–367.
- [223] Kokaram, A. C. Motion picture restoration / A. C. Kokaram. — Germany: Springer-Verlag, 1998.
- [224] Kolding, T. E. Hovsa. High order Volterra series analysis. Version 2.1. Technical Report R-95-1002 / T. E. Kolding, T. Larsen. — Aalborg: Aalborg University Publ., 1995. — P. 90.

- [225] Kolding, T. E. High order Volterra series analysis parallel computing / T. E. Kolding, T. Larsen // International Journal of Circuits Theory and Applications. — 1997. — Vol. 25.
- [226] Korba, P. Real-time monitoring of electromechanical oscillations in power systems: first findings / P. Korba // Generation, Transmission and Distribution, IET. — 2007. — Vol. 1, N 1. — P. 80–88.
- [227] Korba, P. Detection of oscillations in power systems using Kalman filtering techniques / P. Korba [ et al. ] // Proceedings of IEEE Conference on Control Applications, 23-25 June 2003. — IEEE, Washington, D.C., 2003. — P. 183–188.
- [228] Kulhavý, R. On duality of regularized exponential and linear forgetting / R. Kulhavý, F. J. Kraus // Transactions of the American Mathematical Society. — 1996. — N 32. — P. 1403–1415.
- [229] Kumar, A. Defect detection in textured materials using gabor filters / A. Kumar, G. K. H. Pang // IEEE Transactions on Industry Applications. — 2001. — Vol. 32, N 2. — P. 425–440.
- [230] Kundert, K. S. The designer guide to SPICE and SPECTRE / K. S. Kundert. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. — P. 382.
- [231] Kundur, P. Power system stability and control / P. Kundur [ et al. ]. — NY: McGraw Hill, 1994. — P. 1176.
- [232] Kunttu, I. Efficient fourier shape descriptor for industrial defect images using wavelets / I. Kunttu [ et al. ] // SPIE Optical Engineering Letters. — 2005. — Vol. 44, N 8. — P. 345–351.
- [233] Kwatny, H. G. Local bifurcation in power systems: theory, computation, and application / H. G. Kwatny [ et al. ] // Proceedings of the IEEE. — 1995. — Vol. 83, N 11. — P. 1456–1483.
- [234] Lamm, P. K. Numerical solution of first-kind Volterra equations by sequential Tikhonov regularization / P. K. Lamm, L. Elden // SIAM J. Numer. Anal. — 1997. — Vol. 34. — P. 1432–1450.
- [235] Larsen, T. Theory of non-linear noisy networks and systems / T. Larsen. — Aalborg, Denmark: Aalborg University Publ., 1997. — P. 334.
- [236] Lavrentiev, M. M. Some improperly posed problems in mathematical physics / M. M. Lavrentiev. — London: Springer, 1967. — P. 88.
- [237] Ledwich, G. Modal estimates from normal operation of power systems / G. Ledwich, E. Palmer // Power Engineering Society Winter Meeting, 2001. IEEE. — Vol. 2. — IEEE, Washington D.C., 2001. — P. 1527 – 1531.
- [238] Lichtenstein, L. Vorlesungen uber einige klassen nichtlinearer integralgleichungen und integro-differentialgleichungen nebst anwendungen / L. Lichtenstein. — Berlin: Julius Springer, 1931.

- [239] Linz, P. Analytical and numerical methods for Volterra equations / P. Linz. — US: SIAM, 1985. — P. 227.
- [240] Lorenzi, A. Integro-differential operator equations of the first kind of degenerate type in Banach spaces and applications to integro-differential PDEs / A. Lorenzi // Submitted to Eurasian Journal of Mathematical and Computer Application. — 2013.
- [241] Lu, Y. Integral equation models for image restoration: high accuracy methods and fast algorithms / Y. Lu [ et al. ] // Inverse Problems. — 2010. — N 26. — P. 1–32.
- [242] Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. A. Sidorov [ et al. ]. — Boston: Kluwer Academic Publ., 2002. — P. 548.
- [243] Maas, S. A. Analysis and optimization of nonlinear microwave circuits by Volterra-series analysis / S. A. Maas // Microwave Journal. — 1990. — Vol. 33. — P. 245–251.
- [244] Malolepszy, T. Blow-up conditions for nonlinear Volterra integral equations with power nonlinearity / T. Malolepszy, W. Okrasinski // Applied Mathematics Letters. — 2008. — Vol. 21, N 3. — P. 307 – 312.
- [245] Markova, E. V. On models of developing systems and their applications / E. V. Markova [ et al. ] // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, N 7. — P. 1371–1379.
- [246] Marmarelis, V. Z. Practicable identification of nonstationary nonlinear systems / V. Z. Marmarelis // Proc. Inst. Elect. Eng. — 1981. — Vol. 5. — P. 211–214.
- [247] Marmarelis, V. Z. Volterra models and three-layer perceptrons / V. Z. Marmarelis, X. Zhao // IEEE Trans. Neural Networks. — 1997. — Vol. 8. — P. 1421–1433.
- [248] Marshall, S. Review of shape coding techniques / S. Marshall // Image and Vision Computing. — 1989. — Vol. 7, N 4. — P. 281–294.
- [249] Mathews, V. Polynomial signal processing / V. Mathews, G. Sicuranza. — New York: Wiley Publ., 2000. — P. 452.
- [250] Mazzieri, G. L. Existence, uniqueness and stability of minimizers of generalized Tikhonov-Phillips functionals / G. L. Mazzieri [ et al. ] // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 396. — P. 396–411.
- [251] Mercer, J. Functions of positive and negative type, and their connection with the theory of integral equations / J. Mercer // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. — 1909. — Vol. 209. — P. 415–446.



- [252] Mery, D. Automatic detection of welding defects using texture features / D. Mery, M. A. Berti // CTIP2003 Proceedings. — CTIP2003 Proceedings, Berlin. — Berlin, 2003. — P. 676–681.
- [253] Micke, A. The treatment of integral equations with discontinuous kernels using product type quadrature formulas / A. Micke // Computing. — 1989. — Vol. 42. — P. 207–223.
- [254] Moore, G. The numerical threatment of non-trivial bifurcation points / G. Moore // Numer. Funct. Anal. Optim. — 1980. — Vol. 2, N 6. — P. 441–472.
- [255] Morozov, V. A. Methods for solving incorrectly posed problems / V. A. Morozov. — NY: Springer-Verlag, 1984. — P. 257.
- [256] Mulvey, J. M. Cluster analysis: an application of lagrangian relaxation / J. M. Mulvey, H. P. Crowder // Management Science. — 1979. — Vol. 25. — P. 329–340.
- [257] Mydlarczyk, W. Blow-up solutions to a system of nonlinear Volterra equations / W. Mydlarczyk [ et al. ] // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2005. — Vol. 301, N 1. — P. 208 – 218.
- [258] Nemhauser, G. L. Integer and combinatorial optimization / G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey. — Willey, 1988. — P. 784.
- [259] Neural networks optimization through simulated annealing for the short-term forecasting state variables of energy power systems / V. Kurbatsky [ et al. ] // Electro (EEEC). — 2012. — Vol. 2. — P. 15–24.
- [260] Nishijima, Y. Moiré patterns: their application to refractive index and refractive index gradient measurements / Y. Nishijima, G. Oster // Jour. of the Optical Society of America. — 1964. — Vol. 54. — P. 1–5.
- [261] Niskanen, M. Wood inspection with non-supervised clustering / M. Niskanen [ et al. ] // Machine Vision and Applications Journal. — 2003. — Vol. 13, N 4-6. — P. 275–285.
- [262] Non-linear dynamic system modelling based on modified Volterra series approaches / D. Mirri [ et al. ] // Measurement. — 2003. — Vol. 33, N 1. — P. 9 – 21.
- [263] Nonlinear frequency domain filter for quasi-periodic noise removal / I. Aizenberg [ et al. ] // Spectral Methods and Multirate Signal Processing (SMMSP'2002), Proc. of TICSP Workshop. — Toulouse, France, 2002. — P. 147–153.
- [264] Nonlinear predictive control of smooth nonlinear systems based on Volterra models. Application to a pilot plant / J. K. Gruber [ et al. ] // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2011. — Vol. 20. — P. 1817–1835.

- [265] The novel approach for power flow prediction based on the marginal Hilbert spectrum and ANN / V. Kurbatsky [ et al. ] // Proceedings of 5TH International conference on Liberalization and Modernization of Power Systems, Irkutsk, Russia, August 6-10, 2012 (CD). — ISEM SB RAS, Irkutsk, Russia, 2012. — P. 1–8.
- [266] A novel hybrid approach to forecasting power system parameters using Hilbert-Huang transform and machine learning / V. Kurbatsky [ et al. ] // Proceedings of the 4th European Innovative Smart Grid Technologies (IEEE ISGT) Conference. — Copenhagen, 2013.
- [267] Ohanian, P. Performance evaluation for four classes of textural features / P. Ohanian, R. Dubes // Pattern Recognition. — 1992. — Vol. 25. — P. 819–833.
- [268] On the use of equality constraints in the identification of Volterra–Laguerre models / C. Diouf [ et al. ] // IEEE Signal Processing Letters. — 2012. — Vol. 12, N 19. — P. 857–860.
- [269] Optimized Bayesian dynamic advising: theory and algorithms / M. Kárný [ et al. ]. — Germany: Springer Publ., 2006. — P. 546.
- [270] Oster, G. The science of moiré patterns / G. Oster. — USA: Edmund Scientific Co., 1964. — P. 40.
- [271] Oster, G. Theoretical unterpretation of moiré patterns / G. Oster [ et al. ] // Jour. Of the Optical Society of America. — 1964. — Vol. 54. — P. 169–175.
- [272]  $p$ -median problem: A survey of metaheuristic approaches / N. Mladenovic [ et al. ] // European Journal of Operations Research. — 2007. — Vol. 179, N 3. — P. 927–939.
- [273] Papoulis, A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes / A. Papoulis. — NY: McGraw-Hill, 1991. — P. 575.
- [274] Pearson, R. K. Identification of structurally constrained second-order Volterra models / R. K. Pearson [ et al. ] // IEEE Trans. on Signal Processing. — 1996. — Vol. 44, N 11. — P. 2837–2846.
- [275] Pei, S.-C. Two dimensional IIR digital notch filter design / S.-C. Pei, C.-C. Tseng // IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. — 1994. — Vol. 41, N 3. — P. 227–231.
- [276] Petrov, Y. P. Well-posed, ill-posed, and intermediate problems with applications / Yu. P. Petrov, V. S. Sizikov. — Leiden: De Gruyter, 2005. — P. 234.
- [277] Rao, M. R. Cluster analysis and mathematical programming / M. R. Rao // Journal of the American Statistical Association. — 1971. — Vol. 6. — P. 622–626.

- [278] Resende, M. G. C. A hybrid heuristic for the p-median problem. / M. G. C. Resende, R. F. F. Werneck // J. Heuristics. — 2004. — Vol. 10, N 1. — P. 59–88.
- [279] Roberts, C. A. Recent results on blow-up and quenching for nonlinear Volterra equations / C. A. Roberts // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2007. — Vol. 205, N 2. — P. 736 – 743.
- [280] Robust and automatic digital restoration system: coping with reality / A. Kokaram [ et al. ] // International Broadcasting Convention 2002, Proc. IBC. — Amsterdam, The Netherlands, 2002. — P. 405–411.
- [281] Robust retrieval from compressed medical image archives / D. N. Sidorov [ et al. ] // SPIE Proc. on Medical Imaging. — SPIE N 5748-51. — San Diego CA, USA, 2005. — February.
- [282] Rugh, W. J. Nonlinear system theory: the Volterra / Weiner approach / W. J. Rugh. — Baltimore: John Hopkins Press, 1981. — P. 330.
- [283] Sandberg, I. W. On Volterra expansion for time-varying nonlinear systems / I. W. Sandberg // IEEE Trans. Circuits and Systems. — 1983. — Vol. 30. — P. 61–67.
- [284] Sandberg, I. W. Multidimensional nonlinear myopic maps, Volterra series, and uniform neural-network approximations / I. W. Sandberg // Proceedings of Workshop on Intellegent Methods for Signal Processing and Communications, Vigo, Spain, June 24-26, 1996. — Vigo, 1996. — P. 99–128.
- [285] Schetzen, M. Measurement of the kernels of a nonlinear system of finite order / M. Schetzen // Intl J. Control. — 1965. — Vol. 1–15, N 3. — P. 251–263.
- [286] Scholkopf, B. Advances in kernel methods. Support vector learning / B. Scholkopf [ et al. ]. — The MIT Press, 1999. — P. 376.
- [287] Senna, E. A branch-and-price approach to p-median location problems / E.L.F. Senna [ et al. ] // Computers and Operations Research. — 2005. — Vol. 32, N 6. — P. 1655–1664.
- [288] Senne, E. Lagrangean/surrogate heuristics for p-median problems / E.L.F. Senne, L.A.N. Lorena // Computing Tools for Modeling, Optimization and Simulation: Interfaces in Computer Science and Operations Research / Ed. by M. Laguna, J. L. Gonzalez-Velarde. — Kluwer Academic Publishers, 2001. — P. 115–130.
- [289] Shcherbakov, M. A. A parallel architecture for adaptive frequency-domain Volterra filtering / M. A. Shcherbakov // Proc. IEEE Digital Signal Processing Workshop. -Loen, Norway, Sept., 1996. — Leon, Norway, 1996. — P. 203–206.

- [290] Shcherbakov, M. A. Fast estimation of Wiener kernels of nonlinear systems in the frequency domain / M. A. Shcherbakov // Proc. of the IEEE Signal Processing Workshop on High-Order Statistics. Alberta, Canada, July, 1997. — Alberta, 1997. — P. 203–206.
- [291] Short-term forecasting parameters of EPS for systems of operating and emergency control / V. G. Kurbatsky [ et al. ] // “Actual Trends in Development of Power Systems Protection and Automation”, 30 May – 3 June 2011. SPb, Russia. — SPb, Russia, 2011. — P. 44–45.
- [292] Sidorov, D. N. Existence and construction of the unique solution of the one class of the first kind Volterra integral equation / D. N. Sidorov // Conference on differential equation and their application, EQUADIFF-9, Enlarged Abstracts, August 25- 29, 1997. — Brno, Czech Republic, 1997. — P. 176–177.
- [293] Sidorov, D. N. About integral model of nonlinear dynamic systems / D. N. Sidorov // ICIAM-99, Book of Abstracts, Edinburg. — Edinburg, UK, 1999. — P. 310–311.
- [294] Sidorov, D. N. Modelling of non-linear dynamic systems by Volterra series. In “Attractors, Signals, and Synergetics” / D. N. Sidorov. — Germany-USA: Pabst Science Publ., 2002. — P. 276–282.
- [295] Sidorov, D. N. On impulsive control of nonlinear dynamical systems based on the Volterra series / D. N. Sidorov // 10th IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering, EEEIC. — Rome, Italy, 2011. — P. 1–3.
- [296] Sidorov, D. N. Volterra equations of the first kind with discontinuous kernels in the theory of evolving systems control / D. N. Sidorov // Studia Informatica Universalis. Paris: Hermann Publ. — 2011. — Vol. 9, N 3. — P. 135–146.
- [297] Sidorov, D. N. Existence and destruction of Kantorovich main continuous solutions of nonlinear integral equations / D. N. Sidorov // arXiv e-prints 1302.7235. — 2013. — February. — P. 12.
- [298] Sidorov, D. N. Solution to systems of Volterra integral equations of the first kind with piecewise continuous kernels / D. N. Sidorov // Russian Mathematics. — 2013. — Vol. 57, N 1. — P. 62–72.
- [299] Sidorov, D. N. On-line detection of inter-area oscillations using forgetting approach for power systems monitoring / D. N. Sidorov [ et al. ] // IEEE Proc. of The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering (ICCAE), 26–28 Feb. 2010, Singapore. — Vol. 3. — IEEE, Washington, D.C., 2010. — P. 292–295.
- [300] Sidorov, D. N. Suppression of moiré patterns via spectral analysis / D. N. Sidorov, A. C. Kokaram // Visual Communications and Image

Processing 2002, Proc. SPIE 4671. — San Jose, USA, 2002. — P. 895–906.

- [301] Sidorov, D. N. Non-stationary autoregressive model for on-line detection of inter-area oscillations in power systems / D. N. Sidorov [ et al. ] // Innovative Smart Grid Technologies Conference Europe (ISGT Europe), 2010 IEEE PES, 11-13 Oct. 2010. — IEEE PES, Washington, D.C., 2010. — P. 1–5.
- [302] Sidorov, D. N. Generalized solutions of polynomial Volterra integral equations of the 1st kind / D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Proceedings of 5th International IFAC Symposium Generalized Statements and Solutions of Control Problems (GSSCP-2010), September 13-17, 2010, UlaanBaator, Mongolia / Ed. by Prof. V. I. Gurman. — 2010. — P. 237–241.
- [303] Sidorov, D. N. Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations / D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Banach J. Math. Anal. — 2012. — Vol. 6, N 1. — P. 1–10.
- [304] Sidorov, N. A. An N-step iteration method in branching theory for solutions to nonlinear equations / N. A. Sidorov // Siberian Mathematical Journal. — 1997. — Vol. 38, N 2. — P. 330–341.
- [305] Sidorov, N. A. Generalized solutions of Volterra integral equations of the first kind / N. A. Sidorov [ et al. ] // Bull. Malays. Math. Soc. — 2006. — Vol. 29, N 2. — P. 1–5.
- [306] Sidorov, N. A. Successive approximations to the solutions to nonlinear equations with a vector parameter in a nonregular case / N. A. Sidorov [ et al. ] // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2012. — Vol. 6. — P. 387–392.
- [307] Sidorov, N. A. Nonlinear operator equations with a functional perturbation of the argument of neutral type / N. A. Sidorov, A. V. Trufanov // Differential Equations. — 2009. — Vol. 45, N 12. — P. 1840–1844.
- [308] Solving large p-median clustering problems by primal–dual variable neighborhood search / P. Hansen [ et al. ] // Data Mining and Knowledge Discovery. — 2009. — Vol. 19, N 3. — P. 351–375.
- [309] Soni, A. S. Control-relevant system identification using nonlinear Volterra and Volterra-Laguerre models / A. S. Soni. — Pittsburg, USA: PhD Thesis: Pittsburg Univ., 2006. — P. 185.
- [310] Sviridyuk, G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. — Utrecht: VSP, 2003. — P. 216.
- [311] Taillard, E. Heuristics methods for large centroids clustering problems / E.D. Taillard // Journal of heuristics. — 2003. — Vol. 9. — P. 51–73.

- [312] Takasaki, H. Moiré topography / H. Takasaki // Applied Optics. — 1970. — Vol. 9, N 6. — P. 1467–1472.
- [313] Tamura, H. Texture features corresponding to visual perception / H. Tamura [ et al. ] // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. — 1978. — Vol. 8. — P. 460–472.
- [314] Theocaris, P. S. Moiré fringes in strain analysis / P. S. Theocaris. — UK: Pergamon Press, 1963. — P. 426.
- [315] Toshio, U. Some notes on linear Fredholm integral equations of the first kind / U. Toshio [ et al. ]. — Tokyo: Research Inst. of Science and Technology, Nihon Univ., 1977.
- [316] Vinod, H. D. Integer programming and the theory of groups / H. D. Vinod // Journal of the American Statistical Association. — 1969. — Vol. 6. — P. 506–519.
- [317] Volterra, V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations / V. Volterra. — New York: Dover Publ., 2005. — P. 226.
- [318] Šmídl, V. The variational Bayes method in signal processing / V. Šmídl, A. Quinn. — Germany: Springer. Series: Signals and Communication Technology, 2006. — P. 248.
- [319] Weeks, A. R. Fundamentals of electronic image processing / A. R. Weeks. — NY: SPIE Optical Engineering Press, 1996. — P. 570.
- [320] Wiener, N. Nonlinear problems in random theory / N. Wiener. — NY: The Technology Press, M.I.T. and J. Wiley and Sons Inc., 1958. — P. 140.
- [321] Wu, J. Estimation electro-mechanical parameters using frequency measurements / J. Wu // Materials of CIGRE Regional Conference “Monitoring of Power System Dynamics Performance”. — CIGRE, 21, Moscow, 2006. — P. 12–17.
- [322] Yan, W. Toward automatic time-series forecasting using neural networks / W. Yan // IEEE Trans. Neural Networks Learning Syst. — 2012. — Vol. 23. — P. 435–446.
- [323] Yang, Z. Blow-up behavior of Hammerstein-type delay Volterra integral equations / Zhanwen Yang, Hermann Brunner // Frontiers of Mathematics in China. — 2013. — Vol. 8. — P. 261–280.
- [324] Yaroslavsky, L. P. Fundamentals of digital optics / L. P. Yaroslavsky, M. Eden. — Boston: Birkhauser, 1996.
- [325] Yun, Z. RBF neural network and ANFIS-based short-term load forecasting approach in real-time price environment / Z. Yun // IEEE Trans. in Power Systems. — 2008. — Vol. 23, N 3. — P. 853–858.

- [326] Zhang, G. P. Forecasting with artificial neural networks: The state of the art / G. P. Zhang [ et al. ] // Int. J. Forecasting. — 1998. — Vol. 14. — P. 35–62.
- [327] Zhijian, L. Analytical investigation of large-scale use of static VAR compensation to aid damping of inter-area oscillations / L. Zhijian [ et al. ] // International Symposium on Intelligent Information Technology Application Workshops, Los Alamitos, CA, USA. — IEEE Computer Society, Washington, D.C., 2008. — P. 205–208.

# Основные обозначения

$\mathbb{R}^n$  – множество действительных  $n$ -мерных векторов

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел

$E_1, E_2$  – банаховы пространства

$L_p(a, b)$  – пространство Лебега с нормой  $\|x\|_{L_p} = \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt}$

$D(B)$  – область определения оператора  $B$

$R(B)$  – область значений оператора  $B$

$\odot^{(n)}$

$\mathcal{C}_{[0,T]}^{(n)}$  – пространство  $n$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $x(t)$ , заданных на компакте  $[0, T]$ ,  $x(0) = 0$

$\mathcal{C}_{[0,T]}$  – пространство непрерывных функций, заданных на компакте  $[0, T]$

$\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]} \rightarrow \mathcal{C}_{[0,T]})$  – пространство линейных непрерывных операторов, действующих из  $\mathcal{C}_{[0,T]}$  в  $\mathcal{C}_{[0,T]}$

$\mathcal{C}_{([0,T];E)}$ ,  $\mathcal{C}_{[0,T]}^E$  – пространство абстрактных непрерывных функций, заданных на компакте  $[0, T]$  со значениями в банаховом пространстве  $E$

$\mathcal{C}_{[0,T]}^+$  – пространство положительных непрерывных функций, заданных на компакте  $[0, T]$

$\overline{D}$  – замыкание области  $D$

$N(B)$  – множество решений однородного операторного уравнения  $Bx = 0$

$\dim N(B)$  – число линейно независимых решений однородного уравнения  $Bx = 0$

$B^*$  – сопряженный оператор

$N(B^*)$  – множество решений операторного уравнения  $B^*x = 0$

$S(0, r)$  – шар в нормированном пространстве с центром в нуле и радиусом  $r$

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)}$ ,  $|\cdot|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)}$  – норма матрицы размерности  $n \times n$



$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}, |\cdot|_{\mathbb{R}}$  – норма вектора размерности  $n$

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)}$  – норма линейного оператора, действующего из пространства  $X$  в  $X$

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,h]} \rightarrow \mathcal{C}_{[0,h]})}$  – норма линейного оператора, действующего из пространства  $\mathcal{C}_{[0,h]}$  в  $\mathcal{C}_{[0,h]}$

$C_n^m, \binom{n}{m}$  – число сочетаний из  $n$  по  $m$ ,  $(n!/(n-m)!m!)$

$e(t)$  – функция Хевисайда

$\delta(t)$  – функция Дирака

$\text{supp}$  – носитель функции

$\mathcal{D}_{(0,T)}$  – множество бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями на интервале  $(0, T)$

$\mathcal{D}'_{(0,T)}$  – множество линейных непрерывных функционалов  $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{(0,T)} \rightarrow (-\infty, +\infty))$

$\mathcal{D}'_{n(\rho,\rho)}$  – пространство обобщенных функций вида  $c_0\delta(t) + c_1\delta^{(1)}(t) + \dots + c_n\delta^{(n)}(t) + u(t)$

$(D; E^*)$  – множество бесконечно-дифференцируемых финитных функций с носителями в интервале  $(0, \rho)$  и значениями в  $E^*$

$(D'; E)$  – множество линейных непрерывных функционалов, определенных на  $(D; E^*)$  со значениями в  $E$  (пространство обобщенных функций)

# Предметный указатель

$B_K$ -пространство, 109  
АЦП, 234  
АРД, 248  
ЭЭС, 223  
ЭЛТ, 238  
ФРТ, 7  
ИНС Вольтерра, 206  
МНК, 225  
МОВ, 209  
ПЖН, 106  
Преобразование Гильберта – Хуанга, 211  
СЛАУ, 26, 28, 29, 34, 43, 126, 189, 202  
алгебраическая точка ветвления, 63  
алиасинг, 233  
аналого-цифровое преобразование, 233  
анти-алиазинг, 245  
асимптотическое приближение, 17  
быстрое преобразования Фурье, 240  
деконволюция, 7  
дифференциал Фреше, 112  
дифференциальный оператор Эйлера, 64  
длина жордановой цепочки, 106  
эффект звона, 242  
экспоненциальное взвешивание, 227  
фильтр Калмана, 225, 226  
фильтр низких частот, 237  
функция Дирака, 41, 76, 136, 162  
функция рассеяния точки, 7  
главное решение функционального уравнения, 111  
главное решение в смысле Канторовича, 108, 111  
характеристический оператор, 97  
характеристическое уравнение, 16, 17, 20, 77  
интегральная модель Глушкова, 5  
интегральная модель Солоу, 5  
интегральное преобразование Гильберта, 214  
интегральное уравнение Фредгольма II рода, 52, 106  
интегральное уравнение Гаммерштейна, 8  
интегро-функциональное уравнение, 13, 14, 103  
интегро-степенной оператор Ляпунова – Шмидта, 75, 150  
кумулятивная плотность распределения, 241  
кусочно-заданное ядро, 12, 25  
лемма Шмидта, 49  
логарифмо-степенные суммы Фукса – Фробениуса, 64  
мажоранта А. М. Ляпунова, 110  
мажоранта решения, 62  
метод Некрасова – Назарова, 119  
метод Прони, 225  
метод диаграммы Ньютона, 48, 64, 65, 120  
метод гармонического входа, 160  
метод неопределенных коэффициентов, 17, 19, 20  
метод опорных векторов, 207  
метод последовательных приближений, 16  
метод шагов, 35

метод выпуклых мажорант, 83, 113  
межсистемные колебания, 223, 225  
множество  $\mathcal{D}_{(0,T)}$ , 82  
модель типа «черный ящик», 155  
муар, 244  
некорректная задача, 7  
нерегулярная точка оператора, 97  
нормальная жорданова форма матрицы, 64  
обобщенный жорданов набор, 107  
обобщенно-регрессионная сеть, 206  
обобщенное решение, 82  
обратная задача, 7  
однородные разностные уравнения, 17  
оконное преобразование Фурье, 244  
оператор Урысона, 157  
оператор Вольтерра II рода, 81  
операторное уравнение Вольтерра I рода, 91  
парное интегральное уравнение, 179  
переходные характеристики, 155  
полиномиальная регрессия, 223  
полиномиальная регрессионная модель, 7  
порядок сингулярности, 76  
предыстория, 41  
преобразование Фурье, 236  
преобразование Лапласа, 160  
причинный оператор, 152, 153  
принцип сжимающих отображений, 78, 80  
производная Фреше, 51, 111  
пространство обобщенных функций  $\mathcal{D}'_{(0,T)}$ , 82  
разрыв I рода, 5, 21, 24, 42, 44, 46  
разрыв II рода, 214, 242  
разрывная правая часть, 41  
регуляризация Лаврентьева, 7  
регуляризация Тихонова, 52, 186  
регуляризатор Треногина, 107  
регуляризованный МНК, 225  
регулярная точка оператора, 97  
регуляризация Тихонова, 7  
режекторный фильтр, 236  
ряд Лаггера, 157  
ряд Ньютона – Пьюизе, 119  
ряд Вольтерра, 222  
сеть Эльмана, 206  
система Ляпунова – Шмидта, 119  
слабо регулярное уравнение, 12, 41  
текстурные признаки Харалика, 255  
теорема Фреше, 153  
теорема Лебега, 112  
теорема о неявном операторе, 51  
теорема об обратном операторе, 15  
точка ветвления, 79  
точка ветвления решения, 47  
управление с прогнозирующими моделями, МРС, 222  
уравнение Гаммерштейна, 47, 52  
уравнение Вольтерра III рода, 81  
условие Липшица, 109, 139  
ядро Винера, 157  
явление Гиббса, 242

задача Коши, 110, 113  
жорданова цепочка, 72, 107  
жордановы клетки, 71  
особая фредгольмова точка оператора, 98  
blow-up, 79, 83, 108, 118  
Boosting tree, 219  
Data mining, 216  
deconvolution, 7  
EMD, 213  
MAE, 218  
MAPE, 218  
MISO dynamical systems, 223  
PDVNS, 256  
Random forest, 219  
Random tree, 219  
RLS, 225  
RMSE, 218

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	<b>3</b>
<b>Часть I      Интегральные динамические модели:                   элементы анализа</b> .....	<b>11</b>
Глава 1    Линейные модели с кусочно-заданными ядрами .....	11
1.1    Уравнения Вольтерра I рода (скалярный случай).....	12
1.2    Системы уравнений Вольтерра I рода .....	24
1.3    Обобщенные решения уравнений Вольтерра I рода .....	36
1.4    Уравнения Вольтерра I рода с разрывной правой частью .....	41
Глава 2    Нелинейные динамические модели .....	47
2.1    Нелинейные уравнения Гаммерштейна.....	47
2.2    Существование и разрушение уравнений Вольтерра II рода....	53
2.3    О ветвлении решений нелинейных дифференциальных уравнений.....	63
2.4    Обобщенные решения в нелинейных моделях Вольтерра I рода.....	75
Глава 3    Операторные динамические модели .....	90
3.1    Линейные операторные уравнения Вольтерра I рода с кусочно заданным ядром.....	90
3.2    Нелинейные модели Вольтерра: существование и разрушение решений.....	108
3.3    Нелинейные дифференциально-операторные уравнения с вырождением.....	119
3.4    Операторные уравнения Вольтерра II рода в нерегулярном случае.....	128
3.5    Последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром в нерегулярном случае...	140
<b>Часть II      Интегральные модели и преобразования                   в моделировании нелинейной динамики                   и в обработке сигналов</b> .....	<b>148</b>
Глава 4    Идентификация полиномиальных моделей Вольтерра.....	149
4.1    Моделирование нелинейных динамических процессов в частотной и временной областях.....	155
4.2    Идентификация моделей Вольтерра во временной области.....	167

Глава 5	Интегральные модели в обработке сигналов и в машинном обучении .....	204
5.1	Интегральные модели в анализе и прогнозировании временных рядов.....	205
5.2	О подавлении квазипериодического шума (муара).....	232
5.3	Интегральные признаки в задачах машинного зрения.....	248
	<b>Библиографический список .....</b>	<b>261</b>
	<b>Основные обозначения .....</b>	<b>267</b>
	<b>Предметный указатель .....</b>	<b>289</b>

Научное издание

Сидоров Денис Николаевич

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЕЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

**ISBN 978-5-9624-0813-2**

*Печатается в авторской редакции*

Компьютерный набор и верстка автора  
Макет подготовлены в системе LaTeX

Темплан 2013 г. Поз. 94

Подписано к печати 18.11.2013. Формат 60×90 1/16.  
Уч.-изд. л. 14,3. Усл. печ. л. 18,2. Тираж 100 экз. Заказ 118

Издательство ИГУ  
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36